# Прикладной статистический анализ данных

## Введение: распределения, статистики, оценки, гипотезы

Андрей Грабовой

# Зачем нужен этот курс

- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- границы применимости методов
- статистическое мышление

# Зачем нужен этот курс

- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- **границы применимости методов**

  (Marriott, 1974): *If the results disagree with informed opinion, do not admit a simple logical interpretation, and do not show up clearly in a graphical presentation, they are probably wrong. There is no magic about numerical methods, and many ways in which they can break down. They are a valuable aid to the interpretation of data, not sausage machines automatically transforming bodies of numbers into packets of scientific fact.*
- статистическое мышление

# Зачем нужен этот курс

- специфические статистические методы для конкретных постановок задач
- границы применимости методов

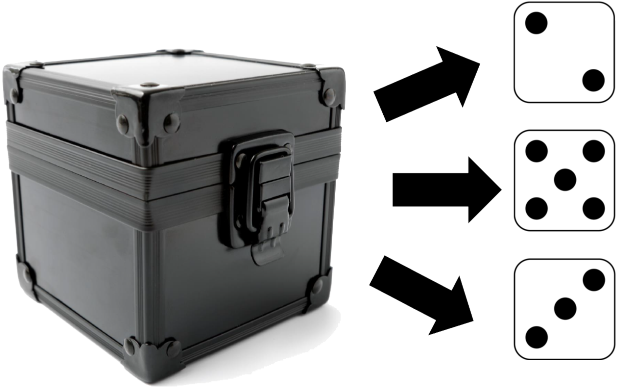
  (Marriott, 1974): *If the results disagree with informed opinion, do not admit a simple logical interpretation, and do not show up clearly in a graphical presentation, they are probably wrong. There is no magic about numerical methods, and many ways in which they can break down. They are a valuable aid to the interpretation of data, not sausage machines automatically transforming bodies of numbers into packets of scientific fact.*
- **статистическое мышление**

  (Begg et al., 1992): *Понимание механизмов работы статистики позволяет находить менее стереотипные и более осознанные решения повседневных задач.*

# Случайность

# Случайность

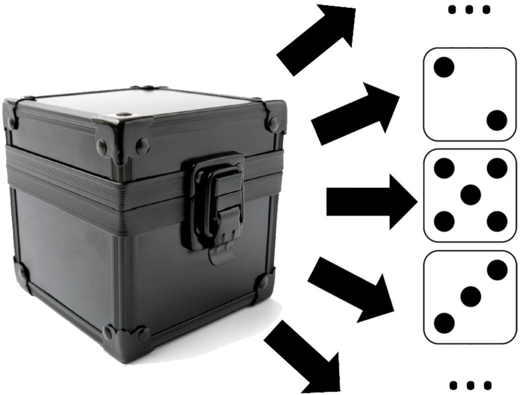
# Случайность



# Случайность

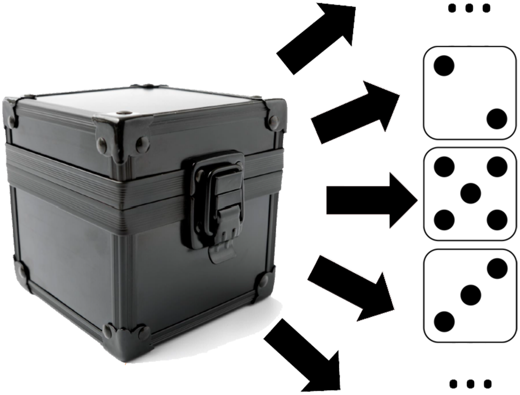
# Случайность

# Изучение случайности



# Изучение случайности

**Вероятность события** — доля испытаний, завершившихся наступлением события, в бесконечном эксперименте.



# Изучение случайности

# Изучение случайности

**Закон больших чисел**: на больших выборках частота события хорошо приближает его вероятность.

# Описание случайных величин

Дискретная случайная величина $X$ принимает счётное множество значений $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, \sum\limits_i p_1 = 1$.

$f_X(a_i) = \mathbf{P}(X = a_i) = p_i$ — **функция вероятности**.

Непрерывная случайная величина задаётся с помощью **функции распределения**:

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \le x)$$

или **плотности распределения**:

$$f_X(x) : \int\limits_a^b f_X(x)\, dx = \mathbf{P}(a \le X \le b)\,.$$

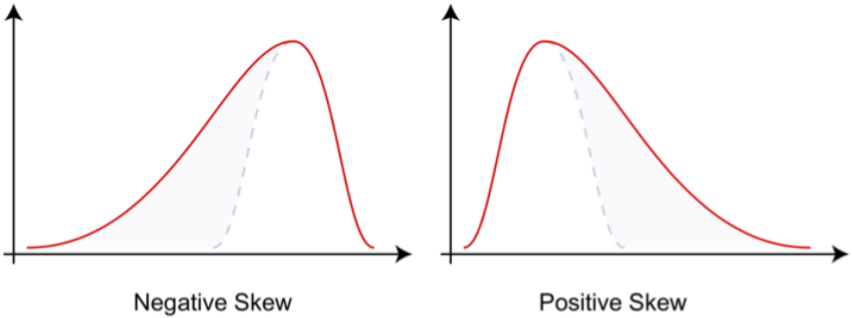
# Характеристики распределений

- **матожидание** — среднее значение $X$:
$$\mathbb{E}X = \int x\,dF(x)$$
- **дисперсия** — мера разброса $X$:
$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right)$$
- **квантиль** порядка $\alpha \in (0,1)$:
$$X_\alpha\colon \quad \mathbf{P}(X \le X_\alpha) \ge \alpha, \;\; \mathbf{P}(X \ge X_\alpha) \ge 1-\alpha$$
эквивалентное определение:
$$X_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x\colon F(x) \ge \alpha\}$$
- **медиана** — квантиль порядка $0.5$, центральное значение распределения:
$$\operatorname{med} X\colon \quad \mathbf{P}(X \le \operatorname{med} X) \ge 0.5, \;\; \mathbf{P}(X \ge \operatorname{med} X) \ge 0.5$$
- **интерквартильный размах**:
$$IQR = X_{0.75} - X_{0.25}$$
- **мода** — точка максимума функции вероятности или плотности:
$$\operatorname{mode} X = \operatorname*{argmax}_x f(x)$$

# Характеристики распределений

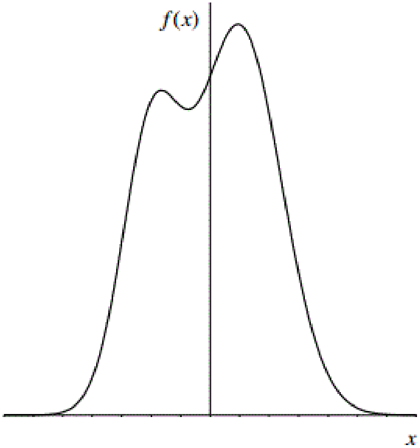
- **коэффициент ассиметрии** (skewness):

$$\gamma_1 = \mathbb{E}\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{\mathbb{D}X}}\right)^3$$



## Характеристики распределений

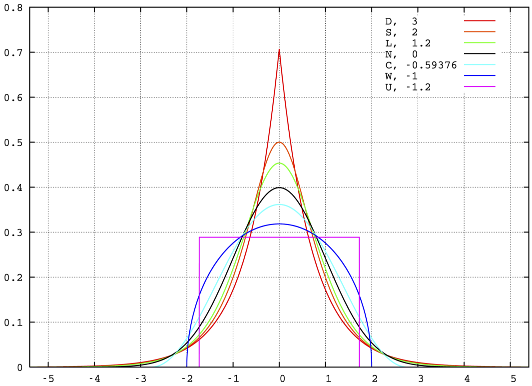
$\gamma_1 = 0$ — необходимое, но не достаточное условие симметричности:



# Характеристики распределений

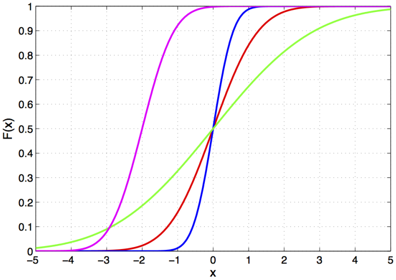
- **коэффициент эксцесса** (excess, без вычитания тройки — kurtosis):

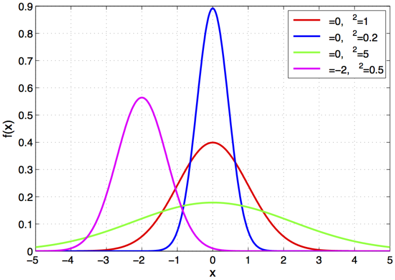
$$\gamma_2 = \frac{\mathbb{E}\left(X - \mathbb{E}X\right)^4}{\left(\mathbb{D}X\right)^2} - 3$$



# Нормальное распределение

$$X \in \mathbb{R} \sim N\left(\mu, \sigma^2\right),\ \sigma^2 > 0$$




$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

# Нормальное распределение

- предельное распределение суммы слабо взаимозависимых сл. в.
- $\mathbb{E}X = \operatorname{med} X = \operatorname{mode} X = \mu$, $\mathbb{D}X = \sigma^2$, все моменты более высокого порядка нулевые
- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $\quad X_i \sim N\left(\mu_i, \sigma_i^2\right)$, тогда $\forall a_1, \ldots, a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$$

- центральная предельная теорема: пусть $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. с $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X < \infty$, тогда

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \sim\approx N\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right)$$

- пример: погрешность измерения

# Распределение хи-квадрат

- пусть $X_1, \dots, X_k$ — i.i.d., $\quad X_i \sim N(0,1)$, тогда

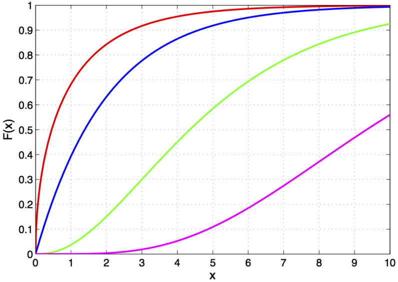
$$\sum_{i=1}^{k} X_i^2 \sim \chi_k^2$$

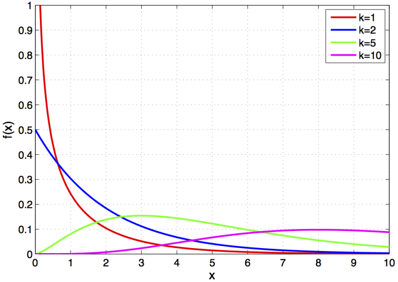
- пример: нормированная выборочная дисперсия:

$$(n-1)\frac{S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

# Распределение хи-квадрат

$$X \in \mathbb{R}_+ \sim \chi^2_k,\ k \in \mathbb{N}$$




$$F(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}x^{\frac{k}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$$

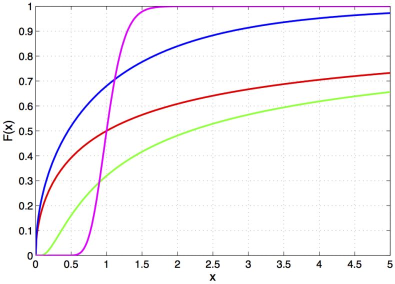
$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ — гамма-функция
$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t}t^{a-1}dt$ — нижняя неполная гамма-функция

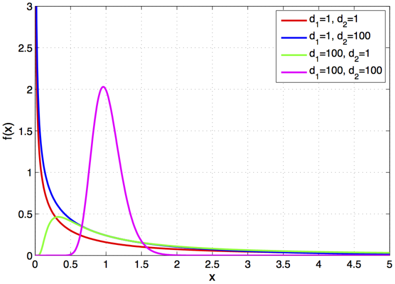
# Распределение Фишера

- пусть $X_1 \sim \chi^2_{d_1}, \;\; X_2 \sim \chi^2_{d_2}, \quad X_1$ и $X_2$ независимы, тогда
$$\frac{X_1/d_1}{X_2/d_2} \sim F(d_1, d_2)$$
- если $X \sim F(d_1, d_2)$, то
$$Y = \lim_{d_2 \to \infty} d_1 X \sim \chi^2_{d_1}$$
- $F(x, d_1, d_2) = F(1/x, d_2, d_1)$
- возникает в дисперсионном и регрессионном анализе

# Распределение Фишера

$$X \in \mathbb{R}_+ \sim F\left(d_1, d_2\right), \; d_1, d_2 > 0$$




$$F\left(x\right) = I_{\frac{d_1 x}{d_1 x + d_2}}\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right) \qquad f\left(x\right) = \sqrt{\frac{\left(d_1 x\right)^{d_1} d_2^{d_2}}{\left(d_1 x + d_2\right)^{d_1 + d_2}}} \Bigg/ x B\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)$$

$B\left(a, b\right) = \int_0^1 t^{a-1}\left(1 - t\right)^{b-1} dt$ — бета-функция

$I_x\left(a, b\right) = \frac{B(x; a, b)}{B(a, b)}$ — регуляризованная неполная бета-функция

$B\left(x; a, b\right) = \int_0^x t^{a-1}\left(1 - t\right)^{b-1} dt$ — неполная бета-функция

# Распределение Стьюдента

- $\mathbb{E}X = 0$ при $\nu > 1$, $\operatorname{med} X = \operatorname{mode} X = 0$ всегда
- пусть $Z \sim N(0,1)$ и $V \sim \chi^2_\nu$ независимы, тогда

$$T = \frac{Z}{\sqrt{V/\nu}} \sim St(\nu)$$

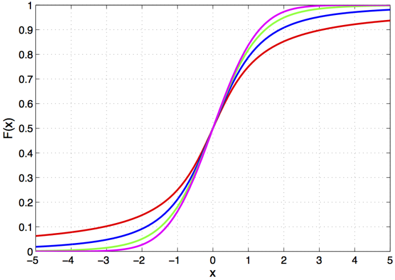
- если $X \sim St(\nu)$, то

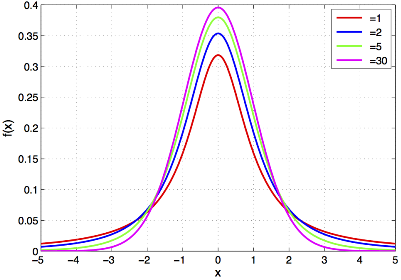
$$Y = \lim_{\nu \to \infty} X \sim N(0,1)$$

- возникает при оценке среднего значения сл. в. с неизвестной дисперсией

# Распределение Стьюдента

$$X \in \mathbb{R} \sim St\left(\nu\right),\ \nu > 0$$



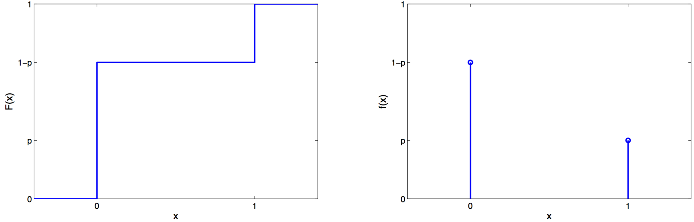




$$F\left(x\right) = \frac{1}{2} + x\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)$$

$$f\left(x\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}$$

# Распределение Бернулли

$$X \in \{0, 1\} \sim Ber\,(p)\,, \quad p \in (0, 1)$$



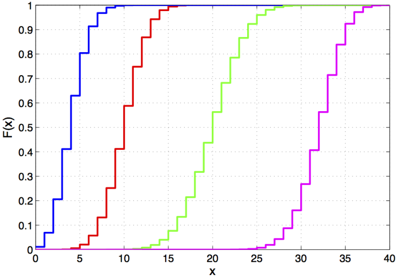

$$F\,(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

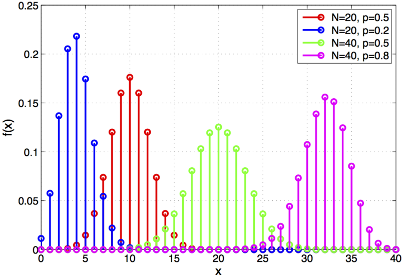
$$f\,(x) = \begin{cases} 1 - p, & x = 0, \\ p, & x = 1. \end{cases}$$

- пример: результат подбрасывания монеты

# Биномиальное распределение

$$X \in \{0, \ldots, N\} \sim Bin\,(N, p)\,,\ N \in \mathbb{N},\ \ p \in [0,1]$$




$$F\,(x) = I_{1-p}\,(N - x, 1 + x)$$

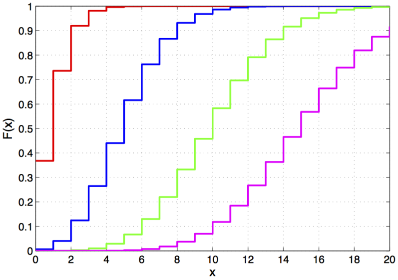
$$f\,(x) = C_N^x p^x\,(1-p)^{N-x}$$

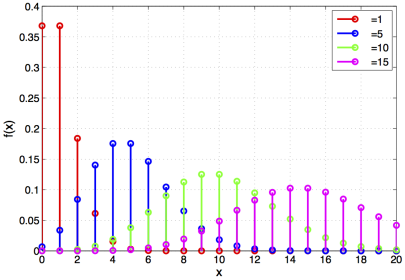
# Биномиальное распределение

- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $X_i \sim Ber(p)$, тогда
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bin(n, p).$$
- $Bin\left(1, p\right) = Ber\left(p\right)$
- если $N > 20$ и $p$ не слишком близко к нулю или единице, то для $X \sim Bin\left(N, p\right)$ справедлива нормальная аппроксимация:
$$F_X\left(x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - Np}{\sqrt{Np\left(1-p\right)}}\right)$$
- пример: число попаданий из $N$ бросков в баскетбольное кольцо

# Распределение Пуассона

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\} \sim Pois\,(\lambda)\,,\ \lambda > 0$$




$$F\,(x) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\lambda^i}{i!}$$

$$f\,(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

# Распределение Пуассона

- распределение числа независимых событий в фиксированном временном или пространственном интервале
- $\mathbb{E}X = \mathbb{D}X = \lambda$
- пусть $X_1, \ldots, X_n$ независимы, $\quad X_i \sim Pois\left(\lambda_i\right)$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim Pois\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

- если $X \sim Pois\left(\lambda\right)$, $Y = \sqrt{X}$, то при больших $\lambda$

$$F_Y\left(x\right) \approx \Phi\left(\frac{x - \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

- $Bin(n, p) \to_{n \to \infty} Pois(\lambda)$ при постоянном $np$
- пример: количество изюма в булочке с изюмом

# Выборка

**Генеральная совокупность** — множество объектов, свойства которых подлежат изучению в рассматриваемой задаче.

**Выборка** — конечное множество объектов, отобранных из генеральной совокупности для проведения измерений.

$$X^n = (X_1, \ldots, X_n)\,.$$

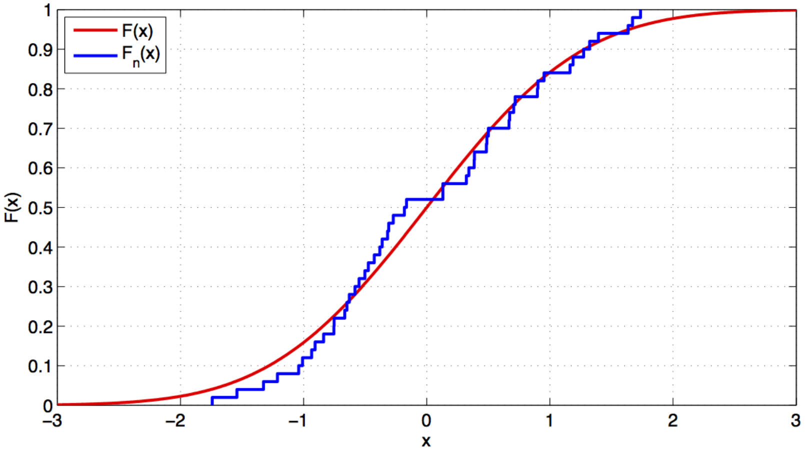
$n$ — **объём выборки**.

$X^n$ — **простая выборка**, если $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределённые случайные величины (i.i.d.).

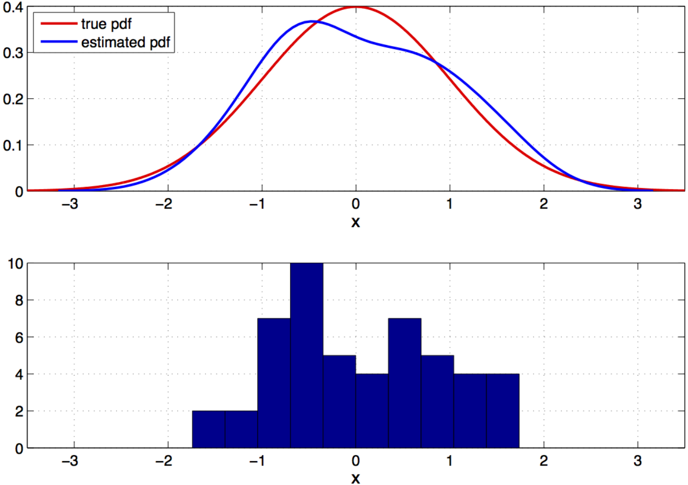
Основная задача статистики — описание $F_X(x)$ по реализации выборки.

# Функция распределения

$F_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[X_i \leq x]$ — **эмпирическая функция распределения.**



# Плотность распределения



## Статистика

**Статистика** $T(X^n)$ — любая измеримая функция выборки.

- выборочное среднее:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

- выборочная дисперсия:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$$

**вариационный ряд**:

$$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$$

**ранг** элемента выборки $X_i$:

$$\operatorname{rank}\left(X_i\right) = r \colon X_i = X_{(r)}$$

- $k$-я порядковая статистика: $X_{(k)}$
- выборочный $\alpha$-квантиль: $X_{([n\alpha])}$
- выборочная медиана:

$$m = \begin{cases} X_{(k+1)}, & \text{если } n = 2k+1, \\ \frac{X_{(k)}+X_{(k+1)}}{2}, & \text{если } n = 2k. \end{cases}$$

# Статистика

- выборочный интерквартильный размах:

$$IQR_n = X_{([0.75n])} - X_{([0.25n])}$$

- выборочный коэффициент ассиметрии:

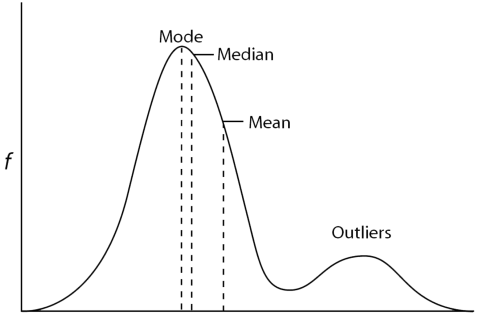
$$g_1 = \frac{\sqrt{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{3/2}}$$

- выборочный коэффициент эксцесса:

$$g_2 = \frac{n\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^4}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2\right)^{2}} - 3$$

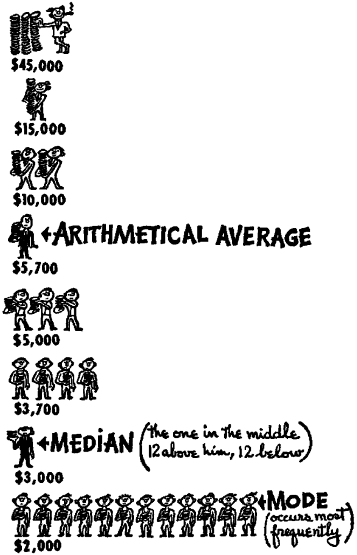
# Оценки центральной тенденции

Выборочное среднее — среднее арифметическое по выборке.
Выборочная медиана — центральный элемент вариационного ряда.
Выборочная мода — самое распространённое значение в выборке.

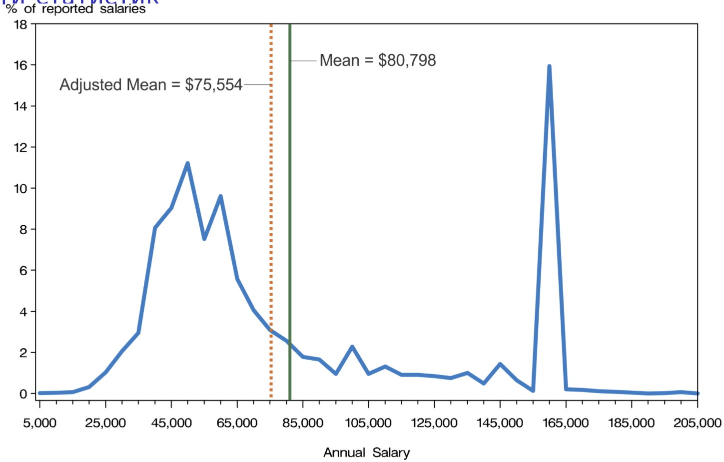


# Оценки центральной тенденции

(Huff, 1954):



# Об ограниченности статистик




© NALP 2013
www.nalp.org

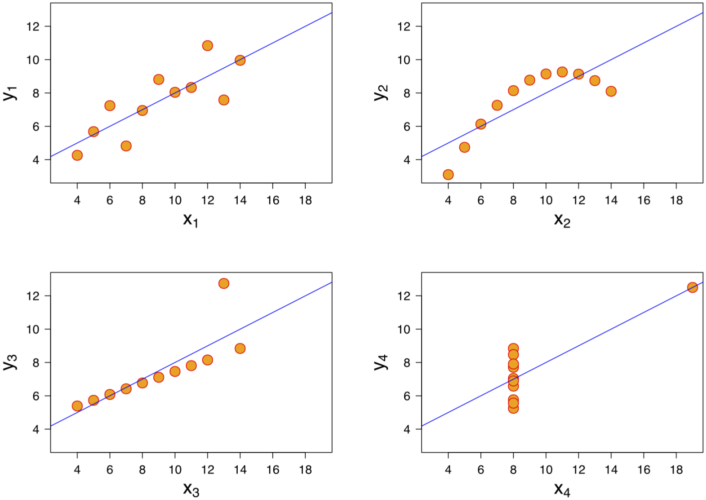
Уровень стартовой заработной платы выпускников юридических факультетов, США, 2012, данные NALP.

# Об ограниченности статистик

Квартет Энскомба (Anscombe, 1973):

| № | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $\bar{x}$ | 9 | 9 | 9 | 9 |
| $S_x$ | 11 | 11 | 11 | 11 |
| $\bar{y}$ | 7.5 | 7.5 | 7.5 | 7.5 |
| $S_y$ | 4.127 | 4.127 | 4.128 | 4.128 |
| $r_{xy}$ | 0.816 | 0.816 | 0.816 | 0.816 |

# Об ограниченности статистик



# Точечные оценки

Пусть распределение генеральной совокупности параметрическое:

$$F(x) = F(x, \theta).$$

Статистика $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}\left(X^n\right)$ — точечная оценка параметра $\theta$.
Какая оценка лучше?

**Состоятельность:** $\operatorname*{plim}\limits_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta$.
**Несмещённость:** $\mathbb{E}\hat{\theta}_n = \theta$.
**Асимптотическая несмещённость:** $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}\hat{\theta}_n = \theta$.
**Оптимальность:** $\mathbb{D}\hat{\theta}_n = \min\limits_{\hat{\theta}\,:\ \mathbb{E}\hat{\theta}=\theta} \mathbb{D}\hat{\theta}$.
**Робастность:** устойчивость $\hat{\theta}_n$ относительно

- отклонений истинного распределения $X$ от модельного семейства
- выбросов, содержащихся в выборке

# Метод максимума правдоподобия

Популярный метод получения точечных оценок:

$$X \sim f(x, \theta),$$
$$X^n = (X_1, \ldots, X_n),$$
$$L(X^n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(X_i, \theta),$$
$$\hat{\theta}_{MLE} \equiv \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} L(X^n, \theta).$$

Удобно прологарифмировать:

$$\log L(X^n, \theta) = \sum_{i=1}^{n} f(X_i, \theta),$$
$$\hat{\theta}_{MLE} \equiv \underset{\theta}{\operatorname{argmax}} \log L(X^n, \theta).$$

# Производные функции правдоподобия

Score function:

$$S(\theta) \equiv \frac{\partial}{\partial \theta} \log L(\theta)$$

ОМП — решение score equation:

$$S(\theta) = 0$$

Информация Фишера:

$$I(\theta) \equiv -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L(\theta)$$

Дисперсия ОМП:

$$\mathbb{D}\hat{\theta}_{MLE} \approx I^{-1}\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$$

# Свойства ОМП

- состоятельность:
$$\underset{n\to\infty}{\text{plim}}\, \hat{\theta}_{MLE} = \theta$$
- асимптотическая нормальность: при $n \to \infty$
$$\hat{\theta}_{MLE} \sim N\left(\theta, I^{-1}(\theta)\right)$$
- эффективность: ОМП имеют наименьшую дисперсию среди всех состоятельных оценок
- инвариантность: $g\left(\hat{\theta}_{MLE}\right)$ — ОМП-оценка для $g\left(\theta\right)$

# Интервальные оценки

Доверительный интервал:

$$\mathbf{P}(\theta \in [C_L, C_U]) \geq 1 - \alpha,$$

$1 - \alpha$ — уровень доверия,
$C_L$, $C_U$ — нижний и верхний доверительные пределы.

**Неверная интерпретация**: неизвестный параметр лежит в пределах построенного доверительного интервала с вероятностью $1 - \alpha$.

**Верная интерпретация:** при бесконечном повторении процедуры построения доверительного интервала на аналогичных выборках в $100(1-\alpha)$% случаев он будет содержать истинное значение $\theta$.

# Для нормального распределения

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad X^n = (X_1, \ldots, X_n),$$

$\bar{X}_n$ — оценка $\mathbb{E}X = \mu$,

$\bar{X}_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \Rightarrow$

$$\mathbf{P}\left(\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{X}_n \leq \mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \Rightarrow$$

доверительный интервал для $\mu$:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha,$$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

# Для ненормальных распределений

ЦПТ: если $X^n$ — выборка из $F(x)$, $F(x)$ не слишком скошено и $n > 30$, то

$$\bar{X}_n \sim\approx N\left(\mathbb{E}X, \frac{\mathbb{D}X}{n}\right) \Rightarrow$$

доверительный интервал для $\mathbb{E}X$:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}} \le \mathbb{E}X \le \bar{X}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mathbb{D}X}{n}}\right) \approx 1-\alpha.$$

Если дисперсия неизвестна:

$$\mathbf{P}\left(\bar{X}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}} \le \mathbb{E}X \le \bar{X}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) \approx 1-\alpha,$$

$t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенью свободы.

# Квантили

Непараметрический доверительный интервал для медианы непрерывного распределения.

$$X^n = (X_1, \dots, X_n), \quad X \sim F(x) \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}\left(\operatorname{med} X \in \left[X_{(r)}, X_{(n-r+1)}\right]\right) = \frac{1}{2^n} \sum_{i=r}^{n-r+1} C_n^i.$$

При $n > 10$ применима нормальная аппроксимация:

$$\mathbf{P}\left(\operatorname{med} X \in \left[X_{\left(\left\lfloor \frac{n-\sqrt{n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} \right\rfloor\right)}, X_{\left(\left\lceil \frac{n+\sqrt{n}z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{2} \right\rceil\right)}\right]\right) \approx 1-\alpha.$$

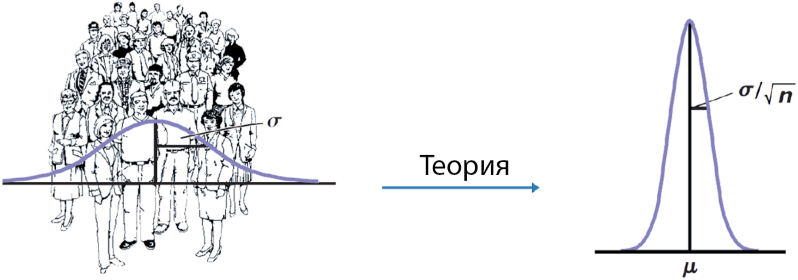
Аналогично строится непараметрический доверительный интервал для любого квантиля $X_\alpha, \alpha \in (0,1)$:

$$\mathbf{P}\left(X_\alpha \in \left[X_{(l)}, X_{(u)}\right]\right) = \sum_{i=l}^{u} C_n^i \alpha^i (1-\alpha)^{n-i}.$$

# Построение доверительных интервалов

Как можно оценить $F_{\hat{\theta}_n}(x)$ — выборочное распределение статистики $\hat{\theta}_n$? (Hesterberg, 2005):

- параметрический метод:



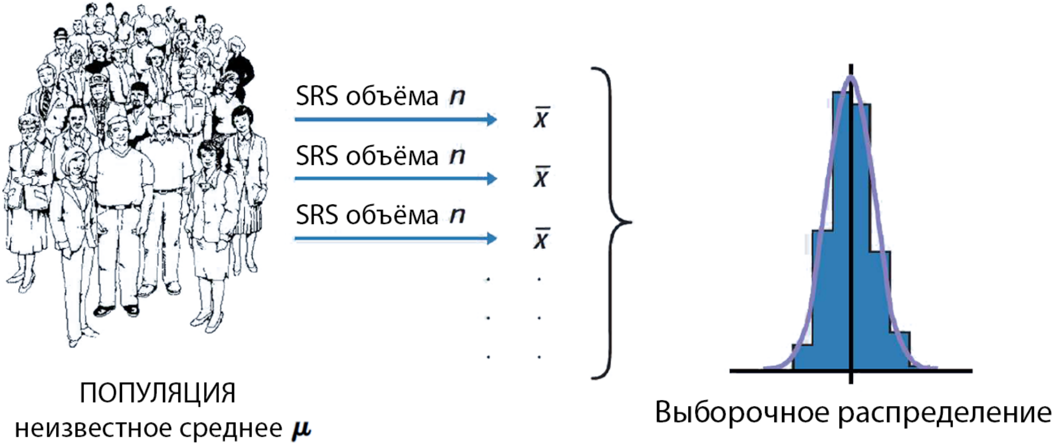

НОРМАЛЬНАЯ ПОПУЛЯЦИЯ
неизвестное среднее **μ**

Выборочное распределение

Сделать предположение, что $X$ распределена по закону $F_X(x)$, при выполнении которого закон распределения $\hat{\theta}_n$ известен.

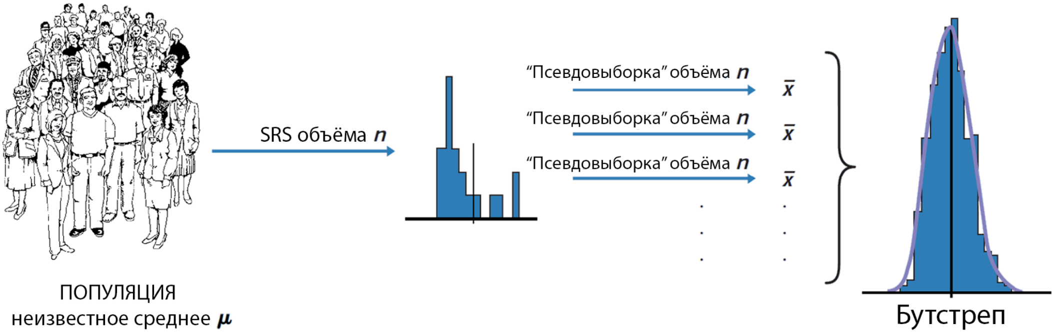
# Построение доверительных интервалов

- наивный метод:




Извлечь из генеральной совокупности $N$ выборок объёма $n$ и оценить выборочное распределение $\hat{\theta}_n$ эмпирическим.

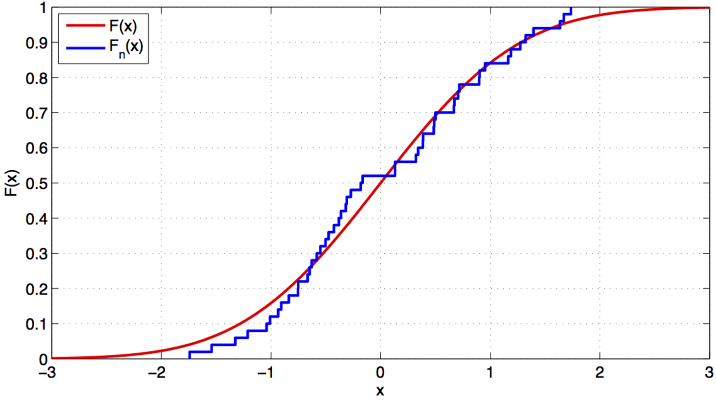
- бутстреп:




Сгенерировать $N$ «псевдовыборок» объёма $n$ и оценить выборочное распределение $\hat{\theta}_n$ «псевдоэмпирическим».

## Бутстреп

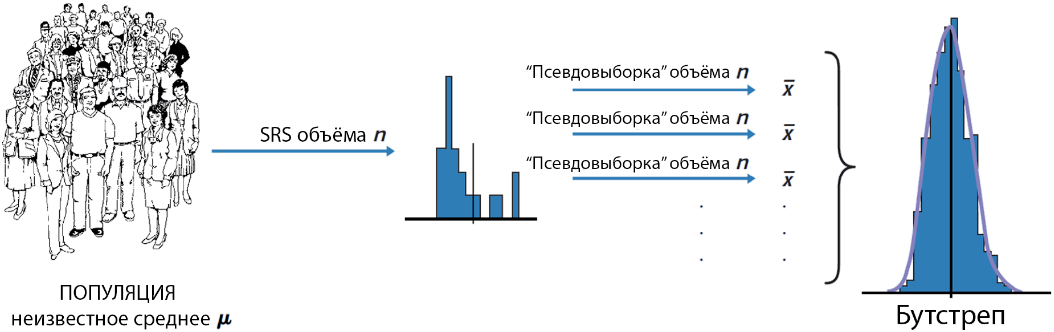
Извлечение выборок из генеральной совокупности — сэмплирование из неизвестного распределения $F_X(x)$.
Лучшая оценка $F_X(x)$, которая у нас есть — $F_{X^n}(x)$:




Сэмплировать из неё — это то же самое, что делать из $X^n$ выборки с возвращением объёма $n$.

## Бутстреп-распределение

$X^{1*}, \ldots, X^{N*}$ — бутстреп-псевдовыборки из $X^n$ объёма $n$,
$\hat{\theta}_n^{1*}, \ldots, \hat{\theta}_n^{N*}$ — значения статистики на них,
$F_{\hat{\theta}_n}^{boot}(x)$ — бутстреп-распределение $\hat{\theta}_n$ — эмпирическая функция распределения, построенная по значениям статистики на псевдовыборках.




По $F_{\hat{\theta}_n}^{boot}(x)$ можно строить доверительные интервалы для $\theta$!

# Доверительные интервалы

- Возьмём выборочные квантили бутстреп-распределения:

$$\mathbf{P}\left(\left(F_{\hat{\theta}_n}^{boot}\right)^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \theta \leq \left(F_{\hat{\theta}_n}^{boot}\right)^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \approx 1-\alpha.$$

  Это базовый бутстреп.

- Посчитаем $S_n^{boot}$ — выборочное стандартное отклонение $\hat{\theta}_n$ на псевдовыборках;

$$\mathbf{P}\left(\hat{\theta}_n - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n^{boot} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} S_n^{boot}\right) \approx 1-\alpha.$$

  Это стьюдентизированный бутстреп.

# Доверительные интервалы

- Слегка изменим наивный бутстреп:

$$\mathbf{P}\left(\left(F^{boot}_{\hat{\theta}_n}\right)^{-1}(\alpha_1) \le \theta \le \left(F^{boot}_{\hat{\theta}_n}\right)^{-1}(\alpha_2)\right) \approx 1-\alpha,$$

$$\alpha_1 = \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{z}_0 + z_{\frac{\alpha}{2}}\right)}\right),$$

$$\alpha_2 = \Phi\left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{1-\hat{a}\left(\hat{z}_0 + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)}\right),$$

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[\hat{\theta}_n^{i*} < \hat{\theta}_n\right]\right),$$

$\hat{a}$ не поместится на этом слайде.

Это несмещённый ускоренный бутстреп.

# Свойства бутстрепа

- асимптотическая состоятельность
- простота использования даже для самых сложных статистик
- плохо работает для статистик, значение которых зависит от небольшого числа элементов выборки

# Проверка гипотез

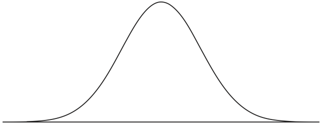
выборка: $X^n = (X_1, \dots, X_n)\,,\ X \sim \mathbf{P} \in \Omega$

нулевая гипотеза: $H_0\colon\ \mathbf{P} \in \omega,\ \ \omega \in \Omega$

альтернатива: $H_1\colon\ \mathbf{P} \notin \omega$

статистика: $T(X^n)\,,\ \ T(X^n) \sim F(x)$ при $\mathbf{P} \in \omega$

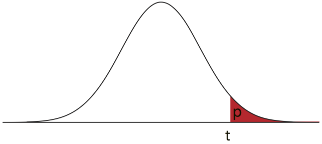
$T(X^n) \nsim F(x)$ при $\mathbf{P} \notin \omega$



реализация выборки: $x^n = (x_1, \dots, x_n)$

реализация статистики: $t = T(x^n)$

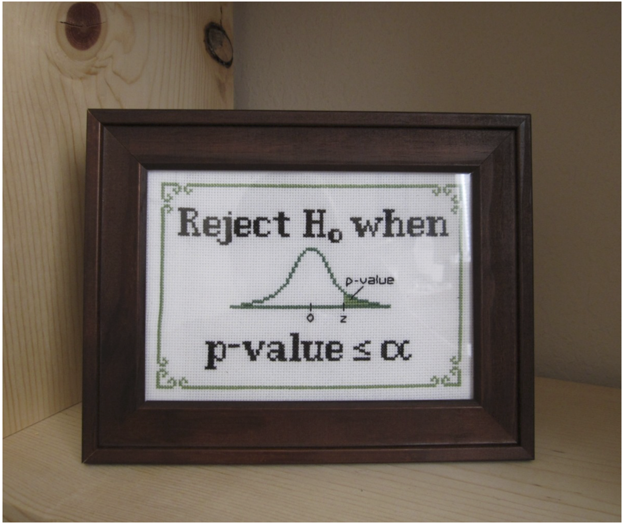
достигаемый уровень значимости: $p(x^n)$ — вероятность при $H_0$ получить $T(X^n) = t$ или ещё более экстремальное




$$p(x^n) = \mathbf{P}(T \geq t \,|\, H_0)$$

Гипотеза отвергается при $p(x^n) \leq \alpha$, $\alpha$ — уровень значимости

# Проверка гипотез



# Достигаемый уровень значимости

$$p = \mathbf{P}(T \geq t \,|\, H_0\,) \neq \mathbf{P}(H_0)$$

**Пример:** утверждается, что осьминог предсказывает результаты матчей с участием сборной Германии на чемпионате мира по футболу 2010 года, выбирая кормушку с флагом страны-победителя. По результатам $13$ испытаний ему удаётся верно угадать результаты $11$ матчей. Применяя подходящий статистический критерий, мы получаем $p \approx 0.0112$.

$0.0112$ — не вероятность того, что осьминог выбирает кормушку наугад! Эта вероятность равна единице.

# Ошибки I и II рода

| | $H_0$ верна | $H_0$ неверна |
|---|---|---|
| $H_0$ принимается | $H_0$ верно принята | Ошибка второго рода (False negative) |
| $H_0$ отвергается | Ошибка первого рода (False positive) | $H_0$ верно отвергнута |

**Type I error** (false positive) | **Type II error** (false negative)

# Ошибки I и II рода

Задача проверки гипотез несимметрична относительно пары $(H_0, H_1)$: вероятность ошибки первого рода ограничивается сверху величиной $\alpha$, а второго рода — минимизируется путём выбора критерия.

**Корректный** критерий: $\mathbf{P}(p\,(T) \leq \alpha\,|H_0\,) \leq \alpha \forall\, \mathbf{P} \in \Omega$.
**Мощность**: $\mathrm{pow} = \mathbf{P}(p\,(T) \leq \alpha\,|H_1\,)$.
**Состоятельный** критерий: $\mathrm{pow} \to 1$ для всех альтернатив $H_1$ при $n \to \infty$.
$T_1$ — **равномерно наиболее мощный** критерий, если $\forall T_2$

$$\mathbf{P}(p\,(T_1) \leq \alpha\,|H_1\,) \geq \mathbf{P}(p\,(T_2) \leq \alpha\,|H_1\,) \quad \forall H_1 \neq H_0,$$
$$\mathbf{P}(p\,(T_1) \leq \alpha\,|H_0\,) = \mathbf{P}(p\,(T_2) \leq \alpha\,|H_0\,)\,,$$

причём хотя бы для одной $H_1$ неравенство строгое.

# Интерпретация результата

Если величина $p$ достаточно мала, то данные свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.
Если величина $p$ недостаточно мала, то данные не свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.

При помощи инструмента проверки гипотез нельзя доказать справедливость нулевой гипотезы!
Absence of evidence $\not\Rightarrow$ evidence of absence.

# Статистическая и практическая значимость

Вероятность отвергнуть нулевую гипотезу зависит не только от того, насколько она отличается от истины, но и от размера выборки.
По мере увеличения $n$ нулевая гипотеза может сначала приниматься, но потом выявятся более тонкие несоответствия выборки гипотезе $H_0$, и она будет отвергнута.

При любой проверке гипотез нужно оценивать **размер эффекта** — степень отличия нулевой гипотезы отличается от истины, и оценивать его практическую значимость.

# Статистическая и практическая значимость

- (Lee et al, 2010): за три года женщины, упражнявшиеся не меньше часа в день, набрали значимо меньше веса, чем женщины, упражнявшиеся меньше 20 минут в день ($p < 0.001$). Разница в набранном весе составила 150 г. Практическая значимость такого эффекта сомнительна. Подробности: `http://youtu.be/oqDZO-mfN4Q`.
- (Ellis, 2010, гл. 2): в 2002 году клинические испытания гормонального препарата Премарин, облегчающего симптомы менопаузы, были досрочно прерваны. Было обнаружено, что его приём ведёт к значимому увеличению риска развития рака груди на 0.08%, риска инсульта на 0.08% и инфаркта на 0.07%. Формально эффект крайне мал, но с учётом численности населения он превращается в тысячи дополнительных смертей.
- (Kirk, 1996): если при испытании гипотетического лекарства, позволяющего замедлить прогресс ослабления интеллекта больных Альцгеймером, оказывается, что разница в IQ контрольной и тестовой групп составляет 13 пунктов, возможно, изучение лекарства стоит продолжить, даже если эта разница статистически незначима.

## Другие особенности

- Выбранная статистика может отражать не всю информацию, содержащуюся в выборке. Пример:
  $$H_0\colon X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), \quad H_1\colon H_0 \text{ неверна};$$
  $$T\left(X^n\right) = g_1.$$
  Все симметричные распределения будут признаны нормальными!
- Гипотезы вида $H_0\colon \theta = \theta_0$ можно проверять при помощи доверительных интервалов для $\theta$:
  - если $\theta_0$ не попадает в $100\,(1-\alpha)\%$ доверительный интервал для $\theta$, то $H_0$ отвергается на уровне значимости $\alpha$;
  - p-value — максимальное $\alpha$, при котором $\theta_0$ попадает в соответствующий доверительный интервал.

# Shaken, not stirred

Джеймс Бонд говорит, что предпочитает мартини взболтанным, но не смешанным. Проведём слепой тест: $n$ раз предложим ему пару напитков и выясним, какой из двух он предпочитает.

Выборка: бинарный вектор длины $n$, $1$ — Джеймс Бонд предпочёт взболтанный, $0$ — смешанный.

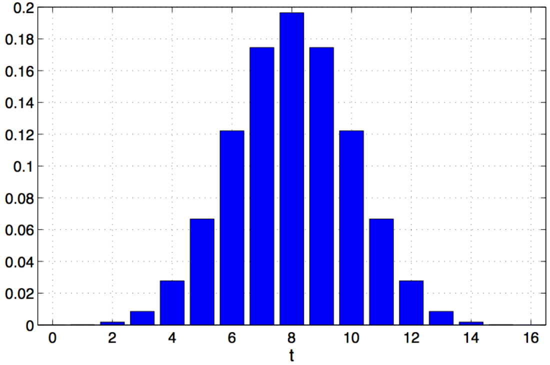
Нулевая гипотеза: Джеймс Бонд не различает два вида мартини, т. е., выбирает наугад.

Статистика $T$ — число единиц в выборке.

# Нулевое распределение

Если нулевая гипотеза справедлива и Джеймс Бонд не различает два вида мартини, то равновероятны все выборки длины $n$ из нулей и единиц.

Пусть $n = 16$, тогда существует $2^{16} = 65536$ равновероятных варианта. Статистика $T$ принимает значения от $0$ до $16$:

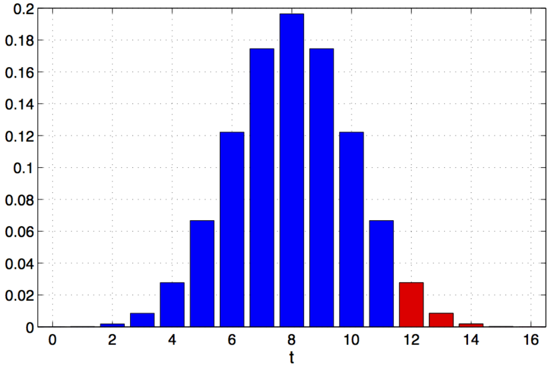


## Односторонняя альтернатива

$H_1:$ Джеймс Бонд предпочитает взболтанный мартини.

При справедливости такой альтернативы более вероятны большие значения $T$ (т.е., большие $T$ свидетельствуют против $H_0$ в пользу $H_1$).

Вероятность того, что Джеймс Бонд предпочтёт взболтанный мартини в $12$ или более случаях из $16$ при справедливости $H_0$, равна $\frac{2517}{65536} \approx 0.0384$.



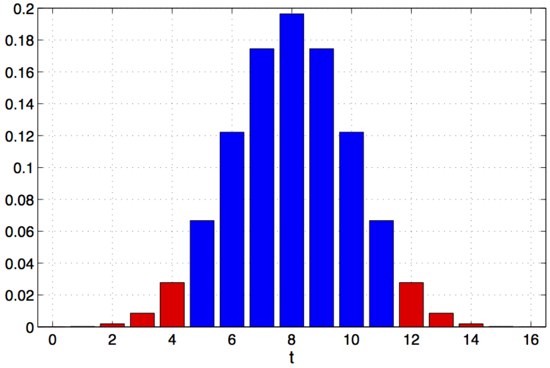

$0.0384$ — достигаемый уровень значимости при реализации $t = 12$.

# Двусторонняя альтернатива

$H_1$: Джеймс Бонд предпочитает какой-то определённый вид мартини.

При справедливости такой альтернативы и большие, и маленькие значения $T$ свидетельствуют против $H_0$ в пользу $H_1$).

Вероятность того, что Джеймс Бонд предпочтёт взболтанный мартини в $\geq 12$ случаях из $16$ при справедливости $H_0$, равна $\frac{5034}{65536} \approx 0.0768$.




$0.0768$ — достигаемый уровень значимости при реализации $t = 12$.

# Достигаемый уровень значимости

Чем ниже достигаемый уровень значимости, тем сильнее данные свидетельствуют против нулевой гипотезы в пользу альтернативы.

$0.0384$ — вероятность реализации $t \geq 12$ при условии, что нулевая гипотеза справедлива, т. е. Джеймс Бонд выбирает мартини наугад.

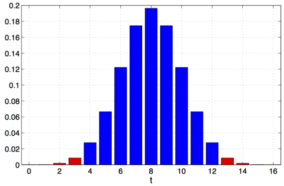
Ещё раз: это не вероятность справедливости нулевой гипотезы!

**Пример:** пусть Джеймс Бонд выбирает взболтанный мартини в $51\%$ случаев (ненаблюдаемая вероятность).

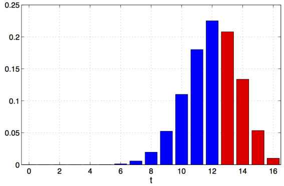
Пусть по итогам $100$ испытаний взболтанный мартини был выбран $49$ раз. Достигаемый уровень значимости против односторонней альтернативы — $p \approx 0.6178$. Нулевая гипотеза не отвергается, при этом сказать, что она верна, было бы ошибкой — Джеймс Бонд выбирает смешанный и взболтанный мартини не с одинаковыми вероятностями!

# Мощность

Проверяя нулевую гипотезу против двусторонней альтернативы, мы отвергаем $H_0$ при $t \geq 13$ или $t \leq 3$, что обеспечивает достигаемый уровень значимости $p = 0.0213 \leq \alpha = 0.05$.




Пусть Джеймс Бонд выбирает взболтанный мартини в $75\%$ случаев.



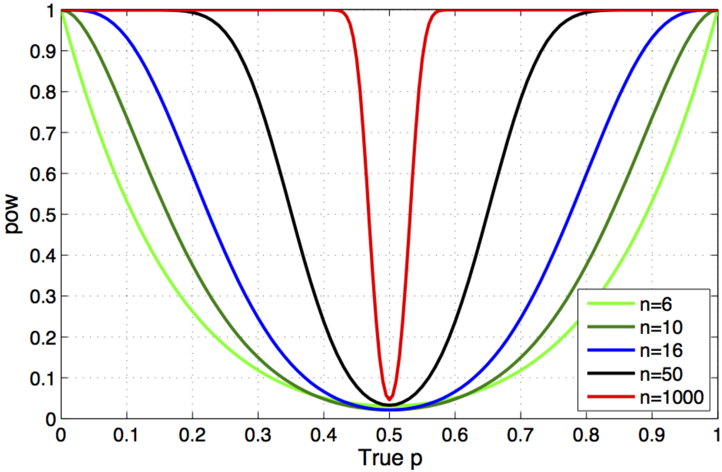

$\text{pow} \approx 0.6202$, т. е., при многократном повторении эксперимента гипотеза будет отклонена только в $62\%$ случаев.

# Мощность

Мощность критерия зависит от следующих факторов:

- размер выборки
- размер отклонения от нулевой гипотезы
- чувствительность статистики критерия
- тип альтернативы

# Мощность



# Размер выборки

Особенности прикладной задачи: $1$ порция мартини содержит $55$ мл джина и $15$ мл вермута — суммарно около $25$ мл спирта. Смертельная доза алкоголя при массе тела $80$ кг составляет от $320$ до $960$ мл спирта в зависимости от толерантности (от $13$ до $38$ мартини).

Обеспечение требуемой мощности: размеры выборки подбирается так, чтобы при размере отклонения от нулевой гипотезы не меньше заданного (например, вероятность выбора взболтанного мартини не меньше $0.75$) мощность была не меньше заданной.

# Литература

Справочники по статистике:

- Кобзарь А.И. *Прикладная математическая статистика*, 2006.
- Kanji G.K. *100 statistical tests*, 2006.

Вводные учебники по статистике:

- Good P.I., Hardin J.W. *Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them)*, 2003.
- Reinhart A. *Statistics Done Wrong. The woefully complete guide*, `http://www.statisticsdonewrong.com/`

Python:

- Введение в Python: `https://www.stavros.io/tutorials/python/`
- краткий справочник: `https://www.pythonsheets.com/`
- курс по Python для анализа данных: `https://www.coursera.org/learn/mathematics-and-python`

# Литература

Бутстреп:


- Hesterberg T., Monaghan S., Moore D.S., Clipson A., Epstein R. *Bootstrap methods and permutation tests*. In Introduction to the Practice of Statistics, 2005. `http://statweb.stanford.edu/~tibs/stat315a/Supplements/bootstrap.pdf`
- Efron B., Tibshirani R. *An Introduction to the Bootstrap*, 1993.


Проверка гипотез:


- Good P.I., Hardin J.W. *Common Errors in Statistics (and How to Avoid Them)*, 2003, глава 2.

## Литература


Begg I.M., Anas A., Farinacci S. (1992). *Dissociation of processes in belief: Source recollection, statement familiarity, and the illusion of truth*. Journal of Experimental Psychology: General, 121(4), 446–458.

Ellis P.D. *The Essential Guide to Effect Sizes: Statistical Power, Meta-Analysis, and the Interpretation of Research Results*, 2010.

Huff D. *How To Lie With Statistics*, 1954.

Kirk R.E. (1996). *Practical Significance: A Concept Whose Time Has Come*. Educational and Psychological Measurement, 56(5), 746–759.

Marriott, F. H. C. *The Interpretation of Multiple Observations*, 1974.