

Анализ моделей привилегированного обучения и дистилляции¹

Данная работа посвящена методам понижения сложности аппроксимирующих моделей. Предлагается вероятностное обоснование методов дистилляции и привилегированного обучения. В работе приведены общие выводы для произвольной параметрической функции с наперед заданной структурой. Показано теоретическое обоснование для частных случаев: линейной и логистической регрессии. Теоретические результаты анализируются в вычислительном эксперименте на синтетических выборках и реальных данных. В качестве реальных данных рассматривается выборки FashionMNIST и Twitter Sentiment Analysis.

1. Введение

Повышение точности аппроксимации в задачах машинного обучения влечет за собой повышение сложности моделей и как следствие снижает их интерпретируемость. Примером такого усложнения являются следующие модели: трансформеры [4], BERT [5], ResNet [3] а также ансамбли этих моделей.

При построении модели машинного обучения используется два свойства: сложность модели и точность аппроксимации модели. Сложность влияет на время, которое модель требуется для принятия решения, а также на интерпретируемость модели, следовательно модель которая имеет меньшую сложность является более предпочтительной [12]. С другой стороны точность аппроксимации модели нужно максимизировать. В данной работе рассматривается метод *дистилляции* модели. Данный метод позволяет строить новые модели на основе ранее обученных моделей.

В работе [8] рассматривается метод дистилляции моделей машинного обучения для задачи классификации. В работе проведен ряд экспериментов, в которых проводилась дистилляция моделей для разных задач машинного обучения. Эксперимент на выборке MNIST [9], в котором избыточно сложная нейросеть была дистиллирована в меньшую нейросеть. Эксперимент по Speech Recognition, в котором ансамбль моделей был *дистиллирован* в одну модель. Также в работе [8] был проведен эксперимент по обучению экспертных моделей на основе одной большой модели.

В работе [6] введено понятие *привилегированной информации* — информации которая доступна только в момент обучения. В работе [7] метод дистилляции [8] используется вместе с привилегированным обучением [6]. В предложенном методе на первом этапе обучается модель *учителя* в пространстве привилегированной информации, после чего обучается модель *ученика* в исходном признаковом пространстве используя *дистилляцию* [8].

¹Работа выполнена при поддержке ... (грант №...).

В данной работе предлагается рассмотреть общий подход дистилляции в рамках вероятностного подхода. Проводится обобщение на случай, когда привилегированная информация доступна не для всех объектов из обучающей выборки. Предлагается анализ и обобщение функции ошибки [8, 7] в рамках вероятностного подхода. Также предлагается рассмотреть частные случаи для задач классификации и регрессии.

В рамках вычислительного эксперимента анализируются модели, которые используют модель учителя при обучения и модели, которые не используют модель учителя при обучения. Для анализа используются реальные выборки для задачи классификации изображений FashionMNIST [10] и для задачи классификации текстов Twitter Sentiment Analysis [13]. В эксперименте использовалась выборка FashionMNIST, так-как выборка MNIST имеет хорошее качество аппроксимации даже для линейного классификатора. В рамках вычислительного эксперимента использовались модели разной сложности: линейные модели, полносвязная нейронная сеть, сверточная нейронная сеть [1], модель Bi-LSTM [2] и модель BERT [5].

2. Постановка задачи обучения с учителем

Задано множество объектов Ω и множество целевых переменных \mathbb{Y} . Множество $\mathbb{Y} = \{1, \dots, K\}$ для задачи классификации, где K число классов, множество $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ для задачи регрессии. Для каждого объекта из $\omega_i \in \Omega$ задана целевая переменная $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(\omega_i)$. Множество целевых переменных для всех объектов обозначим \mathbf{Y} . Для множества Ω задано отображение в некоторое признаковое пространство \mathbb{R}^n :

$$(1) \quad \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad |\Omega| = m,$$

где n размерность признакового пространства, а m количество объектов в множестве Ω . Отображение φ отображает объект $\omega_i \in \Omega$ в соответствующий ему вектор признаков $\mathbf{x}_i = \varphi(\omega_i)$. Пусть для объектов $\Omega^* \subset \Omega$ задана привилегированная информация:

$$(2) \quad \varphi^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^{n^*}, \quad |\Omega^*| = m^*,$$

где $m^* \leq m$ — число объектов с привилегированной информацией, n^* — число признаков в пространстве привилегированной информации. Отображение φ^* отображает объект $\omega_i \in \Omega^*$ в соответствующий ему вектор признаков $\mathbf{x}_i^* = \varphi^*(\omega_i)$.

Множество индексов объектов, для которых известна привилегированная информация, обозначим \mathcal{I} :

$$(3) \quad \mathcal{I} = \{1 \leq i \leq m \mid \text{для } i\text{-го объекта задана привилегированная информация}\},$$

а множество индексов объектов, для которых не известна привилегированная информация, обозначим $\{1, \dots, m\} \setminus \mathcal{I} = \bar{\mathcal{I}}$.

Пусть на множестве привилегированных признаков задана функция учителя $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$:

$$(4) \quad \mathbf{f} : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{Y}^*,$$

где $\mathbb{Y}^* = \mathbb{Y}$ для задачи регрессии и \mathbb{Y}^* является единичным симплексом \mathcal{S}_K в пространстве размерности K для задачи классификации. Модель учителя \mathbf{f} ставит объекты \mathbf{X}^* в соответствие объектам \mathbf{S} , то есть $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) = \mathbf{s}_i$.

Требуется выбрать модель ученика $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ из множества:

$$(5) \quad \mathfrak{G} = \{\mathbf{g} | \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{Y}^*\},$$

например для задачи классификации множество \mathfrak{G} может быть параметрическим семейством функций линейных моделей:

$$(6) \quad \mathfrak{G}_{\text{lin,cl}} = \{\mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{x}) | \mathbf{g}(\mathbf{W}, \mathbf{x}) = \text{softmax}(\mathbf{W}\mathbf{x}), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times K}\}.$$

3. Постановка задачи: Хинтона и Вапника

Рассмотрим описание метода предложенного в работах [8, 7]. В рамках данных работ предполагается, что для всех данных доступна привилегированная информация $\mathcal{I} = \{1, 2, \dots, m\}$. В работе [8] решается задача классификации вида:

$$(7) \quad \mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \quad y_i \in \mathbb{Y} = \{1, \dots, K\},$$

где y_i — это класс объекта, также будем обозначать \mathbf{y}_i вектором вероятности для класса y_i .

В постановке Хинтона рассматривается параметрическое семейство функций:

$$(8) \quad \mathfrak{G}_{\text{cl}} = \{\mathbf{g} | \mathbf{g} = \text{softmax}(\mathbf{z}(\mathbf{x})/T), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K\},$$

где \mathbf{z} — это дифференцируемая параметрическая функция заданной структуры, T — параметр температуры. В качестве модели учителя \mathbf{f} рассматривается функция из множества \mathfrak{F}_{cl} :

$$(9) \quad \mathfrak{F}_{\text{cl}} = \{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \text{softmax}(\mathbf{v}(\mathbf{x})/T), \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K\},$$

где \mathbf{v} — это дифференцируемая параметрическая функция заданной структуры, T — параметр температуры. Параметр температуры T имеет следующие свойства:

- 1) при $T \rightarrow 0$ получаем вектор, в котором один из классов имеет единичную вероятность;
- 2) при $T \rightarrow \infty$ получаем равновероятные классы.

Функция потерь \mathcal{L} в которой учитывается перенос информации от модели учителя \mathbf{f} к модели ученика \mathbf{g} имеет следующий вид:

$$(10) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = & - \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)}_{\text{исходная функция потерь}} \Big|_{T=1} \\ & - \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{k=1}^K \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0}}_{\text{слагаемое дистилляция}}, \end{aligned}$$

где $\cdot \Big|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t .

Получаем оптимизационную задачу:

$$(11) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \min_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{cl}} \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}).$$

Работа [7] обобщает метод предложенный в работе [8]. Решение задачи оптимизации (11) зависит только от вектора ответов модели учителя \mathbf{f} . Следовательно признаковые пространства учителя и ученика могут различаться. В этом случае получаем следующую постановку задачи:

$$(12) \quad \mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*, y_i)\}_{i=1}^m, \quad \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^{n^*}, \quad y_i \in \{1, \dots, K\},$$

где \mathbf{x}_i это информация доступна на этапах обучения и контроля, а \mathbf{x}_i^* это информация доступна только на этапе обучения. Модель учителя принадлежит множеству моделей \mathfrak{F}_{cl}^* :

$$(13) \quad \mathfrak{F}_{cl}^* = \{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \text{softmax}(\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*)/T), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{R}^K\},$$

где \mathbf{v}^* — это дифференцируемая параметрическая функция заданной структуры, T — параметр температуры. Множество моделей \mathfrak{F}_{cl}^* отличается от множества моделей \mathfrak{F}_{cl} из выражения (9). В множестве \mathfrak{F}_{cl} модели используют пространство исходных признаков, а в множестве \mathfrak{F}_{cl}^* модели используют пространство привилегированных признаков. Функция потерь (10) в случае модели учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{cl}^*$ переписывается в следующем виде:

$$(14) \quad \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*) \Big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0},$$

где $\cdot \Big|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t .

Требуется построить модель, которая использует привилегированную информацию \mathbf{x}_i^* при обучении. Для этого рассмотрим двухэтапную модель обучения предложенную в работе [7]:

- 1) выбираем оптимальную модель учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{cl}^*$;
- 2) выбираем оптимальную модель ученика $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{cl}$ используя дистилляцию [8].

Модель ученика — это функция, которая минимизирует (14). Модель учителя — это функция, которая минимизирует кросс-энтропийную функции ошибки:

$$(15) \quad \mathcal{L}_{th}(\mathbf{f}) = - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^K y_i^k \log \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*).$$

4. Постановка задачи: вероятностный подход

4.1. Метод максимального правдоподобия

Задано распределения целевой переменной $p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$. Для поиска $\hat{\mathbf{g}}$ воспользуемся методом максимального правдоподобия. В качестве $\hat{\mathbf{g}}$ выбирается функция, которая максимизирует правдоподобие модели:

$$(16) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}} \prod_{i=1}^N p(\mathbf{y}_i | \mathbf{x}_i, \mathbf{g}),$$

где множество \mathfrak{G} задается (5).

4.2. Подход дистилляции модели учителя в модель ученика

Рассмотрим вероятностную постановку, в которой должны быть выполнены ограничения:

- 1) задано распределение целевой переменной $p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$;
- 2) задано совместное распределение целевой переменной и ответов модели учителя $p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$;
- 3) для всех $\omega \in \Omega^*$ элементы $\mathbf{y}(\omega)$ и $\mathbf{s}(\omega)$ являются зависимыми величинами, так как ответы учителя должны коррелировать с истинными ответами;
- 4) если $|\Omega^*| = 0$ то решение должно соответствовать решению (16).

Рассмотрим совместное правдоподобие истинных меток и меток учителя:

$$(17) \quad p(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Распишем $p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$ по формуле условной вероятности:

$$(18) \quad p(\mathbf{y}_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) = p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})p(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g})$$

Подставляя выражения (18) в (17) получаем.

$$(19) \quad p(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Заметим, что \mathbf{y}_i и \mathbf{s}_i зависимы только через переменную \mathbf{x}_i , тогда $p(\mathbf{s}_i|\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i, \mathbf{g}) = p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g})$. Получаем совместное правдоподобие:

$$(20) \quad p(\mathbf{Y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Используя (20) получаем следующую оптимизационную задачу для поиска $\hat{\mathbf{g}}$

$$(21) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \prod_{i \notin \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) \prod_{i \in \mathcal{I}} p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}).$$

Для удобства, будем минимизировать логарифм, тогда из (21) получаем:

$$(22) \quad \hat{\mathbf{g}} = \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \log p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p(\mathbf{y}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}),$$

где параметр $\lambda \in [0, 1]$ введен для взвешивания ошибок на истинных ответах и ошибок относительно ответов учителя.

На рис. 1 показан вид вероятностной модели в графовой нотации, для произвольной функции \mathbf{g} . Для каждой реализации \mathbf{g} соответствующий блок требует уточнение. На рис 3 показана более подробная реализация в случае, когда модель \mathbf{g} это линейная модель.

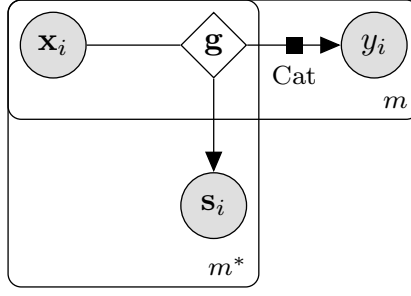


Рис. 1. Вероятностная модель в формате плоских нотаций.

5. Обучение с учителем для задачи классификации и регрессии

5.1. Случай классификации

Для задачи многоклассовой классификации рассматриваются следующие вероятностные предположения:

- 1) рассматривается функция учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}_{\text{cl}}^*$ (13);
- 2) рассматривается функция ученика следующего вида $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$ (8);
- 3) для истинных меток рассматривается категориальное распределение $p(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \text{Cat}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$, где $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ задает вероятность каждого класса;
- 4) для меток учителя введем плотность распределения

$$(23) \quad p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = C \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x})^{s^k}.$$

Теорема 1. Пусть для всех k выполняется $1 > 1 - \varepsilon > g_k(\mathbf{x}) > \varepsilon > 0$, тогда при

$$(24) \quad C = (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x}) \log g_k(\mathbf{x})$$

функция $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g})$ определенная в (23) является плотностью распределения.

Доказательство. Во-первых покажем, что для произвольного $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_K$ выполняется $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$. Заметим, что для всех k выполняется, что $\log g_k(\mathbf{x}) < 0$, тогда

$$(25) \quad C = \underbrace{\frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}}}_{>0} \prod_{k=1}^K \underbrace{g_k(\mathbf{x})}_{>\varepsilon} \underbrace{(-\log g_k(\mathbf{x}))}_{>0} > 0,$$

тогда с учетом того, что $g_k(\mathbf{x}) > 0$ и $C > 0$ получаем, что $p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) \geq 0$. Во-вторых

покажем, что интеграл по всему пространству объектов \mathcal{S}_K является конечным:

(26)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}_K} p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) ds &= \int_{\mathcal{S}_K} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x})^{s^k} ds = \prod_{k=1}^K \int_{\mathcal{S}_K} g_k(\mathbf{x})^{s^k} ds \\
&= \prod_{k=1}^K \int_0^1 \frac{r^{K-1} \sqrt{K}}{(K-1)! \sqrt{2^{K-1}}} g_k(\mathbf{x})^r dr = \prod_{k=1}^K \underbrace{\frac{\sqrt{K}}{(K-1)! \sqrt{2^{K-1}}}}_D \int_0^1 r^{K-1} g_k(\mathbf{x})^r dr \\
&= D^K \prod_{k=1}^K \int_0^1 r^{K-1} \exp(r \log g_k(\mathbf{x})) dr \\
&= (-D)^K \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (\Gamma(K) - \Gamma(K, -\log g_k(\mathbf{x}))) \\
&= (-D)^K (K-1)!^K \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (1 - g_k(\mathbf{x}) \exp_{K-1}(-\log g_k(\mathbf{x})) + g_k(\mathbf{x})) \\
&= \frac{(-\sqrt{K})^K}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K \log g_k(\mathbf{x}) (1 - g_k(\mathbf{x}) \exp_{K-1}(-\log g_k(\mathbf{x})) + g_k(\mathbf{x})) < \infty,
\end{aligned}$$

где $\Gamma(K)$ является гамма функцией, $\Gamma(K, -\log g_k(\mathbf{x}))$ является неполной гамма функцией, $\exp_n(x)$ является суммой Тейлора из первых n слагаемых. В рамках приближенных расчетов будем считать, что $\exp_n(x) \approx \exp(x)$, тогда с учетом (26) получаем:

$$(27) \quad C(\mathbf{g}, \mathbf{x}) = \int_{\mathcal{S}_K} p(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}) ds \approx (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^K g_k(\mathbf{x}) \log g_k(\mathbf{x})$$

Используя предположения 1)–4) и подставляя в (22) получаем следующую оптимизационную задачу:

$$\begin{aligned}
(28) \quad \hat{\mathbf{g}} &= \arg \max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} \\
&+ (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K y_i^k \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=1} + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K s_{i,k} \log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0} \\
&+ \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sum_{k=1}^K \left(\log g_k(\mathbf{x}_i) \Big|_{T=T_0} + \log \log \frac{1}{g_k(\mathbf{x}_i)} \Big|_{T=T_0} \right),
\end{aligned}$$

где выражение $\cdot \Big|_{T=t}$ обозначает, что в предыдущую функцию softmax требуется подставить значение температуры T равное некоторому значению t .

Проанализировав выражение (28) получаем, что первые три слагаемые совпадают со слагаемыми в выражении (10) при $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$, и $\lambda = \frac{1}{2}$, а третье слагаемое является некоторым регуляризатором, который получен из вида распределения.

Анализируя первые 3 слагаемых в выражении (28) получаем, что при $T_0 = 1$ получаем сумму кросс энтропий между двумя распределениями для каждого объекта:

1) первое распределение это выпуклая комбинация с весом $1 - \lambda$ и λ : распределения задаваемое метками объектов $\text{Cat}(\mathbf{y})$ и распределения задаваемого моделью учителя $\text{Cat}(\mathbf{s})$

2) второе распределение это распределение задаваемое моделью ученика $\text{Cat}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))$.

Получаем, что модель ученика восстанавливает плотность не исходных меток, а новую плотность, которая является выпуклой комбинаций плотности исходных меток и меток учителя.

5.2. Случай регрессии

Для задачи регрессии рассматриваются следующие вероятностные предположения:

1) рассматривается функция учителя $\mathbf{f} \in \mathcal{F}_{\text{rg}}^*$:

$$(29) \quad \mathcal{F}_{\text{rg}}^* = \{ \mathbf{f} | \mathbf{f} = \mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \rightarrow \mathbb{R} \},$$

где \mathbf{v}^* — это дифференцируемая параметрическая функция;

2) рассматривается функция ученика $\mathbf{g} \in \mathcal{G}_{\text{rg}}$:

$$(30) \quad \mathcal{G}_{\text{rg}} = \{ \mathbf{g} | \mathbf{g} = \mathbf{z}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^K \},$$

где \mathbf{z} — это дифференцируемая параметрическая функция;

3) истинные метки имеют нормальное распределение

$$(31) \quad p(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathcal{N}(y|\mathbf{g}(\mathbf{x}), \sigma);$$

4) метки учителя распределены

$$(32) \quad p(s|\mathbf{x}, \mathbf{g}) = \mathcal{N}(s|\mathbf{g}(\mathbf{x}), \sigma_s);$$

Используя предположения 1)–4) и подставляя в (22) получаем следующую оптимизационную задачу:

$$(33) \quad \begin{aligned} \hat{g} = \arg \min_{g \in \mathcal{G}} & \sum_{i \notin \mathcal{I}} \sigma^2 (y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2 \\ & + (1 - \lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma^2 (y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2 + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \sigma_s^2 (s_i - \mathbf{g}(\mathbf{x}_i))^2. \end{aligned}$$

Выражение (33) записано с точностью до аддитивной константы относительно \mathbf{g} .

Теорема 2. Пусть множество \mathcal{G} описывает класс линейных функций вида $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^\top \mathbf{x}$. Тогда решение оптимизационной задачи (33) эквивалентно решению следующей задачи линейной регрессии:

$$(34) \quad \mathbf{y}'' = \mathbf{X}\mathbf{w} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}),$$

где $\Sigma^{-1} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}')$ и \mathbf{y}'' имеют следующий вид:

$$(35) \quad \begin{aligned} \sigma'_i &= \begin{cases} \sigma^2, & \text{если } i \notin \mathcal{I} \\ (1 - \lambda) \sigma^2 + \lambda \sigma_s^2, & \text{иначе} \end{cases}, \\ \mathbf{y}'' &= \Sigma \mathbf{y}', \\ y'_i &= \begin{cases} \sigma^2 y_i, & \text{если } i \notin \mathcal{I} \\ (1 - \lambda) \sigma^2 y_i + \lambda \sigma_s^2 s_i, & \text{иначе} \end{cases}. \end{aligned}$$

Доказательство. В доказательстве используется обозначения $\mathbf{a}_{\mathcal{J}} = [a_i | i \in \mathcal{J}]^T$, где \mathbf{a} произвольный вектор, а \mathcal{J} произвольное не пустое индексное множество. К примеру подвектор вектора ответов \mathbf{y} для элементов которого доступна привилегированная информация обозначается $\mathbf{y}_{\mathcal{I}} = [y_i | i \in \mathcal{I}]^T$. Аналогичная операция рассматривается для матрицы объектов $\mathbf{X}_{\mathcal{I}} = [\mathbf{x}_i | i \in \mathcal{I}]^T$.

В случае линейной модели, когда $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}$ выражение (33) принимает вид:

$$(36) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} &= \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \sigma^2 (\mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} - \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} \mathbf{w})^T (\mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} - \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} \mathbf{w}) \\ &\quad + \sigma^2 (1 - \lambda) (\mathbf{y}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w})^T (\mathbf{y}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w}) + \sigma_s^2 \lambda (\mathbf{s}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w})^T (\mathbf{s}_{\mathcal{I}} - \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем:

$$(37) \quad \begin{aligned} \hat{\mathbf{w}} &= \arg \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \sigma^2 (\mathbf{w}^T \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} \mathbf{w} - 2 \mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} \mathbf{w}) \\ &\quad + (1 - \lambda) \sigma^2 (\mathbf{w}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w} - 2 \mathbf{y}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w}) + \lambda \sigma_s^2 (\mathbf{w}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w} - 2 \mathbf{s}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} \mathbf{w}) \end{aligned}$$

Продифференцируем выражение, приравняем к нулю и сгруппируем элементы:

$$(38) \quad \begin{aligned} (\sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} + (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} + \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}}) \mathbf{w} &= 2 \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} \\ &\quad + 2 (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{y}_{\mathcal{I}} + 2 \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{s}_{\mathcal{I}}. \end{aligned}$$

Легко получить следующие равенства:

$$(39) \quad \begin{aligned} \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}} + (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} + \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{X}_{\mathcal{I}} &= \mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X}, \\ 2 \sigma^2 \mathbf{X}_{\bar{\mathcal{I}}}^T \mathbf{y}_{\bar{\mathcal{I}}} + 2 (1 - \lambda) \sigma^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{y}_{\mathcal{I}} + 2 \lambda \sigma_s^2 \mathbf{X}_{\mathcal{I}}^T \mathbf{s}_{\mathcal{I}} &= 2 \mathbf{X} \mathbf{y}', \end{aligned}$$

где Σ и \mathbf{y}' из условия задачи (35).

Подставляя (39) в (38) получаем:

$$(40) \quad \mathbf{w} = 2 (\mathbf{X}^T \Sigma^{-1} \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X} \Sigma^{-1} \mathbf{y}'',$$

что соответствует решению задачи (34).

Теорема 2 показывает, что обучения с учителем для задачи регрессии можно свести к классической задаче оптимизации для задачи линейной регрессии.

6. Вычислительный эксперимент

Проводится вычислительный эксперимент для анализа качества моделей, которые получены путем дистилляции модели учителя в модель ученика. Как показано в теореме 2 задачу регрессии с учителем можно свести к задаче регрессии без учителя, поэтому в эксперименте более подробно рассматривается случай классификации. Во всех частях вычислительного эксперимента для поиска оптимальных параметров нейросетей использовался градиентный метод оптимизации Адам [11].

6.1. Выборка FashionMNIST

В данной части проводится эксперимент для задачи классификации для выборки FashionMNIST [10]. В качестве модели учителя \mathbf{f} рассматривается модель нейросети с двумя сверточными слоями и с тремя полносвязными слоями, в качестве функции активации рассматривается ReLu. Модель учителя содержит 30 тысяч обучаемых параметров. В качестве модели ученика рассматривается модель логистической регрессии для многоклассовой классификации. Модель ученика содержит 7850 обучаемых параметров.

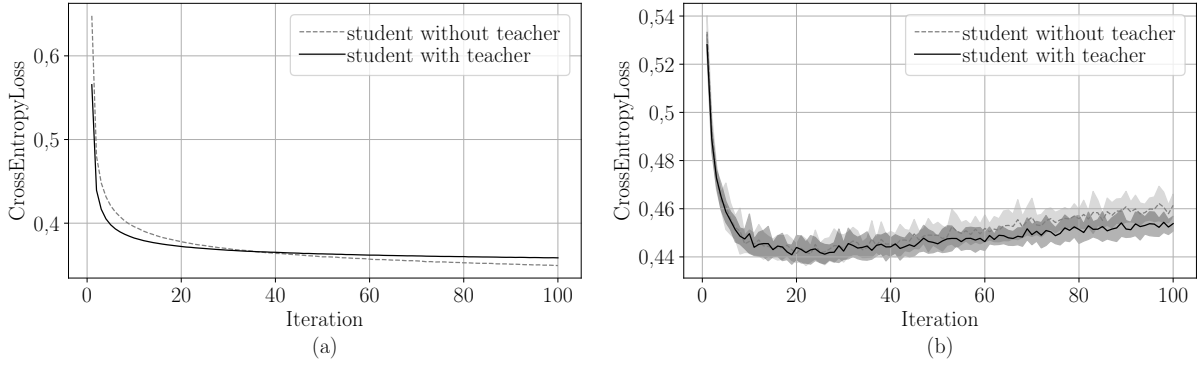


Рис. 2. Зависимость кросс-энтропии между истинными метками и предсказанными учеников вероятностями классов: а) на обучающей выборке; б) на тестовой выборке.

На рис. 2 показан график зависимости кросс-энтропии между истинными метками объектов и вероятностями, которые предсказывает модель ученика. На графике сравнивается модель, которая обучалась без учителя (в задаче оптимизации (28) присутствует только первое слагаемое) с моделью, которая была получена путем дистилляции модели нейросети в линейную модель. На графике видно, что обе модели начинают переобучаться после 30-й итерации, но модель, которая получена путем дистилляции переобучается не так быстро, что следует из того, что ошибка на тестовой выборке растет медленней, а на обучающей выборке падает также медленней.

6.2. Синтетический эксперимент

Проанализируем модель на синтетической выборке. Выборка построенная следующим образом:

$$(41) \quad \begin{aligned} \mathbf{W} &= [\mathcal{N}(w_{jk}|0, 1)]_{n \times K}, & \mathbf{X} &= [\mathcal{N}(x_{ij}|0, 1)]_{m \times n}, \\ \mathbf{S} &= \text{softmax}(\mathbf{XW}), & \mathbf{y} &= [\text{Cat}(y_i|\mathbf{s}_i)], \end{aligned}$$

где функция softmax берется построчно. Строки матрицы \mathbf{S} будем рассматривать как предсказание учителя, то есть учитель знает истинные вероятности каждого класса. На рис. 3 показана вероятностная модель в графовой нотации. В эксперименте число признаков $n = 10$, число классов $K = 3$, для обучения было сгенерировано $m_{\text{train}} = 1000$ и $m_{\text{test}} = 100$ объектов.

На рис. 4 показано распределение по классам для каждого объекта обучающей выборки. Видно, что все классы являются равновероятными.

Построим в качестве ученика простую линейную модель, которая минимизирует кросс-энтропийную (первое слагаемое в формуле (28)) ошибку между one hot распределением и распределением, которое предсказывает линейная модель \mathbf{g} . Представим данную модель в виде plate notation:

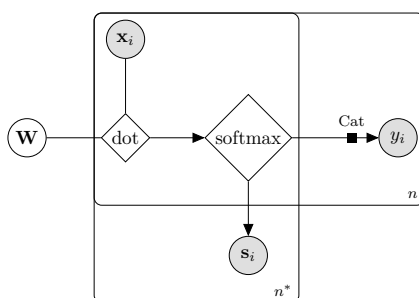


Рис. 3. Модель синтетического эксперимента в формате plate notation.

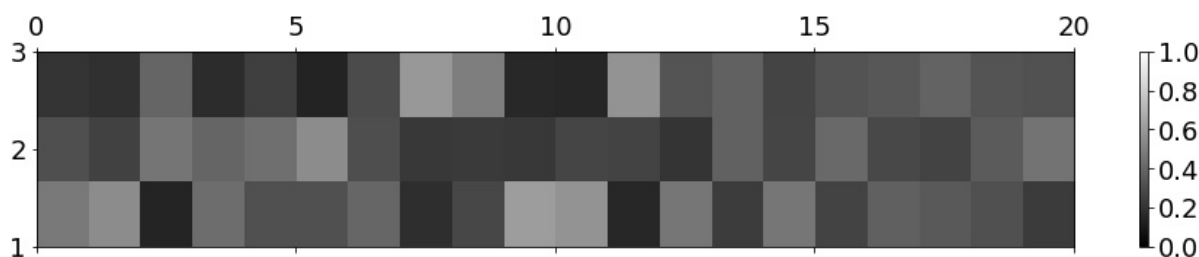


Рис. 4. Истинное распределение объектов по классам.

На рис. 5 показано распределение вероятностей классов, которое предсказала модель. Видно, что данное распределение является не соответствующим истинному, так как модель сосредотачивает всю вероятность в одном классе.

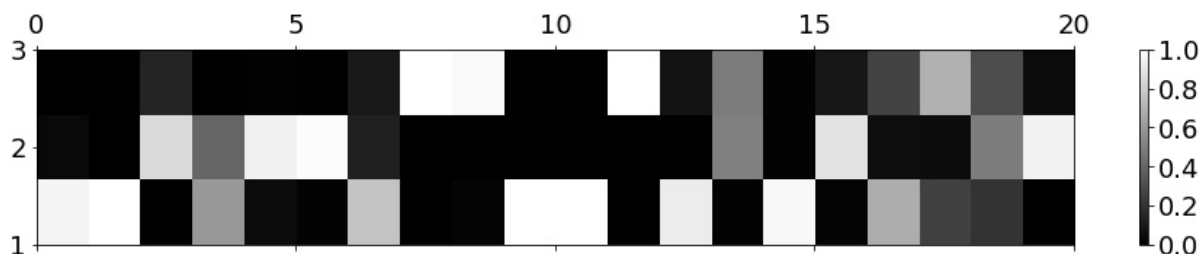


Рис. 5. Распределение предсказанное моделью без использования информации об истинном распределении на классах.

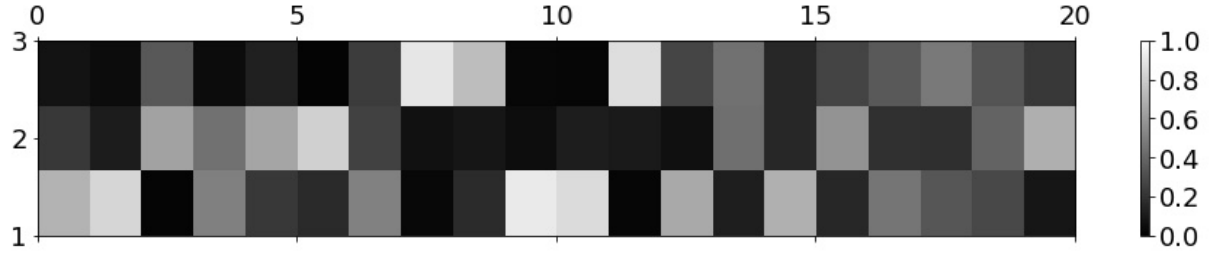


Рис. 6. Распределение предсказанное моделью с использования информации об истинном распределение на классах.

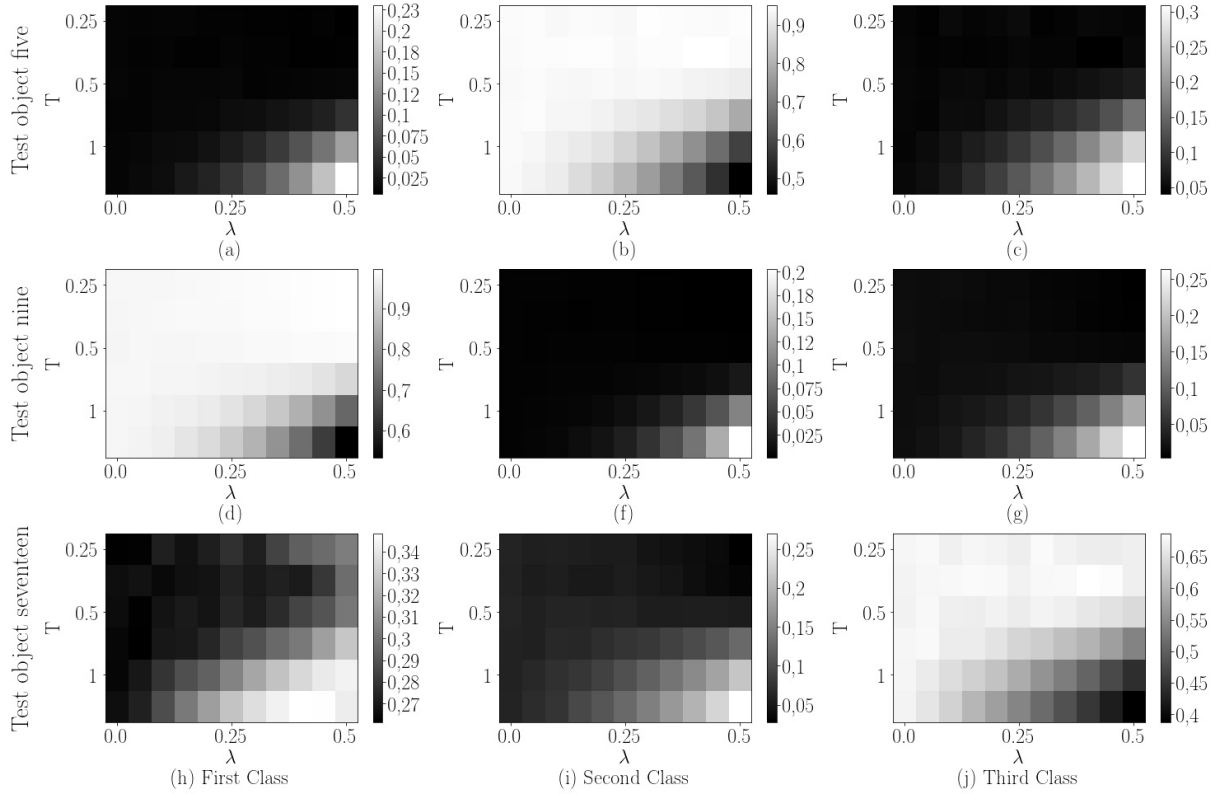


Рис. 7. Вероятности классов для разных объектов.

Рассмотрим модель, которая учитывает информацию о истинных распределениях на классах для каждого объекта. Для этого будем минимизировать первые три слагаемых в формуле (28), при $T_0 = 1$ и $\lambda = 0,75$. В качестве меток учителя $s_{i,k}$ использовались истинные вероятности для каждого класса для данного объекта. На рис 6 показано распределение, которое дала модель в данном случае, видно, что распределения являются сглаженными и концентрации всей вероятности в одном классе не наблюдается.

Заметим, что в данном примере предполагается, что модель учителя учитывает не только метки классов, а и распределение на метках классов, в то время как в выборке $\mathcal{D} = \{\mathbf{X}, \mathbf{y}\}$, имеются только точечные оценки в виде меток.

В данном примере используются истинные распределения в качестве предсказаний учителя, но их можно заменить предсказаниями модели учителя, которая пред-

Dataset	Model	CrossEntropyLoss	Accuracy	StudentSize
FashionMnist	without teacher	$0,461 \pm 0,005$	$0,841 \pm 0,002$	7850
	with teacher	$0,453 \pm 0,003$	$0,842 \pm 0,002$	7850
Synthetic	without teacher	$0,225 \pm 0,002$	$0,831 \pm 0,002$	33
	with teacher	$0,452 \pm 0,001$	$0,828 \pm 0,001$	33
Twitter	without teacher	$0,501 \pm 0,006$	$0,747 \pm 0,005$	1538
	with teacher	$0,489 \pm 0,003$	$0,764 \pm 0,004$	1538

Таблица 1. Сводная таблица результатов вычислительного эксперимента.

сказывает не только сами меток, а и их распределение для каждого объекта.

На рис. 7 показана зависимость вероятности верного класса от температуры T и параметра доверия λ для одного из объекта из тестовой выборке. Видно, что при увеличении температуры распределение на классас становится более равномерным.

6.3. Выборка Twitter Sentiment Analysis

В данной части проводится эксперимент на выборке Twitter Sentiment Analysis. Данная выборка содержит короткие сообщения, для которых нужно предсказать эмоциональный окрас: содержит твит позитивный окрас или негативный. Выборка разделена на 1,18 миллиона твитов для обучения и 0,35 миллиона твитов для тестирования. В твитах была выполнена следующая предобработка:

- все твиты были переведены в нижний регистр;
- все никнеймы вида “@andrey” были заменены на токен “name”;
- все цифры были заменены на токен “number”.

В качестве модели учителя использовалась модель Bi-LSTM с 170 тысячами параметров для обучения. В качестве эмбедингов обучалась матрица из 30 миллионов параметров в единой процедуре с моделью BI-LSTM. Обученная модель предсказывает с точностью 0,835. В качестве модели ученика рассматривается модель с 1538 параметрами, но в качестве эмбедингов рассматривается переобученная модель BERT. Результаты данной части эксперимента показаны в табл. 1.

7. Заключение

В данной работе проанализирована задача обучения модели ученика используя модель учителя. Исследован метод дистилляции модели учителя в модель ученика. В работе предложено вероятностное обоснования дистилляции, которое было предложено в работах [8, 7]. Введены вероятностные предположения, которые описывают дистилляцию моделей. В рамках данных вероятностных предположений получен анализ некоторых моделей. Результат анализа сформулирован в виде теоремы 1 и теоремы 2.

В рамках теоремы 2 показано, что обучения линейной регрессии с учителем эквивалентно замене обучающей выборке и вероятностных предположений о распределении истинных ответов. Для задачи классификации ответы учителя дают дополнительную информацию в виде распределения классов для каждого объекта из

обучающей выборки. Данная информация не может быть переписана в виде классической задачи классификации. Для использования данной информации требуется использовать распределение, которое представлено в теореме 1.

Анализ задачи регрессии в вычислительном эксперименте не проводится, так как в теореме 2 была показана эквивалентность классическому решению задачи линейной регрессии. Для задачи классификации проведен вычислительный эксперимент. В вычислительном эксперименте сравнивается модель ученика, которая обучена без использования учителя и с использованием модели учителя. В таблице 1 показаны результаты вычислительного эксперимента для разных выборок. Из таблицы видно, что точность аппроксимации выборки учеником улучшается при использовании модели учителя.

В дальнейшем предполагается обобщить метод описанный в пункте 4 используя Байесовский подход выбора моделей машинного обучения. Также в рамках байесовского подхода планируется улучшить методы для получения улучшения качества не только для задачи классификации, а и для задачи регрессии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Y. LeCun, B. Boser, J. S. Denker, D. Henderson, R. E. Howard, W. Hubbard and L. D. Jackel* Backpropagation Applied to Handwritten Zip Code Recognition // Neural Computation. 1989. Vol.1 No 4. pp. 541–551.
2. *Sepp Hochreiter; Jürgen Schmidhuber* Long short-term memory // Neural Computation. 1997. Vol. 9, No 8. pp. 1735–1780.
3. *Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, Jian Sun* Deep Residual Learning for Image Recognition // CoRR. 2015
4. *Ashish Vaswani, Noam Shazeer, Niki Parmar, Jakob Uszkoreit, Llion Jones, Aidan N. Gomez, Lukasz Kaiser, Illia Polosukhin* Attention Is All You Need // CoRR. 2017
5. *Jacob Devlin, Ming-Wei Chang, Kenton Lee, Kristina Toutanova* BERT: Pre-training of Deep Bidirectional Transformers for Language Understanding // arXiv preprint arXiv:1810.04805. 2018
6. *Vladimir Vapnik, Rauf Izmailov* Learning Using Privileged Information: Similarity Control and Knowledge Transfer // Journal of Machine Learning Research. 2015. No 16. pp. 2023–2049.
7. *David Lopez-Paz, Leon Bottou, Bernhard Scholkopf, Vladimir Vapnik* UNIFYING DISTILLATION AND PRIVILEGED INFORMATION // Published as a conference paper at ICLR. 2016.
8. *Geoffrey Hinton, Oriol Vinyals, jeff Dean* Distilling the Knowledge in a Neural Network // NIPS Deep Learning and Representation Learning Workshop. 2015.
9. *LeCun Y., Cortes C., Burges C.* The MNIST dataset of handwritten digits, 1998. <http://yann.lecun.com/exdb/mnist/index.html>

10. *Han Xiao and Kashif Rasul and Roland Vollgraf* Fashion-MNIST: a Novel Image Dataset for Benchmarking Machine Learning Algorithms // arXiv, 2017.
11. *Diederik P. Kingma and Jimmy Ba* Adam: A Method for Stochastic Optimization // arXiv, 2014.
12. *О. Ю. Бахтеев, В. В. Стрижов* Выбор моделей глубокого обучения субоптимальной сложности // Автоматика и телемеханика, 2018.
13. *Theresa Wilson, Zornitsa Kozareva, Preslav Nakov, Sara Rosenthal, Veselin Stoyanov, and Alan Ritter* SemEval-2013 task 2: Sentiment analysis in twitter // In Proceedings of the International Workshop on Semantic Evaluation, SemEval '13. 2013.

Грабовой А.В., Московский физико-технический институт, студент,
Москва, grabovoy.av@phystech.edu

Стрижов В.В., Московский физико-технический институт, профессор,
Москва, strijov@phystech.edu