Privilege Learning *

И. О. Фамилия[1], И. О. Фамилия[2]

Аннотация: Ключевые слова: смесь экспертов; байесовский выбор модели; априорное распределение.

DOI: 00.00000/00000000000000

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задана выборка:
$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n}, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N}$$
где N — число объектов, n — число признаков. Пусть для некоторых объектов задана привилегированная информация:

$$\mathbf{X}^* \in \mathbb{R}^{N' \times n'}$$

где $N' \ll N$ — число объектов с привилегированной информацией, n' — число привилигированных признаков.

Множество индексов объектов для которых известна привилегированная информация обозначим $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \{1 \leq i \leq N | \text{ для } i\text{-го объекта задана привилегированная информация}\}.$$

Пусть на множестве привилегированных признаков задана некоторая модель модель $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$:
$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n'} \to \mathbb{R},$$
причем $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$ приближает y_i наилучшим образом $\forall i \in \mathcal{I}$. Обозначим ответы модели $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = s_i$. Получим вектор ответом $\mathbf{s}$ модели учителя $\mathbf{f}$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

[1]афиляция автора

[2]афиляция автора

Требуется построить модель $\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{x})$ над множеством исходных признаков:

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

В данной работе в качестве $\mathbf{g}$ рассматривается линейная модель:

$$\mathbf{g}(\mathbf{w}, \mathbf{x}) = \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}. \tag{2.1}$$

2.1 Без привилегированной информации

Для поиска $\hat{\mathbf{w}}$ воспользуемся методом максимального правдоподобия:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}). \tag{2.2}$$

В качестве $\hat{\mathbf{w}}$ выберем то, которое максимизирует правдоподобие модели (2.2):

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}).$$

2.2 С учетом привилегированной информации

Пусть задан некоторый уровень доверия $\boldsymbol{\lambda} \in [0, 1]$ к ответам модели $\mathbf{f}$. Рассмотрим совместное правдоподобие правдоподобие:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{i\notin\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(y_i, s_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda).$$

Расписав $p(y_i, s_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda)$, получаем:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{i\notin\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(y_i|s_i, \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(s_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda).$$

Пусть y_i и s_i независимы, тогда получаем совместное правдоподобие:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \prod_{i\notin\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(s_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda). \tag{2.3}$$

Используя (2.3) получаем следующую оптимизационную задачу для поиска $\hat{\mathbf{w}}$

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \prod_{i\notin\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(s_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \lambda). \tag{2.4}$$

2.3 Случай линейной регрессии

Рассмотрим следующие распределения:

$$
\begin{aligned}
p\big(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}\big) &= N\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \mathbf{\Sigma}\big),\\
p\big(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \lambda\big) &= N\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \frac{1}{\lambda}\mathbf{\Sigma}\big),\\
p\big(s_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{w}, \lambda\big) &= N\big(\mathbf{y}_i|\mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}, \frac{1}{1-\lambda}\mathbf{\Sigma}\big),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$. Подставляя (2.5) в (2.6) и прологарифмировав, получим:

$$
\hat{\mathbf{w}} = \arg\max_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \sum_{i\notin\mathcal{I}} \left(y_i - \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}\right)^2 + \lambda \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(y_i - \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}\right)^2 + (1-\lambda) \sum_{i\in\mathcal{I}} \left(s_i - \mathbf{w}^\mathsf{T}\mathbf{x}\right)^2. \tag{2.6}
$$

Список литературы

[1] *Vladimir Vapnik, Rauf Izmailov* Learning Using Privileged Information: Similarity Control and Knowledge Transfer // Journal of Machine Learning Research. 2015. No 16. pp. 2023–2049.

[2] *David Lopez-Paz, Leon Bottou, Bernhard Scholkopf, Vladimir Vapnik* UNIFYING DISTILLATION AND PRIVILEGED INFORMATION // Published as a conference paper at ICLR. 2016.