Привилигированная информация и дистиляция моделей

Грабовой Андрей Валериевич

Московский физико-технический институт

МФТИ, г. Долгопрудный

Вероятностная интерпретация дистилляции моделей

Цель: предложить вероятностную постановку задачи дистилляции моделей глубокого обучения на основе существующих методов дистилляции и привилегированного обучения.

Задачи

1. Поставить вероятностную задачу дистилляции для задачи классификации и регрессии.
2. Провести теоретический анализ предложенной вероятностной постановки задачи для линейных моделей.

Исследуемая проблема: снижение размерности пространства параметров моделей глубокого обучения.

Метод решения

Предлагается поставить вероятностную постановку задачи дистилляции моделей глубокого обучения. В качестве базовой дистилляции предлагается использовать методы предложенные Дж. Хинтоном и В. Вапником в 2015г. и 2016г. соответсвенно.

Список литературы

1. *Грабовой А.В., Стрижов В.В.* Анализ моделей привилегированного обучения и дистилляции // Автоматика и телемеханика, 2021 (текущая работа, на рецензировании).
2. *Lopez-Paz D., Bottou L., Scholkopf B., Vapnik V.* Unifying Distillation and Privileged Information // In International Conference on Learning Representations. Puerto Rico, 2016.
3. *Hinton G., Vinyals O., Dean J.* Distilling the Knowledge in a Neural Network // NIPS Deep Learning and Representation Learning Workshop. 2015.
4. *Madala H., Ivakhnenko A.* Inductive Learning Algorithms for Complex Systems Modeling. Boca Raton: CRC Press Inc., 1994.

Введения

Обсуждали графики, пока не успел из сделать...

Постановка задачи обучения с учителем

Множество объектов $\boldsymbol{\Omega}$, где $|\boldsymbol{\Omega}| = m$.
Признаки $\mathbf{x}_i = \varphi(\omega_i)$, где $\mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n$. Целевая переменная $y_i = y\bigl(\omega_i\bigr)$, $y_i \in \mathbb{Y}$.
Привилегированные признаки $\varphi^*(\omega_i) = \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^{n^*}$, где $\omega_i \in \boldsymbol{\Omega}' \subseteq \boldsymbol{\Omega}$.
Множество индексов объектов, для которых известна привилигированя информация обозначим $\mathcal{I}$, а $\bar{\mathcal{I}}$ для которых не известная.
Функции учителя $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{Y}^*$ и ученика $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Y}^*$, где $\mathbb{Y}^*$ пространство оценок.
Ответ функции $\mathbf{f}$ для объекта $\mathbf{x}_i^*$ обозначим $\mathbf{s}_i = \mathbf{f}\bigl(\mathbf{x}_i^*\bigr)$.
Требуется выбрать модель ученика $\mathbf{g}$ из множества:

$$\mathfrak{G} = \{\mathbf{g} | \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Y}^*\}.$$

Например:

$$\mathfrak{G}_{\text{lin,cl}} = \bigl\{\mathbf{g}\bigl(\mathbf{W}, \mathbf{x}\bigr) | \mathbf{g}\bigl(\mathbf{W}, \mathbf{x}\bigr) = \text{softmax}\bigl(\mathbf{W}\mathbf{x}\bigr), \quad \mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times K}\bigr\},$$

где $\mathfrak{G}_{\text{lin,cl}}$ параметрическое семейство линейный моделей для задачи классификации.
Оптимизационная задача:

$$\mathbf{g} = \arg\min_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}} \mathcal{L}\bigl(\mathbf{g}, \mathbf{f}, \mathbf{X}, \mathbf{X}^*, \mathbf{y}\bigr),$$

где $\mathcal{L}$ некоторая функция ошибки.

Постановка задачи: Хинтон

Рассматривается:

1. $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$;
2. для всех $i \in \mathcal{I}$ выполняется $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^*$;
3. классификация $\mathfrak{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^m, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, y_i \in \mathbb{Y} = \{1, \cdots, K\}$.

Обозначим y_i — класс объекта, а $\mathbf{y}_i$ вектор вероятности для i-го объекта.

Параметрическое семейство учителя и ученика:

$$\mathfrak{F}_{\text{cl}} = \left\{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \text{softmax}\big(\mathbf{v}(\mathbf{x})/T\big), \quad \mathbf{v} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K\right\},$$
$$\mathfrak{G}_{\text{cl}} = \left\{\mathbf{g} | \mathbf{g} = \text{softmax}\big(\mathbf{z}(\mathbf{x})/T\big), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^K\right\},$$

где $\mathbf{z}, \mathbf{v}$ — это дифференцируемые параметрические функции заданной структуры, T — параметр температуры.

Функция потерь $\mathcal{L}_{st}$:

$$\mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = -\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\big|_{T=1}}_{\text{исходная функция потерь}} - \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)\big|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\big|_{T=T_0}}_{\text{слагаемое дистилляция}},$$

где $\cdot\big|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t.

Получаем оптимизационную задачу:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\min_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}} \mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}).$$

Постановка задачи: Вапник

Рассматривается:

1. привилегированная информация $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, m\}$;
2. классификация $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i^*, y_i)\}_{i=1}^{m}, \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}_i^* \in \mathbb{R}^{n^*}, y_i \in \{1, \cdots, K\}$.

Параметрическое семейство учителя:

$$\mathfrak{F}_{\mathrm{cl}}^* = \left\{\mathbf{f} | \mathbf{f} = \mathrm{softmax}\bigl(\mathbf{v}^*(\mathbf{x}^*)/T\bigr), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{R}^K\right\},$$

где $\mathbf{v}^*$ — это дифференцируемые параметрические функции заданной структуры, T — параметр температуры.

Функция потерь:

$$\mathcal{L}_{st}(\mathbf{g}) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} y_i^k \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\bigr|_{T=1} - \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K} \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*)\bigr|_{T=T_0} \log \mathbf{g}(\mathbf{x}_i)\bigr|_{T=T_0},$$

где $\cdot\bigr|_{T=t}$ обозначает, что параметр температуры T в предыдущей функции равняется t.

Вероятностная постановка

Гипотеза порождения данных:

1. задано распределение целевой переменной $p\bigl(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr)$;
2. задано совместное распределение $p\bigl(y_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr)$;
3. для всех $i \in \mathcal{I}$ элементы y_i и $\mathbf{s}_i$ являются зависимыми величинами;
4. если $|\mathcal{I}| = 0$ то решение соответствует решению максимума правдоподобия.

Совместное правдоподобие истинных меток и меток учителя:

$$p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\bigr) = \prod_{i \not\in \mathcal{I}} p\bigl(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) \prod_{i \in \mathcal{I}} p\bigl(y_i, \mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr).$$

Задача оптимизации:

$$\mathbf{g} = \arg\max_{\mathbf{g} \in \mathfrak{G}} p\bigl(\mathbf{y}, \mathbf{S}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}\bigr),$$

данная задача оптимизации переписывается в следующем виде:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \not\in \mathcal{I}} \log p\bigl(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) + (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p\bigl(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr) + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \log p\bigl(\mathbf{s}_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\bigr),$$

где $\lambda \in [0, 1]$ — метапараметр для взвешивания слагаемых отвечающих модели учителя относительно истинных меток.

Частный случай: классификация

1. функции учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}^*_{\text{cl}}$ и ученика $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{cl}}$;
2. распределение истинных меток $p\bigl(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}\bigr) = \text{Cat}\bigl(\mathbf{g}(\mathbf{x})\bigr)$;
3. распределение меток учителя $p\bigl(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}\bigr) = C \prod_{k=1}^{K} g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr)^{s^k}$.

Оптимизационная задача:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g}\in\mathcal{G}} \sum_{i\not\in\mathcal{I}} \sum_{k=1}^{K} y_i^k \log g_k\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\big|_{T=1} + (1-\lambda) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{k=1}^{K} y_i^k \log g_k\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\big|_{T=1}$$

$$+ \lambda \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{k=1}^{K} s_{i,k} \log g_k\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\big|_{T=T_0} + \lambda \sum_{i\in\mathcal{I}} \sum_{k=1}^{K} \left(\log g_k\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)\big|_{T=T_0} + \log\log \frac{1}{g_k\bigl(\mathbf{x}_i\bigr)}\big|_{T=T_0}\right)$$

Теорема (Грабовой 2020)

Пусть вероятнось каждого класса отделима от нуля и единицы, то есть для всех k выполняется $1 > 1 - \varepsilon > g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr) > \varepsilon > 0$, тогда при

$$C = (-1)^K \frac{K^{K/2}}{2^{K(K-1)/2}} \prod_{k=1}^{K} g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr) \log g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr)$$

функция $p\bigl(\mathbf{s}|\mathbf{x}, \mathbf{g}\bigr) = C \prod_{k=1}^{K} g_k\bigl(\mathbf{x}\bigr)^{s^k}$ является плотностью распределения.

Частный случай: регрессия

1. функция учителя $\mathbf{f} \in \mathfrak{F}^*_{\text{rg}} = \left\{\mathbf{f}|\mathbf{f} = \mathbf{v}^*\left(\mathbf{x}^*\right), \quad \mathbf{v}^* : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{R}\right\}$;
2. рассматривается функция ученика $\mathbf{g} \in \mathfrak{G}_{\text{rg}} = \left\{\mathbf{g}|\mathbf{g} = \mathbf{z}\left(\mathbf{x}\right), \quad \mathbf{z} : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}\right\}$;
3. распределение истинных меток $p\left(y|\mathbf{x}, \mathbf{g}\right) = \mathcal{N}\left(y|\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right), \sigma\right)$;
4. распределения меток учителя $p\left(s|\mathbf{x}, \mathbf{g}\right) = \mathcal{N}\left(s|\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right), \sigma_s\right)$;

Оптимизационная задача:

$$\begin{aligned}\hat{g} = \arg\min_{g\in\mathcal{G}} \sum_{i\not\in\mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_i\right)\right)^2 \\ + (1-\lambda) \sum_{i\in\mathcal{I}} \sigma^2 \left(y_i - \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_i\right)\right)^2 + \lambda \sum_{i\in\mathcal{I}} \sigma_s^2 \left(s_i - \mathbf{g}\left(\mathbf{x}_i\right)\right)^2.\end{aligned}$$

Теорема (Грабовой 2020)

Пусть множество $\mathcal{G}_{rg}$ описывает класс линейных функций $\mathbf{g}\left(\mathbf{x}\right) = \mathbf{w}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}$. Тогда решение оптимизационной задачи эквивалентно решению задачи линейной регрессии $\mathbf{y}'' = \mathbf{X}\mathbf{w} + \varepsilon,\ \varepsilon \sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}\right)$, где $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = diag\left(\boldsymbol{\sigma'}\right)$ и $\mathbf{y}''$ имеют следующий вид:

$$\sigma'_i = \begin{cases}\sigma^2, \text{ если } i \not\in \mathcal{I} \\ \left(1-\lambda\right)\sigma^2 + \lambda\sigma_s^2, \text{ иначе,}\end{cases} \quad \mathbf{y}'' = \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{y}', \quad y'_i = \begin{cases}\sigma^2 y_i, \text{ если } i \not\in \mathcal{I} \\ \left(1-\lambda\right)\sigma^2 y_i + \lambda\sigma_s^2 s_i, \text{ иначе.}\end{cases}$$

Вычислительный эксперимент

Выборка FashionMNIST:
Изображения размера 28×28. Решается задача классификации с $K = 10$ классами.
Объем выборки для обучения и тестирования $m_{\text{train}} = 60000$ и $m_{\text{test}} = 10000$ объектов соответсвенно.

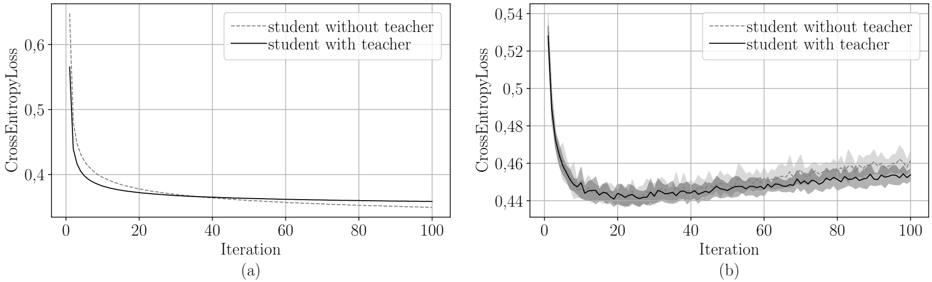
Синтетическая выборка:

$$\mathbf{X} = \left[\mathcal{N}\big(x_{ij}|0,1\big)\right]_{m\times n}, \qquad \mathbf{W} = \left[\mathcal{N}\big(w_{jk}|0,1\big)\right]_{n\times K},$$
$$\mathbf{S} = \text{softmax}\left(\mathbf{XW}\right), \qquad \mathbf{y} = \left[\text{Cat}\big(y_i|\mathbf{s}_i\big)\right],$$

где функция softmax берется построчно.
В эксперименте число признаков $n = 10$, число классов $K = 3$, объем выборки для обучения и тестирования $m_{\text{train}} = 1000$ и $m_{\text{test}} = 100$ объектов соответсвенно.

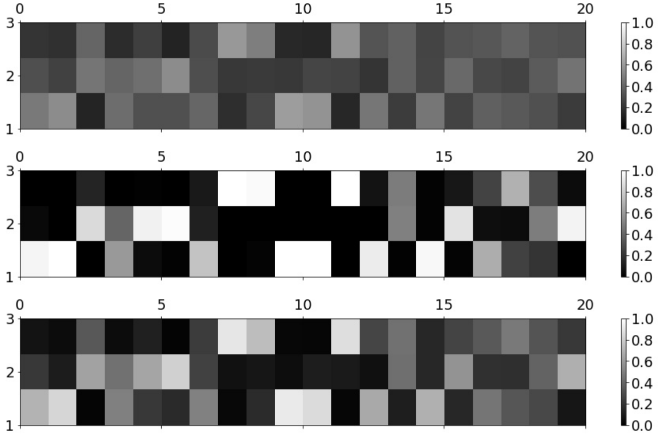
Выборка Twitter Sentiment Analysis:
Англоязычные твиты пользователей. Решается задача бинарной классификации текстовых сообщений.
Объем выборки для обучения и тестирования $m_{\text{train}} = 1{,}18$млн и $m_{\text{test}} = 0{,}35$млн объектов соответсвенно.

Выборка FashionMNIST



Кросс-энтропийная функция ошибки модели ученика: a) на обучающей выборке; b) на тестовой выборке.
На графике видно, что обе модели начинают переобучатся после 30-й итерации, но модель, которая получена путем дистилляции переобувается не так быстро, что следует из того, что ошибка на тестовой выборке растет медленней, а на обучающей выборке падает также медленней.

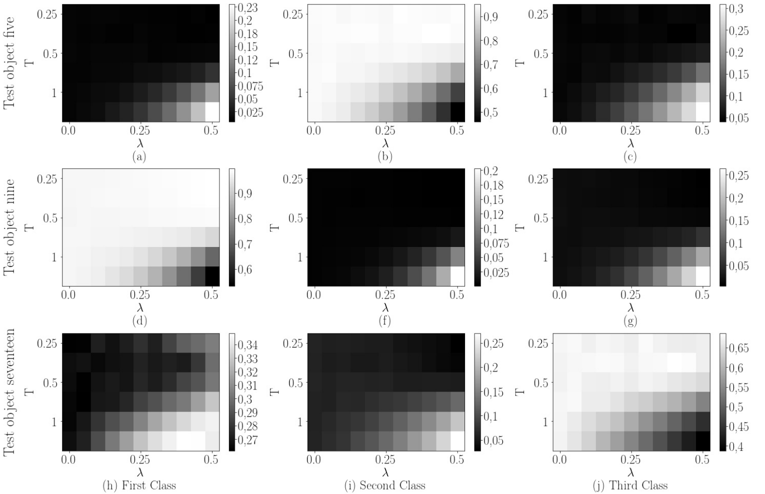
Синтетический эксперимент: распределение классов



Столбец — вероятность класса, строка — объекты. Сверху вниз: истинное распределение; без учителя; с учителем.

Модели ученика, которая использует информацию учителя более точно восстанавливает вероятности классов в пространстве оценок чем модель ученика, которая не использует информации учителя.

Синтетический эксперимент: анализ параметра λ и T



Зависимость распределения по классам при разных параметрах λ и T. Видно, что при увеличении температуры T распределение на классах становится более равномерным.

Выборка Twitter Sentiment Analysis

В твитах была выполнена следующая предобработка:

- все твиты были переведены в нижний регистр;
- все никнеймы вида “@andrey” были заменены на токен “name”;
- все цифры были заменены на токен “number”.

Описание моделей:

- модель учителя: модель на основе Bi-LSTM с ≈ 30 миллионов настраиваемых параметров;
- модель ученика: модель на основе предобученной модели BERT с 1538 настраиваемых параметров.

Model	CrossEntropyLoss	Accuracy	StudentSize
без учителя	$0{,}501 \pm 0{,}006$	$0{,}747 \pm 0{,}005$	1538
с учителем	$0{,}489 \pm 0{,}003$	$0{,}764 \pm 0{,}004$	1538

С таблицы видно, что при использовании учителя качество модели ученика увеличивается на 2% по сравнению с аналогичной моделью без использования меток учителя.

Сводная таблица вычислительного эксперимента

Dataset	Model	CrossEntropyLoss	Accuracy	StudentSize
FashionMnist	without teacher	$0{,}461 \pm 0{,}005$	$0{,}841 \pm 0{,}002$	7850
	with teacher	$0{,}453 \pm 0{,}003$	$0{,}842 \pm 0{,}002$	7850
Synthetic	without teacher	$0{,}225 \pm 0{,}002$	$0{,}831 \pm 0{,}002$	33
	with teacher	$0{,}452 \pm 0{,}001$	$0{,}828 \pm 0{,}001$	33
Twitter	without teacher	$0{,}501 \pm 0{,}006$	$0{,}747 \pm 0{,}005$	1538
	with teacher	$0{,}489 \pm 0{,}003$	$0{,}764 \pm 0{,}004$	1538

В таблице показаны результаты вычислительного эксперимента для разных выборок. Из таблицы видно, что точность аппроксимации выборки учеником улучшается при использовании модели учителя при обучении.

Заключение

Сделано:

1. поставлена вероятностная задача дистилляции моделей глубокого обучения;
2. проведен теоретический анализ предложенной вероятностной задачи;
3. результат анализа сформулирован в виде теорем: для задачи классификации, а также для задачи линейной регрессии;
4. теорема для задачи линейной регрессии показала, что обучения модели линейной регрессии с учителем сводится к задаче линейной регрессии со скорректированными ответами;
5. проведен вычислительный эксперимент для анализа предложенной модели.

Планируется:

1. обобщить предложенный метод на случай задачи регрессии более корректно;
2. использовать байесовский подход выбора моделей машинного обучения для решения данной задачи.

Публикации по теме

1. *Грабовой А.В., Бахтеев О.Ю., Стрижов В.В.* Определение релевантности параметров нейросети // Информатика и ее применения, 2019, 13(2).
2. *Грабовой А.В., Бахтеев О. Ю., Стрижов В.В.* Введение отношения порядка на множестве параметров аппроксимирующих моделей // Информатика и ее применения, 2020, 14(2).
3. *A. Grabovoy, V. Strijov.* Quasi-periodic time series clustering for human. Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, 41(3).
4. *Грабовой А.В., Стрижов В.В.* Анализ выбора априорного распределения для смеси экспертов // Журнал Вычислительной математики и математической физики, 2021. 61(5).
5. *Грабовой А.В., Стрижов В.В.* Анализ моделей привилегированного обучения и дистилляции // Автоматика и телемеханика, 2021 (текущая работа, на рецензировании).