Privilege Learning *

А. В. Грабовой[1], **В. В. Стрижов**[2]

Аннотация: **Ключевые слова**: смесь экспертов; байесовский выбор модели; априорное распределение.

DOI: 00.00000/00000000000000

1 Введение

2 Постановка задачи

Пусть задано множество объектов $\mathbf{\Omega}$ и пространство целевых переменных $\mathbb{Y}$:

$$\mathbf{\Omega}, \quad |\mathbf{\Omega}| = N,$$

где N — число объектов, множество $\mathbb{Y} = \{1, \cdots, K\}$ для задачи классификации, где K число классов, множество $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ для задачи регрессии. Для множества $\mathbf{\Omega}$ задано отображение в некоторое признаковое пространство $\mathbb{R}^n$:

$$\varphi : \mathbf{\Omega} \to \mathbb{R}^n,$$

где n размерность признакового пространства. Обозначим $\varphi(\mathbf{\Omega}) = \mathbf{X}$. Пусть для некоторых объектов $\mathbf{\Omega}^* \subset \mathbf{\Omega}$ задана привилегированная информация:

$$\varphi^* : \mathbf{\Omega}^* \to \mathbb{R}^{n^*}, \quad |\mathbf{\Omega}^*| = N^*,$$

где $N^* \leq N$ — число объектов с привилегированной информацией, n^* — число признаков в пространстве привилегированной информации. Обозначим $\varphi^*(\mathbf{\Omega}^*) = \mathbf{X}^*$.

Множество индексов объектов для которых известна привилегированная информация обозначим $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I} = \{1 \leq i \leq N |\ \text{для } i\text{-го объекта задана привилегированная информация}\}.$$

*Работа выполнена при поддержке РФФИ и правительства РФ.

[1]афиляция автора

[2]афиляция автора

Пусть на множестве привилегированных признаков задана некоторая функция (или эксперт) $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)$:

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n^*} \to \mathbb{Y}^*,$$

где $\mathbb{Y}^* = \mathbb{Y}$ для задачи регрессии и $\mathbb{Y}^*$ является единичным симплексом в пространстве размерности K (содержит вектора вероятностей каждого класса). Обозначим ответы модели $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = s_i$. Получим вектор ответом $\mathbf{s}$ модели учителя $\mathbf{f}$.

Требуется построить модель $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ над множеством исходных признаков:

$$\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Y}.$$

2.1 Без привилегированной информации

Пусть $\mathbf{g}$ выбирается из некоторого семейства:

$$\mathcal{G} = \{\mathbf{g} | \mathbf{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{Y}.\}$$

Для поиска $\hat{\mathbf{g}}$ воспользуемся методом максимального правдоподобия:

$$p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{g}) = \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}). \tag{2.1}$$

В качестве $\hat{\mathbf{g}}$ выберем то, которое максимизирует правдоподобие модели (2.1):

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g}\in\mathcal{G}} \prod_{i=1}^{N} p(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}). \tag{2.2}$$

2.2 С учетом привилегированной информации

Рассмотрим следующую вероятностную постановку, в которой должны быть выполнены следующие ограничения:

1. $\forall \omega \in \mathbf{\Omega}^*$ элементы $y(\omega)$ и $s(\omega)$ являются зависимыми величинами,
2. Если $|\mathbf{\Omega}^*| = 0$ то решение должно соответствовать решению (2.2)
3. Рассмотрим параметр $\lambda \in [0, 1]$ как уровень доверия к ответам модели $\mathbf{f}$. Будем рассматривать его как вероятность того, что на этапе обучения модель $\mathbf{g}$ выбирает ответ модели $\mathbf{f}$ как более верный чем метка y.

Рассмотрим совместное правдоподобие:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}, \lambda) = \prod_{i\not\in\mathcal{I}} p(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}) \prod_{i\in\mathcal{I}} p(y_i, s_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \lambda).$$

Расписав $p\big(y_i, s_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \lambda\big)$, получаем:

$$p\big(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}, \lambda\big) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p\big(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{1-\lambda}\big(y_i|s_i, \mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{\lambda}\big(s_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big).$$

Пусть y_i и s_i независимы, тогда получаем совместное правдоподобие:

$$p\big(\mathbf{y}, \mathbf{s}|\mathbf{X}, \mathbf{g}, \mathcal{I}, \lambda\big) = \prod_{i \notin \mathcal{I}} p\big(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{1-\lambda}\big(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{\lambda}\big(s_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big). \tag{2.3}$$

Используя (2.3) получаем следующую оптимизационную задачу для поиска $\hat{\mathbf{g}}$

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\max_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \prod_{i \notin \mathcal{I}} p\big(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{1-\lambda}\big(y_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big) \prod_{i \in \mathcal{I}} p^{\lambda}\big(s_i|\mathbf{X}, \mathbf{g}\big). \tag{2.4}$$

2.3 Случай регрессии

Рассмотрим следующие распределения:

$$\begin{aligned} p\big(y_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) &= N\big(y_i|\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{\Sigma}\big), \\ p\big(s_i|\mathbf{x}_i, \mathbf{g}\big) &= N\big(s_i|\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{\Sigma}\big), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{I}$. Подставляя (2.5) в (2.4) и прологарифмировав, получим:

$$\hat{\mathbf{g}} = \arg\min_{\mathbf{g} \in \mathcal{G}} \sum_{i \notin \mathcal{I}} \left(y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^2 + (1-\lambda) \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(y_i - \mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^2 + \lambda \sum_{i \in \mathcal{I}} \left(s_i - \mathbf{g}(\mathbf{x})\right)^2.$$

Список литературы

[1] *Vladimir Vapnik, Rauf Izmailov* Learning Using Privileged Information: Similarity Control and Knowledge Transfer // Journal of Machine Learning Research. 2015. No 16. pp. 2023–2049.

[2] *David Lopez-Paz, Leon Bottou, Bernhard Scholkopf, Vladimir Vapnik* UNIFYING DISTILLATION AND PRIVILEGED INFORMATION // Published as a conference paper at ICLR. 2016.