Матрицы

В лекция даны основные понятия про матрицы и действия над ними. Лекция будет опираться на учебник [1].

1 Основные обозначения в курсе

- $\forall$ — «для каждого», «для любого», «для всех»
- $\exists$ — «существует», «найдется»
- $:$ — «такой, что», «такие, что»
- $\to$ — «выполняется»
- $\Rightarrow$ — «следует»
- $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.
- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел чисел.
- $\sum_{j=1}^{N} x_j$ — сумма элементов от 1 до N.

2 Действительные чисела

Для начала нужно вспомнить, что такое действительные числа и как мы можем с ними работать.

Аксиомы для действительных чисел [2]:

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \to \ a + b = b + a$ — аксиома коммутативности сложениия,
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to \ a + (b + c) = (a + b) + c$ — аксиома ассоциативности сложениия,
- $\exists 0 \in \mathbb{R} : \ \forall a \in \mathbb{R} \to \ a + 0 = 0 + a = a$ — аксиома существование нулевого элемента,
- $\forall a \in \mathbb{R} \ \exists (-a) \in \mathbb{R} : \ a + (-a) = 0$ — аксиома существования противоположного элемента,
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \to \ a \cdot b = b \cdot a$ — аксиома коммутативности умножения,
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to \ a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ — аксиома ассоциативности умножения,
- $\exists 1 \in \mathbb{R} : \ \forall a \in \mathbb{R} \to \ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ — аксиома существование единичного элемента,
- $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0 \ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : \ a \cdot \frac{1}{a} = 1$ — аксиома существования обратного элемента,
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

3 Матрицы

Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 6 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{cases}, \tag{1}$$

В системе (1) нужно найти $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Обозначим $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ — назовем этот вектор как вектор решения системы (1), $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ — вектор правой части уравнения (1).

Теперь нужно как-то обозначить коэффициенты при $x_1,\ x_2,\ x_3$ в системе (1). Занесем их в некоторую «таблицу» $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Утверждается, что систему (1), можно записать в виде:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2}$$

Но, с чем у нас проблемы тогда? А с тем, как именно определяется операция умножения «таблицы» на вектор.

«Определение» «Таблица» с определенной на ней операциями сложения и умножения называется матрица.

Пока мы дали не очень строгое определение матрицы, но главное, что нужно понять с него, это то, что матрица это некоторая таблица размера $n \times m$, где $n, m \in \mathbb{N}$ (что значит, что в матрице n строк и m столбцов).

Размер матрицы будем обозначать индексами снизу, то есть запись $\mathbf{A}_{n\times m}$ означает, что в матрице $\mathbf{A}$ n строк и m столбцов.

Сложения двух матриц. Пусть заданы матрицы $\mathbf{A}_{n\times m}$ и $\mathbf{B}_{n\times m}$. Тогда матрицей $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ называется суммой матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ задаваемая уравнением (3).

$$\mathbf{A}_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{n\times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2m} + b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Как видно из уравнения (3) сумма двух матриц это просто поэлементная сумма. Важно заметить, что размеры матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ должны быть равны.

Умножения двух матриц. Пусть заданы матрицы $\mathbf{A}_{n\times k}$ и $\mathbf{B}_{k\times m}$. Тогда результатом умножения двух матриц является матрица $\mathbf{D}_{n\times m} = \mathbf{A}_{n\times k}\cdot\mathbf{B}_{k\times m}$, которая задается уравнением (4).

$$\mathbf{A}_{n\times k} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{k\times m} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{n\times m} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{k} a_{1j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{k} a_{1j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} a_{1j}b_{jm} \\ \sum_{j=1}^{k} a_{2j}b_{j1} & \sum_{j=1}^{k} a_{2j}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} a_{2j}b_{jm} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{j=1}^{k} a_{nj}b_{j1} & \sum_{j=1}^{k} a_{nj}b_{j2} & \cdots & \sum_{j=1}^{k} a_{nj}b_{jm} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Как видно из уравнения (4) каждый элемент матрицы $\mathbf{D}_{n\times m}$ это скалярное произведения соответсвующие скалярные произведения строки матрицы $\mathbf{A}_{n\times k}$ на столбец матрицы $\mathbf{B}_{k\times m}$. Важно обратить внимания на размерности матриц. Количество столбцов в первой матрице должно соответствовать количеству строк второй матрицы.

Обозначение:

$$\mathbf{0}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}_n = \mathbf{1}_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Аксиомы для операций над матрицами:

- $\forall \mathbf{A}_{n\times m}, \mathbf{B}_{n\times m} \to\ \mathbf{A}_{n\times m} + \mathbf{B}_{n\times m} = \mathbf{B}_{n\times m} + \mathbf{A}_{n\times m}$ — аксиома коммутативности сложениия,
- $\forall \mathbf{A}_{n\times m}, \mathbf{B}_{n\times m}, \mathbf{C}_{n\times m} \to\ \mathbf{A}_{n\times m} + (\mathbf{B}_{n\times m} + \mathbf{C}_{n\times m}) = (\mathbf{A}_{n\times m} + \mathbf{B}_{n\times m}) + \mathbf{C}_{n\times m}$ — аксиома ассоциатиивности сложениия,
- $\exists \mathbf{0}_{n\times m} : \forall \mathbf{A}_{n\times m} \to\ \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$ — аксиома существование нулевого элемента,
- $\forall \mathbf{A}_{n\times m} \exists (-\mathbf{A}_{n\times m}) : \mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ — аксиома существования протиивоположного элемента,
- $\forall \mathbf{A}_{n\times k}, \mathbf{B}_{k\times m}, \mathbf{C}_{m\times p} \to\ \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$ — аксиома ассоциатиивности умножения
- $\exists \mathbf{E}_n : \forall \mathbf{A}_{n\times n} \to\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}$ — аксиома существование единичного элемента,
- $\forall \mathbf{A}_{n\times k}, \mathbf{B}_{n\times k}, \mathbf{C}_{k\times m} \to\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{C} + \mathbf{B}\mathbf{C}$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

Как можно заметить количество **аксиом** по сравнению с количеством **аксиом** для действительных чисел уменьшилось на **2**. Для матриц не выполняется аксиома коммутативности умножения и существования обратного элемента (обратный элемент, если он существует обозначается $\mathbf{A}^{-1}$). Обратный элемент существует, только для квадратных матриц.

4 Решение системы линейных уравнений

Рассматривается случай, когда $\mathbf{A}_{n\times m}$ — квадратная, тоесть случай, когда $n = m$. Будем предполагать, что для $\mathbf{A}$ существует обратная матрица. Вернемся к нашему уравнению (2):

$$\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} = \mathbf{b}_{n\times 1}. \tag{5}$$

Теперь зная, как умножаются матрицы мы можем попытаться решить это уравнение. Заметим, что вектор это частный случай матрицы при количестве столбцов равном 1.

Как бы вы решали это уравнение, если бы $\mathbf{A}$ было бы просто числом? Просто поделили на $\mathbf{A}$ слева и справа? Другими словами вы бы умножили на обратный элемент к $\mathbf{A}$ и по аксиоме об обратном получили бы результат.

Проделаем тоже самое для матриц:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} &= \mathbf{b}_{n\times 1} \\
\mathbf{A}^{-1}_{n\times n}\mathbf{A}_{n\times n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} &= \mathbf{A}^{-1}_{n\times n}\mathbf{b}_{n\times 1} \\
\\
\mathbf{E}_{n} \cdot \mathbf{x}_{n\times 1} &= \mathbf{A}^{-1}_{n\times n}\mathbf{b}_{n\times 1} \\
\mathbf{x}_{n\times 1} &= \mathbf{A}^{-1}_{n\times n}\mathbf{b}_{n\times 1}, \qquad (6)
\end{aligned}$$

И так получаем, что решение уравнения (1) задается уравнением (6), если решение существует.

5 Еще раз важные замечания

При работе с матрицами всегда нужно смотреть за размерностями самих матриц. Нужно всегда контролировать которая матрица умножается справа, а какая слева, так-как для матричного умножения не выполняется аксиома коммутативности. Также стоит помнить, что обратный элемент матрицы существует не всегда.

Список литературы

[1] *Беклемишев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. Москва, 2006.

[2] *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. Москва, 2010.