0.0.1 Определение кристаллической решетки.

В параграфе (...) мы определили условия для изометричности отображения u:

$$\frac{\partial\mu^{k'}}{\partial\mu^i}(p)\frac{\partial\mu^{l'}}{\partial\mu^j}(p)\mathrm{g}_{kl}(u(p)) = \mathrm{g}_{ij}(p). \tag{1}$$

Если пространство Евклидово то

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p)\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p)\delta_{kl} = \delta_{ij}. \tag{2}$$

где $x^{k'} = x^k \circ u$.

Очивидно производная по x^m от (**??**) будет равна нулю: (зачем брать производную от метрического тензора мы подробнее рассмотрим в параграфе (...))

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p)\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p)\delta_{kl} = \frac{\partial}{\partial x^m}\delta_{ij} \Leftrightarrow$$
$$\left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^m\partial x^i}(p)\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p) + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p)\frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^m\partial x^j}(p)\right)\delta_{kl} = 0 \tag{3}$$

Циклическая перестановка индексов i, j, m дает:

$$\left(\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^i\partial u^m}(p)\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p) + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m}(p)\frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^i\partial^j}(p)\right)\delta_{kl} = 0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^j\partial u^i}(p)\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p) + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i}(p)\frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^j\partial^m}(p)\right)\delta_{kl} = 0 \tag{5}$$

Складывая (4) с (3) и вычитая (5) найдем:

$$\frac{\partial^2 u'^k}{\partial u^m\partial u^i}(p)\frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p)\delta_{kl} = 0. \tag{6}$$

умножая последнее выражение на $\frac{\partial u^j}{\partial u^{r'}}$ и суммируя по j получим:

$$\frac{\partial^2 u^{r'}}{\partial u^i\partial u^m}(p) = 0. \tag{7}$$

Это выражение верно для любых $1 \leq i, m, r \leq n$ и для любых p. Интегрирование дает:

$$f_i^r \doteqdot \frac{\partial u^{r'}}{\partial u^i} = \mathrm{constant}; \tag{8}$$

После второго интегрирования, окончательно получим:

$$u^r \circ \phi = u^{r'} = f_i^r u^i + s^r, \tag{9}$$

где s^r является константой и f_i^r является компонентой (r, i) постоянной матрицы F.

Уравнение (2) может быть записано в матричном виде:

$$^t\mathbf{F}\,\mathbf{F} = \mathbf{I}_n, \tag{10}$$

Отсюда видно, что $\mathbf{F}$ является ортогональной матрицей.

В другой координатной системе $x = (x^1; ...; x^n)$, определенной преобразованием $x = \mathbf{B}u, \mathbf{B} \in GL_n(\mathbb{R})$, матричное уравнение (2) запишется:

$$^t\mathbf{F}\,G\mathbf{F} = \mathbf{G}, \tag{11}$$

где $\mathbf{G}$ матрица представляющая метрический тензор в координатной системе x; $\mathbf{F}$ все еще является постоянной матрицей с определителем ± 1, но уже не является ортогональной.

Уравнение (9) в матричном виде запишется:

$$u' = \mathbf{F}u + s, \tag{12}$$

где $s \in \mathbb{R}^n$ является константой. $\mathbf{F}$ и s называются соответственно *матричной частью* и *трансляционной частью* изометрии . Множество всех Евклидовых изометрий называется Евклидовой группой изометрии.

Соотношение (12) часто записывается в развернутом виде, где матричная и трансляционная части объединяются в одну матрицу большего размера:

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ \vdots \\ u^{n'} \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} f_1^1 & \cdots & f_n^1 & s^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_n^n & s^n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ \hline 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Такое представление является практичным, но имеет тот недостаток, что вектор имеет дополнительную компоненту, что не имеет физического смысла. Другой способ совместного представления трансляционной и матричой частей, без дополнительного измерения, состоит в том, что используется техника дифференцирования; уравнение (9) может быть записано в виде:

$$u^{i'} = f_j^i u^j + s^i = (f_j^i u^j + s^i\partial_i u^j) = (f_j^i + s^i\partial_i)u^j. \tag{14}$$

или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ \vdots \\ u^{n'} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_1^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s^1\partial_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^n\partial_n \end{pmatrix}\right] \tag{15}$$

Таким образом изометрчные преобразования Евклидового многообразия можно записать в виде:

$$u' = \bar{\mathbf{F}}u, \tag{16}$$

где

$$\bar{F} \doteqdot F + S. \tag{17}$$

В случае, когда $F = I_n$, изометрия соответствует чистой трансляции и можно записать $\bar{S} \doteqdot I_n + S$. Множество чистых трансляций обозначается $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$.

Однако, помимо структуры группы это множество наделено также структурой многообразия. Действительно, с помощью тривиальной параметризации:

$$(s^1, ..., s^n) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 + s^1\partial_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & 1 + s^n\partial_n \end{pmatrix}, \quad (18)$$

может быть установлено соответствие многообразию $\mathbb{R}^n$. В этом случае трансляционная часть группы изометрии является группой Ли.

С каждодой группой Ли связана алебра Ли, которая соответствует касательному пространству к группе в начале координатной системы.

Преимущество теории Ли в том, что свойства групп могут быть получены изучая соответствующие алгебры, что эквивалентно изучению касательных пространств к группам Ли. В случае группы трансляции, ее Ли алгебра получается вычисление производной матрицы $\bar{S}$ по s^i в точке $s = 0$ (тка, что в $s = (s^1; ...; s^n) = (0; ...; 0)$):

$$\left.\frac{\partial \bar{S}}{\partial s^i}\right| \doteqdot W_i, \quad (19)$$

где

$$W_i = \begin{vmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \partial_i & \\ & & & \ddots \\ 0 & & & 0 \end{vmatrix} \quad (20)$$

В соответствии с теорией многобразий W_i это касательный вектор группы $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ в точке $s = 0$, а набор матриц $\{W_i | 1 \leq i \leq n\}$ составляет базис касательного пространства группы $\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n)$ в $s = 0$.

Этот объект, который имеет структуру касательного пространства, обозначается $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ а базисные векторы $W_1, ..., W_n$ называются каноническим базисом $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$. Любой вектор $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ может быть записан как линейная комбинация этих канонических базисных векторов.

Можно представлять алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли $\mathcal{G}$ как касательное пространство, так как они изоморфны. Само название "алгебра Ли"указывает, что касательное пространство в точке, в данном случае образует алгебру. Действительно, наряду с операцией сложения, на векторном пространстве определена билинейная функция $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, называемая скобкой Ли, которая кососимметрична и удовлетворяет тожеству Якоби. Если матрицы имеют обратные, то скобка Ли является просто коммутатором двух матриц:

$$[A, B] = AB - BA, GL_n(\mathbb{R}), \forall A, B \in GL_n(\mathbb{R}). \quad (21)$$

В частном случае трансляций, $\mathfrak{trans}(\mathbb{R})$ замкнута относительно коммутатора (т.е. взятие коммутатора в $\mathfrak{trans}$ не выводит из $\mathfrak{trans}$; действительно, для любых двух матриц W_i и W_j, $1 \leq i, j \leq n$, представляющих векторы канонического базиса $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$= 0_n \quad \in \mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n). \quad (22)$$

$\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ в этом случает является алгеброй.

Соотношение между алгеброй Ли и соответствующей ей групой Ли устанавливается експоненциальным соотношением: каждый элемент группы может быть записан как експонента элемента из соответствующей алгебры Ли. В случае инвертируемых матриц, експоненциальное отображение обычно дается разложением експоненциальной функции в степенной ряд.

В случае группы трансляции, и когда векторы выражаются в виде $s^i W_i$, где W_i канонический вектор принадлежащий $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ и $s^i \in \mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} \exp(s^i W_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(s^i W_i)^k = \\ I_n + s^i W_i + \frac{1}{2}(s^i W_i)^2 + \frac{1}{3!}(s^i W_i)^3 + ..., \end{gathered} \quad (23)$$

так что:

$$\exp(s^i W_i) = \begin{pmatrix} 0 & & & \emptyset \\ & \ddots & & \\ & & a_i^i & \\ & & & \ddots \\ & \emptyset & & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

где

$$a_i^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(s^i \partial_i)^k \quad (25)$$

Применяя $\exp(W_i)$ в точке с координатами $u = (u^1; \ldots; u^n)$ в $n-$размерном евклидовом многобразии, получим:

$$\begin{gathered} \exp(s^i W_i)u = \\ = I_n u + s^i W_i u + \underbrace{\frac{1}{2}(s^i W_i)^2 u}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{3!}(s^i W_i)^3 u}_{=0} + \ldots = \\ = u + s^{(i)}, \end{gathered} \quad (26)$$

где $s^{(i)} = (0; \ldots; s^i; \ldots; 0)$, и заметим, что только первые два члена разложения дают вклад в выражение.

Для произвольного вектора $V \in \mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$:

$$V = \sum_{i=1}^{n} s^i W_i, \tag{27}$$

где $s^1, \dots, s^n$ являются компонентами V в каноническом базисе, имеем:

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right\} = \prod_{i=1}^{n} \exp(s^i W_i), \tag{28}$$

так как $[W_i; W_j] = 0_n$, для всех $1 \le i, j \le n$. Тогда, так как $\partial_i \partial_j u = 0$:

$$\begin{aligned} &\exp\left\{\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right\} u = \prod_{i=1}^{n} \exp(s^i W_i) u = \\ &= \prod_{i=1}^{n} (I_n + s^i W_i) u = \left(I_n + \sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right) u. \end{aligned} \tag{29}$$

В заключение,

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right) u = \bar{S} u, \tag{30}$$

тогда как $\exp(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i)$ и начальная матрица $\bar{S}$ не равны. Но так как их действия на натуральные координаты u в $\mathbb{R}^n$ дают тот же самый результат то можно написать:

$$\bar{S} \equiv \exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right) \tag{31}$$

и утверждать, что они тождественны (р 24? перевод?),.

Для удобства можно заменить тожественность на равенство, и определить $\bar{S}$ как:

$$\bar{S} = \exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right), \tag{32}$$

и принять, что вклад первых двух членов последовательности обусловлен тем, что рассматриваемое многообразие Евклидово. Такой подход имеет практическую ценность, т.к. позволяет определить трансляции не только на евклидовых но и на более общих многообразиях. Для этого необходимо записать соотношение 9 так

$$u'^i = \sum_{j=1}^{n} \left(\delta^i_j + \delta^i_j \sum_{k=l}^{n} s^l \partial_l\right) u^j; \tag{33}$$

В матричной записи:

$$u' = \left(I_n + I_n \sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right) u. \tag{34}$$

Обобщение евклидовой изометрии все еще представляется матрицей $\bar{F} = F + S$, где F как обычно матричная часть, а S имеет другую форму, и является скалярной матрицей:

$$S = \begin{pmatrix} \sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l & & \emptyset \\ & \dots & \\ \emptyset & & \sum_{k=1}^{n} s^l \partial_l \end{pmatrix} \tag{35}$$

В случае, когда $F = I_n$, матрица $\bar{S} \doteqdot I_n + S$ соответствует чистой трансляции. Тогда множество всех матриц $\bar{S}$ обозначается $Trans(\mathbb{R}^n)$, даже если $\bar{S}$ имеет другую форму чем прежде. Вычисляя производную от $\bar{S}$ по s^i в точке $s = 0$ получим:

$$\left.\frac{\partial \bar{S}}{\partial s^i}\right|_{s=0} \doteqdot W_i, \tag{36}$$

где

$$W_i = \begin{pmatrix} \partial_i & & \emptyset \\ & \dots & \\ \emptyset & & \partial_i \end{pmatrix} \tag{37}$$

W_i касательный вектор $Trans(\mathbb{R}^n)$ в начале координат; множество $\{W_i | 1 \le i \le n$ является каноническим базисом касательного пространства $Trans(\mathbb{R}^n)$ в начале координат. Это пространство, так же обозначается $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ и имеет структуру алгебры, так как замкнуто относительно операции коммутирования:

$$[W_i; W_j] = 0_n, \ \forall 1 \le i, j \le n. \tag{38}$$

Заметим, что эти коммутационные соотношения такие же как прежде.

Пусть $V = \sum_{i=1}^{n} s^i W_i \ \in \mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$, где $s^1, \dots, s^n$ компоненты V в каноническом базисе $\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$; тогда:

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right)^k, \tag{39}$$

следовательно:

$$\begin{aligned} &\exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i W_i\right) = \\ &= \begin{pmatrix} \exp(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i) & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & \exp(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{40}$$

Эта матрица не тождественна $\bar{S}$. Тем не менее, результат ее действия на натуральные координаты u тождественен $\bar{S} u$, так как:

$$\begin{aligned} &\exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i\right) u^i = \\ &= \left[1 + \left(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i\right)^2 + \dots\right] u^i = \\ &= u^i + s^i + 0 + \dots, \end{aligned} \tag{41}$$

Таким образом, матрица S может быть заменена на $\tilde{S} \doteqdot I_n \exp(\sum_{i=1}^{n})$ и $Trans(\mathbb{R}^n)$ может быть определена как:

$$Trans(\mathbb{R}^n) = \\ = \left\{ \tilde{S} = I_n \exp\left(\sum_{i=1}^{n} s^i \partial_i\right) \middle| s^i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n \right\} \tag{42}$$

Важно то, что $Trans(\mathbb{R}^n)$ генерирует трансляции не только в $\mathbb{R}^n$ но так же в любом многообразии размерности n погруженном в $\mathbb{R}^m$, $m \ge n$. Действительно, пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ является многообразием размерности $n \le m$, $\mathcal{U}$ открытое множество в M, $\tilde{\mathcal{U}}$ открытое множество в $\mathbb{R}^m$ и

$$\begin{aligned} H : \tilde{\mathcal{U}} &\to \mathcal{U} \subset M \\ u &\longmapsto H(u), \end{aligned} \tag{43}$$

$u = (u^1; \ldots; u^n)$ и $H = (h^1; \ldots; h^m$, локальная параметризация M. Тогда:

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right) h^i(u) = \\ = h^i(u) + \sum_{l=1}^{n} s_l \frac{\partial h^i(u)}{\partial u^l} + \frac{1}{2} \sum_{l_1,l_2=1} s^{l_1} s^{l_2} \frac{\partial_2 h^i(u)}{\partial u_{l_1} \partial u_{l_2}} + \ldots \\ + \frac{1}{r!} \sum_{l_1,\ldots,l_r=1} \frac{\partial_r h^i(u)}{\partial u^{l_1} \ldots \partial u^{l_r}} + \ldots \tag{44}$$

Это выражение является в точности разложением в ряд Тейлора функций $h^i(u)$ в окрестности точки с натуральными координатами u, при условии (provided) $H(u+s) \in \mathcal{U}$. Таким образом:

$$\exp\left(\sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right) h^i(u) = h^i(u+s), \tag{45}$$

матрица $\tilde{S}$ переносит точку $H(u)$ принадлежащую M в точку $H(u+s)$ которая также принадлежит M. Заметим, что $\tilde{S}$ при этом остается матрицей размера $m \times m$ а не $n \times n$ матрицей, даже если размерность многообразия $m \le n$.

Все эти результаты подведены и проиллюстрированы следующими определением, леммой и последующим примером.

Определение 0.0.1 Пусть $\mathbb{R}^n$ евклидово многообразие размерности n, наделенное натуральной координатной системой $u = (u^1; \ldots; u^n)$. Множество

$$Trans(\mathbb{R}^n) = \left\{ \tilde{S} = I_n \exp\left(\sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right) \middle| s^l \in \mathbb{R} \right\}$$

где

$$\left\{ \partial_l = \frac{\partial}{\partial u^l},\ 1 \le l \le n \right\}$$

называется *группой трансляции* в $\mathbb{R}^n$ (или группой матричных операторов представляющих трансляции в $\mathbb{R}^n$). Любые елемнты этой группы действуют на точках $\mathbb{R}^n$, с координатами u по правилу

$$u \longmapsto \tilde{S}u = u + s,$$

где $s = (s^1; \ldots; s^n)$.

ТЕОРЕМА 0.0.1 Trans $(\mathbb{R}^n)$ является группой Ли, т.е. гладким многообразием которое также является группой, параметризованной отображением:

$$(s^1; \ldots; s^n) \longmapsto I_n \exp\left(\sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right). \tag{46}$$

Множество

$$\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n) = \\ = \left\{ V = \sum_{i=1}^{n} s^i W_i \middle| W_i = I_n \partial_i,\ 1 \le i \le n \right\}$$

имеет структуру алгебры, и называется алгеброй Ли соответствующей группы Ли $Trans(\mathbb{R}^n)$. Матрицы W_i могут быть получены из $\tilde{S}$ вычислением производной от $\tilde{S}$ по s^i в точке $s = 0$:

$$W_i = \left. \frac{\partial S}{\partial s^i} \right|_{s=0}. \tag{47}$$

$\mathfrak{trans}(\mathbb{R}^n)$ является касательным пространством к $Trans(\mathbb{R}^n)$ в начале координат. Множество матриц $\{W_i | l \le i \le n\}$ образует базис этого пространства; это канонический базис в параметризации (46).

Следствие. Пусть M многообразие размерности n погруженное в $\mathbb{R}^m$, $n \le m$. Пусть $\mathcal{U} \subset M$, $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ являются двумя открытыми множествами, и

$$\begin{aligned} H : \tilde{\mathcal{U}} &\longrightarrow \mathcal{U} \\ u &\longmapsto H(u), \end{aligned}$$

$u = (u^1; \ldots; u^n)$ и $H = (h^1; \ldots; h^m)$, локальная парматеризация M. Тогда, любой элемент множества

$$Trans(M) = \left\{ \tilde{S} = I_m \exp\left(\sum_{l=1}^{n} s^l \partial_l\right) \middle| s^l \in \mathbb{R} \right\}$$

где

$$\partial_l = \frac{\partial}{\partial u^l},\ 1 \le l \le n$$

генерирует трансляцию $H(u+s)$ в M, где $H(u) \in \mathcal{U}$. $Trans(M)$ и $Trans(\mathbb{R}^n)$ отличаются лишь размерностями тождественной матрицы.

Замечание: $Trans(M)$ в действительности не имеет структуры группы, некоторые элементы этого множества выводят точки $\mathcal{U} \subset M$ из $\mathcal{U}$, данный случай неопределен. Этот случай не существенен пока рассматриваются только многообразия которые могут быть параметризованы взаимно-однозначным отображением $H : \mathbb{R}^n \to M$. В этом случае $Trans(M)$ является группой и называется группоя трансляции в M.

1 Пример. Пусть $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ является двумерной сферой радиуса R, параметризованной следующим отображением:

$$(\theta, \varphi) \longmapsto (R\sin\theta\cos\varphi; R\sin\theta\sin\varphi; R\cos\theta).$$

Любой элемент группы трансляции на данной сфере может быть записан в вдие:

$$\tilde{S} = I_3 \exp(s^\theta \partial_\theta + s^\varphi \partial_\varphi)$$

где $\partial_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}$ и $\partial_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}$. В частном случае, когда $s^\varphi = 0$, мы имеем:

$$\tilde{S} = I_3 \exp(s^\theta \partial_\theta) = I_3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s^\theta \partial_\theta)^k}{k!}.$$

Применяя эту матрицу к точкам $\mathbb{S}^2$, например к северному полюсу $(0; 0; R)$, получим:

$$\begin{pmatrix} \exp(s^\theta\partial_\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(s^\theta\partial_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(s^\theta\partial_\theta \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}_{(\theta,\varphi)=(0;0)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + s^\theta \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{(s^\theta)^2}{2!} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix} +$$
$$+ \frac{(s^\theta)^3}{3!} \begin{pmatrix} -R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} +$$
$$+ \frac{(s^\theta)^4}{4!} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R \end{pmatrix} + \ldots =$$

Замечаем, первые компоненты этого разложения образуют разложение синуса а третьи компоненты образуют разложение косинуса. Поэтому:

$$\begin{pmatrix} \exp(s^\theta\partial_\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(s^\theta\partial_\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \exp(s^\theta\partial_\theta \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} R\sin\theta\cos\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\theta \end{pmatrix}_{(\theta,\varphi)=(0;0)} =$$
$$= \begin{pmatrix} R\sin s^\theta \\ 0 \\ R\cos s^\theta \end{pmatrix}$$

Это последнее выражение соответствует координатам точки на сфере которые лежат на меридиане. Расстояние от северного полюса равно длинне кривой на этом меридиане соединяющим полюс и эту точку

$$\updownarrow = \int_0^{s^\theta} R dt = Rs^\theta.$$

0.0.2 Действие однопараметрической группы трансляций на многообразии.

Концепция действия группы на векторном пространстве относительно хорошо изучена, так как она напрямую связана с теорией представлений. Тем не менее, необъодимо помнить, что действие групп не ограничено только векторными пространствами; важным приложением является случай многообразий.

Определение 0.0.2 Пусть $(\mathcal{G}; \circ)$ является группой, с внутренней операцией $\circ$, и нейтральным елементом e, и M - многообразие. Левое действие $\mathcal{G}$ на M это отображение:

$$\begin{array}{llll} \mu: & \mathcal{G} \times M & \longrightarrow & M \\ & (g; p) & \longrightarrow & \mu(g; p) \end{array}$$

которое удовлетворяет следующим условиям

$$\mu(e; p) = p, \quad \forall p \in M;$$
$$\mu(g_2; \mu(g_1; p)) = \mu((g_2 \circ g_1); p),$$
$$\forall p \in M,\ \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G};$$

Действие группы трансляции на многообразии M определяется следующим образом:

Определение 0.0.3 Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ градкое n-мерное многообразие параметризованное гладким отображением $H : \mathbb{R}^n \to M$, $H = (h^1; \ldots h^m)$. Левое действие μ_T группы трансляции $Trans(M)$ на M записывается так:

$$\begin{array}{llll} \mu_T: & Trans(M) \times M & \to & M \\ & (\tilde{S}; H(u)) & \longmapsto & \mu_T(\tilde{S}; H(u)) = \tilde{S}H(u), \end{array}$$

где $H(u)$ является вектор-столбцом составленным из $h^1(u), \ldots, h^m(u)$. Заметим, что $H(u)$ соответствует натуральным координатам в $\mathbb{R}^m$ в точке на M.

Замечание: Используя разложение Тейлора, получим:

$$\tilde{S}H(u) = H(u + s).$$

Мы можем записать:

$$\tilde{S}H(u) = (H \circ T \circ H^{-1})(H(u)),$$

где обозначено $T(u) = \tilde{S}u$. Действие $Trans(M)$ на M следовательно, можно определить как:

$$(\tilde{S}; H(u)) \longmapsto (H \circ T \circ H^{-1})(H(\tilde{S}u),$$

Строго говоря, $Trans(M)$ не является в точности группой трансляции на многообразии M, а является ее матричным представлением. Елементы этой группы могут быть также представлены $H \circ T \circ H^{-1}$, действие которой определено выше.

В теории Ли важную роль играют *однопараметрические подгруппы*. Однопараметрическая подгруппа в группе Ли $\mathcal{G}$, это гладкая кривая γ такая, что $\gamma(t_1+t_2) = \gamma(t_1, \gamma(t_2)$, которая соответствует максимальной интегральной кривой элемента ассоциированной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, и берет сове начало на нейтральном элемете e группы. Экспоненциальное отображение отправляет элементы V(которое является алгеброй Ли $\mathfrak{g}$), в $\gamma_V(1) \in \mathcal{G}$ и $t \mapsto \exp(tV)$ является однопараметрической подгруппой генерируемой V. В случае когда рассматриваемой группой Ли является $GL_n(\mathbb{R})$ (множество всех $n \times n$ инвертируемых матриц), эспоненциальное отображение дается разложением по степеням $\exp V = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{V^k}{k!}$. Формальное расширение этих результатов до группы трансляции дается в следующих определениях:

Определение 0.0.4 Однопараметрическая подгруппа в $Trans(M)$ это отображение

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & Trans(M) \\ t & \longmapsto & \exp(tV), \end{array}$$

где:

$$V = \sum_{j=1}^{n} s^j W_j, \text{ где } W_j = I_m \partial_j.$$

При $t = 1$, имеем $\exp$ так, что $\tilde{S}$, матрица ассоциируется с трансляцией s.

Определение 0.0.5 Левое действие однопараметрической подгруппы $Trans(M)$ на точках многообразия M, с координатами $H(u)$ записывается так:

$$(\exp(tV); H(u)) \longmapsto \exp(tV)H(u) = H(u+st),$$

где $s = (s^1; \ldots; s^n)$. Таким образом, однопараметрическая подгруппа трансляции, это кривая в $Trans(M)$ образующая кривую в M.

0.0.3 Инфинитиземальные трансляции и касательное простарнство.

Пусть $t \mapsto \exp(tV)H(u) \subset M$ кривая проходящая через точку $H(u)$, генерируемая однопараметрической подгруппой $t \mapsto \exp(tV) \subset Trans(M)$, $V = \sum_{j=1}^{n} s^j W_j = I_m \sum_{j=1}^{n} s^j \partial_j$, на $H(u)$. Точка, безконечно близкая к точке $H(u)$ находится из соотношения

$$\exp(dtV)H(u) = H(u+sdt), \tag{48}$$

где dt инфинитиземальный элемент t. Используя разложение Тейлора, получим:

$$H(u+sdt) \cong H(u) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial u^j}(u) s^j dt \tag{49}$$

в компонентах:

$$h^i(u+sdt) \cong h^i(u) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i}{\partial u^j}(u) s^j dt. \tag{50}$$

Так как dt очень мало, высшими членами можно пренебречь. Последние два выражения могут быть так же получены рассматривая експоненциальное отображение с членами только нулевого и первого порядков (членами высших порядков пренебрегая):

$$\exp(dtV) \cong I_m + dtV. \tag{51}$$

Точка с координатами $H(u+sdt)$ может рассматриватся как окончание вектора приложенного в точке с координатами $H(u)$. Действительно, касательный вектор к кривой $t \mapsto H(u+st)$ в точке с координатами $H(u)$ дается выражением:

$$v = \frac{d}{dt} H(u+st)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial u_j}(u) s^j; \tag{52}$$

в компонентах:

$$v^i = \frac{d}{dt} h^i(u+st)\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i}{\partial u^j}(u) s^j. \tag{53}$$

Умножая эти соотношения на dt, получим инфинитиземальный касательный вектор в точке с координатами $H(u)$, с тем же направлением что и v:

$$vdt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H(u)}{\partial u_j}(u) s^j dt; \tag{54}$$

в компонентах:

$$v^i dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i(u)}{\partial u^j}(u) s^j dt; \tag{55}$$

vdt есть в точности второй член в разложении тейлора (**??**).

Выражение (**??**), может быть переписано в виде:

$$v = \sum_{j=1}^{n} s^j \partial_j H(u) = \sum_{j=1}^{n} s^j W_j H(u), \tag{56}$$

где $W_j = I_m \partial_j$ паказывает что вектор лагебры Ли $\mathfrak{trans}(M)$ генерирует вектор в касательном пространстве к M в точке с координатами $H(u)$. В частности, любой базисный вектор $W_i \in \mathfrak{trans}(M)$ генерирует вектор:

$$w_i = W_i H(u) = \frac{\partial H}{\partial u^i}(u), \tag{57}$$

который является i-ым каноническим базисным вектором касательного к M пространства в точке с координатами $H(u)$, при параметризации H. Как любое касательное пространство к M, имеет туже самую размерность, что и алгебра Ли $\mathfrak{trans}(M)$,