0.1 Евклидовы пространства.

0.1.1 Определение евклидовых пространств.

Пусть $\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел. При этом каждая тчка $x \in= \mathbb{R}$ некоторой прямой находится во взаимно однозначном соотствии с вещественным числом, которое обозначается той же буквой x и назыается координатой токчи. Расстояние l между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}$, по определеию равно $l(x, y) = |x - y|$.

Обозначим через $\mathbb{R}^n$ прямое произведение n прямых:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}. \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ - произвольное натуральное число, которое называется *размерностью* пространства $\mathbb{R}^n$. Точкой x являвется упорядоченный набор n вещественных чисел $x^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 1, ..., n$, которые называются *декартовыми координатами* данной точки.

$$x = \{x^\alpha\} = \{x^1, ..., x^n\} \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Каждый из сомножителей входящих в (1), называется *координатной прямой*.

Следует различать точку пространства x и ее координаты, которые зависят от выбора системы координат.

Пусть декартовы координаты в терехмерном простарнстве таковы, что точке x соответствуют три ее координаты (x_1, x_2, x_3), точке y соответствуют координаты y_1, y_2, y_3, то квадрат длинны прямолинейного отрезка, соединяющего точки x и y, ревен

$$l^2 = |x - y| = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 + (x^3 - a^3)^2. \tag{3}$$

Определение 0.1.1 Пространство в котором *декартовы координаты* обладают свойством (3) называется *евклидовым*.

Пусть у нас имеется начало координат - точка O. С каждой точкой евклидова пространства можно связать вектор идущий из тчки O. Пусть имеются два таких вектора $\xi = (x^1, x^2, x^3)$ и $\zeta = (y^1, y^2, y^3)$, ведущих из точки O в точки P и Q соответственно. Эти векторы можно покоординатно скалывать и умножать на число. Поэтому Евклидово пространство зачастую рассматривается как линейное (или векторное) пространство в котором расстояние вычисляется по формуле 3

Выберем в $\mathbb{R}^n$ три единичных вектора с координатами $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$. Тогда любой вектор ξ с коордитанами (x^1, x^2, x^3) имеет вид $\xi = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. В евклидовых пространствах нет разницы между верхними и нижними индексами. (см.далее).

0.1.2 Дифференцирование вектор-функций.

Определение 0.1.2 Говорят, что дана вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, если каждому значению вещественного переменного t в некоторой области изменения $t_1 \le t \le t_2$ отвечает вполне определенное значение вектора $\mathbf{r}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \;\; t_1 \le t \le t_2, \tag{4}$$

Фиксируем в пространстве некоторую точку O, рис.1, и будем при всех значениях t откладывать вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$ именно из этой точки. Тогда точка M опишет тогда в пространстве кривую как функцию скалярного агрумента t. Само уравнение (4), выражающее радиус-вектор точки M как функцию скалярного аргумента, называется *векторным параметрическим представлением кривой.*

Установим связь с координатным представлением кривой. Установим в точке O систему прямоугольных декартовых координат в пространстве и обозначим через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ единичные базисные векторы. Тогда (4) можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \tag{5}$$

Но координаты вектора $\mathbf{r}$ совпадают с координатами точки $M(t)$, так что

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t), \;\; t_2 \le t \le t_1. \tag{6}$$

В результате мы перешли от векторного представления кривой (4) к ее параметрическому представлению.

Определение 0.1.3 Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ определена на множестве $\{t\}$. Говорят, что векторная функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в точке t_0, если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t)}{\mathbf{r}(t_0)} \tag{7}$$

Обозначение: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{r}'(t)$

Геометрический смысл производной векторной функции ясен из рис.1.

Составим разность двух значений этой вектор-функции:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{M_0 M}, \tag{8}$$

т.е приращение вектор-функции есть вектор-ходра на кривой, соединяющей исходную точку M_0 с новой точкой M. Разделим приращение $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ на приращение аргумента $t - t_0$ и рассмотрим частное

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \tag{9}$$

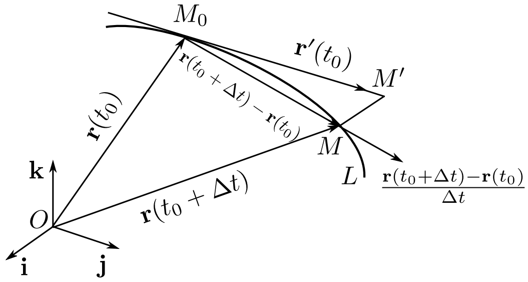

Рис. 1: Вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в точке M

Так как производилось деление вектора на число получаем вновь вектор. Заставим теперь t стремитрся к t_0. Тогда, значение $\mathbf{r}(t)$ стремится к $\mathbf{r}(t_0)$ как к пределу, т.е

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| \xrightarrow{t\to t_0} 0, \tag{10}$$

т.е длинна хорды стремится к нулю при $t \to t_0$, точка M на кривой стремится в точку M_0. В частном (9) числитель и знаменатель оба стремятся к нулю при $t \to t_0$. Сам же вектор (9) должен стемится при этом к определенному вектор-пределу, который называется производной вектора $\mathbf{r}(t)$

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{t\to t_0} \mathbf{r}'(t_0), \tag{11}$$

Итак, производная $\mathbf{r}'(t)$ от вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ направлена по касательной в точке t_0 к кривой, которую $\mathbf{r}(t)$ в нашем истолоковании определяет.

По самому определению предела соотношение (11) утверждает, что вектор

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{r - t_0} - \mathbf{r}'(t_0) \tag{12}$$

стремится к нулю при t, стремящемся к t_0:

$$\alpha \xrightarrow{t\to t_0} 0 \tag{13}$$

Перепишем (12), умножев обе его части на $t - t_0$. Получим

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t - t_0), \tag{14}$$

левая часть совпадает с вектором смещения $\overline{M_0M}$, переводящим нас из данной точки $M_0(t_0)$ в некоторую другую точку кривой $M(t)$. Этот вектор смещения (вектор-хорда) в правой части разложен на два слагаемых. Первое из них равно вектор-производной в точке t с численным коэффициентом $t - t_0$ и, следовательно, направлено по касательной в точке M_0 (вектор $\overline{M_0M'}$. Второе изображено вектором $\overline{M'M}$.

Таким образом, вектор $\overline{M_0M}$, выражающий смещение из точки M_0 в безконечно близкую точку M по кривой, распадается на смещение $\overline{M_0M'}$ по касательной, пропорциональное приращению аргумента $t - t_0$, и наветор с модулем, бесконечно малым высшего порядка сравнительно с $t - t_0$. Смещение $\overline{M_0M'}$ называется главной линейной часть смещения $\overline{V_0M}$, или дифференциалом веткор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке $t = t_0$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)dt, \text{ где } dt = t - t_0 \tag{15}$$

Отсюда

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{16}$$

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ - координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$, то

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)\mathbf{i} + y^{(n)}(t)\mathbf{j} + z^{(n)}(t)\mathbf{k}. \tag{17}$$

Если у векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существуют и непрерывны все производные до порядка n включительно, то пишут $\mathbf{r}(t) \in C^n$.

Пусть функция $\mathbf{r}(t) \in C^{n-1}$ в некоторой окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}^n(t_0)$. Обозначим $t = t_0 + \Delta t$. Тогда для $\mathbf{r}(t)$ справедлива *формула Тейлора*:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{r}''(t_0)(t - t_0)^2 + ...$$
$$... + \frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \mathbf{Q}_n\frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{18}$$

гед $\mathbf{Q}_n$ - вектор. В координатах $\mathbf{Q}_n$ имеет вид

$$\mathbf{Q}_n = x^{(n+1)}(t_1)\mathbf{i} + y^{(n+1)}(t_2)\mathbf{j} + z^{(n+1)}(t_3)\mathbf{k}. \tag{19}$$

Так, как рассматривая $x^{(n+1)}(t)$, $y^{(n+1)}(t)$, $z^{(n+1)}(t)$, мы тем самым предполагает непрерывность этих функций в промежутке $T_0 \le t \le T$, то в этом же промежутке они будут и ограниченными при всех значениях t, оставаясь по абсолютной величине меньше некоторого постоянного. В частности и коэффициенты в (19), т.е. координаты вектора $\mathbf{Q}_n$, будут ограничены при любых значениях t_1, t_2, t_3, а потому и модуль этого вектора остается во всех случаях ограниченным

$$|\mathbf{Q}_n| < C_n \tag{20}$$

где C_n - положительное постоянное, одно и тоже при любых значениях t и t_0 в промежутке T_0, T.

Возьмем, в частности, это разложение при $n = 1$:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{Q}_1\frac{(t - t_0)^2}{2}. \tag{21}$$

Мы видим, что (21) представляет собо уточнение формулы (14); роль α играет здесь $\mathbf{Q}_1\frac{(t-t_0)^2}{2}$, где $\mathbf{Q}_1$ ограничено по модулю.

Для вычисления длины дуги кривой, полезно оценить разность длин хорды рис.(1)

$$\overline{M_0M} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) \tag{22}$$

и соответствующего смещения по касательной (дифференциала)

$$\overline{M_0 M'} = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) = d\mathbf{r}. \tag{23}$$

Сейчас мы берем значения t_0 и t произвольно, не предполагая, что t обязательно стремится к t_0. Согласно (21) разность самих векторов имеет вид

$$\overline{M_0 M} - \overline{M_0 M'} = \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2} \tag{24}$$

или

$$\overline{M' M} = \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}. \tag{25}$$

По элементарным свойствам теругольника $M_0 M M'$ взятая по модулю разность двух сторон всегда меньше или равна третьей стороне, т.е.

$$|M_0 M - M_0 M'| \leq M' M \tag{26}$$

Здесь $M_0 M$, $M_0 M'$, $M' M$ означают длины (модули) векторов $\overline{M_0 M}$, $\overline{M_0 M'}$, $\overline{M' M}$. Но так как

$$\overline{M' M} = \frac{1}{2} \mathbf{Q}_1 (t - t_0)^2, \tag{27}$$

то пользуясь ограниченностью $\mathbf{Q}_1$ по модулю, (20), получим

$$M' M = \frac{1}{2} |\mathbf{Q}_1| (t - t_0)^2 \leq \frac{1}{2} C_1 (t - t_0)^2 \tag{28}$$

и следовательно

$$|M_0 M - M_0 M'| \leq \frac{1}{2} C_1 (t - t_0)^2, \tag{29}$$

где $M_0 M$ - любая хорда нашей кривой, соединяющая какую-то точку $M_0(t_0)$ с какой-то точкой $M(t)$, а $M_0 M'$ - соответствующий отрезок, отложенный по касательной в точке M_0 (т.е длина вектор-диффереципла $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$). Это и есть нужная нам оценка. Существенно здесь то, что C_1 имеет одно и тоже значен при *любых* значениях t_0, t в промежутке T_0, T, т.е. одно и тоже значение при *любом* выборе точке M_0, M на рассматриваемой кривой $\mathbf{r}(t)$, $T_0 \leq t \leq T$.

0.1.3 Репараметризация кривой.

Таким образом, направление производной $\mathrm{r}'(t)$ получило вполне ясное геометрическое истолкование. Модуль же $\mathbf{r}'(t)$ такого истолкования не получил. Вопрос этот связан с произволом в выбре параметризации.

Значениям t в промежутке ${}_0 \leq t \leq$ однозначно (и если устранить точки самопересечения то взаимно-однозначно) отвечают точки кривой. Таким образом, параметр t в указанных пределах играет роль координатной системы на кривой; он нужен для того, тобы своими значениями взаимно однозначно отмечать точки кривой. Но так как геометрически он ничем не связан с кривой, то вполне возможно, сохраняя ту же кривую, ввести на ней другую *параметризацию*. Для этого достаточно ввести новое переменное τ, связанное с t функциональной зависимостью

$$t = t(\tau), \;\; \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1. \tag{30}$$

Будем предполагать, что производная $t'(\tau)$ все время положительна, так, что функция $t(\tau)$ монотонна и следовательно допускает обращение, т.е можно записать

$$\tau = \tau(t), \;\; T_0 \leq t \leq T \tag{31}$$

и значения t от T_0 до T находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями τ от τ_0 до τ_1. Отсюда ясно, что и те и другие одинаково годятся, чтообы отмечать точки на кривой, и выбор параметризации на кривой зависит от нашего произвола.

Вставим в (4) выражение t через τ. Получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{t(\tau)\}. \tag{32}$$

Очевидно, вид функциональной зависимости $\mathbf{r}$ от τ уже не тот, что от t, тем не менее кривая осталась прежней, так как при τ, пробегающем значения от τ_0 до τ_1, t по прежнему пробегает значения от T_0 до T и радиус вектор $\overline{OM} = \mathbf{r}(t)$ описывает своим концом M прежнюю кривую. Итак, на неизменной кривой, заданной вектор-функцией (4), можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид функциональной зависимости (4).

В том обстоятельстве, что параметризация кривой строится по произволу и не имеет в общем случае геометрического смысла, лежит причина того, что модуль произвольной вектор функции $\mathbf{r}(t)$ по параметру не находит геометрического истолкования. Действительно, дифференцируюя (32) по новому параметру τ как функцию от функции, получаем $\mathbf{r}'(t)t'(\tau)$. Мы видим, что производная радиус-вектора той же самой кривой, но по новому парметру, отличается от производной по старому параметру $\mathbf{r}'(t)$ скалярным множителем $t'(\tau) > 0$. Это означает, что направление производной осталось прежним - и оно действительно не зависит от выбора параметра, так как всегда идет по касательной, - а модуль производной изменился и, следовательно, он зависит от произвола в выборе параметра и по отношению к самой кривой является величиной случайной.

Если под параметром t понимать время, то вектор (9) получает смысл вектора средней скорости за время от t_0 до t, а его предельное значение $\mathbf{r}'(t_0)$ - вектора мгновенной скорости в момент t_0. Далее, переход к новому параметру τ будет означать, что точка M пробегает *прежнюю* траэкторию, но иным образом с течением времени, например, раньше ее движение было ускоренным, а теперь будет заменленным, и т.п. Параметр τ будет снова означать время, но при другом законе движения по прежней траектории.

Если закон движения по данной траектории изменяется, то точка M будет проходить через прежние положения с другими скоростями, т.е. вектор скорости $\mathbf{r}'(t)$ будет иметь другую величину (хотя и будет направлен по прежнему по касательной).

0.1.4 Длина дуги.

Определим длину дуги кривой, для этого рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),\;\; T_0 \le t \le T. \tag{33}$$

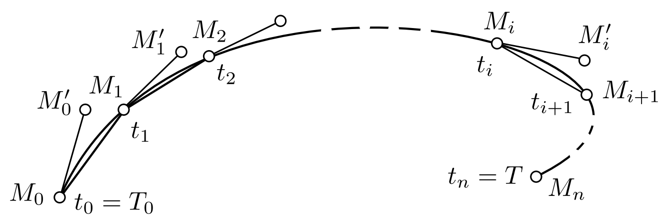

Рис. 2: Определение длины дуги кривой.

Вставим между крайними значениями T_0 и T пармаетра t произвольно выбранные последовательные промежуточные значения, рис.(2):

$$t_0, t_1, t_2, \cdots, t_n \tag{34}$$

Возьмем какой-нибудь из отрезков, M_iM_{i+1}, отвечающий переходу от $t = t_i$ к $t = t_{i+1}$, построим хорду M_iM_{i+1} и соответствующий вектор-дифференциал

$$M_iM_i = \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \tag{35}$$

направленный по касательной в точке M_i.

Составим сумму длин всех хорд M_iM_{i+1}:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_{i+1}. \tag{36}$$

С другой стороны, составим сумму длин всех соответсвтующих отрезков по касательным

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_iM_i' = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{r}'(t_i)|(t_{i+1} - t_i). \tag{37}$$

Очевидно, что разность между суммами (36) и (37) стремится к нулю, когда разбиение кривой бесконечно измельчается.

Сумму (37) можно рассматривать как интегральную суму для скалярной положительной функции от t:

$$f(t) = |\mathbf{r}'(t)|, \tag{38}$$

построенную на промежутке изменения аргумента t от $T_0 = t_0$ до $T = t_n$. Поэтому при бесконечном зимельчении разбиения сумма (37) стремится к интегралу

$$\int_{T_0}^{T} |\mathbf{r}'(t)| dt. \tag{39}$$

Следовательно, и сумма (36), отличаясь от суммы (37) на бесконечном малую, стремится к тому же самому пределу.

Определение 0.1.4 Длинна ломаной (36), вписанной в нашу кривую, стремится при бесконечном измельчении разбиения к пределу (39); этот предел называется длиной нашей кривой.

Длина дуги как параметр.

Ранее уже говорилось о том, что выбор параметра t на данной кривой является в сущности произвольным. Это приводит к тому, что рассматриваемые величины отражают как геометрические свойства, присущие самой кривой, так и произвол в выборе параметризации.

Можно устранить это усложнение, *выбрав параметризацию, геометрически связанную с самой кривой, а именно, выбрав за параметр длину дуги*. Тогда при изучении кривой, заданной уравнением (4), сама парматеризация ивсе связанные с ней величины геометрически вытекают из свойств самой кривой без какого-лобо существенного произвола.

Пусть у нас дана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t меняется в пределеах от T_0 до T.

$M(t)$ - любая точка на кривой; по формуле (39) длина участка кривой M_0M от значения параметра t_0 до значения t (обозначим ее через s) выразится интегралом

$$s = \overset{\smile}{M_0M} = \int_{t_0}^{t} |\mathbf{r}'(t)| dt. \tag{40}$$

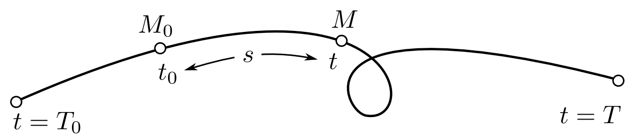

Рис. 3: Длина дуги как параметр.

Возможно выбирать значения t как большие t_0 так и меньшие t_0, в связи с чем длина дуги s будет получатся со знаком $+$ или $-$ соответственно.

Итак, s выражена как функция верхнего предела, t,

$$s = s(t). \qquad (41)$$

Дифференцируя выражение (40) по верхнему пределу t интеграла, получим

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \qquad (42)$$

Достаточный признак обыкновенности точки: если в данной точке $\mathbf{r}'(t) = 0$, то точка - обыкновенная.

Будем рассматривать только обыкновенные точки, следовательно

$$|\mathbf{r}'(t)| > 0. \qquad (43)$$

Производная $s'(t)$ положительна все время, и $s(t)$ - функция, мнотонно возрастающая от значения $s(T_0)$ (отрицательного) при $t = T_0$ до значения $s(T)$ (положительного) при $t = T$ и проходящая через 0 при $t = t_0$.

Такая функция допускает обращение, т.е. уравнение (41) можно однозначно разрешить относительно t, выразив t функцией от s:

$$t = t(s), \;\; s(T_0) \leq s \leq s(T). \qquad (44)$$

Таким образом, не только каждой точке $M(t)$ отвечает определенное значение s, но и каждому значению s в указанной области изменения однозначно отвечает точка $M(t)$ на кривой. Мы *можем принять s за новый параметр вдоль кривой, геометрически с ней вполне связанный. Несущественный произвол заключается лишь в выборе начала отсчета M_0, а также направления, в котором дуга возрастает.*

Вставляя выражение $t = t(s)$ в уравнение кривой, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)), \qquad (45)$$

т.е. радиус-вектор выражен в функции параметра s.

Умножая обе части (42) на dt, получим

$$s'(t)dt = |\mathbf{r}(t)|dt. \qquad (46)$$

Возьмем правую и левую части этого равенства по модулю; получим

$$|ds| = |d\mathbf{r}|. \qquad (47)$$

Таким образом, модуль дифференциала длины дуги равен модулю дифференциала радиус-вектора (все это при произвольной параметризации t вдоль кривой). Геометрически, дифференциал дуги $|ds|$ изображается (см. рис. 1) длинной отрезка касательной M_0M', так как этот отрезок, взятый как вектор, изображает $d\mathbf{r}$. Пусть же $\overset{\smile}{M_0M}$, пройденный по кривой, дает не дифференциал, а соответствующее точное приращение функции $s(t)$ при переходе от одной точки кривой к другой.

В частности, формула (47) остается верной и при выборе дуги s в качестве параметра. Деля обе части на $|ds|$, получим

$$1 = |\frac{d\mathbf{r}}{ds}| \qquad (48)$$

т.е. производная радиус вектора по параметру-дуге есть вектор единичный.

Случайный характер модуля $|\mathbf{r}'(t)|$ теперь исчезает.

Представим полученные результаты в координатной форме, что имеет особенное значение при решении конкретных задач. Если кривая задана параметрическим представлением (6), то можно выразить радиус-вектор в функции того же t:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \qquad (49)$$

Дифференцируя это равенство по t, получаем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \qquad (50)$$

а умножая на dt, находим

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \qquad (51)$$

По известной формуле для модуля вектора получаем

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}|d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \qquad (52)$$

Сравнивая последние равенства с (42, 47), мы видим, что

$$\begin{gathered} s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \\ |ds| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \end{gathered} \qquad (53)$$

Выражение (39) для длинны кривой примет вид

$$\int_{T_0}^{T} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt. \qquad (54)$$

При фактическом вычислении длины дуги пользуются обычно формулой (54). В частности, когда параметром служит абсцисса x, $(x_0 \leq x_1)$, формула (54) принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2}dx. \qquad (55)$$

0.1.5 Касание кривых.

При изучении кривых в бесконечно малом часто играет важуню роль порядок близости между двумя кривыми, выходящими из одной точки. Так, допустим, что нужно составить себе представление о поведении кривой в бесконечно малом с определенной степенью точности. Тогда подбираем другую кривую, которая с этой степенью точности совпадает с первой. Если вторая кривая обладает хорошо известным строением (является, например, окружностью), то тем самым мы получаем представление и о ходе первой кривой (в бесконечно малой области).

Изучим взаимное расположение двух каких-нибудь кривых C_1 и C_2, выходящих из общей точки M_0. На каждой из них примем за параметр длину дуги s, так что уравнения кривых будут

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s),\ \ \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(s). \tag{56}$$

Прием для простоты точку M_0 за начало отсчета дуги на обеих кривых, так что

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \overline{OM_0}. \tag{57}$$

Последовательные производные от какой нибудь функции по параметру s будем обозначать через $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\cdots$, $\overset{(n)}{\mathbf{r}}$, $\cdots$ в отличие от производных $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, $\cdots$, $\mathbf{r}^{(n)}$, $\cdots$ той же самой функции, но по произвольному параметру t вдоль кривой.

Производные в точке M_0 от $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ по s будем писать их без указания агрумента, подразумевая, следовательно, аргумент $s = 0$.

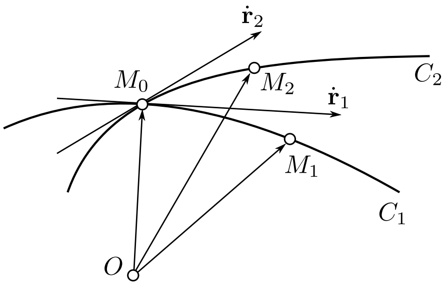

Рис. 4: Касание кривых.

Изучим расходение между кривыми C_1 и C_2, которое обнаруживается, когда мы из общей точки M_0 сместимся на одно и тоже расстояние s, заданное с определенным знаком (вдоль каждой из кривых). Возьмем на C_1 и C_2 соответственно точки M_1 и M_2, отвечающие одному и тому же значению параметра s, рис.(4).

$$s = \overset{\smile}{M_0 M_1} = \overset{\smile}{M_0 M_2}, \tag{58}$$

или, что тоже,

$$\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1(s),\ \ \overline{OM_2} = \mathbf{r}2(s). \tag{59}$$

Расхождение между кривыми C_1 и C_2 естественно оценить в связи с расстоянием M_1M_2. Чем выше будет порядок малости расстояния M_1M_2 относительно s, тем слабее расхождение расхождение кривых, тем теснее они сближены между собой.

Выполним оценку. Разложим $\mathbf{r}_1(s)$ и $\mathbf{r}_2$ в ряд Тейлора по степеням s. Получим

$$\begin{gathered}\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1(s)) = \mathbf{r}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 s + \ddot{\mathbf{r}}_1\frac{s_2}{2} + \cdots + \overset{(n)}{\mathbf{r}_1}\frac{s^n}{n!} + \cdots, \\ \overline{OM_2} = \mathbf{r}_2(s)) = \mathbf{r}_2 + \dot{\mathbf{r}}_2 s + \ddot{\mathbf{r}}_2\frac{s_2}{2} + \cdots + \overset{(n)}{\mathbf{r}_2}\frac{s^n}{n!} + \cdots\end{gathered} \tag{60}$$

Здесь значения $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ и их производных взяты в точке M_0. Ряд Тейлора предполагается конечным, но остаточный член не выписан, так как для дальнейшего достаточно знать, что этот член будет при s, стремящийся к нулю, бесконечно малым белее высокого порядка, чем любой из не равных нулю предшествующих членов (см. (21; при $t - t_0$, стремящемся к нулю, это следует из ограниченности $\mathbf{Q}_n$ по модулю).

Вектор M_1M_2 легко получить теперь как разность радиус-векторов:

$$\begin{gathered}\overline{M_1M_2} = \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)\frac{s}{1} + \\ +(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1)\frac{s}{2!} + \cdots + (\overset{(n)}{\mathbf{r}_2} - \overset{(n)}{\mathbf{r}_2})\frac{s^n}{n!} + \cdots\end{gathered} \tag{61}$$

При вычитании $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ взаимно уничножаются в силу (57). Заставим теперь s стремится стремится к нулю; тогда M_1 и M_2 будут точки C_1 и C_2, отстоящие от M_0 на одно и тоже бесконечно малое расстояние s и стремящиеся, следовательно, в M_0, каждая по своей кривой. Чтобы оценить порядок малости M_1M_2, сравнительно с s, обратимся к разложению (61).

Теперь разберем различные возможные здесь случаи. Наиболее общим является тот, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ неколлинеарны, т.е касательные к C_1 и C_2 в общей точке M_0 не совпадают, образуя угол, отличный от нуля, рис.(4). Тогда разложение (61) начинается с члена

$$(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)s, \tag{62}$$

отличного от нуля и бесконечно малого одного порядка с s. Так как старший член определяет порядок малости и всего разложения, то $\overline{M_1M_2}$ будет бесконечно малым того же поряжка, т.е одного порядка с длинами дуг $\overset{\smile}{M_0M_1}$. Это - случай пересечения кривых C_1 и C_2. Он вполне тривиален.

Рассмотрим теперь другой возможный случай, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ *коллинеарны*, другими словами, касательные к C_1 и C_2 в точке M_0 совпадают. В этом случае говорится, что C_1 и C_2 имеют касание в точке M_0. Так как, согласно (48), векторы $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ - единичные, то они, будучи направлены по общей касательной, или совпадают между собой, или отличаются знаком:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1 \tag{63}$$

Этот случай реализуется только когда параметры на кривых разных занков (мы смещаемся в разные стороны), поэтому его мы рассматривать не будем. Тогда

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1 \tag{64}$$

Возвращаясь к разложению (61), видим, что в силу (64), член в первой степени пропал, и оно начинается с члена 2-го порядка малости относительно s:

$$(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1)\frac{s^2}{2} \tag{65}$$

А так как остальные члены еще более высокого порядка малости, то в случае касания расстояние M_1M_2 - бесконечно малое не ниже 2-го порядка относительно s. Этим существенно и отличается случай касания от случая пересечения.

Кривые C_1 и C_2, касаясь друг друга, могут сблжатся между собой в некоторых случаях особенно тесно. Так, если кроме $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1$ в точке M_0 имеет еще место $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1$, то разложение (61) содержит лишь бесконечно малые не ниже 3-го порядка.

В итоге. Кривые C_1 и C_2 могут иметь в общей точке M_0 или пересечение , или касание. Касание будет порядка $n = 1, 2, 3\cdots$ в зависимости от того, сколько последовательных производных от радиус-вектора по дуге $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, $\dddot{\mathbf{r}}$, $\cdots$ совпадает для обеих кривых в их общей точке.

0.1.6 Кривизна плоских кривых.

Соприкасающаяся окружность.

Касательная имеет с кривой касание 1-го порядка, так как первая производная радиус-вектор по дуге $\dot{\mathbf{r}}$ в точке касания будет общей для кривой и для ее касательной, как и вообще для любых длух касающихся друг друга кривых (так как $\dot{\mathbf{r}}$ есть единичный вектор, направленный по касательной).

Таким образом, касательная воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью до 1-го порядка, т.е. если пренебрегать бесконечно малыми 2-го пояpдка и выше.

Мы хотим теперь наглядно воспроизвести ход кривой вблизи данной точки с точностью 2-го порядка и выше. При помощи прямой линии этого сделать не удстся. Обратимся к другой элементарной кривой - к окружности и постараемся подобрать ее таким образом, чтобы она вблизи данной кривой уклонялась от кривой лишь на бесконечно малые (не ниже) 3-го порядка.

Задача. *Найти окружность, имеющую с даной кривой в данной ее точке касание 2-го порядка.* Такая окружность называется соприкасающейся окружностью в данной точе кикривой.

Пусть данная кривая определена параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \;\; y = y(t). \tag{66}$$

И пусть на кривой дана какая-нибудь точка $M_0(t_0)$. Мы будем обозначать $x(t_0)$, $x'(t_0)$, $x''(t_0)$, $\cdots$ через x_0, x_0', x_0'', $\cdots$ и т.д. Уравнение искомой окружности напишем в виде

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \tag{67}$$

Константы a, b, R - пока неопределенные.

Потребуем, чтобы наша окружность проходила через точку M_0, т.е. чтобы x_0, y_0 удовлетворяли уравнению окружности. Получим

$$(x_0-a)^2 + (y_0-b) = R^2. \tag{68}$$

Это первое из уравнений, связывающих неизвестные константы. Далее, смещаясь из точки $M_0(t_0)$ в бесконечно близкую точку $M(t)$ по кривой, оценим уклонение кривой от окружности следующим образом. Проведем прямую MC, где (a, b) - центр окружности, рис. 5, и отметим точку L в пересечении этой прямой с окружностью.

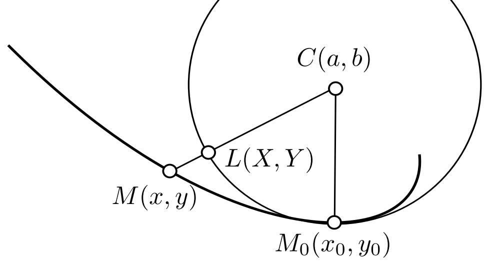

Рис. 5: Соприкасающаяся окружность.

Уклонение кривой от окружности будет выражатс отрезком

$$LM = CM - CL. \tag{69}$$

Нам нужно так подобрать окружность, чтообы уклонение LM при $t \to t_0$ было бесконечно малым (не ниже) 3-го порядка относительноо $t - t_0$ (касание 2-го порядка).

Но разность отрезков $CM - CL$ будет бесконечно малой того же порядка, как и разность их квадратов. В самом деле, отношение этих двуз бесконечно малых стремится к конечному пределу, отличному он нуля:

$$\frac{CM^2 - CL^2}{CM - CL} = CM + CL \to 2R, \tag{70}$$

так как

$$CM \to CM_0 (= R), \text{ а } CL = R. \tag{71}$$

Следовательно, вместо того, тобы добиватся 3-го порядка малости для уклонения LM, мы можем добиватся этого же самого для разности квадратов $CM^2 - CL^2$, то будет проще в отношении выкладок.

Так как

$$CL = R, \;\; CM = \sqrt{[x(t)-a]^2 + [y(t)-b]^2}, \tag{72}$$

то

$$CM^2 - CL^2 = [x(t)-a]^2 + [y(t)-b]^2 - R^2. \tag{73}$$

Полученную функцию от t кратко обозначим через $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2. \quad (74)$$

Разложим $\varphi(t)$ в ряд Тейлора по степеням $t - t_0$:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)\frac{t-t_0}{t} + \varphi''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \\ +\varphi'''(t)_0\frac{(t-t_0)^2}{3!} + \cdots \quad (75)$$

Для того чтобы $\varphi(t)$ при $t \to t_0$ была бесконечно малой 3-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы это разложение начиналось с членов (не ниже) 3-ей степени, т.е. чтобы

$$(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0. \quad (76)$$

Дифферецируя по t развернутое выражение функции (74), получм

$$\begin{gathered}\varphi(t_0) = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0,\\ \varphi'(t_0) = 2x_0'(x_0 - a) + y_0'(y_0 - b) = 0,\\ \varphi''(t_0) = 2[x_0''(x_0 - a) + y_0''(y_0 - b) + x_0'^2 + y_0'^2] = 0\end{gathered} \quad (77)$$

Первое из этих уравнений уже встречалось нам в виде (68). Разрешим два последних уравнения относительно $x_0 - a$, $y_0 - b$ (как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными) и изменим знаки у полученных выражений. Мы приходм к следующеу результату:

$$a - x_0 = y_0'\frac{x_0^2 + y_0'^2}{x_0''y_0' - y_0''x_0'} \quad (78)$$

и совершенно аналогично

$$b - y_0 = x_0'\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{y_0''x_0' - x_0''y_0'}, \quad (79)$$

Мы предполагаем при этом, что

$$x_0''y_0' - y_0''x_0' \neq 0. \quad (80)$$

В результате по фомрулам (78, 79) определяется центр соприкасающейся окружности $C(a, b)$, а из первого уравнения (77) - ее радиус R.

Форумлы (78, 79) совершенно симметричны относительно координатных осей; нужно иметь ввиду, что именно поэтому знаменатели у них отличаются знаком.

Определение 0.1.5 Центр соприкасающейся окоружности называется центром кривизны кривой в данной точке $t = t_0$.

Как мы видим, его координаты выражаются через координтаы x_0, y_0 данной точки кривой $x(t)$, $y(t)$ и через их первые и вторые производные по параметру (тоже в данной точке). Каждой точке кривой отвечает своя соприкасающаяся окружность и свой центр кривизны.

Теперь по первому из уравнений (77) легко найти R^2:

$$R^2 = (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = y_0'^2\left(\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0''y_0' - y_0''x_0'}\right)^2 + \\ +x_0'^2\left(\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{y_0''x_0' - x_0''y_0'}\right)^2 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}{(x_0''y_0' - y_0''x_0')^2} \quad (81)$$

отсюда, извлекая квадратный корень, получим, считая R всегда положительным,

$$R = \frac{\sqrt{(x_0'^2 + y_0'^2)^2}}{|x''y_0' - y_0''x_0'|} \quad (82)$$

Вычисленный таким образом радиус соприкасающейся окружности называется радиусом кривизны кривой в данной точке $t = t_0$.

Мы видим, что в каждой точке кривой $x(t)$, $y(t)$ при условии (80) существует и единственным образом определяется окружность, имеющая с кривой в этой точке касание 2-го порядка (соприкасающаяся).

0.1.7 Кривизна.

Чем сильнее искривление кривой, тем быстрее меняет свое направление касательная к ней при переходе от точки к точке. Поэтому за меру искривленности кривой в среднем на данном участке MM' можно принять угол поворота касательной, приходящийся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания.

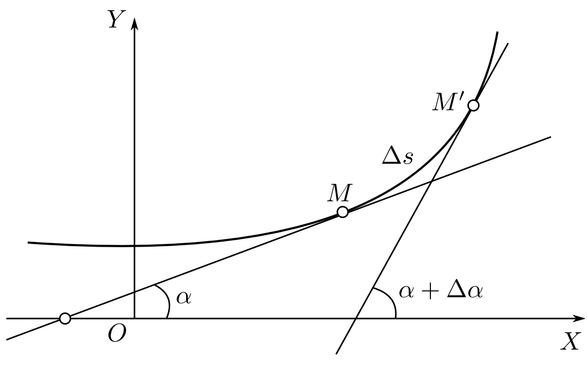

Рис. 6: Кривизна кривой.

Другими словами, нужно угол $\Delta\alpha$ образованный касательными в точках M и M', рис.6, разделить на Δs - длину дуги $\overset{\smile}{MM'}$. Полученное частное

$$k_{av} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \quad (83)$$

взятое по модулю, называется *средней кривизной* дуги MM'.

Перейдем к понятию *кривизны в данной точке* M. Заставим точку M' стремится по кривой в M. Тогда *предел*, к которому стремится средняя кривизна дуги MM' называется *кривизной кривой в точке* M:

$$k = \lim_{M' \to M} \left| \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \right|. \tag{84}$$

Вычислим кривизну в произвольной точке

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\alpha(t) &= \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \\ \alpha(t) &= \mathrm{arctg}\frac{y'(t)}{x'(t)} \end{aligned} \tag{85}$$

С другой стороны, длина дуги s, отсчитывается от некоторой начальной точки до точки $M(t)$ по кривой, так же является функцией от t:

$$s = s(t). \tag{86}$$

Перейдем из точки $M(t)$ в некоторую точкку $M'(t + \Delta t)$, давая параметру t приращение Δt. Тогда функция $\alpha(t)$ примет новое значение $\alpha(t + \Delta t)$.

Разность углов

$$\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$$

есть угол поворота касательной при переходе из M в M'.

С другой стороны, $s(t + \Delta t)$ и $s(t)$ суть длины дуг, отсчитанных от некоторой начальной точки соответственно до точек M' и M. Разность этих дуг

$$s(t + \Delta t) - s(t)$$

выражает длину дуги от M до M'.

Поэтому средняя кривизна кривой на отрезке MM' выражается отношением

$$k_{av} = \left| \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} \right|. \tag{87}$$

Рассмотрим поведение этой величины при Δt, стремящемся к нулю, т.е. при стремлении точки M' в M по кривой.

Если переписать предидущее выражение в виде

$$k_{av} = \left| \frac{\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}}{\frac{s(t+\Delta s) - s(t)}{\Delta t}} \right|, \tag{88}$$

то ясно, что при $\Delta t \to 0$ числитель и знаменатель стремятся к пределам, а именно, к производным $\alpha'(t)$ и $s'(t)$, следовательно, предел этого выражения (т.е. кривизна в точке) существует и выражается так:

$$k = \left| \frac{\alpha'(t)}{s(t)}. \right| \tag{89}$$

Остается закончить вычисление. Находим $\alpha'(t)$, дифференцируя (85):

$$\alpha'(t) = \frac{\frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}. \tag{90}$$

Что же касается $s'(t)$, то пользуемся формулой (53), учитывая, конечно, что у нас $z \equiv 0$:

$$s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} \tag{91}$$

Вставляя в (89), получаем окончательно

$$k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \tag{92}$$

Сравнивая полученное выражение кривизны k с формулой (82) для радиуса кривизны, мы приходим к важному соотношению

$$k = \frac{1}{R}. \tag{93}$$

Кривизна и радиус кривизны - величины взаимно обратные.

Заметим, что для окружности вычислить кривизну особенно просто. В этом случае, рис. 7, угол между касательными в точках M и M' равен центральному углу $\Delta\alpha$ между радиусам OM и OM', проведенными в точках касания.

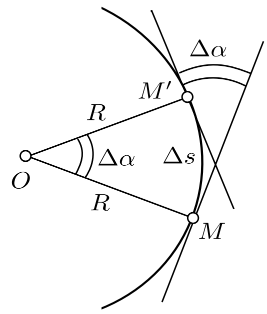

Рис. 7: Кривизна окружности.

Соответствующая длина дуги $\smile{\Delta s}$ равна центральному углу $\Delta\alpha$, умноженному на радиус окружности R, так что $\Delta s = R\Delta\alpha$ и , следовательно, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$.

Средняя кривизна любой дуги окружности равна обратной величине радиуса окружности. Ясно отсюда, что кривизна в любой точке окружности также равна $\frac{1}{R}$ и остается, таким образом, постоянной от точки к точке.

Заметим, что из самого определения кривизны k (теперь уже для любой кривой) видно, что для ее вычисления достаточно знать производные текущих координат x, y по дуге s лишь 1-го и 2-го порядков (одно дифференцирование при вычислении α и еще одно при отыскании $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$. Но так как кривая имеет с соприкасающейся окружностью касание 2-го порядка, то значения этих производных у них будут общими, а значит, и будет общим значение кривизны. Итак:

Определение 0.1.6 Кривизна произвольной кривой в каждой ее точке равна кривизне соприкасающейся окружности, а значит, обратной величине радиуса этой окружности (радиуса кривизны). Мы вновь пришли к соотношению (93).

0.1.8 Векторы t, n.

С плоской кривой в каждой ее точке M можно естественным образом связать нечто вроде местной прямоугольной системы координат. А именно, роль начала координат O будет играть сама точка M, а роль осей X, Y - касательная и нормаль в этой точке. Роль ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ примут на себя единичные векторы, направленные соответственно по касательной и по нормали. Эти векторы будем обозначать $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, рис. 8.

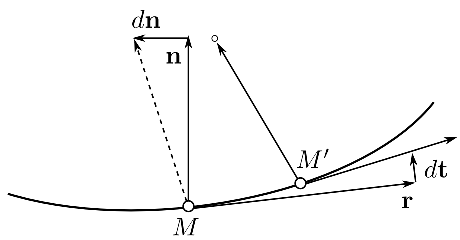

Рис. 8: Векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$.

Пусть кривая отнесена к дуге, как к параметру:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \tag{94}$$

Мы знаем, что производная $\dot{\mathbf{r}}$ радиус-вектора по дуге есть *единчный* касательный вектор (см.(48). Поэтому можно положить

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}. \tag{95}$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма

Теорема 0.1.1 Если вектор-функция $\mathbf{m}$ от скалярного аргумента t сохраняет постоянный модуль, то при каждоу значении t ее производная ей перпендикулярна.

Доказательство. Так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то мы можем записать

$$|\mathbf{m}(t)|^2 = \mathbf{m}(t)^2 = \mathrm{const}.$$

Дифференцируя по t, получим

$$2\mathbf{m}(t)\mathbf{m}'(t) = 0,$$

откуда и следует, что $\mathbf{m}'(t)$ перпендикулярно к $\mathbf{m}(t)$.

Другими словами, если откладывать $\mathbf{m}(t)$ из неизменной точки O, то вектор $\mathbf{m}(t)$ будет менятся лишь по направлению, но не по длинне, и конец его опишет кривую, лежащую на сфере с центром O. Как известно из предидущего, производная $\mathbf{m}'(t)$ будет при каждом значении t направлена по касательной к этой кривой, следовательно, по касательной к сфере, и, значит, она будет препендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, т.е. к вектору $\mathbf{m}(t)$.

В частности эта лемма имеем место для единичных векторов; следовательно $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$, и вектор $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по нормали.

Но, дифференцируя (95) по s, получим

$$\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{t}},$$

тка что $\ddot{\mathbf{t}}$ тоже направлен по нормали.

Условимся направлять вектор $\mathbf{n}$ всегда в сторону вектора $\ddot{\mathbf{r}}$, рис.9.

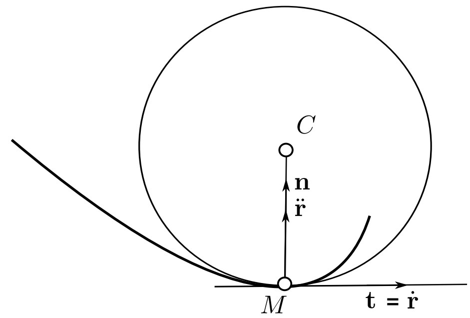

Рис. 9:

Точки, где $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, мы оставляем в стороне. Заметим, что если в направлени отсчета дуги s на кривой заменить на обратное (т.е. изменить знак у s), то $\dot{\mathbf{r}} \left(= \frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)$ умножается на -1 (так как $d\mathbf{r}$ не меняется, а ds меняет знак); что же касается $\ddot{\mathbf{r}}$, то этот вектор не меняется (так как $d\dot{\mathbf{r}}$ и s одновременно меняют знаки на обратные). Следовательно, не пеняется и направленный по нему единичный вектор $\mathbf{n}$.

Поэтому вектор $\mathbf{n}$ будет вполне определенным, а вектор $\mathbf{t}$ будет менять свое направление на обратное вместе с направлением отсчета дуги s.

Покажем теперь, что центр кривизны C всегда лежит на нормали в сторону вектора $\mathbf{n}$, рис.9. Будем рассматривать кривую в прямоугольных координатах x, y, приняв за начало какую нибудь ее точку M, за оси - касательную и нормаль и за орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ - векторы $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ в точке M. Запишем уравнение кривой (94) в развернутом виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}.$$

Дифференцируя, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{u}\mathbf{j}\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{u}\mathbf{j}$$

В точке M вектор $\dot{\mathbf{r}}$ (т.е. t) совпадает с $\mathbf{j}$, и из первого равенства следует

$$\dot{x} = 1,\ \ \dot{y} = 0;$$

кроме того, $\mathbf{n}$ совпадает с $\mathbf{j}$ и, следовательно, $\ddot{\mathbf{r}}$ кллинеарен с $\mathbf{j}$ и направлен с ним в одну сторону, так что второе равенство даст

$$\ddot{x} = 0,\ \ \ddot{y} > 0.$$

Найдем теперь координаты $a,\ b$ центра кривизны C по формулам (80, 79), учитывая, что в точке M координаты $x,\ y$ равны в нашем случае нулю, а производные их по параметру (причем параметром служит дуга) удовлетворяют только что полученным соотношениям. Формулы (80, 79) приму вид

$$a = 0, b = \frac{1}{\ddot{y}}.$$

Так как $\ddot{y} > 0$, то и $b > 0$, и центр кривизны C расположен на положительной полуоси Y, т.е. на нормали в сторону вектора $\mathbf{n}$.

Отсюда вытекает, что вектор $\overline{MC}$ отличается от единичного вектора $\mathbf{n}$ положительным численным множителем, равным длине вектора $\overline{MC}$, т.е. радиусу кривизны R:

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}$$

Вместе с центром кривизны C и вся соприкасающаяся окружность расположена от касательной в сторону вектора $\mathbf{n}$. А так как кривая вблизи точки уклоняется от соприкасающейся окружности лишь на бесконечно малые 3-го порядка, то и кривая (вблизи точки M) расположена в сторону вектора $\mathbf{r}$ от касательной (см. рис. 9).

Формулы Френе.

При изменении параметра s точка M движется по кривой, и вместе с ней будут менятся как функции от s векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s),\ \ \mathbf{n} = \mathbf{n}(s).$$

Выясним теперь, какой вид будут иметь производные векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ по дуге s.

Для этого введем понятие о скорости вращения некоторой вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу t. Для этой скорости, которая будет иметь, вообще говоря, различные значения при разных значениях t, дается следующее определение.

Определение 0.1.7 Дадим t приращение аргумента Δt и возьмем угол $\Delta\varphi$, образуемый векторами $\mathbf{m}(t)$ и $\mathbf{m}(t+\Delta t)$ (перенеся их для наглядности в общую точку приложения O). Составим отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, показывающее, кокой угол поворота вектора $\mathbf{m}$ приходится в среднем на единицу изменения аргумента t на участке $t, t + \Delta t$. Заставим теперь предел Δt стремится к нулю. Тогда предел взятого по модулю отношения $\frac{\Delta t}{\Delta t}$ называется скоростью вращения вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу t.

Докажем теперь следующую важную лемму

Теорема 0.1.2 Скорость вращения единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю ее производной $|\mathbf{m}'(t)|$.

Доказательство. Опишем из точки O как из центра окружность единичного радиуса, проходяшую через концы векторов $\mathbf{m}(t)$ и $\mathbf{m}(t + \Delta t)$, т.е. точки M и M', рис. 10.

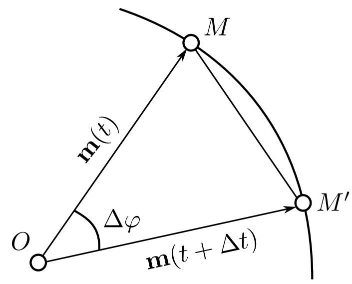

Рис. 10: Скорость вращения вектор функции. Угол $\Delta\varphi$ не является приращением какой-то функции φ, как можно было бы подумать, судя по обозначению.

Очевидно, что угол между векторами численно равен длине дуги $\smile{MM'}$. Мы можем записать

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \frac{\overset{\smile}{MM'}}{|\Delta t|} = \frac{MM'}{|\Delta t|} \cdot \frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}.$$

Здесь MM' означает длину хорды MM'. Но очевидно, что

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t) = \overline{MM}'$$

так что длина хоры MM' равна модулю приращения вектора $\mathbf{m}(t)$:

$$MM' = |\overline{MM}'| = |\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)|.$$

Перепишем теперь выражение $\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right|$ в виде

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\mathbf{m}(t + \Delta(t) - \mathbf{m}(t)}{\Delta t}\right| \cdot \frac{\overset{\smile}{MM'}}{MM'}.$$

Заставим теперь Δt стремится к нулю. Вектор, стоящий в вертикальных черточках, стремитя, очевидно, к производной $\mathbf{m}(t)$, а его модуль - к модулю $|\mathbf{m}'(t)|$. Отношение же дуги окружности $\overset{\smile}{MM'}$ к стрягивающей ее хорде MM' стремится к единице, когда дуга стремится к нулю. Итак, мы получаем

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| \overset{\Delta t \to 0}{\longrightarrow} |\mathbf{m}'(t)|,$$

т.е.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = |\mathbf{m}'(t)|$$

Лемма доказана.

Полученное равенство можно переписать также в виде

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right| = |\mathbf{m}'(t)| + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ вместе с Δt. Умножая почлнно нао $|\Delta t|$, получим

$$|\Delta\varphi| = |\mathbf{m}'(t)\Delta t| + \alpha|\Delta t|.$$

Будем писать $\Delta\varphi$ вместо $|\Delta\varphi|$, подразумевая, что $\Delta\varphi$ берется всегда положительным. Тогда последнее равенство примет вид

$$\Delta\varphi = |d\mathbf{m}| + \cdots, \tag{96}$$

так как $\mathbf{m}'(t)\Delta t = \mathbf{m}'(t)dt = d\mathbf{m}$. Многоточие в формуле (96) обозначает бесконечно малые высшего порядка.

Итак, главная линейная часть бесконечно малого угла поворота $\Delta\varphi$ единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю дифферециала $d\mathbf{m}$ этой функции.

На основании леммы (0.1.2) скорость вращения *единичной* вектор-функции $\mathbf{t}(s)$ совпадает с модулем ее производной:

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = |\dot{\mathbf{t}}|. \tag{97}$$

Здесь $\Delta\alpha$ - угол поворота вектора $\mathbf{t}$ (т.е. угол поворота касательной), отвечающий приращению дуги Δs. Но левая часть равенства, согласно (84), представляет собой кривизну k нашей кривой. Отсюда окончательно

$$|\dot{\mathbf{t}}| = k \tag{98}$$

Вектор $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по нормали, причем единичный векторнормали $\mathbf{n}$ мы условились напралвять в ту же сторону. Поэтому $\dot{\mathbf{t}}$ отличается от единичного вектора $\mathbf{n}$ положительным численны множителем, равным, очевидно, длине вектора $\dot{\mathbf{t}}$, т.е. кривизне k. Итак

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}. \tag{99}$$

Переходим далее к производной $\dot{\mathbf{n}}$ единичного вектора $\mathbf{n}$. Она направлена перпендикулярно к $\mathbf{n}$, а так как $\mathbf{n}$ направлено по нормали, то $\dot{\mathbf{n}}$ направлено по касательной и поэтому может отличатся от вектора $\mathbf{t}$ только численным множителем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t},$$

где α - пока неопределенный множитель. Его нетрудно определить, записав, что скалярное произведение $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, в силу их перпендикулярности, равно нулю:

$$\mathbf{t}\mathbf{n} = 0,$$

и продифференцировав это равенство по s. Получим

$$\dot{\mathbf{t}}\mathbf{n} + \mathbf{t}\dot{\mathbf{n}} = 0.$$

Вставляя сюда $k\mathbf{n}$ вместо $\dot{\mathbf{t}}$ и $\alpha\mathbf{t}$ вместо $\dot{\mathbf{n}}$ и учитывая, что

$$\mathbf{t}\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathbf{n} = 1,$$

получим $k + \alpha = 0$, откуда $\alpha = -k$.

Выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательный вид

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t}. \tag{100}$$

Формулы (99) и (100) называются *формулами Френе* (для проской кривой).

Уясним себе *геометрический смысл этих формул.* Они выражают прежде всего производные векторов $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ через сами эти векторы и через кривизну k в данной тчоке. Умножая (99) и (100) почленно на ds, мы получим слева дифференциалы

$$\begin{aligned} d\mathbf{t} &= k\mathbf{n}ds,\\ d\mathbf{n} &= -k\mathbf{t}ds. \end{aligned} \tag{101}$$

Таковы главные части приращений вектор-функций $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ при переходе от значения аргумента s к бесконечно близкому значению $s + ds$. Но геометрически фигура, образованная единичным взаимно ортогональными векторами $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$, может только повернутся как твердое тело (если не обращать внимания на точку приложения этих векторов). И действительно, легко показать, что формулы Френе с точностью до 1-го порядка выражают поворот векторов $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ при переходе по кривой из точки $M(s)$ в бесконечно близкую точку $M'(s + dx)$ на бесконечно малый угол, именно на kds (считая положительным направление вращения от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{n}$), рис.(7).

В самом деле, если повернуть векторы $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ на угол kds, то их новые значения выразятся через старые, очевидно, таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} &= \cos(kds)\mathbf{t} + \sin(kds)\mathbf{n},\\ \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} &= \cos(kds)\mathbf{n} - \sin(kds)\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Но так как мы ведем рассмотрение с точностью 1-го порядка, т.е. пренебрегаем бесконечно малыми 2-го и выше порядков, то $\cos(kds)$ можно заменить через 1, а $\sin(kds)$ через kds. Получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{t} &= kds\mathbf{n},\\ \Delta\mathbf{n} &= -kdst. \end{aligned}$$

Конечно, сохраняя лишь бесконечно малые 1-го порядка, мы получили здесь не точные приращения $\Delta\mathbf{t}$ и $\Delta\mathbf{n}$, а только их главне части, т.е. дифференциалы. Мы вернулись, таким образом к формулам (101).

Итак, (101) действительно выражают нам с точностью до 1-го порядка поворот $\mathbf{t}$ и $\mathbf{n}$ на угол kds; заметим, что этот угол пропорционален пути ds, пройденному по кривой от M до M', а коэффициентом пропорциональности служит кривизна k в точке M. Последнее естественно согласуется с самим определением кривизны.

0.1.9 Касательные пространственных кривых; нормали.

Рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \tag{102}$$

лишь в заведомо обыкновенных точках, т.е. при условии

$$\mathbf{r}'(t) = x(t)'\mathbf{i} + y(t)'\mathbf{j} + z(t)'\mathbf{k} \neq 0, \tag{103}$$

или, записывая параметрическое представление (102) в координатной форме

$$x = x(t), \;\; y = y(t), \;\; z = z(t), \tag{104}$$

мы ограничимся точками, гед

$$x'(t), \;\; y'(t), \;\; z'(t) \tag{105}$$

не обращаются одновременно в нуль.

Касательную в данной точке кривой $M(t)$ можно рассматривать как прямую, проходящую через эту точку

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

по направлению вектора

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение такой прямой (в форме пропорций) имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \tag{106}$$

где X, Y, Z - текущие координаты.

Определение 0.1.8 Нормалью к пространственной кривой казывается перпендикулр, восстановленный в точке касания. Конечно, в данной точке кривой будет бесчисленное множество нормалей. Все они заполняют целую плоскость, перпендикулярную к касательной.

Определение 0.1.9 Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называетс нормальной плоскостью, рис.11.

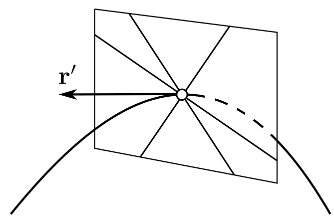

Рис. 11: Нормальна плоскость.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости проходящей через точку кривой

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

перпендикулярно к (касательному) вектору

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

имеет вид

$$x'(t)[X - x(t)] + y'(t)[Y - y(t)] + z'(t)[Z - z(t)] = 0. \tag{107}$$

Это и есть уравнение нормлаьной плоскости.

Касательная плоскость к поверхности.

Определение 0.1.10 Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0 \tag{108}$$

называется поверхностью.

Проведем на этой поверхности какую-нибудь кривую (104) тогда при любом значении t точка $M[x(t), y(t), z(t)]$ кривой лежит на поверхности, так, что уравнение (108) после подстановки $x(t), y(t), z(t)$ должно обращатся в тождество

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0. \tag{109}$$

Продифференцируем это тождество по t. Получим

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0 \tag{110}$$

в каждой точке кривой на поверхности. В левой части x', y', z' зависят от выбора кривой на поверхности и представляют собой координаты касательного к кривой вектора $\mathbf{r}'(t)$. Что же касается F_x, F_y, F_z, то они зависят только от выбра точки x, y, z на поверхности. Составим вектор

$$\nabla F(x, y, z) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}, \tag{111}$$

имеющий в каждой точке поверхности вполне определенное значение; ∇F - его краткое обозначение. Вектор ∇F называется *градиентом* функции F, или, как часто говорят, скалярного поля $F(x, y, z)$ (этот вектор существует в каждой точке пространственной области, в которой задана дифференцируемая функция точки $F(x, y, z)$).

Всматриваясь в левую часть (110), мы замечаем, что она представляет собой скалярное произведение векторов (111) и (103), т.е. вектор-градиента в данной точке поверхности и касательного вектора к кривой, проходящей по поверхности, в той же точке. Перепишем (110) в виде

$$\nabla F(x, y, z)\mathbf{r}'(r) = 0. \tag{112}$$

Ограничимся рассмотрением на поверхности только тех точек, где вектор ∇F не исчезает:

$$\nabla F(x, y, z) \neq 0, \tag{113}$$

или, что тоже самое, где F_x, F_y, F_z не равны одновременно нулю. Смысл этого станет ясным позже.

Тогда формулу (112) можно истоковать геометрически так.

Будем через данную точку $M(x, y, z)$ поверхности проводить всевозможные кривые по поверхности и брать к ним в этой точке касательные векторы $\mathbf{r}'(t)$. Тогда (112) показывает, что все эти векторы будут перпендикулярны к вектору $\nabla F(x, y, z)$, вполне определенному в данной точке $M(x, y, z)$, и расположатся все в одной плоскости, проходящей через M, перпендикулярно к ∇F, рис. Итак:

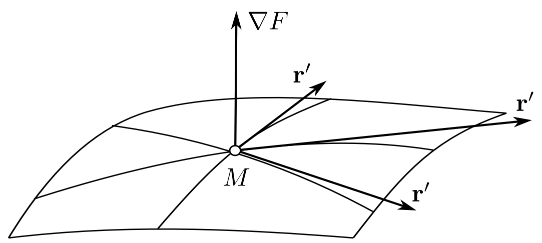

Рис. 12: Градиент функции F.

Определение 0.1.11 Ксательные в данной точке поверхности M (в которой $\nabla F \neq 0$ к всевозможным кривым, проходящим по поверхности, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной к ∇F. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхноси в точке M.

Уравнение касательной плоскости как плоскости, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ перпендикулярно к данному вектору (111) будет иметь вид

$$\begin{gathered} F_x(x, y, z)(X - x) + F_y(x, y, z)(Y - y) + \\ + F_z(x, y, z)(Z - z) = 0. \end{gathered} \tag{114}$$

где X, Y, Z - текущие координаты.

Определение 0.1.12 Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания, рис. 12. Очевидно, в каждой точке M нормаль будет единственной. Ее уравнение легко составить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ в направлении вектора ∇F. Уравнение такой прямой будет иметь вид

$$\frac{X - x}{F_x(x, y, z)} = \frac{Y - y}{F_y(x, y, z)} = \frac{Z - z}{F_z(x, y, z)}. \tag{115}$$

Выясним теперь смысл условия (112). Допустим для определенности, что в данной точке именно $F_z \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявной функции уравнение поверхности (108) однозначно разрешимо вблизи данной точки относительно z и может быть переписано в виде

$$z = f(x, y). \tag{116}$$

Определение 0.1.13 Если в какой нибудь ситеме координат x, y, z уравнение поверхности вблизи данной точки может быть написано в виде, разрешенном относительно одной координаты, то эта точка называеся *обыкновенной* точкой поверхности.

Геометрически же уравенние (116) означает, что каждой точке $P(x, y, 0)$ в некоторой области D на плоскости XY отвечает одна и только одна точка поверхности $M(x, y, z)$, получаемая путем смещения точки $(x, y, 0)$ параллельно оси Z на отрезок $f(x, y)$. Наглядно мы можем, следовательно, представить себе соответствующий кусок поверхности как кусок плоскости D, деформированный путем плавного смещения его точек в направлении, перпендикулярном к плоскости, рис.(13).

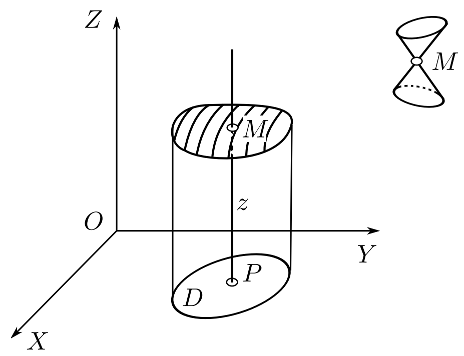

Рис. 13: Простой кусок поверхности.

Такой кусок поверхности мы будем называеть *простым куском поверхности.*

Смещение называется "плавным"в том смысле, что величина смещения $f(x, y)$ предполагается непрерывной и дифференцируемой функцией точки $P(x, y, 0)$ в области D.

Итак, *обыкновенная точка поверхности характеризуется тем, что достаточно малая ее окрестность в пространстве (например шар с центром в данной точке) вырезает простой кусок поверхности.*

Точки поверхности (108), в которых выполняется условие (113) (и которые, как показано выше обязательно будут обыкновенными) мы будем называть *заведомо обыкновенными*.

Если условие (113) не соблюдено, то точка может оказатся *особой* с совсем другими свойствами. Так для поверхности (конус)

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y_2 - z^2 = 0$$

в точке $x = y = z = 0$ обращаются в нуль все частные производные F_x, F_y, F_z. И действительно, эта точка служит вершиной конуса, вблизи которой, как бы ни уменьшать окрестность, уравнение конуса нальзя записать в виде (116), а сам конус нельзя представить в виде простого куска поверхности (см. рис.(13)). Аналогично обстоит дело и в точках самопересечения поверхности.

Теорема о существовании касательной плоскости, в которой расположатся касательные ко всем кривым на поверхности, в таких точках тоже не верна.

0.1.10 Касание кривой с поверхностью.

Пусть через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, рис.14, проходит кривая $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (при $t = t_0$) и поверхность $F(x, y, z) = 0$.

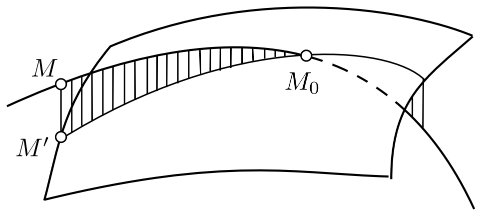

Рис. 14: Касание кривой с поверхностью.

Как обычно, предполагаем, что в точке M_0 соблюдаются условия

$$\nabla F = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \neq 0$$

(для определенности пусть $F_z \neq 0$) и

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0.$$

Оценим близовсть между кривой и поверхностью в бесконечно малой области около точки M_0.

Возьмем на кривой какую-нибудь точку $M[x(t), y(t), z(t)]$ и проведем через нее параллель оси Z до пересечения с поверхностью в точке, которую обозначим через M'. Ограничиваясь достаточно малой окрестностью точки M_0, можно утверждать, что это пересечение произойдет, и при этом в единственной точке. Действительно, так как в точке M_0 мы имеем $F_z \neq 0$, уравнение поверхности вблизи нее может быть приведено к виду

$$z = f(x, y)$$

и после подстановки $x(t), y(t)$ определяет нам точку на поверхности с координатами $x(t), y(t), Z$, где

$$Z = f[x(t), y(t)].$$

Эта точка поверхности и есть искомая точка M', так как она имеет значеняи x, y, обще с M, и лежит с нею, следовательно, на одной параллели оси Z. Отрезок $M'M = z(t) - Z$, естественно, будет измерять расстояние "по вертикали"между кривой в точке M и поверхностью.

Пусть теперь t стремится к t_0; тогда точка M стремится в M_0, равно как и M', так что отрезок $M'M$ стремится к нулю. Изучим теперь *порядок малости отрезка $M'm$ по отношению к $t - t_0$.*

Для этого очень удобным приемом ялвятеся составление функции

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)], \qquad (117)$$

полученной подстановкой в левую часть уравнения поверхности текущих координат кривой. Так как кривая не лежит на поверхности, то $\varphi(t)$, вообще говоря, отлична от нуля; при $t = t_0$ мы имеем точку, общую кривой и поверхности, и следовательно, уравнение поверхности в ней удовлетворяется:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

При t, стремящемся к t_0, $\varphi(t)$ стремится, следовательно к нулю. Покажем, что $\varphi(t)$ *будет при этом бесконечно малым одного порядка с отрезком $M'M$.*

Запишем, что точка $M'[x(t), y(t), Z]$ удовлетворяет своими координатами уравнению поверхности

$$0 = F[x(t), y(t), Z].$$

Вычтем это равенство почленно из (113) и применим в правой части теорему о конечном приращении, рассматривая F как функцию третьего аргумента *при закрепленных двух первых*. Получим

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)] - F[x(t), y(t), Z] =$$
$$= F_z[x(t), y(t), \zeta][z(t) - Z],$$

где ζ - некоторое промежуточное значение между $z(t)$ и Z. Но при t, стремящемся к t_0, точки M и M'

стремятся в M_0 и, следовательно, z и Z вместе с заключенным между ними значением ζ стремятся к z_0. Очевидно также, что

$$x(t) \to x_0, \ \ y(t) \to y_0.$$

Поэтому из придыдущего равенства следует, что при $t \to t_0$

$$\frac{\varphi(t)}{z(t)-Z} = F_z[x(t), y(t), \zeta] \to$$
$$\to F_z(x_0, y_0, z_0).$$

Итак, отношение бесконечно малых $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ стремится к пределу и при этом отличному от нуля (по предположениям, сделанным в начале этого параграфа). Мы видим, что $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ - бесконечно малые одного порядка.

Наиболее тривиальная возможность здесь та, когда они будут *первого* порядка относительно $t - t_0$; в наглядном представлении это будет *пересечение* кривой и поверхности под некоторым углом.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(t)$ (и, следовательно, отрезок $M'M$, равный $z(t) - Z$) будет бесконечно малым, *порядка выше первого относительно* $t - t_0$. Тогда мы скажем, что кривая *касается* поверхности в точке M_0. Мы говорим, что *касание* n-го порядка, если порядок бесконечно малого $M'M$ будет выше n, и что *касание точно* n-го *порядка* (а не выше), если порядок $M'M$ точно $n+1$ (а не выше).

Практическая запись условий касания n-го порядка состоит в том, что функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $t - t_0$. Так как касание n-го порядка означает, что $\varphi(t)$ есть бесконечно малое выше n-го порядка относительно $t - t_0$, то в разложении должны исчезнуть все члены до n-й степени включительно. Запишем условия этого, приравняв нулю коэффициенты при $t - t_0$ в степенях $\leq n$:

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = \cdots = \varphi^{(n)}(t_0) = 0. \quad (118)$$

Очевидно, эти условия и достаточны, так как при их наличии разложение может начинатся не ниже чем с $n+1$-й степени $t - t_0$. Первое из этих условий

$$\varphi(t) = 0.$$

выражает, что при $t = t_0$ точка кривой попадает на поверхность. Втоное из них, пользуясь выражением (117) для $\varphi(t)$, можно переписать в виде

$$\varphi'(t_0) = F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0) + F_z z'(t_0) = 0$$

или

$$\nabla F \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Эта формула показывает, что *касательный вектор к кривой в точке* M_0 *перпендикулярен к* ∇F *в той же точке и лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности.* В этом и состоит, можно счиать, касание 1-го порядка. Присоединяяо последующий условия, мы получаем более тесную близость кривой и поверхности - касания 2-го, 3-го и т.д. порядков.

0.1.11 Соприкасающаяся плоскость.

Пусть кривая задана параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Поставим задачу, для любой точки $M(t)$ этой кривой подобрать (при ограничениях из прошлого наздела) проходящую через нее плоскость, наилучщим образом "пригнанную"к кривой вблизи точки $M(t)$, с наиманьшим "зазором"между ними.

Сначала проведем через $M(t)$ произволную плоскость; зададим ее единичным вектором $\mathbf{m}$, ей ортогональным, рис.13.

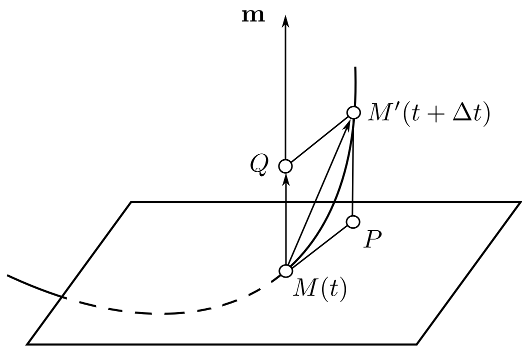

Рис. 15: Произвольная плоскость через точку $M(t)$ заданная ее единичным вектором bfm.

Дадим параметру t приращение Δt, вследствие чего мы сдвинемся по кривой из точкиM в точку M'.

Определим расстояние точки M' от плоскости по перпендикуряру PM'. При $\Delta t \to 0$ точка M' бежит по кривой в точку M, и расстояние PM', очевидно, стремится к нулю.

При этом бесконечно малое расстояние PM' может иметь различный порядок малости относительно Δt. Чем выше этот порядок, тем теснее "пригнана"наша плоскость к кривой вблизи точки M.

Заметим, что наше обычное предположение $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, ползуясь формулой (42), можно переписать в виде

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| \neq 0, \text{ т.е.}$$
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq 0. \quad (119)$$

Последнее соотношение показывает, что Δt *имеет тот же порядок малости, что и* $\Delta s = \overset{\smile}{MM'}$.

Следовательно, можно считать, что (в нашем определении порядка касания) порядок бесконечно малого PM' расценивается по отношению к дуге Δs, и значит, имеет смысл, инвариантный относительно выбора параметризации t на кривой.

Точная формулировка нашей задачи принимает вид: *найти плоскость, проходящую через точку M с наивысшим возможным порядкам касания с кривой в точке M .*

Для решения этой задаи заметим, что вектор смещния $\overline{MM'}$ представляет собой приращение $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ при при переходе из M в точку M'. Запишем это, разложив приращение радиусвектора в ряд Тейлора:

$$\overline{MM'} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}'(t)\frac{\Delta t}{1} + \mathbf{r}''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots$$

С другой стороны, расстояние PM' представляет собой проекцию вектора MM' на перпендикуляр к плоскости, проведенный через точку M' (так как угол MPM', очевидно, прямой) или, что все равно, на направление вектора $\mathbf{m}$, тоже перпендикулярного к плоскости. Но проекция любого вектора на направление единичного вектора выражается их скалярным произведением; следовательно,

$$PM' = \mathbf{m}\overline{MM'} = \mathbf{mr}'(t)\frac{\Delta t}{1} + \mathbf{mr}''(t)\frac{\Delta t^2}{2!} + \cdots \tag{120}$$

Мы подставили вместо $\overline{MM'}$ его разложение в ряд Тейлора.

Конечно, расстояние PM' по этой формуле получается с определенным знаком, который, впрочем, сейчас для нас не важен.

Разберем возможные здесь случаи.

1) $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Разложение (120) начинается с бесконечно малых 1-го порядка, и PM' есть бесконечно малое 1-го порядка. Мы имеем случай касания 0-го порядка, т.е. по существу пересечение кривой с плоскостью. Действительно, касательная к кривой, направленная по вектору $\mathbf{r}'$, не перпендикулярна к вектору $\mathbf{m}(\mathbf{rr} \neq 0)$и, следовательно, не лежит в плоскости, а пробивает ее под некоторым углом.

2) $\mathbf{mr}'(t) = 0$.

Разложени (120) начинается с бесконечно малых (не ниже) 2-го порядка; PM' есть бесконечно малое (не ниже) 2-го порядка, и мы имеем случай касания 1-го порядка. Геометрически условие 2) означает, что касательная к кривой перпендикулярна к вектору $\mathbf{m}$, а следовательно, лежит в нешей плоскости.

Определение 0.1.14 Таким образом, касание 1-го порядка с данной кривой в данной точке M имеют те и только те плоскости, которые проходят через касательную в точке M . *Такие плоскости называются касательными к кривой.*

В полученном пучке касательных плоскостей не все плоскости будут равноценны в смысле близости к нашей кривой. А именно, если $\mathbf{mr}'' \neq 0$, то разложение (120) начинается с бесконечно малого точно 2-го порядка, и касание будет *точно* 1-го порядка; если же $\mathbf{mr}'' = 0$, то разложение (120) начинается с бесконечно малых (не ниже) 3-го порядка, и касание бедет 2-го порядка.

В этом последнем случае плоскость должна, следовательно, удовлетворять двум условиям:

$$\left.\begin{array}{r}\mathbf{mr}'(t) = 0,\\ \mathbf{mr}''(t) = 0.\end{array}\right\} \tag{121}$$

Такая плоскость существует и пртом только одна: это будет плоскость, проведенная через точку M и через отложенные из M векторы $\mathbf{r}'$ $\mathbf{r}''$, рис.16 (напомним, что $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ предполагаются неколлинеарными).

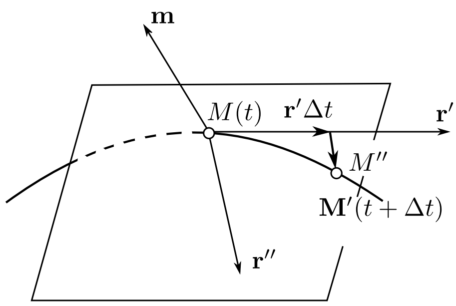

Рис. 16: Соприкасающаяся плоскость.

Действительно, условия (121) соблюдатся в том и только в том случае, когда $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ ортгональны вектору $\mathbf{m}$, т.е. лежат в рассматриваемой плоскости.

Определение 0.1.15 Плоскость, имеющая с кривой в данной ее точке M касание 2-го порядка, называется соприкасающейся плоскостью..

Только что доказано, что кривая в каждой совей точке имеет одну и только одну (предполагая $bfr' \nparallel \mathbf{r}''$), соприкасающуюся плоскость. Эта плоскость проходит через векторы $\mathbf{r}'$, $\mathbf{r}''$, отложенные из точки касания.

Роль соприкасающейся плоскости заключаестся в том, что среди всех плоскостей, походящих через данную точку кривой $M(t)$, она единственная так тесно приложена к кривой, что при смещении из точки $M(t)$ по кривой уклонение от нее будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже) относительно приращения параметра t. Другими словами, *если пренебречь бесконечно малыми 3-го пордка и выше, то всякую пространственную кривую в бесконечно малом* *около данной точки $M(t)$ можно считать плоской, а именно расположенной в соприкасающейся плоскости в этой точке.*

Действительно. Прейдем из данной точки $M(t)$ в бесконечно близкую точку $M'(t+\Delta t)$, рис.16. Разложим радиус-вектор точки M' в ряд Тейлора, взяв остаточный член после члена 2-й степени:

$$\mathbf{r}(t+\Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \\ + \mathbf{Q}_2\frac{(\Delta t)^3}{6}.$$

Вектор смещения из точки M в точку M' равен

$$\overline{MM'} = \mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ = \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{Q}_2(\Delta t)^3.$$

Таким образом, если взять прежде всего член первого порядка $\mathbf{r}'\Delta t$, смещение происходит по касательной, а значит, и в соприкасающейся плоскости. Затем, если добавить член второго порядка $\frac{1}{2}\mathbf{r}''(\Delta t)^2$, мы смещаемся по направлению вектора $\mathbf{r}''$, т.е. уклонившись от касательной, но еще в соприкасающейся плоскости, и попадаем в некоторую точку M''. И только добавление остаточного члена выводит наз из соприкасающейся плоскости, перевод из M'' в точку M' на кривой. Но так как остаточный член при Δt, стремящийся к нулю, будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже), то, если учитывать лишь бесконечно малые 1-го и 2-го порядков, дпуская ошибку 3-го порядка, можнжо сказать, что вблизи $M(t)$ кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

0.1.12 Сопровождающий трехгранник.

С соприкасающейся плоскостью связан ряд других геометрических построений. Прежде всего из бесчисленного множества нормалей в данной точке пространственой кривой, которые нам казались равноценными по совим свойствам, теперь выделяются две особенные.

Определение 0.1.16 Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости, называют главной нормалью, а нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, - бинормалью, рис.17.

Соприкасающаяся плоскость берется, разумеется, в той же точке кривой, где строятся нормали. Очевидно, касательаня, главная нормал и бинормаль, выходящие из одной и той же точки кривой, оразуют между собой прямые углы.

Роль координатных плоскостей будут играть:

соприкасающаяся плоскость (проходит через касательную и главную нормаль);

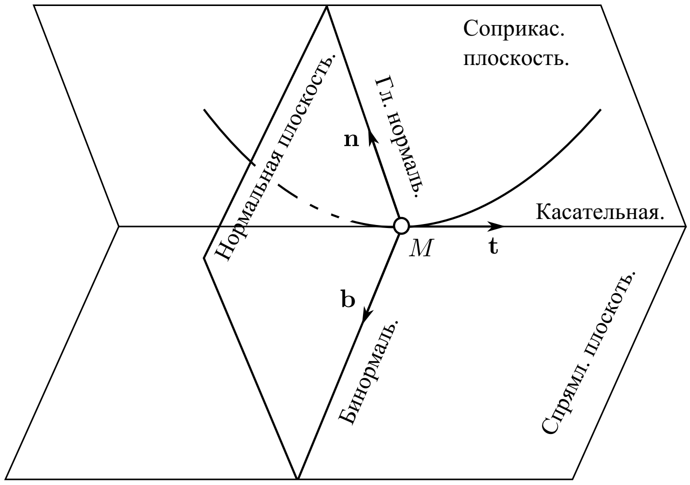

Рис. 17: Сопровождающий трехгранник.

нормальная плоскость (проходит через главную нормаль и бинормаль)

спрямляющая плоскость - так назыается плоскость, проходящая через бинормаль и касательную.

На осях трехгранника условимся откладывать в определенную сторону единичные векторы - орты нашей координатной системы - и их направления будем считать положительными направлениями на осях. Для этих ортов введем обозначения:

$\mathbf{t}$ - орт по касательной,

$\mathbf{n}$ - орт по главной нормали,

$\mathbf{b}$ - орт по бинормали.

Сопровождающий трехгранник строится в каждой точке кривой где $\mathbf{r}'' \nparallel \mathbf{r}'$ и меняется от точки к точке.

Найдем теперь уравнения элементов сопровождающего трехгранника. Уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости уже получены.

Составим *уравнение соприкасающейся плоскости.* Так как векторы $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ лажат в соприкасающейся плоскости, то их векторное произведение

$$\left[\mathbf{r}', \mathbf{r}''\right] = (y'z'' - z'y'')\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{k} \tag{122}$$

отличное от нуля, (так как мы предполагаем $\mathbf{r}' \nparallel \mathbf{r}''$) будет к ней перпендикулярно. Рассматривая соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через данную точку $M(x,y,z)$ на кривой перпендикулярно к вектору (122), мы можем записать ее уравнение в виде

$$(X-x)(y'z''-z'y'') + (Y-y)(z'x''-x'z'') + \\ + (Z-z)(x'y'-y'x'') = 0. \tag{123}$$

или

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r})[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = 0,$$

где X, Y, Z - текущие координаты, $\mathbf{R}$ - скользящий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. Левучю часть (123) можно переписать более сжато в виде определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \tag{124}$$

или

$$(\mathbf{R}-\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{r}'')=0.$$

Составим теперь уравнния главной нормали и бинормали. Начнем с бинормали, так как вектор, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости и, следовательно, направленный по бинормали, у нас уже построен. Это - вектор $[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']$ (см.122). В таком случае уравнение бинормали легко построить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x,y,z)$ на кривой и параллельной вектору $[\mathbf{r}',\mathbf{r}']$ в этой точке. Уравнение это (в форме пропорций) запишется по общим правилам так:

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''}=\frac{Y-y}{z'x''-x'z''}=\frac{Z-z}{x'y''-y'x''} \tag{125}$$

Чтобы найти теперь направление главной нормали, составим векторное произведение перпендикулярных к ней векторов, а именно, $\mathbf{r}'$ и $[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']$. Это векторное произведение будет, очевидно, параллельно главной нормали. Вычислим его как двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{r}',[\mathbf{r}',\mathbf{r}'']]=\mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-\mathbf{r}''(\mathbf{r}'\mathbf{r}').$$

Не представляет труда вычислить координаты этого вектора

$$\begin{gathered} x'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-x''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \\ y'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-y''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \\ z'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'')-z''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'). \end{gathered}$$

и записать уравнение главной нормали как прямой, проходящей через точку $M(x,y,z)$ кривой параллельно этому вектору.

Установим направление векторов $\mathbf{r},\mathbf{n},\mathbf{b}$, будем предполагать, что кривая отнесена к дуге как к параметру

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s).$$

Тогда $\dot{\mathbf{r}}$ есть единичный вектор, направленный по касательной. Его мы и примем за вектор $\mathbf{t}$:

$$\mathbf{t}=\dot{\mathbf{r}}. \tag{126}$$

Дифференцируя это равенство по s и учитывая, что производная единичного вектора $\mathbf{t}$ ему ортогональна по лемме (0.1.1), получим

$$\dot{\mathbf{t}}=\ddot{\mathbf{r}}\perp\mathbf{t}.$$

Таким образом, $\ddot{\mathbf{r}}$ направлен по некоторой нормали к кривой; а так как вторая производная радиус-вектора по любому параметру (в том числе и по дуге) всегда лежит в соприкасающейся плоскости, то $\ddot{\mathbf{r}}$ *направлен по главной нормали.* При этом предполагается $\ddot{\mathbf{r}}\neq 0$.

Мы услвимся, единичный вектор по главной нормали $\mathbf{n}$ *откладывать в направлении вектора* $\ddot{\mathbf{r}}$.

Наконец, единичный вектор по бинормали $\mathbf{b}$ мы направим так, чтобы поворот на прямой угол от $\mathbf{t}$ к $\mathbf{n}$ происходил против часовой стрелки, если смотреь с конца $\mathbf{b}$. Другими словами, векторы $\mathbf{t},\mathbf{n},\mathbf{b}$ должны представлять собой правую тройку. Так как, кроме того, это векторы единичные и взаимно ортогональны, то для них (совершенно так же как для ортов $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$) имеют место равенства

$$\begin{aligned} [\mathbf{t},\mathbf{n}]&=\mathbf{b}, \\ [\mathbf{n},\mathbf{b}]&=\mathbf{t}, \\ [\mathbf{b},\mathbf{t}]&=\mathbf{n}. \end{aligned} \tag{127}$$

Если направление отсчета дуги s мы изменим на обратное, то, тассуждая совершенно так же, как и для плоской кривой, получим, что $\mathbf{t}$ меняет направление на обратное, а $\mathbf{n}$ не меняется. Что же касается $\mathbf{b}$, то из первой формулы (127) видно, что он меняет направление на обратное. Итак,

$$\left.\begin{gathered} \mathbf{t}\to-\mathbf{t}, \\ \mathbf{n}\to\mathbf{n}, \\ \mathbf{b} \end{gathered}\right\} \tag{128}$$

Мы проводили изучение пространственной кривой в бесконечно малом с точностью уже не 1-го (как при построении касательной), а 2-го порядка. С этим связано появление в рассмотрении не только первой, но и второй производной радиус-вектора $\mathbf{t}(t)$, построение соприкасающейся плоскости и т.д.

0.2 Кривизна пространственной кривой.

Введем теперь понятие *кривизны в данной точке пространственной кривой.* Вдоль пространственной кривой

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$$

в каждой точке определяется единичный касательный вектор

$$\mathbf{t}=\dot{\mathbf{r}}(s)$$

как функция дуги s.

Определение 0.2.1 Скорость вращения вектора $\mathbf{t}$ (или, что тоже, скорость врещния касательной) в данно точке кривой по отношению к пути s, проходимому по кривой называется *кривизной* k в данной точке.

Другими словами,

$$k=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right|, \tag{129}$$

где Δs - путь, пройденный по кривой, исходя из данной точке, а $\Delta\varphi$ - угол соответствующего поворота касательной $\mathbf{r}$. Но по лемме (0.1.2)

$$\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\dot{\mathbf{t}}(s)\right|$$

и, следовательно,

$$k = |\dot{\mathbf{r}}| . \tag{130}$$

А так как $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, то

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}| . \tag{131}$$

0.2.1 Формулы Френе. Кручение.

Основной смысл формул Френе состоит в том, чтобы характеризовать вращение сопровождающего трехгранника $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ при движении точки касания вдоль пространственной кривой. Действительно, так как $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ - единичные взаимно ортогональные векторы, то при бесконечно малом смещении точки касания вдоль кривой эта тройка может лишь повернутся как твердое тело (на изменение точки приложения мы внимания не обращаем), рис.18.

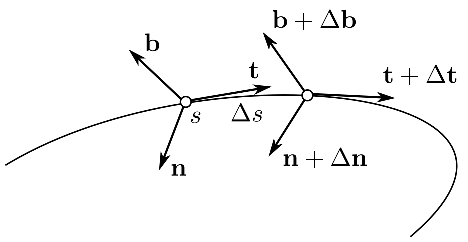

Рис. 18: Вращение сопровождающего трехгранника - геометрический смысл форму Френе.

Займемся аналитическим выражением этой идеи.

Считая кривую отнесенной к параметру s

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

причем кривизна нигде не обращается в нуль, мы очевидно, можем векторы сопрвождающего трехгранника считать однозначно определенными функциям s:

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \mathbf{b} = \mathbf{b}(s).$$

Аналитическое содержание формул Френе будет заключатся в разложении производных от векторов $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ по дуге s т.е. $\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}$, по самим этим векторам.

Легче всего выразить производную $\dot{\mathbf{t}}$. Мы занем, что вектор $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}$ направлен в каждой точке по главной нормали в положительном направлении, другими словами, в направлении вектора $\mathbf{n}$. Что же касается его модуля, то он равен кривизне, как показывает (130). Следовательно, вектор $\dot{\mathbf{t}}$, как и всякий вектор, равен своему модулю, умноженному на единичный вектор в том же направлении:

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n} \tag{132}$$

Это и есть *первая формула Френе*. Вектор $k\mathbf{n}$ называется вектором кривизны кривой.

Займемся теперь дифференцированием вектора $\mathbf{b}(s)$. Запишем определение вектора $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}],$$

и продифференцируем это равенство почленно по s. Получим

$$\dot{\mathbf{b}} = [\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n}] + [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

В правой части первый член обращается в нуль, так как первый множитель векторного произведения $\dot{\mathbf{t}}$ коллинеарен второму, $\mathbf{n}$,

$$\dot{\mathbf{b}} = [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

Так как $\mathbf{n}$ - вектор единичный, то его производная $\dot{\mathbf{n}}$ перпендикулярна е нему; кроме того, вектор $\mathbf{t}$ также к нему перпендикулярен. Следовательно, векторное произведение $\mathbf{t}$ на $\dot{\mathbf{n}}$, перпендикулярное к обоим этим векторам, будет направлено параллельно $\mathbf{n}$ и будет отличатся от $\mathbf{n}$ только некоторым скалярным коэффициентом. Этот коэффициент, взятый с обратным знаком, мы обозначим через κ. Тогда векторное произведение $[\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}]$ равно - $\kappa\mathbf{n}$ и мы можем записать

$$\dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n}. \tag{133}$$

Это и есть *третья формула Френе* (вторую еще предстоит вывести). Коэффициент κ в каждой точке определяется, очевидно, единственным образом, включая и знак (в отличие от коэффициента k, который по самому определению кривизны всегда положителен.

Определение 0.2.2 Значение коэффициента κ в данной точке кривой называется кручением кривой в этой точке.

Используем формулы (127):

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}], \tag{134}$$

$$\mathbf{t} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}], \tag{135}$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}]. \tag{136}$$

Продифференцируем по s последне равенство; получим

$$\dot{\mathbf{n}} = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}}].$$

Подставим сюда выражения $\dot{\mathbf{b}}$ и $\dot{\mathbf{t}}$ из (133) и (132). Получим

$$\dot{\mathbf{n}} = [-\kappa\mathbf{n}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, k\mathbf{n}].$$

Пользуясь формулами (134) и (135), векторные произведения $[\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{n}]$ можно заменить через $-\mathbf{b}$ и $-\mathbf{t}$, и выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательно форму

$$\dot{\mathbf{n}} = \kappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \tag{137}$$

Мы получили *вторую формулу Френе.* Сделаем сводку всех формул Френе:

$$\left.\begin{array}{c} \dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = \kappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}, \dot{\mathbf{b}} = \kappa\mathbf{n}. \end{array}\right\} \tag{138}$$

Производные $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ по длинне дуги s в данной точке разложены, как мы видим, по самим $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ с коэффициентами $\pm k$, $\pm\kappa$.

Интерестно отметить, что если в каждом разложении писать на первом месте член с $\mathbf{t}$, потом с $\mathbf{b}$, то матрица кэффициентов разложений (138) примет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa 0 & \end{vmatrix} \tag{139}$$

Чтобы уяснить кинематический смысл формул Френе, представим себе, что векторы трехгранника, $\mathbf{t}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ откладываются из фиксированной точки O, так что, когда мы движемся по кривой, меняя аргумент s, трехгранник вращается как твердое тело около O.

0.2.2 Скалярное произведение.

Определение 0.2.3 Если заданы вектор ξ и вектор ζ, то их евклидовым скалярным поизведением называется число

$$(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \zeta^i \tag{140}$$

Это скалярное произведение обладает следующими свойствами:

$$\begin{array}{c} a)\, (\xi, \zeta) = (\zeta, \xi); \text{ - симметричность.} \\ b)\, (\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2) = \lambda_1(\xi_1, \zeta) + \lambda_2(\xi_2, \zeta); \\ \text{- линейность(по двум аргументам)} \\ c)(\xi, \xi) > 0 \\ \text{- положительная определенность.} \end{array} \tag{141}$$

Определение 0.2.4 Декартовы координаты $x^1, ..., x^n$, в котороых это скалярное рпоизведение имеет вид (140), называются *евклидовыми координатами*.

Используя понятие скалярного произведения, можно сказать, что квадрат длины прямолинейного отрезка, ведущего из точки P с радиус-вектором $\xi = (x^1, ..., _x)$ в точку Q с радиус-вектором $\zeta = (y^1, ..., y^n)$, есть скалярный квдрат вектора $\xi - \zeta$, а длинна любого вектора $v = (v^1, ..., v^n)$ равна $\sqrt{(v, v)}$. Часто длину вектора v обозначают через $|v|$. Свойство b) означает, что все ненулевые векторы v имеют положительную длину.

Напомним, что угол между двумя векторами тоже выражается через скалярное произведение.

$$\cos\varphi = \frac{(\xi, \zeta)}{\sqrt{(\xi, \xi)(\zeta, \zeta)}} = \frac{(\xi, \zeta)}{|\xi||\zeta|}. \tag{142}$$

Таким образом, длины и углы тесно связаны с понятием скалярного произведения между векторами. В дальнейшем скалярное произведение будет взято за основное, превичное понятие, на котором строится геометрия.

Пусть теперь задана некоторая параметризованная кривая

$$x^1 = \varphi^1(t), \ \dots \ , x^n = \varphi^n(t), \tag{143}$$

Рассмотрим компоненты dx^i/dt касательного вектора к этой кривой.

Определение 0.2.5 Длинной линии называется число

$$l = \int_a^b \sqrt{(v(t), v(t))}dt = \int_a^b |v(t)|dt \tag{144}$$

Иначе говоря, длинной линии называется интеграл от длины ее вектора скорости.

Длинна прямолинейного отрезка $x^i = y^i t$, $0 \le t \le 1$ выходящего из начала коориднат

$$\begin{aligned} l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right) + ... + \left(\frac{dx^n}{dt}\right)}dt \\ = \sqrt{(y^1)^2 + ... + (y^n)^2}, \end{aligned} \tag{145}$$

Заметим, что формула (144) для длины кривой относится к параметризованым кривым $x^i = \varphi^i(t)$, $i = 1, ..., n$, $a \le t \le b$.

Определение 0.2.6 Мы бежим вдоль линии вместе с параметром t, меняющимся между a и b со скоростью

$$v(t) = \left(\frac{d\varphi^1}{dt}, ..., \frac{d\varphi^n}{dt}\right) \tag{146}$$

и эта скорость $v(t)$ бека по кривой явням образом входит в формулу (144).

Что будет, если мы побежим по той же самой кривой с другой скоростью? Мы движемся от точки $x = (\varphi^1(a), ..., \varphi^n(a)$ до точки $y = (\varphi^1(b), ..., \varphi^n(b)$. Получим ли мы тоже самое число, если будем двигатся по той же самой линии от точки P до точки Q? но с другой скоростью?

Точная постановка этого вопроса такова. Пусть задан новый параметр τ, меняющийся от a' до b', ($a' \leq \tau \leq b'$), и параметр t представлен в виде фукнции от τ, $t = t(\tau)$, $t(a') = a$, $t(b') = b$ причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Последнее неравенство означает просто, что мы бежим по параметру τ в ту же сторону по кривой, что и по параметру t. Тогда наша кривая представлена в виде

$$x^i = \varphi^i(t(\tau)) = g^i(\tau), \;\; i = 1, ..., n \tag{147}$$

Скорость движения по параметру τ имеет вид

$$w(\tau) = \left(\frac{dg^1}{d\tau}, ..., \frac{dg^n}{d\tau}\right), \;\; a' \leq \tau \leq b' \tag{148}$$

Длина кривой в новой параметризации равна

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau \tag{149}$$

Покажем, что

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau = l = \int_a^b |v(t)| dt \tag{150}$$

Вычислим длину вектора $w(\tau)$:

$$w(\tau) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dg^i}{d\tau}\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right)^2} = \left|\frac{dt}{d\tau}\right| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i}{dt}\right)^2} = \frac{dt}{d\tau}\left|v(t)\right|, \tag{151}$$

так как $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Поэтому

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| dt = \int_{a'}^{b'} |v(t(\tau))| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_a^b |v(t)| dt, \tag{152}$$

что и тербовалось доказать.

Вывод. Длина отрезка на кривой не зависит от скорости пробегания этого отрезка кривой.

Пусть тепрерь в евклидовом пространстве с координатами x^i задана другая система координат $x^{i'}$, так что $x^i = x^i(x^{i'})$, $i, i' = 1, ..., n$. Пусть кривая задается параметрически в новых координатах $x^{i'} = x^{i'}(t)$, $i' = 1, ..., n$. Тогда в исходных, евклидовых координатах та же самая кривая имеет вид

$$x^i = x^i(x'(t)) = h^i(t) \tag{153}$$

Вектор скорости $v'(t)$ кривой в координатах $(x^{i'})$

$$v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt}$$

В исходных координатах x^i вектор скорости

$$v = \frac{dh^i}{dt}$$

Это - вектор, взятый в точке $P = h^i(t)$, тот же самый вектор, что и v', но взятый в точке $P = x^{i'}(t)$. Точка P одна и та же, и вектор один и тот же, но записанный в двух разных системах координат x^i и $x^{i'}$

Как мы знаем, компоненты вектора скорости при замене координат преобразуются по закону

$$v^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v^{i'} \tag{154}$$

Квадрат длинны вектора скорости имеет вид

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dh^i}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dx^i}{dx^{i'}} v^{i'}\right)^2 = \mathsf{g}_{i'j'} v^{i'} v^{j'}, \tag{155}$$

где введено обозначение

$$\mathsf{g}_{i'j'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \tag{156}$$

Вывод. В произвольных координатах $x^{i'}$, где $x = x(x')$, скалярный квадрат вектора скорости кривой

$$v' = \frac{dx^{i'}}{dt}$$

задается формулой

$$|v|^2 = |v'|^2 = \mathsf{g}_{i'j'} \frac{dx^{i'}}{dt}\frac{dx^{j'}}{dt} \tag{157}$$

где

$$\mathsf{g}_{i'j'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

Имея ввиду, что данное равенство выполняется для любой кривой записывают также

$$\mathsf{g}_{i'j'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \bar{e}_{j'}\bar{e}_{k'} \tag{158}$$

Определение 0.2.7 Матрица $\mathsf{g}_{i'j'}$ позволяющая выразить скалярный квадрат вектора скорости кривой в произвольных системах координат называется *метрическим тензором*.

Определение 0.2.8 Мерический тензор является *квадратичной формой* на касательных векторах, которая каждой паре векторов ставит в соответствиие число - скалярное произведение.

Итак, вектором в точке $P = x^i$, $i = 1, ..., n$ называется набор чисел ξ^i, отнесенный к системе координат x^i. Если две системы координат x^i и $x^{i'}$ связаны заменой $x = x(x')$, причем $x^i(x_0^{i'}) = x_0^i$, то для новой системы координат $x^{i'}$ этот же вектор в точке $x_0^{i'}$ задается другим набором чисел $\xi^{i'}$, который связан с исходным формулой

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\bigg|_{x^{j'}=x_0^{j'}} \xi^{i'}. \tag{159}$$

Выпишем, еще раз закон преобразования градиента фнукции. Пусть дано

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{160}$$

Положим $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, ..., n$. Градиент той же функции в других координатах $x^{i'}$, где $x = x(x')$ записывается в виде:

$$\begin{gathered} \mathrm{grad} f(x^i(x')) = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}, \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},\ \ i, i' = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{161}$$

Обозначив через $\xi_{i'}$ компоненты $\partial f / \partial x^{i'}$ градиента в новой системекоординат, получим

$$\xi_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\xi^i \tag{162}$$

Пусть теперь система координат $x^1, ..., x^n$ евклидова, а ξ_1^i и ξ_2^i - два вектора, которые выходят из одной точки $P = (x_0^i)$, $i = 1, ..., n$. В системе кооридна $x^{i'}$ такой, что $x = x(x')$, $x(x_0') = x_0$, эти же векторы имеют соответственно координаты $\xi_1^{i'}$ и $\xi_2^{i'}$, связнные с прежними координатами формулами

$$\xi_1^i = a_{i'}^i \xi_1^{i'},\ \ \xi_2^i = a_{i'}^i \xi_2^{i'}, \tag{163}$$

где $a_{i'}^i$ - матрица Якоби, вычисленная при $x^{i'} = x_0^{i'}$. Скалярное произведение векторов ξ_1 и ξ_2 в исходной системе кооридна имеет вид

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij}\xi_1^i \xi_2^j. \tag{164}$$

В новой системе координат оно равно

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n (a_{i'}^i x_1^{i'})(a_{j'}^i x_2^{j'}) = \mathrm{g}_{i'j'} x_1^{i'} x_2^{j'}, \tag{165}$$

Где матрица

$$\mathrm{g}_{i'j'} = \sum_{i=1}^n a_{i'}^i a_{j'}^i = \delta_{sq} a_{i'}^s a_{j'}^q \tag{166}$$

- метрический тензор. Поэтому скалярное произведение векторов в новых координатах определяется той же самой матрицей $G' = g_{i'j'}$. На алгебраическом языке формула (166) означает, что

$$G' = A^T A, \tag{167}$$

где индекс T обозначает транспонирование матрицы.

Выясним, как преобразуются компоненты $g_{i'j'}$ марицы G' при переходе к новым коорнинатам. Пусть заданы новые координаты $x^{i''}$ в той же области, и $x^{i'} = x^{i'}(x^{i''}, i', i'' = 1, ..., n$. Положим

$$A' = a_{i''}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}.$$

Мы знаем, что тогда векторы x_1^i, x_2^i в координатах $x^{i''}$ имеют компоненты $\xi_1^{i''}$, $\xi_2^{i''}$, причем

$$\xi_1^{i'} = a_{i''}^{i'} \xi_1^{i''},\ \ \xi_2^{i'} = a_{i''}^{i'} \xi_2^{i''} \tag{168}$$

Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах x'', равна $\mathrm{g}_{i''j''}$. Это значит, что

$$(\xi_1, \xi_2) = \mathrm{g}_{i''j''} \xi_1^{i''} \xi_2^{j''} = \eth_{i'j'} \xi_1^{i'} \xi_2^{j'}. \tag{169}$$

Используя равенство (168), получаем

$$\mathrm{g}_{i''j''} \xi_1^{i''} \xi_2^{j''} = (a_{i''}^{i'} \mathrm{g}_{i'j'} a_{j''}^{j'})(\xi_1^{i''} \xi_2^{j''}), \tag{170}$$

откуда

$$\mathrm{g}_{i''j''} = a_{i''}^{i'} \mathrm{g}_{i'j'} a_{j''}^{j'}. \tag{171}$$

Итак, $G'' = A'^T G' A'$.

Определение 0.2.9 Квадратичной формой (на векторах) в точке $x_0^{i'}$ называется набор чисел $g_{i'j'}$, $i', j' = 1, ..., n$, с $g_{i'j'} = g_{j'i'}$, отнесенный к системе координат $x^{i'}$

Если две системы координат $x^{i'}$ и $x^{i''}$ связаны заменой $x' = x'(x'')$, причем $x^{i'}(x_0^{i''}) = x_0^{i'}$, $i', i'' = 1, ...n$, то для новой системы координат $x^{i''}$ эта же квадратичная форма задается набором чисел $\mathrm{g}_{i''j''}$, $i'', j'' = 1, ..., n$, с $\mathrm{g}_{i''j''} = \mathrm{g}_{j''i''}$ который связан с исходным набором формулой.

$$\mathrm{g}_{i'j'} = \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{j'}}\bigg|_{z^s=z_0^s} \mathrm{g}_{i''j''} \frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{i'}}\bigg|_{z^s=z_0^s} \tag{172}$$

В матричной форме это озанчает, что

$$G' = (A'^{-1})^T\ G''\ A'^{-1} \tag{173}$$

Замечание. Очевидно, что закон преобразования матрцы g не зависит от выбора системы координат, поэтому штрихи у индексов можно писать или не писать, в зависимости от удобства.

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij}, преобразующаяся при заменен координат по закону (172) , то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (билинейную) функцию (ξ,ξ)(или (ξ,ζ)), полагая

$$\begin{aligned}(\xi,\xi) &= g_{ij}\xi^i\xi^j,\\ (\xi,\zeta) &= g_{ij}\xi^i\zeta_j.\end{aligned} \tag{174}$$

Из закона преобразования (172) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы коориднат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и ζ).

Замечание. Скалярное произведение двух веторов, исходящих из разных точек не инвариантно при заменах координат.

Замечание. При преобразованиях координат, рассматриваемая точка остается той же самой.

Определение 0.2.10 Римановой метрикой в области пространства с произвольными коорднатами $(z^1,...,z^n)$ называется положительная квадратичная форма, заданная на касательных векторах(в одном и том же L_x !) в каждой точке x и гладко зависящая от точки. Пока у нас нет способа сравнивать векторы из разных касательных простарнсв (выходящие из разных точек). Если заданы новые координаты $(z^{1'},...,z^{n'})$ в той же области, и $z^i = z^i(z^{i'})$, $i=1,...,n$, то в новых координатах риманова метрика определяется набором функций $g_{i'j'} = g_{j'i'}(z^1,...,z^n)$, $i,j=1,...,n$, причем

$$g_{i'j'} = \frac{\partial z^k}{\partial z^{i'}} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial z^{j'}}. \tag{175}$$

Если задана риманова метрика, то длина кривой $z^i = z^i(t)$ равна

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t))\frac{dz^i}{dt}\frac{dz^j}{dt}}dt \tag{176}$$

0.2.3 Метрика и деформация.

Материальное и пространственное описания.

Представим себе фиксированную систему декартовых координат с осями x_i, $i=1,2,3$. Положение любой точки в пространстве определяется радиусомвектором $\mathbf{r}$ с комопнентами (x_1,x_2,x_3). Точка которая движется вместе с ввеществом, называется *частицей* или *материальной точкой.* Линии и поверхности, состоящие из частиц, называются материальными линиями и поверхностями. Вещество, находящееся внутри замкнутой материальной поверхности называется *телом*.

Припишем каждой частице ее координаты в некоторый момент времени t_0, который примем в качестве начала отсчета веремени. Эти начальные координаты в той же декартовой системе будем обозначать (a_1,a_2,a_3), а соответствующий радиус вектор обозначим $\mathbf{a}$. Вектор $\mathbf{a}$ может служить для определения той частицы, которая в момент времени t_0 находилась в данной точке пространства. Момент времени t_0 и радиус-вектор $\mathbf{a}$ иногда называют *начальными* значениями.

Как ветор $\mathbf{r}$ так и ветор $\mathbf{a}$ могут служить для обозначения положения частицы в фиксированной декартовой системе отсчета. Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ в некоторый момент времени t связаны между собой следующим условием: радиус-вектор $\mathbf{r}$ определяет положение той частицы в момент времени t, которая в начальный момент времени находилась в точке $\mathbf{a}$. Эта связь между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{a}$ может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t,\mathbf{a}), \text{или } x_i = x_i(t,a_1,a_2,a_3), \tag{177}$$

где

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0,\mathbf{a}), \text{или } a_i = x_i(t_0,a_1,a_2,a_3). \tag{178}$$

Координаты a_i, связанные с частицами, называются *материальными* координатами. Такое описание процессов, в котором в качестве независимых переменных используются величины t,a_1,a_2,a_3, как например в уравнении (177), называется *материальным* описанием.

Обращая уравнения (177) и (178) можно написать

$$\mathbf{a} = a(t,\mathbf{r}), \text{или } a_i = a_i(t,x_1,x_2,x_3), \tag{179}$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(t_0,\mathbf{r}), \text{или } x_i = a_i(t_0,x_1,x_2,x_3). \tag{180}$$

В пространствнном описании в качестве независимых переменных используются величины (t,x_1,x_2,x_3), где x_i называюстя *пространственными* координатами. Величины x_i используемые как независимые переменные, определяют просто точку в пространстве.

Если задан закон движения

Часто представляет интерес пространственное описание поля давлений или поля скоростей, а не начальное положение частиц. В подобных случаях при использовании пространственного описаания ограничиватся определением требуемых характеристик полей и не определяют функций a_i из уравнения (179). Пространственное описание особенно полезно в механике жидкостей, когда мы можем наблюдать за потоком в данной области пространства. В теории упругости, как правило, предпочтительнее материальное описание, поскольку в качестве начального состояния может быть выбрано ненапряженное состояние, к которому тело возвращается после снятия нагрузки.

Обычно материальные и пространственные переменные называются переменными *Лагранжа* и *Эйлера*.

Скорость. Если материальные координаты (a_1, a_2, a_3) в уравнении (177) фиксированы, то величины (x_1, x_2, x_3) являются текущими координатами той частицы, которая в начальный момент времени находилась в точке, определяемой вектором $\mathbf{a}$. Координаты этой частицы зависят теперь только от времени, так как вектор $\mathbf{a}$ обозначает лишь, какая именно частица рассматривается. Следовательно, если ограничится рассмотрением одной частицы, то компоненты ее скорости представляют собой просто обычные производные по времени

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Если учитывать также наличие других частиц, то нужно взять частную производную при постоянных значениях параметров a_i:

$$v_i = \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \equiv \left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)_{a_1, a_2, a_3}. \tag{181}$$

Вектор скорости

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} \equiv \mathbf{i}_i v_i. \tag{182}$$

Здесь i_1, i_2, i_3 - единичные веткоры, направленные вдоль осей координат. Подразумевается суммирование по повторяющимся дважды индексам. Таки образом, $\mathbf{i}_i v_i$, обозначает $\sum_{i=1}^{3}$, а $v_j(\partial F/\partial x_j)$ обозначает $v \cdot gradF$.

Материальная производная.

Вазно различать изменение во времени какой-либо из характеристик поля в фиксированной точке пространства и изменение той же характеристики во времени для некоторой фиксированной частицы т.е. когда изменения поля рассматриваются, как бы следуя за движением фиксированной частицы. Скорость изменения параметров для фиксированной частицы, которая называется *материальной производной*, имеет фундаментальное значение.

Мы можем следить за какой-либо частицей, если фиксируем величину $\mathbf{a}$. Следовательно, в материальном описании (переменные Лагранжа) материальная производная есть частная производная по времени $\partial/\partial t$. В пространственном описании (переменные Эйлера) материальная производная обозначается как d/dt или точкой над символом соответствующей величины.

Пусть одно и тоже поле обозанчается символом F в пространственном описании и символом f в материально описании. Тогда

$$\begin{gathered} f(t, a_1, a_2, a_3) = \\ F[t, x_1(t, a_1, a_2, a_3), x_2(t, a_1, a_2, a_3), x_1(t, a_1, a_2, a_3)] \end{gathered} \tag{183}$$

По определению, материальная производная

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{a_1, a_2, a_3}. \tag{184}$$

Чтобы получить выражение для материальной производной в пространственном описании, продифференцируем уравнение (183) и используем (184):

$$\begin{gathered} \frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x_i} = \\ \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} F. \end{gathered} \tag{185}$$

Частные производные от F взяны в пространственном описании, а производные от f и x_i - в материально описании. Величина $\partial F/\partial t$ представляет собой изменение F со временем в фиксированной точке пространства, тогда как член $\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} F$ возникает свледствие движения частицы в поле F, величина которого меняется от точки к точке. Произведение $\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} F$ иногода называют *конвекцией* величины F.

Ускорение. Ускорение частицы есть быстрота изменения ее скорости; следовательно, ускорение представляет собой материальнуюю производную поля скоростей

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{i}_i \dot{v}_i. \tag{186}$$

Если компоненты скорости записать как функции пространственных координат $v_i(t, x_1, x_2, x_3)$, то компоненты ускорения могут быть выражены в форме, аналогичной (185):

$$\begin{gathered} \frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad} v_i. \end{gathered} \tag{187}$$

Деформация.

Смещение частицы из некоторого начального положения в новое положение описывается *вектором смещения*, компоненты которого равны

$$u_i = x_i - a_i. \tag{188}$$

Компоненты смещения u_i могут быть представлены в материальных координатах, если вместо x_i подставить выражения (177), или в пространственных координатах, если a_i заменить выражениями (179).

Термин *деформация* используется всегда, когда говорят бо изменении *относительных* положений материальных точек в любом теле. Рассмотрим некоторую "конечную"конфигурацию материальных точке, выраженную через параметры начальной конфигурации. Это можно сделать, положив величину t в уравнении (177) равной некоторой константе. Тогда величина t не будет фигурировать как переменная, и уравнения (177) и (179) можно будет переписать в виде:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3), \tag{189}$$

$$a_i = a_i(x_i, x_2, x_3). \tag{190}$$

Если независимыми переменными являются величины a_i, то da_i рассматриваются как независимые *приращения*, а *дифференциалы* величин x_i *определяются* выражениями

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j \tag{191}$$

В пространственном описании независимыми приращениями являются dx_i, а дифференциалы da_i определяются выражениями

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \tag{192}$$

Различие между деформацией и движением твердого тела как целого явяется наличие изменений расстояний между частицами тела при деформации. Пусть частица, находившаяся сначала в точке (a_1, a_2, a_3), переместилась в точку (x_1, x_2, x_3). Квадрат начального расстояния между двумя соседними частицами, находившимися в точках a_i и $a_i + da_i$, равен

$$ds_0^2 = da_i da_i. \tag{193}$$

Прим материальном описании компоненты деформации η_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, где a_i явяются независимыми переменными:

$$dx_i dx_i - da_i da_i = 2\eta_{jk} da_j da_k \tag{194}$$

При пространственном описании квадрат расстояния между соседними частицами, находящимися вконечном состоянии в точках x_i и $x_i + dx_i$, равен

$$ds^2 = dx_i dx_i. \tag{195}$$

Компоненты деформации в пространственном описании ε_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, в котором величины x_i явяются независимыми переменными:

$$dx_i dx_i - da_i da_i = 2\varepsilon_{jk} dx_j dx_k \tag{196}$$

Подставляя (191) в (194), получаем выражения для компонент η_{jk}; подставляя (192) в (196), получаем выраженя для компонент ε_{jk}. Испольуя определение смещения (188), каждый из этих наборов компонент деформации можно выразить через компоненты вектора смещения. В результате получим

$$\begin{gathered}\eta_{jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j}\frac{\partial x_i}{\partial a_k} - \delta_{jk}\right) = \\ \frac{1}{2}\left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\right)\left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right) - \delta_{jk}\right] = \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j}\frac{\partial u_i}{\partial a_k}\right)\end{gathered} \tag{197}$$

$$\begin{gathered}\varepsilon_{jk} = \frac{1}{2}\left(\delta_{jk} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) = \\ \frac{1}{2}\left[\delta_{jk} - \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\right] = \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right).\end{gathered} \tag{198}$$

Если пренебреч произведениями и квадратами производных от смещений (по сравнению с членами первого порядка), то выражения для компонент деформации упростятся и приймут известную форму выражений для "бесконечно малых деформаций".

Поскольку $\delta_{jk} = \delta_{ij}\delta_{jk}$ и

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_s}\frac{\partial a_s}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \tag{199}$$

можно паказать, что

$$\varepsilon_{jk} = \eta_{st}\frac{\partial a_s}{\partial x_j}\frac{\partial a_t}{\partial x_k}. \tag{200}$$

Аналогично

$$\eta_{jk} = \varepsilon_{st}\frac{\partial x_s}{\partial a_j}\frac{\partial x_t}{\partial a_k}. \tag{201}$$

Если имеется смещение вещества в той области, где комопненты деформации всюду равны нулю, то такое смещение будет жестким смещением. Т.е. расстояние между частицами не изменяется. В таком случае градиент деформации связывающий деформированное и недеформированное состояния является ортогональным тензором.

Тензоры η_{ij} и ε_{ij} имеют то преимущество, что они равны нулю для жесткого смещения и что для достаточно малых градиентов смещния $\partial u_i/\partial x_i$ они сводятся к классическому "тензору бесконечно малой деформации". Однако исследование больших деформаций иногда проще проводить, испольуя другие меры дефомрации, такие, как тензор деформации Грина

$$C_{ij} = \frac{\partial x_s}{\partial a_j}\frac{\partial x_s}{\partial a_k} = \delta_{jk} + 2\eta_{jk} \tag{202}$$

или тензор деформации Коши

$$c_{jk} = \frac{\partial a_s}{\partial x_j}\frac{\partial a_s}{\partial x_k} = \delta_{jk} - 2\varepsilon_{jk}. \tag{203}$$

Покажем, что метрический тензор соответствует тензору дефомрации в теории упругости.

Так теперь мы работаем в произвольных системах координат, для нас теперь имеет смысл индексы векторов ставить в верху.

Вернемся к формуле

$$dL^2 = (dx^i)^2$$

Это есть *скалярный квадрат вектора* соответствующего бесконечно малому переменщению в недеформированной среде. Тогда

$$dL^2 = \mathrm{g}^0{}_{ik} dx^i dx^k \tag{204}$$

Метрика g^0_{ik} для недеформировнной среды.

В деформированной среде

$$(dL')^2 = \mathrm{g}_{ik} dx^i dx^k \tag{205}$$

Метрика g_{ik} деформировнной среды.

перепишем выражение (??) так

$$(dL')^2 - dL^2 == 2\frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k dx^l$$

Сравнивая это выражение с (204) и (205) и оганичиваясь линейными членами получим

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{ik} - g^0_{ik}) = r_{ik} \tag{206}$$