Многообразия.

Во всем изложенном выше было существенно то, что рассматривалась локальная (в точке) теория. Действительно, касательный вектор характеризует кривую в точке, градиент характеризует функцию в точке, производная была определена определена без перемещений на конечные расстояния. В обозначениях $L_x, T_x, ...$ индекс x указывает на то, что рассматривается точка x на M и бесконечно малая ее корестность. Более того, мы не имеем естественного способа сравнивать (переносить) векторы из различных касательных пространств.

Другим важным аспектом является то, что мы пределили касательный вектор как класс эквивалентности кривых и для выполнения условия эквивалентности в любой системе координат эти системы координат должны быть связаны определенным образом.

Математический объект, ктотрый вмещает в себя все эти объекты и их свойства назвается *дифференцируемым многообразем*, и обозначается обычно M .

Замечание. Понятие многообразия представляет собой, в сущности, обобщение впервые математически описанного Гауссом процесса картографирования земной поверхности. Пусть некоторому коллективу людей, поручено составить карту земной поверхности и каждый кусок земной поверхности поручен какой-нибудь группе с (номером i). Тогде ести области , порученные двум разным группам (с номерами i и j) пересекаются, то этим группам необходимо четко описать на своих картах правило соответствия их карт обхей области. Совокуаность карт различных различных областей называется *аталасом* земной поверхности. Кроме того на картах обычно указывается правило вычисления истинной длины любого пути, попавшего на карту.

Начнем его определение.

Определение 0.0.1 Говорят, что на топологическом пространстве $\mathbb{M}$ задана *карта*, если выделено некоторое открытое множество $\mathbb{A}$, которое гомеоморфно отображается на открытое множество пространства $\mathbb{R}^n$. Число n называется *размерностью* карты.

Не всякое топологическое пространство допускает карту. Задание карты накладывает сильные огрничения на топологию только в одном месте - в месте ее задания. Чтобы наложить ограничения на тополоию глобально, нужно задать множество карт покрывающих все топологическое пространство.

Определение 0.0.2 Множество карт, покрывающих все топологическое пространства, называется *атласом*.

Определение 0.0.3 Топологическое пространство называется топологическим многообразием, если оно хаусдорфово, со второй аксиомой счетности, допускает аталс размерности n.

В пересечении двух карт имеем в обе стороны непрерывную зависимость координат. Более точно это означает следующее.

Пусть $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{X}$ - две карты в топологическом многообразии $\mathbb{X}$ и

$$h: \mathbb{A} \to \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n(x^1, ..., x^n)$$
$$k: \mathbb{B} \to \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n(y^1, ..., y^n)$$

- соответствующие гомеоморфизмы. Гомеоморфизмы h и k называются также координатными функциями. Тогда
$x^i = f^i(y^1, ..., y^n)$, $i = 1, 2, ..., n$ и
$y^i = g^j(x^1, ..., x^n)$, $j = 1, 2, ..., n$;
здесь
f^i - это координатная запись отображения $h \circ k^{-1}$: $k(\mathbb{A} \cap \mathbb{B}) \to h(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$, а
g^j - координатная запись отображения $k \circ h^{-1}$: $h(\mathbb{A} \cap \mathbb{B} \to k(\mathbb{A} \cap \mathbb{B})$, обратного к $k \circ h^{-1}$.

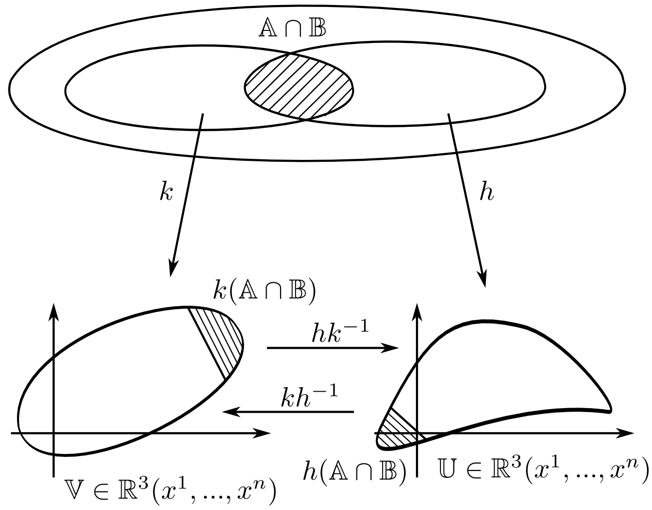

Рис. 1: Многообразие.

В силу определения карт отображения $k \circ h^{-1}$ и $h \circ k^{-1}$ гомеоморфизмы.

Определение 0.0.4 Отображения $k \circ h^{-1}, h \circ k^{-1}$ называются *функциями перехода* от координат $x^1, ..., x^n$ к координатам $y^1, ..., y^n$.

Определение 0.0.5 Атлас топологического многообразия называется гладким, если все функции перехода принадлежат классу C^∞. Два гладких атласа называются *эквивалентными*, если для любой карты A из первого гладкого атласа и для любой карты B из второго гладкото атласа связь между ними гладкая.

Если $A \cap B = \oslash$, то карты A, B гладко связаны по определению

Определение 0.0.6 Говорят, что на топологическом многообразии M определена *гладкая структура* (в топологическое многообразие внесена гладкая структура), если задан гладкий атлас с точностью до замены *эквивалентным* гладким атласом (фиксированной размерности n). Топологическое многообрзие в которое внесена гладкая структура, называется гладким многообразием.

Рассмотрим подробнее метод построения гладкого многообразия основнный на теореме о неявной функции.

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$, множество $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^3$, состоящее из точек $P(x_1, x_2, x_3)$, координаты $\{x_1, x_2, x_3\}$ которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) \\ \Phi(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \tag{1}$$

Допустим что необходимо решить эту систему уравнений в некоторой окрестности некоторой точки $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$, найдя из нее переменные $x_2 = \varphi(x_1)$ и $x_3 = \psi(x_1)$ как такие непрерывные функции φ и ψ переменной x_1, что $\varphi(x_1^{(0)}) = y_2^{(0)}$, $\psi(x_1^{(0)}) = x_3^{(0)}$.

Разрешив для этого, например, первое уравнение (1) относительно x_3, получим $x_3 = f(x_1, x_2)$. Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно x_2, будем иметь $x_2 = \varphi(x_1)$. Полагая $\psi(x_1) = f[x_1, \varphi(x_1)]$, получим искомое решение: $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \psi(x_1)$.

Возникает вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все упомянутые выше функции.

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ относительно переменной $x_3^{(0)}$, достаточно, чтобы

$$\frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y^{(0)}} \neq 0.$$

где для удобсва введено обзначение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и $y^{(0)} = x_3^{(0)}$

ТЕОРЕМА 0.0.1 Пусть функция $F(x, y) \equiv F(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную $F_y^{(0)}$ непрерывную в точке в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U_{x^{(0)}}$ и $U_{y^{(0)}}$ соответственно

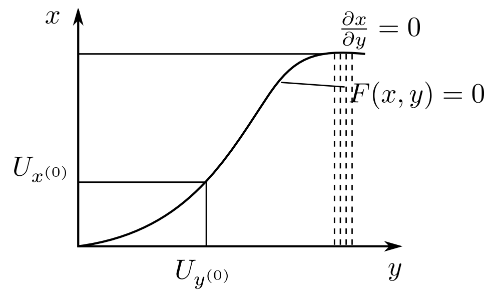

Рис. 2: Разрешимость уравнения заданного неявно.

точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что для каждого $x \in U(y^{(0)})$ существует, и при том единственное, решение $y = f(x) \in U(x^{(0)})$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение непрерывно всюду в $U(x^{(0)})$ и $y^{(0)} = f(x^0)$.

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную $F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0), то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и для нее справедлива формула

$$f'(x^{(0)}) = -\frac{F_x(x^{(0)}, y^{(0)})}{F_y(x^{(0)}, y^{(0)})} \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений вытекает монотонность функции $F(x, y)$ на рассматриваемом интервале. Из мнотонности(по ее определению) следует, что выполняются все условия для биекции а это и значит что существует единственная $y = f(x)$(в рассматриваемой окрестности)

Итак, если $y = f(x)$ - соответствующее решение, то для того, чтобы уравнение получившееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение $\Phi(x, f(x))$ было резрешенным относительно переменной x, достаточно, чтобы полная частная производная по x левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке $(x^{(0)}, y^{(0)}$, т.е, чтобы в этой точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{3}$$

Подставляя в это неравенство (2), получим, что условие разрешимости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0 \tag{4}$$

Из этого условия очевидно вытекает, что в точке (x_0, y_0) либо $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, либо $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$, т.е. одно из данных уравнений разрешимо относительно z.

Важно что (4) можно записать как определитель некоторой матрицы $\mathbf{J}$

$$|\mathbf{J}| = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Матрица $\mathbf{J}$ называется матрицей якоби. А ее определитель, если он не равен онулю называется якобианом (отображения).

В общем случае, условием разрешимости системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{r} F_1(x^1, x^2, ..., x^n) \\ ... \\ F_s(x^1, x^2, ..., x^n). \end{array} \right. \tag{6}$$

является

$$|\mathbf{J}| = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ ... & & \\ \frac{\partial F_s}{\partial x^1} & ... & \frac{\partial \Phi}{\partial x^n} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Определение 0.0.7 В пространстве $\mathbb{R}^n$ с коориднатами $\{x^n\}$ множество $\mathbb{V} \subset R^n$ состоящее из точек $P(\{x^n\})$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (6) для которой выполняется условие (7) является гладким многообразием.

Определение 0.0.8 С системой уравнений (6) связано отображение
$F : \mathbb{R}^n(x^1, ..., x^n) \to \mathbb{R}^x(y^1, .., y^s)$,
$F(x^1, ..., x^n) = (y^1, ..., y^s)$,
где $y^i = f_i(x^1, ..., x^n)$ и $X = F^{-1}(0)$. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *определен дифференциал* dF_{x_0} *отображения* F в точке x_0 : $dF_{x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, который вектор $\zeta = (\zeta^1, ..., \zeta^n)$ отображает в вектор $\xi = (\xi^1, ..., \xi^s)$ по формуле

$$\xi^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\bigg|_{x_0} \zeta^j$$

.

Это очевидно, *линейное отображение*. Отображение dF_x инвариантно можно описать следующим образом. Рассмотрим кривую $x^i = x^i(t)$, $1 \le i \le n$, что $x^i(0) = x_0^i$, $1 \le i \le n$ и $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} x^i(t) = \zeta^i$, $1 \le i \le n$.

Теорема 0.0.2 Имеет место равенство $dF_{x_0}(\zeta) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0} F(x(t))$.

Доказательство. Доказательство следует из равенств.

$$\begin{gathered} \left[\left|\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F(x(t))\right]^i = \frac{df_i(x(t))}{dt}\bigg|_{t=0} = \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\bigg|_{x_0} \frac{dx^j(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x^j}\bigg|_{x_0} \zeta^j \end{gathered} \tag{8}$$

Из определений вытекает, что $rk\mathbb{J}_x = \dim \operatorname{Im} dF_x$.

Определение 0.0.9 Говорят, что на многообразии $\mathbb{M}$ дана кривая, если имеется непрерывное отображение $x : (\alpha, \beta) \to \mathbb{M}$ интервала $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1(t)$ в многообразие $\mathbb{M}$. Кривая это множество точек с некоторой параметризацией. Рассмотрим карту $\mathbb{A}$ в многообразии $\mathbb{M}$, содержащую точку $x(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Прообраз этой карты есть система интервалов, так как кривая - непрерывное отображение. Получим совокупность непрерывных функций $x(t) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$, $x(t) = (x^1(t), ..., x^n(t))$. Через $x(t)$ обозначим композицию $(h \circ x)(t)$, где h - координатный гомеоморфизм карты $\mathbb{A}$.

Определение 0.0.10 Говорят, что на многообразии $\mathbb{M}$ дана *гладкая* кривая, если все функции $x^i(t)$, определеяющие эту кривую, гладкие.

Поскольку многообразие гладкое, то это определение инвариантно относительно выбора карт, *чего нет*, например, *в произвольном многообразии*. Пусть $\mathbb{M}^n$ - гладкое n-мерное многообразие и $x \in \mathbb{M}^n$ - произвольная точка в $\mathbb{M}^n$. Выберем в окрестности точки x две системы координат $(x^1, ..., x^n)$ и $(x^{1'}, ..., x^{n'})$, т.е рассмотрим две карты $h : \mathbb{A} \to \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n(x^1, ..., x^n)$ и $k : \mathbb{B} \to \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n(x^{1'}, ..., x^{n'})$, $x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Тогда функции $x^{i'} = f^i(x^1, ..., x^n)$ и $x^j = g^j(x^{1'}, ..., x^{n'})$, $i, j = 1, 2, ..., n$, гладкие.

Определение 0.0.11 Говорят, что в точке x на многообразии $\mathbb{M}^n$ задан вектор, если в каждой карте (отвечающей данной гладкой структуре) задана последовательность n чисел $\xi^1, \xi^2, ..., \xi_n$ координаты вектора в данной карте), которые при переходе от одной карты к дугой преобразуются по закону $\xi^{i'} = \sum_{i=n}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i$.

Определение 0.0.12 Все векторы многообразия $\mathbb{M}^n$ в точке x образуют касательное *векторное* пространство, которое обозначаетя $\mathbb{L}_x M$

Теорема 0.0.3 Если дифференциальный оператор $\xi\varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ инвариантен относительно выбора карты, то его коэффициенты ξ^i образуют вектор.

Доказательство. Из равенства $\xi^{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ следует $\xi^{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi^{i'} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^i}$.

Отсюда $\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi^{i'}$, так как предыдущее равенство имеет место для любой функции φ.

Итак, векторы находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантынми дифференциальными операторами вида

$$\xi\varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

Подмногообразия.

Итак, многообразие $\mathbb{M}$ являтся формальным математическим объектом объединяющим в себе некоторое точечное множество множество $\mathbb{M}$, и класс систем координат.

Деформационное отображение.

Параметрические поверхности.

Определение 0.0.13 Непрерывной параметрической поверхностью размерности k в n-мерном евклидовом пространсте $\mathbb{R}^n$, $n \geq k$, называется произвольное непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^n$ из некоторой ообласти $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^k$ в $\mathbb{R}^n$.

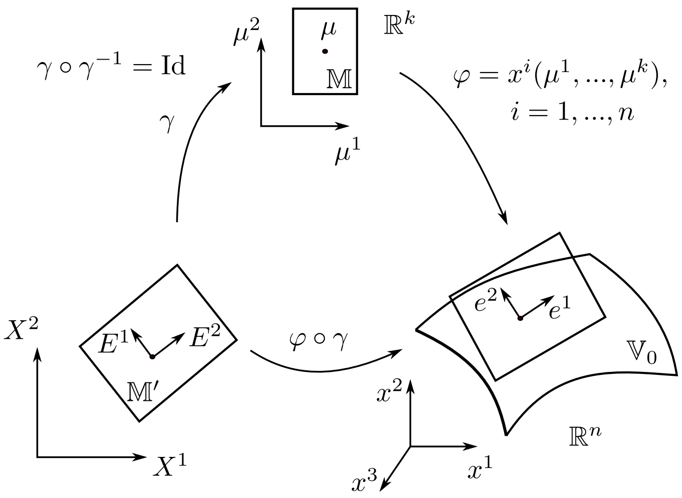

Рис. 3: Задание параметрической поверхности с заменой параметризации. $\omega_{12} = \mathrm{const}$.

Как упоминалось, часто возможно и удообно рассмотреть плоское недеформировнное тело. Т.е Ω_0, откtырое подмножество $R^m, 1 < m < 3$. Тем не менее бывает полезно определить изогнутуе недеформированную конфигурацию, и с этой целью теория формулируется соответственно.

Каждое такое φ задается набором из n кординатных функций $x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$, где ξ^i - стандартные евклидовы координтаы в $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{M}$, а $x^1, ..., x^n$ - стандартные евклидовы координаты в $\mathbb{R}^n$. При этом непрерывность φ равносильна непрерывности всех функций $x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$. Координаты ξ^i называются *параметрами* для φ или *координатами* на φ

Определение 0.0.14 Непрерывная параметрическая поверхность $\varphi\mathbb{M}$ называется гладкой, если все задающие ее координатные функции $x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$ - гладкие. В этом случае определены векторы $\varphi_{\xi^i} = (x^1_{\xi^i}, ..., x^n_{\xi^i})$, называемые *базисными касательными векторами для φ в точке* $\varphi(\xi^1, ..., \xi^k)$. Здесь через $x^j_{\xi^i}$, мы обозначим частную производную функции x^j по параметру ξ^i.

Изломы таких поверхностей могут возникать лишь в тех точках в которых базисные векторы линейно зависимы.

Определение 0.0.15 Поверхность называется регулярной, если ее базисные касательные векторы всюду линейно независимы. Это равносильно тому, что матрица якоби (x^i_ξ) имеет во всех точках максимальный ранг, равный, очевидно k

Определение 0.0.16 Замена параметризации.
Пусть $\varphi : \mathbb{M} \to \mathbb{R}^n$ - непрерывная параметрическая поверхность. Рассмотрим призвольный гомеоморфизм $\gamma : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$. Каждое такое отображение порождает новую непрерывную параметрическую поверхность $\gamma \circ \varphi : \mathbb{M}' \to \mathbb{R}^n$ и называется заменой параметризации для φ. Отметим, что φ и $\varphi \circ \gamma$ совпадают как подмножества пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. имеют совпадающие образы. Кроме того, если γ - замена параметризации, то γ^{-1} также является заменой параметризации. Если замены параметризации γ и γ^{-1} гладкие то их дифференциалы всюду невырождены и параметрическая поверхность сохраняет свойство быть непрерывной гладкой или регулярной.

Определение 0.0.17 Переход от параметрической поверхносити φ к параметрической поверхности $\varphi \circ \gamma$, где γ - замена параметризации, называют заменой координат на поверхности φ.

Определение 0.0.18 Поверхностью в прпостранстве $\mathbb{R}^n$ называется семейство всех параметрических поверхностей, каждая пара которых отличается на замену параметризации.

Пусть $\{x^i\}$ - стандартные координаты в $\mathbb{R}^n$, $i = 1, .., n$. Рассмотрим множество точек удовлетворяющих неявному уравнению

$$F(x^1, ..., x^i) = 0. \tag{9}$$

Тогда при условии, что частная производная $F_{x^i} \neq 0$ его можно разрешить относительно x^i в виде

$$x^i = f(x^1, .., x^{n-1}) \tag{10}$$

Что дает нам явное представление о поведении поверхности.

Тогда отображение $\varphi : \bar{M} \to \mathbb{R}^n$, определенное так:

$$\varphi : (\xi^1, ..., \xi^{n-1}) \to (\xi^1, ..., x^{n-1}, f(\xi^1, ..., \xi^{n-1})) \tag{11}$$

задает регулярную поверхность, так как веторы

$$\varphi_{\xi^1} = (1, 0, ..., 0, f_{\xi^1}), ..., \varphi_{\xi^{n-1}} = (0, ..., 0, 1, f^{\xi^{n-1}}) \tag{12}$$

- линейно независимы в каждой точке области $\bar{M}$. Говорят, что поверхнось φ задана графиком функции f.

ТЕОРЕМА 0.0.4 Три способа задания регулярной гиперповерхности, т.е в виде параметрической поверхности, в виде графика гладкой функции с помощью параметризованной кривой и с помощью неявной функции с отличным от нуля дифференциалом локально эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая поверхность в окрестности неособой точки может быть параметризована в виде графика некоторой гладкой функции. Такая параметризация, очивидно, взаимно-однозначна.

Следствие. В некоторой окрестности каждой точки параметризирующее отображение регулярной поверхности взаимно-однозначно.

Определение 0.0.19 Регулярная поверхность φ : $\bar{M} \to \mathbb{R}^n$ называется *вложенной*, если φ гомеоморфизм.

В силу следствия, в достаточно малой окрестности каждой точки $P \in \bar{M}$, т.е. локально, каждая регулярная поверхность является вложенной.

Вложенность поверхности позволяет отождедествить поверхность с ее образом. В частности это позволяет отождествить координаты стандартные координаты в $\bar{M} \subset \mathbb{R}^k$ с координатами на вложенной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$

Кривые и координатные линии на на регулярной поверхности.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ - регулярная поверхность. Говорят, что кривая φ : $[a, b] \to \mathbb{R}^n$ лежит на M, если образ отображения φ прнадлежит M.

Если $(\xi^1, ..., \xi^k)$ - координаты в области $\bar{M}$, то для того чтобы задать кривую на поверхности достаточно задать набор функций $\xi^i(t)$, $i = 1, ..., k$, которые называются координатными функциями кривой. Эти координатные функции определяют соответствующее отображение $\varphi(\xi^1(t), ..., \xi^k(t))$ отрезка в $\mathbb{R}^n$ котороe в координатах $(x^1, ..., x^n$ выглядит так: $x^i(t) = x^i(\xi^1(t), ..., \xi^k(t))$, где $x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$ - координатные функции поверхности φ.

Определение 0.0.20 Кривая на поверхности M, вдоль которой меняется ровно одна координата ξ^i, а остальные постоянны называется *коориднатной линией.* Если $P \in M$ точка на поверхности с координатами $\xi_0^1, ..., \xi_0^k$ то i-ой координатной линией, проходящей через точку P, называется кривая, заданная так:

$$\xi^j(t) = \xi_0^j,\ j \neq i; \quad \xi^i(t) = t. \tag{13}$$

Пусть $x^i = x$ - коориднатные функци поверхности . Возьмем произвольную кривую на поверхности, проходящую через точку , и пусть - координатные функции этой кривой, а . Тогда -я координата соответствующего касательного вектора имеет вид:

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^{k} \left.\frac{\partial x^i}{\partial \xi^j}\right|_P \left.\frac{d\xi^j}{dt}\right|_{t=t_0} \tag{14}$$

Таким образом, касательный вектор к кривой φ - произвольный элемент касательного простарнства $L_P M$ - это линейная комбинация следующего вида:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \xi^1} \end{pmatrix} \frac{d\xi^1}{dt} + \cdots + \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \xi^k} \end{pmatrix} \frac{d\xi^n}{dt} \tag{15}$$

Где вектор-столбцы $\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}, ..., \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\right)^T$, $i = 1, ..., k$ не зависят от выбора кривой φ и однозначно определяются координатными функциями $x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$ поверхности M и точки P.

С другой стороны, в силу произвольности гладкой кривой φ, числа $\left.\frac{d\xi^i}{dt}\right|_{t=t_0}$ - произвольны. Поэтому касательное пространство $L_P M$ - это линейное пространство, натянутое на векторы $\partial_{\xi^i}, ..., \partial_{\xi^k}$, где через ∂_{ξ^i}, обозначен ветор столбец $\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}, ..., \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\right)^T$

Матрица составленная из векторов столбцов ∂_{ξ^i}, - это в точности матрица Якоби отображения $x^i = x^i(\xi^1, ..., \xi^k)$, задающего поверхность. Ранг этой матрицы, в силу регулярности поверхности M, равен k, поэтоу векторы $\partial_{\xi^1}, ..., \partial_{\xi^k}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $L_P M$. Этот базис называется каноническим базисом в точке P.

Замечание. Определение вектора непротиворечиво.

Действительно, пусть есть другая система координат $\hat{x}^i$, в этих координатах $\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^j}\eta^j$, тогда

$$\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^i} v^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial \xi^i}\eta = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^i}\eta = \hat{v}^i \tag{16}$$

Отсюда

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^i}\hat{v}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^i}\eta^i \tag{17}$$

Первая фундаментальная фомра на поверхности.

Пусть ς и ζ - касательные векторы к поверхности M в точке P. Пусть $(\eta^1, ..., \eta^k)$- координаты на поверхности M, а $\xi = (\xi^1, ..., \xi^k)$ и $\zeta = (\zeta^1, ..., \zeta^k)$ - компоненты касательных векторов ξ и ζ отнсительно этих координат. Тогда $\xi = \sum_i \xi^i \partial_{u^i}$ и $\zeta = \sum_j \zeta^j \partial_{u^j}$, где $\{\partial_{u^i}\}$- канонический базис в точке P. Поэтому скалярное произведение векторов ξ и ζ (как векторов в $\mathbb{R}^n$) может быть вычислено так:

$$(\xi, \zeta) = \left(\sum_{i=1}^{k} \xi^i \partial_{u^i},\ \sum_{j=1}^{k} \zeta^j \partial_{u^j}\right) = \sum_{i,j=1}^{k} (\partial_{u^i}, \partial_{u^j})\xi^i \zeta^j. \tag{18}$$

Числа $(\partial_{u^i}, \partial_{u^j})$, образущие матрицу Грамма канонического базиса $\{\partial_{u^i}\}$, обозначаются через $\mathrm{g}_{ij}(P)$ и называются *компонентами индуцированной метрики*, или *компонентами* первой фундаментальной (квадратичной) формы поверхности M в координатах $\{\eta^i\}$. Если поверхность задана отображением φ с координатнымм функцияи $x^i(\eta^1, ..., \eta^k)$, то

$$\mathrm{g}^{ij}(\eta^1, ..., \eta^k) = (\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \sum \frac{\partial x^p}{\partial \eta^i} \frac{\partial x^p}{\partial \eta^j} \quad (19)$$

Марица $G(\eta) = (\mathrm{g}_{ij}(\eta))$ - матрица индуцированной метрики по определению симметрична, невырожденна и положительно определена.

Базис очевидно меняется от точки к точке, поэтоу говорят что на M возникает *поле* квадратичных форм $x(\mu) \to G(\mu)$. Это поле квадратичных форм называется *первой квадратичной формой* поверхности M и обозначается $\mathrm{g}_{ij}v^i v^j$. Точнее, приведенное выражение является записью первой квадратичной формы в криволинейных координатах $\{\mu^i\}$.

Если задана замена параметризации $\mu^i = \mu^i(\eta^1, ..., \eta^k)$ поверхности M, то в каждой точке определено две матрицы:

$$G(\eta) = (\mathrm{g}_{ij}(\eta))) = (\partial_{u^i}, \partial_{u^j})$$

и

$$G(\mu) = (\mathrm{g}_{pq}(\mu))) = (\partial_{\mu^p}, \partial_{\mu^q})$$

.

В соответствии с законом преобразования векторов они свзаны так:

$$\mathrm{g}_{ij}(\eta^1, ..., \eta^k) = \sum_{pq} \mathrm{g}_{pq}(\mu^1(\eta^1, ..., \eta^k), ..., \mu^k(\eta^1, ..., \eta^k)) \frac{\partial \mu^p}{\partial \eta^i} \frac{\partial \mu^q}{\partial \eta^j}, \quad (20)$$

где частные производные вычисляются в точке $(\eta^1, ..., \eta^k)$.

Рассмотрим элемент ds длинны дуги кривой φ на поверхности M, $k = 2$.

Пусть кривая задана параметрически так:

$$\varphi(t) = x^i(\mu^1(t), \mu^2(t))$$

Касательный вектор к ней

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} \frac{d\mu^1}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} \frac{d\mu^2}{dt}$$

Полный дифференциал отображения φ:

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} d\mu^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} d\mu^2$$

$$\left(dx^i\right)^2 = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^1}\right)^2 d\mu_1 + 2\left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^1}\frac{\partial x^i}{\partial \mu^2}\right) d\mu^1 d\mu^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^2}\right)^2 d\mu^2 \quad (21)$$

Тогда

$$ds = |d\varphi| = \sqrt{d\left(x^i\right)^2} = \sqrt{E\left(d\mu^1\right)^2 + 2F d\mu^1 d\mu^2 + G\left(d\mu^2\right)^2} dt \quad (22)$$

откуда

$$s(t) = \int_{t_1}^{t^2} \sqrt{E\left(d\mu^1\right)^2 + 2F d\mu^1 d\mu^2 + G\left(d\mu^2\right)^2} dt$$

Где введены сокращающие обозначения.

Итак, матрица первой квадратичной формы при замене координат меняется так, как меняется матрица билинейной (квадратичной формы на линейном простарнстве при замене базиса.

Аналогично со случаем $\mathbb{R}^n$ с помощью этой формы (индуцированной метрики) на поверхности вычисляются длинны и углы.

Заметим, что если на поверхности задана эта форма то для вычисления длин векторов и углов между ними достаточно знать их компоненты относительно системы коориднат на поверхности, и не важен конкретный вид отображения φ, задающего поверхность. Поэтому говорят, что *скалярное произведение вычисляется во внутренних терминах*, а индеущированную метрику называют *внутренней* метрикой. Здесь слово "внутренни"подчеркивает независимость вычислений скалярных произведений от объемлющего пространтсва.

Деформационное отображение.

Рассмотрим локальные координаты μ^i, $(i = 1, ...k)$. Пусть $\mathbb{M}^k$ многообразие.

Определение 0.0.21 Преобразование $f \,:\, ^k \to {}^k :$ $\mu = \mu^1, ..., \mu^k \equiv (\mu^i) \to \bar{\mu} = (\bar{\mu}^1, ..., \bar{\mu}^k) \equiv (\bar{\mu}^i)$, где

$$\bar{\mu} = f(\mu) = \mu + u(\mu)\epsilon, \quad (23)$$

или в компонентной записи

$$\bar{\mu}^i = \mu^i + u^i(\mu^j)\epsilon, \;\; i, j = 1, ..., k. \quad (24)$$

где ϵ бесконечно малая величина, называется инфинитиземальной деформацией пространства $\mathbb{V}^k$, определяемой векторным полем $u = (u^i)$, которое называется инфинитиземальным деформационным полем.

Индексы (i) указывают на локальную координатную систему в которой точка μ имеет координаты μ^i, а точка $\bar{\mu}$ координаты $\bar{\mu}^i$.

Определим новую координатную систему на которую указывают индексы (i'), сопоставляющую точке $\mu = (\mu^i)$ новые координаты

$$\mu^{i'} = \bar{\mu}^i, \tag{25}$$

Т.е. в качестве новых координат $\mu^{i'}$ точки $\mu = (\mu^i)$ мы выбрали старые координаты (в системе координат (i)) точки $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^i)$. Именно, в системе (i'), $\mu = (\mu^{i'}) = (\bar{\mu}^i)$.

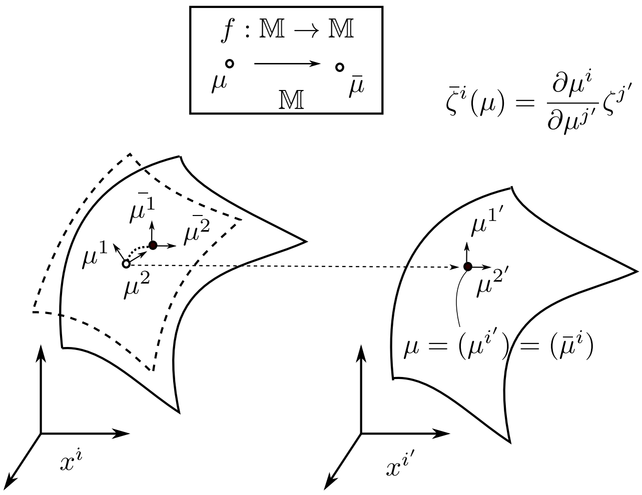

Рис. 4: Деформационное отображение в материальном описании. Следует различать точку пространства и точку "вмороженную"в тело. Одна и тоже "вмороженная"точка может занимать различные точки пространства, т.е. иметь различные координаты. Закрашенными точками обозанчаем "вмороженные"точки. Незакрашенными - "координаты".

Определение 0.0.22 Преобразование координат индуцированное точечным отображением $f : \mu \to \bar{\mu}$ приписывает новым координатам точки μ ее старые, преобразованные координаты $\bar{\mu}$, и называется *увлечением* точечным преобразованием. Новые координаты $\mu^{i'} = \bar{\mu}^i$ точки $\bar{\mu}$ называются увлеченными (индуцированными) координатами.

После деформации точка μ попадает, вообще говоря в другоую сиситему координат. Чтобы иметь возможность сравнивать объекты до, и после деформации, нужно эти точки совместить, математически такое совмещение выполяется выбором соответствующей системы кооридинат (карты) так, что в этой карте $\mu = (\mu^{i'}) = (\bar{\mu}^i)$.

В случае инфинитиземальных деформаций (24) преобразование координат

$$\mu^{i'} = \bar{\mu^i} = \mu^i + u^i(\mu^1, ..., \mu^k)\epsilon \tag{26}$$

называется увлечением преобразованием $u^i\epsilon$.

Рассмотрим призвольный геометрический объект A заданный в системе координат (i) в точке $\mu = (\mu^i) \in \mathbb{V}^k$, обозначим его $A(i, x)$.

Определение 0.0.23 Точка $\bar{\mu}$ является деформацией точки μ, если $\bar{\mu} = \mu + u(\mu)\varepsilon$. Геометрический объект $\bar{A}(i, \mu)$ является деформацией объекта $A(i, \mu)$ по отношению к преобрзованию $\bar{\mu} = \mu + u(\mu)\varepsilon$, если его значение в системе координат (i'), в точке x равно значению объекта A в системе кооринат i в точке $\bar{\mu}$, т.е.

$$\bar{A}(i', \mu) = A(i, \bar{\mu}). \tag{27}$$

Определение 0.0.24 Величина

$$\mathcal{D}A = \bar{A}(i, \mu) - A(i, \mu) \tag{28}$$

называется дефференциалом Ли, а величина

$$\mathcal{L}_z A = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathcal{D}A}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\bar{A}(i, \mu) - A(i, \mu)}{\varepsilon} \tag{29}$$

Называется производной Ли геометрического объекта $A(i, x)$ по отношению к векторному полю $z = (u^i(\mu^j))$.

В соответствии с (28) для деформированного объекта $\bar{A}(i, \mu)$ имеем

$$\bar{A}(i, \mu) = A(i, \mu) + \mathcal{D}A, \tag{30}$$

и таким образом можем выразить $\bar{A}$

Таким образом мы можем найти $\bar{A}$ найдя прежде $\mathcal{D}A$.

В соответствии с (28) имеем

$$\mathcal{D}\mu^i = \bar{\mu}^i - \mu^i \tag{31}$$

т.е. для координат мы имеем

$$\mathcal{D}\mu^i = u^i(\mu^j)\epsilon, \tag{32}$$

откуда

$$\mathcal{L}_u \mu^i = u^i(\mu^j). \tag{33}$$

и хотя μ^i не вектор, мы видим что $\mathcal{L}_u \mu^i$ является вектором.

Рассмотрим некоторые частные случаи *1. Для скалярной функции* $\varphi(\mu) \equiv \varphi(\mu^1, ..., \mu^k)$ мы имеем

$$\mathcal{D}\varphi(\mu) = \varphi_{,p} u^p(\mu)\epsilon = \mathcal{L}_u \varphi(\mu)\epsilon, \ \ (\varphi_{,p} = \partial\varphi/\partial\mu^p), \tag{34}$$

т.е. Производная Ли скалярной функции это производная этой функции в направлении векторного поля u.

2. Для ковариантного вектора $\eta_i(\mu)$ мы имеем

$$\mathcal{D}\eta_i = (\eta_{i,p} u^p + u^p_{,i} \eta_p)\epsilon = \mathcal{L}_u \eta_i \epsilon \ \ (\eta_{i,p} = \partial\eta_i/\partial\mu^p), \tag{35}$$

3. Для контравариантного вектора $\zeta^i(\mu)$, в соответствии с (28) мы имеем

$$\mathcal{D}\zeta^i = \bar{\zeta}^i(\mu) - \zeta^i(\mu), \tag{36}$$

и мы можем найти $\bar{\zeta}^i(\mu)$. В соответствии с законом преобразования векторов

$$\bar{\zeta}^i(\mu) = \frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}}\zeta^{j'}(\mu), \tag{37}$$

где с правая часть подлежит определению. Основываясь на (24) получим

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \frac{\partial \mu^{i'}}{\partial \mu^{j'}} - \frac{\partial u^i(\mu)}{\partial \mu^{j'}}\epsilon = \delta^i_j - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^{j'}}\epsilon. \tag{38}$$

Принимая во внимание, что $u^i(\mu) = u^i(\mu^1, ..., \mu^k$, запишем

$$\frac{\partial u^i}{\partial \mu^{j'}} = \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k}\frac{\partial \mu^k}{\partial \mu_{j'}} = \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k}(\delta^k_j - \frac{\partial u^k}{\partial \mu^{j'}}\epsilon). \tag{39}$$

Подставляя в (38) получим

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \delta^i_j - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k}\epsilon(\delta^k_j - \frac{\partial u^k}{\mu^{j'}}\epsilon), \tag{40}$$

и пренебрегая членами с $(\epsilon)^2$:

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \delta^i_j - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^j}\epsilon. \tag{41}$$

Для второго члена с правой части (37), используя разложение Тейлора, запишем

$$\bar{\zeta}^{j'}(\mu) = \zeta^j(\bar{\mu}) = \zeta^j(\mu^i + u^i\epsilon) = \zeta^i(\mu) + \frac{\partial \zeta^j}{\partial \mu^k}u^k\epsilon + ... \tag{42}$$

Подставляя (41, 42) в (37) запишем:

$$\bar{\zeta}^i(\mu) = \bar{\zeta}^i(\mu) + \frac{\partial \zeta^i}{\partial \mu^k}u^k\epsilon - \frac{\partial u^i}{\mu^j}\zeta^j\epsilon, \tag{43}$$

и подставляя это в (36) запишем:

$$\mathcal{D}\zeta^i = (\zeta^i_{,p}u^p - u^i_{,p}\zeta^p)\epsilon = \mathcal{L}_u\zeta^i\epsilon. \tag{44}$$

Рассморим обратимую деформацию упругой пластинки.

Для описания кинематики обратимой дефомрации среды целесообразно выделить два состояния, не деформированное и деформированное.

Пусть недеформированное состояние описывается дифференцируемым многообразием $\mathbb{M}^n$, $n = 2$ в $\mathbb{R}^3$. В отсутсвтие дефектов (дислокаций, дисклинаций) $\mathbb{M}$ покрывается единой картой; существует *гладкая непрерывная параметрическая поверхность* $\mathbb{V}_0$.

$M' = u(M)$

v

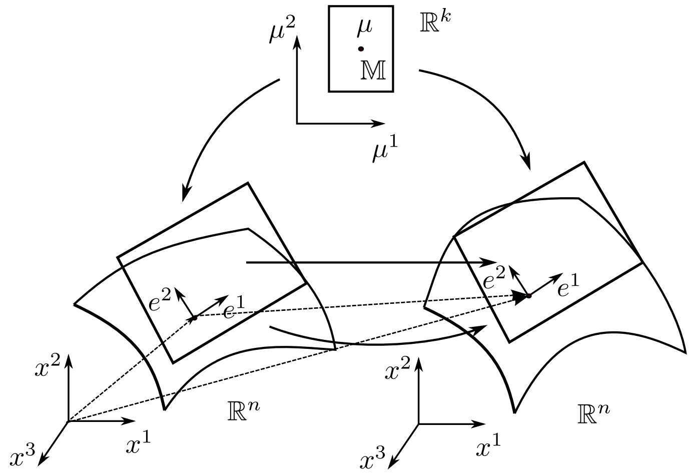

Рис. 5: Деформационное отображение.

v'

M

Зададим теперь отображение $u = \hat{x}(x_1, ..., x_n)$ переводящее тело в деформированное состояние. Отображение u является заменой координат на поверхности, или что тоже, сменой параметризации поверхности. При этом координатные линии "изогнутся и как следствие базисные векторы изменятся. Производная этого отображения переводит векторы из L_x в L'_x по формуле

$$\hat{v}^j = \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i}v^i = \bar{e}^0_i v^i \tag{45}$$

Обратное к u отображение преводит векторы из L'_x в L_x по формуле

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j}\hat{v}^j = \bar{e}_j\hat{v}^j \tag{46}$$

Определение 0.0.25 Базисы $\bar{e}_j$ и $\bar{e}^{(0)}_i$ образуют базисы в касательных пространствах к N и M соответственно в точках $u(x)$ и x и называются *индуцированными* базисами.

Рассмотрим элемент длинны в деформированной системе коориднат. Для этого к компонентам v_i в недеформированной системе координат прибавим производную отображения u по направлению этих компонент.

$$\hat{v}^j = \bar{e}^0_i v^i + L_{v^i}u = \bar{e}^0_i v^i + \frac{\partial u}{\partial x_i}v_i$$

$$\bar{e}_i v^i = (\bar{e}^0_i + \frac{\partial u}{\partial x_i})v^i$$

Отсюда

$$\bar{e}_i = \bar{e}_i^0 + \frac{\partial u}{\partial x_i} \tag{47}$$

Возводя в квадрат

$$\begin{aligned} \mathsf{g}_{ik} = \left(\bar{e}_i^0 + \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\left(\bar{e}_k^0 + \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = \\ = \mathsf{g}_{ik}^0 + \bar{e}_i^0\frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k^0\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{48}$$

Или

$$\begin{aligned} \mathsf{g}_{ik} - \mathsf{g}_{ik}^0 = 2r_{ik}^0 = \\ \bar{e}_i^0\frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k^0\frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{49}$$

Тензор r выраженный в начальной системе координат называется тензором Коши-Грина.

Рассмотрим теперь элемент длинны в деформированной системе кооридинат. Для этого от компонент $\hat{v}_i$ в недеформированной системе координат отнимем производную отображения u по направлению этих компонент.

$$v^i = \bar{e}_j\hat{v}^i - L_{\hat{v}^j}u = \bar{e}_j\hat{v}^j - \frac{\partial u}{\partial x_i}\hat{v}_i$$

$$\bar{e}_j^0\hat{v}^j = (\bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j})\hat{v}^j$$

Отсюда

$$\bar{e}_j^0 = \bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} \tag{50}$$

Возводя в квадрат

$$\begin{aligned} \mathsf{g}_{jk}^0 = \left(\bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right)\left(\bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = \\ = \mathsf{g}_{jk} - \bar{e}_j\frac{\partial u}{\partial x_k} - \bar{e}_k\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{51}$$

Или

$$\begin{aligned} \mathsf{g}_{jk} - \mathsf{g}_{jk}^0 = 2r_{jk} = \\ \bar{e}_j\frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \tag{52}$$

Тензор r выраженный в текущей (деформированной) системе координат называется тензором Альманси.

Чтобы деформация была обратимой необходимо и достаточно чтобы отображение u являлось *дифеоморфизмом*.

Определение 0.0.26 Если A - карта многообразия M, содержащая точку x_0, и $x^1, ..., x^n$ - координаты в карте A, а B - карта многообразия содержащая точку N^l, содржащую точку $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in M$, и $y^1, ..., y^l$ координаты в карте B то отображение в координатах запишется в виде системы функций $y^j = f^j(x^1, ..., x^n)$, которые называются *локальным представлением отображения* f в данных координатах. В гладком многообразии имеет смысл требование гладкости этих функций.

Определение 0.0.27 Отображение f называется *гладким*, если оно непрерывно и все представляющие его функции $f^j(x^1, ..., x^n)$ являются гладкими, т.е. класса C^∞.

Определение 0.0.28 Диффеоморфизмом многообразия M^n на многообразие N^l называется такой гомеоморфизм $f: M^n \to N^l$ что f и f^{-1} - гладкие отображения.

Очевидно, отоношние диффеоморфности есть, отношение эквивалентности на множестве гладких многообразий. В дифференциальной топологии диффеоморфные многообразия считаются различными экземплярами одного и того же многообразия.

Определение 0.0.29 Пусть есть C^∞-многообразие. Многообразие N называется *подмногообразием* в M, если существует взаимно однозначное C^∞-отображение $i: N \to M$, такое, что di взаимно однозначно в каждой точке. Тогда i называется *вложением*, и говорится что N *вложено* в M посредством i.

Изометрии. Изгибания.

Изгибание, это частный случай непрерывной деформации, тоесть непрерывное преобразования тела без растяжений. При изгибании поверхности длины кривых не изменяются и, следовательно, поверхность в любой момент изгибания изометрична исходной поверхности. Таки образом *при соответствующей параметризации* первая квадратичная форма при изгибании поверхнсти не изменится.

Пусть $p \in \mathbb{M}$ точка на гладком многообразии $\mathbb{M}$. Пусть $C_p^\infty(\mathbb{M}$ гладкая функция на на $\mathbb{M}$ в окрестности содержащей тчоку p, и $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$ небор гладких функций на $\mathbb{M}$.

Касательной вектор ξ к $\mathbb{M}$ в p это отобржение

$$\begin{aligned} \xi : \mathcal{C}_p^\infty \to \mathbb{R} \\ f \to \xi[f](p) \end{aligned} \tag{53}$$

такое, что для всех $f_1, f_2 \in \mathcal{C}_p^\infty(\mathbb{M})$ и $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\xi[af_1 + bf_2] = a\xi[f_1] + b\xi[f_2]$ (линейность)
2. $\xi[f_1, f_2] = \xi[f_1]f_2(p) + f_1(p)\xi[f_2]$ (правило Лейбница.)

Пусть на гладком многообразии $\mathbb{M}$ задано поле метрического тензора

$$\begin{aligned} \mathsf{g} : \mathbb{LM} \times \mathbb{LM} \to \mathbb{R} \\ (\xi, \zeta) \to \mathsf{g}(\xi, \zeta); \end{aligned} \tag{54}$$

Пусть $(\mathbb{A};\varphi), \varphi = (\mu^1, ..., \mu^n$ является координатной системой на многообразии $\mathbb{M}$ в p, и $(x^1, ..., x^n$ натуральная кооридинатная система в $\mathbb{R}^n$ (тождественное отображение $\mathbb{R}^n$); заметрим, что $x^i \circ \varphi = \mu^i$. Для любой функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$, мы определим:

$$\left.\frac{\partial}{\partial \mu^i}\right|_p f = \frac{\partial f}{\partial \mu^i}(p) = \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \tag{55}$$

$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial \mu^i}|_p : \mathcal{C}^\infty\mathbb{M} \to \mathcal{R}$ является касательным вектором к $\mathcal{M}$ в p.

g ассоциирует с каждой точкой $p \in \mathbb{M}$ скалярное произведение g_p в касательном пространстве $\mathbb{L}_p\mathbb{M}$ в точке p.

Гладкая кривая на многообразии $\mathbb{M}$ это отображение $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{M}$. В каждой точке $t \in \mathbb{R}$ мы можем рассмотреть касательный вектор к этой кривой, обозначаемый

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt}\gamma(t), \tag{56}$$

котоый действует на произвольную функцию $f \in \mathcal{C}^\infty_{\gamma(t)}(\mathbb{M})$ как:

$$\dot{\gamma}(t)[f] = \frac{d(f\circ\gamma)(t)}{dt} = \frac{d(\mu^i \circ \gamma)(t)}{dt}\partial_i|_{\gamma(t)} f. \tag{57}$$

Заметим, что $(\mu^1 \circ \gamma; , , , ; \mu^{n1} \circ \gamma)$ является координатным представлением кривой γ.

Гладкое многообразие $\mathbb{M}$ наделенное метрическим тензором называется *Римановым многообразием*, и обозначается $(\mathbb{M}, \mathsf{g})$.

Пусть $(\mathbb{A}, \varphi), \varphi = (\mu^1, ..., \mu^n)$ координатная система в точке $p \in \mathbb{M}$ и $\partial_1, ..., \partial_n$ (где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \mu^i}$ инуцированные базисные векторы. Функции g_{ij} определенные как

$$\mathsf{g}_{ij} = \mathsf{g}(\partial_i; \partial_j) \tag{58}$$

называются компонентами метрического тензора g на многообразии $\mathbb{M}$. Для любых векторных полей A, B таких, что $A = a^i\partial_i$ и $B = b^j\partial_j$ можем записать:

$$\mathsf{g}(A; B) = \mathsf{g}(a^i\partial_i; b^j\partial_j) = a^ib^j\mathsf{g}(\partial_i;\partial_j) = a^ib^j\mathsf{g}_{ij} \tag{59}$$

Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{M}'$ два многообразия размерностей m и n соответственно. Рассмотрим открытое подмножество $\mathbb{W} \subset \mathbb{M}$, и гладкое отообразение из $\mathbb{W}$ в $\mathbb{M}'$. Для любой точки $p \in \mathbb{W}$, отображение

$$du_p : \mathbb{L}_p\mathbb{M} \to \mathbb{L}_{u(p)}\mathbb{N} \tag{60}$$

заданное как

$$\begin{gathered} du_p(\xi)[f](u(p)) = \xi[f \circ u](p), \\ \forall \xi \in \mathbb{L}_p\mathbb{M}, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(u(\mathbb{W})), \end{gathered} \tag{61}$$

линейно и называется дифференциалом отображения u в точке p. Если $(\mathbb{A};\varphi), \varphi = (\mu^1, ..., \mu^n)$, является координатной системой на $\mathbb{M}$ в p и $(\mathbb{A}';\varphi'), \varphi' = (\mu^{1'}, ..., \mu^{n'})$ координатная система на $\mathbb{M}'$ в $u(p)$, тогда

$$du_p(\partial_i|_p) = \frac{\partial(\mu^{j'} \circ u)}{\partial \mu^i}(p)\partial_{j'}|_{u(p)}, \tag{62}$$

где $\partial_i|_p = \left.\frac{\partial}{\partial\mu^i}\right|_p$ и $\partial_{j'}|_{u(p)} = \left.\frac{\partial}{\partial\mu^{j'}}\right|_{u(p)}$ матрица $\left(\frac{\partial(x^{i'}\circ u)}{\partial x^j}\right)^n_{ij=1}$ называется матрицей Якоби замены координат.

Определение 0.0.30 Рассмотрим случай когда $\mathbb{M} = \mathbb{M}'$. Диффеоморфизм $u : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ называется *локальной изометрией* для любых $p \in \mathbb{M}$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{L}_p\mathbb{M}$ если :

$$\mathsf{g}(du_p(\xi); du_p(\zeta)) = \mathsf{g}(\xi, \zeta); \tag{63}$$

Множестов всех изометрий $\mathbb{M}$ имеет структуру группы и обозначается

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{M}) = \{u : \mathbb{M} \to \mathbb{M}\} \tag{64}$$

и называется группой изометрии $\mathbb{M}$.

Диффеоморфизм u является изометрией если, и только если отображение u "сохраняет риманову метрику".

Рассмотрим в точке p изометрию u и две кривые $(\mathbb{R}_1, \gamma_1)$ и $(\mathbb{R}_2, \gamma_2)$. По определению длинна кривой, длинна γ_1 (например):

$$l_{\gamma_1} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathsf{g}(\dot{\gamma}_1(t); \dot{\gamma}_1(t)))^{\frac{1}{2}} dt \tag{65}$$

Длинна образа кривой $u \circ \gamma_1$ при диффеоморфизме

$$l_{u(\gamma_1)} = \int_{t1}^{t2} (\mathsf{g}(du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)); du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t))))^{\frac{1}{2}} \tag{66}$$

Следовательно

$$\mathsf{g}(du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)); du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t))) = \mathsf{g}(\dot{\gamma}_1(t); \dot{\gamma}_1(t)) \tag{67}$$

Дифференциаль отображения в точке p который является изометрией действует на векторы $\partial_1|_p$ следующим образом:

$$du_p(\partial_i|_p) = \frac{\partial \mu^{j'}}{\partial \mu^i}(p)\partial_j|_{u(p)}, \tag{68}$$

где $\mu^{j'} = \mu^j \circ u$.

Следовательно

$$\begin{gathered} \mathsf{g}(du_p(\partial_i|_p); du_p(\partial_j|_p)) = \mathsf{g}(\partial_i|_p; \partial_j|_p) \Leftrightarrow \\ \mathsf{g}\left(\frac{\partial\mu^{k'}}{\partial\mu^i}(p)\partial_k|_{u(p)}; \frac{\partial\mu^{l'}}{\partial\mu^j}(p)\partial_l|_{u(p)}\right) = \mathsf{g}(\partial_i|_p; \partial_j|_p). \end{gathered} \tag{69}$$

Так как g биллинейная форма, то выражение выше можно переписать так:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{g}\left(\frac{\partial \mu^{k'}}{\partial \mu^{i}}(p)\partial_k|_{u(p)}; \frac{\partial \mu^{l'}}{\partial \mu^{j}}(p)\partial_l|_{u(p)}\right) \\
&= \frac{\partial \mu^{k'}}{\partial \mu^{i}}(p)\frac{\partial \mu^{l'}}{\partial \mu}\mathrm{g}(\partial_k|_{u(p)}; \partial_l|_{u(p)})
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Следовательно мы имеем

$$
\frac{\partial \mu^{k'}}{\partial \mu^{i}}(p)\frac{\partial \mu^{l'}}{\partial \mu^{j}}(p)\mathrm{g}_{kl}(u(p)) = \mathrm{g}_{ij}(p). \tag{71}
$$

Эта формула очень важна, так как она дает явное условия для изометрии.

Другими словами, отображение u ложно быть таким, чтобы его градиент u_{*p} удовлетворял следующему условию

$$
\mathrm{g}(u_{*p}\xi;\, u_{*p}\xi) = \mathrm{g}(\xi, \xi), \tag{72}
$$

Можно дать следующее определение:

Определение 0.0.31 Дифференцируемое отображение $u : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ называется *локальной изометрией*, если каждое касательное отображение $u_* : \mathbb{M}_p \to \mathbb{M}'_{u(p)}$ является линейной изометрией - *изоморфизмом векторных пространств, сохраняющим скалярное произведение*. В частности, локальная изометрия является дифференцируемым отоотображением максимального ранга многообразий одной и той же размерности. Локальная изометрия $u : \mathbb{M} \to \mathbb{M}'$ называется *изометрией*, если она является биекцией. В этом случае существует обратное отображение $u^{-1} : \mathbb{M}' \to \mathbb{M}$, являющееся изометрией.

Определение 0.0.32 Гладкое отображение $f : \mathbb{M}^n \to \mathbb{N}^l$ называется *погружением* (изгибанием), если отображение $f_* : \mathbb{L}_p\mathbb{M}^n \to \mathbb{L}_{(f(p))}\mathbb{N}^l$ для произволной точки $p \in \mathbb{M}^n$ индуцирует изоморфизм пространства $\mathbb{L}_p\mathbb{M}^n$ на подпространсто $f_*\mathbb{L}_p\mathbb{M}^n \subset \mathbb{L}_{f(p)}\mathbb{N}^l$

Определение 0.0.33 Вложение которое также и погружение является изомрфизмом.

Мы никак не можем изогнуть изначально плоский лист бумаги так чтобы гладко наложить его на сферу, что бы выполнить такое наложение лист нужно деформировать(растянуть) - имзенить его метрику. Другими словами нужно над листом нужно выполнить *не*изометричное преобразование, чтобы гладко покрыть им сферу или даже часть сферы. Однако плоским листом мы можем гладко накрыть полосу на цилиндре. Это говорит о том, что первой квадратчной формы не достаточно для того, чтобы описать расположение поверхности в $\mathbb{R}^n$.

Вторая квадратичная форма.

Рассмотрим поверхность $:\ \varphi(t) = \varphi(\mu^1(t), \mu_2(t))$ заданную в криволинейных коориднатах μ.

Восстановим в каждой точке единичный вектор нормали

$$
\mathbf{n} = \frac{\partial_{\mu^1} \times \partial_{\mu^2}}{|\partial_{\mu^1} \times \partial_{\mu^1}|} \tag{73}
$$

где как обычно $\partial_{\mu^j} = \frac{\partial x i^i}{\partial \mu^j}$ вектор столбец.

В каждой точке таже определен второй дифференциал отображения

$$
\begin{aligned}
d^2\varphi = (\partial_{\mu^1}, \partial_{\mu^1})\left(d\mu^1\right)^2 + 2(\partial_{\mu^1}, \partial_{\mu^2})d\mu^1 d\mu^2 + \\
+(\partial_{\mu^2}, \partial_{\mu^1})\left(d\mu^2\right)^2 + \partial_{\mu^1} d^2\mu^1 + \partial_{\mu^2} d^2\mu^2
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Определение 0.0.34 Второй квадратичной формой поверхности M называется скалярное произведение векторов $d^2\varphi$ и $\mathbf{n}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II} = (d^2\varphi, \mathbf{n}) = \left(\partial^2_{\mu^1},\, \mathbf{n}\right) d\left(\mu^1\right)^2 + \\
2\left(\partial^2_{\mu^1,\mu^2},\, \mathbf{n}\right) d\mu^1 d\mu^2 + \left(\partial^2_{\mu^2},\, \mathbf{n}\right) d\left(\mu^2\right)^2
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Приняты следующие обозначения

$$
L = (\partial^2_{\mu^1}, (n)),\ M = (\partial^2_{\mu^1,\mu^2}, (n)),\ L = (\partial^2_{\mu^2}, (n)),
$$

тогда

$$
\mathrm{II} = Ld\left(\mu^1\right)^2 + 2Md\mu^1 d\mu^2 + Nd\left(\mu^2\right)^2 \tag{76}
$$

Так как векторы $d\varphi = \partial_{\mu^1} d\mu^1 + \partial_{\mu^2} d\mu^2$ и $\mathbf{n}$ ортогональны (первый лежит в касательной плоскости, а второй - вектор нормали) - $(d\varphi,\, \mathbf{n}) = 0$, то

$$
d(d\varphi, \mathbf{n}) = 0 \tag{77}
$$

Очевидны также равенства

$$
(\partial_{\mu^1},\, \mathbf{b}) = 0,\ \ (\partial_{\mu^2},\, \mathbf{b}) = 0 \tag{78}
$$

Отклонение произвольной точки x поверхности M от плоскости L_x определяется формулой

$$
h = (\varpi(x) - \varphi(x_0), \ltimes_{\nvdash}) \tag{79}
$$

где $\mathbf{n_0}$ - единичный вектор нормали к поверхности в точке x_0. Это отклоненеие, вязтое по абсолютной величине, равно расстоянию от точки x до плоскости L_x. Отклонение положительно, если точка x и конец вектора $\mathbf{n}$ лежат по одну сторону от плоскости L_x и отрицательно, если эти точки лежат по разные стороны от плоскости L_x. (Рис)

Разность $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ в (79) допускает представление

$$\begin{gathered}\varphi(x) - \varphi(x_0) = \partial_{\mu^1}|_{x_0}(\mu^1 - \mu^1_0) + \partial_{\mu^2}|_{x_0}(\mu^2 - \mu^2_0) + \\ \frac{1}{2}\left\{\partial^2_{\mu_1}|_{x_0}(\mu^1 - \mu^1_0)^2\right\} + \\ \partial_{\mu^1,\mu^2}|_{x_0}(\mu^1 - \mu^1_0)(\mu^2 - \mu^2_0) + \\ \frac{1}{2}\left\{\partial^2_{\mu^2}|_{x_0}(\mu^2 - \mu^2_0)^2\right\} + \\ o(\rho^2)\end{gathered} \tag{80}$$

где

$$\frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \to 0 \tag{81}$$

при

$$\rho = \sqrt{(\mu^1 - \mu^1_0)^2 + (\mu^2 - \mu^2_0)^2} - \to 0. \tag{82}$$

Умножим обе части равенства (80) скалярно на $\mathbf{n_0}$, и обозначим

$$d\mu^1 = \mu^1 - \mu^1_0, \;\; d\mu^2 = \mu^2 - \mu^2_0 \tag{83}$$

тогда полуучим, что

$$h = \frac{1}{2}\left(L_0\left(d\mu^1\right)^2 + 2M_0 d\mu^1 d\mu^2 + N_0\left(d\mu^2\right)^2\right) + o(\rho^2) \tag{84}$$

Отметим, что коэффициенты $L_0 = L(x_0)$, $M_0 = M(x_0)$, $N_0 = N(x_0)$ в формуле (84) вычислены в точке x_0.

Сокращенно можем записать

$$h = \frac{1}{2}\mathrm{II}_0 + o(\rho^2), \tag{85}$$

где через II_0 обозначена вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке x_0 и $o(\rho^2)/\rho^2 \to 0$ при $\rho \to 0$.

По аналогии с первой квадратичной формой выражение для II_0 можно обозанчить и так

$$L_0\left(d\mu^1\right)^2 + 2M_0 d\mu^1 d\mu^2 + N_0\left(d\mu^2\right)^2 = \mathtt{f}_{ij} d\mu^i d\mu^j \tag{86}$$

Таким образом, дифференциальная квадратичная форма $\mathtt{f}_{ij} d\mu^i d\mu^j$, будучи ограничена на кривую $\varphi(t)$, выражает главную часть отклонения этой кривой от касательной плоскости.

Разделяя обе частри равенсва (**??**) на dt^2 приходим к равенству:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \mathtt{f}_{ij} v^i v^j \tag{87}$$

Рассмотрим на поерхности $\mathbb{V}$ произвольную регулярную кривую φ, проходящую через точку s в направлении . Пусть

$$\varphi = \varphi(s) = \varphi(\mu^1(s),\, \mu^2(s)), \tag{88}$$

- параметризация кривой φ, где в качестве параметра выбрана длина дуги кривой.

Будем рассматирвать вектор

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \varphi'' \tag{89}$$

Вычислим в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ три вектора:
единичный вектор касательный к кривой - $\tau = \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$,
единичный вектор нормали к поверхности - $\mathbf{n}$,
и $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{\tau}$.

Тройка векторов $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ линейно независима. Это позволяет представить вектор (89) в виде их линейной комбирации

$$\varphi'' = \alpha\vec{\tau} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}. \tag{90}$$

Так как $(\varphi', \varphi') = 1$ то

$$\alpha(\varphi'', \vec{\tau}) = (\varphi'', \varphi') = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\varphi', \varphi') = 0.$$

Коэффициенты $\beta = (\varphi'', \vec{n})$ и $\gamma = (\varphi'', \vec{b})$ имеют специальные названия:

$$k_n = (\varphi'', \vec{n}) - \text{ нормальная кривизна } \varphi.$$

$$k_g = (\varphi'', \vec{b}) - \text{ геодезическая кривизна } \varphi$$

Если кривизна $k_1 = |\varphi''|$ кривой φ отлична от нуля, то для этой кривой определен единичный вектор главной нормали $\vec{v}$. При этом $\varphi'' = k_1\vec{v}$.
Рис.

Отсюда вытекает, что

$$k_n = k_1(\vec{v}, \vec{n}), \;\; k_g = k_1(\vec{v}, \vec{n}, \vec{\tau}) \tag{91}$$

Обозначим чеез θ угол между вектором главной нормали $\vec{\nu}$ кривой φ и единечным вектором нормали $\vec{n}$ к поверхности M. Тогда спреведливо равенство

$$k_n = (\varphi'', \vec{n}) = k_1 \cos\theta \tag{92}$$

Покажем, что для всех кривых, проходящих по поверхности M через точку $x(\mu^1, \mu^2)$ в заданном направлении (т.е. имеющих одну и туже касательную), произведение $k_1 \cos\theta$ принимает одно и тоже значение.
Рис.

Про привилу дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{gathered}\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \partial^2_{\mu^1}\left(\frac{d\mu^1}{ds}\right)^2 + 2\partial^2_{\mu^1,\mu^2}\frac{d\mu^1}{ds}\frac{d\mu^2}{ds} + \\ \partial^2_{\mu^2}\left(\frac{d\mu^2}{ds}\right)^2 + \partial_{\mu^1}\frac{d^2\mu^1}{ds^2} + \partial_{\mu^2}\frac{d^2\mu^2}{ds^2}\end{gathered} \tag{93}$$

Умножая обе части этой формулы на единичный вектор нормали $\vec{n}$ скалярно, с учетом равенства (92) получим, что

$$k_n = k_1 \cos\theta = L\left(\frac{d=\mu^1}{ds}\right)^2 + 2M\frac{d\mu^1}{ds}\frac{d\mu^2}{ds} + N\left(\frac{d\mu^2}{s}\right)^2 \quad (94)$$

Так как в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ кривой φ

$$ds^2 = Ed(^1)^2 + 2Fd\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2 \quad (95)$$

то из предидущего равенства вытекает формула

$$k_n = k_1 \cos\theta = \frac{Ld(\mu^1)^2 + 2Md\mu^1 d\mu^2 + N(d\mu^2)^2}{\mu} \times \times Ed(\mu^1)^2 + 2Fd\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2 \quad (96)$$

Подчеркнем, что все функции E, F, G, L, M, N вычислены в токче $x(\mu^1, \mu^2)$.

Выражение в правой части последней формулы зависит только отношения $d\mu^1$ к $d\mu^2$, т.е от *направления кривой* φ в точке $x(\mu^1, \mu^2)$.

Проведем через точку $x(\mu^1, \mu^2)$ плоскость π параллельно вектору нормали $\vec{n}(\mu^1, \mu^2)$ к поверхноси и данному направлению v. Кривая φ_n которая получается при пересечении поверхности M с плоскостью π, называется *нормальным сечением* поверхности M в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ в заданном направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$.
Рис.

Для нормального сечения угол $\theta = 0$ и формула (92) принимает следующий вид:

$$k_1 = k_n. \quad (97)$$

Полученное равенство означает, что величина k_n равна кривизне нормального сечения поверхности M в направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$.

Проведенные рассуждения дают основание назвать величину k^n нормальной кривизной поверхности M в данной точке $x = (d^\mu 1, d\mu^2)$ и в данном направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$:

$$k_n = k_n(x, v) \quad (98)$$

Если направление в точке поверхности задано, то нормальная кривизна k_n в этом направлении $(d\mu^1, d\mu^2)$ может быть вычислена по формуле

$$k^n = \frac{\mathrm{II}}{\mathrm{I}} \quad (99)$$

Как видно из этой формулы, нормальная кривизна поверхности в данной точке зависит от выбора направления на поверхности.

Направление на поверхности называется главным, если нормальная кривизна в этом направлении достигает экстремального значения. *Замечание.* В каждой точке C^2-регулярной поверхности найдется не мении двух различный главных направлений.

Определение 0.0.35 Экстремальные значения нормальных кривизн в главных направлениях называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке.

Вычисление главных направлений и главных кривизн. Из формулы (99) для главного направления $(d\mu^1 : d\mu^2)$ вытекает тождество:

$$(L - kE)(d\mu^2)^2 + +2(M - kF)kd\mu^1 d\mu^2 + (N - kG)(d\mu^2)^2 = 0. \quad (100)$$

Продифференцирруем это тожедество по μ^1. Учитывая, что производная нормальной кривизны в главном направлении обращается в нуль, получим для главного направления $(d\mu^1 : d\mu^2)$

$$(L - kE)d\mu^1 + (M - kF)d\mu^2 = 0. \quad (101)$$

Дифференцируя тождество (100) по μ^2 и рассуждая аналогично, полчуаем

$$(M - kF)d\mu^1 + (N - kG)d\mu^2 = 0. \quad (102)$$

Здесь k - главная кривизна в направлении $(d\mu^1 : d\mu^2)$.

Будем рассматривать полученные соотношеня (101, 102) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $d\mu^1$ и $d\mu^2$. Эта система имеет ненулевые решения, так как в данной точке регулярной поверхности всегда есть главные направленяи.

Из этого вытекает следующая задача на собственные значения k:

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kf \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0 \quad (103)$$

Вычисляя определитель, получим квадратное уравнение для искомой функции k:

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0/ \quad (104)$$

Приведенные выше рассуждения позволяют утветждать, что уравнение (104) имеет вещественные корни k_1 и k_2, которые и являются главными кривизнами.

Этим корням на поверхности отвечают два различных гравных направления $\mu_1^1 : \mu_1^2$ и $\mu_2^1 : \mu_1^2$, определяемых из систем

$$(L - k_l E)d\mu_l^1 + (M - k_l F)\mu_l^2 = 0$$
$$(M - k_l F)d\mu_l^1 + (N - k_l G)\mu_l^2 = 0 \quad (105)$$

Последнее уравнение можно записать в матричном виде так:

$$k_l \mathtt{g}_{ik} v_l = \mathtt{f}_{ik} v_l \quad (106)$$

где v_l вектор столебец (μ_l^1, μ_l^2) и $l = 1, 2$.

Из курса линейной алгебры известно, что в задаче на собственные значеня типа (106) собственным числам - главным кривизнам, соеветствуют *линейно независимые* собственные векторы - главные направления.

Экспоненциальное отображение.

Рассмотрим однопараметрическую группу g^t преобразований многообразия M в себя (см. определение.) Эта группа определяет векторное поле фазовой скорости по формуле (3)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^t x) = v(x) \quad (107)$$

По определению вектор это линейный оператор. Поэтому (3) можно переписать так

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^t x) = Ax \quad (108)$$

Где A некоторый линейный оператор $L_x M \to L_x M$. Действительно, если на M фиксирована система координат то уравнение (3) можно записать так

$$\left.\frac{dx^i}{dt}\right|_{t=0} = a_{i,j} x^j, \;\; i = 1, ..., n, \; a_{i,j} = \left.\frac{\partial x^i}{\partial \mu_j}\right|_{x=0} \quad (109)$$

где $a_{i,j}$ матрица оператора $\in L_x M$.

Решением уравнения (107) с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ является отображение

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0 = \exp\left(t \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\right) x_0 \quad (110)$$

Действительно

$$\frac{d\varphi}{dt} = A e^{tA} x_0 = A\varphi(t) \quad (111)$$

Итак φ - решение. Поскольку $e^0 = E$ то $\varphi(0) = x_0$.

Рассмотрим оператор $A : \frac{d}{dt}\big|_{t=0} \in L_x M$, определим также оператор e^A. Воздействуя e^A на точку x_0 получим точку $\varphi(1) = e^A x_0$.

Отсюда, и из (107) видно, что оператор e^A берет некоторый вектор $v \in L_x M$ приложенный в точке x_0 и сопоставляет ему точку $\varphi(t) \in M$.
Рис.

Оператор $e^{t\frac{d}{dt}} = H^t$, где $H^t :, M \to M$ - оператор сдвига на t т.е.

$$(H^t)\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + t) \quad (112)$$

Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - некоторый линейный оператор.

Семейство линейных оперaтотов $e^{tA} : M \to M, t \in \mathbb{R}$, является однопараметрической ргуппой преобразований M.

Действительно, из (109) следует, что e^{tA} - линейный оператор. Известно также равенство:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$$

- групповое совойство. К тому же e^{tA} дифференцируемо зависит от t:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

- как и положено експоненте.

Поэтому, можно записать:

$$\varphi(t) = g^t x_0 = e^{tA} x_0 \quad (113)$$

Определение 0.0.36 Оператор A называют производящим оператором группы g^t.

Определение 0.0.37 По теореме о единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (107), отображение $\varphi(t) = x^i(t)$ задает множество *непересекающихся* интегральных кривых. Эти интегральные кривые заполяют все M (за исключением может быть точек в которых векторное поле v обращается в нуль) так, что через каждую точку x проходит одна и только одна интергальная кривая. Такое заполняющее многообразие множество кривых называется *конгруенцией.*

При соответствующей параметризации конгруэнция может рассматриватся как многообразие.

Поскольку каждая кривая является одномерны множеством точек, множество кривых, образующих конгруэенцию, имеет размерность $n - 1$.

Оператор сдвига (112) можно определить и другим еквивалентным способом.

А именно, функцию $\varphi(t_0 + t) = x^i(t_0 + t)$ можно разложить в ряд Тейлора *в окрестности тчочки* t^0 :

$$x^i(t_0 + t) = x^i(t_0) + t\left(\frac{dx^i}{dt}\right)_{t_0} + \frac{1}{2!}t^2\left(\frac{d^2x^i}{dt^2}\right)_{t_0} + ...$$
$$= \left(1 + t\frac{d}{dt} + \frac{1}{2}t^2\frac{d^2}{dt^2}\right) x^i\big|_{t_0} =$$
$$\exp\left[t\frac{d}{dt}\right] x^i\big|_{t_0}, \quad (114)$$

Здесь использовано разложение функции e^A, $A \in \mathbb{R}$ в ряд Тейлора:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3^1} + \dots$$
$$e^A = \lim_{n\to\infty}\left(E + \frac{A}{n}\right)^n \tag{115}$$

где E означает единицу.

Замечание. Оператор $A = \frac{d}{dt}$ представляет собой бесконечно малое движение вдоль интегральной кривой, а его экспонеета - оператор сдвига H^t дает конечное движение.

Геодезические на поверхности.

Определение 0.0.38 Геодезической линией на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой равна нулю.

Это определение выделяет класс "прямейших"лининй на поверхности. Действительно, если поверхность дана, то одна и таже нормальная кривизна навязывается всякой кривой пороходящей через данную точку по данному направлению, и избавится от этой кривизны мы не можем. Напротив, геодезическая кривизна зависит от формы кривой на поверхности, и для определенного класса этих кривых можно заставить геодезическую кривизну обратится в нуль. Итак, для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, или чтобы ее главная нормаль во всех точках совпадала с нормалью к поверхности