Рассмотрим совокупность материальных точек - механическую систему. Состояние этой системы определится если задать положение, скорость каждой точки. Определим функцию от положений и скоростей, и пусть эта функция зависит так же и от времени:

$$L = (q, \dot{q}, t)$$

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q(t_i)$ в интервале времени $t_0 \le t \le t_1, i = 1, ..., n$ то получим некоторое движение. В расширенном $n+1$ мерном пространстве, где координатами являются величины q_i и время t, это движение изобразится некоторой кривой. Рассмотрим интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

В соотрветствии с принципом Гамильтона этот интеграл должен принять минимальное значение.

Теперь будем рассматривать все такие кривые - пути, проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_i^0)$ и $M_1(t_1, q_i^1)$, т.е все возможные движения, переводящие систему из заданного начального положения q_i^0, которое она занимала в момент t_0, в данное конечное положение q_i^1, которое она занимает в момент времени t_1. При этом заранее фиксируются начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, начальное и конечное положение системы. В остальном движения произвольны.

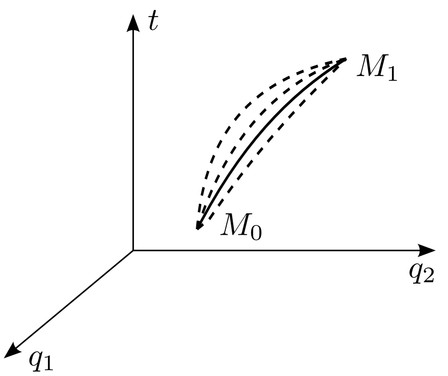

Рис. 1: Возможные пути.

Запишем это множество путей как произвольное однопараметрическое семейство кривых.

$$q_i = q_i(t, \alpha)$$

$$(t_0 \le t \le t_1; -\gamma \le \alpha \le \gamma; i = 1, ..., n)$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ кратчайший путь; при $\alpha \ne 0$ получааются так называемые окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1:

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, q_i(t_1, \alpha) = q_i^1$$

$$(-\gamma \le \alpha \le \gamma; i = 1, ..., n).$$

Тогда W представляет собой функцию параметра α, а выражение () функционал:

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha)] dt$$

Вычислим вариацию этого функционала, т.е. дифференциал по α:

$$\delta W = \int_{t0}^{t1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt =$$

$$= \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \delta q_i \bigg|_{t_0}^{t_1} +$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, dt =$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \, \delta \dot{q}_i \, dt + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \delta q_i \bigg|_{t_0}^{t_1}$$

используя для этого перестановочность операции варьирования δ и операции дифференцирвания по времени d/dt (так как варьирование производится при неизменном t):

$$\delta \dot{q}_i = \delta \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) \delta \alpha =$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\alpha} q_i(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_i$$

Кроме того, так как начало и конец пути не варьируются, то при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_i = 0$. Поэтому проинтегрированная часть оказалась равной нулю.

Из условия $\delta W = 0$ и () следует что

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа. Таким образом для прямого пути функции $q_i = q_i(t), (i = 1, ..., n)$ удовлетворяют уравнениям Лагранжа. Прямые пути называют также экстремалями.

Итак мы получили уравнения движения в координатах $(q, \dot{q})$ - координатах Лагранжа, исходя из некоторой функции $L(q, \dot{q})$ - функции Лагранжа.

Гамильтон предложил использовать вместо $\dot{q}$ импульсы равные

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

поэтому переменные $t, q_i, p_i, i = 1, ..., n$ будем называть переменные Гамильтона, а уравнения движения в этих переменных уравнениями Гамильтона. Отсюда и из уравнений лагранжа следует

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i$$

Гамильтон ввел также в рассмотрение функцию:

$$H(t, q_i, p_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L$$

Эта функция имеет простой физический смысл, а именно совпадает с полной механической энергией системы:

$$H = T + V$$

Составим полный дифференциал от этой функции

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

с другой стороны из (6.1) находим

$$dH = \sum_{i=1}^{k} p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i dp_i - dL$$

Дифференциал функции Лагранжа $L = L(t, q_i, \dot{q}_i$ равен:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt \dot{q}_i.$$

Так как

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \;\; \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

То будем иметь

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=k}^{k} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{k} p_i d\dot{q}_i.$$

Подставляя теперь найденное значение dL в формулу (9.6) получает следующее выражение для дифференциала dH:

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^{k} \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^{k} \dot{q}_i dp_i.$$

Отсюда путем сравнения полученного выражения с формулой (6.8) находим:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{dL}{dt}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \;\; \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Это и есть уравнения Гамильтона.