Метрика.

Как было показано в параграфе (...) процесс деформирования материала сопровождается изменением взаимного расположения точек сплошной среды. Чтобы в процессе деформирования тело не терпело разрывов, необходимо чтобы отображене u из начальной кнфигурации в текущую было диффеоморфизмом. Если отображение, к томуже является и изоморфизмом то имеем изгибания без растяжений, т.е меняем способ вложения тела в $\mathbb{R}^3$. Деформация приводит к тому, что декартовы координаты точек идеального, недеформированного кристалла становятся криволинейными после наложения деформации. Символы Кристофеля такой системы координат становятся отличными от нуля, однако тензоры крученя и кривизны по прежнему равны нулю.

Среду можно описывать внутренней и внешней геометрией. Внутренняя основана на первой квадратичной форме (метрике), внешняя на второй квадратичной форме (учитывая кривизну - ускорение). Наблюдатель может являтся соответственно внутриним и внешним.

Определим актуальную деформировнную конфигурацию кристалла в Евклидовой метрике $\mathrm{g}_{ij}^{ext} = \delta^{ij}$. Внешний наблюдатель видит актуальную конфигурацию $\mathcal{R}(t)$. Т.е. дано вложение тела в $\mathbb{R}^3$, внешний наблюдатель находится как раз в $\mathbb{R}^3$, и сомотрит на кристалл, например через микроскоп. Актуальное, деформированное состряние тела описывается голономными, Эйлеровыми координатами x^m, отмечеными латинскими индексами $m = 1, 2, 3$.

Определим натуральное состояние кристалла. Представим кристалл как множество маленьких кусочков идеальной решетки в которых внутренние напряжения релаксированы, т.е в самих этих кусочках возможно выбрать такую систему координат в которой вектрное поле смещений выпрямляемо. Однако в целом кристалле поле смещений не оязано быть выпрямляемо, т.е может не существовать глобальный репер. Такое представление и называется натуральным состоянием. В общем случае деформированные элементы объема не удается подогнать друг к другу и собрать из них непрерывное тело, если только деформация элемента не связана с деформацией его соседей условиями совместности Сен-Венана. Внутренний наблюдатель видит натуральное состояние кристалла, и может исследовть его только путем параллельного перенесения, и определения кристаллографических линий - геодезических. Натурально состояние дается, в общем случае неголономными Лагранжевыми координатами dX^α, отмеченными греческими индексами $\alpha = 1, 2, 3$. Кроме того, натуральное состояние получается из идеальной решетки после пластической деформации.

Отображение из актуального в натуральное состояние дается формулой

$$dX^\alpha = \phi^\alpha_m dx^m \tag{1}$$

где ϕ^α_m матрица Якоби отображения. Эта матрица содержит физическую информцию о локальной геометрии среды.

Тензор упругой деформации ε_{mn} получается сравнением расстояния dl' между двумя точками разделенными вектором dx^m в упруго деформиованном состоянии, с расстоянием dl между теми же самыми точками в релаксированном состоянии, в котором упругая деформация равна нулю:

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dx_m dx^m = \mathrm{g}_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \\ dl^2 &= \mathrm{g}_{mn} dx^m dx^n = dX^\alpha dX_\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Эти уравнения определяют метрику g_{mn} релаксированного состояния в Эйлеровывх коорднатах x^m и метрику $\mathrm{g}_{\alpha\beta}$ актуального состояния в Лагранжевых коорднатах dX^α.

Лего видеть, что среда содержащая дефекты, являетя дефектной в пространстве Евклида. Если, однако, ее рассматривать в римановой метрике, понятие дефекта теряет смысл и кристалл следует воспринимать как бездефектный. Математически это следует из того, что коэффициенты связности в евклидвовом пространстве обращаются в нуль.

Разность

$$dl'^2 - dl^2 = 2\varepsilon_{mn} dx^m dx^n = 2E_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \tag{3}$$

определяет тензор упругой деформации

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2}(\delta_{mn} - \mathrm{g}_{mn}) \tag{4}$$

Елементы длин дуг dS и ds в материальной и пространственной конфигурациях B и B, даются соответственно

$$\begin{aligned} dS^2 &= dX_K dX_K = c_{kl} dx_k dx_l, \\ ds^2 &= dx_k dx_k = C_{KL} dX_K dX_L. \end{aligned} \tag{5}$$

где

$$\begin{aligned} c_{kl}(\mathbf{x}, t) &= \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{K,l}, \\ C_{KL}(\mathbf{X}, t) &= \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{k,L}, \end{aligned} \tag{6}$$

соответственно тензоры Коши и Грина. Запешем соотношеня:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\mathbf{X}, t) dX_K dX_L = 2\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) dx_k dx_l \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned} 2E_{KL} &= C_{KL}(\mathbf{X}, t) - \delta_{KL}, \\ 2\varepsilon_{kl} &= \delta_{kl} - c_{kl}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \tag{8}$$

известны как Лагранжев и Эйлеров тензоры деформаций.

Альтернативным сопособом введения тензора деформации является разложение матрицы $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}, \ F_{kK} \equiv x_{k,K}$ в произведение двух матриц, одной ортогональной, другой симметрической. Доказательство этой теоремы известно из линейной алгебры. Таким образом

$$\mathbf{F} = \mathbf{RU} = \mathbf{VR}, \tag{9}$$

где

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T\mathbf{F} = \mathbf{C}, \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \mathbf{c}^{-1}\mathbf{b} \tag{10}$$

$\mathbf{R}$ - ортогональна. $\mathbb{U}$ и $\mathbf{V}$ правый и левый тензоры растяжений. $\mathbf{C}$ и $\mathbf{b}$ правый и левый тензоры деформации Коши-Грина.

В нашей вселенной, внутренний наблюдатель не обладает способностью выполнять внешние действия над вселенной, если таковые вообще существуют. Сдесь мы рассматриваем возможность того, что вселенная может быть деформиована высшими существами "из вне". Кристалл, с другой стороны, является объектом который полностью может быть деформирован "из вне". Мы может также видеть множество деформаций просто смотря внуть кристалла, например при помощи електронного микроскопа.

Представим некоторый кристалл и наблюдателя который может только определять кристаллографические направления и перемещатся транстляцией по кристаллической решетке. Такой внутренний наблюдатель не сможет определить деформацию выполненную "из вне". Физики исследующие мир имеют статус именно внутренних наблюдателей.

В момент времени t дефективный кристалл является трехмерным телом обозначаемым $\mathcal{R}(t)$. Дефективность кристалла не обнаруживается более. Тем не менее дефективность описывается геометрией погружения.

Метрика внешнего наблюдателя на $\mathcal{R}(t)$ - евклидова метрика δ_{ij}. В силу того, что присутствует макроскопическая деформация ε_{ij}, другая Риманова метрика определена на $\mathcal{R}(t)$, именно:

$$\mathsf{g}_{ij}^B = \delta_{ij} - d\varepsilon_{ij}. \tag{11}$$

Эта метрика называется метрикой Браве.

Использование этой метрики на бездефектных областях $\mathcal{R}(t)$ ведет к существованию однозначной (one-to-one) замены координат между $\mathcal{R}(t)$ и $\mathcal{R}_0$, чей градиен деформации записывается как $a_{mi} = \mathsf{g}_{mn}^B a_i^n = \delta_{mi} - \partial_i u_m$ где u_m означает поле смещений. Отметим, что в случае малых деформаций нет разницы между верхними и нижними индексами.

В присутствии дефектов, сведующий объект (который называется "неголономность")

$$\Omega_{ijk} := \partial_k a_{ji} - \partial_i a_{jk} \tag{12}$$

непосредственно относится к несовместности деформации, иследовательно не исчезает пока присутствуют дефекты.

Это значит, что не существует глообальной системы координат $\{x_j^B(x_i)\}$ с гладким преобразованием координат $a_{ij} = \partial_i x_j^B$. Фактически такое гладкое a_{ij} - или, эвивалентно, такое гладкое векторное поле существует только в свободной от дефектов области кристалла.

Представим себе, что тело разрезано не небольшие элементы объема, каждый из которых определенным образом деформируется. В общем случае деформированные элементы объема не удается подогнать друг к другу и собрать из них непрерывное тело, если только деформация каждого элемента не связана с деформацией его соседей условиями совместности Сен-Венана.

Из упругой метрики, определим совместимые с ней симметрические символы кристофеля

$$\Gamma_{k;ij}^B = \frac{1}{2}(\partial_i \}_{kj}^B + \partial_j \|\rangle^{B - \partial_k \}_{ij}^B}), \tag{13}$$

для котороых кручение нулевое $\Gamma^{B_{k;[ij]}} := \Gamma_{k;ij}^B - \Gamma_{k;jk}^B$.

А кривизна

$$R_{i;kmp}^B := (\partial_q \Gamma_{l;km}^B + \tilde{\mathsf{g}}_{np}^B \Gamma_{n;km}^B \Gamma_{p;lp}^B)_{[mq]} \tag{14}$$

где $\tilde{\mathsf{g}}_{np}^B = \delta_{np} + \varepsilon_{np}$ обратная к g_{np}^B при условии малых дефомраций.

Связность для которой $R_{l;kmq}^B = 0$ называется *матераильной связностью*, и для этой связности $\Gamma_{k;[ij]}^B$ означает тензор неоднородности.

Следует заметить, что с помощью тензора кручения, связность может быть представлена в виде двух компонент: связности Леви-Чивиты, которая зависит только от метрики, и тензора конторсии (contorion tensor), который является комбинацией тензора кручения:

$$\Gamma_{kj}^i = \Gamma_{kj}^{\bar{i}} + K_{kj}^i \tag{15}$$

где $\Gamma_{kj}^{\bar{i}}$ связность леви чивиты, $K_{kj}^i = \frac{1}{2}(T_{ijk} - T_{jki} + T_{kij}), T_{ijk} = \mathsf{g}_{kl} T_{ij}^l$ тензор конторсии.

SMPRI2005 005 Материальное тело определяется трехмерным дифференцируемым многообразием $\mathbb{M}$ вложенным в трехмерное Евклидово пространство $\mathbb{R}^3$. Текущие координаты многообразия деформированного тела M' обозначим $x^i(i,j,k,l,m,n,\ldots = 1,2,3)$, а декартовы координаты бездефектного тела (reference manifold $\mathbb{M}$) обозначим $x^a(a,b,c,d,\ldots = 1,2,3)$. Если текущая конфигурация является бездефектной, тогда функции $x^i = x^i(x^a)$ и $x^a = x^a(x^i)$

однозначные, гладкие, дифференцируемые своих аргуметов. Матрица $\beta^i_a = \partial_a x^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^a}$ это матрица деформации (discotrion matrix.)

Пусть e_a глобально определенный базис отсчетного многообразия. Метрика $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$ является евклидовой и связность $\omega^a_b = \Gamma^a_{cb} dx^c$ обращается в нуль соответственно. Метрическая связность текущей конфигурации есть $\mathrm{g}_{ik} = \beta^a_i \beta^b_k \delta_{ab}$ и $\omega^i_k = \beta^i_a d\beta^a_k$.

Бездефектное многообразие $\mathbb{M}$ характеризуется глобальным базисом $e^i = dx^i$ и плоской связностью $\omega^i_k = \beta^i_a d\beta^a_k$. Эти уравнния можно рассматривать как набор дифференциальных уравнений для e^i и ω^i_k. В этом случае тензоры крученя и кривизны нулевые и правые части уравнений интегрируемости обращаются в нуль.

$$\begin{aligned} T^i &= \mathcal{D}e^i = de^i + \omega^i_k \wedge e^k = \frac{1}{2} T^i_{kl} e^k \wedge e^l, \\ R^i_k &= \mathcal{D}\omega^i_k = d\omega^i_k + \omega^i_l \wedge \omega^l_k = \frac{1}{2} R^i_{klm} e^l \wedge e^m. \end{aligned} \tag{16}$$

Кривизна и кручение представляют дефекты. Дефекты являются препятствием для диффеоморфности отображения из M в M'.

Для связи матиметической структуры с описанием дефектов, рассмотрим инфинитиземальную трансформацию

$$x^a \to x^m = (x^a + u^a(x^b))\delta^m_a. \tag{17}$$

где общее смещение u^a состоит из упругой и пластческой частей. Упругая часть интегрируема, пластическая нет.

Общий тензор дисторсии

$$\begin{aligned} \beta^i_a &= \delta^i_a + \partial_a u_i, \\ \beta^a_i &= \delta^a_i - \partial_i u_a. \end{aligned} \tag{18}$$

Метрика связывается в общей деформацией

$$\mathrm{g}_{ik} = \beta_{ai}\beta^a_k = \delta_{ik} - \partial_i u_k - \partial_k u_i = \delta_{ik} - 2e_{ik}. \tag{19}$$

В линейной аппроксимации

$$\mathcal{D}T^i = dT^i = 0 \tag{20}$$

дает

$$\begin{aligned} T^i &= \omega^i_k \wedge dx^k = d\beta^i, \\ \omega^i_k &= \Gamma^i_{lk} dx^l, \\ \beta^i &= \beta^i_k dx^k = w^i_k dx^k + e^i_k dx^k. \end{aligned} \tag{21}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} de_{ik} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} + \Gamma_{lki}) dx^l, \\ dw_{ik} &= \frac{1}{2}(\Gamma_{ikl} + \Gamma_{lki}) dx^l. \end{aligned} \tag{22}$$

где w_{ik} это антисимметрическая часть дисторсии β_{ik} (в линейной теории упругости). Такова локальная интерпретация связности.

В присутствии дефектов, координатная система M' неголономна. Обозначая неголономные координаты e^α вместо e^i мы можем записать $e^\alpha = \beta^\alpha_a dx^a$, но β^α_a полее не является градиентным полем. Представим деформированное тело как множество маленьких кусочков идеальной решетки в которых внутренние напряжения релаксированы. Такое прдставление называется *натуральным состоянием.* Элемент длинны dx^i в деформированном состоянии заменяется н dx^α в натуральном состоянии.

Элемент длинны ds для dx^i определяется натуральной длинной $ds^2 = \delta_{\mathbf{k}\lambda} dx^{\mathbf{k}} dx^\lambda$. Метрика пластического многообразия $h_{kl} = \delta_{\mathbf{k}\lambda} \beta^{\mathbf{k}}_k \beta^\lambda_l$. Маленькие части кристалла могут быть произвольно сдвинуты и повернуты в нутаральном состоянии. Матрица $\beta^{\mathbf{k}}_k$ имеет калибровочную степень свободы, т.е. задана с точностью до ортогональных преобразований $\eta^{\mathbf{k}}_k = O^{\mathbf{k}}_\lambda \beta^\lambda_k$ в метрике h_{kl}. Метрика таким образом является инвариантной относительно ортогональных преобразований в натуральном состоянии.

Введем Евклидову связность на пластическом многообразии. Плотность дислокаций математически может быть выражена как кручение многообразия.

В теории упругости мы имеем две естественные пространственные метрики:

1) обычная метрика физического пространства $\mathrm{g}^{(0)}_{mk}$, выражается в Эйлеровых координатах (natural state),

2) метрика связанная с упругой средой g_{mk}, выражается в Лагранжевых координатах (actual state).

Их полуразность называется тензором конечных деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mk} &= \frac{1}{2}(\mathrm{g}^{(0)}_{mk} - \mathrm{g}_{mk}). \\ ds^2 - ds^{(0)2} &= 2\varepsilon_{mk} dx^m dx^k. \end{aligned} \tag{23}$$

Условия совместности.

Шесть компонент и выражеются через компоненты вектора смещений u_{kl}, т.е.

$$2\varepsilon_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - \delta_{mn} u_{m,k} u_{n,l}. \tag{24}$$

Когда вектор смещений допускает непрерывные пространственные частные производные мы пожем рассчитать ε_{kl} и c_{kl} прямо подставляя $\mathbf{u}$ в это уравнение.

Возникает обратная задача, елси заданы ε_{kl} и c_{kl} возможно ли получить однозначное непрерывное поле смещений соответствующее ε_{kl} и c_{kl}. Это задача на интегрируемость системы шести дифференциальных уравнний в частных производных (24) и ответ дается теоремой Римана:

Теорема 0.0.1 Чтобы произвольный симметрический тензор a_{kl} являлся метрическим тензором для евклидова пространства, необходимо и достаточно чтобы a_{kl} был невырожденным, положительно определенным тензором и тензор Римана R_{klmn} сформированный a_{kl} обращался в нуль.

Дислокации и дисклинации.

В калибровочной теории дефектов, основанной на геометрии Ринана-Картана дислокации среды соответствуют отличному от нуля тензору кручения, дефекты в спиновой структуре соответствуют отличному от нуля тензору кривизны. Кроме того связность предпологается огласcованной с метрикой:

$$\begin{gathered} ds^2 = \mathrm{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j = \mathrm{g}_{mk}\theta^m \otimes \theta^k \\ 0 = \nabla_l \mathrm{g}_{mk} = \partial_l \mathrm{g}_{mk} - \omega^s_{ml}\mathrm{g}_{sk} - \omega^s_{kl}\mathrm{g}_{ms}. \end{gathered} \tag{25}$$

- где индексы i, j указывают на голономный а индексы mk на неголономный базис.

Действительно, как было показано, отличный от нуля тензор кручения $T(V, U) = \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U]$ соответствует незамкнутости обходимого пути, что соответствует вектору Бюргерса

$$-\mathbf{b}^\alpha = \oint_{C'} dX^\alpha = \oint_C \phi^\alpha_n dx^n = \int\int T^\alpha_{mn} dx^m \wedge dx^n \tag{26}$$

где плотность дислокаций

$$T^\alpha_{mn} = \partial_m \phi^\alpha_n - \partial_n \phi^\alpha_m \tag{27}$$

получена по формуле Стокса. $T^\alpha_{mn}dx^m \wedge dx^n$ являетс векторозначной два формой в x^m.

Заметим, что вектор Бюргерса характеризует свойство целого контура в начальном состоянии состоянии, и является инвариантным по отношению к выбору начальной точки на этом контуре.

Вектор Бюргерса может быть выражен в конечном состоянии (в лагранжевых координатах) используя отображение

$$dX^\alpha = \phi^\alpha_m dx^m. \tag{28}$$

только если ни его ориентация, ни длинна на завасят от его положения.

Отображение (28) из конечного (actual) в начальное (natural) состояние, и описывает локальную геометрию материала.

Заметим, что $\phi^\alpha_m = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^m}$ является градиентом только если координаты dX^α голономны. Другими словами, когда кручение отсутсвтует везде, Лагранжевы координаты dX^α являются голономными, связность тогда симметрична. И если допустить, что отсутствует и неметричность символы кристофеля тогда выразятся в вдие

$$\Gamma_{spn} = \frac{1}{2}(\partial_n g_{sp} + \partial_p \mathrm{g}_{sn} - \partial_s \mathrm{g}_{pn}) \tag{29}$$

Если условия совместности выполнены, среда обладает абсолютным параллелизмом или, что тоже, отсутствием дисклинаций. В этом случае плотность дислокаций выражается тензором кручения

$$T^s_{mn}(\phi^{-1})^s_\alpha T^\alpha_{mn} = \Gamma^s_{nm} - \Gamma^s_{mn} \tag{30}$$

И связность тогда выражается как

$$\begin{gathered} \Gamma^s_{nm} = (\phi^{-1})^s_\alpha \partial_m \phi^\alpha_n. \\ \Gamma'^s_{nm} = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Отличный от нуля тензор кривизны $R(V, U)Y = \nabla_U\nabla_V Y - \nabla_V\nabla_U Y - \nabla_{[V,U]}Y$ приводит к тому, что вектор параллельно перенесенный по некоторому замкнутому контуру оказывается не параллельным себе в начальном состоянии, что соответствуте вектору Франка.

Дисклинации не образуются в трехмерных кристаллах, так как они энергентически невыгодны. Вообще, наличие дисклинации требует конечности рассматриваемого образца, иначе внутренняя энергия данного образца стремится к бесконечности. Свободные от дисклинаций кристаллы обладают абсолютным параллелизмом или, что тоже, дальним порядком. Эта концепция может быть выражена математически посредством параллельного переноса. Параллельное перенесение вектора ξ^s между двумя точками отделенными dx^m вдоль пути дается выражением

$$d\xi^s = -\Gamma^s_{pm}\xi^p dx^m \tag{32}$$

При параллельном переносе вектора ξ^s вдоль дуги геодезической его ковариантная производная

$$\mathcal{D}_p \xi^s = \partial_p \xi^s + \Gamma^s_{mp}\xi^m. \tag{33}$$

обращается в нуль.

В случае наличия дальнего порядка, любой вектор ξ^s возвращается в первоначальной ориентации после параллельного перенесения по любому замкнутому пути. Замкнутый путь может быть разложен в сумму элементарных отрезков геодезических, таким образом

$$\begin{aligned} \oint d\xi^s &= -\oint \Gamma^s_{pn}\xi^p dx^n \\ &= -\int\int \left[\partial_m(\Gamma^s_{pn}\xi^p) - \partial_n(\Gamma^s_{pm}\xi^p)\right] dx^m \wedge dx^n \\ &= -\int\int R^s_{pmn}\xi^p dx^m \wedge dx^n \end{aligned} \tag{34}$$

где тензор кривизны

$$R^s_{pmn} = \partial_m \Gamma^s_{pn} - \partial_n \Gamma^s_{pm} + \Gamma^s_{jm}\Gamma^j_{pn} - \Gamma^s_{jn}\Gamma^j_{pm} \tag{35}$$

является мерой плотности дисклинаций.

Равенство (35) выполняется для любых векторов и любого замкнутого контура. Таким образом $R^s_{pmn} = 0$ является усовием абсолютного параллелизма или, что тоже, отсутствия дисклинаций.

При выполнении (31) тензор кривизны обращается в нуль. Геометрия становится плоской и имеем пространство абсолютного параллелизма.

Тут компоненты s, p тензора кривизны даны в конечном состоянии (в Лагранжевых координтах). Но они также могут быть даны и в начальном состоянии (Эйлеровых координатах). Только элементы контрура dx^m, dx^n всегда даются в конечном состоянии среды.

Тензор неметричности Q, определяется ковариантную производную от метрики

$$Q_{qsp} = \mathcal{D}_p \mathrm{g}_{qs} = \partial_p \mathrm{g}_{qs} - \Gamma^t_{qp} \mathrm{g}_{ts} - \Gamma^t_{sp} \mathrm{g}_{qt}. \qquad (36)$$

Соответсвующий дефект называется "extra-matter".

При выполнении (31) связность совместима с метрикой, $Q = 0$.

Континуум Коссера.

В линейном конинууме Коссера мерой деформации является дисторсия β и конторсия k (∇_i обозначает квариантную производную в Евклидовой метрике):

$$\begin{gathered} \beta_{ij} = \nabla_i u_j - \omega_{ij}, \ \omega^{ij} = -\omega_{ji}, \\ k_{ijk} = \nabla_i \omega_{jk} = -k_{ikj}, \end{gathered} \qquad (37)$$

ω - бивекторное поле.

В классической теории упругости, присутствуют только деформации

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) \equiv \beta_{(ij)} = \nabla_{(iu_j)}. \qquad (38)$$

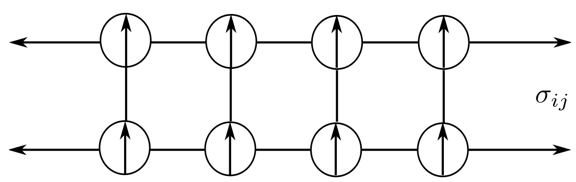

Рис. 1: Поле смещений $u_1 \approx x$, поле вращения $\omega_{ij} = 0$. Тогда $\beta_{11} = \varepsilon_{11} = \text{const}$ и $k_{ijk} = 0$. Однородная деформация (distortion) созданная только обычной силой деформации. Симметрическая часть напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ отвечает изменению (a variation) метрики g_{ij}.

Пространство Римана являетя аналогом тела в классической континуальной теории: точки и их относительные расстояния - все что необходимо для описания его геометрии; аналогом деформаци ε_{ij} классической теории упругости является метрический тензор g_{ij} Риманова пространства. В ОТО симметрическое напряжение $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ соответствует изменению метрики g_{ij}.

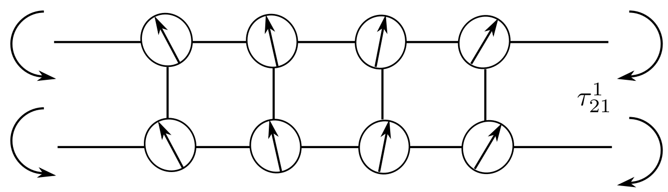

Рис. 2: Поле смещений $u_i = 0$, поле вращения $\omega_{12} \approx x$. Тогда $\beta_{12} = \omega_{12} \approx x$ и $k_{112} \approx \text{const}$. Однородное искривлене (contortion) созданное приложением вращательного момента силы.

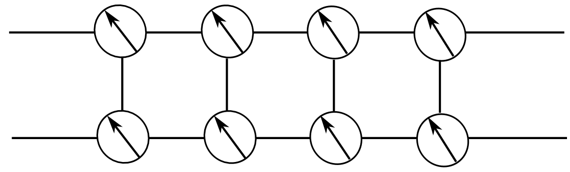

Рис. 3: Чистая постоянная антисимметричная часть деформации $\omega_{12} = \text{const}$.

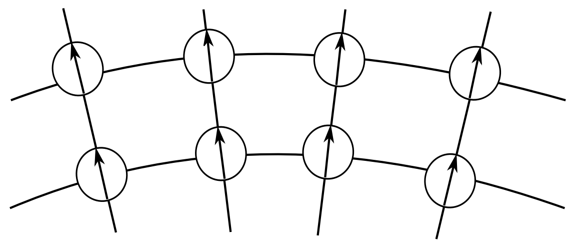

Рис. 4: Вращение искривлением в обыкновенной теории упругости.

RC-пространсвто может быть реализовано как обобщение континуума Коссера. Мерой деформации в RC-постранстве являются

$$\begin{gathered} \theta^\alpha = e^\alpha_i dx^i, \\ \Gamma^{\alpha\beta} = \Gamma^{\alpha\beta}_i dx^i = -\Gamma^{\alpha\beta}, \end{gathered} \qquad (39)$$

что в континууме Коссера соответствует

$$e^\alpha_i \to \beta_{ij}, \ \Gamma^{\alpha\beta}_i \to k_{ijk}. \qquad (40)$$

Тем не менее, кобазис θ^α и связность $\Gamma^{\alpha\beta}$ не могут быть выведены из поля смещений u_i и поля вращений ω_{ij}, так как меры деформации β_{ij} и k_{ijk} не удовлетворяют условиям совместности:

$$\nabla_{\,[i} \beta_{j\,]k} + k_{[ij]k} = 0, \qquad (41)$$

Основы калибровочного описания дислокаций.

Существует два основных типа дефектов в кристалле - кравевые и винтовые.

Краевая. Отсутствующая полуплоскость характеризуется вектором Бюргерса перпендкулярным к дислокационной линии.

Винтовая. Тоже характеризуется вектором Бюргерса, но в этом случае он параллелен к дислокационной линии.

В рамках классической теории упругости изолированные дефекты моделируются дислокациями Вольтерра и Сомилианы. Эти теории могут быть использованы для рассчета дальнодействующег поля дислокации.

Если принимать в рассмотрение множество дислокацй присутствующих в кристалле то можно использовать соответствующую теорию Кренера. Рассмотрим кубический кристалл. Усреднением мы може получить тензор плотности дислокаций $\alpha_{ij}^{k} = -\alpha ijk$. Индексы ij обозначают элемент площади, индекс k - направление вектора Бюргерса.

В 1953 году, Най установил взаимосязь между плотностью дислокаций a_{ijk} и тензором конторсии K_{ijk}, который описывает относительное вращение между соседними элементами площади

$$K_{ijk} = -\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - \alpha_{kij} = -K_{ikj}. \quad (42)$$

Здесь выбана буква K для аналогичности с contortional mesure k континуума Коссра.

В тоже самое время с макроскопической, т.е. континуальной точки зрения, становится ясно, что откликом кристалла на его конторсию индуцируемую дислокациями являтся вращающий момент напряжения, который уже упоминался в кнтирууме Коссера.

Если к геометрии с кривизной добавить кручение, то в динамической части необходимо допустить на ряду с напряжением также и крутящий момент напряжения.

Несмотря на наличие дислокаций, в каждой точке кристалла кристаллографические направления хорошо определены. Другими словами кристалл можно описать пространством с обсолютным параллелизмом (кривизна - дисклинации отсутствуют).

Связность пространства с абсолютным параллелизмом всегда может быть представлена как совокупность компонент базиса $e_\alpha = e_\alpha^k$ и кобазиса $\theta^\alpha = e_j^\alpha dx^j$ как

$$\Gamma_{ij}^{k} = e_\alpha^k \partial_i e_j^\alpha. \quad (43)$$

Соответственно с одной стороны кристлл имеет кручение, с другой стород обеспечивает абсолютный параллелизм.

Translational gauge theory of continuously distributed dislocations.

Что является мерой деформации в полевой теории дислокаций. Очевидно кручение α или конторсия K. Но как на счет дисторсии.

Теория строится на аффинном касательном расслоении $A(\mathbb{M})$ над трехмерным пространсвом $\mathbb{M}$. В касательном аффинном пространстве, можно выполнять трансляции точек и векторов, в этом смысле группа трансляции T_3 рассматривается как *внутреняя симметрия*.

Генераторы P_α группы трансляций соответствуют Ли-алгеброзначной 1-форме

$$\Gamma^{(T)} = \Gamma_i^{(T)\alpha} P_\alpha dx^i \quad (44)$$

как трансляционно калибровочный потенциал.

При преобразованиях

$$y^\alpha \to y^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad (45)$$

аффинного касательного простарнства они преобразуются как связность

$$\delta\Gamma_i^{(T)\alpha} = -\partial_i \varepsilon^\alpha. \quad (46)$$

Так как T_3 Абелева, т.е. трансляции коммутируют друг с другом, в этом законе преобразования нет однородного члена. Таким образом это преобразование напоминает фазовые преобразования электромагнитного потенциала. По той же причине, калибровочное поле напряженности

$$F^{(T)\alpha} = d\Gamma^{(T)\alpha} = \frac{1}{2} F_{ij}^{(T)\alpha} dx^i \wedge dx^j \quad (47)$$

напоминает обобщенную папряженность электромагнитного поля.

В добавление к трансляционно калибровочному полю важной структурой является поле ξ^α определенное как локальное сечение аффинного касательного расслоения. Геометрически, это поле определяет "начало"аффинного пространства; оно известно как радиус вектр Картана. При калибровочных преобазованиях (трансляциях) оно изменяется как

$$\xi^\alpha \to \xi^\alpha + \epsilon^\alpha. \quad (48)$$

Тем не менее, комбинация

$$e_i^\alpha = \partial_i \xi^\alpha + \Gamma_i^{(T)\alpha}, \quad (49)$$

очевидно калибровочно инвариантна.

В рамках калибровочной теории 1-форма

$$\theta^\alpha = e_i^\alpha dx^i = d\xi^\alpha + \Gamma^{(T)\alpha} \quad (50)$$

является как нелинейное трансляционное калибровочное поле где ξ^α интерпретируется как Голдстоуновское поле описывающее спонтанное наушение трансляционной симметрии.

Мы можем рассматривать $\theta^\alpha = e_i^\alpha dx^i$ как кобазис нашего 3D многообразия. Тогда транслционное калибровочное поле напряженности является 2-формой неголономности этого кобазиса:

$$F^{(T)\alpha} = d\Gamma^{(T)\alpha} = d\theta^\alpha. \quad (51)$$

Подводя итог, мы имеем в качестве меры деформации

$$\begin{aligned} e_i^\alpha &= \partial_i \xi^\alpha + \Gamma_i^{(T)\alpha}, \\ F^{(T)\alpha} &= d\Gamma^{(T)\alpha} = d\theta^\alpha. \end{aligned} \quad (52)$$

Если, в линейном приближени, мы сравним эти меры с мерами континуума Коссера, то найдем, что в обобщенном континууме Коссера

$$\begin{aligned} e_i^{\alpha} &\to \beta_{ij}\ (distorsion), \\ \xi^{\alpha} &\to u_i\ (displacement), \\ \Gamma^{(T)\alpha} &\to \omega_{ij}\ (!) \\ F_{ij}^{(T)\alpha} &\to k_{kji}\ (contortion). \end{aligned} \tag{53}$$

Здесь $F_{ij}^{(T)\alpha} \approx a_{ijk}$ прдставляет плотность дислокаций (torsion). Следовательно, представляет соотношения Найа

$$K_{ijk} = -\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - \alpha_{kij} = -K_{ikj}. \tag{54}$$

и вторую фундаментальную меру деформации теории дислокаций с 9-ю независимыми компоненами соответствующими конторсии континуума Коссерра.

Тем не менее, мы видим что 3 компоненты вращения Коссера, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ соответствуют 9-ти антисимметрчным компонентам (трансляционного калибровочного) потенциала $\Gamma_i^{(T)\alpha}$.

Дисторсия же представляется 9-ю независимыми компонентами напряжения.

Произвольно заданной пластической дисторсии соответствует плотность дислокаций.

Упругая дисторсия определяет искажения тела, которые обеспечивают его непрерывность при данной плотности дислокаций.

По отдельности они не удовлетворяют условию совместности и для их обозначения используется термин "несовместная упрукгая"и "несовместная пластическая"дисторсии.

Определим основные переменные используемые в геометрической теории дефектов.

В каждой точке мы имеем локальный базис из n линейно независимых векторов $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i$ и дуальный базис $\theta^\beta = \theta_j^\beta dx^j$, 1-форму связности $\omega_\alpha^\beta = \omega_{i\alpha}^\beta dx^i$.

Определим 2-форму кручения

$$\Theta^\alpha := \mathcal{D}\theta^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta. \tag{55}$$

и 2-форму кривизны

$$\Omega_\alpha^\beta := d\omega_\alpha^\beta + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\gamma. \tag{56}$$

Например, если была введена дисклинация посредством разрезания материала вдоль некоторой полуплоскости, вставки в обрзовавшуюся прорезь клина и последующей склейки берегов разреза, то каждая из точек, превоначально находившаяся на поверхности разреза, будет иметь два образа в деле с дисклинацией с одними и теми же координатами x_α. Аналогичная ситуация имеет место для каждой точки тела в случае непрерывного распределения дефектов.

Если дефекты были созданы посредством деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками, отстоящими друг от друга на dx_α определится формулой $ds^2 = (\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta})dx_\alpha dx_\beta$, причем тензор $\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$ играющий роль метрического тензора, будет определять в кристалле риманову метрику с неравным нулю тензором кривизны. Кроме того как будет видно из дальнейшего, тензор кручения также будет отличен от нуля. Таким образом кристаллу соответствует Риманово пространство с кручением, причем исходному идеальному кристаллу можно сопоставить касательное к нему в каждой его точке пространство.

Локально RC-пространство евклидово (локальный репер можно выбрать ортонормированный, компоненты связности, в некоторой точке, можно обратить в нуль) следовательно для каждой точки M, существуют координаты x^i и ортонормированный кобазис θ^α в окрестности M, такие что

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= \delta_i^\alpha dx^i \\ \omega_\alpha^\beta &= 0 \end{aligned} \tag{57}$$

- в точке P. Где ω_α^β 1-форма связности относительно кобазиса θ^α.

Выражение (57) представляет в RC-пространстве, неголономный аналог голономных Римановых нормальных координат в Римановом простаранстве.

Требование локальной евклидовости естественно, так как в пренебрежении релятивистскими эффектами метрика локального наблюдателя всегда является евклидовой. Для последней существует декартова система координат.

Если в начальной конфигурации тело было бездислокационным а в конечной, имеется дислокация то деформационное отображение имеет особенность. Наличие дислокации требует создания несовместной деформации. Старая система координат уже не может служить в качестве системы координат во всем теле. В месте разреза (ядра дислокации) векторное поле смещений не существует, что говорит о нетривиальной топологии базы. Эта нетривиальная топология, вместе с дальндействующим полем дилокации сказывается на рассеяние фононов и электронов.

Существуют три частных случая пространства Римана-Картана.

Рассмотрим случай когда среда не обладает дислокациями, но существуют дефекты в спиновой структуре - континуум Коссера. В этом случае тензор кривизны отличен от нуля, а тензор кручения нулевой.

В силу равенства нулю тензора кручения, символы Кристофеля симметричны, и существует связность согласованая с метрикой - метрическая связность.

Как было паказано, условием метричности связно-

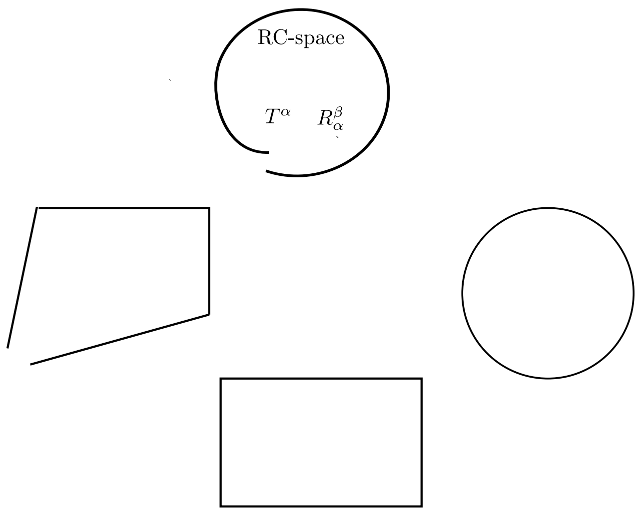

Рис. 5: Пространство Римана-Картана.

сти является

- RC - пространство.

Из этого условия находим симметричную связнсость

Равенство нулю тензора кривизны эквивалентно условиям совместности деформации Сен-Венана.

Однозначность не однозначность, выбор системы координат.

Если дислокации были созданы посредством деформации , то расстояние между двумя бесконечно близкими точками отстоящими друг от друга на , будет определятся формулой , причем тензор , играющий роль метрического тензора, будет определять в кристалле риманову метирку с неравным нулю тензором кручения, и как будет видно, неравным нулю тензором кривизны.

Таким образом имеем простарнство Римана-Картана. Локально RC-пространство Евклидово, следовательно для каждой точки P, существую координаты и ортонормированный кобазис в окрестности , такие что

В калибровочных моделях дислкаций, основанных на группе трансляций или на полупрямом произведении группы вращений на группу трансляций, в качестве назависимых переменных обычно выбираются дисторсия и поле смещений.

Из нижнего равенства в (57) видно, что при локальных трансляциях поле смещенй посто сдвигается, поэтому всегда можно зафиксировать инвариантность относительно локальных трансляций таким образом, что поле смещений представляет собой калибровочный параметр локальных трансляций, и в калибровочно инвариантных моделях физические наблюдаемые от него не зависят.

Математическим объектом, который описывает все эти свойства материи является пространство Риамана-Картана.

В постранстве Римана-Картана, по определению существует связность согласоанная с метрикой

$$\nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \Gamma^s_{ml} g_{sk} - \Gamma^s_{kl} g_{ms}. \qquad (58)$$

Обозначим

$$\Gamma_{mkl} = \Gamma^s_{kl} g_{ms}. \qquad (59)$$

Запишем еще раз условие (59

Действительно, пространств римана картана локально евклидово это значит что в касательном пространстве можно вобрать евклидову метрику.

Тензор кривизны. Действиетльно, параллельный транспорт вектора (тензора) в общем зависит от пути вдоль которого он переносится. Это значит, что если тензор переносится по замкнутому контуру, результирующий тензор может отличатся от начального. Тот факт, что результирующий вектор

На дифференцируемом многообразии, мы можем ввсести линейную свзность, компоненты которой обозначаются . Связность позволяет выполнить параллельный перенос тенозров, в частности векторов на многообразии.

Отличный от нуля тензор кривизны (нетривиальная метрика) соответствует

Будем обозначать малыми латинскими координатные (голономные) индексы.

При параллельном перенесении ветора вдоль его координаты изменятются так

(60)

Основываясь на этой формуле, пакажем, что неисчезающее кручение

(61)

приводит к незамкнутости геодезического параллелограмма. Здесь и в дальнейшем для антисимметризации принято обозначение , для симметризации . Параллелограмм замкнут только при малых трансляциях.

В ОТО, связность опредеяется с помощью симметричных символов кристофеля , где . Другими слвами кручение нулевое.

Поверхности с кручением лучше описываются методом подвижного репера $frameformalism.$

В каждой точке мы имеем базис из n линейно независимых вектров и сопряженный базис форм , называемый корепером, с внешнее произведение обозначается .
Рис.

В каждой точке дано два векторных поля и . Из точки параллельно переносятся векторы и вдоль и соответственно, в результате получаются векторы и . Если кручение присутствует образованный параллелограмм не замкнут. Мерой незамкнутости служит вектор .

Будем обозначать векторы неголономного базиса греческими буквами .

Связность определится как 1-форма , и четыре формы , мы можем определить ковариантную внешнюю производную в соответствии с

$$Dw^A := dw^A + \rho_{B^A \alpha}{}_\beta \Gamma_\alpha^\beta \wedge w^B. \tag{62}$$

Сдесь коэффициенты $\rho_{B^A \alpha}{}_\beta$ описывают поведение w^A при линейных преобразовнаиях, и $\wedge$ означает внешнее произведение.

Тогда 2-форма кручения определится как

$$T^\alpha := D\vartheta^\alpha = d\vartheta^\alpha + \Gamma_{\beta^\alpha} \wedge \vartheta^\beta. \tag{63}$$

Если выбран голономный (координатный) базис, тогда

$$d\vartheta^\alpha = 0. \tag{64}$$

и определение (63) совпадает с (62). Из (63) можно видеть что T^α это вид поля обусловленный потенциалом ϑ^α.

Так как мы ввели связность , мы можем определить в удобной форме RC-кривизну:

$$R_\alpha^\beta := d\Gamma_\alpha^\beta + \Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma. \tag{65}$$

Если мы продифференцируем (63) и (65). Мы получим прямо первое и второе тождества Бианки:

$$\begin{aligned} DT^\alpha &= R_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \\ DR_\alpha^\beta &= 0. \end{aligned} \tag{66}$$

Отсюда можно видеть как тесно связаны кручение и кривизна. Более того, ясно, что кручение также как и кривизна связаны с процессом параллельного перенесения на многообразии.

Cartan circuit: Translation and rotation misfits.

Так как в приложениях важную роль играет метрика, мы введем, хотя на данном этапе в этом нет необходимости, метрику $\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{g}_{ji}$ которая определяет расстояния и углы.

Мы полагаем, что связность совместима с метрикой, т.е коэффициенты неметричности исчезают

$$Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta} = 0. \tag{67}$$

Пространства в которых выполняется это уловие называются пространствами Римана-Картана (RC-space).

Мы можем решить (67) относительно симметричной части (неголономной) связности:

$$\Gamma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2} dg_{\alpha\beta}. \tag{68}$$

Далее, мы выберем отронормальный ко-базис. Это может быть сделано при любых $n > 1$.

В соответствии с (68), мы найдем исчезающую часть неголономной связности.

Теперь мы готовы дать характеристику пространству Римана-Картана, так как это сделал Картан.

Вывод. Мы начали (в первой главе) и подвели черту (тут) с одними теми же формулами с той лишь разницей, что теперь мы имеем представление о нелокальной нелинейной деформации и о нетривиальных топологических характеристиках кристалла. С следующем разделе мы очень кратко перечислим экспериментально наблюдаемые факты касающиеся топологии кристалла.