0.1 Расслоенные пространства.

0.1.1 Расслоения общего вида.

Мы видели, что локально - в касательном пространстве, каждое многообразие устроено как евклидово пространство. Учитывая же отклонение соседних точек от касательной плоскости, т.е. кривизну многообразия некоторой области, на основе второй квадратичной формы и экспоненциального отображения в мы определили поправки к градиентной деформации в направлении главных кривизн, т.е. рассмотрели деформацию нелокально. Было также показано, что для существованя призводной Ли векторное поле не обязано существовать на всем многообразии, достаточто лишь его гладкости в некоторой области. Если же удается найти имнтегральные кривые векторного поля то методом переноса Ли мы можем сравнивать векторы приложенные в любых точках на интегральной кривой - это уже глобальный, безкоординатный анализ. Безкоординатный потому, что используется определение векторов не зависящее от координат. Но так как группа Ли является также и многообразием групповая операция может быть записана в координтной форме, и следовательно производная Ли может быть вычислена явно.

Возможен и другой подход глобальному анализу многообразий. С целью установления параллельности векторов возможно определение их переноса не только вдоль интегральной кривой, но так же и вдоль произвольного пути на многообразии. Это существенно отличает эти два подхода к определению, всеже, единых геометрических объектов.

Определим основной объект на котором разворачивается геометртия Римана-Картана - расслоение.

Известно, что прямое произведение двух дифференцируемых многообразий также является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой, которая определяется дифференцируемыи структурами сомножителей.

Обобщим понятие прямого произведения.

Определение 0.1.1 Расслоением называется четветка $\mathbb{E}(\mathbb{M},\pi,\mathbb{F})$, где $\mathbb{E},\mathbb{M},\mathbb{F}$ - многообразия а $\pi:\ \mathbb{E}\to\mathbb{M}$ - диффердцируемое отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:
1) каждая точка $x\in\mathbb{M}$ имеет окрестность $\mathbb{U}_x$ такую, что существует диффеоморфизм $\chi:\pi^{-1}(\mathbb{U}_x\to\mathbb{U}_x\times\mathbb{F})$ (локальная тривиальность);
2) композиция отображений $\pi\circ\chi^{-1}:\ \mathbb{U}_x\times\mathbb{F}\to\mathbb{M}$ есть проекция на первый сомножитель $(y,v)\mapsto y$ для всех $y\in\mathbb{U}_x$ и $v\in\mathbb{F}$.

Многообразие $\mathbb{E}$ называется пространством расслоения, $\mathbb{M}$ - базой расслоения, $\mathbb{F}$ типичным слоем и π - проекцией, χ - сечением.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}\supset\pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \arrow[r, "\chi"] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{U}_x\times\mathbb{F} \arrow[d, "pr=\pi\circ\chi^{-1}"] \\
 & \mathbb{U}_x
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Расслоения общего вида.

Множество сечений расслоения $\mathbb{E}$ обозначим $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$.

Поскольку отображение χ в условии 1) является диффеоморфизмом, то

$$\mathrm{dim}\mathbb{E}=\mathrm{dim}\mathbb{M}+\mathrm{dim}\mathbb{F}$$

Расслоение также называется расслоенным пространством и обозначается $\mathbb{E}\to\mathbb{M}$, или, для краткости просто $\mathbb{E}$.

Считается, что проекция π является дифференцируемым отображением на базу $\mathbb{M}$, т.е. сюръективным.

Поскольку отображение π непрерывно, то согласно теореме (...) прообраз $\pi^{-1}(x)$ является замкнутым подмногообразием в $\mathbb{E}$, которе называется *слоем* над точкой базы $x\in\mathbb{M}$.

Замечание. Атласы заданные на базе и типичном слое, определяют атлас на пространстве раслоения в силу локальной тривиальности расслоения. Тем самым первое условие в опредлении расслоени является достаточным для того, чтобы дифференцируемые структуры на трех многообразиях $\mathbb{E}$, $\mathbb{M}$ и $\mathbb{F}$ были согласованы между собой. Второе требование является условием коммутативности диаграммы (рис.)

В приведенной диаграмме окрестность $\mathbb{U}_x$ нельзя заменить на все многообразие $\mathbb{M}$, так как отображение χ определено локально.

Определение 0.1.2 Дифференцируемое отображение $\mathbb{M}\ \xrightarrow{\sigma}\ \mathbb{E}$ нзывается *сечением* или *глобальным сечением* расслоения $\mathbb{E}\ \xrightarrow{\pi}\ \mathbb{M}$, если $\pi\circ\sigma=\mathrm{id}(\mathbb{M})$. Аналогичным образом, дифференцируемое отображение $\mathbb{U}\ \xrightarrow{\sigma}\ \mathbb{E}$, где $\mathbb{U}$ - открытое подмножество базы $\mathbb{M}$, называется локальным сечением расслоения $\mathbb{E}\ \xrightarrow{\pi}\ \mathbb{M}$, елси $\pi\circ\sigma=\beth(\mathbb{U})$. Где id обозначает тожественное отображение.

Локальные сечения существуют у любого расслоения. *Поэтому мы и говорим что каждое многообразие локально устроено как евклидово пространство.* Евклидово пространство было нами определено как пямое произведение (т.е. тривиальное расслоение) числовых прямых. Но глобальная структура расслоения может быть нетривиальной, глобальные сечения расслоений сущетсвуют далеко не всегда.

Рассмотрим два расслоения над $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$ с одним и тем же слоем $\mathbb{F}$, являющимся отрезком $[a, b]$ (точка a отождествляется с a', b - с b').
Рис.

Это обычное кольцо (ограниченный цилиндр) и лента Мебиуса (кольцо перекрученное один раз). Их локальные структуры одинаковы, в то время как глобальные явно различаются. Т.е. *задание базы не определяет расслоение однозначно*.

Требуется указать еще, каким образом различные части расслоения (порции расслоения над различными локальными окрестностями) "склеиваются"между собой.

Примером расслоения может служить множество $\mathbb{P}$, на котором задано отношение эквиваленоcти $\sim$. (см(...)). В этом случае слой образован точками, эквивалентными друг другу, базой является фактормножество $\mathbb{P}/\sim$, а точками базы - классы эквивалентности.

0.1.2 Векторное расслоение.

Как было выяснено в (пар(...)), в каждой точке многообразия M существует набор касательноых векторов, образующих линейное пространство $L_x(\mathbb{M})$.

Определение 0.1.3 Дифференцируемое многообразие $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ называется *векторным* расслоением с базой $\mathbb{M}$, проекцией π и типичным слоем $\mathbb{V}$, где $\mathbb{M}$ - дифференцируемое многообразие и $\mathbb{V} \simeq \mathbb{R}^n$ - векторное пространство.

Проекция π - является гладким сюрьективным отображением $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$.

При этом требуется, чтобы для любого атласа $\mathbb{M} = \cup_k \mathbb{U}_k$ существовали отображения χ_k, удовлетворяющие следующим условиям:

1) Отображение χ_k есть диффеоморфизм $\chi_k : \pi^{-1}(\mathbb{U}_k) \to \mathbb{U}_k \times \mathbb{V}$ такой, что $\pi \circ \chi_k^{-1}(x, v) = x$ для всех точек $x \in \mathbb{U}$ и $v \in \mathbb{V}$.

2) Сужение отображения χ_k на каждый слой $\chi_{k,x} : \pi^{-1}(x) \to \mathbb{V}$ есть гомоморфизм векторынх пространств для всех $x \in \mathbb{U}^k$. При этом, если $x \in \mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_m$, то отображение

$$f_{km}(x) = \chi_{m,x}\chi_{k,x}^{-1} : \mathbb{V} \to \mathbb{V},$$

является автоморфизмом, т.е. $f_{km}(x) \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$.

Другими словами, это значит что слой векторного расслоения $\pi^{-1}(x)$ в каждой точке $x \in \mathbb{M}$, сам является векторным пространством, гомоморфным типичному слою, а в областях пересечения карт допускаются автоморфизмы, то есть линейные отображения $\mathbb{V}$ на себя. С учетом свойства 1) получаем,

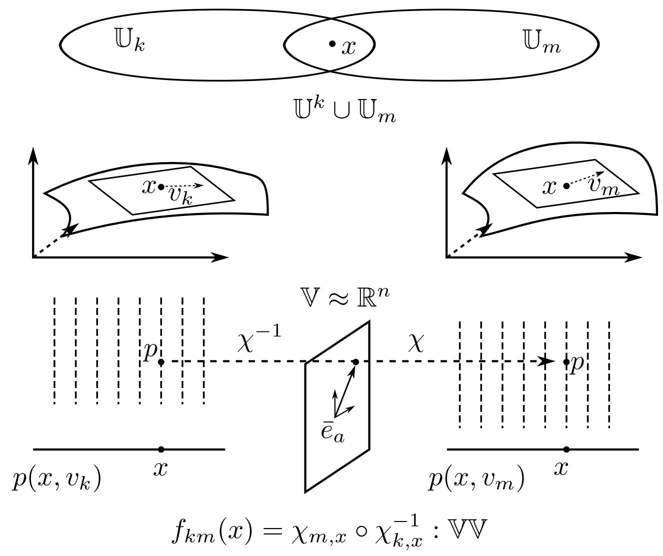

Рис. 2: Векторное расслоение.

что каждый слой изоморфен вакторному простарнству, $\pi^{-1}(x) \simeq \mathbb{V}$. В условии 2) гомомрфизм можно заменить на гомеоморфизм и не требовать изначально наличия структры векторного пространства в слое $\pi^{-1}(x)$. Гомеоморфизма достаточно для переноса структуры векторного пространства из $\mathbb{V}$ на слой $\pi^{-1}(x)$, при этом каждый слой будет, конечно, изоморфен $\mathbb{V}$.

3) Если $\mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_m$, то отображение $f_{ij}(x)$ является гладким.

Пусть $p \in \pi^{-1}(x)$ - некоторая точка векторного расслоения $\mathbb{E}$ из слоя над $x \in \mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_m$. Тогда $\chi_k(p) = (x, v_k)$ и $\chi_m(p) = (x, v_m)$. Следовательно,

$$p = \chi_k^{-1}(x, v_k) = \chi_m^{-1}(x, v_m).$$

Зафиксируем базис $\hat{e}_a, a = 1, ..., n$ в векторном пространстве $\mathbb{V}$ и разложим по нему векторы $v_k = v_k^a \hat{e}_a$ и $v_m = v_m^a \hat{e}_a$. Тогда из условия 2) следует равенство

$$v_m^a = v_k^b f_{kmb}^a,$$

где $f_{km}(x) = \{f_{kmb}^a(x)\} \in \mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$

Это свойство 3), говорит о том, что автоморфизмы задаются матрицей $\mathbb{GL}(n, \mathbb{R})$, элементы которогй гладко зависят от координат. Поэтому в определении векторного расслоения был выбран атлас вместо окрестности точки $x \in \mathbb{M}$ как в определении расслоения общего вида.

Набор отображений $\{f_{km}\}$ называется *функциями перехода*. Отображения χ_k однозначно определяют функции перехода.

Если задано два векторных расслоения с однинаковой базой и функциями перхода, то они диффеоморфны между собой.

При задании расслоения функции перехода должны удовлетворять очевидным, необходимым

условиям совместности:
1) для $x \in \mathbb{U}_k,\ f_{kk} = \mathrm{id}$;
2) для $x \in \mathbb{U}_k \cup \mathbb{U}_m \cup \mathbb{U}_n \neq \oslash,\ f_{km} f_{kn} f_{nm} = \mathrm{id}$.

Если в векторном пространстве $\mathbb{V}, \mathrm{dim}\mathbb{V} = n$, зафиксирован базис $\{\hat{e}^a\}, a = 1, ..., n$, то его можно отождествить с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$. После этого топология и дифференцируемая структура евклидова простарнства с помощью отображений $\{\chi_i\}$ естественным образом переносятся на расслоение $\mathbb{E}$, превращая его в многообразие. Фактически, требование дифференцируемости отображений χ_k означает, что диференцируемая структура на простарнстве расслоения $\mathbb{E}$ согдасована с дифференцируемой структурой, индуцированной отобарженими χ_k.

Если и исследуемый объект является эвклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, например плоскостью (рис.), то касательное пространство отождествляется с базой, и имеем эвклидово пространство, которое является прямым произведением. В этом случае компоненты f_{km} не зависят от точки на базе $x \in \mathbb{M}$ (и являются косинусами углов между векторами старого и нового базисов).

0.1.3 Касательное расслоение.

Векторное расслоение $\mathbb{E}$ называется касательным расслоением если в каждом слое $\mathbb{V}$ введена структура евклидового пространства $\mathbb{R}^n$.

Определение 0.1.4 Касательное расслоение $\mathbb{L}(\mathbb{M})$ является векторным расслоением $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{R}^n)$ с базой $\mathbb{M}, \mathrm{dim}\mathbb{M} = n$, типичным слоем $\mathbb{R}^n$ и проэкцией $\pi : (x, X) \to x$, где $X \in L_x\mathbb{M}$.

Замечание. Для касательного расслоения размерности базы и типичного слоя совпадают.

$$\mathrm{dim}\mathbb{M} = \mathrm{dim}\mathbb{R}^n = n.$$

В касательном пространстве существует естественный способ гладко сопоставить каждому преобразованию координат автоморифизм касательного пространства. А именно, каждому преобразованию координат, соответствует тожественное преобразование касательного пространства, $f_{km} = id(L_x M)$ для всех $x \in \mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_m$. Если в касательном простаранстве в точке $x \in \mathbb{M}$ (слое над x) выбран координатный (голономный) базис ∂_α, то при преобразовании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби, а голономный базис касательного пространства - на обратную матрицу Якоби. Поэтому сам вектор остается без изменений. Если вектор касательного простарнства рассматривается как набор компонент $\{X^\alpha\}$, считая, что базис векторного пространства фиксирован, то при преобровании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби $\partial_\alpha x^{\alpha'}$ справа. Тогда функциями перехода являютя матрицы Якоби. Обе точки зрения на функции перехода допустимы.

0.2 Связность на векторном расслоении.

0.2.1 Координатное определение.

Если мы в декартовой системе координат дифференцируем фукнцию - получаем снова функцию, дифференцируем векторное поле - получаем снова вектрное поле, дифференцируем тензорное поле - получаем снова тензорное поле. Это следствие того, матрицы связывающие f_{km} базисные векторы евклидовых пространств не зависят от точки на базе.

Сечениями векторного раслоения являются тензорные поля (ко-, или контравариантные, или и то идругое) то желательно, что бы при диффеенцировании мы получали тензорые поля.

Сечение любого прямого произведения, (каковым является $\mathbb{R}^n$) можно дифференцировать вдоль любого векторного поля $v(x)$ базы, и врезультате мы получим снова сечение.

Рассмотрим случай корда сечением является функция f:
Рис.

$$\partial_v \chi_m = (x, \partial_v f_m) = (x, (\partial_v \mathrm{f_{km}} f_k)) \tag{1}$$

Рассмотрим выражение

$$\partial_v (\mathrm{f}_{km} f_k) = (\partial_v \mathrm{f}_{km}) f_k - \mathrm{f}_{km} (\partial_v f_k) \tag{2}$$

-где $\partial_v f = df(v)$. Знак минус обусловлен ковариантным законом преобразования, и на для дальнейшего чтения это не существенно.

В силу независимости f_{km} от точки на базе первое слагаемое в (3.2) обращаетя в нуль.

Выражение df есть векторозначная 1-форма вида $(df^1, ..., df^n)$; ее значение на векторном поле v (производная по направлению) - гладкая вектор-функция $((df^1, ..., df^n))$. А ее график (т.е. сечение $(x, df(v))$) и будет производной $(x, \partial_v f)$ исходного сечения $(x, f(x))$ вдоль v.

Но если расслоение не тривиально, то дифференцирование его сечения, χ, не даст снова сечения, в силу присутствия первого члена в (3.2), который нарушает закон преобразования векторных (тензорных) величин.

Скомпенсировать, появившиеся в следствие криволинейности системы координат, члены $(\partial_v \mathrm{f}_{kk'}) f_k$

можно включив в определение производной по направлению векторнго поля дополнительный член $\Gamma_{vk} f_k$.

Определение 0.2.1 Ковариантной производной вдоль векторного поля v один раз ковариантного терзора f_k называется выражение:

$$\nabla_v f_k = \partial_v f_k - \Gamma_{v;k} f_k \tag{3}$$

- где $\Gamma_{k;v}$ - некоторая матрица(здесь суммирование по индексу k не производится).

Если мы хотим записать (3.3) в компонентах, то у коэффициентов Γ_{vk} появится один дополнительный ковариантный иднекс. Он появляется в результате разложения формы связности(см.ниже) по базису dx^i, так, что $\Gamma^j_{ik} f_j dx^i$. Тогда

$$\nabla_i f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \Gamma^j_{ik} f_j. \tag{4}$$

- это ковариантная производная. Дифференцирование производится по переменным с индеском i,

А действие связности, эквивалентно действию дифференциала - отклик компонент тензора f_k на элементарное приращение координаты dx^i.

$$\nabla f_k = df_k - \Gamma^j_{ik} f_j x^i \tag{5}$$

Обычно $\nabla_v T$ - означает производную тензора по направлению, задаваемому вектором v с компонентами v^i, а $\nabla_i T$ - производная по направлению, задаваемому базисным вектором $\frac{\partial}{\partial x^i}$

Найдем условия которым должна удовлетворять матрица Γ_{vk} (своя для каждой координатной окрестности).

Сначала вспомним, что при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, ..., x^i)$, векторы преобразуются так:

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \tag{6}$$

А ковекторы так:

$$df_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} df_{i'} \tag{7}$$

Матрицу $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ обозначим $\mathtt{f}_{kk'}$.

Распишем определение $\nabla_v f_k$ заменяя i на k.

$$\begin{gathered}\nabla_v f_k = \mathtt{f}_{\mathtt{kk'}} \nabla'_v \mathtt{f}^{-1}_{kk'} f_{k'} = \\ \mathtt{f}_{kk'}[\partial_v(\mathtt{f}^{-1}_{kk'} f_{k'}) - \Gamma_{vk'} \mathtt{f}^{-1}_{kk'} f_{k'}] = \\ \partial_v f_{k'} + f_{k'} \mathtt{f}_{kk'} \partial_v f^{-1}_{kk'} - f_{k'} \mathtt{f}_{kk'} \Gamma_{vk'} \mathtt{f}^{-1}_{kk'}.\end{gathered} \tag{8}$$

Так как в каждой точке, многообразие, локально устроено одниаково (плоское) то $\partial_v f_{k'} = \partial_v f_k$

Сравнивая теперь (3.8) с (3.3) находим

$$\Gamma_{vk} = \mathtt{f}_{kk'} \partial_v f^{-1}_{kk'} + \mathtt{f}_{kk'} \Gamma_{vk'} \mathtt{f}^{-1}_{kk'}. \tag{9}$$

Аналогично запишем для вектора

Определение 0.2.2 Ковариантной производной вдоль векторного поля v один раз контравариантного терзора ξ^k называется выражение:

$$\nabla_v \xi^k = \partial_v \xi^k + \Gamma^k_v \xi^k \tag{10}$$

- где Γ^k_v - некоторая матрица(здесь суммирование по индексу k не производится).

$$\begin{gathered}\nabla'_v \xi^{k'} = \mathtt{f}_{\mathtt{kk'}} \nabla_v \mathtt{f}^{-1}_{kk'} \xi^k = \\ \mathtt{f}_{kk'}[\partial_v(\mathtt{f}^{-1}_{kk'} \xi^k) + \Gamma^k_v \mathtt{f}^{-1}_{kk'} \xi^k] = \\ \partial_v \xi^k + \xi^k \mathtt{f}_{kk'} \partial_v f^{-1}_{kk'} + \xi^k \mathtt{f}_{kk'} \Gamma^k_v \mathtt{f}^{-1}_{kk'}.\end{gathered} \tag{11}$$

Сравнивая (3.11) с (3.10) находим

$$\Gamma^{k'}_v = \mathtt{f}_{kk'} \partial_v f^{-1}_{kk'} + \mathtt{f}_{kk'} \Gamma^k_v \mathtt{f}^{-1}_{kk'}. \tag{12}$$

Или в компнентнах

$$\Gamma^{k'}_{ij} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial k'}{\partial k} \Gamma^k_{ij}. \tag{13}$$

- эти коэффициенты ведут себя как компоненты тензора только при линейных преобразованиях.

Две связности ∇' и ∇ связанные как выше называются калибровочно эквивалентными.

Матрицы Γ зависят от точки на базе. Поэтому в общем случае они являются матричными функциями. Итак, если удается найти матричные функции Γ^k_v, удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля v. Тогда мы говорим, что на $\mathbb{M}$ задана связность.

0.2.2 Безкоординатное определение.

Чтобы для каждого векторного поля не записывать каждый раз новую матричную функцию, определим на каждой окрестности U_k, матричную дифференциальную форму (ω_k так, что

$$\Gamma^k_v = \omega_k(v). \tag{14}$$

для любых пересескающихся $\mathbb{U}_k$ и $\mathbb{U}_m$.

Тогда мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля.

Форма ω_k называется локальной формой связности.

Множеоство форм ω_k, $k = 1, 2, ..., m, ...$ заданных на касательном к M в точке x пространстве образует кокасательное пространство $\mathbb{T}^*_x(\mathbb{M})$. Обозначим его типичный слой $\Lambda_1(\mathbb{M})$.

Объединение всех кокасательных пространств образует кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(M)$.

Выберем в каджом слое кокасательного расслеония базис dx^i, $i = 1, ...n$, где n размерность многообразия $\mathbb{M}$.

И разложим по нему формы ω_k:

$$\omega_k = \sum_i \omega_{ik} dx^i. \tag{15}$$

Можно составить тензорное произведние расслоений

$$\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{E} \tag{16}$$

Тогда связность ∇ на векторном расслоении $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ можно определить как отображение:

$$\nabla : \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(M) \to \mathcal{V}_{\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{E}}(\mathbb{M}). \tag{17}$$

удовлетворяющее условиям
1) для любых сечений $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}(\mathbb{M})}$

$$\nabla(V_1 + V_2) = \nabla V_1 + \nabla V_2; \tag{18}$$

2) для произвольного сечения $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}(\mathbb{M})}$ и произвольной функции $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{M})$

$$\nabla(fV) = df \otimes V + f\nabla V. \tag{19}$$

- привило лейбница.

Выберем в каждом слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ расслоения $\mathbb{E}$ базис $e_k(x)$, этот базис называется репером.

Тогда сечение векторного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ в компонентах будет:

$$V = V^k(x) e_k \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}). \tag{20}$$

По определению, сечение $\nabla V \in \Lambda_1 \otimes \mathbb{V}$ представвляет собой 1-форму на $\mathbb{M}$ со значениями в векторном пространстве $\mathbb{V}$.

Сечение расслоения $\mathbb{T}^*(M) \otimes \mathbb{E}$ в компонентах будет

$$\nabla V = dx^i V_i^k(x) e_k. \tag{21}$$

Сечение расслоения $\mathbb{T}^*(M) \otimes \mathbb{E}$ обладает дополнительным ковариантным индексом сравнительно с сечением расслления $\mathbb{E}$.

Рассмотрм касательное векторное поле к базе $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда значение 1-формы ∇V на векторном поле X

$$\nabla_X V = \nabla V(X), \tag{22}$$

называется *ковариантной производной* векторного поля $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ вдоль касательного векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{X})$.

Очевидно, отображение (3.17) для векторов репера:

$$\nabla e_k = \omega_k^j \otimes e_j. \tag{23}$$

Раскладывая ω_k^j по базису dx^i, используя формулу (3.15), запишем действие связности на базисные векторы e_k

$$\nabla e_k = dx^i \otimes \omega_{ik}^j e_j \tag{24}$$

Определив действие связности на базисные вектора (3.23) запишем явное действие связности на произвольное векторное поле $V^k e_k$:

$$\begin{aligned} \nabla V^k e_k = \partial_i V^k dx^i \otimes e_k + V^j dx^i \otimes \omega_{ij}^k e_k = \\ dx^i(\partial_i V^k + V^j \omega_{ij}^k) \otimes e_k. \end{aligned} \tag{25}$$

Выражение в скобках - ковариантная производная. Отсюда видно, что действие связности эквивалентно действию операции взятия дифференциала d.

0.3 Аффинная связность.

Аффинной связностью называется связность на касательном расслоении. Определение связности на векторном раслоении без изменений переносится на касательное расслоение.

Суть дела в том, что на касательном расслоении может действовать не только группа $GL(n, \mathbb{R})$, но и более широкая группа $\tilde{G} = GL(n, \mathbb{R}) \times L(n)$, где $L(n)$- группа сдвигов $\mathbb{R}^n$, изоморфная $\mathbb{R}^n$. Связность в касательном расслоении, где каждый

Рассмотрим способ построения аффинной связности, основанный на свойствах аффинного пространства.

Основной конструкцией геометрии аффинной связности является *параллельное перенесение*.

Подобно тому как образцом для построения риманова простpрнства $\mathbb{V}_n$ служит евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ в криволинейных координатах, так теперь такуюже роль будет играть аффинное пространство A_n тоже в криволинейных координатах.

Итак, мы хотим отложить вектор ξ_0 заданныый его координатами ξ_0' в некоторой точке M_0 из другой точки $_1$.

Нужно установить как следует изменять ξ_0' вдоль пути $M_0 M_1$ чтобы они определяли прежний векор ξ_0.

Причем мы рассматриваем ход непрерывного изменения координат ξ_i на каждом бесконечно малом участке пути.

В криволинейных координатах простое свойоство

$$\xi = \xi^i \bar{e}_i \tag{26}$$

разложения векторов по базису теряется, однако в бесконечно малой окрестности в криволинейных координатах это свойство сохраняется.

Смещаясь из точки $M_0(x^i)$ в бесконечно близкую точку $M_1(x^i + \Delta x^i)$ мы находим вектор смещения $\vec{u}$ как приращение радиус вектора x точки $M_0(x^i)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_0 M_1} = x(x^i + \Delta x^i) - x(x^i). \tag{27}$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, замняем прарищение полным дифференциалом и получаем

$$\vec{u} \approx x_1 \Delta x^1 + ... + x_n \Delta x^n. \tag{28}$$

Это значит, что вектор смещения $\vec{u}$ в локальном репере $\{M_0, x_1, ..., x_n\}$ имеет координаты, равные приблизительно приращениям Δx^i.

Итак, для бесконечно малых смещений из точки M приращения криволинейных координат Δx^i снова выражают координаты вектора смещения $\vec{u}$, если эти последние вычислять в локальном репере в точке M, пренебрагая бесконечно малыми высшего порядка.

Пусть путь $M_0 M_1$ задан параметрически уравнениями

$$x^i = x^i(t), \ \ (i = 1, 2, ..., n), t_0 \le t \le t_1. \tag{29}$$

где $x^i(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции. В каждой точке $M(t)$ этого пути мы откладываем постоянный вектор ξ_0, координаты которого ξ^i, однако, меняются от точки к точке в виду изменения от точки к точке локального репера.

Таким образом, координаты ξ^i зависят от t:

$$\xi^i = \xi^i(t) \tag{30}$$

и мы хотим выяснить, по какому закону будут менятся эти функции хотя бы на бесконенчно малом участке пути.

Так как функции $x^i(t)$ - непрерывно дифференцируемы то вдоль пути векторы локального репера $x_i(x^1, ..., x^n)$, а значит и ξ^i являются непрерывно дифференцируемыми функциями t.

Относя вектор ξ_0 к локальному реперу в точке $M(t)$, пишем:

$$\xi_0 = \xi^i(t) x_i(x^1, ..., x^n). \tag{31}$$

Здесь имеется ввиду, что аргументы x^n сами зависят от t согласно параметрическим уравнениям пути.

Дифференцируя по t почленно и учитывая, что $\xi_0 = \mathrm{const}$ получим:

$$0 = d\xi^i x_i + \xi^i dx_i \tag{32}$$

Разложим векторы $d\xi_i$ по векторам локального репера.

По формуле полного дифференциала

$$dx_i(x^1, ..., x^n) = x_{ij} dx^j \tag{33}$$

где

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 x(x^1, ..., x^n)}{\partial x^i \partial x^j} \tag{34}$$

Через каждую точку M_0 проходит одна и только одна координатная линия x^1, именно, если $x^2, ..., x^n$ закрепить на значениях, которые они имеют в точке M_0. Частная производная $\frac{\partial x}{\partial x^1}$ дает касательный вектор к координатной линии. Так что через каждую точку проходят n координатных линий с касательными векторами $x_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}$. Эти векторы принимются в качестве аффинного репера $\{M_0, x_1, ..., x_n\}$. Затем они дифференцируются и получается (3.34).

Векторы x_{ij}, вполне определенные *для каждой точки некоторй области* $\mathbb{U}$ (а не только вдоль рассматриваемого пути), можно разложить по векторам локального репера x_i в этой точке:

$$x_{ij} = \Gamma^k_{ij} x_k \tag{35}$$

Через Γ^k_{ij} обозначены коэффициенты разложения; по k происходит суммирование.

Как видно символы Кристофеля появляются в результате зависимости векторов локального базиса от точки на $\mathbb{M}$, и описывают скорость изменения локальных базисных векторов.

Если базис постоянен на $\mathbb{M}$, т.е. $x_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} = e_i$, то $\Gamma^k_{ij} = 0$.

Коэффициенты аффинной связности Γ^k_{ij} называются символами Кристофеля.

Из равенства $x_{ij} = x_{ji}$ следует $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$.

Конечно Γ^i_{ij} зависят от точки M где производится разложение (3.35), так что

$$\Gamma^k_{ij}(M) = \Gamma^k_{ij}(x^1, ..., x^n). \tag{36}$$

Вставляя разложение (3.35) в (3.33), получаем:

$$dx_i = \Gamma^k_{ij} x_k dx^j \tag{37}$$

после чего (3.32) принимает вид

$$0 = d\xi^k x_k + \Gamma^k_{ij} x_k \xi^i dx^j. \tag{38}$$

В первом члене правой чсти мы изменили лишь обозначение индекса суммирования на k. Ввиду линейнойн независимост векторов x_k обращение в нуль их линейной комбинации означает обращение в нуль и всех ее коэффициентов; следовательно,

$$d\xi^k + \Gamma^k_{ij} \xi^i dx^j = 0, \tag{39}$$

Или, что тоже,

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij} \xi^j dx^i. \tag{40}$$

Это формула параллельного переноса вектора с координатами ξ^k из точки $M_0(x^i)$ в безконечно близкую точку $M_1(x^i + dx^i)$.

Следует отметить, что (3.40) выражает не приращения, а дифференциалы координат ξ^k при переходе из M_0 в $_1$ (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка).

Символы кристофеля не являются тензорами.

0.3.1 Абсолютный дифференциал в аффинной связности.

Как и в случае с производной Ли, для того, чтобы дифференцировать по направлению произвольное векторное (тензорне) поле необходимо уметь вычитать друг из друра тензоры относящиеся к различным (хотя и бесконечноблизким) точкам многообразия, т.е. необходимо уметь осуществлять параллельный перенос тензора на бесконечно малый вектор Δx^i.

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t) \tag{41}$$

Рис.

Причем в каждой точке этого пути задан вектор $\xi(t)$. Т.е. задано векторное поле, по крайней мере вдоль данного пути.

Переходя из данной точки пути t в его бесконечно близкую точку $t+dt$, мы находим в ней вектор поля с координатами

$$\xi^k(t+dt) \approx \xi^k(t) + d\xi^k(t). \tag{42}$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt, заменив приращения функций $\xi^k(t)$ их дифференциалами.

Однако для того чтобы оценить на сколько изменился вектор поля $\xi^k(t)$ при переходе из точки t в точку $t+dt$, иы не должны ориентироватся на дифференциалы его координат $d\xi^k(t)$, так как векторы ξ^k и $\xi^k + d\xi^k$ - это векторы, заданные в разных точках, именно в точках t и $t+dt$, а значит, отнесенные к разным локальным реперам.

При преобразовании координатной системы x^i эти локальные координатные реперы испытывают преобразования вида:

$$e_s = \frac{\partial x^i}{\partial x^s} e_i \tag{43}$$

где матрицы $\frac{\partial x^i}{\partial x^s}$ вычислены в разных точках и, следовательно, являются различными. Поэтому не имеет смысла сравнивать между собой векторы $\xi^k(t)$ и $\xi^k(t+dt)$, отнесенные к различно преобразующимися реперам.

Другое дело если мы предварительно перенесем параллельно вектор $\xi^k(t+dt)$ в туже точку t, в которой задан вектор $\xi^k(t)$. Тогда оба тензора будут заданы вобщей точке t, а значит отнесены к обощему локальному репреу.

Вычитание из превого вектора второго будет иметь инвариантный смысл и даст нам снова вектор в точке t. Главная линейную часть этого вектора называется *абсолютным дифференциалом* $\mathcal{D}\xi^k(t)$ вектора $\xi^k(t)$.

Обозначим через $\xi^k_{||}$ вектор $\xi^k(t+dt)$, параллельно перенесенный из точки $t+dt$ в точку t. Это значит, что обратно, $\xi_k(t+dt)$ получается параллельным переренеснием $\xi^k_{||}$ из точки t в точку $t+dt$.

Пользуясь формулой

$$d\xi^k = -\Gamma^k_{ij}\xi^j dx^i \tag{44}$$

можно записать

$$\xi^k(t+dt) \approx \xi^k_{||} - \Gamma^k_{ij}\xi^j_{||}dx^i \tag{45}$$

Тут стоит знак приближенного ревенства, так кк формула (3.44) дает лишь дифференциалы, а не приращения координат параллельно переносимого вектора, так что в равенстве допускается ошибка на бесконечно малые высшего порядка.

Как видно из (3.45), $\xi^k_{||}$ отличается от $\xi_k(t+dt)$, а следовательно, и от $\xi^k(t)$, на бесконечно малую величину. Поэтому с принятой степенью точности можно заменить $\xi^k_{||}$ через $\xi_k(t)$. Действительно правая часть множится еще на dx^k, так, что ошибка получается бесконечно малой высшего порядка. По той же причине можно заменить $\xi^k(t+dt)$ через $\xi^k(t) + d\xi^k(t)$.

Выражая теперь $\xi^k_{||}$ из (3.45), получаем

$$\xi^k_{||} \approx \xi^k(t) + d\xi^k(t) + \Gamma^k_{ij}\xi^j(t)dx^i. \tag{46}$$

Определение 0.3.1 Главная линейная часть разности $\xi^k_{||} - \xi^k(t)$ между вектором $\xi^k(t+dt)$ параллельно перенесенным из точки $t+dt$ в точку t и вектором $\xi^k(t)$ называется *абсолютным (ковариантным) дифференциалом*, и обозначаетя $\mathcal{D}\xi^k(t)$.

Очевидно $\mathcal{D}\xi_k$ совпадает с тем выражением, которое в (3.46) добавляется к $\xi^k(t)$.

Итак

$$\mathcal{D}\xi^k(t) = d\xi^k(t) + \Gamma^k_{ij}\xi^j(t)dx^i. \tag{47}$$

Для один раз ковариантного тензорного поля:

$$\mathcal{D}f_m(t) = df_m(t) - \Gamma^m_{sl}f_m(t)dx^i. \tag{48}$$

До сих пор мы рассматривали тензорное поле, заданное вдоль некоторого пути, и абсолютный дифференциал $\mathcal{D}\xi^k$ брали вдоль этого пути. Если векторное(тензорное) поле задано во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой n-мерной его области, то абсолютный дифференциал тензора можно брать вдоль любого пути в этой области. При этом, так как координаты вектора в данной координатной системе будут функциями точки

$$\xi^k = \xi^k(x^1, ..., x^n), \tag{49}$$

то

$$d\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} dx^i \tag{50}$$

И основаная формула (3.47) принимает вид

$$\mathcal{D}\xi^k = \nabla_i \xi^k dx^i, \tag{51}$$

где через $\nabla_i \xi^k$ обозначены коэффициенты при dx^i в правой части (3.47) после подстановки туда $d\xi^k$ из (3.50):

$$\nabla_i \xi^k = \frac{\partial}{\partial x^i}\xi^k + \Gamma^k_{ij}\xi^j. \tag{52}$$

Эти коэффициенты образуют тензор, имеющий один доополнительный ковариантный индекс сравнительно с тензором ξ^k (индекс дифференцирования по i).

Для один раз ковариантного тензорного поля:

$$\nabla_i f_m = \frac{\partial}{\partial x^s} f_m + \Gamma^m_{sl}\xi^l. \tag{53}$$

0.4 Геодезические.

Аналогом прямых на многообразии являются *геодезические кривые*.

Определение 0.4.1 Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор $\xi^i_0 (\neq 0)$, касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке M_0, остается к ней касательным при параллельном переносе вдоль нее. Т.е. вектор скорости переносится вдоль кривой с помощью параллельного переноса.

Это определение подразумевает на геодезической некоторой выделенной параметризации.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $\varphi^k = x^k(t)$, где t - параметр вдоль крвой. Скоростью мы назовем вектор $\frac{dx^k}{dt} = \xi^k$.

Если *касательный к кривой* вектор $\frac{dx^k}{dt} = \xi^k$ ковариантно постоянен вдоль кривой, то кривая называется геодезической для данной связности.

Прменим формулу параллельного перенесения к вектору $\frac{d\xi}{dt}$

$$0 = d\frac{dx^k}{dt} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^j}{dt}dx^i. \tag{54}$$

Разделм все на dt, приходим к уравнениям для геодезических

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} = 0. \tag{55}$$

Замечание. В уравнение входит только симметрческая (по нижним индексам) часть связности Γ.

Уравнение (3.55) описывает свободное движение частицы в искривленно пространстве. Величина $\frac{d^2x^k}{dt^2}$ аналогична ускорению (не является вектором), и "сила"действующая на частицу равна

$$-M\Gamma^k_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \tag{56}$$

где M - масса частицы. Таким образом, коэффициенты Γ высттупают в роли некоторого поля, которое заставляет частицу ускорятся (по отношению к выбранной системе координат).

Приведем еще один стиль записи уравнения геодезической, для этого напомним некоторые формулы приведенные выше:

$$\begin{gathered} d\xi^k + \Gamma^k_{ij}\xi^i dx^j = 0 \\ \mathcal{D}\xi^k = d\xi^k + \Gamma^k_{ij}\xi^j dx^j. \\ \mathcal{D}\xi^k = \nabla_i \xi^k dx^i \end{gathered} \tag{57}$$

Поскольку $\frac{d}{dt} = \xi^\alpha \partial_\alpha$ то можно записать

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = \nabla_\xi \xi = \xi(\partial_\alpha u^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\gamma}u^\gamma)\partial_\beta = 0. \tag{58}$$

или в компонентах

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma. \tag{59}$$

В уравнение входит производная по направлению $u_\alpha \partial_\alpha u^\beta = \ddot{x}^\alpha$.

Определение 0.4.2 Векторное поле $a(t)$, определенное вдоль произвольной кривой $x(t)$ на многообразии $\mathbb{M}$ с заданой связностью Γ,

$$a := \nabla_\xi \xi = (\ddot{x}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\dot{x}^\beta\dot{x}^\gamma)\partial_\alpha, \tag{60}$$

называется *ускорением кривой.*

0.5 Пространство Римана.

Определение 0.5.1 Многообразие $\mathbb{M}$, в котором задано поле метрического тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, ..., x^n), \tag{61}$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$Det|g_{ij}| \neq 0, \;\; g_{ij} = g_{ji}. \tag{62}$$

называется Риманым пространством $\mathbb{V}_n$.

Можно также сказать, что риманово пространство $\mathbb{V}_n$ - это многообразие $\mathbb{M}_n$, в котором в каждое касательное пространство $L_M\mathbb{M}$ внесена евклидова метрика.

Тензорное поле $g_{ij}(M)$, каждое касательное простарнство из аффинного $\mathbb{A}_n$ превращает в евклидово

$\mathbb{R}_n$, в вводя в нем скалярное произведение. Следовательно, евклидово простарнство можно рассматривать как частный случай риманова.

В евклидовом пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему (аффинную) в которой координаты метрического тензора станосятся константами:

$$g_{ij}(M) = \texttt{const}. \tag{63}$$

В произвольном Римановом пространстве в целом, этого сделать нельзя. Однако, по отдельности, в некоторой окрестности, возможно подобрать такие кориднаты x^i, чтобы в них g_{ij} были константами, тогда простарнство $\mathbb{V}_n$ называется локально евклидовым.

0.6 Тензор кручения.

Вернемся к формуле (3.13). Там первый член, очевидно, симметрчен по нижним индексам, следовательно, антисимметричная по этим индексам чать Γ ведет себя как тензор

Определение 0.6.1 Тензор с компонентами

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \tag{64}$$

называется тензором кручения.

В параграфе (...) мы рассматривали коммутатор векторных полей $[V, U]$. Аналогично можно рассмотреть альтенрацию вида $\nabla_V U - \nabla_U V$. Но в отличие от скобли Ли, где параллельный перенос выполялся вдоль интегральных кривых, при вычислении данного коммутатора, параллельный перенос выполяется вдоль геодезических.

Пусть в $\mathbf{R}^n$ задана метрическая связность. Для коэффициентов связности используем обозначения Γ^k_{ij}. Более точно, если $X_i = \partial_i$ локальный *координатный* базис векторных полей и x^i локальные координаты тогда

$$\nabla_i X_i = \Gamma^k_{ij} X_k \tag{65}$$

В декартовой системе координат $\nabla_V U$ является обыкновенной производной поля U по направлению поля V:

$$\nabla_V U = (V^i \partial_i U^k) X_k \tag{66}$$

Следовательно

$$\begin{gathered} \nabla_V U - \nabla_U V = \\ (V^i \partial_i U^k - U^i \partial_i V^k) X_k = [V, U] \end{gathered} \tag{67}$$

Из этого следует, что выражение $\nabla_V U - \nabla_U V$ является коммутатором векторных полей $[V, U]$.

В случае произвольной связности эти величины, вообще говоря, не равны, и их разность образует тензор типа $(1, 2)$:

$$\begin{aligned} T(V, U) &= \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U] \\ &= V^i(\partial_i U^k + \Gamma^k_{ij} U^j) X_k - U^i(\partial_i V^k + \Gamma^k_{ij} U^k) X_k \\ &\quad -(V^i \partial^i U^k - U^i \partial_i V^k) X_k \\ &= V^i U^j \Gamma^k_{ij} X_k - U^i V^j \Gamma^k_{ij} X_k \\ &= V^i U^j (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^i_{ji}) X_k \end{aligned} \tag{68}$$

.

Следовательно тензор кручения в локальных координатах:

$$\begin{aligned} T &= T^k_{ij} dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_k \\ &= (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}) dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_k. \end{aligned} \tag{69}$$

Определение 0.6.2 В *римановом* пространстве, *всегда* можно построить и притом единственным образом связность $\Gamma^k_{ij}(M)$, такую что *кручене равно нулю*.

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}.$$

Связность с нулевым тензором кручения называется симметричной связностью.

Итак, для соглассованной с метрикой связности

$$0 = \nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \Gamma^s_{mk} g_{sk} - \Gamma^s_{sk} g_{ms} \tag{70}$$

- ковариантная производная двухвалентного ковариантного тензора.

Обозначим

$$\Gamma_{mkl} = \Gamma^s_{kl} g_{ms}. \tag{71}$$

Запишем еще раз условие (3.70) выписав его трижды, циклически пересталяя индексы $m \to k \to l \to l \to m$.

$$\begin{aligned} \partial_l g_{mk} &= \Gamma_{kml} + \Gamma_{mkl}, \\ \partial_m g_{kl} &= \Gamma_{lkm} + \Gamma_{klm}, \\ \partial_k g_{lm} &= \Gamma_{mlk} + \Gamma_{lmk}. \end{aligned} \tag{72}$$

Сложим эти три уравнения со знаками $+, -, +$

$$\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{lm} - \partial_m g_{kl} = 2\Gamma_{m(lk)} + T_{klm} + T_{lmk}. \tag{73}$$

Отсюда можно выразить симметричную часть связности

$$\Gamma_{mlk} = \frac{1}{2}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl}) - \frac{1}{2}(T_{lmk} + T_{kml}). \tag{74}$$

Замечание. В формулу для симметричной части метрической связности входит не только метрика, но и тензор кручения.

Полная связность задается как сумма симметричной и антисимметричной частей, т.е. $\Gamma_{mlk} = \Gamma_m(lk) + \frac{1}{2}\Gamma_{mlk}$.

$$\begin{aligned}\Gamma_{mlk} = \frac{1}{2}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}) \\ -\frac{1}{2}(T_{lmk} + T_{kml} - T_{mlk}).\end{aligned} \tag{75}$$

Отсюда симметрическая связность

$$\Gamma^s_{lk} = \frac{1}{2} g^{sm}(\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}). \tag{76}$$

0.6.1 Геометрический смысл крученя.

В точке P рассмотрим два вектора ξ_P и ζ_P. Точка P и вектор ξ_P, однозначно опеделяют геодезическую $\gamma_\xi(t)$ (см. ...).

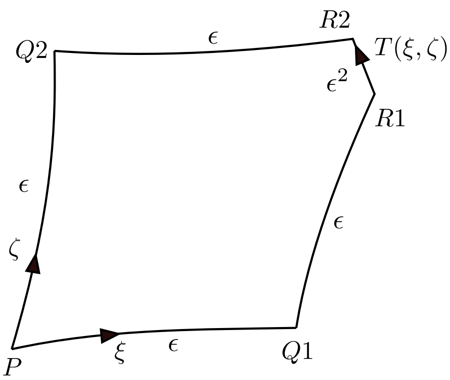

Рис. 3: Геометрический смысл кручения.

Перенесем параллельно вектор ζ_P в точку $Q1 \equiv \gamma_\xi(\epsilon)$, вдоль геодезической, получим вектор ζ_{Q1} в $Q1$.

Точка $Q1$ и вектор ζ_{Q1} определяют, в свою очередь, геодезическую $\gamma_{\xi_{Q1}}(t)$. Точку $\gamma_{\xi_{Q1}}(\epsilon)$ обозначим $R1$.

Теперь проделаем теже шаги поменяв местами ξ_P и ζ_P. Получим точки $Q2$ и $R2$.

Рис.

На обычной плоскости, в результате образуется параллелограмм с вершинами $P1$, $Q1$, $R1 \equiv R2, Q2$. Однако в случае общего многообразия со связностью ∇, имеем $R1 \neq R2$, и расстояние между $R1$ и $R2$ с точностью до второго порядка малости по ϵ дается вектором $T(\xi,\zeta)$, где T - кручение связности. Можно также сказать, что вектор $T(\xi,\zeta)$ замыкает, с точностью до второго порядка малости по ϵ инфинитиземальный параллелограмм, заданный векторами ξ и ζ.

Действительно, разлагая координаты в корестности точки P в ряд получим

$$\begin{aligned}x^k_Q = x^k_P + \frac{dx^k}{dt}_P \epsilon + \frac{1}{2}\frac{d^2x^k}{dt^2}_P \epsilon^2 = \\ x^k_P + \xi^k_P \epsilon - \frac{1}{2}\xi^i_P \xi^j_P \Gamma^k_{Pij}\epsilon^2,\end{aligned} \tag{77}$$

- $\xi^k = \frac{dx^k}{dt}$, и учтено уравнение геодезической.

Теперь параллельно перенесем вектор ζ_P в точку Q:

$$\zeta^k_Q = \zeta^k_P - (x^i_Q - x^i_P)\zeta^j_P \Gamma^k_{Pij} = \zeta^k_P - \xi^i_P \zeta^j_P \Gamma^k_{Pij}\epsilon, \tag{78}$$

Теперь найдем координаты точки $R1$ вдоль геодезической выпущенной из точки $Q1$:

$$\begin{aligned}x^k_{R1} = x^k_{Q1} + \zeta^k_{Q1}\epsilon - \frac{1}{2}\zeta^i_{Q1}\zeta^j_{Q1}\Gamma^k_{(Q1)ij}\epsilon^2 = \\ x^k_P + (\xi^k_P + \zeta^i_P)\epsilon^2 \\ -\left(\frac{1}{2}\xi^i_P\xi^j_P + \xi^i_P\zeta^j_P + \frac{1}{2}\zeta^i_P\zeta^j_P\right)\Gamma^k_{(P)(ij)}\epsilon^2.\end{aligned} \tag{79}$$

Аналогично, координаты точки $R2$ во втором порядке по ϵ равны

$$\begin{aligned}x^k_{R1} = x^k_{Q1} + \zeta^k_{Q1}\epsilon - \frac{1}{2}\zeta^i_{Q1}\zeta^j_{Q1}\Gamma^k_{(Q1)ij}\epsilon^2 = \\ x^k_P + (\xi^k_P + \zeta^i_P)\epsilon^2 \\ -\left(\frac{1}{2}\xi^i_P\xi^j_P + \zeta^i_P\xi^j_P + \frac{1}{2}\zeta^i_P\zeta^j_P\right)\Gamma^k_{(P)(ij)}\epsilon^2.\end{aligned} \tag{80}$$

Таким образом, получаем

$$x^k_{R2} - x^k_{R1} = \xi^i_P \zeta^j_P T^k_{(P)ij}\epsilon^2, \tag{81}$$

- где $T^k_{(P)ij}$ - компоненты тензора кручения в точке P.

Существует также еквивалентный способ выражения кручения.

Рассмотрим векторы ξ и ζ в точке P. Расширим их до векторынх полей V, U в окрестности следующим образом: если Q некоторая точка в окрестности построим геодезическую из P и Q и параллельно перенесем векторы ξ и ζ в Q вдоль геодезической (вспомним, что параметризиция геодезической не имеет значения). Все перенесенные векторы образуют векторыне поля V, U.

По построению, их ковариантные производные в любых направлениях исчезают в точке P так, что мы получаем для тензора кручения выражение:

$$T_P(V,U) = (\nabla_V U)_P - (\nabla_U V)_P - [V,U]_P = -[V,U]_P. \tag{82}$$

Тогда "эффект"от кручения совпадает с "эффектом"от некоммутации векторынх полей.

0.7 Тензор кривизны.

Если мы рассмотрим, например, сферу или тор, то мы увидим, что эти поверхности можно разложить на конечное число частей, каждая из которых может быть взаимно-однозначно (не обязательно изометрично) отображена на некоторую область евклидовой плоскости.

Точнее, для каждой точки P_0 многообразия можно найти вблизи этой точки такую систему координат u, v, что если u_0, v_0 являются координатами самой точки P_0, то существует положительное число r, обладающее следующим свойством. Любая система чисел u, v, удовлетворяющая неравенству;

$$(u - v_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2, \tag{83}$$

представляет собой координаты некоторой точки многообразия, близкой к P_0 и, наоборот, в достаточно малой окрестности P_0 всякая точка P имеет координаты u, v удовлетворяющие неравенству (3.83).

Сфера и тор являются примерами *проэктивно евклидовых многообразий*, используя стереографическю проэкцию можно показать, например, что сфера локально евклидова. Именно в этом смысле каждое многообразие является локально евклидовым.

Риманово многообразие называется локально-евклидовым если в достаточно малой окрестности любой из своих точек M_0 может быть отображено на некоторую малую область евклидова простарнства с сохранением линейного элемента ds^2 (изометрически). Такого рода отображение называется *развертыванием* рассматриваемой части многообразия на евклидово пространство. И обратно, полученная в результате такой операции область евклидова пространства будет развертыватся на соответствующий малый участок многообрзия.

Тензор кривизны связности позволяет определить локальную характеристику отклонения связности Γ^i_{jk} от евклидовой.

Мы знаем, что если связность допускает евклидовы координаты $x^1, ..., x^n$, то в этих координатах векторы (тензоры) диффերецируются по обычным формулам:

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}. \tag{84}$$

Поэтому

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)\xi^i = 0 \tag{85}$$

Это свойство верно в любых координатах так, как ξ^i - тензор.

Для векторных полей в любых координатах $x^1, ..., x^n$ имеем

$$\begin{gathered}\nabla_k \nabla_l Y^i = \nabla_k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} Y^q\right) = \\ \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^l} + \Gamma^i_{ql} Y^q\right) + \Gamma^i_{pk}\left(\frac{\partial Y^p}{\partial x^l} + \Gamma^p_{ql} Y^q\right) - \\ \Gamma^p_{lk}\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^p} + \Gamma^i_{qp} Y^q\right) = \\ \frac{\partial^2 Y^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial Y^q}{\partial x^k}\Gamma^i_{ql} + \Gamma^i_{pk}\frac{\partial Y^p}{\partial x^l} - \Gamma^p_{lk}\frac{\partial Y^i}{\partial x^p} + \\ Y^q \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} Y^q - \Gamma^q_{lk}\Gamma^i_{qp} Y^q.\end{gathered} \tag{86}$$

Составим выражение $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)V^i$. После сокращений получим в координатах

$$\begin{gathered}(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)Y^i = \\ \left(\frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{pk}}{\partial x^l}\right) Y^q + (\Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i \Gamma^p_{qk}) Y^q - \\ (\Gamma^p_{lk} - \Gamma^p_{kl})\frac{\partial Y^i}{\partial x^p}.\end{gathered} \tag{87}$$

Введем обозначение

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}. \tag{88}$$

Тогда получим формулу

$$\begin{gathered}(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)Y^i = \\ -R^i_{qkl} Y^q + T^p_{kl}\frac{\partial Y^i}{\partial x^p},\end{gathered} \tag{89}$$

где T^p_{kl} - тензор кручения. Оказывается, R^i_{qkl} - это тензор; этот тензор называется *тензором Римана* или *римановой кривизной*.

Для симметричных связностей $T^p_{kl} \equiv 0$.

Таки образом для симметричных связностей и для любого векторного поля V выражение $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k)Y^i$ имеет вид - $R^i_{qkl} Y^q$, где R^i_{qkl} - тензор Римана, определяемый формулой

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk}\Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl}\Gamma^p_{qk}. \tag{90}$$

Это выражение можно записать так

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lq}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kq}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lq} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kq}. \tag{91}$$

В инвариантных обозначениях, для любых векторынх полей V, U, Y

$$[R(V, U)Y]^i = R^i_{jkl} V^k U^l Y^j \tag{92}$$

или, явно

$$R(V, U)Y = \nabla_U \nabla_V Y - \nabla_V \nabla_U Y - \nabla_{[V,U]} Y, \tag{93}$$

где $[V, U]$ - коммутатор векторных полей.

Последнее выражение линейно по $V^i\partial_i, U^i\partial^i, Y^i\partial^i$, и для базисных векторных полей следует из определения R^i_{jkl}.

Если связность евклидова, то $R^i_{qkl} = 0$. В точках, где $\Gamma^i_{pq} = 0$ верно равенство

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}. \tag{94}$$

Тензор кривизны позволяет сформулировать критерий локальной тривиальности аффинной связности.

Назовем аффинную связность на многообразии $\mathbb{M}$ локально тривиальной, если для любой точки $x \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $\mathbb{U}_x \ni x$ и такая система координат, что компоненты связности Γ^k_{ij} на $\mathbb{U}_x$ равны нулю.

Для локальной тривиальности аффинной связности на многообразии $\mathbb{M}$ необходимо и достаточно, чтобы ее кручение и тензор кривизны равнялись нулю на $\mathbb{M}$.

0.7.1 Геометрический смысл кривизны.

Мы определили кривизну рассматривая параллельный перенос вдоль произвольной (не обязательно геодезической) замктутой кривой. Замкнутость является следствием предположения отсутствия кручения.

В евклидовом пространстве параллельное перенесение не зависит от пути. В общем случае, это не так.

Эта *неинтегрируемость* параллельного переноса характеризуется *внутренней кривизной*, которая не зависит от выбора системы координт.

Рассмотрим инфинитиземальный параллелограмм $P, Q1, R, Q2$. Предположим, что кручение отсутствует, тогда параллелограмм замкнут.

Данный параллелограмм составлен из четырех кривых

$$\begin{aligned}
\gamma_{PQ_1} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, x^\sigma = b, a \le x^\rho \le a + \delta a\} \\
\gamma_{Q_1R} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, b \le x^\sigma \le b + \delta b, x^P = a + \delta a\} \\
\gamma_{RQ_2} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, x^\sigma = b + \delta b, a \le x^P \le a + \delta a\} \\
\gamma_{Q_2P} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, b \le x^\sigma \le b + \delta b, x^P = a + \delta a\}
\end{aligned} \tag{95}$$

Где σ и ρ фиксированные индексы, такие, что $\sigma \neq \rho$.

Параллельный-перенос вектора $\xi = \xi^k \bar{e}_k$ из P в $Q1$ вдоль кривой γ_{PQ_1} дает:

$$\begin{aligned}
\frac{d\xi^k}{dx^i} &= \frac{d\xi^k}{dx^i} + \Gamma_{ji}\xi^{\ae} = 0, \Rightarrow \\
\frac{d\xi^k}{dx^i} &= -\Gamma^k_{ji}\xi^j \Rightarrow
\end{aligned} \tag{96}$$

$$\xi^k(Q_1) - \xi^k(P^{start}) = -\int_a^{a+\delta a} \Gamma^k_{j\rho}|_{x^c=b}\, \xi^j dx^\rho$$

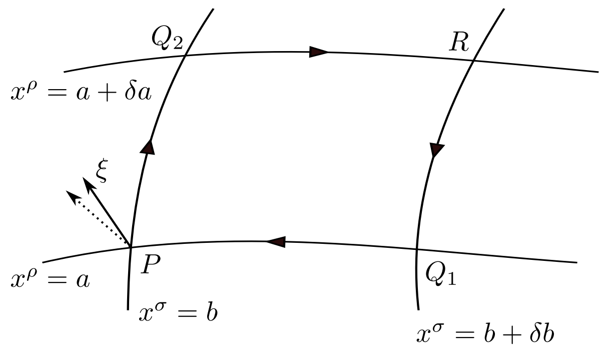

Рис. 4: Геометрический смысл кривизны.

Аналогично получим для параллельного перенесения вектора вдоль кривых γ_{Q_1R}, γ_{RQ_2} и γ_{Q_2P} выражения:

$$\xi^k(R) - \xi^k(Q_1) = -\int_{b+\delta b}^{b} \Gamma^k_{j\sigma}|_{x^\rho=a+\delta a}\, \xi^j dx^\sigma, \tag{97}$$

$$\xi^k(Q_2) - \xi^k(R) = -\int_a^{a+\delta a} \Gamma^k_{j\rho}|_{x^\sigma=b+\delta b}\xi^j dx^\rho. \tag{98}$$

$$\xi^k(P_{end}) - \xi^k(Q_2) = \int_b^{b+\delta b} \Gamma^k_{j\sigma}|_{x^\rho=a}\xi^j dx^\sigma. \tag{99}$$

Теперь мы определим разницу между вектором до параллельного переноса и после параллельного переноса по замкнутому контуру как $\delta\xi^k = \xi^k(P^{end}) - \xi^k(P^{start})$, тогда

$$\begin{aligned}
\delta\xi^k = &\int_a^{a+\delta a} (\Gamma^k_{j\rho}|_{x^\sigma=b+\delta b}\xi^j - \Gamma^k_{j\rho}|_{x^\sigma=b})\xi^j dx^\rho \\
&+ \int_b^{b+\delta b} (\Gamma^k_{j\sigma}|_{x^\rho=a}\xi^j - \Gamma^k_{j\sigma}|_{x^\rho=a+\delta a}) dx^\sigma.
\end{aligned} \tag{100}$$

Так как δa и δb малые виличины, с пмощью теоремы о среднем получим следующую аппроксимацию для (3.100)

$$\begin{aligned}
&\delta\xi^k \approx \\
&\int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\Gamma^k_{\rho j}\xi^j\right) dx^\rho - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^k_{j\sigma}\right) dx^\sigma \\
&\approx \delta a \delta b \left[\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(\Gamma^k_{j\rho}\xi^j\right) - \frac{\partial}{\partial x^\rho}\left(\Gamma^k_{j\sigma}\xi_j\right)\right]
\end{aligned} \tag{101}$$

Окончательно, (3.101) с (3.96) дают, что параллельный перенос вектора ξ индуцирует следующее изменение его компонент

$$\delta\xi^k \approx \delta a\delta b\left(\frac{\partial\Gamma^k_{\lambda\rho}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial\Gamma^k_{\lambda\sigma}}{\partial x^\rho} + \Gamma^j_{\lambda\rho}\Gamma^k_{j\sigma} - \Gamma^j_{\lambda\sigma}\Gamma^k_{j\rho}\right). \tag{102}$$

0.8 Формы кручения и кривизны.

Отметим, что тензор кручения

$$T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji} \tag{103}$$

кососимметричен по индексам i и j, по которым производится дифференцирование, тензор кривизны

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial\Gamma^i_{lq}}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma^i_{kq}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp}\Gamma^p_{lq} - \Gamma^i_{lp}\Gamma^p_{kq}. \tag{104}$$

кососимметричен по индексам kl по которым также производится дифференцирование.

Геометрически, эта кососимметричность связана с ориентируемостью направления обхода некоторрого бесконечно малого элемента площади, поэтому тензоры кручения и кривизны однозначно определяют некоторые дифференциальные формы.

Эли Катан указал, что разница между многообразием аффинной связности и собственно аффинным пространством, выражается в аффинном перемещении, соответствующем бесконечно-малому замкнутому контуру; это перемещение можно разложить на трансляцию и вращение; трансляция определяет *кручение*, вращение - *кривизну* многообразия.

Кручение определяет векторозначную форму, так как трансляция это вектор, кривизна - бивекторозначную форму, так как вращение - бивектор.

Соответствующие формы называются формами кручения и кривизны.

Вспомним, что если линейная форма, заданная на касательном пространстве совпадает со своей альтернацией то ее называют *внешней дифференциальной формой*. Вот и формы кручения и кривизны вследствие кососиммтричнсти являются внешними дифференциальными формами.

Форма кручения в общем случае образуется из неголономных базисных 1-форм θ^α, которые в случае голономного базиса определяются как $\theta^\alpha = \delta^\alpha_i dx^i$, при помощи операции *внешного ковариантного дифференцирования*.

Определение 0.8.1 Формой кручения Θ данной линейной связности называется 2-форма $\mathcal{D}\theta$

- $\mathcal{D}$ оператор внешнего ковариантного дифференцирования. Внешний потому, что должен определять кососимметрическую форму. Ковариантность необходима в следствие зависимости базиса от точки на многообразии.

Форма кривизны, в общем случае, образуется из 1-форм связности ω_k, построенных для неголономного базиса, при помощи операции внешного ковариантного дифференцирования.

Определение 0.8.2 Формой кривизны Ω данной линейной связности называется 2-форма $\mathcal{D}\omega$

- $\mathcal{D}$ - оператор внешнего ковариантного дифференцирования.

Покажем, что $\mathcal{D}\theta$ и $\mathcal{D}\omega$ действительно определяют тензорные поля кручения (3.103) и кривизны (3.104).

Пусть $\mathbb{V}$ открытое подмножество многообразия $\mathbb{M}$

Определим набор базисных векторных полей $\{X_1, ..., X_n\}$. В каждой точке M подмножества $\mathbb{V}$ X_i образуют базис для $L_M\mathbb{M}$. X^i можно определить как координатные базисные векторные поля $X_i = \partial_{x^i}$, однако в общем случае X_i на образуют координатный базис.

Затем определим набор дуальных базисных полей 1-форм $\theta^1, ..., \theta^n$, такой, что $\theta^i(X_j) = \delta_i$.

Заметим, что в каждой точке $M \in \mathbb{V}$, $\{\theta^1_M, ..., \theta^n_M\}$, образуют базис кокасательного пространства $L^*_M\mathbb{M}$.

Из свойств связности следует равенство

$$\nabla_{X_i}X_j = \omega^k_{ij}X_k, \tag{105}$$

где ω^k_{ij} является k-ой компонентой векторного поля $\nabla_{X_i}X_j$ на базисных векторах $\{X_i\}^n_{i=1}$. Имея формы ω^k_{ij} определим формы ω^k_j:

$$\omega^k_j := \omega^k_{ij}\theta^i \tag{106}$$

И обратно, имея эти формы, можно получить значения ω^k_{ij}:

$$\omega^k_{ij} = \omega^k_j(X_i). \tag{107}$$

Тогда связность полностью определится этими формами: дано два векторных поля $V = a^iX_i$ и $U = b^iX_i$, тогда:

$$\begin{aligned}\nabla_V X_j = \nabla_{a^iX_i}X_j = a^i\nabla_{X^i}X_j = a^i\omega^k_{ij}X_k\\ = a^i\omega^k_j(X_i)X_k = \omega^k_j(X)X_k.\end{aligned} \tag{108}$$

И следовательно

$$\begin{aligned}\nabla_V U = \nabla_V(b^iX_i) = ((V\cdot b^i)X_i + b^i\nabla_V X_i)\\ = (V\cdot b^j + b^i\omega^j_i(V))X_j\end{aligned} \tag{109}$$

Заметим, что значения форм ω^k_j на X есть компоненты $\nabla_X X_j$ относительно поля базисов так, что:

$$\omega^i_j(X) = \omega^i(\nabla_X X_j). \tag{110}$$

Имеем равенство

$$\begin{aligned}\nabla_U V = \nabla_U(\omega^j(V)X_j)\\ = (U\cdot\omega^j(V)X_j + \omega^j(V)\nabla_U X_j)\end{aligned} \tag{111}$$

из которого следует

$$\omega^i(\nabla_U V) = V \cdot \omega^i(V) + \omega^j(V)\omega^i(\nabla_U X_j) \qquad (112)$$

Определим внешний ковариантный дифференциал 1-формы θ^α :

$$\mathcal{D}\theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega^\alpha_\beta \wedge \theta^\beta = d\theta^\alpha - \theta^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta. \qquad (113)$$

Применим правую часть этого уравнения к векторным полям (V, U) образующим касательное пространство.

По определению, для поизвольной 1-формы имеет место равнство

$$d\theta(V,U) = V(\theta(U)) - U(\theta(V)) - \theta([V,U]) \qquad (114)$$

Далее

$$\begin{aligned}\left(\theta^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta\right)(V,U) &= (\theta^j(V)\omega^i_j(U) - \theta^j(U)\omega^i_j(V)) \\ &= (\theta^j(X)\omega^i(\Delta_U V_j) - \theta^j(U)\omega^i(\Delta_V X_j)) \\ &= \theta^i(\Delta_U V) - U \cdot (\theta^i(V)) - \theta^i(\nabla_V U) + V \cdot (\theta^i(U)).\end{aligned} \qquad (115)$$

и следовательно

$$\begin{aligned}&(d\omega^i - \theta^j \wedge \omega^i_j)(V,U) = \\ &V \cdot (\theta^i(U)) - U \cdot (\theta^i(V)) - \theta^i([V,U]) - (\theta^j \wedge \theta^i_j)(V,U) \\ &= \theta^i(\nabla_V U - \nabla_U V - [V,U])\end{aligned} \qquad (116)$$

Докажем аналогичное равенство и для формы кривизны:

$$\begin{aligned}R(V,U)X_i = \Omega^j_i(V,U)X_j = \\ ((d\omega^j_i) - \omega^k_i \wedge \omega^j_k)(V,U))X_j\end{aligned} \qquad (117)$$

Действительно

$$\begin{aligned}R(V,U)X_i &= \nabla_V\nabla_U X_i - \nabla_U\nabla_V X_i - \nabla_{[V,U]}X_i \\ &= \nabla_V(\omega^k_i(U)X_k) - \nabla_U(\omega^k_i(V)X_k) - \omega^k_i([V,U])X_k \\ &= (V \cdot (\omega^k_i(U)) - U \cdot (\omega^k_i(V)) - \omega^k_i([V,U]))X_k \\ &\quad + \omega^k_i(U)\nabla_V X_k - \omega^k_i(V)\nabla_U X_k \\ &= d\omega^k_i(V,U)X_k + (\omega^k_i(U)\omega^j_k(V)X_j - \omega^k_i(V)\omega^j_k(U)X_j) \\ &= (d\omega^j_i(V,U) - (\omega^k_i \wedge \omega^j_k)(V,U))X_j.\end{aligned} \qquad (118)$$

Таким образом форма Ω^j_i однозначно определяет производную

$$\mathcal{D}\omega^j_i = d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k. \qquad (119)$$

$$\Omega^l_k(V,U) := \theta^l(R(V,U)X_k), \qquad (120)$$

для векторных полей V, U на $\mathbb{V}$, т.е $R(V,U)X_k = \Omega^l_k(V,U)X_l$. Используя базис $\{\theta^i \wedge \theta^j\}_{i<j}$ для 2-форм, запишем

$$\begin{aligned}\Omega^l_k = \Omega^l_k(X_i,X_j)\theta^i \wedge \theta^j = \theta^l(R(X_i,X_j)X_k)\theta^i \wedge \theta^j \\ = R^l_{ijk}\theta^i \wedge \theta^j = \frac{1}{2}R^l_{ijk}\theta^i \wedge \theta^j,\end{aligned} \qquad (121)$$

Где R^l_{ijk} коэффициенты тензора кривизны относительно данного базиса:

$$R(X_i,X_j)X_k = R^l_{ijk}X_l. \qquad (122)$$

Таким образом

$$\Omega^l_k = \frac{1}{2}R^l_{ijk}\theta^i \wedge \theta^j,\ \ R^l_{ijk} = -R^l_{ikj} \qquad (123)$$

Аналогично

$$\Theta^l = \frac{1}{2}T^l_{ij}\theta^i \wedge \theta^j,\ \ T^l_{ij} = -T^l_{ji}. \qquad (124)$$

0.9 Пространство Римана-Картана.

Определение 0.9.1 Связность называется метрически совместимой (римановой или ковариантно постоянной) если относительно этой связности

$$Q_{\alpha\beta} := -\mathcal{D}\mathrm{g}_{\alpha\beta} = 0. \qquad (125)$$

- где $ds^2 = \mathrm{g}_{ij}dx^i \otimes dx^j = \mathrm{g}_{\alpha\beta}\theta^\alpha \otimes \theta^\beta$.

В общем случае величина $Q_{\alpha\beta}$ образует тензор, и *называется тензором неметричности*.

Распишем следующую ковариантную производную от тензора типа $(0,2)$:

$$\begin{aligned}Q(X,Y,Z) = \nabla_X \mathrm{g}(Y,Z) \\ = X(\mathrm{g}(Y,Z) - \mathrm{g}(\nabla_X Y,Z) - \mathrm{g}(Y,\nabla_X Z))\end{aligned} \qquad (126)$$

Таким образом если $Q(X,Y,Z) = 0$, то

$$X(\mathrm{g}(Y,Z)) = X(\mathrm{g}(\nabla_X Y,Z) - \mathrm{g}(Y,\nabla_X Z)) \qquad (127)$$

Определение 0.9.2 Связность называется *римановой* если для любых векторных полей X, Y, Z верно равенство (3.127). Если к тому же отсутствует кручение то связность называется связностью *Ливи-Чивиты*.

Определение 0.9.3 Пространство с заданной на нем метрически совместимой связностью и отличным от нуля тензором кручения называется пространством *Римана-Картана*. В случае, если тензор кручения нулевой, пространство Римана-Картана обращается в пространство Римана.

Метрически совместимая связность обеспечивает локальную эвклидовость многообразия в смысле проэктивной эвклидовости. Коэффициенты связности не образуют тензор, поэтому локальные координаты можно подобрать так чтбы они обратились в нуль, при этом тензоры кручения и кривизны не обязнаны быть нулевыми.

Рассмотрим метрческое многообразие с кручением. Пусть задана метрика

$$ds^2 = g_{ji} dx^j dx^i \tag{128}$$

И метрическая (риманова) связность Γ^h_{ji}, такая, что в ней

$$\nabla_j g_{ik} = 0 \tag{129}$$

- где ∇_j означает ковариантное дифференцирование в связности Γ^h_{ji}

Обозначая $\left\{ {h \atop j\,i} \right\}$ символы Кристофеля сформированные метрикой g_{ji}, мы можем положить

$$\Gamma^h_{ji} = \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + T^h_{ji} \tag{130}$$

- где - тензорное поле типа $(1, 2)$.

Уравнения (3.129) и (3.130) показывают, что

$$\nabla_j g_{ih} = -T_{jih} - T_{jhi} = 0. \tag{131}$$

где

$$T_{jih} = T^t_{ji} g_{th}. \tag{132}$$

Связность Γ^h_{ji} не обязана быть симметричной и мы можем записать тензор кручения в виде:

$$S^h_{ji} = \frac{1}{2}(\Gamma^h_{ji} - \Gamma^h_{ji}) \tag{133}$$

Из (3.130), (3.131) и (3.133), мы найдем метрическую связность Γ^{ji}_h в виде

$$\Gamma^h_{ji} = \left\{ {h \atop j\,i} \right\} + S^h_{ji} + S^h_{ji} + S^h_{ij}, \tag{134}$$

где $S^h_{ji} = g^{mh} \eth_{it} S^t_{mj}$, g^{mh} являются контравариантными компонентами метрического тензора.

Тензор кривизны метрической связности Γ^h_{ji} дается формулой:

$$R^h_{kji} = \partial_k \Gamma^h_{ji} - \partial_j \Gamma^h_{kj} + \Gamma^h_{kt}\Gamma^h_{jt} - \Gamma^h_{jt}\Gamma^t_{ki}, \tag{135}$$

И мы меем

$$\begin{gathered} R_{kjih} = -R_{jkih} = -R_{kjhi}, \\ R_{kjih} + R_{jikh} + R_{ikjh} = 0, \\ R_{kjih} = R_{ihkj} \end{gathered} \tag{136}$$

- где

$$R_{kjih} = R^t_{kji} g_{th}. \tag{137}$$

Для изучения геодезических линий в римановом пространстве $\mathbb{V}_n$ и самого $\mathbb{V}_n$ в ряде случев приносят пользу, специальные, связанные с геодезическими линиями геометрические констукции. В частности они позволяют строить координатные системы в V_n с наиболее прострыми свойствами. Вообще говоря, в $\mathbb{V}_n$ нельзя построить такие простые координатные системы, какими являются, например, ортнормированные координатные системы в $\mathbb{R}_n$, но частично все же можно приблизится к их свойствам.

Определение 0.9.4 Координаты в которых компоненты связности и первые производные компонент метрического тензора обращаются в нуль в некоторой точке называются *геодезическими координатами*. Геодесические коордиНтаты также называют нормальными или римановыми координатами.

В некоторых случаях нельзя добится обращения в нуль $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ во всем пространстве одновременно, но можно это сделать в некоторой окрестности каждой его точки. Тогда пространство аффинной связности называется *локально аффинным* (аналогично локально евклидовому). В некоторой окрестности любой своей точки локально аффинное пространство представляет собой "кусок аффинного пространства"и лишь в целом отличается от него.

А вообще говоря, пространство аффинной связности, даже с нулевым кручением, аффинным пространством не является, и ни в какой координатной системе $x^{i'}$, хотя бы в пределах малой окрестности данной точки M, $\Gamma^k_{i'j'}$ не удается обратить в нуль тождественно.

Однако в случае нулевого кручения можно обратить $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в нуль в самой данной точке M .

Действительно, переходя от координат x^k к координатам $x^{k'}$, зададимся значениями $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ в данной точке M произвольно, а значения $\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$ в той же точке подберем так, чтобы $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ обратилиль в нуль. Для этого достаточно потребовать:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma^k_{ij} = 0. \tag{138}$$

Все величины предполагаются вычисленными в данной точке M. Можно взять вместо (3.138) равносильное соотношене

$$\Gamma^k_{ij} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^k \partial x^j}, \tag{139}$$

Если бы пространство обладало кручением, т.е $\Gamma^k_{ij} \neq \Gamma^k_{ij}$ то вторые частные производные нельзя было бы вычисляь по формуле (3.139).

Итак, если пространство без кручения, переходя от координат x^i к координатам $x^{i'}$, мы можем добиться обращения $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в нуль в наперед заданной точке M.

Если бы мы захотели указанным приемом добиться *тождественного* обращения $\Gamma^{k'}_{i'j'}$ в нуль, то нужно было бы обеспечить равенство (3.139) *в каждой точке M*, т.е. проинтегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x^{i'}(x^1, ..., x^n)$. Однако эта система, вообще говоря, несовместна.

Значение геодезических координат состоит в том, что в довольньо малой корестнсти точки M свойства многообразия близки к свойствам аффинного пространства. Формула параллельного перенесения в точке M и в соответствующих геодезических координатах $x^{i'}$ дает

$$d\xi^{k'} = 0. \tag{140}$$

Это значит, что при параллельном переносе компоненты векторов (тензоров) в *линейном приближени* по вектору смещения не меняются. Точнее, это значит, что при бесконечно малом смещении из точки M по любому пути координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ получают приращения $\Delta\xi^{k'}$ бесконечно малые высшего порядка (ввиду $d\xi^{k'} = 0$). Т.е. данные координаты в точке M определены с точностью до линейных преобрзований.

В остальных точках пространства координаты $x^{i'}$, геодезические в точке $\mathbb{M}$, никакими преимуществами не обладают.

Свойства нормальных координат относятся к касательным пространствам, не к самому многообрзию.

Коэффициенты связности аффинного пространства равны нулю в аффинных координатах и только в них.

Нормальные координаты можно выбрать только в точках, в которых связность имеет нулевое кручение и неметричность. Тем не менее, *нормальные реперы*, обладающие существенными свойствами нормальных координат, все еще могут быть построены когда связность нериманова.

Если X и Y координаты векторов для которых компоненты связности обращаются в нуль в некоторой точке, то очевидно кручение должно обратиться в нуль, и помпоненты неметричности обратятся в первые производные компонент метрического тензора.

Для неримановых связностей, все еще возможно построить нормальные координаты с помощью експоненциального отображения испльзуя *абсолютный параллелизм* (автопараллельность) неримановой связности, однако при ненулевом кручении компоненты связности не обратятся в нуль, и в присутствии неметричности компоненты метрики не будут стационарными.

Определение 0.9.5 Пространство аффинной связности называется пространством *абсолютного параллелизма*, если результат параллельного перенесения произвольного вектора ξ^i из точки P в точку O при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения PQ. Это значит, что по какому бы пути ни совершать переход из P в Q, мы прийдем в Q с одним и тем же вектором, т.е. тензор кривизны $R^b_{\alpha\beta a} = 0$. По этой причине репер на многообразии можно задать глобально.

Любое многообразие $\mathbb{M}$ допускающее существование глобально определенного репера называется *параллелизируемым*. Отсюда вытекает следствие: многоообразие $\mathbb{M}$ является параллелизируемым тогда и только тогда, когда касательное расслоение диффеоморфоно прямому произведению $\mathbb{T}(\mathbb{M}) = \mathbb{M} \times \mathbb{R}^n$ (глобально определенный репер устанавливает диффеоморфизм расслоений).

1 Пример. Любая группа Ли является параллелизируемым многообрзием если групповое умножение слева (справа) принять за определение параллельного переноса.

В случае пространства с абсолютным параллелизмом и *без кручения* можно, по крайней мере, в некоторой оркестности любой точки M, перейти к аффинным координатам $x^{i'}$, т.е. добится $\Gamma^{k'}_{i'j'} = 0$.. Тем самым данное пространство будет локально аффинным.

Следовательно, мы получаем возможность вектор, заданный в какой нибудь точке P, как бы откладывать из любой точки пространства. В результате возникает целое векторное поле. Любой вектор этого поля можно принять за исходный и считать, что все другие векторы поля получены его параллельным перенесением. Такое векторное поле называтеся *однородным*.

Допустим, что задано $\mathbb{M}$ с абсолютным параллелезимом. Выберем в какой либо точке p базис для $L_p(\mathbb{M})$ из n линейно независимых векторов $\{X_i\}_p$. Тогда некоторый вектор ξ^k в точке $p \in \mathbb{M}$ определится как линейная комбинация данных базисных векторов. Для удобства введем обозначение получившейся совокупности линейных комбинаций

$$\xi^k_{(1)}, ..., \xi^k_{(n)} \tag{141}$$

Путем их параллельного перенесения в любую точку M нашего пространств получаем n однородных векторных полей

$$\xi^k_{(1)}(M), ..., \xi^k_{(n)}(M). \tag{142}$$

В силу абсолютного характера параллелизма линейная независимость при параллельном перенесении сохраняется, и в любой другой точке M', разложение вектора ξ^k по базису X_i определятся теми же самыми коэффициентами $\{\xi^k_{(n)}\}$.

И обратно, задавая в коком-либо многообрзии $\mathbb{M}$, n произвольно выбранных линейно независимых векторов $\xi^k_1(M), ..., \xi^k_n(M)$ данное многообразие можно рассматривать как простанство с абсолютным параллелизмом.

Запишем, что каждый из $\xi^i_{(p)}$ при любом бесконечно малом смещении из любой точки M должен удовлетворять формуле параллельного перенесения

$$\nabla_{\dot{x}}\dot{x} = 0. \tag{143}$$

в этом случае кривая $x(t)$ с параллельным векторным полем $\dot{x} = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$ удовлетворяющем условию (3.143) называется *автопараллельной кривой*. В случае если ∇ связность Ливи-Чивиты на римановом многообразии $(\mathbb{M}, \mathrm{g})$, параллельный перенос является изометрией и кривая $x(t)$ называется геодезической.

Пусть $\mathbb{M}$ дифференциуемое многообразие, и ∇ произвольная связность на M. Возьмем произвольную точку $p \in \mathtt{M}$, и пусть $\{X_i\}_p$ является базисом для $L_p\mathbb{M}$.

Теорема 0.9.1 $\{X_i\}_p$ может быть расширен до репера $\{X_i\}$ в некоторой окрестности $U \subset \mathbb{M}$ точки p, таким образом что $\nabla X_i = 0$ в точке p для каждого i.

Доказательство. Для каждого i, существует автопараллель C_i в односвязной окрестности U_i точки p которая проходит через p и имеет касательный вектор X_i в точке p. Для каждого i, определен набор векторных полей $\{X_j\}$ вдоль C_i с помощью параллельного переноса $\{X_j\}_p$. При соответсвующем ограничении пересечения U областью U_i, автопараллели не пересекутся, и векторные поля могут быть произвольно продолжены для формирования репера на U. Так как по построению $\nabla_{X_i} X_j = 0$ в точке p для всех i, j то $\nabla X_i = 0$ в p.

Этот результат не имеет отношения к метрике на $\mathbb{M}$, а является свойством связности.

Теперь, пусть g метрика на $\mathtt{M}$. Репер $\{X_i\}$ называется нормльным в точке p если $\{X_i\}_p$ ортонормальны и $\nabla X_i = 0$ в точке p. Ортонормальный базис в любой точке p на $\mathbb{M}$ всегда можно расширить, используя теорему (6) до локального нормального репера по отношению к любой связности. Если связность метрическая ($\nabla \mathrm{g} = 0$), то нормальный репер может быть выбран, также, ортонормальным.

Этот результат может быть выражен через компоненты связности определенные в виде $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma^k_{ij} X_k$. Далее, очевидно что всегда существуют координаты $\{x^i\}$ покрывающие точку p такие, что $\partial_{x^i} = X_i$ в точке p. В компонентах это формулируется следующим предложением

Теорема 0.9.2 Пусть $\mathbb{M}$ многообразие с произвольной связностью. Для любой точки $p \in \mathbb{M}$, существуют координаты $\{x^i\}$ и репер $\{X_i\}$ в окрестности каждой точки p такие, что в точке p

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_{x^i} \\ \Gamma^k_{ij} &= 0, \end{aligned} \tag{144}$$

где Γ^k_{ij} компоненты связности относительно репера $\{X_i\}$.

Компоненты связности относительно репера $\{\partial_{x^i}\}$ не обязаны обращатся в нуль, даже в самой точке p. Точнее они обязательно будут ненулевыми в присутствии кручения в точке p.

Так как пространство Римана-Картана по определению обладает ненулевой кривзной и метрической связностью то нормальный репер может быть выбран ортонормальным.