

Конспект лекций: Теория упругости и пластичности кристаллов.

Часть 1. Кинеманика.

Направление подготовки: микро- и наноэлектроника.

Смежные дисциплины: наномеханика, акустооптика, физика
твёрдого тела.

Куцевол Андрей Александрович. КМ-07-1. 8й семестр.

Кафедра Радиофизики.

2011

Оглавление

1	Введение в дифференциальную геометрию.	4
1.1	Мотивация.	5
1.2	Метрические и топологические пространства.	5
1.2.1	Отображения множеств.	5
1.2.2	Метрические пространства.	6
1.2.3	Предел отображений.	7
1.2.4	Топологические пространства.	7
1.3	Элементы алгебры.	9
1.4	Евклидовы пространства.	14
1.4.1	Определение евклидовых пространств.	14
1.4.2	Дифференцирование вектор-функций.	14
1.4.3	Репараметризация кривой.	16
1.4.4	Длина дуги.	16
1.4.5	Касание кривых.	18
1.4.6	Кривизна плоских кривых.	19
1.4.7	Кривизна.	20
1.4.8	Векторы t , n .	21
1.4.9	Касательные пространственных кривых; нормали.	24
1.4.10	Касание кривой с поверхностью.	26
1.4.11	Соприкасающаяся плоскость.	27
1.4.12	Сопровождающий трехгранник.	28
1.5	Кривизна пространственной кривой.	30
1.5.1	Формулы Френе. Кручение.	30
1.6	Векторы и ковекторы.	32
1.6.1	Фазовое пространство.	32
1.6.2	Действие гладких отображений на векторы.	33
1.6.3	Действие диффеоморфизмов на векторные поля.	34
1.6.4	Преобразование координат градиента функции	35
1.6.5	Скалярное произведение.	36
1.6.6	Метрика и деформация.	38
1.7	Базисные векторы, и формы.	42
1.7.1	Базисные векторы.	42
1.7.2	Базисные 1-формы.	43
1.8	Полилинейные формы.	44
1.9	Пространство полилинейных форм.	45
1.10	Дифференциальные формы.	46
1.11	Многообразия.	47
1.11.1	Подмногообразия.	49
1.12	Деформационное отображение.	49
1.12.1	Параметрические поверхности.	49
1.12.2	Кривые и координатные линии на регулярной поверхности.	50
1.12.3	Первая фундаментальная форма на поверхности.	51
1.12.4	Деформационное отображение.	52
1.12.5	Изометрии. Изгибания.	54
1.13	Вторая квадратичная форма.	56
1.14	Вычисление главных направлений и главных кривизн	57
1.15	Экспоненциальное отображение.	58
1.16	Группы и алгебры Ли.	61
1.16.1	Скобка Ли.	61

1.16.2	Геометрическая интерпретация скобки Ли.	61
1.16.3	Производная Ли.	62
1.16.4	Определение кристаллической решетки.	64
2	Элементы геометрии Римана - Картана.	67
2.1	Расслоенные пространства.	68
2.1.1	Расслоения общего вида.	68
2.1.2	Векторное расслоение.	69
2.1.3	Касательное расслоение.	69
2.2	Связность на векторном расслоении.	70
2.2.1	Координатное определение.	70
2.2.2	Безкоординатное определение.	71
2.3	Аффинная связность.	71
2.3.1	Абсолютный дифференциал в аффинной связности.	73
2.4	Геодезические.	74
2.5	Пространство Римана.	74
2.6	Тензор кручения.	74
2.6.1	Геометрический смысл кручения.	75
2.7	Тензор кривизны.	76
2.7.1	Геометрический смысл кривизны.	77
2.8	Формы кручения и кривизны.	78
2.9	Пространство Римана-Картана.	79
2.10	Кристаллы с учетом микроструктуры.	83
2.10.1	Идеальные кристаллы.	83
2.10.2	Реальные кристаллы.	86
2.11	Совместное рассмотрение.	90
3	Классическая механика кристаллов.	91
3.1	Классические уравнения движения.	92
3.2	Классические уравнения движения кристаллической решетки.	94
3.3	Некоторые виды межмолекулярных потенциалов.	94
3.4	Модель деформированных монокристаллов.	94
3.5	Континуальная теория.	100
3.5.1	Идеальные кристаллы.	100
3.5.2	Деформация.	101
3.5.3	Дислокации.	104
3.5.4	Методы дифференциальной геометрии.	106
3.6	Дислокации и дисклинации.	106
3.6.1	Метрика.	106
3.6.2	Условия совместности.	108
3.6.3	Дислокации и дисклинации.	108
3.6.4	Континуум Коссера.	109
3.6.5	Основы калибровочного описания дислокаций.	110
3.6.6	Вывод.	113

Введение.

Этот конспект лекций написан студентом при изучении физики твердого тела и последующего изучения дифференциальной геометрии. Целью появления этого документа является систематизация основных, наиболее базовых понятий данных дисциплин. К тому же, в последнее время появилась тенденция (я бы даже сказал мода) на геометрические методы в физике. Отбор материала с точки зрения автора должен как можно глубже выявить связь базовых понятий физики твердого тела с дифференциальной геометрией и топологией. С этой целью в первой главе "Прхождение упругих волн через кристаллы." вводятся некоторые понятия динамики кристаллической решетки как в континуальном приближении так и с учетом микроструктуры, здесь же, рассматриваются проблемы и методы их решения возникающие при учете неидеальностей кристаллов, таких как фоновые деформации и дислокации методами теории упругости и численными методами. Кратко рассмотрен метод функций Грина, который в ряде случаев дает исчерпывающие результаты в динамике решетки. Во второй главе, с целью овладения геометрическими методами исследования вводятся основные понятия дифференциальной геометрии, тут так же отбор материала диктовался его применимостью к проблемам физики твердого тела.

Глава 1

Введение в дифференциальную геометрию.

1.1 Мотивация.

Как отмечалось в 1.5, в масштабах сравнимых с постоянной решетки перестает работать континуальная теория упругости. Но желание провести анализ, континуальными методами, сред с микроструктурой остается. Чтобы выйти из сложившейся ситуации целесообразно перенести взаимодействие на геометрию. Такой подход применяется в общей теории относительности. Там гравитационное взаимодействие переносится на геометрию пространства. Пространство может обладать некоторой кривизной, и за счет этого траектории тел движущихся исключительно по инерции могут быть отличны от прямых в евклидовом пространстве. В теоретической физике часто взаимодействия переносятся на геометрию. Достаточно отметить, что Гамильтонова механика может трактоваться как геометрия в симплектическом пространстве.

Топология, геометрия и механика непрерывно деформированных сред, сред с дислокациями, сред с дисклинациями существенно различна. Это, очевидно, хорошо разработанные области математики, так же существует обширная литература по геометрическим методам в математической физике. Естественно, чтение этой главы не может заменить чтение математических монографий, но позволит сократить время и усилия на рафинирование математических понятий при изучении данного вопроса.

1.2 Метрические и топологические пространства.

Множество - совокупность *отделимых* предметов или понятий, объединенных каким-нибудь свойством. Понятие множества не сводимое к другим понятиям.

Множество называется *счетным* если все его элементы можно перенумеровать натуральными числами. Например множества целых, рациональных чисел являются счетными множествами. Множества вещественных чисел \mathbb{R} и комплексных чисел \mathbb{C} представляют собой примеры *несчетных* множеств, поскольку их элементы невозможно пронумеровать натуральными числами. Множество называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа элементов.

1 ПРИМЕР. Множество поворотов евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 на угол $\pi/2$ является конечным и состоит из четырех элементов.

1.2.1 Отображения множеств.

Пусть задано два непустых множества \mathbb{X} и \mathbb{Y} . Если каждому элементу $x \in \mathbb{X}$ поставлен в соответствие единственный элемент $y \in \mathbb{Y}$, то говорят что задано отображение из \mathbb{X} в \mathbb{Y} и пишут $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$. Рис.

Элемент $y \in \mathbb{Y}$ называют *образом* элемента $x \in \mathbb{X}$ и обозначают $y = f(x)$.

Определение 1.2.1 Сюръекция (отображение *на*, или *накрытие*) это такое отображение $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ что для любого $y \in \mathbb{Y}$ существует по крайней мере один такой элемент $x \in \mathbb{X}$, что $f(x) = y$.

Другими словами *сюръекция* это когда разным y соответствуют разные x :

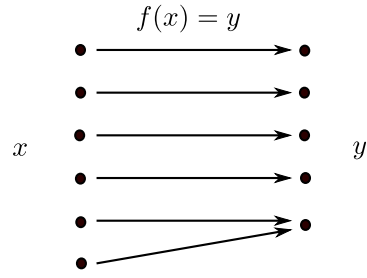


Рис. 1.1: Сюръекция.

$y' \neq y'' \Rightarrow f^{-1}(y') \neq f^{-1}(y'')$
но не обязательно наоборот.

Сюръекция это взаимно однозначное соответствие \mathbb{Y} на \mathbb{X} .

Образ каждого элемента x , принадлежащего множеству значений функции $f : y \in \mathbb{Y}$ состоит в точности из одного элемента.

Не является взаимно однозначным соответствием заданным на \mathbb{X}

Сюръективные отображения также называют *неоднолистными*. Например функция заданная на римановой поверхности в теории функций комплексного переменного называется *неоднолистной* функцией.

Определение 1.2.2 Инъекция это такое отображение $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ что для любого $x \in \mathbb{X}$ существует по крайней мере один такой элемент $y \in \mathbb{Y}$, что $f(x) = y$.

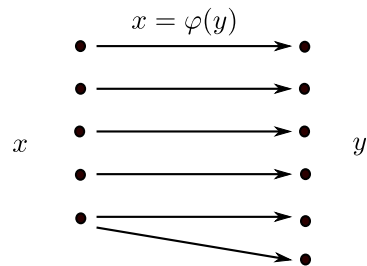


Рис. 1.2: Инъекция.

Другими словами *инъекция* это когда разным x соответствуют разные y :

$x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ но не обязательно наоборот.

Прообраз каждого элемента y , принадлежащего множеству значений функции $f : y \in \mathbb{Y}$ состоит в точности из одного элемента.

Не является взаимно однозначным соответствием заданным на \mathbb{Y}

Инъективные отображения также называют *неоднозначными*. Например $w = z^2$, $z = \pm\sqrt{w}$. Т.е одной и той же точке z из области определения функции f^2 соответствует в данном случае два значения w из области значения этой функции.

Определение 1.2.3 Биекция это такое отображение $f : y \in \mathbb{Y}$ которое одновременно сюръекция и инъекция.

Определение 1.2.4 Если отображение f множества $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n$ в пространство \mathbb{R}^n взаимно-однозначно и непрерывно на \mathbb{X} и обратное-ему отображение f^{-1} непрерывно

на множестве $f(\mathbb{X})$, то f называется гомеоморфным отображением или гомеоморфизмом, а множество $f(\mathbb{X})$ - гомеоморфным образом множества \mathbb{X} или, что тоже, множеством, гомеоморфным множеству \mathbb{X} .

Ясно, что если f - гомеоморфизм множества \mathbb{X} , то обратное ему отображение f^{-1} является гомеоморфизмом множества $f(\mathbb{X})$.

1.2.2 Метрические пространства.

Пусть \mathbb{X} произвольное непустое множество. Говорят, что на \mathbb{X} задана метрика (расстояние), если каждой паре элементов поставлено в соответствие единственное неотрицательное число, удовлетворяющее трем условиям (аксиомам метрического пространства).

1. $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для $\forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \forall x, y, z \in \mathbb{X}$ (аксиома треугольника);

Определение 1.2.5 Пара (\mathbb{M}, ρ) т.е. множество \mathbb{X} с заданной на нем метрикой называется метрическим пространством. Если $\mathbb{A} \subset \mathbb{X}$, то пара (\mathbb{A}, ρ) называется *подпространством* пространства (\mathbb{M}, ρ) .

2 ПРИМЕР.

$$\rho(x, y) = |x - y| \quad (1.1)$$

Справедливость аксиом метрического пространства вытекает из свойств функции абсолютной величины числа. Полученное пространство называется *одномерным арифметическим пространством* или *числовой прямой*. Если мы возьмем

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}; \quad (1.2)$$

Получим метрическое пространство, называемое *n-мерным арифметическим пространством*, которое обозначается \mathbb{R}^n .

Определение 1.2.6 Открытым шаром радиуса r и с центром в точке $x_0 \in \mathbb{M}$ называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше r

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{M}, \rho(x_0, x) < r\} \quad (1.3)$$

Определение 1.2.7 Замкнутым шаром радиуса r и с центром в точке x_0 называется множество точек этого пространства, расстояние до которых меньше или равно r

$$B[x_0, r] = \{x \in \mathbb{M}, \rho(x_0, x) \leq r\}. \quad (1.4)$$

Определение 1.2.8 Окрестностью точки x (сферической окрестностью) называется открытый шар с центром в этой точке и радиуса ε .

В пространстве \mathbb{R}^1 открытым шаром $B(x_0, r)$ является интервал $(x_0 - r, x_0 + r)$.

Пусть \mathbb{A} - произвольное множество метрического пространства (\mathbb{M}, ρ) .

Определение 1.2.9 Точка $a \in \mathbb{A}$ называется *внутренней точкой* множества \mathbb{A} , если существует окрестность этой точки, целиком входящая во множество \mathbb{A} . Совокупность всех внутренних точек \mathbb{A} называется *внутренней окрестностью* множества \mathbb{A} и обозначается \mathbb{A}^0 (другое обозначение $\text{int}\mathbb{A}$).

Определение 1.2.10 Множество, состоящее только из внутренних точек называется *открытым*.

Приведем следующую теорему без доказательства. В принципе оно очевидно.

ТЕОРЕМА 1.2.1 Пересечение конечного числа, так же как и объединение любой совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.

Определение 1.2.11 Всякое открытое множество, содержащее точку называется ее окрестностью.

Определение 1.2.12 Точка $x \in \mathbb{M}$ называется точкой прикосновения множества \mathbb{A} если любая окрестность этой точки содержит по крайней мере одну точку множества \mathbb{A} .

Каждая точка множества \mathbb{A} является его точкой прикосновения, ибо всякая окрестность точки $a \in \mathbb{A}$ содержит саму точку a . Но не каждая точка прикосновения данного множества ему принадлежит.

Определение 1.2.13 Совокупность всех точек прикосновения множества $\mathbb{A} \in \mathbb{M}$ называется замыканием множества \mathbb{A} и обозначается $\bar{\mathbb{A}}$.

$\mathbb{A} \subset \bar{\mathbb{A}}$, т.к. каждая точка множества \mathbb{A} является его точкой прикосновения.

Определение 1.2.14 Множество \mathbb{A} называется замкнутым, если $\mathbb{A} = \bar{\mathbb{A}}$, т.е. если оно содержит все свои точки прикосновения.

3 ПРИМЕР. Интервал $(0, 1)$ не является замкнутым множеством, а отрезок $[0, 1]$ - замкнутое множество.

Определение 1.2.15 Точка $a \in \mathbb{A}$ называется предельной точкой множества \mathbb{A} , если в любой окрестности точки содержится бесчисленное количество точек из множества \mathbb{A} . Множество всех предельных точек множества \mathbb{A} называется *производным множеством* и обозначается \mathbb{A}' .

Предельная точка является точкой прикосновения, но не всегда наоборот.

Определение 1.2.16 Если у точки $a \in \mathbb{A}$ существует окрестность не содержащая других точек множества \mathbb{A} , кроме самой точки a , то эта точка называется *изолированной точкой* множества \mathbb{A} .

Каждая точка множества \mathbb{A} , не являющаяся предельной точкой является изолированной точкой.

Определение 1.2.17 Каждая точка, точка прикосновения или предельная точка или изолированная.

Определение 1.2.18 Для всякого множества $A \in \mathbb{M}$, разность множеств \mathbb{M} и \mathbb{A} , т.е. множество \mathbb{M}/\mathbb{A} называется его дополнением в пространстве \mathbb{M}

ТЕОРЕМА 1.2.2 Для того чтобы множество было открытым, необходимо и достаточно чтобы его дополнение было замкнутым (чтобы дополнению принадлежали все точки прикосновения). Это очевидно, но мы рассмотрим доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость.

Пусть A - открытое множество. Тогда никакая точка $a \in A$ не является точкой прикосновения его дополнения $F = X/A$, т.к. множество A будучи открытым, является окрестностью точки a и не содержит точек множества F . Следовательно, все точки прикосновения множества F содержатся в F , что и означает замкнутость множества F . Докажем достаточность.

Пусть F является замкнутым множеством и пусть $a \in A = X \setminus F$. В силу замкнутости F точка a не является его точкой прикосновения, поэтому существует ее окрестность ε не пересекающаяся с множеством F и следовательно, такая, что $\varepsilon \subset A$. Таким образом, любая точка множества A является его внутренней точкой. Т.е. A открыто.

Из этой теоремы вытекает ряд важных определений.

Определение 1.2.19 Множество замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение открыто.

Определение 1.2.20 Пересечение любой совокупности и объединение конечного числа замкнутых множеств являются замкнутыми множествами.

Действительно, пусть $\{F_\alpha\}$ замкнутые множества, тогда по теореме 1.2.2 множества $A_\alpha = X \setminus F_\alpha$ являются открытыми:

$$\cap_\alpha F_\alpha = \cap_\alpha (X \setminus A_\alpha) = X \setminus \cup_\alpha A_\alpha \quad (1.5)$$

Множество $\cup_\alpha A_\alpha$ по теореме 1.2.1 открыто как объединение открытых множеств. Следовательно его дополнение $\cap_\alpha F_\alpha = X \setminus \cup_\alpha A_\alpha$ согласно теореме замкнуто.

Точка b называется *внешней точкой* множества A , если она является внутренней точкой его дополнения, т.е. множества X/A . Другими словами, существует окрестность точки b не имеющая с множеством A общих точек.

1.2.3 Предел отображений.

Пусть \mathbb{R}^n и \mathbb{R}^m - соответственно n -мерное и m -мерное метрические пространства такие что если $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ то

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|. \quad (1.6)$$

$X \subset \mathbb{R}^n$ и отображение f отображает множество X в пространство \mathbb{R}^m : $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, т.е. $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$, $x \in X \subset \mathbb{R}^n$.

Если $m = 1$, а $n > 1$, то отображение f называется действительной функцией многих переменных $\{x_n\}$: $y = f(x_1, \dots, x_2)$.

Если $m > 1$, то каждая координата y^i точки $y = f(x) \in \mathbb{R}^m$ является действительной функцией точки x . Обозначим эти функции f_j , $j = 1, 2, \dots, m$: $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$.

Функции $f_j: X \rightarrow \mathbb{R}$ называются *координатными функциями отображения* f . Они являются, вообще говоря (а точнее при $n > 1$), функциями многих переменных.

Определим понятие предела отображений, которое является обобщением понятия предела функции одной переменной.

Определение 1.2.21 Точка a называется пределом отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, при $x \rightarrow x^{(0)}$ (или в точке $x = x^{(0)}$), если для любой последовательности $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \dots$, такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = a. \quad (1.7)$$

Для предела отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ в точке $x^{(0)}$ используется обозначение $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x)$.

Сформулируем это определение в терминах окрестностей.

Определение 1.2.22 Точка a называется пределом отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, при $x \rightarrow x^{(0)}$ (или в точке $x = x^{(0)}$), если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что

$$f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a). \quad (1.8)$$

Другими словами, отображение окрестности, как бы мало оно ни было, содержится в образе.

Поскольку функции многих переменных являются частным случаем рассматриваемых отображений, то определение предела отображения содержит в себе, в частности, определение предела функций, принимающих действительные значения.

Непрерывность отображений в точке.

При рассмотрении предела отображения в данной точке эта точка может принадлежать отображаемому множеству, так и не принадлежать ему.

Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $x^{(0)} \in X$, и существует предел $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x)$, то $\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

Определение 1.2.23 Если предел отображения в точке равен его значению в этой точке, то отображение называется непрерывным в ней. Иначе говоря, равенство

$$\lim_{x \rightarrow x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) \quad (1.9)$$

является определением непрерывности отображения в точке.

Можно сформулировать понятие непрерывности отображения и в терминах пределов последовательностей.

Определение 1.2.24 Отображение $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$, $X \subset \mathbb{R}^n$ непрерывно в точке $x^{(0)}$ в том и только в том случае, когда для любой последовательности точек $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, \dots$, сходящейся к точке $x^{(0)}$: $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, выполняется условие

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x^{(k)}) = f(x^{(0)}) \quad (1.10)$$

Это сразу следует из равносильности определений (1.2.21) и (1.2.22)

1.2.4 Топологические пространства.

Топологическое пространство является обобщением метрического, в котором оперируют лишь со свойствами непрерывности и сходимости, не вводя понятия расстояния.

В определении топологического пространства сначала определяется семейство множеств называемых *открытыми*, а затем через эти открытые множества определяется окрестность.

Определение 1.2.25 Топологическим пространством называется пара (M, \mathcal{T}) , состоящая из множества точек $x \in T$ и некоторого семейства $\{U_i\}_{i \in I} = \mathcal{T}$ своих подмножеств, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) пустое множество \emptyset и все множество M принадлежат \mathcal{T} ;
- 2) пересечение любой пары подмножества из \mathcal{T} принадлежит \mathcal{T} ;
- 3) объединение любого семейства подмножеств \mathcal{T} принадлежит \mathcal{T} .

Элементы семейства \mathcal{T} называются *открытыми множествами* пространства M , а семейство открытых множеств \mathcal{T} - *топологией* пространства M . Некоторое семейство $\{B_j\}_{j \in I} = \mathcal{J}$ открытых множеств называется *базой* топологии пространства M , если каждое множество из \mathcal{T} есть объединение каких-либо множеств из \mathcal{J} .

Таким образом элементы \mathcal{T}_α топологии \mathcal{T} по определению есть открытые множества.

Подмножество $A \subset M$ называется *замкнутым* в (X, \mathcal{T}) , если его дополнение $F = X \setminus A$ - открыто в (M, \mathcal{T}) .

Пусть задано топологическое пространство (M, \mathcal{T}) , где M -произвольное множество, \mathcal{T} - топология.

Определение 1.2.26 Множество $V \subset M$ называется *окрестностью* точки $x \in M$, если существует открытое множество $U \in \mathcal{T}$, такое, что $x \in U \subset V$.

После того как мы определили окрестность без привлечения функции $\rho(x, y)$, определения (??) переносятся без изменений на топологические пространства.

Пустое множество \emptyset - это множество, не содержащее ни одного элемента.

Одна и та же топология \mathcal{T} на множестве M может иметь много баз.

На любом множестве можно задать топологию, и не одну. Исключения составляют пустое множество \emptyset (топология состоит из одного открытого множества - самого \emptyset) и множество, состоящее из одного элемента. В последнем случае топология единственна и состоит из двух открытых множеств: пустого множества и самого элемента.

4 ПРИМЕР. Пусть X - множество. Будем считать, что каждая точка является открытым множеством и их совокупность образует базу топологии. Такую топологию называют *дискретной*.

5 ПРИМЕР. Пусть M - множество. Будем считать, что вся топология M состоит из двух множеств: пустого множества и всего M . Это - пример другой крайности, и поэтому такую топологию называют *антидискретной*. Антидискретную топологию называют также *тривиальной*, потому что она слишком бедна.

6 ПРИМЕР. Важный частный случай топологического пространства - арифметическое пространство \mathbb{R}^n

Определение 1.2.27 Топологическое пространство называется *хаусдорфовым*, если любую пару его точек можно окружить непересекающимися друг с другом открытыми множествами.

1.3 Элементы алгебры.

Пусть A, B, C - тройка непустых множеств. Бинарной операцией на паре A, B со значениями в C называется *отображение* $P \rightarrow C$, где $P \subset A \times B$. $A \times B$ - прямое произведение множеств, обозначает множество элементов которого являются всевозможные упорядоченные пары (x, y) , $\forall x \in X, \forall y \in Y$

Бинарную операцию принято обозначать знаком действия. Например $x \circ y$ результат применения произвольной бинарной операции \circ к двум элементам x и y .

Бинарная операция \circ называется *коммутативной*, если ее результат не зависит от перестановки элементов: $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in M$.

Бинарная операция \circ называется *ассоциативной*, если

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z), \quad \forall x, y, z \in M$$

Для ассоциативной операции \circ результат вычисления $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ не зависит от порядка вычисления (расстановки скобок) и потому позволяет опускать скобки в записи.

Если абстрактную бинарную операцию на M называют умножением, то ее результат для элементов $x, y \in M$ называют произведением и обозначают $x \cdot y$, а саму запись - *мультипликативной* формой записи бинарной операции \circ .

Если бинарную операцию называют сложением, то образ пары элементов $x, y \in M$ называют суммой и обозначают $x + y$? саму запись - *аддитивной* формой записи бинарной операции \circ .

Группоид. Множество X с заданной на нем бинарной операцией, называется группоидом.

Если операция в группоиде обозначается символом $+$, то ее называют сложением и говорят, что группоид записан *аддитивно*. Если операция в группоиде обозначается символом \cdot , то ее называют умножением и говорят, что группоид записан *мультипликативно*.

Полугруппа. Пара (X, \cdot) , состоящая из множества X и бинарной операции \cdot называется полугруппой, если операция \cdot ассоциативна.

Другими словами полугруппа - это ассоциативный группоид.

Моноид. Пара (X, \cdot) состоящая из множеств X и бинарной операции \cdot называется моноидом, если выполнены условия:

1. операция \cdot ассоциативна, то есть $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ для всех $x, y, z \in X$
2. существует (нейтральный) элемент $e \in X$ такой, что $e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in X$.

Моноид с операцией называется коммутативным, если - коммутативна, то есть для любых $x, y \in X$ выполняется $x \cdot y = y \cdot x$.

Таким образом, моноид - это полугруппа, обладающая нейтральным элементом

Группа. Пара (G, \circ) , состоящая из множества G и бинарной алгебраической операции \circ , называется группой если:

1. основная операция ассоциативна, $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ для любых $x, y, z \in G$;
2. существует единичный элемент $e \in G$ такой, что $e \circ x = x \circ e = x$ для любого $x \in G$
3. для каждого элемента $x \in G$ существует обратный $x^{-1} \in G$ такой, что $x^{-1} \circ x = x \circ x^{-1} = e$.

Таким образом группа - это моноид, в котором каждый элемент обладает обратным.

В группе состоящей из всех отображений множества X в себя, рассмотрим подмножество $S(X)$ всех взаимнооднозначных отображений в себя. Тогда $S(X)$ является группой, которая называется *группой перестановок* множества X .

Абелева группа. Группа, в которой *основная* операция коммутативна называется коммутативной или абелевой группой. Пример. Множество целых чисел \mathbb{Z} с операцией сложения $+$ является абелевой группой.

Подгруппа. Подмножество H группы G называется подгруппой, если оно:

1. содержит единицу группы G : $e \in H$
2. замкнуто относительно операции в G : $x \cdot y \in H$ для любых $x, y \in H$;
3. замкнуто относительно взятия обратного элемента: $x^{-1} \in H$ для любого $x \in H$.

Подгруппа $H \subseteq G$ называется *нормальной* и записывается $H \triangleleft G$, если она инвариантна относительно действия внутренних автоморфизмов, то есть

$x \circ h \circ x^{-1} \in H$ для всех $h \in H$ и всех $x \in G$. В абелевой группе любая подгруппа нормальна. Т.к

Пусть G - абелева группа с операцией $+$ и H - ее подгруппа. Для любых $x \in G$ и $h \in H$ в силу свойства коммутативности получаем, что

$$x + h + (-x) = x + (-x) + h = 0 + h = h \in H$$

Действие группы на множестве.

Пусть X - множество, G - группа. Под действием G на X (слева) будем понимать *отображение* $G \times X \rightarrow X : (g, x) \mapsto gx$ такое, что выполнены условия:

1. $(g_1 g_2)x = g_1(g_2 x)$ для всех $g_1, g_2 \in G$ и $x \in X$,
2. $ex = x$ для всех $x \in X$.

Множество X при этом называют G - множеством. Каждый элемент $g \in G$ определяет отображение $T_g : X \rightarrow X$ по правилу $T_g(x) = gx$. Из определения следует, что $T_{g_1} \circ T_{g_2} = T_{g_1 g_2}$, поэтому отображение $g \mapsto T_g$ определяет *гомоморфизм* $T : G \rightarrow S(X)$ в группу перестановок множества X .

Предложение 1. Действие G задает на множестве X отношение эквивалентности по правилу:

$x_1 \sim x_2$, если существуют элемент $g \in G$ такой, что $x_2 = gx_1$.

Доказательство.

1. Свойство рефлексивности выполнено, так как $x = ex$ для любого $x \in X$;
2. если $x_1 = gx_2$, то $x_2 = g^{-1}x_1$ для любых $x_1, x_2 \in X, g \in G$, откуда следует симметричность;
3. если $x_1 = g_1 x_2$ и $x_2 = g_2 x_3$, то $x_1 = g_1(g_2 x_3) = (g_1 g_2)x_3$ для любых $x_1, x_2, x_3 \in X, g_1, g_2 \in G$, поэтому имеет место транзитивность.

Определение 2. Классы эквивалентности отношения эквивалентности из предложения 1 называются *орбитами*. Таким образом, орбита, содержащая точку есть подмножество.

Определение 3. Если все элементы множества эквивалентны, то действие называется транзитивным.

Часто рассматривают действие группы на себе. При этом выделяют следующие действия:

Пример 1. Действие левыми сдвигами: $L_g x = gx$ для всех $g, x \in G$.

Пример 2. Действие правыми сдвигами: $R_g x = xg^{-1}$ для всех $g, x \in G$.

Пример 3. Действие сопряжениями (внутренними автоморфизмами): $A_g x = gxg^{-1}$ для всех $g, x \in G$.

Гомоморфизм. Пусть даны произвольные группы (G, \circ_G) и (H, \circ_H) с единицами e_G и e_H соответственно. Отображение $\varphi : G \rightarrow H$ называется гомоморфизмом групп если:
 $\varphi(x \circ_G y) = \varphi(x) \circ_H \varphi(y)$ для $\forall x, y \in G$.

Фактор группа. Пусть (G, \circ) - группа и (H, \circ) - ее подгруппа и $a \in G$ - произвольный элемент. Подмножество в G вида $aH = \{a \circ h | h \in H\}$ называется *правым смежным классом* группы G по подгруппе H . Подмножество в G вида $aH = \{h \circ a | h \in H\}$ называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H . Любой элемент из левого (правого) смежного класса группы G по подгруппе H называется *представителем смежного класса* aH (Ha). Любые два смежных класса группы G по подгруппе H либо совпадают, либо не имеют общих элементов. Левые (правые) смежные классы образуют *разбиение* группы G .
 Отношения эквивалентности, соответствующие данным разбиениям записываются так:

для левых смежных классов: $g_1 \sim g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1^{-1} \circ g_2 \in H$

для правых смежных классов: $g_1 \sim g_2$ тогда и только тогда, когда $g_1 \circ g_2^{-1} \in H$

Соответственно, левые (правые) смежные классы являются классами эквивалентности по данному отношению.

Индекс подгруппы. Число левых смежных классов группы G по подгруппе H равно числу правых смежных классов G по этой же подгруппе.

Индексом подгруппы H в G называется число левых смежных классов группы G по H . Индекс обозначается символом $(G : H)$.

Индекс тривиальной подгруппы называется порядком группы G . При этом используют обозначения $(G : e)$ или G .

Индекс конечной группы это количество ее элементов.

Определение факторгруппы. Пусть подгруппа H нормальна в G . Тогда множество левых смежных классов группы G по подгруппе H является группой с операцией $g_1 H \circ g_2 H = (g_1 \circ g_2) H$.

Группа смежных классов группы G по нормальной подгруппе H называется *факторгруппой* и обозначается G/H

Бинарное отношение. Бинарным отношением между множествами A, B называется любое подмножество ρ прямого произведения $A \times B$. Часто чтобы обозначить принадлежность упорядоченной пары (x, y) к бинарному отношению ρ вместо записи $(x, y) \in \rho$ используют обозначения $\rho(x, y)$ или $x \rho y$. При этом говорят, что x находится в отношении ρ к y .

Если $A = B$, то говорят, что ρ задано на множестве A .
Пример. Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ и $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Тогда подмножество $\{(a, 2), (c, 3), (d, 5)\}$ в $A \times B$ является бинарным отношением между множествами A и B .
Пример. На множестве действительных чисел \mathbb{R} упорядочены \leq является бинарным отношением на \mathbb{R} , состоящим из всех точек плоскости \mathbb{R}^2 , лежащих не ниже прямой $x - y = 0$

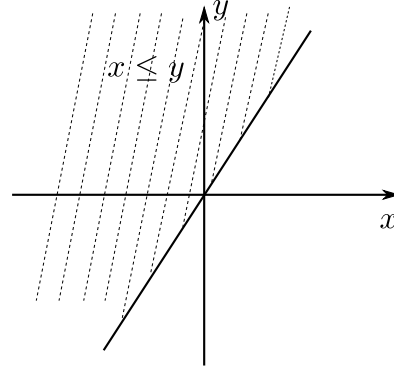


Рис. 1.3: Бинарное отношение на \mathbb{R} состоящее из всех точек плоскости \mathbb{R}^2 , лежащих не ниже прямой $x - y = 0$

Итак бинарное отношение это подмножество.

Отношение эквивалентности. Пусть ρ - некоторое бинарное отношение на множестве A . Будем говорить, что ρ - отношение эквивалентности, если оно одновременно удовлетворяет свойствам

1. рефлексивности: $(x, x) \in \rho$ для всех $x \in A$;
2. симметричности: $(x, y) \in \rho \Rightarrow (y, x) \in \rho$ для всех $x, y \in A$;
3. транзитивности: $((x, y) \in \rho) \wedge ((y, z) \in \rho) \Rightarrow (x, z) \in \rho$ для всех $x, y, z \in A$

В этом случае вместо $(x, z) \in \rho$ употребляется запись $x \sim_\rho z$, где $x, z \in A$

Пример. Отношение равенства $=$ на множестве действительных чисел является отношением эквивалентности.

Подмножество $\bar{x} = \{y \in A | y \sim_\rho x\}$ называется классом эквивалентности, содержащим x . Любой элемент $y \in \bar{x}$ называется представителем класса \bar{x} .

Разбиение множества. Набор подмножеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ называется разбиением множества A , если

1. $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ для любых различных $\alpha, \beta \in I$,
2. $A = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$.

Множество классов эквивалентности по отношению ρ является разбиением множества A .

Это означает, что любые два класса эквивалентности либо совпадают, либо не пересекаются и любой элемент множества A принадлежит какому-либо классу эквивалентности. Любое разбиение множества A определяет некоторое отношение эквивалентности ρ .

Множество всех классов эквивалентности множества A по отношению ρ называется фактормножеством и обозначается A/ρ .

Кольцо $(R, +, \cdot)$ - это множество R , на котором заданы две бинарные операции: $+$ и \cdot , со следующими свойствами:

$\forall a, b \in R (a + b = b + a)$ - Коммутативная операция (коммутативность сложения);

$\forall a, b, c \in R (a + (b + c) = (a + b) + c)$ — Ассоциативная операция (ассоциативность сложения);

$\exists 0 \in R \forall a \in R (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;

$\forall a \in R \exists b \in R (a + b = b + a = 0)$ — существование обратного элемента относительно сложения;

$\forall a, b, c \in R \begin{cases} a \times (b + c) = a \times b + a \times c \\ (b + c) \times a = b \times a + c \times a \end{cases}$ — дистрибутивность.

Пример. Множество целых чисел \mathbb{Z}

Пример. Множество рациональных чисел \mathbb{Q}

Пример. Множество вещественных чисел \mathbb{R}

Коммутативное кольцо. Если кольцо $(R, +, \cdot)$ удовлетворяет дополнительному условию $a \cdot b = b \cdot a$ для любых $a, b \in R$ (коммутативность операции умножения),

то кольцо называется коммутативным.

Ассоциативное кольцо. Если кольцо $(R, +, \cdot)$ удовлетворяет дополнительному условию $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ — для любых $a, b, c \in R$ (ассоциативность умножения),

то кольцо называется ассоциативным.

Ассоциативное с единицей. Если ассоциативное кольцо $(R, +, \cdot)$ удовлетворяет дополнительному условию существует единственный элемент $1 \in R$ такой, что $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ для любого $a \in R$

то кольцо называется ассоциативным кольцом с единицей.

Пример. Множество $Mat_n(\mathbb{Z})$ всех матриц порядка n с целочисленными коэффициентами является ассоциативным кольцом с единицей относительно операций сложения и умножения. Единичным элементом является единичная матрица I . Это кольцо некоммутативно.

Подкольцо и факторкольцо. Подмножество S кольца R называется подкольцом, если S замкнуто относительно всех операций кольца:

$x + (-y) \in S$ и $x \cdot y \in S$ для всех $x, y \in S$,

то есть $(S, +)$ является подгруппой в $(R, +)$

Тело — ассоциативное кольцо с единицей обладающее дополнительным свойством, а именно:

для всех ненулевых $a \in R$ существует обратный элемент (деление) $a^{-1} \in R$ такой, что $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$;

Поле — коммутативное тело. Другими словами поле это тело которое обладает дополнительной операцией коммутативности умножения (см. "коммутативное кольцо").

Линейное (векторное) пространство. Пусть V — некоторое поле. Аддитивная группа V называется векторным пространством, или линейным пространством над полем F , если задано отображение $\alpha \cdot v$, удовлетворяющее условиям:

1. $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$ для всех $\alpha \in F, v_1, v_2 \in V$,

2. $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in F, v \in V$,

3. $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1 \alpha_2)v$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \in F, v \in V$,

4. $1 \cdot v = v$ для всех $v \in V$.

При этом элементы пространства V называются **векторами**, а операция μ — умножением на скаляр (элемент поля).

Данное определение можно переформулировать в терминах модулей.

Пусть задано ассоциативное кольцо R . Пара (M, μ) , состоящая из аддитивной абелевой группы M и отображения $\mu : R \times M \rightarrow M : (r, m) \mapsto r \cdot m$, называется **левым модулем над кольцом R** , или **левым R -модулем**, если выполнены условия:

1. $\forall r \in R, \forall m_1 \in M, \forall m_2 \in M,$

$r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$;

2. $\forall r_1 \in R \forall r_2 \in R \forall m \in M : (r_1 + r_2) \cdot m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$,

3. $\forall r_1 \in R \forall r_2 \in R \forall m \in M : r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 r_2) \cdot m$.

Если кольцо R имеет единицу 1 и выполнено условие $1 \cdot m = m$ для $\forall m \in M$, то модуль называется **унитарным**, или **унитальным**.

Левый унитарный модуль V над полем F называется векторным пространством. В некоммутативной алгебре под векторным пространством понимают более широкий класс модулей, сохраняющий все основные свойства векторных пространств в их классическом понимании: левый унитарный модуль V над телом D называется векторным пространством.

Пусть M — левый модуль над ассоциативным кольцом R и S — подмножество в M .

Определение. Модуль M называется конечно порожденным, или модулем конечного типа, если он имеет конечное число образующих.

Определение. Модуль, порожденный единственным элементом x , записывается в виде Rx и называется главным модулем.

Определение. Множество S называется базисом модуля M , если S не пусто, порождает M и линейно независимо.

Предложение. Если S — базис модуля M , то каждый элемент x из M единственным образом представляется в виде линейной комбинации элементов из S .

Определение. Под **свободным модулем** понимается модуль, обладающий базисом, или же нулевой модуль.

Алгебра.

Определение. Пусть R — коммутативное ассоциативное кольцо с единицей.

Назовем кольцо A алгеброй над R , или R -алгеброй, если на A определена структура (левого) R -модуля, причем структуры кольца и модуля согласованы, то есть

$(r \cdot a_1)a_2 = a_1(r \cdot a_2) = r \cdot (a_1 a_2)$ для $\forall r \in R$ и $\forall a_1, a_2 \in A$.

Если кольцо A ассоциативно, то A называется **ассоциативной алгеброй**, если A — коммутативное кольцо, то говорят о **коммутативной алгебре**.

Определение. Если A является свободным модулем над кольцом R , то размерностью алгебры A над R называется размерность A как свободного R -модуля.

Часто рассматривают алгебры не над произвольным кольцом R , а над полем F . В этом случае размерность алгебры — это размерность векторного пространства A над полем F .

Определение. Множество $B \subset A$ называется **подалгеброй** в A алгебре A если:

1. B — R -подмодуль,

2. B -подкольцо в A .

Определение 4. Всякое поле L , содержащее K в качестве подполя, можно рассматривать как алгебру над K .

Определение. Пусть L является R -алгеброй

Будем говорить, что L это алгебра Ли над R , если выполнены условия:

1. $[x, y] = -[y, x]$ для всех $x, y \in L$, (антикоммутативность);
2. тождество Якоби: $[[x, y], z] + [[y, z], x] + [[z, x], y] = 0$ для всех $x, y, z \in L$.

Замечание. Из условия 1. следует, что $[x, x] = 0 \forall x \in L$.

Пример. Пространство \mathbb{R}^3 с операцией векторного произведения является алгеброй Ли.

Определение. Алгебра Ли L называется абелевой, если $[x, y] = 0$ для всех $x, y \in L$. **Структурные константы..**

Определение. Пусть L - конечномерная алгебра Ли над полем F с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$. Тогда произведение любых двух элементов из базиса можно записать в виде $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$. Элементы c_{ij}^k называются *структурными константами алгебры Ли*.

Предложение. Набор $\{c_{ij}^k\}_{1 \leq i, j, k \leq n}$ элементов из поля F является набором структурных констант некоторой алгебры Ли тогда и только тогда, когда выполнены условия:

1. $c_{ii}^k = 0$,
2. $\sum_{k=1}^n (c_{ij}^k c_{st}^l + c_{jt}^k c_{si}^l + c_{ti}^k c_{sj}^l) = 0$.

Подпространство векторного пространства. Непустое множество векторов W векторного пространства V называется линейным подпространством, если:

1. $w_1 + w_2 \in W$ для любых векторов $w_1, w_2 \in W$;
2. $\alpha w \in W$ для всех $\alpha \in F, w \in W$.

Коразмерность линейного пространства W называется разность $\text{codim}_F W = \dim_F V - \dim_F W$.

Подпространство, коразмерность которого равна 1, называется *гиперплоскостью*.

Факторпространство. Пусть W - подпространство векторного пространства V . Тогда W является подгруппой абелевой группы V , поэтому определена факторгруппа V/W .

Предложение 1. Отображение $\mu : F \times V/W \rightarrow V/W$, определенное правилом:

$$\alpha \bar{v} = \bar{\alpha v} \text{ для всех } \bar{v} \in V/W \text{ и } \alpha \in F$$

корректно, то есть не зависит от выбора представителя смежного класса. Кроме того, данное отображение удовлетворяет всем свойствам из определения векторного пространства.

Определение 5. Факторпространством векторного пространства V по подпространству W называется факторгруппа $\bar{V} = V/W$ с отображением $\mu : F \times V/W \rightarrow V/W$, указанным в предложении о μ .

Базис и размерность линейного пространства.

Размерность линейного пространства. Пусть M - (левый) модуль над ассоциативным кольцом R . Частным случаем аткого модуля является векторное пространство $M = V$ над полем $R = F$.

Пусть S некоторое подмножество элементво из M .

Определение 1. Линейной комбинацией элементов из S называют сумму:

$$\sum_{s \in S} \alpha_s s,$$

где лишь *конечное* число элементов $\alpha_s \in R$ отлично от нуля. Элементы α_s называются коэффициентами линей-

ной комбинации.

Пример 1. Кольцо многочленов $F[T]$ над полем F является, в частности, векторным пространством. Пусть $S = \{1, T, T^2, T^3, \dots, T^n, \dots\}$. Линейная комбинация этих векторов $1 + 2T + 3T^2$ - это многочлен степени 2.

Предложение 1. Множество всех линейных комбинаций элементов из S является подмодулем в модуле M .

Определение 2. Пусть N - число всех линейных комбинаций элементов из S , тогда N называется подмодулем, порожденным S , или R -линейной оболочкой множества S , и обозначается $\langle S \rangle_R$. При этом S называют множеством образующих для N . В частном случае векторного пространства V над полем F данное определение можно переформулировать так:

Определение 2'. Линейной оболочкой подмножества S линейного пространства V называется множество $\langle s | s \in S \rangle_F$ всех линейных комбинаций векторов из S . Говорят также, что оболочка $\langle s | s \in S \rangle_F$ порождена векторами $s \in S$, или что оболочка $\langle s | s \in S \rangle_F$ натянута на вектора $s \in S$.

Пример 2. В кольце многочленов $F[T]$ над полем F выбираем множество $S = \{1, T, T^2, T^3, \dots, T^n, \dots\}$. Линейную оболочку S составляют всевозможные многочлены $a_0 + a_1 + \dots + a_n T_n$, то есть $F[T] = \langle 1, T, T^2, T^2, \dots, T^n, \dots \rangle_F$.

Пример 3. Кольцо многочленов от двух переменных $F[T_1, T_2]$ можно прссматривать как левый модуль над кольцом $F[T_2]$. Пусть $S = \{1, T, T^2, T^2, \dots, T^n\}$, тогда $F[T^2]$ -линейная оболочка множества S состоит из элементов $f_0 + f_1 T_1 + \dots + a_f T_1^n$, где $f \in F[T_2]$. Таким образом, $\langle s | s \in S \rangle_{F[T_2]} = F[T_1, T_2]$.

Линейная зависимость.

Определение 3. Набор элементов S модуля M называют линейно назависимым над R , если из равенства нулю линейной комбинации $\sum_{s \in S} \alpha_s s$ следует, что $\alpha_s = 0$ для всех $s \in S$. Если же существует соотношение $\sum_{s \in S} \alpha_s s = 0$, в котором не все α_s равны нулю, элементы из S называют *линейно зависимыми*.

Если в качестве модуля взять векторное пространство V и рассматривать конечные наборы $S = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$, то определение лeneйной зависимости может быть переформулированно следующим образом:

Определение 3. Система векторов v_1, v_2, \dots, v_n пространства V называется линейно зависимой, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, не равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 v_1 + \alpha_n v_n = 0$. В противном случае векторы v_1, v_2, \dots, v_n называются линейно независимыми.

Базис векторного пространства.

Определение. *Базисом* векторного пространства V над полем F называется система векторов, которая

1. порождает V ,
2. линейно независима.

Определение 4 Размерностью векторного пространства $V \neq 0$ навызается число элементов его базиса.

Размерность векторного пространства V над полем F обозначается через $\dim_F V$. Если базис состоит из бесконечного числа элементов то пространство V называется бесконечномерным.

Пример. Поле действительных чисел \mathbb{R} является беско-

нечномерным векторным пространством над полем рациональных чисел \mathbb{Q} .

1.4 Евклидовы пространства.

1.4.1 Определение евклидовых пространств.

Пусть \mathbb{R} - поле вещественных чисел. При этом каждая точка $x \in \mathbb{R}$ некоторой прямой находится во взаимно однозначном соответствии с вещественным числом, которое обозначается той же буквой x и называется координатой точки. Расстояние l между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}$, по определению равно $l(x, y) = |x - y|$.

Обозначим через \mathbb{R}^n прямое произведение n прямых:

$$\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}. \quad (1.11)$$

где $n \in \mathbb{N}$ - произвольное натуральное число, которое называется *размерностью* пространства \mathbb{R}^n . Точкой x является упорядоченный набор n вещественных чисел $x^\alpha \in \mathbb{R}, \alpha = 1, \dots, n$, которые называются *декартовыми координатами* данной точки.

$$x = \{x^\alpha\} = \{x^1, \dots, x^n\} \in \mathbb{R}^n. \quad (1.12)$$

Каждый из сомножителей входящих в (1.11), называется *координатной прямой*.

Следует различать точку пространства x и ее координаты, которые зависят от выбора системы координат.

Пусть декартовы координаты в трехмерном пространстве таковы, что точке x соответствуют три ее координаты (x_1, x_2, x_3) , точке y соответствуют координаты y_1, y_2, y_3 , то квадрат длины прямолинейного отрезка, соединяющего точки x и y , равен

$$l^2 = |x - y|^2 = (x^1 - y^1)^2 + (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)^2. \quad (1.13)$$

Определение 1.4.1 Пространство в котором *декартовы координаты* обладают свойством (1.13) называется *евклидовым*.

Пусть у нас имеется начало координат - точка O . С каждой точкой евклидова пространства можно связать вектор идущий из точки O . Пусть имеются два таких вектора $\xi = (x^1, x^2, x^3)$ и $\zeta = (y^1, y^2, y^3)$, ведущих из точки O в точки P и Q соответственно. Эти векторы можно покомпонентно складывать и умножать на число. Поэтому Евклидово пространство зачастую рассматривается как линейное (или векторное) пространство в котором расстояние вычисляется по формуле 1.13

Выберем в \mathbb{R}^n три единичных вектора с координатами $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. Тогда любой вектор ξ с координатами (x^1, x^2, x^3) имеет вид $\xi = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$. В евклидовых пространствах нет разницы между верхними и нижними индексами. (см.далее).

1.4.2 Дифференцирование вектор-функций.

Определение 1.4.2 Говорят, что дана вектор-функция $\mathbf{r}(t)$, если каждому значению вещественного переменного t в некоторой области изменения $t_1 \leq t \leq t_2$ отвечает вполне определенное значение вектора \mathbf{r} .

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \quad (1.14)$$

Фиксируем в пространстве некоторую точку O , рис.1.4, и будем при всех значениях t откладывать вектор $\mathbf{r} = \overline{OM}$ именно из этой точки. Тогда точка M опишет тогда в пространстве кривую как функцию скалярного аргумента t . Само уравнение (1.14), выражающее радиус-вектор точки M как функцию скалярного аргумента, называется *векторным параметрическим представлением кривой*.

Установим связь с координатным представлением кривой. Установим в точке O систему прямоугольных декартовых координат в пространстве и обозначим через $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ единичные базисные векторы. Тогда (1.14) можно представить в виде

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (1.15)$$

Но координаты вектора \mathbf{r} совпадают с координатами точки $M(t)$, так что

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_2 \leq t \leq t_1. \quad (1.16)$$

В результате мы перешли от векторного представления кривой (1.14) к ее параметрическому представлению.

Определение 1.4.3 Пусть векторная функция $\mathbf{r}(t)$ определена на множестве $\{t\}$. Говорят, что векторная функция $\mathbf{r}(t)$ имеет производную в точке t_0 , если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t} \quad (1.17)$$

Обозначение: $\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \mathbf{r}'(t)$

Геометрический смысл производной векторной функции ясен из рис.1.4.

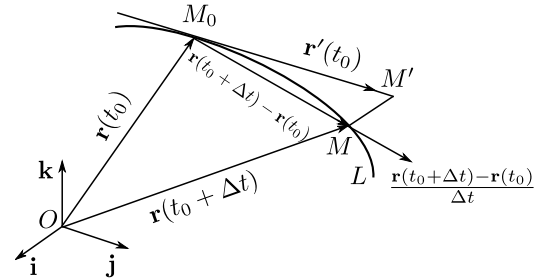


Рис. 1.4: Вектор $\mathbf{r}'(t)$ направлен по касательной к годографу векторной функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ в точке M

Составим разность двух значений этой вектор-функции:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \overline{OM} - \overline{OM_0} = \overline{M_0M}, \quad (1.18)$$

т.е. приращение вектор-функции есть вектор-хорда на кривой, соединяющей исходную точку M_0 с новой точкой M . Разделим приращение $\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)$ на приращение аргумента $t - t_0$ и рассмотрим частное

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \quad (1.19)$$

Так как производилось деление вектора на число получаем вновь вектор. Заставим теперь t стремиться к t_0 . Тогда, значение $\mathbf{r}(t)$ стремиться к $\mathbf{r}(t_0)$ как к пределу, т.е

$$|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)| \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0, \quad (1.20)$$

т.е. длина хорды стремится к нулю при $t \rightarrow t_0$, точка M на кривой стремится в точку M_0 . В частном (1.19) числитель и знаменатель оба стремятся к нулю при $t \rightarrow t_0$. Сам же вектор (1.19) должен стремиться при этом к определенному вектор-пределу, который называется производной вектора $\mathbf{r}(t)$

$$\frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} \xrightarrow{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}'(t_0), \quad (1.21)$$

Итак, производная $\mathbf{r}'(t)$ от вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ направлена по касательной в точке t_0 к кривой, которую $\mathbf{r}(t)$ в нашем истолковании определяет.

По самому определению предела соотношение (1.21) утверждает, что вектор

$$\alpha = \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0)}{t - t_0} - \mathbf{r}'(t_0) \quad (1.22)$$

стремится к нулю при t , стремящемся к t_0 :

$$\alpha \xrightarrow{t \rightarrow t_0} 0 \quad (1.23)$$

Перепишем (1.22), умножив обе его части на $t - t_0$. Получим

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \alpha(t - t_0), \quad (1.24)$$

левая часть совпадает с вектором смещения $\overline{M_0M}$, переводящим нас из данной точки $M_0(t_0)$ в некоторую другую точку кривой $M(t)$. Этот вектор смещения (вектор-хорда) в правой части разложен на два слагаемых. Первое из них равно вектор-производной в точке t с численным коэффициентом $t - t_0$ и, следовательно, направлено по касательной в точке M_0 (вектор $\overline{M_0M'}$). Второе изображено вектором $\overline{M'M}$.

Таким образом, вектор $\overline{M_0M}$, выражающий смещение из точки M_0 в бесконечно близкую точку M по кривой, распадается на смещение $\overline{M_0M'}$ по касательной, пропорциональное приращению аргумента $t - t_0$, и наветор с модулем, бесконечно малым высшего порядка сравнительно с $t - t_0$. Смещение $\overline{M_0M'}$ называется главной линейной частью смещения $\overline{V_0M}$, или дифференциалом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ в точке $t = t_0$:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t_0)dt, \text{ где } dt = t - t_0 \quad (1.25)$$

Отсюда

$$\mathbf{r}'(t_0) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.26)$$

Если $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ - координаты векторной функции $\mathbf{r}(t)$, то

$$\mathbf{r}^{(n)}(t) = x^{(n)}(t)\mathbf{i} + y^{(n)}(t)\mathbf{j} + z^{(n)}(t)\mathbf{k}. \quad (1.27)$$

Если у векторной функции $\mathbf{r}(t)$ существуют и непрерывны все производные до порядка n включительно, то пишут $\mathbf{r}(t) \in C^n$.

Пусть функция $\mathbf{r}(t) \in C^{n-1}$ в некоторой окрестности точки t_0 и существует производная $\mathbf{r}^{(n)}(t_0)$. Обозначим $t = t_0 + \Delta t$. Тогда для $\mathbf{r}(t)$ справедлива формула Тейлора:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}(t_0) + \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{r}''(t_0)(t - t_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!}\mathbf{r}^{(n)}(t_0)(t - t_0)^n + \mathbf{Q}_n \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned} \quad (1.28)$$

где \mathbf{Q}_n - вектор. В координатах \mathbf{Q}_n имеет вид

$$\mathbf{Q}_n = x^{(n+1)}(t_1)\mathbf{i} + y^{(n+1)}(t_2)\mathbf{j} + z^{(n+1)}(t_3)\mathbf{k}. \quad (1.29)$$

Так, как рассматривая $x^{(n+1)}(t)$, $y^{(n+1)}(t)$, $z^{(n+1)}(t)$, мы тем самым предполагаем непрерывность этих функций в промежутке $T_0 \leq t \leq T$, то в этом же промежутке они будут и ограниченными при всех значениях t , оставаясь по абсолютной величине меньше некоторого постоянного. В частности и коэффициенты в (1.29), т.е. координаты вектора \mathbf{Q}_n , будут ограничены при любых значениях t_1, t_2, t_3 , а потому и модуль этого вектора остается во всех случаях ограниченным

$$|\mathbf{Q}_n| < C_n \quad (1.30)$$

где C_n - положительное постоянное, одно и то же при любых значениях t и t_0 в промежутке T_0, T .

Возьмем, в частности, это разложение при $n = 1$:

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) + \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}. \quad (1.31)$$

Мы видим, что (1.31) представляет собою уточнение формулы (1.24); роль α играет здесь $\mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}$, где \mathbf{Q}_1 ограничено по модулю.

Для вычисления длины дуги кривой, полезно оценить разность длин хорды рис.(1.4)

$$\overline{M_0M} = \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(t_0) \quad (1.32)$$

и соответствующего смещения по касательной (дифференциала)

$$\overline{M_0M'} = \mathbf{r}'(t_0)(t - t_0) = d\mathbf{r}. \quad (1.33)$$

Сейчас мы берем значения t_0 и t произвольно, не предполагая, что t обязательно стремится к t_0 . Согласно (1.31) разность самих векторов имеет вид

$$\overline{M_0M} - \overline{M_0M'} = \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2} \quad (1.34)$$

или

$$\overline{M'M} = \mathbf{Q}_1 \frac{(t - t_0)^2}{2}. \quad (1.35)$$

По элементарным свойствам треугольника M_0MM' взятая по модулю разность двух сторон всегда меньше или равна третьей стороне, т.е.

$$|M_0M - M_0M'| \leq M'M \quad (1.36)$$

Здесь M_0M , M_0M' , $M'M$ означают длины (модули) векторов $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M'}$, $\overline{M'M}$. Но так как

$$\overline{M'M} = \frac{1}{2}\mathbf{Q}_1(t - t_0)^2, \quad (1.37)$$

то пользуясь ограниченностью \mathbf{Q}_1 по модулю, (1.30), получим

$$M'M = \frac{1}{2}|\mathbf{Q}_1|(t - t_0)^2 \leq \frac{1}{2}C_1(t - t_0)^2 \quad (1.38)$$

и следовательно

$$|M_0M - M_0M'| \leq \frac{1}{2}C_1(t - t_0)^2, \quad (1.39)$$

где M_0M - любая хорда нашей кривой, соединяющая какую-то точку $M_0(t_0)$ с какой-то точкой $M(t)$, а M_0M'

- соответствующий отрезок, отложенный по касательной в точке M_0 (т.е. длина вектор-дифференциала $\mathbf{r}'(t_0)(t - t_0)$). Это и есть нужная нам оценка. Существенно здесь то, что C_1 имеет одно и тоже значение при *любых* значениях t_0, t в промежутке T_0, T , т.е. одно и тоже значение при *любом* выборе точки M_0, M на рассматриваемой кривой $\mathbf{r}(t)$, $T_0 \leq t \leq T$.

1.4.3 Репараметризация кривой.

Таким образом, направление производной $\mathbf{r}'(t)$ получило вполне ясное геометрическое истолкование. Модуль же $\mathbf{r}'(t)$ такого истолкования не получил. Вопрос этот связан с произволом в выборе параметризации.

Значениям t в промежутке $0 \leq t \leq$ однозначно (и если устранить точки самопересечения то взаимнооднозначно) отвечают точки кривой. Таким образом, параметр t в указанных пределах играет роль координатной системы на кривой; он нужен для того, чтобы своими значениями взаимно однозначно отмечать точки кривой. Но так как геометрически он ничем не связан с кривой, то вполне возможно, сохраняя ту же кривую, ввести на ней другую *параметризацию*. Для этого достаточно ввести новое переменное τ , связанное с t функциональной зависимостью

$$t = t(\tau), \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1. \quad (1.40)$$

Будем предполагать, что производная $t'(\tau)$ все время положительна, так, что функция $t(\tau)$ монотонна и следовательно допускает обращение, т.е. можно записать

$$\tau = \tau(t), \quad T_0 \leq t \leq T \quad (1.41)$$

и значения t от T_0 до T находятся во взаимно однозначном соответствии со значениями τ от τ_0 до τ_1 . Отсюда ясно, что и те и другие одинаково годятся, чтобы отмечать точки на кривой, и выбор параметризации на кривой зависит от нашего произвола.

Вставим в (1.14) выражение t через τ . Получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\{t(\tau)\}. \quad (1.42)$$

Очевидно, вид функциональной зависимости \mathbf{r} от τ уже не тот, что от t , тем не менее кривая осталась прежней, так как при τ , пробегающем значения от τ_0 до τ_1 , t по прежнему пробегает значения от T_0 до T и радиус вектор $\mathbf{OM} = \mathbf{r}(t)$ описывает своим концом M прежнюю кривую. Итак, на неизменной кривой, заданной вектор-функцией (1.14), можно произвольно менять параметризацию, отчего меняется вид функциональной зависимости (1.14).

В том обстоятельстве, что параметризация кривой строится по произволу и не имеет в общем случае геометрического смысла, лежит причина того, что модуль произвольной вектор функции $\mathbf{r}(t)$ по параметру не находит геометрического истолкования. Действительно, дифференцируя (1.42) по новому параметру τ как функцию от функции, получаем $\mathbf{r}'(t)t'(\tau)$. Мы видим, что производная радиус-вектора той же самой кривой, но по новому параметру, отличается от производной по старому параметру $\mathbf{r}'(t)$ скалярным множителем $t'(\tau) > 0$. Это означает, что направление производной осталось прежним - и оно действительно не зависит от выбора параметра, так как всегда идет по касательной, - а модуль производной изменился и, следовательно, он зависит от произвола в выборе параметра и

по отношению к самой кривой является величиной случайной.

Если под параметром t понимать время, то вектор (1.19) получает смысл вектора средней скорости за время от t_0 до t , а его предельное значение $\mathbf{r}'(t_0)$ - вектора мгновенной скорости в момент t_0 . Далее, переход к новому параметру τ будет означать, что точка M пробегает *прежнюю* траекторию, но иным образом с течением времени, например, раньше ее движение было ускоренным, а теперь будет замедленным, и т.п. Параметр τ будет снова означать время, но при другом законе движения по прежней траектории.

Если закон движения по данной траектории изменяется, то точка M будет проходить через прежние положения с другими скоростями, т.е. вектор скорости $\mathbf{r}'(t)$ будет иметь другую величину (хотя и будет направлен по прежнему по касательной).

1.4.4 Длина дуги.

Определим длину дуги кривой, для этого рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad T_0 \leq t \leq T. \quad (1.43)$$

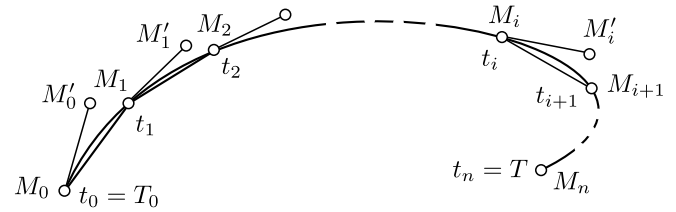


Рис. 1.5: Определение длины дуги кривой.

Вставим между крайними значениями T_0 и T параметра t произвольно выбранные последовательные промежуточные значения, рис.(1.5):

$$t_0, t_1, t_2, \dots, t_n \quad (1.44)$$

Возьмем какой-нибудь из отрезков, $M_i M_{i+1}$, отвечающий переходу от $t = t_i$ к $t = t_{i+1}$, построим хорду $M_i M_{i+1}$ и соответствующий вектор-дифференциал

$$M_i M_{i+1} = \mathbf{r}'(t_i)(t_{i+1} - t_i) \quad (1.45)$$

направленный по касательной в точке M_i .

Составим сумму длин всех хорд $M_i M_{i+1}$:

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M_{i+1}. \quad (1.46)$$

С другой стороны, составим сумму длин всех соответствующих отрезков по касательным

$$\sum_{i=0}^{n-1} M_i M'_i = \sum_{i=0}^{n-1} |\mathbf{r}'(t_i)|(t_{i+1} - t_i). \quad (1.47)$$

Очевидно, что разность между суммами (1.46) и (1.47) стремится к нулю, когда разбиение кривой бесконечно измельчается.

Сумму (1.47) можно рассматривать как интегральную сумму для скалярной положительной функции от t :

$$f(t) = |\mathbf{r}'(t)|, \quad (1.48)$$

построенную на промежутке изменения аргумента t от $T_0 = t_0$ до $T = t_n$. Поэтому при бесконечном измельчении разбиения сумма (1.47) стремится к интегралу

$$\int_{T_0}^T |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1.49)$$

Следовательно, и сумма (1.46), отличаясь от суммы (1.47) на бесконечно малую, стремится к тому же самому пределу.

Определение 1.4.4 Длина ломаной (1.46), вписанной в нашу кривую, стремится при бесконечном измельчении разбиения к пределу (1.49); этот предел называется длиной нашей кривой.

Длина дуги как параметр.

Ранее уже говорилось о том, что выбор параметра t на данной кривой является в сущности произвольным. Это приводит к тому, что рассматриваемые величины отражают как геометрические свойства, присущие самой кривой, так и произвол в выборе параметризации.

Можно устранить это усложнение, *выбрав параметризацию, геометрически связанную с самой кривой, а именно, выбрав за параметр длину дуги*. Тогда при изучении кривой, заданной уравнением (1.14), сама параметризация и все связанные с ней величины геометрически вытекают из свойств самой кривой без какого-либо существенного произвола.

Пусть у нас дана кривая $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t меняется в пределах от T_0 до T .

$M(t)$ - любая точка на кривой; по формуле (1.49) длина участка кривой $M_0 M$ от значения параметра t_0 до значения t (обозначим ее через s) выразится интегралом

$$s = \overset{\frown}{M_0 M} = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt. \quad (1.50)$$

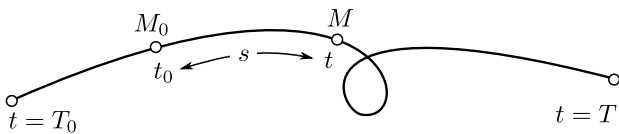


Рис. 1.6: Длина дуги как параметр.

Возможно выбирать значения t как большие t_0 так и меньшие t_0 , в связи с чем длина дуги s будет получаться со знаком $+$ или $-$ соответственно.

Итак, s выражена как функция верхнего предела, t ,

$$s = s(t). \quad (1.51)$$

Дифференцируя выражение (1.50) по верхнему пределу t интеграла, получим

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)|. \quad (1.52)$$

Достаточный признак обыкновенности точки: если в данной точке $\mathbf{r}'(t) = 0$, то точка - обыкновенная.

Будем рассматривать только обыкновенные точки, следовательно

$$|\mathbf{r}'(t)| > 0. \quad (1.53)$$

Производная $s'(t)$ положительна все время, и $s(t)$ - функция, монотонно возрастающая от значения $s(T_0)$ (отрицательного) при $t = T_0$ до значения $s(T)$ (положительного) при $t = T$ и проходящая через 0 при $t = t_0$.

Такая функция допускает обращение, т.е. уравнение (1.51) можно однозначно разрешить относительно t , выразив t функцией от s :

$$t = t(s), \quad s(T_0) \leq s \leq s(T). \quad (1.54)$$

Таким образом, не только каждой точке $M(t)$ отвечает определенное значение s , но и каждому значению s в указанной области изменения однозначно отвечает точка $M(t)$ на кривой. Мы можем принять s за новый параметр вдоль кривой, геометрически с ней вполне связанный. Несущественный произвол заключается лишь в выборе начала отсчета M_0 , а также направления, в котором дуга возрастает.

Вставляя выражение $t = t(s)$ в уравнение кривой, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)), \quad (1.55)$$

т.е. радиус-вектор выражен в функции параметра s .

Умножая обе части (1.52) на dt , получим

$$s'(t)dt = |\mathbf{r}'(t)|dt. \quad (1.56)$$

Возьмем правую и левую части этого равенства по модулю; получим

$$|ds| = |dr|. \quad (1.57)$$

Таким образом, модуль дифференциала длины дуги равен модулю дифференциала радиус-вектора (все это при произвольной параметризации t вдоль кривой). Геометрически, дифференциал дуги $|ds|$ изображается (см. рис. 1.4) длиной отрезка касательной $M_0 M'$, так как этот отрезок, взятый как вектор, изображает $d\mathbf{r}$. Пусть же $\overset{\frown}{M_0 M}$, пройденный по кривой, дает не дифференциал, а соответствующее точное приращение функции $s(t)$ при переходе от одной точки кривой к другой.

В частности, формула (1.57) остается верной и при выборе дуги s в качестве параметра. Деля обе части на $|ds|$, получим

$$1 = \left| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right| \quad (1.58)$$

т.е. производная радиус вектора по параметру-дуге есть вектор единичный.

Случайный характер модуля $|\mathbf{r}'(t)|$ теперь исчезает.

Представим полученные результаты в координатной форме, что имеет особенное значение при решении конкретных задач. Если кривая задана параметрическим представлением (1.16), то можно выразить радиус-вектор в функции того же t :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (1.59)$$

Дифференцируя это равенство по t , получаем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \quad (1.60)$$

а умножая на dt , находим

$$d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}. \quad (1.61)$$

По известной формуле для модуля вектора получаем

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} |d\mathbf{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (1.62)$$

Сравнивая последние равенства с (1.52, 1.57), мы видим, что

$$\begin{aligned} s'(t) &= \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}, \\ |ds| &= \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \end{aligned} \quad (1.63)$$

Выражение (1.49) для длины кривой примет вид

$$\int_{T_0}^T \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt. \quad (1.64)$$

При фактическом вычислении длины дуги пользуются обычно формулой (1.64). В частности, когда параметром служит абсцисса x , ($x_0 \leq x_1$), формула (1.64) принимает вид

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2 + z'(x)^2} dx. \quad (1.65)$$

1.4.5 Касание кривых.

При изучении кривых в бесконечно малом часто играет важную роль порядок близости между двумя кривыми, выходящими из одной точки. Так, допустим, что нужно составить себе представление о поведении кривой в бесконечно малом с определенной степенью точности. Тогда подбираем другую кривую, которая с этой степенью точности совпадает с первой. Если вторая кривая обладает хорошо известным строением (является, например, окружностью), то тем самым мы получаем представление и о ходе первой кривой (в бесконечно малой области).

Изучим взаимное расположение двух каких-нибудь кривых C_1 и C_2 , выходящих из общей точки M_0 . На каждой из них примем за параметр длину дуги s , так что уравнения кривых будут

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(s), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(s). \quad (1.66)$$

Прием для простоты точку M_0 за начало отсчета дуги на обеих кривых, так что

$$\mathbf{r}_1(0) = \mathbf{r}_2(0) = \overline{OM_0}. \quad (1.67)$$

Последовательные производные от какой-нибудь функции по параметру s будем обозначать через $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots, \mathbf{r}^{(n)}$, \dots в отличие от производных $\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \dots, \mathbf{r}^{(n)}, \dots$ той же

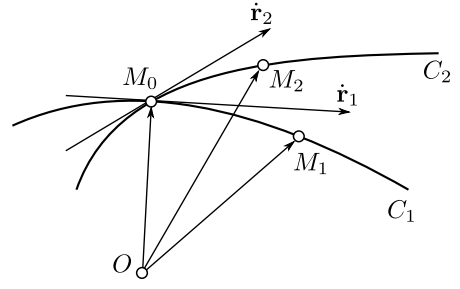


Рис. 1.7: Касание кривых.

самой функции, но по произвольному параметру t вдоль кривой.

Производные в точке M_0 от \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 по s будем писать их без указания аргумента, подразумевая, следовательно, аргумент $s = 0$.

Изучим расхождение между кривыми C_1 и C_2 , которое обнаруживается, когда мы из общей точки M_0 сместимся на одно и то же расстояние s , заданное с определенным знаком (вдоль каждой из кривых). Возьмем на C_1 и C_2 соответственно точки M_1 и M_2 , отвечающие одному и тому же значению параметра s , рис.(1.7).

$$s = \widetilde{M_0M_1} = \widetilde{M_0M_2}, \quad (1.68)$$

или, что тоже,

$$\overline{OM_1} = \mathbf{r}_1(s), \quad \overline{OM_2} = \mathbf{r}_2(s). \quad (1.69)$$

Расхождение между кривыми C_1 и C_2 естественно оценить в связи с расстоянием M_1M_2 . Чем выше будет порядок малости расстояния M_1M_2 относительно s , тем слабее расхождение кривых, тем теснее они сближены между собой.

Выполним оценку. Разложим $\mathbf{r}_1(s)$ и \mathbf{r}_2 в ряд Тейлора по степеням s . Получим

$$\begin{aligned} \overline{OM_1} = \mathbf{r}_1(s) &= \mathbf{r}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 s + \ddot{\mathbf{r}}_1 \frac{s^2}{2} + \dots + \mathbf{r}_1^{(n)} \frac{s^n}{n!} + \dots, \\ \overline{OM_2} = \mathbf{r}_2(s) &= \mathbf{r}_2 + \dot{\mathbf{r}}_2 s + \ddot{\mathbf{r}}_2 \frac{s^2}{2} + \dots + \mathbf{r}_2^{(n)} \frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (1.70)$$

Здесь значения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и их производных взяты в точке M_0 . Ряд Тейлора предполагается конечным, но остаточный член не выписан, так как для дальнейшего достаточно знать, что этот член будет при s , стремящемся к нулю, бесконечно малым более высокого порядка, чем любой из не равных нулю предшествующих членов (см. (1.31; при $t \rightarrow t_0$, стремящемся к нулю, это следует из ограниченности \mathbf{Q}_n по модулю).

Вектор M_1M_2 легко получить теперь как разность радиус-векторов:

$$\begin{aligned} \overline{M_1M_2} &= \overline{OM_2} - \overline{OM_1} = (\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1) \frac{s}{1} + \\ &+ (\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) \frac{s^2}{2!} + \dots + (\mathbf{r}_2^{(n)} - \mathbf{r}_1^{(n)}) \frac{s^n}{n!} + \dots \end{aligned} \quad (1.71)$$

При вычитании \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 взаимно уничтожаются в силу (1.67). Заставим теперь s стремиться к нулю; тогда M_1 и M_2 будут точки C_1 и C_2 , отстоящие от M_0 на одно и то же бесконечно малое расстояние s и стремящиеся, следовательно, в M_0 , каждая по своей кривой. Чтобы

оценить порядок малости M_1M_2 , сравнительно с s , обратимся к разложению (1.71).

Теперь разберем различные возможные здесь случаи. Наиболее общим является тот, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ неколлинеарны, т.е. касательные к C_1 и C_2 в общей точке M_0 не совпадают, образуя угол, отличный от нуля, рис.(1.7). Тогда разложение (1.71) начинается с члена

$$(\dot{\mathbf{r}}_2 - \dot{\mathbf{r}}_1)s, \quad (1.72)$$

отличного от нуля и бесконечно малого одного порядка с s . Так как старший член определяет порядок малости и всего разложения, то M_1M_2 будет бесконечно малым того же порядка, т.е. одного порядка с длинами дуг M_0M_1 . Это - случай пересечения кривых C_1 и C_2 . Он вполне тривиален.

Рассмотрим теперь другой возможный случай, когда $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ коллинеарны, другими словами, касательные к C_1 и C_2 в точке M_0 совпадают. В этом случае говорится, что C_1 и C_2 имеют касание в точке M_0 . Так как, согласно (1.58), векторы $\dot{\mathbf{r}}_1$ и $\dot{\mathbf{r}}_2$ - единичные, то они, будучи направлены по общей касательной, или совпадают между собой, или отличаются знаком:

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1 \quad (1.73)$$

Этот случай реализуется только когда параметры на кривых разных знаков (мы смещаемся в разные стороны), поэтому его мы рассматривать не будем. Тогда

$$\dot{\mathbf{r}}_2 = -\dot{\mathbf{r}}_1 \quad (1.74)$$

Возвращаясь к разложению (1.71), видим, что в силу (1.74), член в первой степени пропал, и оно начинается с члена 2-го порядка малости относительно s :

$$(\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1) \frac{s^2}{2} \quad (1.75)$$

А так как остальные члены еще более высокого порядка малости, то в случае касания расстояние M_1M_2 - бесконечно малое не ниже 2-го порядка относительно s . Этим существенно отличается случай касания от случая пересечения.

Кривые C_1 и C_2 , касаясь друг друга, могут сблизиться между собой в некоторых случаях особенно тесно. Так, если кроме $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_1$ в точке M_0 имеет еще место $\ddot{\mathbf{r}}_2 = \ddot{\mathbf{r}}_1$, то разложение (1.71) содержит лишь бесконечно малые не ниже 3-го порядка.

В итоге. Кривые C_1 и C_2 могут иметь в общей точке M_0 или пересечение, или касание. Касание будет порядка $n = 1, 2, 3 \dots$ в зависимости от того, сколько последовательных производных от радиус-вектора по дуге $\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\ddot{\mathbf{r}}}, \dots$ совпадает для обеих кривых в их общей точке.

1.4.6 Кривизна плоских кривых.

Соприкасающаяся окружность.

Касательная имеет с кривой касание 1-го порядка, так как первая производная радиус-вектор по дуге $\dot{\mathbf{r}}$ в точке касания будет общей для кривой и для ее касательной, как и вообще для любых двух касающихся друг друга кривых (так как $\dot{\mathbf{r}}$ есть единичный вектор, направленный по касательной).

Таким образом, касательная воспроизводит ход кривой вблизи точки касания с точностью до 1-го порядка, т.е. если пренебрегать бесконечно малыми 2-го порядка и выше.

Мы хотим теперь наглядно воспроизвести ход кривой вблизи данной точки с точностью 2-го порядка и выше. При помощи прямой линии этого сделать не удастся. Обратимся к другой элементарной кривой - к окружности и постараемся подобрать ее таким образом, чтобы она вблизи данной кривой уклонялась от кривой лишь на бесконечно малые (не ниже) 3-го порядка.

Задача. Найти окружность, имеющую с данной кривой в данной ее точке касание 2-го порядка. Такая окружность называется соприкасающейся окружностью в данной точке кривой.

Пусть данная кривая определена параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t). \quad (1.76)$$

И пусть на кривой дана какая-нибудь точка $M_0(t_0)$. Мы будем обозначать $x(t_0), x'(t_0), x''(t_0), \dots$ через x_0, x'_0, x''_0, \dots и т.д. Уравнение искомой окружности напомним в виде

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \quad (1.77)$$

Константы a, b, R - пока неопределенные.

Потребуем, чтобы наша окружность проходила через точку M_0 , т.е. чтобы x_0, y_0 удовлетворяли уравнению окружности. Получим

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = R^2. \quad (1.78)$$

Это первое из уравнений, связывающих неизвестные константы. Далее, смещаясь из точки $M_0(t_0)$ в бесконечно близкую точку $M(t)$ по кривой, оценим уклонение кривой от окружности следующим образом. Проведем прямую MC , где (a, b) - центр окружности, рис. 1.8, и отметим точку L в пересечении этой прямой с окружностью.

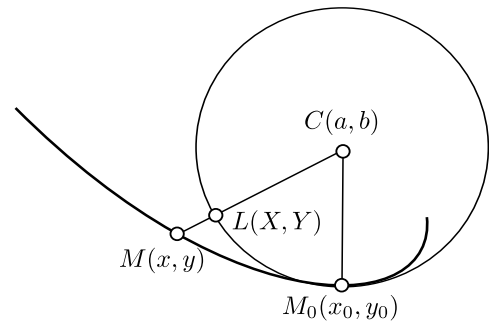


Рис. 1.8: Соприкасающаяся окружность.

Уклонение кривой от окружности будет выражаться отрезком

$$LM = CM - CL. \quad (1.79)$$

Нам нужно так подобрать окружность, чтобы уклонение LM при $t \rightarrow t_0$ было бесконечно малым (не ниже) 3-го порядка относительно $t - t_0$ (касание 2-го порядка).

Но разность отрезков $CM - CL$ будет бесконечно малой того же порядка, как и разность их квадратов. В самом деле, отношение этих двух бесконечно малых стремится к конечному пределу, отличному от нуля:

$$\frac{CM^2 - CL^2}{CM - CL} = CM + CL \rightarrow 2R, \quad (1.80)$$

так как

$$CM \rightarrow CM_0(=R), \text{ а } CL = R. \quad (1.81)$$

Следовательно, вместо того, чтобы добиваться 3-го порядка малости для уклонения LM , мы можем добиваться этого же самого для разности квадратов $CM^2 - CL^2$, то будет проще в отношении выкладок.

Так как

$$CL = R, \quad CM = \sqrt{[x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2}, \quad (1.82)$$

то

$$CM^2 - CL^2 = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2. \quad (1.83)$$

Полученную функцию от t кратко обозначим через $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = [x(t) - a]^2 + [y(t) - b]^2 - R^2. \quad (1.84)$$

Разложим $\varphi(t)$ в ряд Тейлора по степеням $t - t_0$:

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & \varphi(t_0) + \varphi'(t_0) \frac{t - t_0}{1} + \varphi''(t_0) \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \\ & + \varphi'''(t_0) \frac{(t - t_0)^3}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (1.85)$$

Для того чтобы $\varphi(t)$ при $t \rightarrow t_0$ была бесконечно малой 3-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы это разложение начиналось с членов (не ниже) 3-ей степени, т.е. чтобы

$$(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = 0. \quad (1.86)$$

Дифференцируя по t развернутое выражение функции (1.84), получим

$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - R^2 = 0, \\ \varphi'(t_0) &= 2x'_0(x_0 - a) + y'_0(y_0 - b) = 0, \\ \varphi''(t_0) &= 2[x''_0(x_0 - a) + y''_0(y_0 - b) + x_0'^2 + y_0'^2] = 0 \end{aligned} \quad (1.87)$$

Первое из этих уравнений уже встречалось нам в виде (1.78). Разрешим два последних уравнения относительно $x_0 - a$, $y_0 - b$ (как систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными) и изменим знаки у полученных выражений. Мы приходим к следующему результату:

$$a - x_0 = y'_0 \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0''y'_0 - y_0''x'_0} \quad (1.88)$$

и совершенно аналогично

$$b - y_0 = x'_0 \frac{x_0'^2 + y_0'^2}{y_0''x'_0 - x_0''y'_0}, \quad (1.89)$$

Мы предполагаем при этом, что

$$x_0''y'_0 - y_0''x'_0 \neq 0. \quad (1.90)$$

В результате по формулам (1.88, 1.89) определяется центр соприкасающейся окружности $C(a, b)$, а из первого уравнения (1.87) - ее радиус R .

Формулы (1.88, 1.89) совершенно симметричны относительно координатных осей; нужно иметь ввиду, что именно поэтому знаменатели у них отличаются знаком.

Определение 1.4.5 Центр соприкасающейся окружности называется центром кривизны кривой в данной точке $t = t_0$.

Как мы видим, его координаты выражаются через координаты x_0, y_0 данной точки кривой $x(t), y(t)$ и через их первые и вторые производные по параметру (тоже в данной точке). Каждой точке кривой отвечает своя соприкасающаяся окружность и свой центр кривизны.

Теперь по первому из уравнений (1.87) легко найти R^2 :

$$\begin{aligned} R^2 &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = y_0'^2 \left(\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{x_0''y'_0 - y_0''x'_0} \right)^2 + \\ &+ x_0'^2 \left(\frac{x_0'^2 + y_0'^2}{y_0''x'_0 - x_0''y'_0} \right)^2 = \frac{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}{(x_0''y'_0 - y_0''x'_0)^2} \end{aligned} \quad (1.91)$$

отсюда, извлекая квадратный корень, получим, считая R всегда положительным,

$$R = \frac{\sqrt{(x_0'^2 + y_0'^2)^3}}{|x_0''y'_0 - y_0''x'_0|} \quad (1.92)$$

Вычисленный таким образом радиус соприкасающейся окружности называется радиусом кривизны кривой в данной точке $t = t_0$.

Мы видим, что в каждой точке кривой $x(t), y(t)$ при условии (1.90) существует и единственным образом определяется окружность, имеющая с кривой в этой точке касание 2-го порядка (соприкасающаяся).

1.4.7 Кривизна.

Чем сильнее искривление кривой, тем быстрее меняет свое направление касательная к ней при переходе от точки к точке. Поэтому за меру искривленности кривой в среднем на данном участке MM' можно принять угол поворота касательной, приходящийся в среднем на единицу пути, пройденного точкой касания.

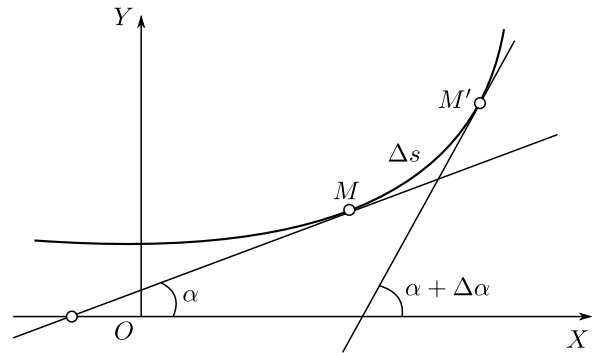


Рис. 1.9: Кривизна кривой.

Другими словами, нужно угол $\Delta\alpha$ образованный касательными в точках M и M' , рис.1.9, разделить на Δs - длину дуги MM' . Полученное частное

$$k_{av} = \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \quad (1.93)$$

взятое по модулю, называется *средней кривизной* дуги MM' .

Перейдем к понятию *кривизны в данной точке M*. Заставим точку M' стремиться по кривой в M . Тогда *предел*,

к которому стремится средняя кривизна дуги MM' называется *кривизной кривой в точке M* :

$$k = \lim_{M' \rightarrow M} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|. \quad (1.94)$$

Вычислим кривизну в произвольной точке

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha(t) &= \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \\ \alpha(t) &= \operatorname{arctg} \frac{y'(t)}{x'(t)} \end{aligned} \quad (1.95)$$

С другой стороны, длина дуги s , отсчитывается от некоторой начальной точки до точки $M(t)$ по кривой, так же является функцией от t :

$$s = s(t). \quad (1.96)$$

Перейдем из точки $M(t)$ в некоторую точку $M'(t + \Delta t)$, давая параметру t приращение Δt . Тогда функция $\alpha(t)$ примет новое значение $\alpha(t + \Delta t)$.

Разность углов

$$\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)$$

есть угол поворота касательной при переходе из M в M' .

С другой стороны, $s(t + \Delta t)$ и $s(t)$ суть длины дуг, отсчитанных от некоторой начальной точки соответственно до точек M' и M . Разность этих дуг

$$s(t + \Delta t) - s(t)$$

выражает длину дуги от M до M' .

Поэтому средняя кривизна кривой на отрезке MM' выражается отношением

$$k_{av} = \left| \frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{s(t + \Delta t) - s(t)} \right|. \quad (1.97)$$

Рассмотрим поведение этой величины при Δt , стремящемся к нулю, т.е. при стремлении точки M' в M по кривой.

Если переписать предыдущее выражение в виде

$$k_{av} = \left| \frac{\frac{\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t}}{\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}} \right|, \quad (1.98)$$

то ясно, что при $\Delta t \rightarrow 0$ числитель и знаменатель стремятся к пределам, а именно, к производным $\alpha'(t)$ и $s'(t)$, следовательно, предел этого выражения (т.е. кривизна в точке) существует и выражается так:

$$k = \left| \frac{\alpha'(t)}{s'(t)} \right|. \quad (1.99)$$

Остается закончить вычисление. Находим $\alpha'(t)$, дифференцируя (1.95):

$$\alpha'(t) = \frac{\frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{x'(t)^2}}{1 + \left(\frac{y'(t)}{x'(t)} \right)^2} = \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}. \quad (1.100)$$

Что же касается $s'(t)$, то пользуемся формулой (1.63), учитывая, конечно, что у нас $z \equiv 0$:

$$s'(t) = \sqrt{x'^2 + y'^2} \quad (1.101)$$

Вставляя в (1.99), получаем окончательно

$$k = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \quad (1.102)$$

Сравнивая полученное выражение кривизны k с формулой (1.92) для радиуса кривизны, мы приходим к важному соотношению

$$k = \frac{1}{R}. \quad (1.103)$$

Кривизна и радиус кривизны - величины взаимно обратные.

Заметим, что для окружности вычислить кривизну особенно просто. В этом случае, рис. 1.10, угол между касательными в точках M и M' равен центральному углу $\Delta\alpha$ между радиусам OM и OM' , проведенными в точках касания.

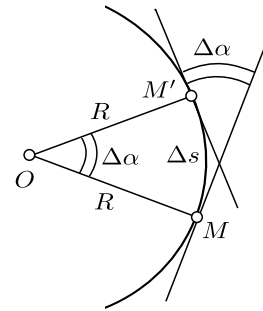


Рис. 1.10: Кривизна окружности.

Соответствующая длина дуги Δs равна центральному углу $\Delta\alpha$, умноженному на радиус окружности R , так что $\Delta s = R\Delta\alpha$ и, следовательно, $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{1}{R}$.

Средняя кривизна любой дуги окружности равна обратной величине радиуса окружности. Ясно отсюда, что кривизна в любой точке окружности также равна $\frac{1}{R}$ и остается, таким образом, постоянной от точки к точке.

Заметим, что из самого определения кривизны k (теперь уже для любой кривой) видно, что для ее вычисления достаточно знать производные текущих координат x , y по дуге s лишь 1-го и 2-го порядков (одно дифференцирование при вычислении α и еще одно при отыскании $\lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$). Но так как кривая имеет с соприкасающейся окружностью касание 2-го порядка, то значения этих производных у них будут общими, а значит, и будет общим значение кривизны. Итак:

Определение 1.4.6 Кривизна произвольной кривой в каждой ее точке равна кривизне соприкасающейся окружности, а значит, обратной величине радиуса этой окружности (радиуса кривизны). Мы вновь пришли к соотношению (1.103).

1.4.8 Векторы t , n .

С плоской кривой в каждой ее точке M можно естественным образом связать нечто вроде местной прямоугольной системы координат. А именно, роль начала координат O будет играть сама точка M , а роль осей X , Y - касательная и нормаль в этой точке. Роль ортов i , j примут на себя единичные векторы, направленные соответственно по касательной и по нормали. Эти векторы будем обозначать t , n , рис. 1.11.

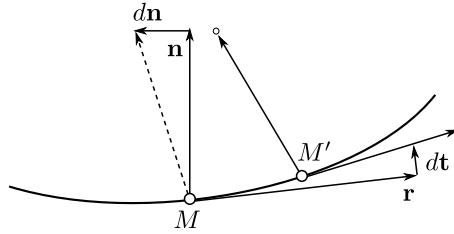


Рис. 1.11: Векторы \mathbf{t} , \mathbf{n} .

Пусть кривая отнесена к дуге, как к параметру:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s). \quad (1.104)$$

Мы знаем, что производная $\dot{\mathbf{r}}$ радиус-вектора по дуге есть *единичный* касательный вектор (см.(1.58)). Поэтому можно положить

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.105)$$

Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма

ТЕОРЕМА 1.4.1 Если вектор-функция \mathbf{m} от скалярного аргумента t сохраняет постоянный модуль, то при каждом значении t ее производная ей перпендикулярна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как квадрат модуля вектора равен скалярному квадрату самого вектора, то мы можем записать

$$|\mathbf{m}(t)|^2 = \mathbf{m}(t)^2 = \text{const.}$$

Дифференцируя по t , получим

$$2\mathbf{m}(t)\mathbf{m}'(t) = 0,$$

откуда и следует, что $\mathbf{m}'(t)$ перпендикулярно к $\mathbf{m}(t)$.

Другими словами, если откладывать $\mathbf{m}(t)$ из неизменной точки O , то вектор $\mathbf{m}(t)$ будет меняться лишь по направлению, но не по длине, и конец его опишет кривую, лежащую на сфере с центром O . Как известно из предыдущего, производная $\mathbf{m}'(t)$ будет при каждом значении t направлена по касательной к этой кривой, следовательно, по касательной к сфере, и, значит, она будет перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания, т.е. к вектору $\mathbf{m}(t)$.

В частности эта лемма имеем место для единичных векторов; следовательно $\dot{\mathbf{t}} \perp \mathbf{t}$, и вектор $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по нормали.

Но, дифференцируя (1.105) по s , получим

$$\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}},$$

т.к. что $\ddot{\mathbf{r}}$ тоже направлен по нормали.

Условимся направлять вектор \mathbf{n} всегда в сторону вектора $\ddot{\mathbf{r}}$, рис.1.12.

Точки, где $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, мы оставляем в стороне. Заметим, что если в направлении отсчета дуги s на кривой заменить на обратное (т.е. изменить знак у s), то $\dot{\mathbf{r}} (= \frac{d\mathbf{r}}{ds})$ умножается на -1 (так как $d\mathbf{r}$ не меняется, а ds меняет знак); что же касается $\ddot{\mathbf{r}}$, то этот вектор не меняется (так как $d\dot{\mathbf{r}}$ и s одновременно меняют знаки на обратные). Следовательно, не меняется и направленный по нему единичный вектор \mathbf{n} .

Поэтому вектор \mathbf{n} будет вполне определенным, а вектор \mathbf{t} будет менять свое направление на обратное вместе с направлением отсчета дуги s .

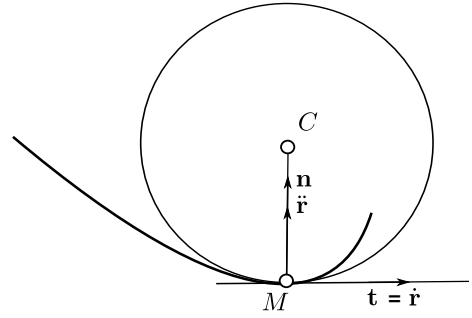


Рис. 1.12:

Покажем теперь, что центр кривизны C всегда лежит на нормали в сторону вектора \mathbf{n} , рис.1.12. Будем рассматривать кривую в прямоугольных координатах x, y , приняв за начало какуюнибудь ее точку M , за оси - касательную и нормаль и за орты \mathbf{i}, \mathbf{j} - векторы \mathbf{t}, \mathbf{n} в точке M . Запишем уравнение кривой (1.104) в развернутом виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j}.$$

Дифференцируя, получим

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$$

В точке M вектор $\dot{\mathbf{r}}$ (т.е. \mathbf{t}) совпадает с \mathbf{j} , и из первого равенства следует

$$\dot{x} = 1, \quad \dot{y} = 0;$$

кроме того, \mathbf{n} совпадает с \mathbf{j} и, следовательно, $\ddot{\mathbf{r}}$ коллинеарен с \mathbf{j} и направлен с ним в одну сторону, так что второе равенство даст

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} > 0.$$

Найдем теперь координаты a, b центра кривизны C по формулам (1.90, 1.89), учитывая, что в точке M координаты x, y равны в нашем случае нулю, а производные их по параметру (причем параметром служит дуга) удовлетворяют только что полученным соотношениям. Формулы (1.90, 1.89) примут вид

$$a = 0, b = \frac{1}{\ddot{y}}.$$

Так как $\ddot{y} > 0$, то и $b > 0$, и центр кривизны C расположен на положительной полуоси Y , т.е. на нормали в сторону вектора \mathbf{n} .

Отсюда вытекает, что вектор \overline{MC} отличается от единичного вектора \mathbf{n} положительным численным множителем, равным длине вектора \overline{MC} , т.е. радиусу кривизны R :

$$\overline{MC} = R\mathbf{n}$$

Вместе с центром кривизны C и вся соприкасающаяся окружность расположена от касательной в сторону вектора \mathbf{n} . А так как кривая вблизи точки M уклоняется от соприкасающейся окружности лишь на бесконечно малые 3-го порядка, то и кривая (вблизи точки M) расположена в сторону вектора \mathbf{r} от касательной (см. рис. 1.12).

Формулы Френе.

При изменении параметра s точка M движется по кривой, и вместе с ней будут меняться как функции от s векторы \mathbf{t} и \mathbf{n} :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}(s).$$

Выясним теперь, какой вид будут иметь производные векторов \mathbf{t} и \mathbf{n} по дуге s .

Для этого введем понятие о скорости вращения некоторой вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу t . Для этой скорости, которая будет иметь, вообще говоря, различные значения при разных значениях t , дается следующее определение.

Определение 1.4.7 Дадим t приращение аргумента Δt и возьмем угол $\Delta\varphi$, образуемый векторами $\mathbf{m}(t)$ и $\mathbf{m}(t + \Delta t)$ (перенеся их для наглядности в общую точку приложения O). Составим отношение $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, показывающее, какой угол поворота вектора \mathbf{m} приходится в среднем на единицу изменения аргумента t на участке $t, t + \Delta t$. Заставим теперь предел Δt стремиться к нулю. Тогда предел взятого по модулю отношения $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется скоростью вращения вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ по отношению к ее аргументу t .

Докажем теперь следующую важную лемму

ТЕОРЕМА 1.4.2 Скорость вращения единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю ее производной $|\mathbf{m}'(t)|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем из точки O как из центра окружность единичного радиуса, проходящую через концы векторов $\mathbf{m}(t)$ и $\mathbf{m}(t + \Delta t)$, т.е. точки M и M' , рис. 1.13.

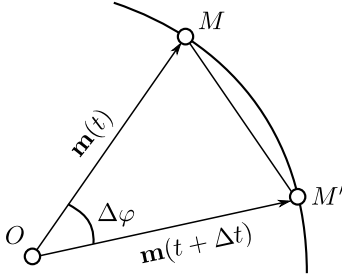


Рис. 1.13: Скорость вращения вектор функции. Угол $\Delta\varphi$ не является приращением какой-то функции φ , как можно было бы подумать, судя по обозначению.

Очевидно, что угол между векторами численно равен длине дуги $\widetilde{MM'}$. Мы можем записать

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \frac{\widetilde{MM'}}{|\Delta t|} = \frac{MM'}{|\Delta t|} \cdot \frac{\widetilde{MM'}}{MM'}.$$

Здесь MM' означает длину хорды MM' . Но очевидно, что

$$\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t) = \overline{MM'}$$

так что длина хоры MM' равна модулю приращения вектора $\mathbf{m}(t)$:

$$MM' = |\overline{MM'}| = |\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)|.$$

Перепишем теперь выражение $\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right|$ в виде

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\mathbf{m}(t + \Delta t) - \mathbf{m}(t)}{\Delta t} \right| \cdot \frac{\widetilde{MM'}}{MM'}.$$

Заставим теперь Δt стремиться к нулю. Вектор, стоящий в вертикальных черточках, стремится, очевидно, к производной $\mathbf{m}(t)$, а его модуль - к модулю $|\mathbf{m}'(t)|$. Отношение

же дуги окружности $\widetilde{MM'}$ к стягивающей ее хорде MM' стремится к единице, когда дуга стремится к нулю. Итак, мы получаем

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} |\mathbf{m}'(t)|,$$

т.е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\mathbf{m}'(t)|$$

Лемма доказана.

Полученное равенство можно переписать также в виде

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \right| = |\mathbf{m}'(t)| + \alpha,$$

где $\alpha \rightarrow 0$ вместе с Δt . Умножая почленно на $|\Delta t|$, получим

$$|\Delta\varphi| = |\mathbf{m}'(t)\Delta t| + \alpha|\Delta t|.$$

Будем писать $\Delta\varphi$ вместо $|\Delta\varphi|$, подразумевая, что $\Delta\varphi$ берется всегда положительным. Тогда последнее равенство примет вид

$$\Delta\varphi = |d\mathbf{m}| + \dots, \quad (1.106)$$

так как $\mathbf{m}'(t)\Delta t = \mathbf{m}'(t)dt = d\mathbf{m}$. Многоточие в формуле (1.106) обозначает бесконечно малые высшего порядка.

Итак, главная линейная часть бесконечно малого угла поворота $\Delta\varphi$ единичной вектор-функции $\mathbf{m}(t)$ равна модулю дифференциала $d\mathbf{m}$ этой функции.

На основании леммы (1.4.2) скорость вращения единичной вектор-функции $\mathbf{t}(s)$ совпадает с модулем ее производной:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = |\dot{\mathbf{t}}|. \quad (1.107)$$

Здесь $\Delta\alpha$ - угол поворота вектора \mathbf{t} (т.е. угол поворота касательной), отвечающий приращению дуги Δs . Но левая часть равенства, согласно (1.94), представляет собой кривизну k нашей кривой. Отсюда окончательно

$$|\dot{\mathbf{t}}| = k \quad (1.108)$$

Вектор $\dot{\mathbf{t}}$ направлен по нормали, причем единичный векторнормали \mathbf{n} мы условились направлять в ту же сторону. Поэтому $\dot{\mathbf{t}}$ отличается от единичного вектора \mathbf{n} положительным численным множителем, равным, очевидно, длине вектора $\dot{\mathbf{t}}$, т.е. кривизне k . Итак

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n}. \quad (1.109)$$

Переходим далее к производной $\dot{\mathbf{n}}$ единичного вектора \mathbf{n} . Она направлена перпендикулярно к \mathbf{n} , а так как \mathbf{n} направлено по нормали, то $\dot{\mathbf{n}}$ направлено по касательной и поэтому может отличаться от вектора \mathbf{t} только численным множителем:

$$\dot{\mathbf{n}} = \alpha\mathbf{t},$$

где α - пока неопределенный множитель. Его нетрудно определить, записав, что скалярное произведение \mathbf{t} и \mathbf{n} , в силу их перпендикулярности, равно нулю:

$$\mathbf{t}\mathbf{n} = 0,$$

и продифференцировав это равенство по s . Получим

$$\dot{\mathbf{t}}\mathbf{n} + \mathbf{t}\dot{\mathbf{n}} = 0.$$

Вставляя сюда $k\mathbf{n}$ вместо $\dot{\mathbf{t}}$ и $\alpha\mathbf{t}$ вместо $\dot{\mathbf{n}}$ и учитывая, что

$$\mathbf{t}\mathbf{t} = \mathbf{n}\mathbf{n} = 1,$$

получим $k + \alpha = 0$, откуда $\alpha = -k$.

Выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательный вид

$$\dot{\mathbf{n}} = -k\mathbf{t}. \quad (1.110)$$

Формулы (1.109) и (1.110) называются *формулами Френе* (для пространственной кривой).

Уясним себе *геометрический смысл этих формул*. Они выражают прежде всего производные векторов \mathbf{t} , \mathbf{n} через сами эти векторы и через кривизну k в данной точке. Умножая (1.109) и (1.110) почленно на ds , мы получим слева дифференциалы

$$\begin{aligned} d\mathbf{t} &= k\mathbf{n}ds, \\ d\mathbf{n} &= -k\mathbf{t}ds. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Таковы главные части приращений вектор-функций $\mathbf{t}(s)$ и $\mathbf{n}(s)$ при переходе от значения аргумента s к бесконечно близкому значению $s+ds$. Но геометрически фигура, образованная единичным взаимно ортогональными векторами \mathbf{t} и \mathbf{n} , может только повернуться как твердое тело (если не обращать внимания на точку приложения этих векторов). И действительно, легко показать, что формулы Френе с точностью до 1-го порядка выражают поворот векторов \mathbf{t} и \mathbf{n} при переходе по кривой из точки $M(s)$ в бесконечно близкую точку $M'(s+ds)$ на бесконечно малый угол, именно на kds (считая положительным направление вращения от \mathbf{t} к \mathbf{n}), рис.(1.10).

В самом деле, если повернуть векторы \mathbf{t} и \mathbf{n} на угол kds , то их новые значения выразятся через старые, очевидно, таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t} &= \cos(kds)\mathbf{t} + \sin(kds)\mathbf{n}, \\ \mathbf{n} + \Delta\mathbf{n} &= \cos(kds)\mathbf{n} - \sin(kds)\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Но так как мы ведем рассмотрение с точностью 1-го порядка, т.е. пренебрегаем бесконечно малыми 2-го и выше порядков, то $\cos(kds)$ можно заменить через 1, а $\sin(kds)$ через kds . Получим

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{t} &= kds\mathbf{n}, \\ \Delta\mathbf{n} &= -kds\mathbf{t}. \end{aligned}$$

Конечно, сохраняя лишь бесконечно малые 1-го порядка, мы получили здесь не точные приращения $\Delta\mathbf{t}$ и $\Delta\mathbf{n}$, а только их главные части, т.е. дифференциалы. Мы вернулись, таким образом к формулам (1.111).

Итак, (1.111) действительно выражают нам с точностью до 1-го порядка поворот \mathbf{t} и \mathbf{n} на угол kds ; заметим, что этот угол пропорционален пути ds , пройденному по кривой от M до M' , а коэффициентом пропорциональности служит кривизна k в точке M . Последнее естественно согласуется с самим определением кривизны.

1.4.9 Касательные пространственных кривых; нормали.

Рассмотрим кривую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (1.112)$$

лишь в заведомо обыкновенных точках, т.е. при условии

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0, \quad (1.113)$$

или, записывая параметрическое представление (1.112) в координатной форме

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1.114)$$

мы ограничимся точками, где

$$x'(t), \quad y'(t), \quad z'(t) \quad (1.115)$$

не обращаются одновременно в нуль.

Касательную в данной точке кривой $M(t)$ можно рассматривать как прямую, проходящую через эту точку

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

по направлению вектора

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}$$

Как известно из аналитической геометрии, уравнение такой прямой (в форме пропорций) имеет вид

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{Z - z(t)}{z'(t)}, \quad (1.116)$$

где X, Y, Z - текущие координаты.

Определение 1.4.8 Нормалью к пространственной кривой называется перпендикуляр, восстановленный в точке касания. Конечно, в данной точке кривой будет бесчисленное множество нормалей. Все они заполняют целую плоскость, перпендикулярную к касательной.

Определение 1.4.9 Плоскость, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется нормальной плоскостью, рис.1.14.

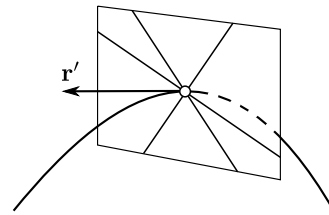


Рис. 1.14: Нормальная плоскость.

Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости проходящей через точку кривой

$$M[x(t), y(t), z(t)]$$

перпендикулярно к (касательному) вектору

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

имеет вид

$$x'(t)[X - x(t)] + y'(t)[Y - y(t)] + z'(t)[Z - z(t)] = 0. \quad (1.117)$$

Это и есть уравнение нормальной плоскости.

Касательная плоскость к поверхности.

Определение 1.4.10 Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1.118)$$

называется поверхностью.

Проведем на этой поверхности какую-нибудь кривую (1.114) тогда при любом значении t точка $M[x(t), y(t), z(t)]$ кривой лежит на поверхности, так, что уравнение (1.118) после подстановки $x(t), y(t), z(t)$ должно обращаться в тождество

$$F[x(t), y(t), z(t)] \equiv 0. \quad (1.119)$$

Продифференцируем это тождество по t . Получим

$$F_x x'(t) + F_y y'(t) + F_z z'(t) \equiv 0 \quad (1.120)$$

в каждой точке кривой на поверхности. В левой части x', y', z' зависят от выбора кривой на поверхности и представляют собой координаты касательного к кривой вектора $\mathbf{r}'(t)$. Что же касается F_x, F_y, F_z , то они зависят только от выбора точки x, y, z на поверхности. Составим вектор

$$\nabla F(x, y, z) = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}, \quad (1.121)$$

имеющий в каждой точке поверхности вполне определенное значение; ∇F - его краткое обозначение. Вектор ∇F называется *градиентом* функции F , или, как часто говорят, скалярного поля $F(x, y, z)$ (этот вектор существует в каждой точке пространственной области, в которой задана дифференцируемая функция точки $F(x, y, z)$).

Всматриваясь в левую часть (1.120), мы замечаем, что она представляет собой скалярное произведение векторов (1.121) и (1.113), т.е. вектор-градиента в данной точке поверхности и касательного вектора к кривой, проходящей по поверхности, в той же точке. Перепишем (1.120) в виде

$$\nabla F(x, y, z) \mathbf{r}'(t) = 0. \quad (1.122)$$

Ограничимся рассмотрением на поверхности только тех точек, где вектор ∇F не исчезает:

$$\nabla F(x, y, z) \neq 0, \quad (1.123)$$

или, что тоже самое, где F_x, F_y, F_z не равны одновременно нулю. Смысл этого станет ясным позже.

Тогда формулу (1.122) можно истолковать геометрически так.

Будем через данную точку $M(x, y, z)$ поверхности проводить всевозможные кривые по поверхности и брать к ним в этой точке касательные векторы $\mathbf{r}'(t)$. Тогда (1.122) показывает, что все эти векторы будут перпендикулярны к вектору $\nabla F(x, y, z)$, вполне определенному в данной точке $M(x, y, z)$, и расположатся все в одной плоскости, проходящей через M , перпендикулярно к ∇F , рис. 1.15. Итак:

Определение 1.4.11 Касательные в данной точке поверхности M (в которой $\nabla F \neq 0$ к всевозможным кривым, проходящим по поверхности, располагаются в одной плоскости, перпендикулярной к ∇F . Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности в точке M .

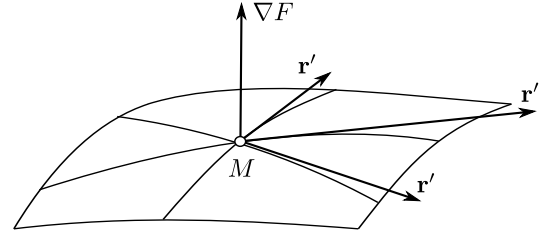


Рис. 1.15: Градиент функции F .

Уравнение касательной плоскости как плоскости, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ перпендикулярно к данному вектору (1.121) будет иметь вид

$$F_x(x, y, z)(X - x) + F_y(x, y, z)(Y - y) + F_z(x, y, z)(Z - z) = 0. \quad (1.124)$$

где X, Y, Z - текущие координаты.

Определение 1.4.12 Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания, рис. 1.15. Очевидно, в каждой точке M нормаль будет единственной. Ее уравнение легко составить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ в направлении вектора ∇F . Уравнение такой прямой будет иметь вид

$$\frac{X - x}{F_x(x, y, z)} = \frac{Y - y}{F_y(x, y, z)} = \frac{Z - z}{F_z(x, y, z)}. \quad (1.125)$$

Выясним теперь смысл условия (1.122). Допустим для определенности, что в данной точке именно $F_z \neq 0$. Тогда по теореме о существовании неявной функции уравнение поверхности (1.118) однозначно разрешимо вблизи данной точки относительно z и может быть переписано в виде

$$z = f(x, y). \quad (1.126)$$

Определение 1.4.13 Если в какой-нибудь системе координат x, y, z уравнение поверхности вблизи данной точки может быть написано в виде, разрешенном относительно одной координаты, то эта точка называется *обыкновенной* точкой поверхности.

Геометрически же уравнение (1.126) означает, что каждой точке $P(x, y, 0)$ в некоторой области D на плоскости XY отвечает одна и только одна точка поверхности $M(x, y, z)$, получаемая путем смещения точки $(x, y, 0)$ параллельно оси Z на отрезок $f(x, y)$. Наглядно мы можем, следовательно, представить себе соответствующий кусок поверхности как кусок плоскости D , деформированный путем плавного смещения его точек в направлении, перпендикулярном к плоскости, рис. (1.16).

Такой кусок поверхности мы будем называть *простым куском поверхности*.

Смещение называется "плавным" в том смысле, что величина смещения $f(x, y)$ предполагается непрерывной и дифференцируемой функцией точки $P(x, y, 0)$ в области D .

Итак, *обыкновенная точка поверхности* характеризуется тем, что достаточно малая ее окрестность в пространстве (например шар с центром в данной точке) вырезает простой кусок поверхности.

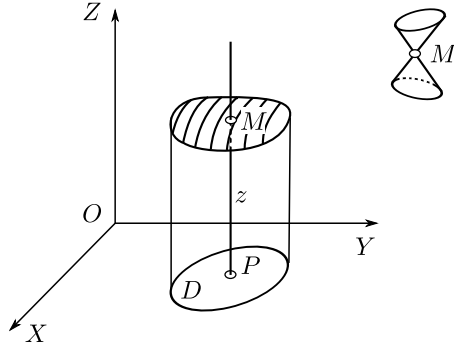


Рис. 1.16: Простой кусок поверхности.

Точки поверхности (1.118), в которых выполняется условие (1.123) (и которые, как показано выше обязательно будут обыкновенными) мы будем называть *заведомо обыкновенными*.

Если условие (1.123) не соблюдено, то точка может оказаться *особой* с совсем другими свойствами. Так для поверхности (конус)

$$F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

в точке $x = y = z = 0$ обращаются в нуль все частные производные F_x, F_y, F_z . И действительно, эта точка служит вершиной конуса, вблизи которой, как бы ни уменьшать окрестность, уравнение конуса нельзя записать в виде (1.126), а сам конус нельзя представить в виде простого куска поверхности (см. рис. (1.16)). Аналогично обстоит дело и в точках самопересечения поверхности.

Теорема о существовании касательной плоскости, в которой расположатся касательные ко всем кривым на поверхности, в таких точках тоже не верна.

1.4.10 Касание кривой с поверхностью.

Пусть через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, рис. 1.17, проходит кривая $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ (при $t = t_0$) и поверхность $F(x, y, z) = 0$.

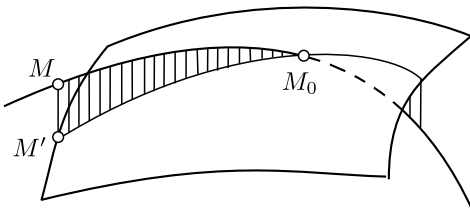


Рис. 1.17: Касание кривой с поверхностью.

Как обычно, предполагаем, что в точке M_0 соблюдаются условия

$$\nabla F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \neq 0$$

(для определенности пусть $F_z \neq 0$) и

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k} \neq 0.$$

Оценим близость между кривой и поверхностью в бесконечно малой области около точки M_0 .

Возьмем на кривой какую-нибудь точку $M[x(t), y(t), z(t)]$ и проведем через нее параллель оси Z до пересечения с поверхностью в точке, которую обозначим через M' . Ограничиваясь достаточно малой окрестностью точки M_0 , можно утверждать, что это пересечение произойдет, и при этом в единственной точке. Действительно, так как в точке M_0 мы имеем $F_z \neq 0$, уравнение поверхности вблизи нее может быть приведено к виду

$$z = f(x, y)$$

и после подстановки $x(t), y(t)$ определяет нам точку на поверхности с координатами $x(t), y(t), Z$, где

$$Z = f[x(t), y(t)].$$

Эта точка поверхности и есть искомая точка M' , так как она имеет значения x, y , общие с M , и лежит с нею, следовательно, на одной параллели оси Z . Отрезок $M'M = z(t) - Z$, естественно, будет измерять расстояние "по вертикали" между кривой в точке M и поверхностью.

Пусть теперь t стремится к t_0 ; тогда точка M стремится в M_0 , равно как и M' , так что отрезок $M'M$ стремится к нулю. Изучим теперь *порядок малости отрезка $M'M$ по отношению к $t - t_0$* .

Для этого очень удобным приемом является составление функции

$$\varphi(t) = F[x(t), y(t), z(t)], \quad (1.127)$$

полученной подстановкой в левую часть уравнения поверхности текущих координат кривой. Так как кривая не лежит на поверхности, то $\varphi(t)$, вообще говоря, отлична от нуля; при $t = t_0$ мы имеем точку, общую кривой и поверхности, и следовательно, уравнение поверхности в ней удовлетворяется:

$$\varphi(t_0) = 0.$$

При t , стремящемся к t_0 , $\varphi(t)$ стремится, следовательно к нулю. Покажем, что $\varphi(t)$ *будет при этом бесконечно малым одного порядка с отрезком $M'M$* .

Запишем, что точка $M'[x(t), y(t), Z]$ удовлетворяет своим координатами уравнению поверхности

$$0 = F[x(t), y(t), Z].$$

Вычтем это равенство почленно из (1.123) и применим в правой части теорему о конечном приращении, рассматривая F как функцию третьего аргумента *при закрепленных двух первых*. Получим

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= F[x(t), y(t), z(t)] - F[x(t), y(t), Z] = \\ &= F_z[x(t), y(t), \zeta][z(t) - Z], \end{aligned}$$

где ζ - некоторое промежуточное значение между $z(t)$ и Z . Но при t , стремящемся к t_0 , точки M и M' стремятся в M_0 и, следовательно, z и Z вместе с заключенным между ними значением ζ стремятся к z_0 . Очевидно также, что

$$x(t) \rightarrow x_0, \quad y(t) \rightarrow y_0.$$

Поэтому из предыдущего равенства следует, что при $t \rightarrow t_0$

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{z(t) - Z} &= F_z[x(t), y(t), \zeta] \rightarrow \\ &\rightarrow F_z(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

Итак, отношение бесконечно малых $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ стремится к пределу и при этом отличному от нуля (по предположениям, сделанным в начале этого параграфа). Мы видим, что $z(t) - Z$ и $\varphi(t)$ - бесконечно малые одного порядка.

Наиболее тривиальная возможность здесь та, когда они будут *первого* порядка относительно $t - t_0$; в наглядном представлении это будет *пересечение* кривой и поверхности под некоторым углом.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(t)$ (и, следовательно, отрезок $M'M$, равный $z(t) - Z$) будет бесконечно малым, *порядка выше первого* относительно $t - t_0$. Тогда мы скажем, что кривая *касается* поверхности в точке M_0 . Мы говорим, что *касание* n -го порядка, если порядок бесконечно малого $M'M$ будет выше n , и что *касание точно* n -го порядка (а не выше), если порядок $M'M$ точно $n + 1$ (а не выше).

Практическая запись условий касания n -го порядка состоит в том, что функция $\varphi(t)$ разлагается в ряд Тейлора по степеням $t - t_0$. Так как касание n -го порядка означает, что $\varphi(t)$ есть бесконечно малое выше n -го порядка относительно $t - t_0$, то в разложении должны исчезнуть все члены до n -й степени включительно. Запишем условия этого, приравняв нулю коэффициенты при $t - t_0$ в степенях $\leq n$:

$$\varphi(t_0) = \varphi'(t_0) = \varphi''(t_0) = \dots = \varphi^{(n)}(t_0) = 0. \quad (1.128)$$

Очевидно, эти условия и достаточны, так как при их наличии разложение может начинаться не ниже чем с $n + 1$ -й степени $t - t_0$. Первое из этих условий

$$\varphi(t) = 0.$$

выражает, что при $t = t_0$ точка кривой попадает на поверхность. Второе из них, пользуясь выражением (1.127) для $\varphi(t)$, можно переписать в виде

$$\varphi'(t_0) = F_x x'(t_0) + F_y y'(t_0) + F_z z'(t_0) = 0$$

или

$$\nabla F \mathbf{r}'(t_0) = 0.$$

Эта формула показывает, что *касательный вектор к кривой в точке M_0 перпендикулярен к ∇F в той же точке и лежит, следовательно, в касательной плоскости к поверхности*. В этом и состоит, можно считать, касание 1-го порядка. Присоединяя последующий условия, мы получаем более тесную близость кривой и поверхности - касания 2-го, 3-го и т.д. порядков.

1.4.11 Соприкасающаяся плоскость.

Пусть кривая задана параметрическим уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Поставим задачу, для любой точки $M(t)$ этой кривой подобрать (при ограничениях из прошлого раздела) проходящую через нее плоскость, наилучшим образом "пригнанную" к кривой вблизи точки $M(t)$, с наименьшим "зазором" между ними.

Сначала проведем через $M(t)$ произвольную плоскость; зададим ее единичным вектором \mathbf{m} , ей ортогональным, рис.1.16.

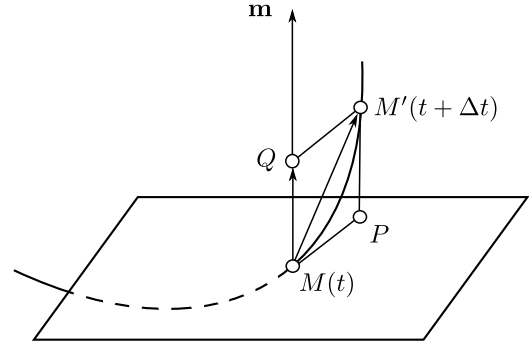


Рис. 1.18: Произвольная плоскость через точку $M(t)$ заданная ее единичным вектором bfm .

Дадим параметру t приращение Δt , вследствие чего мы сдвинемся по кривой из точки M в точку M' .

Определим расстояние точки M' от плоскости по перпендикуляру PM' . При $\Delta t \rightarrow 0$ точка M' бежит по кривой в точку M , и расстояние PM' , очевидно, стремится к нулю.

При этом бесконечно малое расстояние PM' может иметь различный порядок малости относительно Δt . Чем выше этот порядок, тем теснее "пригнана" наша плоскость к кривой вблизи точки M .

Заметим, что наше обычное предположение $\mathbf{r}'(t) \neq 0$, пользуясь формулой (1.52), можно переписать в виде

$$s'(t) = |\mathbf{r}'(t)| \neq 0, \text{ т.е.} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \neq 0. \quad (1.129)$$

Последнее соотношение показывает, что Δt имеет тот же порядок малости, что и $\Delta s = MM'$.

Следовательно, можно считать, что (в нашем определении порядка касания) порядок бесконечно малого PM' расценивается по отношению к дуге Δs , и значит, имеет смысл, инвариантный относительно выбора параметризации t на кривой.

Точная формулировка нашей задачи принимает вид: *найти плоскость, проходящую через точку M с наивысшим возможным порядком касания с кривой в точке M* .

Для решения этой задачи заметим, что вектор смещения $\overline{MM'}$ представляет собой приращение $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ радиус-вектора $\mathbf{r}(t)$ при переходе из M в точку M' . Запишем это, разложив приращение радиус-вектора в ряд Тейлора:

$$\overline{MM'} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) \frac{\Delta t}{1} + \mathbf{r}''(t) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots$$

С другой стороны, расстояние PM' представляет собой проекцию вектора $\overline{MM'}$ на перпендикуляр к плоскости, проведенный через точку M' (так как угол MPM' , очевидно, прямой) или, что все равно, на направление вектора \mathbf{m} , тоже перпендикулярного к плоскости. Но проекция любого вектора на направление единичного вектора выражается их скалярным произведением; следовательно,

$$PM' = \mathbf{m} \overline{MM'} = \mathbf{m} \mathbf{r}'(t) \frac{\Delta t}{1} + \mathbf{m} \mathbf{r}''(t) \frac{\Delta t^2}{2!} + \dots \quad (1.130)$$

Мы подставили вместо $\overline{MM'}$ его разложение в ряд Тейлора.

Конечно, расстояние PM' по этой формуле получается с определенным знаком, который, впрочем, сейчас для нас не важен.

Разберем возможные здесь случаи.

1) $\mathbf{r}'(t) \neq 0$.

Разложение (1.130) начинается с бесконечно малых 1-го порядка, и PM' есть бесконечно малое 1-го порядка. Мы имеем случай касания 0-го порядка, т.е. по существу пересечение кривой с плоскостью. Действительно, касательная к кривой, направленная по вектору \mathbf{r}' , не перпендикулярна к вектору \mathbf{m} ($\mathbf{r}\mathbf{r} \neq 0$), следовательно, не лежит в плоскости, а пробивает ее под некоторым углом.

2) $\mathbf{m}\mathbf{r}'(t) = 0$.

Разложение (1.130) начинается с бесконечно малых (не ниже) 2-го порядка; PM' есть бесконечно малое (не ниже) 2-го порядка, и мы имеем случай касания 1-го порядка. Геометрически условие 2) означает, что касательная к кривой перпендикулярна к вектору \mathbf{m} , а следовательно, лежит в нашей плоскости.

Определение 1.4.14 Таким образом, касание 1-го порядка с данной кривой в данной точке M имеют те и только те плоскости, которые проходят через касательную в точке M . Такие плоскости называются касательными к кривой.

В полученном пучке касательных плоскостей не все плоскости будут равноценны в смысле близости к нашей кривой. А именно, если $\mathbf{m}\mathbf{r}'' \neq 0$, то разложение (1.130) начинается с бесконечно малого точно 2-го порядка, и касание будет *точно* 1-го порядка; если же $\mathbf{m}\mathbf{r}'' = 0$, то разложение (1.130) начинается с бесконечно малых (не ниже) 3-го порядка, и касание будет 2-го порядка.

В этом последнем случае плоскость должна, следовательно, удовлетворять двум условиям:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m}\mathbf{r}'(t) &= 0, \\ \mathbf{m}\mathbf{r}''(t) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.131)$$

Такая плоскость существует и притом только одна: это будет плоскость, проведенная через точку M и через отложенные из M векторы \mathbf{r}' \mathbf{r}'' , рис.1.19 (напомним, что \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' предполагаются неколлинеарными).

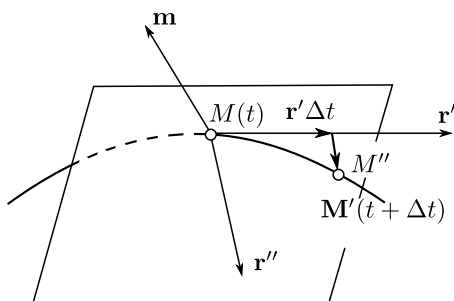


Рис. 1.19: Соприкасающаяся плоскость.

Действительно, условия (1.131) соблюдаются в том и только в том случае, когда \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' ортогональны вектору \mathbf{m} , т.е. лежат в рассматриваемой плоскости.

Определение 1.4.15 Плоскость, имеющая с кривой в данной ее точке M касание 2-го порядка, называется соприкасающейся плоскостью..

Только что доказано, что кривая в каждой своей точке имеет одну и только одну (предполагая $\mathbf{b}\mathbf{f}\mathbf{r}' \nparallel \mathbf{r}''$), соприкасающуюся плоскость. Эта плоскость проходит через векторы \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' , отложенные из точки касания.

Роль соприкасающейся плоскости заключается в том, что среди всех плоскостей, проходящих через данную точку кривой $M(t)$, она единственная так тесно приложена к кривой, что при смещении из точки $M(t)$ по кривой отклонение от нее будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже) относительно приращения параметра t . Другими словами, *если пренебречь бесконечно малыми 3-го порядка и выше, то всякую пространственную кривую в бесконечно малом около данной точки $M(t)$ можно считать плоской, а именно расположенной в соприкасающейся плоскости в этой точке.*

Действительно. Прейдем из данной точки $M(t)$ в бесконечно близкую точку $M'(t + \Delta t)$, рис.1.19. Разложим радиус-вектор точки M' в ряд Тейлора, взяв остаточный член после члена 2-й степени:

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \mathbf{Q}_2 \frac{(\Delta t)^3}{6}.$$

Вектор смещения из точки M в точку M' равен

$$\begin{aligned} \overline{MM'} &= \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) = \\ &= \mathbf{r}'(t)\Delta t + \frac{1}{2}\mathbf{r}''(t)(\Delta t)^2 + \frac{1}{2}\mathbf{Q}_2(\Delta t)^3. \end{aligned}$$

Таким образом, если взять прежде всего член первого порядка $\mathbf{r}'\Delta t$, смещение происходит по касательной, а значит, и в соприкасающейся плоскости. Затем, если добавить член второго порядка $\frac{1}{2}\mathbf{r}''(\Delta t)^2$, мы смещаемся по направлению вектора \mathbf{r}'' , т.е. уклонившись от касательной, но еще в соприкасающейся плоскости, и попадаем в некоторую точку M'' . И только добавление остаточного члена выводит нас из соприкасающейся плоскости, переводит из M'' в точку M' на кривой. Но так как остаточный член при Δt , стремящийся к нулю, будет бесконечно малым 3-го порядка (не ниже), то, если учитывать лишь бесконечно малые 1-го и 2-го порядков, дпуская ошибку 3-го порядка, можно сказать, что вблизи $M(t)$ кривая лежит в своей соприкасающейся плоскости.

1.4.12 Сопровождающий трехгранник.

С соприкасающейся плоскостью связан ряд других геометрических построений. Прежде всего из бесчисленного множества нормалей в данной точке пространственной кривой, которые нам казались равноценными по своим свойствам, теперь выделяются две особенные.

Определение 1.4.16 Нормаль в данной точке, лежащую в соприкасающейся плоскости, называют главной нормалью, а нормаль, перпендикулярную к соприкасающейся плоскости, - бинормалью, рис.1.20.

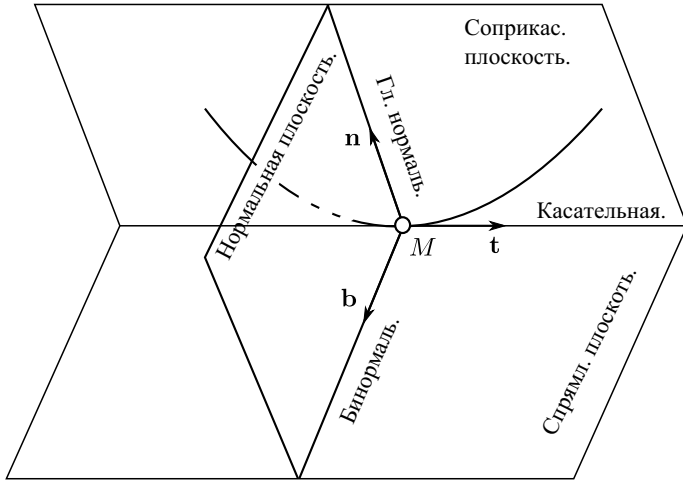


Рис. 1.20: Сопровождающий трехгранник.

Соприкасающаяся плоскость берется, разумеется, в той же точке кривой, где строятся нормали. Очевидно, касательная, главная нормаль и бинормаль, выходящие из одной и той же точки кривой, образуют между собой прямые углы.

Роль координатных плоскостей будут играть:

соприкасающаяся плоскость (проходит через касательную и главную нормаль);

нормальная плоскость (проходит через главную нормаль и бинормаль)

спрямляющая плоскость - так называется плоскость, проходящая через бинормаль и касательную.

На осях трехгранника условимся откладывать в определенную сторону единичные векторы - орты нашей координатной системы - и их направления будем считать положительными направлениями на осях. Для этих ортов введем обозначения:

\mathbf{t} - орт по касательной,

\mathbf{n} - орт по главной нормали,

\mathbf{b} - орт по бинормали.

Сопровождающий трехгранник строится в каждой точке кривой где $\mathbf{r}'' \nparallel \mathbf{r}'$ и меняется от точки к точке.

Найдем теперь уравнения элементов сопровождающего трехгранника. Уравнения касательной и уравнение нормальной плоскости уже получены.

Составим *уравнение соприкасающейся плоскости*. Так как векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' лежат в соприкасающейся плоскости, то их векторное произведение

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = (y'z'' - z'y'')\mathbf{i} + (z'x'' - x'z'')\mathbf{j} + (x'y'' - y'x'')\mathbf{k} \quad (1.132)$$

отличное от нуля, (так как мы предполагаем $\mathbf{r}' \nparallel \mathbf{r}''$) будет к ней перпендикулярно. Рассматривая соприкасающуюся плоскость как плоскость, проходящую через данную точку $M(x, y, z)$ на кривой перпендикулярно к вектору (1.132), мы можем записать ее уравнение в виде

$$(X - x)(y'z'' - z'y'') + (Y - y)(z'x'' - x'z'') + (Z - z)(x'y'' - y'x'') = 0. \quad (1.133)$$

или

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r})[\mathbf{r}', \mathbf{r}''] = 0,$$

где X, Y, Z - текущие координаты, \mathbf{R} - скользящий радиус-вектор соприкасающейся плоскости. Левую часть (1.133) можно переписать более сжато в виде определителя 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad (1.134)$$

или

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0.$$

Составим теперь уравнения главной нормали и бинормали. Начнем с бинормали, так как вектор, перпендикулярный к соприкасающейся плоскости и, следовательно, направленный по бинормали, у нас уже построен. Это - вектор $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ (см. 1.132). В таком случае уравнение бинормали легко построить как уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x, y, z)$ на кривой и параллельной вектору $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$ в этой точке. Уравнение это (в форме пропорций) запишется по общим правилам так:

$$\frac{X - x}{y'z'' - z'y''} = \frac{Y - y}{z'x'' - x'z''} = \frac{Z - z}{x'y'' - y'x''} \quad (1.135)$$

Чтобы найти теперь направление главной нормали, составим векторное произведение перпендикулярных к ней векторов, а именно, \mathbf{r}' и $[\mathbf{r}', \mathbf{r}'']$. Это векторное произведение будет, очевидно, параллельно главной нормали. Вычислим его как двойное векторное произведение:

$$[\mathbf{r}', [\mathbf{r}', \mathbf{r}'']] = \mathbf{r}'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - \mathbf{r}''(\mathbf{r}'\mathbf{r}').$$

Не представляет труда вычислить координаты этого вектора

$$\begin{aligned} x'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - x''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \\ y'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - y''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'), \\ z'(\mathbf{r}'\mathbf{r}'') - z''(\mathbf{r}'\mathbf{r}'). \end{aligned}$$

и записать уравнение главной нормали как прямой, проходящей через точку $M(x, y, z)$ кривой параллельно этому вектору.

Установим направление векторов $\mathbf{r}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$, будем предполагать, что кривая отнесена к дуге как к параметру

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s).$$

Тогда $\dot{\mathbf{r}}$ есть единичный вектор, направленный по касательной. Его мы и примем за вектор \mathbf{t} :

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}. \quad (1.136)$$

Дифференцируя это равенство по s и учитывая, что производная единичного вектора \mathbf{t} ему ортогональна по лемме (1.4.1), получим

$$\dot{\mathbf{t}} = \dot{\mathbf{r}} \perp \mathbf{t}.$$

Таким образом, $\dot{\mathbf{r}}$ направлен по некоторой нормали к кривой; а так как вторая производная радиус-вектора по любому параметру (в том числе и по дуге) всегда лежит в соприкасающейся плоскости, то $\dot{\mathbf{r}}$ *направлен по главной нормали*. При этом предполагается $\dot{\mathbf{r}} \neq 0$.

Мы усложним, единичный вектор по главной нормали \mathbf{n} откладывать в направлении вектора $\dot{\mathbf{r}}$.

Наконец, единичный вектор по бинормали \mathbf{b} мы направим так, чтобы поворот на прямой угол от \mathbf{t} к \mathbf{n} происходил против часовой стрелки, если смотреть с конца \mathbf{b} . Другими словами, векторы $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ должны представлять собой

правую тройку. Так как, кроме того, это векторы единичные и взаимно ортогональны, то для них (совершенно так же как для ортов $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$) имеют место равенства

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}, \mathbf{n}] &= \mathbf{b}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{b}] &= \mathbf{t}, \\ [\mathbf{b}, \mathbf{t}] &= \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (1.137)$$

Если направление отсчета дуги s мы изменим на обратное, то, рассуждая совершенно так же, как и для плоской кривой, получим, что \mathbf{t} меняет направление на обратное, а \mathbf{n} не меняется. Что же касается \mathbf{b} , то из первой формулы (1.137) видно, что он меняет направление на обратное. Итак,

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t} &\rightarrow -\mathbf{t}, \\ \mathbf{n} &\rightarrow \mathbf{n}, \\ \mathbf{b} &\rightarrow -\mathbf{b} \end{aligned} \right\} \quad (1.138)$$

Мы проводили изучение пространственной кривой в бесконечно малом с точностью уже не 1-го (как при построении касательной), а 2-го порядка. С этим связано появление в рассмотрении не только первой, но и второй производной радиус-вектора $\mathbf{t}(t)$, построение соприкасающейся плоскости и т.д.

1.5 Кривизна пространственной кривой.

Введем теперь понятие *кривизны в данной точке пространственной кривой*. Вдоль пространственной кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$$

в каждой точке определяется единичный касательный вектор

$$\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}(s)$$

как функция дуги s .

Определение 1.5.1 Скорость вращения вектора \mathbf{t} (или, что тоже, скорость вращения касательной) в данной точке кривой по отношению к пути s , проходимому по кривой называется *кривизной k* в данной точке.

Другими словами,

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right|, \quad (1.139)$$

где Δs - путь, пройденный по кривой, исходя из данной точки, а $\Delta \varphi$ - угол соответствующего поворота касательной \mathbf{r} . Но по лемме (1.4.2)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta \varphi}{\Delta s} \right| = |\dot{\mathbf{t}}(s)|$$

и, следовательно,

$$k = |\dot{\mathbf{r}}|. \quad (1.140)$$

А так как $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{r}}$, то

$$k = |\dot{\mathbf{t}}|. \quad (1.141)$$

1.5.1 Формулы Френе. Крочение.

Основной смысл формул Френе состоит в том, чтобы характеризовать вращение сопровождающего трехгранника $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ при движении точки касания вдоль пространственной кривой. Действительно, так как $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ - единичные взаимно ортогональные векторы, то при бесконечно малом смещении точки касания вдоль кривой эта тройка может лишь повернуться как твердое тело (на изменение точки приложения мы внимания не обращаем), рис.1.21.

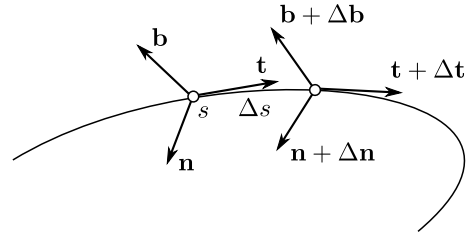


Рис. 1.21: Вращение сопровождающего трехгранника - геометрический смысл формулы Френе.

Займемся аналитическим выражением этой идеи.

Считая кривую отнесенной к параметру s

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s),$$

причем кривизна нигде не обращается в нуль, мы очевидно, можем векторы сопровождающего трехгранника считать однозначно определенными функциями s :

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(s), \mathbf{n} = \mathbf{n}(s), \mathbf{b} = \mathbf{b}(s).$$

Аналитическое содержание формул Френе будет заключаться в разложении производных от векторов $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ по дуге s т.е. $\dot{\mathbf{t}}, \dot{\mathbf{n}}, \dot{\mathbf{b}}$, по самим этим векторам.

Легче всего выразить производную $\dot{\mathbf{t}}$. Мы знаем, что вектор $\dot{\mathbf{t}} = \ddot{\mathbf{r}}$ направлен в каждой точке по главной нормали в положительном направлении, другими словами, в направлении вектора \mathbf{n} . Что же касается его модуля, то он равен кривизне, как показывает (1.140). Следовательно, вектор $\dot{\mathbf{t}}$, как и всякий вектор, равен своему модулю, умноженному на единичный вектор в том же направлении:

$$\dot{\mathbf{t}} = k\mathbf{n} \quad (1.142)$$

Это и есть *первая формула Френе*. Вектор $k\mathbf{n}$ называется вектором кривизны кривой.

Займемся теперь дифференцированием вектора $\mathbf{b}(s)$. Запишем определение вектора $\mathbf{b}(s)$:

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}],$$

и продифференцируем это равенство почленно по s . Получим

$$\dot{\mathbf{b}} = [\dot{\mathbf{t}}, \mathbf{n}] + [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

В правой части первый член обращается в нуль, так как первый множитель векторного произведения $\dot{\mathbf{t}}$ коллинеарен второму, \mathbf{n} ,

$$\dot{\mathbf{b}} = [\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}].$$

Так как \mathbf{n} - вектор единичный, то его производная $\dot{\mathbf{n}}$ перпендикулярна к нему; кроме того, вектор \mathbf{t} также к нему

перпендикулярен. Следовательно, векторное произведение \mathbf{t} на $\dot{\mathbf{n}}$, перпендикулярное к обоим этим векторам, будет направлено параллельно \mathbf{n} и будет отличаться от \mathbf{n} только некоторым скалярным коэффициентом. Этот коэффициент, взятый с обратным знаком, мы обозначим через κ . Тогда векторное произведение $[\mathbf{t}, \dot{\mathbf{n}}]$ равно $-\kappa\mathbf{n}$ и мы можем записать

$$\dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n}. \quad (1.143)$$

Это и есть *третья формула Френе* (вторую еще предстоит вывести). Коэффициент κ в каждой точке определяется, очевидно, единственным образом, включая и знак (в отличие от коэффициента k , который по самому определению кривизны всегда положителен).

Определение 1.5.2 Значение коэффициента κ в данной точке кривой называется *кручением кривой* в этой точке.

Используем формулы (1.137):

$$\mathbf{b} = [\mathbf{t}, \mathbf{n}], \quad (1.144)$$

$$\mathbf{t} = [\mathbf{n}, \mathbf{b}], \quad (1.145)$$

$$\mathbf{n} = [\mathbf{b}, \mathbf{t}]. \quad (1.146)$$

Продифференцируем по s последнее равенство; получим

$$\dot{\mathbf{n}} = [\dot{\mathbf{b}}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, \dot{\mathbf{t}}].$$

Подставим сюда выражения $\dot{\mathbf{b}}$ и $\dot{\mathbf{t}}$ из (1.143) и (1.142). Получим

$$\dot{\mathbf{n}} = [-\kappa\mathbf{n}, \mathbf{t}] + [\mathbf{b}, k\mathbf{n}].$$

Пользуясь формулами (1.144) и (1.145), векторные произведения $[\mathbf{n}, \mathbf{t}]$ и $[\mathbf{b}, \mathbf{n}]$ можно заменить через $-\mathbf{b}$ и $-\mathbf{t}$, и выражение для $\dot{\mathbf{n}}$ принимает окончательно форму

$$\dot{\mathbf{n}} = \kappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}. \quad (1.147)$$

Мы получили *вторую формулу Френе*. Сделаем сводку всех формул Френе:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{t}} &= k\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} &= \kappa\mathbf{b} - k\mathbf{t}, \dot{\mathbf{b}} = -\kappa\mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (1.148)$$

Производные $\dot{\mathbf{t}}$, $\dot{\mathbf{n}}$, $\dot{\mathbf{b}}$ по длине дуги s в данной точке разложены, как мы видим, по самим \mathbf{t} , \mathbf{n} , \mathbf{b} с коэффициентами $\pm k$, $\pm\kappa$.

Интересно отметить, что если в каждом разложении писать на первом месте член с \mathbf{t} , потом с \mathbf{b} , то матрица коэффициентов разложений (1.148) примет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & \kappa \\ 0 & -\kappa & 0 \end{vmatrix} \quad (1.149)$$

1.6 Векторы и ковекторы.

1.6.1 Фазовое пространство.

Множество всех возможных состояний процесса называется *фазовым пространством*.

Фазовое пространство механической системы - это множество, элементами которого являются набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Понятие фазового пространства сводит изучение эволюционных процессов к геометрическим задачам о кривых, определяемых векторными полями.

Движение всей системы описывается движением точки по кривой в фазовом пространстве. Скорость движения фазовой точки по этой кривой определяется самой точкой. Таким образом в каждой точке фазового пространства задан вектор - он называется *вектором фазовой скорости* в фазовом пространстве. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса (зависимость движения фазовой точки от ее положения).

Математическая формализация понятия детерминированного процесса приводит к понятию однопараметрической группы преобразований.

Определим отображение за время t фазового пространства в себя:

$$g^t : M \longrightarrow M.$$

Рис.

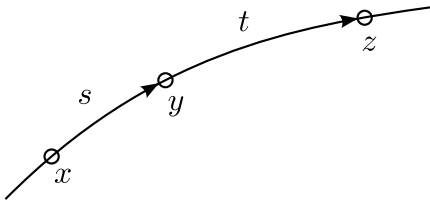


Рис. 1.22: Однопараметрическая группа преобразований.

Пусть x начальное состояние. $g^t x$ - состояние в момент t . Мы определили для каждого вещественного t отображение $M \longrightarrow M$. Отображение g^t переводит состояние в момент времени 0 в состояние в момент t .

Неизменному во времени состоянию отвечает тождественное преобразование g^0 .

Имеет место так же соотношение:

$$g^{t+s} = g^t g^s.$$

Так как состояние $y = g^s x$, в которое перейдет x через время s , по прошествии времени t , перейдет в то же состояние $z = g^t y$ в которое x перейдет за время $t + s$, т.е. $g^{t+s} x = z$.

Точка $x \in M$ т.е. начальное состояние процесса с течением времени опишет фазовую кривую $g^t x, t \in R$. Отображения g^t за время t и образуют фазовый поток; каждая фазовая точка движется по своей фазовой кривой. Отображение g^t является взаимно однозначным отображением

на. Это следует из того, что, по определению детерминированности, каждое состояние однозначно определяет как будущее, так и прошлое. Из свойства взаимной однозначности следует что обратное преобразование к g^s также существует и $g^{-s} y = x$.

Определение. g^t - однопараметрическая группа преобразований M в себя.

Определение. Фазовым потоком $(M, \{g^t\})$ называется пара, составленная из множества M и однопараметрической группы $\{g^t\}$ его преобразований.

Определение. Пусть $x \in M$ какая нибудь фазовая точка. Рассмотрим отображение

$$\varphi : R \longrightarrow M, \varphi(t) = g^t x. (2)$$

Движением точки x под действием потока $(M, \{g^t\})$ называется отображение (2) вещественной оси в фазовое пространство.

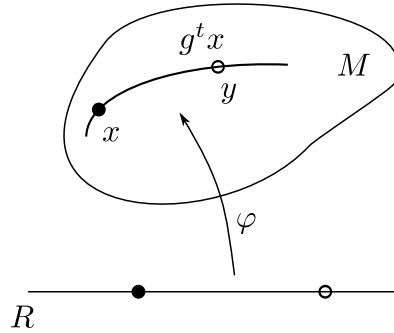


Рис. 1.23: Движение фазовой точки x .

Прямым произведением $R \times M$ называется подмножество упорядоченных пар $(t, x) : t \in R, x \in M$.

Графиком отображения $\varphi : R \longrightarrow M$ называется подмножество прямого произведения $R \times M$, состоящее из всех точек $(t, \varphi(t))$.

Определение. Расширенным фазовым пространством потока $(M, \{g^t\})$ называется прямое произведение $R \times M$ вещественной оси t и фазового пространства M . Интегральной кривой потока $(M, \{g^t\})$ называется график движения (2).

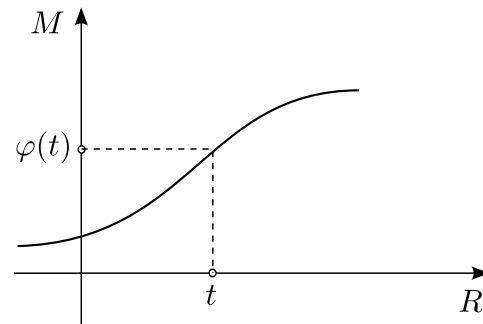


Рис. 1.24: Движение фазовой точки x .

Определение. Дiffeоморфизмом $\varphi : U \longrightarrow V$ называется такая взаимно однозначное отображение, что как φ , так и φ^{-1} - дифференцируемы отображения.

Определение. Однопараметрической группой $\{g^t\}$ диффеоморфизмов многообразия M называется такое отображение g , прямого произведения $R \times M$ в M что

1. g - дифференцируемое отображение,
2. при каждом $t \in R$ отображение $g^t : M \rightarrow M$ - диффеоморфизм,
3. семейство $\{g^t, t \in R\}$ является однопараметрической группой преобразований M .

Пример 1. $M = R$, $g^t x = x + vt (v \in R)$

1. g - дифференцируемое отображение.
2. семейство $g^t, t \in R$ является однопараметрической группой преобразований.
3. при каждом $t \in R$ отображение $g^t : M \rightarrow M$ диффеоморфизм.

Пусть $(M, \{g^t\})$ - фазовый поток, заданный однопараметрической группой диффеоморфизмов M , лежащего в евклидовом пространстве.

Определение. Фазовой скоростью $\vec{v}(x)$ потока g^t в точке $x \in M$ называется вектор скорости движения фазовой точки

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x = \vec{v}(x). \quad (3).$$

Движение - это дифференцируемое отображение в область евклидова пространства, так что производная определена.

Определение. Векторное поле \vec{v} на M относит каждой точке x области M исходящий из нее вектор $\vec{v}(x)$. Точка в которой вектор векторного поля обращается в нуль называется особой точкой векторного поля.

Пусть U открытая область n -мерного евклидова пространства, и пусть \vec{v} векторное поле в U .

Дифференциальным уравнением, заданным векторным полем \vec{v} называется уравнение

$$\frac{d}{dt} x = \vec{v}(x). \quad (1)$$

Область U называется фазовым пространством уравнения (1) Рис.

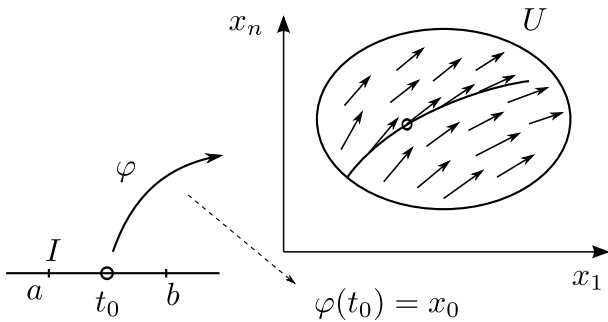


Рис. 1.25: Векторное поле задающее дифференциальное уравнение.

Зафиксируем точку x_0 и рассмотрим ее движение под действием фазового потока. Иными словами, рассмотрим отображение, определенное так:

Теорема. Отображение φ является решением уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$.

Доказательство. Это вытекает из группового свойства:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=\tau} g^t x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} g^{\tau+\varepsilon} x = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} g^\varepsilon (g^\tau x) = v(g^\tau x)$$

Таким образом, с каждой однопараметрической группой диффеоморфизмов связано дифференциальное уравнение

(заданное векторным полем фазовой скорости); решениями этого уравнения являются *движения* фазовых точек под действием фазового потока.

Иными словами, точка $\varphi(t) = x$ должна двигаться в U таким образом, чтобы ее скорость в каждый момент времени τ была равна вектору $\vec{v}(x)$ поля \vec{v} в той точке $x = \varphi(\tau)$, в которой движущаяся точка в данный момент находится. Образ отображения φ называется фазовой кривой дифференциального уравнения (1).

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^t x = \vec{v}(x). \quad (3).$$

- фазовая скорость $\vec{v}(x)$ потока g^t в точке $x \in M$ есть вектор скорости движения фазовой точки.

Формулировка какого либо закона природы в виде дифференциального уравнения сводит любую задачу об эволюции процесса к *геометрической* задаче о поведении фазовых кривых данного векторного поля в соответствующем фазовом пространстве.

Векторное пространство в котором мы работаем представляет собой пространство касательных векторов к всевозможным параметризованным кривым, проходящим через некоторую фиксированную точку.

1.6.2 Действие гладких отображений на векторы.

Будем рассматривать наряду с векторами также и их отображения.

Пусть $f : M \rightarrow N$ - гладкое отображение области M линейного пространства в область N линейного пространства, и пусть v - вектор, приложенный в точке x области-прообраза M . Тогда в точке-образе $f(x)$ области N также возникает вектор, обозначаемый, через $f_* v$ и называемый образом вектора при отображении f .

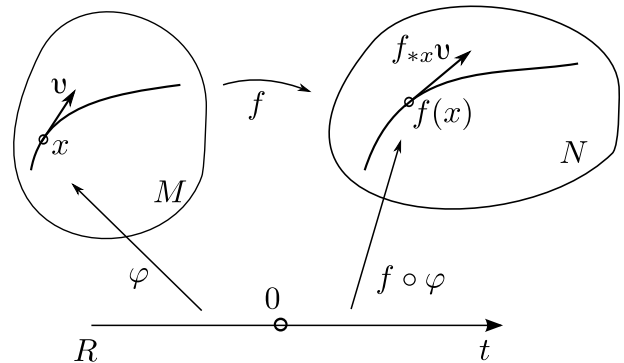


Рис. 1.26: Действие гладкого отображения на вектор.

Определение. Образом вектора v при отображении f называется вектор скорости, с которой движущаяся точка $f(\varphi(t))$ выходит из точки $f(x)$, когда движущаяся точка $\varphi(t)$ выходит из точки x со скоростью v :

$$f_* v = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\varphi(t))$$

где

$$\varphi(0) = x, \quad \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi(t) = v$$

Образ вектора v не зависит от выбора движения φ , лишь бы точка $\varphi(t)$ выходила из x со скоростью v .

Действительно, пусть ψ другое движение, выходящее из x с такой же скоростью. Тогда расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ при малых $|t|$ есть $o(|t|)$. Поскольку отображение f гладкое, расстояние между точками-образами $f(\varphi(t))$ и $f(\psi(t))$ в N также есть $o(|t|)$.

Дадим независимое от системы координат определение вектора скорости выхода из точки x .

Определение. Касательным вектором в точке x области M называется класс эквивалентности кладких движений $\varphi : R \rightarrow M$, для которых $\varphi(0) = x$; эквивалентность $\varphi \sim \psi$ определяется условием: расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в какой-нибудь системе координат есть $o(|t|)$ при $t \rightarrow 0$, и если отображение между координатными системами обладает определенными свойствами (см. пар. "многообразия") то это условие выполняется в любой допустимой системе координат.

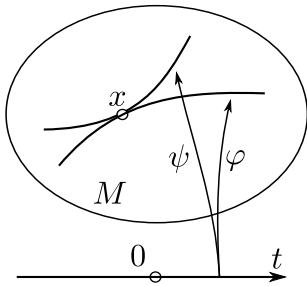


Рис. 1.27: Класс эквивалентных движений.

Класс эквивалентности движения φ определяется (при фиксированной системе координат) компонентами вектора скорости выхода $\varphi(t)$ из точки $\varphi(0)$.

Таким образом, бескоординатно определенный вектор превращается в обычную стрелочку, как только система координат фиксированна.

Независимость линейных операций над вектором сразу вытекает из линейности оператора производной отображения в точке (нужно рассмотреть в качестве отображения "замену переменных т.е. диффеоморфизм, сопоставляющий набору старых координат точки набор ее новых координат).

Хотя такое определение не зависит от системы координат, остается еще зависимость от класса всех допустимых систем координат, связанных ладкими заменами переменных. Этот класс называется *дифференцируемой структурой*.

Множество всех векторов скоростей движений, выходящий из точки x области M , является *линейным пространством*: это просто пространство векторов, приложенных в точке x . Его размерность равна размерности области M . Это пространство называется *касательным пространством* в точке x к области M и обозначается $T_x M$.

Определенное выше отображение f_* переводит касательное пространство к области-прообразу, M , в точке x в касательное пространство к области-образу в точке $f(x)$.

Если в пространствах - прообразе и образе отображения f - выбраны декартовы координаты (x_1, \dots, x_n) и (y_1, \dots, y_n) соответственно, так что f задается набором n функций f_i от m переменных x^i , то компоненты вектора $f_* v$ выража-

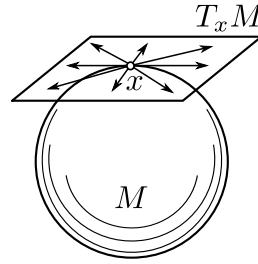


Рис. 1.28: Касательное пространство.

ются через компоненты вектора v по формуле

$$(f_* v)_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j.$$

$$(f_* \mathbf{v})_i = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j.$$

Иначе говоря, матрица оператора f_* составлена из частных производных $(\partial f_i / \partial x_j)$.

Определение. Линейный оператор f_* называется производной отображения f в точке x .

Определение

Производная отображения f в точке x есть не зависящий ни от системы координат в прообразе, ни от системы координат в образе линейный оператор $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ по самому своему определению.

1.6.3 Действие диффеоморфизмов на векторные поля.

Определение. В области M задано гладкое векторное поле v , если каждой точке x сопоставлен приложенный в ней вектор $v(x) \in T_x M$, гладко зависящий от точки x . Если система координат выбрана, то поле задается своими m компонентами, являющимися гладкими функциями переменных. Вектор $v(x)$ называется значением поля v в точке x .

Производная по направлению. В координатном представлении параметризованная кривая дается функциями $\varphi^i = \varpi^i(t)$

Вектор v , понимаемый как производная по направлению, в обычных трехмерных обозначениях записывается в виде .

Касательные векторы при отображениях $g : M \rightarrow N$ движутся вперед. Т.е. под действием g касательный вектор к M переходит в касательный вектор $g_* v$ к N .

Функции при отображениях $g : M \rightarrow N$ движутся назад. Т.е. функция f на N порождает функцию на M . Ее значение в точке x из M равно значению f в образе точки x . Эта функция обозначается $g^* f$; звездочка сверху символизирует движение назад.

В общем случае если заданы два векторных пространства \mathcal{A} и \mathcal{B} . Размерности в общем случае не одинаковы. Но если размерность $\mathcal{A} = \mathbb{R}$, то говорим, что \mathcal{A} в \mathcal{B} при отображении λ задает параметризованную кривую, или как говорят кривую заданную параметрически. Если же размерность $\mathcal{B} = \mathbb{R}$ то имеем дело с обычной функцией.

Для наглядного представления связи функции и параметризованной кривой рассмотрим следующую схему.

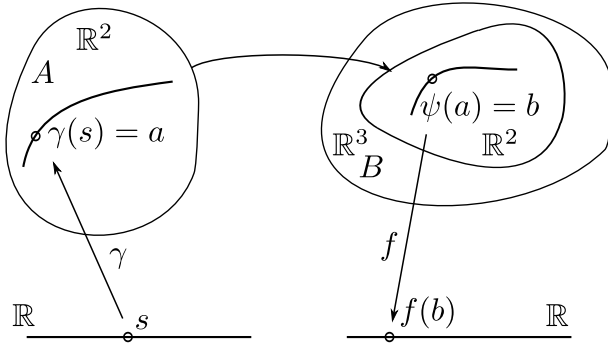


Рис. 1.29: Касательное пространство.

Предположим, что на множестве задана некоторая функция, т.е. отображение

$$f : B \longrightarrow \mathbb{R}$$

(рис. 1.29). Тогда отображение естественным образом определяет функцию на множестве: Это также изображено на рис. 1.29. Чтобы вычислить значение в точке, принадлежащей множеству, нужно сначала с помощью отобразить в множество, а затем взять значение функции в точке. Функцию будем называть ограничением () функции на подпространство, задаваемое отображением.

Существует также дуальная операция, ассоциируемая с параметризованной кривой в A:

Она схематически изображена на рис. 1.29. Теперь она осуществляется с помощью отображения в том же направлении. Результатом является кривая:

которую будем называть продолжением () с помощью отображения.

Касательный вектор объединяет в себе две различные идеи. С одной стороны, это оператор производной функции по направлению. С другой стороны - это линейная аппроксимация кривой или класса эквивалентности кривых. Он содержит в себе информацию о локальном поведении гладкой кривой (семейства кривых), проходящей через данную точку. Касательный вектор это приложенный вектор.

Точно также поведение гладкой функции в окрестности некоторой точки определяется ее градиентом. Градиент - локальная линейная аппроксимация функции в окрестности некоторой точки.

Градиент это свободный вектор. Он является представителем класса операторов, которые называются дифференциальными формами. Как первый член этого класса его называют 1-формой.

Существует еще одно существенное различие между касательными векторами и 1-формами - это закон их преобразования при переходе от одной системы координат к другой.

Преобразование компонент касательного к кривой вектора.

Рассмотрим n -мерное пространство \mathbb{R}^n (можно считать для простоты, что $n = 3$) и гладкую кривую $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

задаваемую в некоторой системе координат (x^1, \dots, x^n) уравнениями $x^i = \gamma^i(t)$. При $t = 0$ касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты $v^i = \dot{\gamma}^i(0)$. Теперь рассмотрим новую систему координат $(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$, связанную со старой при помощи гладких функций $\hat{x}^i = g^i(x^1, \dots, x^n)$. Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать \hat{v}^i .

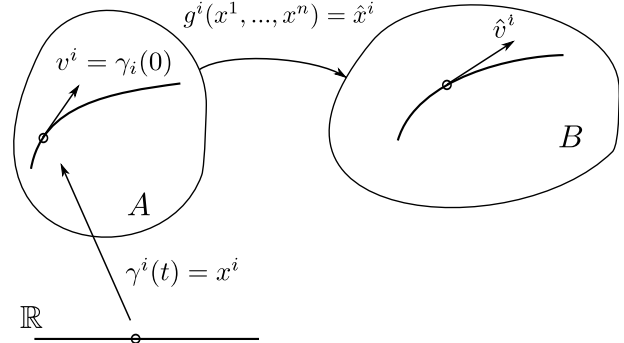


Рис. 1.30: Преобразование компонент вектора при замене базиса.

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{v}^j &= \left. \frac{d\hat{x}^j}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{dg^j(\gamma^1(t), \dots, \gamma^n(t))}{dt} \right|_{t=0} = \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^j}{\partial x^i} \Big|_{t=0} v^i \end{aligned}$$

по формуле производной сложной функции. Так связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

1.6.4 Преобразование координат градиента функции

Рассмотрим функцию f от n переменных: $f = f(\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^n)$. Рассмотрим градиент этой функции (1-форму)

$$gradf = \left(\frac{\partial f}{\partial \hat{x}^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \hat{x}^n} \right) = (\hat{\eta}^1, \dots, \hat{\eta}^n).$$

Сделаем замену координат и вычислим компоненты градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат.

$$\begin{aligned} \eta^i &= \frac{\partial f(g^1(x^1, \dots, x^n), \dots, g^n(x^1, \dots, x^n))}{dx^i} \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \hat{x}^j} \frac{\partial g^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^n \eta^j \frac{\partial g^j}{\partial x^i} \end{aligned}$$

Сравним формулы для вектора и 1-формы. В обеих формулах участвуют выражения вида $\partial g^i / \partial x^j$, но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором - наоборот. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial \hat{x}^j} d\hat{x}^j.$$

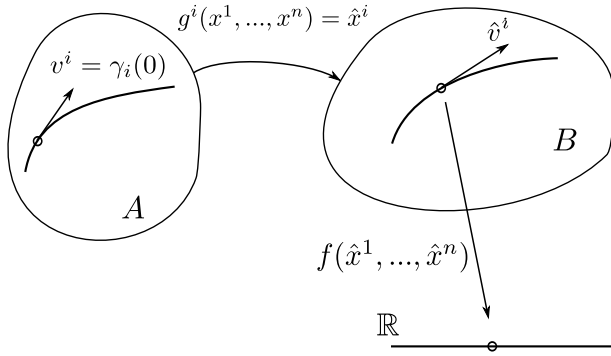


Рис. 1.31: Преобразование компонент градиента функции при замене базиса. Видно, что градиент является вектором в обычном смысле этого слова.

Говорят что при замене базиса вектор преобразуется контравариантно, а градиент ковариантно. И градиент функции, и касательный вектор являются *тензорами*, но тензорами разного типа.

Результат действия градиента функции на касательный вектор к кривой сводится к вычислению производной, т.е. скорости изменения функции вдоль кривой, при изменении.

Шутц. Касательный вектор - оператор дифференцирования вдоль кривой (производная по направлению).

1.6.5 Скалярное произведение.

Определение 1.6.1 Если заданы вектор ξ и вектор ζ , то их евклидовым скалярным произведением называется число

$$(\xi, \zeta) = \sum_{i=1}^n \xi^i \zeta^i \quad (1.150)$$

Это скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- a) $(\xi, \zeta) = (\zeta, \xi)$; - симметричность.
- b) $(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2, \zeta) = \lambda_1 (\xi_1, \zeta) + \lambda_2 (\xi_2, \zeta)$;
- линейность (по двум аргументам) (1.151)
- c) $(\xi, \xi) > 0$
- положительная определенность.

Определение 1.6.2 Декартовы координаты x^1, \dots, x^n , в которых это скалярное произведение имеет вид (1.150), называются *евклидовыми координатами*.

Используя понятие скалярного произведения, можно сказать, что квадрат длины прямолинейного отрезка, ведущего из точки P с радиус-вектором $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ в точку Q с радиус-вектором $\zeta = (y^1, \dots, y^n)$, есть скалярный квадрат вектора $\xi - \zeta$, а длина любого вектора $v = (v^1, \dots, v^n)$ равна $\sqrt{(v, v)}$. Часто длину вектора v обозначают через $|v|$. Свойство b) означает, что все ненулевые векторы v имеют положительную длину.

Напомним, что угол между двумя векторами тоже выражается через скалярное произведение.

$$\cos \varphi = \frac{(\xi, \zeta)}{\sqrt{(\xi, \xi)(\zeta, \zeta)}} = \frac{(\xi, \zeta)}{|\xi||\zeta|}. \quad (1.152)$$

Таким образом, длины и углы тесно связаны с понятием скалярного произведения между векторами. В дальнейшем скалярное произведение будет взято за основное, превичное понятие, на котором строится геометрия.

Пусть теперь задана некоторая параметризованная кривая

$$x^1 = \varphi^1(t), \dots, x^n = \varphi^n(t), \quad (1.153)$$

Рассмотрим компоненты dx^i/dt касательного вектора к этой кривой.

Определение 1.6.3 Длиной линии называется число

$$l = \int_a^b \sqrt{(v(t), v(t))} dt = \int_a^b |v(t)| dt \quad (1.154)$$

Иначе говоря, длиной линии называется интеграл от длины ее вектора скорости.

Длина прямолинейного отрезка $x^i = y^i t$, $0 \leq t \leq 1$ выходящего из начала координат

$$l = \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dt}\right)^2 + \dots + \left(\frac{dx^n}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{(y^1)^2 + \dots + (y^n)^2}, \quad (1.155)$$

Заметим, что формула (1.154) для длины кривой относится к параметризованным кривым $x^i = \varphi^i(t)$, $i = 1, \dots, n$, $a \leq t \leq b$.

Определение 1.6.4 Мы бежим вдоль линии вместе с параметром t , меняющимся между a и b со скоростью

$$v(t) = \left(\frac{d\varphi^1}{dt}, \dots, \frac{d\varphi^n}{dt} \right) \quad (1.156)$$

и эта скорость $v(t)$ бека по кривой явным образом входит в формулу (1.154).

Что будет, если мы побегим по той же самой кривой с другой скоростью? Мы движемся от точки $x = (\varphi^1(a), \dots, \varphi^n(a))$ до точки $y = (\varphi^1(b), \dots, \varphi^n(b))$. Получим ли мы тоже самое число, если будем двигаться по той же самой линии от точки P до точки Q ? но с другой скоростью?

Точная постановка этого вопроса такова. Пусть задан новый параметр τ , меняющийся от a' до b' , ($a' \leq \tau \leq b'$), и параметр t представлен в виде функции от τ , $t = t(\tau)$, $t(a') = a$, $t(b') = b$ причем $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Последнее неравенство означает просто, что мы бежим по параметру τ в ту же сторону по кривой, что и по параметру t . Тогда наша кривая представлена в виде

$$x^i = \varphi^i(t(\tau)) = g^i(\tau), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.157)$$

Скорость движения по параметру τ имеет вид

$$w(\tau) = \left(\frac{dg^1}{d\tau}, \dots, \frac{dg^n}{d\tau} \right), \quad a' \leq \tau \leq b' \quad (1.158)$$

Длина кривой в новой параметризации равна

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau \quad (1.159)$$

Покажем, что

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau = l = \int_a^b |v(t)| dt \quad (1.160)$$

Вычислим длину вектора $w(\tau)$:

$$\begin{aligned} w(\tau) &= \\ \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{dg^i}{d\tau} \right)^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i}{dt} \frac{dt}{d\tau} \right)^2} = \\ \left| \frac{dt}{d\tau} \right| \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{d\varphi^i}{dt} \right)^2} &= \frac{dt}{d\tau} |v(t)|, \end{aligned} \quad (1.161)$$

так как $\frac{dt}{d\tau} > 0$. Поэтому

$$l' = \int_{a'}^{b'} |w(\tau)| d\tau = \int_{a'}^{b'} |v(t(\tau))| \frac{dt}{d\tau} d\tau = \int_a^b |v(t)| dt, \quad (1.162)$$

что и требовалось доказать.

Вывод. Длина отрезка на кривой не зависит от скорости пробегания этого отрезка кривой.

Пусть теперь в евклидовом пространстве с координатами x^i задана другая система координат $x^{i'}$, так что $x^i = x^i(x^{i'})$, $i, i' = 1, \dots, n$. Пусть кривая задается параметрически в новых координатах $x^{i'} = x^{i'}(t)$, $i' = 1, \dots, n$. Тогда в исходных, евклидовых координатах та же самая кривая имеет вид

$$x^i = x^i(x'(t)) = h^i(t) \quad (1.163)$$

Вектор скорости $v'(t)$ кривой в координатах $(x^{i'})$

$$v^{i'} = \frac{dx^{i'}}{dt}$$

В исходных координатах x^i вектор скорости

$$v = \frac{dh^i}{dt}$$

Это - вектор, взятый в точке $P = h^i(t)$, тот же самый вектор, что и v' , но взятый в точке $P = x^{i'}(t)$. Точка P одна и та же, и вектор один и тот же, но записанный в двух разных системах координат x^i и $x^{i'}$.

Как мы знаем, компоненты вектора скорости при замене координат преобразуются по закону

$$v^i = \frac{dh^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v^{i'} \quad (1.164)$$

Квадрат длины вектора скорости имеет вид

$$|v|^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{dh^i}{dt} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} v^{i'} \right)^2 = g_{i'j'} v^{i'} v^{j'}, \quad (1.165)$$

где введено обозначение

$$g_{i'j'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} \quad (1.166)$$

Вывод. В произвольных координатах $x^{i'}$, где $x = x(x')$, скалярный квадрат вектора скорости кривой

$$v' = \frac{dx^{i'}}{dt}$$

задается формулой

$$|v|^2 = |v'|^2 = g_{i'j'} \frac{dx^{i'}}{dt} \frac{dx^{j'}}{dt} \quad (1.167)$$

где

$$g_{i'j'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}}$$

Имея ввиду, что данное равенство выполняется для любой кривой записывают также

$$g_{i'j'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} = \bar{e}_{j'} \bar{e}_{i'} \quad (1.168)$$

Определение 1.6.5 Матрица $g_{i'j'}$ позволяющая выразить скалярный квадрат вектора скорости кривой в произвольных системах координат называется *метрическим тензором*.

Определение 1.6.6 Метрический тензор является *квадратичной формой* на касательных векторах, которая каждой паре векторов ставит в соответствие число - скалярное произведение.

Итак, вектором в точке $P = x^i$, $i = 1, \dots, n$ называется набор чисел ξ^i , отнесенный к системе координат x^i . Если две системы координат x^i и $x^{i'}$ связаны заменой $x = x(x')$, причем $x^i(x_0^{i'}) = x_0^i$, то для новой системы координат $x^{i'}$ этот же вектор в точке $x_0^{i'}$ задается другим набором чисел $\xi^{i'}$, который связан с исходным формулой

$$\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \bigg|_{x^{j'}=x_0^{j'}} \xi^{i'}. \quad (1.169)$$

Выпишем, еще раз закон преобразования градиента функции. Пусть дано

$$\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (1.170)$$

Положим $\xi_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, \dots, n$. Градиент той же функции в других координатах $x^{i'}$, где $x = x(x')$ записывается в виде:

$$\begin{aligned} \text{grad} f(x^i(x')) &= \frac{\partial f}{\partial x^{i'}}, \\ \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} &= \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \quad i, i' = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Обозначив через $\xi_{i'}$ компоненты $\partial f / \partial x^{i'}$ градиента в новой системе координат, получим

$$\xi_{i'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi_i \quad (1.172)$$

Пусть теперь система координат x^1, \dots, x^n евклидова, а ξ_1^i и ξ_2^i - два вектора, которые выходят из одной точки $P = (x_0^i)$, $i = 1, \dots, n$. В системе координат $x^{i'}$ такой, что $x = x(x')$, $x(x_0') = x_0$, эти же векторы имеют соответственно

координаты $\xi_1^{i'}$ и $\xi_2^{i'}$, связанные с прежними координатами формулами

$$\xi_1^i = a_{i'}^i \xi_1^{i'}, \quad \xi_2^i = a_{i'}^i \xi_2^{i'}, \quad (1.173)$$

где $a_{i'}^i$ - матрица Якоби, вычисленная при $x^{i'} = x_0^{i'}$. Скалярное произведение векторов ξ_1 и ξ_2 в исходной системе координат имеет вид

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n \xi_1^i \xi_2^i = \delta_{ij} \xi_1^i \xi_2^j. \quad (1.174)$$

В новой системе координат оно равно

$$(\xi_1, \xi_2) = \sum_{i=1}^n (a_{i'}^i x_1^{i'}) (a_{j'}^i x_2^{j'}) = g_{i'j'} x_1^{i'} x_2^{j'}, \quad (1.175)$$

Где матрица

$$g_{i'j'} = \sum_{i=1}^n a_{i'}^i a_{j'}^i = \delta_{sq} a_{i'}^s a_{j'}^q, \quad (1.176)$$

- метрический тензор. Поэтому скалярное произведение векторов в новых координатах определяется той же самой матрицей $G' = g_{i'j'}$. На алгебраическом языке формула (1.176) означает, что

$$G' = A^T A, \quad (1.177)$$

где индекс T обозначает транспонирование матрицы.

Выясним, как преобразуются компоненты $g_{i'j'}$ матрицы G' при переходе к новым координатам. Пусть заданы новые координаты $x^{i''}$ в той же области, и $x^{i'} = x^{i'}(x^{i''})$, $i', i'' = 1, \dots, n$. Положим

$$A' = a_{i''}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i''}}.$$

Мы знаем, что тогда векторы x_1^i, x_2^i в координатах $x^{i''}$ имеют компоненты $\xi_1^{i''}, \xi_2^{i''}$, причем

$$\xi_1^{i'} = a_{i''}^{i'} \xi_1^{i''}, \quad \xi_2^{i'} = a_{i''}^{i'} \xi_2^{i''} \quad (1.178)$$

Пусть матрица, дающая выражение для скалярного произведения в координатах x'' , равна $g_{i''j''}$. Это значит, что

$$(\xi_1, \xi_2) = g_{i''j''} \xi_1^{i''} \xi_2^{j''} = \delta_{i'j'} \xi_1^{i'} \xi_2^{j'}. \quad (1.179)$$

Используя равенство (1.178), получаем

$$g_{i''j''} \xi_1^{i''} \xi_2^{j''} = (a_{i''}^{i'} g_{i'j'} a_{j''}^{j'}) (\xi_1^{i'} \xi_2^{j'}), \quad (1.180)$$

откуда

$$g_{i''j''} = a_{i''}^{i'} g_{i'j'} a_{j''}^{j'}. \quad (1.181)$$

Итак, $G'' = A'^T G' A'$.

Определение 1.6.7 Квадратичной формой (на векторах) в точке $x_0^{i'}$ называется набор чисел $g_{i'j'}$, $i', j' = 1, \dots, n$, с $g_{i'j'} = g_{j'i'}$, отнесенный к системе координат $x^{i'}$

Если две системы координат $x^{i'}$ и $x^{i''}$ связаны заменой $x' = x'(x'')$, причем $x^{i'}(x_0^{i''}) = x_0^{i'}$, $i', i'' = 1, \dots, n$, то для новой системы координат $x^{i''}$ эта же квадратичная форма

задается набором чисел $g_{i''j''}$, $i'', j'' = 1, \dots, n$, с $g_{i''j''} = g_{j''i''}$ который связан с исходным набором формулой.

$$g_{i'j'} = \left. \frac{\partial x^{i''}}{\partial x^{j'}} \right|_{z^s = z_0^s} g_{i''j''} \left. \frac{\partial x^{j''}}{\partial x^{i'}} \right|_{z^s = z_0^s} \quad (1.182)$$

В матричной форме это означает, что

$$G' = (A'^{-1})^T G'' A'^{-1} \quad (1.183)$$

Замечание. Очевидно, что закон преобразования матрицы g не зависит от выбора системы координат, поэтому штрихи у индексов можно писать или не писать, в зависимости от удобства.

Если в точке P задана квадратичная форма g_{ij} , преобразующаяся при замене координат по закону (1.182), то на касательных векторах в точке P можно определить квадратичную (билинейную) функцию (ξ, ξ) (или (ξ, ζ)), полагая

$$\begin{aligned} (\xi, \xi) &= g_{ij} \xi^i \xi^j, \\ (\xi, \zeta) &= g_{ij} \xi^i \zeta^j. \end{aligned} \quad (1.184)$$

Из закона преобразования (1.182) следует, что так определенные функции не зависят от выбора системы координат, а зависят только от точки P и вектора ξ (или векторов ξ и ζ).

Замечание. Скалярное произведение двух векторов, исходящих из разных точек не инвариантно при заменах координат.

Замечание. При преобразованиях координат, рассматриваемая точка остается той же самой.

Определение 1.6.8 Римановой метрикой в области пространства с произвольными координатами (z^1, \dots, z^n) называется положительная квадратичная форма, заданная на касательных векторах (в одном и том же L_x !) в каждой точке x и гладко зависящая от точки. Пока у нас нет способа сравнивать векторы из разных касательных пространств (выходящие из разных точек). Если заданы новые координаты $(z^{1'}, \dots, z^{n'})$ в той же области, и $z^i = z^i(z^{i'})$, $i = 1, \dots, n$, то в новых координатах риманова метрика определяется набором функций $g_{i'j'} = g_{ij}(z^1, \dots, z^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, причем

$$g_{i'j'} = \frac{\partial z^k}{\partial z^{i'}} g_{kl} \frac{\partial z^l}{\partial z^{j'}}. \quad (1.185)$$

Если задана риманова метрика, то длина кривой $z^i = z^i(t)$ равна

$$l = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t)) \frac{dz^i}{dt} \frac{dz^j}{dt}} dt \quad (1.186)$$

1.6.6 Метрика и деформация.

Материальное и пространственное описания.

Представим себе фиксированную систему декартовых координат с осями x_i , $i = 1, 2, 3$. Положение любой точки в пространстве определяется радиусом-вектором \mathbf{r} с компонентами (x_1, x_2, x_3) . Точка которая движется вместе с веществом, называется *частицей* или *материальной точкой*. Линии и поверхности, состоящие из частиц, называются материальными линиями и поверхностями. Вещество,

находящееся внутри замкнутой материальной поверхности называется *телом*.

Припишем каждой частице ее координаты в некоторый момент времени t_0 , который примем в качестве начала отсчета времени. Эти начальные координаты в той же декартовой системе будем обозначать (a_1, a_2, a_3) , а соответствующий радиус вектор обозначим \mathbf{a} . Вектор \mathbf{a} может служить для определения той частицы, которая в момент времени t_0 находилась в данной точке пространства. Момент времени t_0 и радиус-вектор \mathbf{a} иногда называют *начальными* значениями.

Как вектор \mathbf{r} так и вектор \mathbf{a} могут служить для обозначения положения частицы в фиксированной декартовой системе отсчета. Векторы \mathbf{r} и \mathbf{a} в некоторый момент времени t связаны между собой следующим условием: радиус-вектор \mathbf{r} определяет положение той частицы в момент времени t , которая в начальный момент времени находилась в точке \mathbf{a} . Эта связь между \mathbf{r} и \mathbf{a} может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t, \mathbf{a}), \text{ или } x_i = x_i(t, a_1, a_2, a_3), \quad (1.187)$$

где

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(t_0, \mathbf{a}), \text{ или } a_i = x_i(t_0, a_1, a_2, a_3). \quad (1.188)$$

Координаты a_i , связанные с частицами, называются *материальными* координатами. Такое описание процессов, в котором в качестве независимых переменных используются величины t, a_1, a_2, a_3 , как например в уравнении (1.187), называется *материальным* описанием.

Обращая уравнения (1.187) и (1.188) можно написать

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(t, \mathbf{r}), \text{ или } a_i = a_i(t, x_1, x_2, x_3), \quad (1.189)$$

где

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(t_0, \mathbf{r}), \text{ или } x_i = a_i(t_0, x_1, x_2, x_3). \quad (1.190)$$

В пространственном описании в качестве независимых переменных используются величины (t, x_1, x_2, x_3) , где x_i называются *пространственными* координатами. Величины x_i используемые как независимые переменные, определяют просто точку в пространстве.

Если задан закон движения

Часто представляет интерес пространственное описание поля давлений или поля скоростей, а не начальное положение частиц. В подобных случаях при использовании пространственного описания ограничиваются определением требуемых характеристик полей и не определяют функций a_i из уравнения (1.189). Пространственное описание особенно полезно в механике жидкостей, когда мы можем наблюдать за потоком в данной области пространства. В теории упругости, как правило, предпочтительнее материальное описание, поскольку в качестве начального состояния может быть выбрано ненапряженное состояние, к которому тело возвращается после снятия нагрузки.

Обычно материальные и пространственные переменные называются переменными *Лагранжа* и *Эйлера*.

Скорость. Если материальные координаты (a_1, a_2, a_3) в уравнении (1.187) фиксированы, то величины (x_1, x_2, x_3) являются текущими координатами той частицы, которая в начальный момент времени находилась в точке, определяемой вектором \mathbf{a} . Координаты этой частицы зависят теперь

только от времени, так как вектор \mathbf{a} обозначает лишь, какая именно частица рассматривается. Следовательно, если ограничиться рассмотрением одной частицы, то компоненты ее скорости представляют собой просто обычные производные по времени

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}.$$

Если учитывать также наличие других частиц, то нужно взять частную производную при постоянных значениях параметров a_i :

$$v_i = \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} \equiv \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right)_{a_1, a_2, a_3}. \quad (1.191)$$

Вектор скорости

$$\dot{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{v} \equiv \mathbf{i}_i v_i. \quad (1.192)$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ - единичные векторы, направленные вдоль осей координат. Подразумевается суммирование по повторяющимся дважды индексам. Таки образом, $\mathbf{i}_i v_i$, обозначает $\sum_{i=1}^3 a_i$, а $v_j (\partial F / \partial x_j)$ обозначает $\mathbf{v} \cdot \text{grad} F$.

Материальная производная.

Важно различать изменение во времени какой-либо из характеристик поля в фиксированной точке пространства и изменение той же характеристики во времени для некоторой фиксированной частицы т.е. когда изменения поля рассматриваются, как бы следуя за движением фиксированной частицы. Скорость изменения параметров для фиксированной частицы, которая называется *материальной производной*, имеет фундаментальное значение.

Мы можем следить за какой-либо частицей, если зафиксируем величину \mathbf{a} . Следовательно, в материальном описании (переменные Лагранжа) материальная производная есть частная производная по времени $\partial/\partial t$. В пространственном описании (переменные Эйлера) материальная производная обозначается как d/dt или точкой над символом соответствующей величины.

Пусть одно и то же поле обозначается символом F в пространственном описании и символом f в материальном описании. Тогда

$$f(t, a_1, a_2, a_3) = F[t, x_1(t, a_1, a_2, a_3), x_2(t, a_1, a_2, a_3), x_3(t, a_1, a_2, a_3)] \quad (1.193)$$

По определению, материальная производная

$$\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{a_1, a_2, a_3}. \quad (1.194)$$

Чтобы получить выражение для материальной производной в пространственном описании, продифференцируем уравнение (1.193) и используем (1.194):

$$\frac{dF}{dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial x_i}{\partial t} \frac{\partial F}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} F. \quad (1.195)$$

Частные производные от F взяты в пространственном описании, а производные от f и x_i - в материальном описании. Величина $\partial F / \partial t$ представляет собой изменение F со временем в фиксированной точке пространства, тогда

как член $\mathbf{v} \cdot \text{grad} F$ возникает вследствие движения частицы в поле F , величина которого меняется от точки к точке. Произведение $\mathbf{v} \cdot \text{grad} F$ иногда называют *конвекцией* величины F .

Ускорение. Ускорение частицы есть быстрота изменения ее скорости; следовательно, ускорение представляет собой материальную производную поля скоростей

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{i}}_i \dot{v}_i. \quad (1.196)$$

Если компоненты скорости записать как функции пространственных координат $v_i(t, x_1, x_2, x_3)$, то компоненты ускорения могут быть выражены в форме, аналогичной (1.195):

$$\begin{aligned} \frac{dv_i}{dt} = \dot{v}_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \\ &= \frac{\partial v_i}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad} v_i. \end{aligned} \quad (1.197)$$

Деформация.

Смещение частицы из некоторого начального положения в новое положение описывается *вектором смещения*, компоненты которого равны

$$u_i = x_i - a_i. \quad (1.198)$$

Компоненты смещения u_i могут быть представлены в материальных координатах, если вместо x_i подставить выражения (1.187), или в пространственных координатах, если a_i заменить выражениями (1.189).

Термин *деформация* используется всегда, когда говорят об изменении *относительных* положений материальных точек в любом теле. Рассмотрим некоторую "конечную" конфигурацию материальных точек, выраженную через параметры начальной конфигурации. Это можно сделать, положив величину t в уравнении (1.187) равной некоторой константе. Тогда величина t не будет фигурировать как переменная, и уравнения (1.187) и (1.189) можно будет переписать в виде:

$$x_i = x_i(a_1, a_2, a_3), \quad (1.199)$$

$$a_i = a_i(x_1, x_2, x_3). \quad (1.200)$$

Если независимыми переменными являются величины a_i , то da_i рассматриваются как независимые *приращения*, а *дифференциалы* величин x_i *определяются* выражениями

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial a_j} da_j \quad (1.201)$$

В пространственном описании независимыми приращениями являются dx_i , а дифференциалы da_i определяются выражениями

$$da_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \quad (1.202)$$

Различие между деформацией и движением твердого тела как целого является наличие изменений расстояний между частицами тела при деформации. Пусть частица, находившаяся сначала в точке (a_1, a_2, a_3) , переместилась в точку (x_1, x_2, x_3) . Квадрат начального расстояния между двумя соседними частицами, находившимися в точках a_i и $a_i + da_i$, равен

$$ds_0^2 = da_i da_i. \quad (1.203)$$

Прим материальном описании компоненты деформации η_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, где a_i являются независимыми переменными:

$$dx_i dx_i - da_i da_i = 2\eta_{jk} da_j da_k \quad (1.204)$$

При пространственном описании квадрат расстояния между соседними частицами, находящимися в конечном состоянии в точках x_i и $x_i + dx_i$, равен

$$ds^2 = dx_i dx_i. \quad (1.205)$$

Компоненты деформации в пространственном описании ε_{jk} определяются с помощью следующего уравнения, в котором величины x_i являются независимыми переменными:

$$dx_i dx_i - da_i da_i = 2\varepsilon_{jk} dx_j dx_k \quad (1.206)$$

Подставляя (1.201) в (1.204), получаем выражения для компонент η_{jk} ; подставляя (1.202) в (1.206), получаем выражения для компонент ε_{jk} . Используя определение смещения (1.198), каждый из этих наборов компонент деформации можно выразить через компоненты вектора смещения. В результате получим

$$\begin{aligned} \eta_{jk} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_i}{\partial a_k} - \delta_{jk} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right) - \delta_{jk} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial a_k} + \frac{\partial u_k}{\partial a_j} + \frac{\partial u_i}{\partial a_j} \frac{\partial u_i}{\partial a_k} \right) \end{aligned} \quad (1.207)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{jk} &= \frac{1}{2} \left(\delta_{jk} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\delta_{jk} - \left(\delta_{ij} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{ik} - \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (1.208)$$

Если пренебречь произведениями и квадратами производных от смещений (по сравнению с членами первого порядка), то выражения для компонент деформации упростятся и примут известную форму выражений для "бесконечно малых деформаций".

Поскольку $\delta_{jk} = \delta_{ij} \delta_{jk}$ и

$$\frac{\partial x_i}{\partial a_s} \frac{\partial a_s}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad (1.209)$$

можно показать, что

$$\varepsilon_{jk} = \eta_{st} \frac{\partial a_s}{\partial x_j} \frac{\partial a_t}{\partial x_k}. \quad (1.210)$$

Аналогично

$$\eta_{jk} = \varepsilon_{st} \frac{\partial x_s}{\partial a_j} \frac{\partial x_t}{\partial a_k}. \quad (1.211)$$

Если имеется смещение вещества в той области, где компоненты деформации всюду равны нулю, то такое смещение будет жестким смещением. Т.е. расстояние между частицами не изменяется. В таком случае градиент деформации связывающий деформированное и недеформированное состояния является ортогональным тензором.

Тензоры η_{ij} и ε_{ij} имеют то преимущество, что они равны нулю для жесткого смещения и что для достаточно малых градиентов смещения $\partial u_i / \partial x_i$ они сводятся к классическому "тензору бесконечно малой деформации". Однако исследование больших деформаций иногда проще проводить, используя другие меры деформации, такие, как тензор деформации Грина

$$C_{ij} = \frac{\partial x_s}{\partial a_j} \frac{\partial x_s}{\partial a_k} = \delta_{jk} + 2\eta_{jk} \quad (1.212)$$

или тензор деформации Коши

$$c_{jk} = \frac{\partial a_s}{\partial x_j} \frac{\partial a_s}{\partial x_k} = \delta_{jk} - 2\varepsilon_{jk}. \quad (1.213)$$

Покажем, что метрический тензор соответствует тензору деформации в теории упругости.

Так теперь мы работаем в произвольных системах координат, для нас теперь имеет смысл индексы векторов ставить вверху.

Вернемся к формуле

$$dL^2 = (dx^i)^2$$

Это есть *скалярный квадрат вектора* соответствующего бесконечно малому перемещению в недеформированной среде. Тогда

$$dL^2 = g^0_{ik} dx^i dx^k \quad (1.214)$$

Метрика g^0_{ik} для недеформированной среды.

В деформированной среде

$$(dL')^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (1.215)$$

Метрика g_{ik} деформированной среды.

перепишем выражение (??) так

$$(dL')^2 - dL^2 = 2 \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^i dx^k + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \frac{\partial u^i}{\partial x^l} dx^k dx^l$$

Сравнивая это выражение с (1.214) и (1.215) и ограничиваясь линейными членами получим

$$\frac{\partial u^i}{\partial x^k} = \frac{1}{2}(g_{ik} - g^0_{ik}) = r_{ik} \quad (1.216)$$

1.7 Базисные векторы, и формы.

1.7.1 Базисные векторы.

Вернемся к формуле (арнольд $L_v f$). Пусть t произвольный параметр. Это равенство справедливо для любой функции f , так что мы можем записать

$$\frac{d}{dt} = \sum_i \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.217)$$

Набор чисел dx^i/dt можно считать компонентами вектора, касательного к кривой $x^i(t)$

Каждая кривая имеет единственный касательный вектор. Разумеется, каждый вектор является касательным к бесконечному числу кривых, проходящих через точку x и для этого имеются две различные причины. Во-первых, существует много кривых, касающихся друг друга и имеющих одинаковый касательный вектор в точке x ; во-вторых, данный путь (траекторию) можно перепараметризовать так, чтобы касательный вектор в x не изменился. Это изображено на рис.

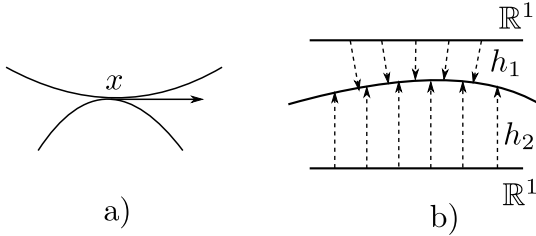


Рис. 1.32: а) Две кривые с общим касательным вектором. б) Две кривые, совпадающие геометрически (имеющие общую траекторию), но заданные при помощи различных параметризаций. Если соответствующие отображения обозначить через h_1 и h_2 , то отображение $h_2^{-1} \circ h_1$ задает связь параметров t_1 и t_2 , $t_2 = t_2(t_1)$. Если $dt_2/dt_1 = 1$ в x , то в этой точке касательные векторы совпадают.

В качестве простого примера рассмотрим кривую $x^i(t) = ta^i$, где числа $\{a^i\}$ - константы. Тогда если x - точка $t = 0$, то касательный вектор имеет вид $dx^i/dt = a^i$. Другая кривая $x^i(\mu) = \mu^2 b^i + \mu a^i$ также проходит через x при $\mu = 0$ и имеет такой же касательный вектор в этой точке, $dx^i/d\mu = a^i$. Перепараметризация кривой $x^i = (\mu^3 + \mu)a^i$ дает кривую проходящую через те же самые точки и имеющую в точке $x(\mu = 0)$ тот же самый вектор характеризующий целый класс эквивалентности кривых, проходящих через данную точку.

Пусть a и b - произвольные два числа и $x^i = x^i(\mu)$ - другая кривая, проходящая через точку x . Тогда в этой точке будем иметь

$$\frac{d}{d\mu} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_i \frac{dx^i}{d\mu} \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.218)$$

и

$$a \frac{d}{dt} + b \frac{d}{d\mu} = \sum_i \left(a \frac{dx^i}{dt} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.219)$$

Итак, числа $\{a dx^i/dt + b dx^i/d\mu\}$ являются компонентами нового вектора, который, конечно же, касается *некоторой*

кривой, проходящей через точку x . Следовательно, должна существовать кривая с параметром, скажем λ , такая что в точке x

$$\frac{d}{d\lambda} = \sum_i \left(a \frac{dx^i}{dt} + b \frac{dx^i}{d\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1.220)$$

Сопоставляя полученные результаты, заключаем, что в точке x

$$a \frac{d}{dt} + b \frac{d}{d\mu} = \frac{d}{d\lambda} \quad (1.221)$$

Следовательно, операторы дифференцирования вдоль кривых (типа d/dt) образуют *векторное пространство* в точке x . В каждой системе координат имеются специальные кривые, а именно сами координатные линии. Ясно, что операторы дифференцирования вдоль этих кривых просто $\partial/\partial x^i$ и соотношение (2.3) показывает, что каждый оператор d/dt может быть представлен в виде линейной комбинации частных производных $\partial/\partial x^i$. Поэтому система $\{\partial/\partial x^i\}$ образует базис указанного векторного пространства. Из равенства (2.3) вытекает, что вектор d/dt имеет в этом базисе компоненты $\{dx^i/dt\}$. Мы и приходим в результате к тому, что пространство всех касательных векторов в точке x и пространство дифференцирований вдоль кривых, проходящих через x , находится во взаимно-однозначном соответствии.

В определении d/dt как касательного вектора к кривой φ не используется перемещения на конечные расстояния, в нем нет упоминания о координатах; в частности, не используются понятия типа "преобразуется так же, как..." и используется производная как своего рода "движение" вдоль кривой, порождаемой касательным вектором: такое соединение понятий анализа - производной с понятием геометрии - вектором имеет далеко идущие последствия.

Нужно, однако, иметь в виду, что складывать можно лишь векторы, приложенные к одной точке. Векторы приложенные к разным точкам, не имеют никакого отношения друг к другу. Касательные векторы лежат не в M (рис со сферой), а в касательном пространстве к M в точке x , которое обозначается через L_x .

Для любой точки x пространство L_x является векторным пространством той же размерности n , что и само многообразие. Любая совокупность n линейно-независимых векторов в L_x образует *базис* в L_x . Выбирая тот или иной базис в каждом L_x для всех точек x из M , мы получаем базисные векторные поля. Если в окрестности U точки x задана система координат $\{x^i\}$, то в каждой точке из U определен *координатный базис* $\{\partial/\partial x^i\}$.

Но вовсе не обязательно работать с координатными базисами - векторы можно записывать и по отношению к произвольному базису $\{\bar{e}_i\}$. Здесь индекс i используется для нумерации базисных векторов. Он не обозначает компоненту чего либо. В точке x произвольный вектор ξ может быть записан в виде

$$\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_j \xi^{j'} \bar{e}_{j'}. \quad (1.222)$$

Числа $\{\xi^i\}$ являются компонентами вектора ξ относительно базиса $\partial/\partial x^i$. Числа $\{\xi^{j'}\}$ - компоненты ξ относительно $\{\bar{e}_{j'}\}$; они связаны с ξ^i согласно обычному закону преобразования векторов.

Если ξ и базисы $\{\partial/\partial x^i\}$ и $\{\bar{e}_j\}$ рассматриваются как векторные поля, то компоненты $\{\xi^i\}$ и $\{\xi^{j'}\}$ поля ξ являются функциями на M . Векторное поле называется дифференцируемым, если эти функции дифференцируемы.

Условие существования системы линейно-независимых векторов $\partial/\partial x^i$ для произвольной координатной системы в каждой точке x из U есть в точности условие того, что координаты являются *хорошими* в точке x , т.е. дают 1-1-отображение некоторой окрестности U точки x на соответствующую область V в R^n .

Рассмотрим какую-нибудь хорошую систему координат на U , скажем $\{y^i, i = 1, \dots, n\}$. Тогда отображение из $\{(x^1, \dots, x^n)\}$ в U может быть записано в виде

$$y^j = y^j(x^1, \dots, x^n), \quad (1.223)$$

По теореме об обратной функции это отображение взаимно-однозначно, если и только если матрица Якоби $\partial y^j / \partial x^i$ невырождена. Это означает, что в каждой точке из U векторы с компонентами

$$\begin{aligned} &(\partial y^1 / \partial x^1, \partial y^2 / \partial x^1, \dots, \partial y^n / \partial x^1) \\ &(\partial y^1 / \partial x^2, \partial y^2 / \partial x^2, \dots, \partial y^n / \partial x^2) \\ &\dots \\ &(\partial y^1 / \partial x^n, \partial y^2 / \partial x^n, \dots, \partial y^n / \partial x^n) \end{aligned} \quad (1.224)$$

линейно-независимы. Но это как раз и есть компоненты векторов $\{\partial/\partial x^i, i = 1, \dots, n\}$ относительно координатного базиса для системы координат $\{y^i\}$, поскольку, согласно цепному правилу,

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^1} + \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^n} \quad (1.225)$$

и аналогично для остальных x^i .

Итак, действительно, система $\{x^i\}$ координат является хорошей, если и только если $\{\partial/\partial x^i\}$ образуют базис пространства касательных векторов для каждой точки из U .

1.7.2 Базисные 1-формы.

Отображение которое сопоставляет вектору вещественное число мы определили как 1-форму. В связи с этим 1-форма является функцией на векторах.

Рассмотрим касательное пространство L_x . Определим на L_x 1-форму ω , и рассмотрим множество таких 1-форм. Обозначим его L_x^* .

Определим операцию сложения для двух элементов множества L_x^*

$$(\omega + \sigma)(\xi) = \omega(\xi) + \sigma(\xi) \quad (1.226)$$

и операцию умножения на число:

$$(\lambda\omega)(\xi) = \omega(\xi) + \sigma(\xi). \quad (1.227)$$

Эти две операции обеспечивают свойство которое называется линейностью

$$\omega(\alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha\omega(\xi_1) + \beta\omega(\xi_2). \quad (1.228)$$

где α и β - вещественные числа. Таким образом мы определили линейную структуру на множестве L_x^* , это значит,

что теперь совокупность 1-форм в данной точке образует линейное (векторное) пространство.

Пространства L_x^* и L_x называются *сопряженными* друг другу если на $L_x^* \times L_x$ задана *свертка*.

Функция определенная на $L_x^* \times L_x$ называется *сверткой*, если соблюдены следующие условия:

1) Линейность по первому аргументу:

$$(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \xi) = \alpha(\omega_1, \xi) + \beta(\omega_2, \xi)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\omega_1, \omega_2 \in L_x^*$, $\xi \in L_x$ (\mathbb{R} как обычно обозначает множество действительных чисел).

2) Линейность по второму аргументу:

$$(\omega, \alpha\xi_1 + \beta\xi_2) = \alpha(\omega, \xi_1) + \beta(\omega, \xi_2)$$

для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\omega \in L_x^*$, $\xi_1, \xi_2 \in L_x$.

3) Невырожденность по первому аргументу: если $(\omega, \xi) = 0$ при данном ω и при любом $\xi \in L_x$, то $\omega = \theta^*$ (где θ^* - нулевой элемент в L_x^*).

4) Невырожденность по второму аргументу: если $(\omega, \xi) = 0$ при любом $\omega \in L_x^*$ и при данном ξ , то $\xi = \theta$ (где θ - нулевой элемент в L_x).

Предположим теперь, что L_x и L_x^* конечномерные пространства одной и той же размерности n . Выберем в L_x и L_x^* какие-нибудь базисы; обозначим их соответственно через $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$. Для произвольных элементов $\omega \in L_x^*$, и $\xi \in L_x$ напомним разложения

$$\begin{aligned} \omega &= a_1 \bar{e}_1^* + \dots + a_n \bar{e}_n^*, \\ \xi &= \xi^1 \bar{e}_1 + \dots + \xi^n \bar{e}_n. \end{aligned} \quad (1.229)$$

Вследствие (1.229) имеем следующее общее выражение свертки:

$$(\omega, \xi) = \sum (\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) \omega_i \xi^j \quad (1.230)$$

Из (1.230) видно, что свертка будет определена на $L_x^* \times L_x$, если мы зададим матрицу сверток базисных элементов, т.е. матрицу чисел (\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) . Легко усмотреть, что для обеспечения обоих условий невырожденности 3) и 4) необходимо и достаточно, чтобы эта матрица была невырожденной; таким образом,

$$\det(\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) \neq 0 \quad (1.231)$$

В некоторых специальных базисах \bar{e}_i^*, \bar{e}_j матрицу (\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) можно сделать единичной. Вместе с тем упростится выражение (2). Именно, имеет место *Теорема*. Пусть на $L_x^* \times L_x$ как угодно задана свертка (ω, ξ) и в L_x^* как угодно задан базис $\bar{e}_1^*, \dots, \bar{e}_n^*$; тогда в L_x найдется единственный базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ такой, что

$$(\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) = \delta_j^i \quad (1.232)$$

где δ_j^i - символ Кронекера. Роли L_x^* и L_x можно поменять.

Доказательство. Для любого набора чисел a^1, \dots, a^n найдется единственный вектор $\zeta \in L_x$ такой, что $(\bar{e}_1^*, \zeta) = a^1, \dots, (\bar{e}_n^*, \zeta) = a^n$. Чтобы убедиться в этом разложим искомый вектор ζ по какому-нибудь базису: $\zeta = \lambda^1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda^n \bar{e}_n$. Мы получим для $\lambda^1, \dots, \lambda^n$ систему уравнений первой степени с главной матрицей (\bar{e}_i^*, \bar{e}_j) ; полученная система однозначно разрешима в следствие (1.231).

Беря теперь в качестве a^1, a^2, \dots, a^n набор чисел $1, 0, \dots, 0$ найдем по предыдущему вектор ζ . Положи $\bar{e}_1 = \zeta$. Аналогично по набору $0, 1, 0, \dots, 0$ найдем \bar{e}_2 и т.д. Полученные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ удовлетворяют равенствам (1.232). Из этих же равенств следует, что векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ линейно независимы.

Определение. Два базиса, из которых один принадлежит пространству L_x^* , другой - пространству L_x , навываются *взаимными* или *дуальными*, если они удовлетворяют равенствам (1.232). Соответственно имеем

$$(\bar{e}^i, \bar{e}_j) = \delta_j^i, \text{ где } \bar{e}^i \in L_x^*, \bar{e}_j \in L_x. \quad (1.233)$$

Теперь, если разложения (1.229) даны по взаимным базисам, то

$$(\omega, \xi) = \omega_1 \xi^1 + \dots + \omega_n \xi^n \quad (1.234)$$

Это следует прямо из (1.230) и (1.233).

Из (1.231) следует, что размерность L_x^* равна размерности L_x , т.е. n .

Назначим свертку двух произвольных элементов $\omega \in L_x^*$ и $\xi \in L_x$, полагая

$$(\omega, \xi) = \omega(\xi) \quad (1.235)$$

т.е. в качестве (ω, ξ) мы берем сейчас число, равное значению формы $\omega \in L_x^*$ на элементе $\xi \in L_x$. Требования которые предъявляются к свертке соблюдены.

Из теоремы (п3) и из (1.235) следует, что каковы бы ни были линейно-независимые формы $\bar{e}^1(\xi), \dots, \bar{e}^n(\xi)$, $\xi \in L_x$, в пространстве L_x найдется единственный базис $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ такой, что

$$\bar{e}^i(\bar{e}_j) = \delta_j^i \quad (1.236)$$

Справедливо также утверждение, что для любого базиса $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ в L_x найдется единственная линейно-независимая система форм $\bar{e}^1(\xi), \dots, \bar{e}^n(\xi)$, подчиненная условиям (10). Чтобы убедиться в этом покажем, что 1-формы \bar{e}^i линейно-независимы и, значит образуют базис. Для этого рассмотрим любую 1-форму θ , действующую на произвольный вектор ζ

$$\theta(\zeta) = \theta\left(\sum_j \zeta^j \bar{e}_j\right) = \sum_j \zeta^j \theta(\bar{e}_j) = \sum_j \bar{e}^j(\zeta) \theta(\bar{e}_j) \quad (1.237)$$

Величины $\theta_j = \theta(\bar{e}_j)$ называются *компонентами* θ в базисе, дуальном к $\{\bar{e}_j\}$. Перепишем (1.237) в виде

$$\theta(\zeta) = \sum_j \theta_j \bar{e}^j(\zeta) \quad (1.238)$$

Поскольку 1-форма *определяется* своими значениями на векторах, из этого равенства вместе с (2.16) вытекает, ввиду произвольности ζ , что

$$\theta = \sum_j \theta_j \bar{e}^j \quad (1.239)$$

Отсюда следует, что $\{\bar{e}^j\}$ действительно образуют базис, поскольку их как раз штук n и любая 1-форма θ представима в виде их линейной комбинации. Отсюда следует также, что величины $\{\theta_i\}$ на самом деле являются компонентами θ относительно базиса в обычном смысле слова.

Важно, что у нас есть теперь формула для вычисления значения $\theta(\zeta)$ по известным компонентам θ и ζ :

$$\theta(\zeta) = \sum_j \theta_j \zeta^j \quad (1.240)$$

Как отмечалось выше, это и есть свертка ζ и θ .

Пусть произвольный вектор ζ разложен по базису $\{\bar{e}_i\}$

$$\zeta = \zeta^1 \bar{e}_1 + \dots + \zeta^n \bar{e}_n$$

Тогда

$$\bar{e}^j(\zeta) = \zeta^1 \bar{e}^j(\bar{e}_1) + \dots + \zeta^j \bar{e}^j(\bar{e}_j) + \dots + \zeta^n \bar{e}^j(\bar{e}_n) \quad (1.241)$$

Отсюда и в следствие (1.236) имеем

$$\bar{e}^j(\zeta) = \zeta^j \quad (1.242)$$

Это значит, что координатная запись формы \bar{e}^j при употреблении взаимного с ними базиса оказывается особенно простой: все коэффициенты форм \bar{e}^j равны нулю, кроме одного, который занимает j -е место и равен единице.

Вместе с тем можно сказать, что координаты любого вектора по базису $\{\bar{e}_i\}$ суть значения на этом векторе форм взаимного базиса, что выражается равенством

$$\zeta = \bar{e}^1(\zeta) \bar{e}_1 + \dots + \bar{e}^n(\zeta) \bar{e}_n \quad (1.243)$$

1.8 Полилинейные формы.

Обозначим через $(L_x)^k$ декартово произведение пространства L_x на себя: $(L_x)^k = L_x \times L_x \times \dots \times L_x$ (k -раз). По определению пространства $(L_x)^k$ его элементами являются упорядоченные наборы векторов из L_x , взятых в числе k ; таким образом, $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in (L_x)^k$, если каждый из векторов ξ_1, \dots, ξ_n принадлежит L_x .

Полилинейную форму от векторных аргументов определим как действительную функцию Ω в $(L_x)^k$ при условии линейности по каждому (векторному) аргументу

$$\begin{aligned} \Theta(\alpha \xi_1' + \beta \xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k) = \\ \alpha \Theta(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_k) + \beta \Theta(\xi_1'', \xi_2, \dots, \xi_k). \end{aligned} \quad (1.244)$$

Здесь условие линейности записано для первого аргумента. Полилинейную форму мы обозначили также как и 1-форму (линейную) так как 1-форма частный случай полилинейной формы.

Рассмотрим произвольную полилинейную форму Θ . Возьмем любые линейные формы $\bar{e}^1, \dots, \bar{e}^n$ в числе n при единственном условии их линейной независимости.

Теорема. Численное значение $\Theta(\xi^1, \dots, \xi^2)$ формы Θ может быть представлено в виде

$$\Theta(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum \Theta_{j_1 \dots j_k} \bar{e}^{j_1}(\xi_1) \dots \bar{e}^{j_k}(\xi_k) \quad (1.245)$$

где $\Theta_{j_1 \dots j_k}$ - коэффициенты, которые определяются данной формой Θ , а также выбором системы линейно-независимых форм $\{\bar{e}^n\}$.

Доказательство. Пусть $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ - базис в L_x , взаимный с базисом $\{\bar{e}^n\}$ в L_x^* . Запишем каждый из векторов ξ_1, \dots, ξ_k в виде:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \bar{e}^1(\xi_1) \bar{e}_1 + \bar{e}^n(\xi_1) \bar{e}_n \\ &\dots \\ \xi_k &= \bar{e}^1(\xi_k) \bar{e}_1 + \bar{e}^n(\xi_k) \bar{e}_n \end{aligned} \quad (1.246)$$

Подставим эти разложения в левую часть (1.245) и воспользуемся линейностью формы по каждому аргументу. Мы получим правую часть выражения (1.245), где положено

$$\Theta_{j_1 \dots j_k} = \Theta(\bar{e}_{j_1}, \dots, \bar{e}_{j_k}) \quad (1.247)$$

Теорема доказана.

Выражение 1.245 само по себе, т.е. будучи уже доказанным, не предусматривает использование какого-либо базиса. Если же пользоваться базисом $\{e_n\}$, который употреблялся в доказательстве, то формулы $\{\tilde{e}^1(\xi)\}$ можно выразить в нем известным нам специальным образом; именно,

$$\tilde{e}^j(\xi_k) = \xi_k^j, \quad (1.248)$$

где справа написана j -я координата вектора ξ_k в базисе $\{\bar{e}_n\}$. В этом базисе выражение (1.245) принимает вид

$$\Theta(\xi_1, \dots, \xi_n) = \sum \Theta_{j_1 \dots j_k} \xi_1^{j_1} \dots \xi_k^{j_k} \quad (1.249)$$

Мы получаем представление формы $\Theta(\xi_1, \dots, \xi_n)$ в базисе $\{\bar{e}_n\}$. Этот базис в L_x можно взять заранее и вполне произвольно. Взаимный с ним базис найдется, но при употреблении записи () может не использоваться.

Из 1.247 следует, что для данной формы Θ и для данных базисных форм $\{\tilde{e}^1(\xi)\}$, разложение 1.245 единственно, т.е. численные значения коэффициентов $\Theta_{j_1 \dots j_k}$ однозначно определены индексами $j_1 \dots j_k$.

1.9 Пространство полилинейных форм.

Полилинейные формы, определенные в пространстве $(L_x)^k$, образуют линейное пространство, если для произвольных двух таких форм Θ и Ω определить линейные операции согласно равенству

$$(\alpha\Theta + \beta\Omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \alpha\Theta(\xi_1, \dots, \xi_k) + \beta\Omega(\xi_1, \dots, \xi_k). \quad (1.250)$$

Это линейное пространство мы обозначим через $(T_x)^k[L_x]$ или просто через $(T_x)^k$ и будем называть k -кратным тензорным произведением сопряженного пространства L_x^* на себя. Символически

$$(T_x)^k = (T_x)^k[L_x] = T_x^* \otimes T_x^* \dots T_x^*. \quad (1.251)$$

Заметим, что само пространство L_x^* есть $(T_x)^1$. Поэтому

$$(T_x)^k = (T_x)^1 \otimes (T_x)^1 \dots (T_x)^1 \quad (1.252)$$

Полилинейные формы как элементы пространства $(T_x)^k$ называются k -тензорами, подробнее, - *ковариантными тензорами* валентности k в пространстве L_x . Линейные формы как элементы пространства $(T_x)^1 = L_x^*$ называются *одновалентными ковариантными тензорами*, или *ковариантными векторами*, или *ковекторами*. Действительные числа мы будем называть *тензорами нулевой валентности*.

Поменяв ролями L_x и L_x^* , получим аналогично предидущему *контравариантные тензоры валентности k* , как полилинейные формы, отображающие $(L_x^*)^k$ в \mathbb{R} .

Определение. Тензорным произведением или просто произведением тензора Θ на тензор Ω

$$\Theta \in (T_x)^k[L_x], \Omega \in (T_x)^l[L_x] \quad (1.253)$$

называется тензор, который обозначается $\Theta \otimes \Omega$, принадлежит пространству $(T_x)^{k+l}[L_x]$ и определяется в виде полилинейной формы равенством

$$(\Theta \otimes \Omega)(\xi_1, \dots, \xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) = \Theta(\xi_1, \dots, \xi_k) \Omega(\xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l}) \quad (1.254)$$

Здесь слева и справа написаны численные значения полилинейных форм при любом выборе векторов $\xi_1, \dots, \xi_k, \dots, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+l} \in L_x$, взятых независимо друг от друга.

Тензорное произведение обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (\Theta_1 + \Theta_2) \otimes \Omega &= \Theta_1 \otimes \Omega + \Theta_2 \otimes \Omega, \\ \Theta \otimes (\Omega_1 + \Omega_2) &= \Theta \otimes \Omega_1 + \Theta \otimes \Omega_2, \\ (\alpha\Theta) \otimes \Omega &= \alpha(\Theta \otimes \Omega), \\ (\Theta \otimes \Omega) \otimes \Phi &= \Theta \otimes (\Omega \otimes \Phi). \end{aligned} \quad (1.255)$$

Последнее свойство позволяет писать $\Theta \otimes \Omega \otimes \Phi$ без указания ассоциаций. Вместе с тем определено тензорное произведение любого числа тензорных сомножителей.

Вообще говоря $\Theta \otimes \Omega$ не совпадает с $\Omega \otimes \Theta$ (достаточно написать (1.254) для $\Omega \otimes \Theta$). *Пример.* У функции $f(x, y) = 3x + 5y$ значения $f(1, 2)$ и $f(2, 1)$ различны.

Равенство тензоров Θ и Ω следует понимать как тождественное совпадение полилинейных форм $\Theta : (L_x)^k \rightarrow \mathbb{R}$ и $\Omega : (L_x)^k \rightarrow \mathbb{R}$. Равенство Θ означает отображение $\Theta : (L_x)^k \rightarrow 0$.

Пусть $\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n$, линейно-независимые линейные формы в L_x . Мы рассматриваем их как одновалентные тензоры, т.е. как элементы пространства $(T_x)^1 = L_x^*$. Тогда

$$\tilde{e}^{j_1} \otimes \tilde{e}^{j_2} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_k} \in (T_x)^k \quad (1.256)$$

Теорема. Множество всех тензорных произведений (1.256), т.е. отвечающих всевозможным наборам индексов j_1, \dots, j_k ; ($j_1 = 1, 2, \dots, n; j_k = 1, 2, \dots, n$) составляет базис в $(T_x)^k$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы эквивалентно доказательству выражения (1.245). Установленные там предложения означают, что для любого $\Theta \in (T_x)^k$ имеет место единственное разложение

$$\Theta = \sum \Omega_{j_1 \dots j_k} \tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_k} \quad (1.257)$$

А это и значит (см. формулу (1.245)), что $\tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_k}$ составляют базис.

Следствие. Размерность пространства $(T_x)^k$ равна n^k . *Замечание.* Коэффициенты $\Theta_{j_1 \dots j_k}$ разложения (1.257) называются координатами тензора Θ (по базису $\tilde{e}^{j_1} \otimes \dots \otimes \tilde{e}^{j_k}$ в $(T_x)^k$).

Итак, мы имеем счетную последовательность пространств

$$(T_x)^0, (T_x)^1, (T_x)^2, \dots, (T_x)^k, \dots, \quad (1.258)$$

построенных по данному линейному пространству L_x . В каждом $(T_x)^k$ определены линейные операции, в каждой паре $(T_x)^k, T_x^l$ (допуская $k = l$) определена операция тензорного произведения:

$$\Theta \otimes \Omega, \Theta \in (T_x)^k, \Omega \in (T_x)^l, \Theta \otimes \Omega \in (T_x)^{k+l}. \quad (1.259)$$

Элементы этих пространств, как объекты указанных операций, называются *ковариантными тензорами* (над L_x). Если $\Theta \in (T_x)^k$, то Θ называется *Тензором валентности k* . Пространство $(T_x)^k$ является n^k -мерным.

k' -раз контравариантные и k -раз ковариантные тензоры.

Рассматривая полилинейную форму формально, мы можем определить ее как функцию от k' векторов и k ковекторов.

Определение. Линейная функция, аргументами которой служат k один форм и k' векторов, а значениями - вещественные числа называется *тензором типа $(\frac{k}{k'})$* . Это определение является обобщением данного выше для полилинейных форм.

Например, если F - тензор типа $(\frac{2}{2})$, то его значение на 1-формах ω и σ и векторах ξ и ζ записывается в виде

$$F(\omega, \sigma; \xi, \zeta). \quad (1.260)$$

Свойство линейности здесь означает, что (для произвольных чисел α и β)

$$\begin{aligned} F(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \sigma; \xi, \zeta) = \\ = \alpha F(\omega_1, \sigma; \xi, \zeta) + \beta F(\omega_2, \sigma; \xi, \zeta) \end{aligned} \quad (1.261)$$

и аналогично для других элементов. В случае если мы хотим иметь дело с F не указывая явно аргументы, мы будем использовать обозначение $F(, , ,)$, где на пустые места можно поставить любые аргументы соответствующего типа, но нужно помнить, что порядок их следования вообще говоря существенен.

Определение. Тензорное поле типа $(\frac{k}{k'})$ - это правило, сопоставляющее каждой точке тензор типа $(\frac{k}{k'})$ в этой точке. Свойство линейности тензоров распространяется и на тензорные поля, причем числа α и β в (1.261) в разных точках могут быть различными - они являются функциями на M .

Отметим, что векторы суть тензоры типа $(\frac{1}{0})$: они являются линейными функциями на 1-формах. Аналогично 1-формы суть тензоры типа $(\frac{0}{1})$. Скалярные функции принято считать тензорами типа $(\frac{0}{0})$.

Тензор F типа $(\frac{1}{1})$ предполагает наличие двух аргументов. Значение $F(\omega; \xi)$ есть вещественное число. При фиксированном ω мы получаем 1-форму $F(\omega; ,)$, поскольку сюда можно подставить вектор, для того, чтобы получить вещественное число. При фиксированном ω мы получаем вектор, для того чтобы получить вещественное число сюда нужно подставить 1-форму. Таким образом, тензор типа $(\frac{1}{1})$ можно рассматривать как линейную функцию на векторах со значениями в векторах, а также как линейную функцию на 1-формах, принимающую значения также в 1-формах.

В соответствии с установленными обозначениями выражение (1.234) является тензором типа $(\frac{1}{1})$ а его компоненты записываются в виде $\omega_j \xi^i$.

Итак, суммируя диагональные компоненты ($i = j$), получим $\omega_j \xi^i$ - число, не зависящее от базиса, а именно значение ω на ξ , которое можно считать тензором типа $(\frac{0}{0})$. Аналогично, если S_{jk}^i и P^{lm} компоненты тензоров типа $(\frac{1}{2})$ и $(\frac{3}{2})$ соответственно, то $S_{jk}^i P^{lm}$ суть компоненты тензора типа $(\frac{3}{2})$, $S_{jk}^i P^{jm}$ - компоненты тензора типа $(\frac{2}{1})$,

$S_{jk}^i P^{lj}$ - компоненты другого тензора типа $(\frac{2}{1})$ и т.д. По аналогии с формулой (1.230) эта операция называется *сверткой*; она позволяет получать новые тензоры из уже имеющихся.

Дадим доказательство независимости свертки от выбора базиса. Рассмотрим тензор A типа $(\frac{2}{0})$, тензор B типа $(\frac{0}{2})$ и их свертку (относительно некоторого базиса) $A^{ij} B_{jk}$. Мы утверждаем, что это - компоненты тензора C типа $(\frac{1}{1})$, такого что для произвольных вектора ξ и 1-формы σ

$$\begin{aligned} C(\sigma; \xi) \left(\sum_j A^{ij} B_{jk} \right) \sigma_i \xi^k = \\ = \sum_j A(\sigma, \omega^j) B(\bar{e}_j, \xi). \end{aligned} \quad (1.262)$$

В силу линейности A по второму аргументу это можно переписать в виде

$$C(\sigma; \xi) = A \left(\sigma, \sum_j B(\bar{e}_j, \xi) \omega^j \right), \quad (1.263)$$

так как величины $B(\bar{e}_j, \xi)$ суть просто числа. Но в силу независимости свертки от выбора базиса

$$\sum_j B(\bar{e}_j, \xi) \omega^j = B(, \xi) \quad (1.264)$$

где правая часть является 1-формой (при фиксированном ξ) - на пустое место нужно подставлять вектор. Эта 1-форма стоит в качестве одного из аргументов в A , так что

$$A^{ij} B_{jk} = C_k^i \Leftrightarrow C(\sigma; \xi) = A(\sigma, B(, \xi)), \quad (1.265)$$

независимо от выбора базиса.

1.10 Дифференциальные формы.

Симметричные формы. Кососимметричные формы (они же дифференциальные если мы работаем в касательном пространстве.)

1.11 Многообразия.

Во всем изложенном выше было существенно то, что рассматривалась локальная (в точке) теория. Действительно, касательный вектор характеризует кривую в точке, градиент характеризует функцию в точке, производная была определена без перемещений на конечные расстояния. В обозначениях L_x, T_x, \dots индекс x указывает на то, что рассматривается точка x на M и бесконечно малая ее окрестность. Более того, мы не имеем естественного способа сравнивать (переносить) векторы из различных касательных пространств.

Другим важным аспектом является то, что мы определили касательный вектор как класс эквивалентности кривых и для выполнения условия эквивалентности в любой системе координат эти системы координат должны быть связаны определенным образом.

Математический объект, который вмещает в себя все эти объекты и их свойства называется *дифференцируемым многообразием*, и обозначается обычно M .

Замечание. Понятие многообразия представляет собой, в сущности, обобщение впервые математически описанного Гауссом процесса картографирования земной поверхности. Пусть некоторому коллективу людей, поручено составить карту земной поверхности и каждый кусок земной поверхности поручен какой-нибудь группе с (номером i). Тогда есть области, порученные двум разным группам (с номерами i и j) пересекаются, то этим группам необходимо четко описать на своих картах правило соответствия их карт обшей области. Совокупность карт различных различных областей называется *атласом* земной поверхности. Кроме того на картах обычно указывается правило вычисления истинной длины любого пути, попавшего на карту.

Начнем его определение.

Определение 1.11.1 Говорят, что на топологическом пространстве M задана *карта*, если выделено некоторое открытое множество A , которое гомеоморфно отображается на открытое множество пространства \mathbb{R}^n . Число n называется *размерностью* карты.

Не всякое топологическое пространство допускает карту. Задание карты накладывает сильные ограничения на топологию только в одном месте - в месте ее задания. Чтобы наложить ограничения на топологию глобально, нужно задать множество карт покрывающих все топологическое пространство.

Определение 1.11.2 Множество карт, покрывающих все топологическое пространства, называется *атласом*.

Определение 1.11.3 Топологическое пространство называется топологическим многообразием, если оно хаусдорфово, со второй аксиомой счетности, допускает атлас размерности n .

В пересечении двух карт имеем в обе стороны непрерывную зависимость координат. Более точно это означает следующее.

Пусть $A, B \subset X$ - две карты в топологическом многообразии X и

$$h : A \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$$

$$k : B \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n(y^1, \dots, y^n)$$

- соответствующие гомеоморфизмы. Гомеоморфизмы h и k называются также координатными функциями. Тогда $x^i = f^i(y^1, \dots, y^n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ и $y^j = g^j(x^1, \dots, x^n)$, $j = 1, 2, \dots, n$;

здесь

f^i - это координатная запись отображения $h \circ k^{-1} : k(A \cap B) \rightarrow h(A \cap B)$, а

g^j - координатная запись отображения $k \circ h^{-1} : h(A \cap B) \rightarrow k(A \cap B)$, обратного к $k \circ h^{-1}$.

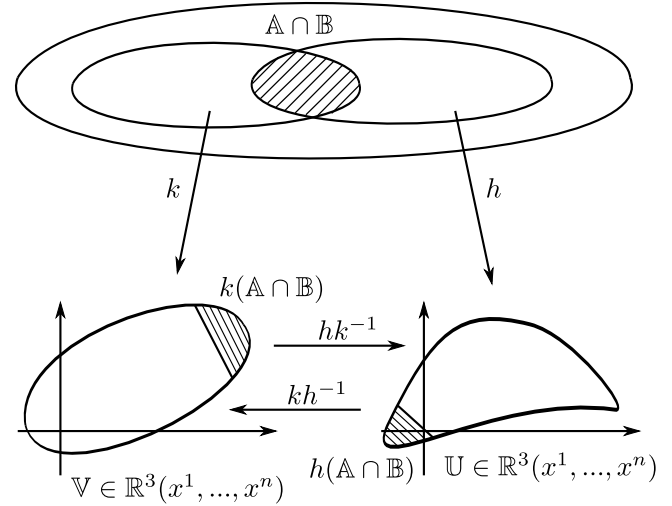


Рис. 1.33: Многообразие.

В силу определения карт отображения $k \circ h^{-1}$ и $h \circ k^{-1}$ гомеоморфизмы.

Определение 1.11.4 Отображения $k \circ h^{-1}$, $h \circ k^{-1}$ называются *функциями перехода* от координат x^1, \dots, x^n к координатам y^1, \dots, y^n .

Определение 1.11.5 Атлас топологического многообразия называется *гладким*, если все функции перехода принадлежат классу C^∞ . Два гладких атласа называются *эквивалентными*, если для любой карты A из первого гладкого атласа и для любой карты B из второго гладкого атласа связь между ними гладкая.

Если $A \cap B = \emptyset$, то карты A, B гладко связаны по определению

Определение 1.11.6 Говорят, что на топологическом многообразии M определена *гладкая структура* (в топологическое многообразие внесена гладкая структура), если задан гладкий атлас с точностью до замены эквивалентным гладким атласом (фиксированной размерности n). Топологическое многообразие в которое внесена гладкая структура, называется *гладким многообразием*.

Рассмотрим подробнее метод построения гладкого многообразия основанный на теореме о неявной функции.

Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 с координатами $\{x_1, x_2, x_3\}$, множество $V \subset \mathbb{R}^3$, состоящее из точек $P(x_1, x_2, x_3)$, координаты $\{x_1, x_2, x_3\}$ которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) \\ \Phi(x_1, x_2, x_3) \end{cases} \quad (1.266)$$

Допустим что необходимо решить эту систему уравнений в некоторой окрестности некоторой точки $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}$, найдя из нее переменные $x_2 = \varphi(x_1)$ и $x_3 = \psi(x_1)$ как такие непрерывные функции φ и ψ переменной x_1 , что $\varphi(x_1^{(0)}) = y_2^{(0)}$, $\psi(x_1^{(0)}) = x_3^{(0)}$.

Разрешив для этого, например, первое уравнение (1.266) относительно x_3 , получим $x_3 = f(x_1, x_2)$. Подставив это выражение во второе уравнение и разрешив его относительно x_2 , будем иметь $x_2 = \varphi(x_1)$. Полагая $\psi(x_1) = f[x_1, \varphi(x_1)]$, получим искомое решение: $x_2 = \varphi(x_1)$, $x_3 = \psi(x_1)$.

Возникает вопрос о том, при выполнении каких условий возможно проделать указанные операции, или, точнее, когда существуют и однозначно определены все упомянутые выше функции.

Для того чтобы одно из данных уравнений, например первое, было разрешимым в некоторой окрестности точки $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})$ относительно переменной $x_3^{(0)}$, достаточно, чтобы

$$\frac{\partial F(x^{(0)}, y^{(0)})}{\partial y^{(0)}} \neq 0.$$

где для удобства введено обозначение $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$ и $y^{(0)} = x_3^{(0)}$

ТЕОРЕМА 1.11.1 Пусть функция $F(x, y) \equiv F(x_1, x_2, x_3)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $(x^{(0)}, y^{(0)})$ и имеет в этой окрестности частную производную $F_y^{(0)}$ непрерывную в точке в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$.

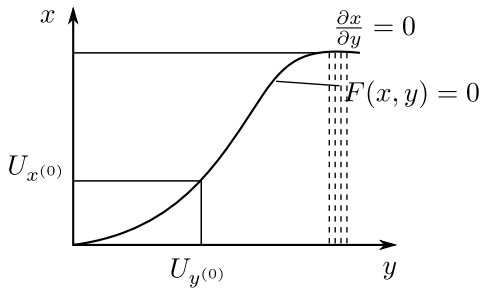


Рис. 1.34: Разрешимость уравнения заданного неявно.

Если $F(x^{(0)}, y^{(0)}) = 0$, а $F_y(x^{(0)}, y^{(0)}) \neq 0$, то найдутся такие окрестности $U_{x^{(0)}}$ и $U_{y^{(0)}}$ соответственно точек $x^{(0)}$ и $y^{(0)}$, что для каждого $x \in U_{x^{(0)}}$ существует, и при том единственное, решение $y = f(x) \in U_{y^{(0)}}$ уравнения $F(x, y) = 0$. Это решение непрерывно всюду в $U_{x^{(0)}}$ и $y^{(0)} = f(x^{(0)})$.

Если дополнительно предположить, что функция F имеет в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) частную производную $F_x(x, y)$, непрерывную в точке (x_0, y_0) , то функция $f(x)$ также имеет в точке x_0 производную и для нее справедлива формула

$$f'(x^{(0)}) = -\frac{F_x(x^{(0)}, y^{(0)})}{F_y(x^{(0)}, y^{(0)})} \quad (1.267)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предположений вытекает монотонность функции $F(x, y)$ на рассматриваемом интервале. Из монотонности (по ее определению) следует, что выполняются все условия для биекции а это и значит что существует единственная $y = f(x)$ (в рассматриваемой окрестности)

Итак, если $y = f(x)$ - соответствующее решение, то для того, чтобы уравнение получившееся в результате подстановки этого решения во второе уравнение $\Phi(x, f(x))$ было разрешенным относительно переменной x , достаточно, чтобы полная частная производная по x левой части получившегося равенства не обращалась в нуль в точке $(x^{(0)}, y^{(0)})$, т.е. чтобы в этой точке

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \quad (1.268)$$

Подставляя в это неравенство (1.267), получим, что условие разрешимости можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \neq 0 \quad (1.269)$$

Из этого условия очевидно вытекает, что в точке (x_0, y_0) либо $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, либо $\frac{\partial \Phi}{\partial y} \neq 0$, т.е. одно из данных уравнений разрешимо относительно z .

Важно что (1.269) можно записать как определитель некоторой матрицы **J**

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (1.270)$$

Матрица **J** называется матрицей якоби. А ее определитель, если он не равен нулю называется якобианом (отображения).

В общем случае, условием разрешимости системы уравнений

$$\begin{cases} F_1(x^1, x^2, \dots, x^n) \\ \dots \\ F_s(x^1, x^2, \dots, x^n). \end{cases} \quad (1.271)$$

является

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_s}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial F_s}{\partial x^n} \end{vmatrix} \quad (1.272)$$

Определение 1.11.7 В пространстве \mathbb{R}^n с координатами $\{x^n\}$ множество $\mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n$ состоящее из точек $P(\{x^n\})$, координаты которых удовлетворяют системе уравнений (1.271) для которой выполняется условие (1.272) является гладким многообразием.

Определение 1.11.8 С системой уравнений (1.271) связано отображение

$$F: \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n) \rightarrow \mathbb{R}^s(y^1, \dots, y^s),$$

$$F(x^1, \dots, x^n) = (y^1, \dots, y^s),$$

где $y^i = f_i(x^1, \dots, x^n)$ и $X = F^{-1}(0)$. Для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ определен дифференциал dF_{x_0} отображения F в точке x_0 : $dF_{x_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, который вектор $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^n)$ отображает в вектор $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^s)$ по формуле

$$\xi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \Big|_{x_0} \zeta^j$$

Это очевидно, *линейное отображение*. Отображение dF_x инвариантно можно описать следующим образом. Рассмотрим кривую $x^i = x^i(t)$, $1 \leq i \leq n$, что $x^i(0) = x_0^i$, $1 \leq i \leq n$ и $\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} x^i(t) = \zeta^i$, $1 \leq i \leq n$.

ТЕОРЕМА 1.11.2 Имеет место равенство $dF_{x_0}(\zeta) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(x(t))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство следует из равенств.

$$\left[\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(x(t)) \right]^i = \left. \frac{df_i(x(t))}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{x_0} \left. \frac{dx^j(t)}{dt} \right|_{t=0} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right|_{x_0} \zeta^j \quad (1.273)$$

Из определений вытекает, что $rk \mathbb{J}_x = \dim \text{Im } dF_x$.

Определение 1.11.9 Говорят, что на многообразии \mathbb{M} дана кривая, если имеется непрерывное отображение $x : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{M}$ интервала $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1(t)$ в многообразие \mathbb{M} . Кривая это множество точек с некоторой параметризацией. Рассмотрим карту \mathbb{A} в многообразии \mathbb{M} , содержащую точку $x(t_0)$, $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Прообраз этой карты есть система интервалов, так как кривая - непрерывное отображение. Получим совокупность непрерывных функций $x(t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$. Через $x(t)$ обозначим композицию $(h \circ x)(t)$, где h - координатный гомеоморфизм карты \mathbb{A} .

Определение 1.11.10 Говорят, что на многообразии \mathbb{M} дана гладкая кривая, если все функции $x^i(t)$, определяющие эту кривую, гладкие.

Поскольку многообразие гладкое, то это определение инвариантно относительно выбора карт, чего нет, например, в произвольном многообразии. Пусть \mathbb{M}^n - гладкое n -мерное многообразие и $x \in \mathbb{M}^n$ - произвольная точка в \mathbb{M}^n . Выберем в окрестности точки x две системы координат (x^1, \dots, x^n) и $(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, т.е. рассмотрим две карты $h : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n(x^1, \dots, x^n)$ и $k : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{V} \subset \mathbb{R}^n(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, $x \in \mathbb{A} \cap \mathbb{B}$. Тогда функции $x^{i'} = f^i(x^1, \dots, x^n)$ и $x^j = g^j(x^{1'}, \dots, x^{n'})$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, гладкие.

Определение 1.11.11 Говорят, что в точке x на многообразии \mathbb{M}^n задан вектор, если в каждой карте (отвечающей данной гладкой структуре) задана последовательность n чисел $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi_n$ координаты вектора в данной карте), которые при переходе от одной карты к другой преобразуются по закону $\xi^{i'} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i$.

Определение 1.11.12 Все векторы многообразия \mathbb{M}^n в точке x образуют касательное векторное пространство, которое обозначается $\mathbb{L}_x \mathbb{M}$.

ТЕОРЕМА 1.11.3 Если дифференциальный оператор $\xi \varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ инвариантен относительно выбора карты, то его коэффициенты ξ^i образуют вектор.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $\xi^{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$ следует $\xi^{i'} \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}} = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^{i'}}$.

Отсюда $\xi^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \xi^{i'}$, так как предыдущее равенство имеет место для любой функции φ .

Итак, векторы находятся во взаимно однозначном соответствии с инвариантами дифференциальными операторами вида

$$\xi \varphi = \xi^i \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}.$$

1.11.1 Подмногообразия.

Итак, многообразие \mathbb{M} является формальным математическим объектом объединяющим в себе некоторое точечное множество множество \mathbb{M} , и класс систем координат.

1.12 Деформационное отображение.

1.12.1 Параметрические поверхности.

Определение 1.12.1 Непрерывной параметрической поверхностью размерности k в n -мерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^n , $n \geq k$, называется произвольное непрерывное отображение $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ из некоторой области $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^k$ в \mathbb{R}^n .

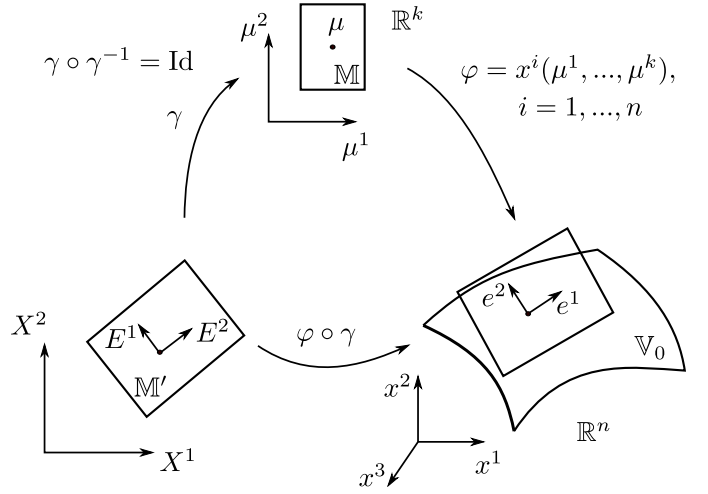


Рис. 1.35: Задание параметрической поверхности с заменой параметризации. $\omega_{12} = \text{const}$.

Как упоминалось, часто возможно и удобно рассмотреть плоское недеформированное тело. Т.е. Ω_0 , открытое подмножество \mathbb{R}^m , $1 < m < 3$. Тем не менее бывает полезно определить изогнутые недеформированную конфигурацию, и с этой целью теория формулируется соответственно.

Каждое такое φ задается набором из n координатных функций $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$, где ξ^i - стандартные евклидовы координаты в $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{M}$, а x^1, \dots, x^n - стандартные евклидовы координаты в \mathbb{R}^n . При этом непрерывность φ равносильна непрерывности всех функций $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$. Координаты ξ^i называются параметрами для φ или координатами на φ .

Определение 1.12.2 Непрерывная параметрическая поверхность $\varphi \mathbb{M}$ называется гладкой, если все задающие ее координатные функции $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$ - гладкие. В этом случае определены векторы $\varphi_{\xi^i} = (x^1_{\xi^i}, \dots, x^n_{\xi^i})$, называемые базисными касательными векторами для φ в точке $\varphi(\xi^1, \dots, \xi^k)$. Здесь через $x^j_{\xi^i}$, мы обозначим частную производную функции x^j по параметру ξ^i .

Изломы таких поверхностей могут возникать лишь в тех точках в которых базисные векторы линейно зависимы.

Определение 1.12.3 Поверхность называется регулярной, если ее базисные касательные векторы всюду линей-

но независимы. Это равносильно тому, что матрица якоби (x_ξ^i) имеет во всех точках максимальный ранг, равный, очевидно k

Определение 1.12.4 Замена параметризации.

Пусть $\varphi : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - непрерывная параметрическая поверхность. Рассмотрим произвольный гомеоморфизм $\gamma : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{M}$. Каждое такое отображение порождает новую непрерывную параметрическую поверхность $\gamma \circ \varphi : \mathbb{M}' \rightarrow \mathbb{R}^n$ и называется заменой параметризации для φ . Отметим, что φ и $\varphi \circ \gamma$ совпадают как подмножества пространства \mathbb{R}^n , т.е. имеют совпадающие образы. Кроме того, если γ - замена параметризации, то γ^{-1} также является заменой параметризации. Если замены параметризации γ и γ^{-1} гладкие то их дифференциалы всюду невырождены и параметрическая поверхность сохраняет свойство быть непрерывной гладкой или регулярной.

Определение 1.12.5 Переход от параметрической поверхности φ к параметрической поверхности $\varphi \circ \gamma$, где γ - замена параметризации, называют заменой координат на поверхности φ .

Определение 1.12.6 Поверхностью в пространстве \mathbb{R}^n называется семейство всех параметрических поверхностей, каждая пара которых отличается на замену параметризации.

Пусть $\{x^i\}$ - стандартные координаты в \mathbb{R}^n , $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим множество точек удовлетворяющих неявному уравнению

$$F(x^1, \dots, x^i) = 0. \quad (1.274)$$

Тогда при условии, что частная производная $F_{x^i} \neq 0$ его можно разрешить относительно x^i в виде

$$x^i = f(x^1, \dots, x^{n-1}) \quad (1.275)$$

Что дает нам явное представление о поведении поверхности.

Тогда отображение $\varphi : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное так:

$$\varphi : (\xi^1, \dots, \xi^{n-1}) \rightarrow (\xi^1, \dots, x^{n-1}, f(\xi^1, \dots, \xi^{n-1})) \quad (1.276)$$

задает регулярную поверхность, так как векторы

$$\varphi_{\xi^1} = (1, 0, \dots, 0, f_{\xi^1}), \dots, \varphi_{\xi^{n-1}} = (0, \dots, 0, 1, f_{\xi^{n-1}}) \quad (1.277)$$

- линейно независимы в каждой точке области \bar{M} . Говорят, что поверхность φ задана графиком функции f .

ТЕОРЕМА 1.12.1 Три способа задания регулярной гиперповерхности, т.е. в виде параметрической поверхности, в виде графика гладкой функции с помощью параметризованной кривой и с помощью неявной функции с отличным от нуля дифференциалом локально эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любая поверхность в окрестности неособой точки может быть параметризована в виде графика некоторой гладкой функции. Такая параметризация, очевидно, взаимно-однозначна.

Следствие. В некоторой окрестности каждой точки параметризующее отображение регулярной поверхности взаимно-однозначно.

Определение 1.12.7 Регулярная поверхность $\varphi : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *вложенной*, если φ гомеоморфизм.

В силу следствия, в достаточно малой окрестности каждой точки $P \in \bar{M}$, т.е. локально, каждая регулярная поверхность является вложенной.

Вложенность поверхности позволяет отождествить поверхность с ее образом. В частности это позволяет отождествить координаты стандартные координаты в $\bar{M} \subset \mathbb{R}^k$ с координатами на вложенной поверхности $M \subset \mathbb{R}^n$

1.12.2 Кривые и координатные линии на регулярной поверхности.

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ - регулярная поверхность. Говорят, что кривая $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ лежит на M , если образ отображения φ принадлежит M .

Если (ξ^1, \dots, ξ^k) - координаты в области \bar{M} , то для того чтобы задать кривую на поверхности достаточно задать набор функций $\xi^i(t)$, $i = 1, \dots, k$, которые называются координатными функциями кривой. Эти координатные функции определяют соответствующее отображение $\varphi(\xi^1(t), \dots, \xi^k(t))$ отрезка в \mathbb{R}^n которое в координатах (x^1, \dots, x^n) выглядит так: $x^i(t) = x^i(\xi^1(t), \dots, \xi^k(t))$, где $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$ - координатные функции поверхности φ .

Определение 1.12.8 Кривая на поверхности M , вдоль которой меняется ровно одна координата ξ^i , а остальные постоянны называется *координатной линией*. Если $P \in M$ точка на поверхности с координатами ξ_0^1, \dots, ξ_0^k то i -ой координатной линией, проходящей через точку P , называется кривая, заданная так:

$$\xi^j(t) = \xi_0^j, j \neq i; \quad \xi^i(t) = t. \quad (1.278)$$

Пусть $x^i = x$ - координатные функции поверхности. Возьмем произвольную кривую на поверхности, проходящую через точку P , и пусть ξ^i - координатные функции этой кривой, а t - координата соответствующего касательного вектора имеет вид:

$$\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=t_0} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial x^i}{\partial \xi^j} \left. \frac{d\xi^j}{dt} \right|_{t=t_0} \quad (1.279)$$

Таким образом, касательный вектор к кривой φ - произвольный элемент касательного пространства $L_P M$ - это линейная комбинация следующего вида:

$$\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \right) \frac{d\xi^1}{dt} + \dots + \left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^k} \right) \frac{d\xi^k}{dt} \quad (1.280)$$

Где вектор-столбцы $\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i} \right)^T$, $i = 1, \dots, k$ не зависят от выбора кривой φ и однозначно определяются координатными функциями $x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$ поверхности M и точки P .

С другой стороны, в силу произвольности гладкой кривой φ , числа $\left. \frac{d\xi^i}{dt} \right|_{t=t_0}$ - произвольны. Поэтому касательное

пространство $L_P M$ - это линейное пространство, натянутое на векторы $\partial_{\xi^1}, \dots, \partial_{\xi^k}$, где через ∂_{ξ^i} обозначен вектор столбец $\left(\frac{\partial x^1}{\partial \xi^i}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial \xi^i}\right)^T$

Матрица составленная из векторов столбцов ∂_{ξ^i} , - это в точности матрица Якоби отображения $x^i = x^i(\xi^1, \dots, \xi^k)$, задающего поверхность. Ранг этой матрицы, в силу регулярности поверхности M , равен k , поэтоу векторы $\partial_{\xi^1}, \dots, \partial_{\xi^k}$ линейно независимы и образуют базис в пространстве $L_P M$. Этот базис называется каноническим базисом в точке P .

Замечание. Определение вектора непротиворечиво.

Действительно, пусть есть другая система координат \hat{x}^i , в этих координатах $\hat{x}^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^j} \eta^j$, тогда

$$\frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^i} v^i = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} \eta = \frac{\partial \hat{x}^i}{\partial \xi^i} \eta = \hat{v}^i \quad (1.281)$$

Отсюда

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^i} \hat{v}^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^i} \eta^i \quad (1.282)$$

1.12.3 Первая фундаментальная форма на поверхности.

Пусть ξ и ζ - касательные векторы к поверхности M в точке P . Пусть (η^1, \dots, η^k) - координаты на поверхности M , а $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^k)$ и $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^k)$ - компоненты касательных векторов ξ и ζ относительно этих координат. Тогда $\xi = \sum_i \xi^i \partial_{u^i}$ и $\zeta = \sum_j \zeta^j \partial_{u^j}$, где $\{\partial_{u^i}\}$ - канонический базис в точке P . Поэтому скалярное произведение векторов ξ и ζ (как векторов в \mathbb{R}^n) может быть вычислено так:

$$(\xi, \zeta) = \left(\sum_{i=1}^k \xi^i \partial_{u^i}, \sum_{j=1}^k \zeta^j \partial_{u^j} \right) = \sum_{i,j=1}^k (\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) \xi^i \zeta^j. \quad (1.283)$$

Числа $(\partial_{u^i}, \partial_{u^j})$, образующие матрицу Грамма канонического базиса $\{\partial_{u^i}\}$, обозначаются через $g_{ij}(P)$ и называются *компонентами индуцированной метрики*, или *компонентами первой фундаментальной (квадратичной) формы поверхности M в координатах $\{\eta^i\}$* . Если поверхность задана отображением φ с координатным функциями $x^i(\eta^1, \dots, \eta^k)$, то

$$g^{ij}(\eta^1, \dots, \eta^k) = (\partial_{u^i}, \partial_{u^j}) = \sum \frac{\partial x^p}{\partial \eta^i} \frac{\partial x^p}{\partial \eta^j} \quad (1.284)$$

Матрица $G(\eta) = (g_{ij}(\eta))$ - матрица индуцированной метрики по определению симметрична, невырождена и положительно определена.

Базис очевидно меняется от точки к точке, поэтоу говорят что на M возникает *поле* квадратичных форм $x(\mu) \rightarrow G(\mu)$. Это поле квадратичных форм называется *первой квадратичной формой* поверхности M и обозначается $g_{ij} v^i v^j$. Точнее, приведенное выражение является записью первой квадратичной формы в криволинейных координатах $\{\mu^i\}$.

Если задана замена параметризации $\mu^i = \mu^i(\eta^1, \dots, \eta^k)$ поверхности M , то в каждой точке определено две матрицы:

$$G(\eta) = (g_{ij}(\eta)) = (\partial_{u^i}, \partial_{u^j})$$

и

$$G(\mu) = (g_{pq}(\mu)) = (\partial_{\mu^p}, \partial_{\mu^q})$$

В соответствии с законом преобразования векторов они связаны так:

$$g_{ij}(\eta^1, \dots, \eta^k) = \sum_{pq} g_{pq}(\mu^1(\eta^1, \dots, \eta^k), \dots, \mu^k(\eta^1, \dots, \eta^k)) \frac{\partial \mu^p}{\partial \eta^i} \frac{\partial \mu^q}{\partial \eta^j}, \quad (1.285)$$

где частные производные вычисляются в точке (η^1, \dots, η^k) .

Рассмотрим элемент ds длины дуги кривой φ на поверхности M , $k = 2$.

Пусть кривая задана параметрически так:

$$\varphi(t) = x^i(\mu^1(t), \mu^2(t))$$

Касательный вектор к ней

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} \frac{d\mu^1}{dt} + \frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} \frac{d\mu^2}{dt}$$

Полный дифференциал отображения φ :

$$\begin{aligned} dx^i &= \frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} d\mu^1 + \frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} d\mu^2 \\ (dx^i)^2 &= \\ \left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} \right)^2 d\mu^1 + 2 \left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^1} \frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} \right) d\mu^1 d\mu^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial \mu^2} \right)^2 d\mu^2 \end{aligned} \quad (1.286)$$

Тогда

$$\begin{aligned} ds &= |d\varphi| = \\ \sqrt{d(x^i)^2} &= \sqrt{E(d\mu^1)^2 + 2Fd\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2} dt \end{aligned} \quad (1.287)$$

откуда

$$s(t) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E(d\mu^1)^2 + 2Fd\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2} dt$$

Где введены сокращающие обозначения.

Итак, матрица первой квадратичной формы при замене координат меняется так, как меняется матрица билинейной (квадратичной) формы на линейном пространстве при замене базиса.

Аналогично со случаем \mathbb{R}^n с помощью этой формы (индуцированной метрики) на поверхности вычисляются длины и углы.

Заметим, что если на поверхности задана эта форма то для вычисления длин векторов и углов между ними достаточно знать их компоненты относительно системы координат на поверхности, и не важен конкретный вид отображения φ , задающего поверхность. Поэтому говорят, что *скалярное произведение вычисляется во внутренних терминах*, а индуцированную метрику называют *внутренней метрикой*. Здесь слово "внутренней" подчеркивает независимость вычислений скалярных произведений от объемлющего пространства.

1.12.4 Деформационное отображение.

Рассмотрим локальные координаты μ^i , ($i = 1, \dots, k$). Пусть \mathbb{M}^k многообразие.

Определение 1.12.9 Преобразование $f : \mathbb{M}^k \rightarrow \mathbb{M}^k : \mu = \mu^1, \dots, \mu^k \equiv (\mu^i) \rightarrow \bar{\mu} = (\bar{\mu}^1, \dots, \bar{\mu}^k) \equiv (\bar{\mu}^i)$, где

$$\bar{\mu} = f(\mu) = \mu + u(\mu)\epsilon, \quad (1.288)$$

или в компонентной записи

$$\bar{\mu}^i = \mu^i + u^i(\mu^j)\epsilon, \quad i, j = 1, \dots, k. \quad (1.289)$$

где ϵ бесконечно малая величина, называется инфинитиземальной деформацией пространства \mathbb{V}^k , определяемой векторным полем $u = (u^i)$, которое называется инфинитиземальным деформационным полем.

Индексы (i) указывают на локальную координатную систему в которой точка μ имеет координаты μ^i , а точка $\bar{\mu}$ координаты $\bar{\mu}^i$.

Определим новую координатную систему на которую указывают индексы (i'), сопоставляющую точке $\mu = (\mu^i)$ новые координаты

$$\mu^{i'} = \bar{\mu}^i, \quad (1.290)$$

Т.е. в качестве новых координат $\mu^{i'}$ точки $\mu = (\mu^i)$ мы выбрали старые координаты (в системе координат (i)) точки $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^i)$. Именно, в системе (i'), $\mu = (\mu^{i'}) = (\bar{\mu}^i)$.

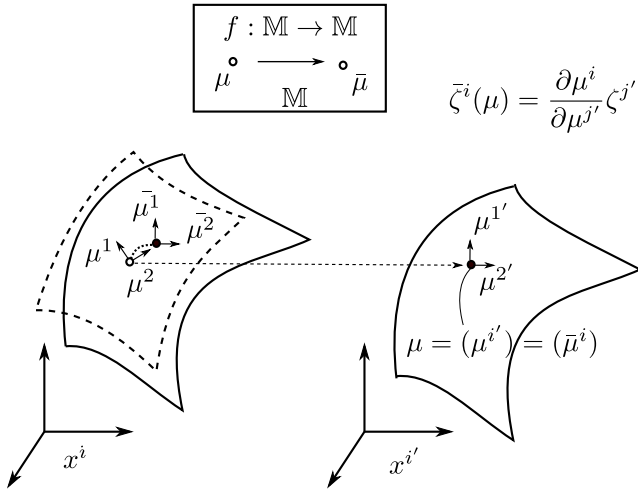


Рис. 1.36: Деформационное отображение в материальном описании. Следует различать точку пространства и точку "вмороженную" в тело. Одна и тоже "вмороженная" точка может занимать различные точки пространства, т.е. иметь различные координаты. Закрашенными точками обозначаем "вмороженные" точки. Незакрашенными - "координаты".

Определение 1.12.10 Преобразование координат индуцированное точечным отображением $f : \mu \rightarrow \bar{\mu}$ приписывает новым координатам точки μ ее старые, преобразованные координаты $\bar{\mu}$, и называется увлечением точечным преобразованием. Новые координаты $\mu^{i'} = \bar{\mu}^i$ точки $\bar{\mu}$ называются увлеченными (индуцированными) координатами.

После деформации точка μ попадает, вообще говоря в другую систему координат. Чтобы иметь возможность сравнивать объекты до, и после деформации, нужно эти точки совместить, математически такое совмещение выполняется выбором соответствующей системы координат (карты) так, что в этой карте $\mu = (\mu^{i'}) = (\bar{\mu}^i)$.

В случае инфинитиземальных деформаций (1.289) преобразование координат

$$\mu^{i'} = \bar{\mu}^i = \mu^i + u^i(\mu^1, \dots, \mu^k)\epsilon \quad (1.291)$$

называется увлечением преобразованием $u^i\epsilon$.

Рассмотрим произвольный геометрический объект A заданный в системе координат (i) в точке $\mu = (\mu^i) \in \mathbb{V}^k$, обозначим его $A(i, x)$.

Определение 1.12.11 Точка $\bar{\mu}$ является деформацией точки μ , если $\bar{\mu} = \mu + u(\mu)\epsilon$. Геометрический объект $\bar{A}(i, \mu)$ является деформацией объекта $A(i, \mu)$ по отношению к преобразованию $\bar{\mu} = \mu + u(\mu)\epsilon$, если его значение в системе координат (i'), в точке x равно значению объекта A в системе координат i в точке $\bar{\mu}$, т.е.

$$\bar{A}(i', \mu) = A(i, \bar{\mu}). \quad (1.292)$$

Определение 1.12.12 Величина

$$\mathcal{D}A = \bar{A}(i, \mu) - A(i, \mu) \quad (1.293)$$

называется дифференциалом Ли, а величина

$$\mathcal{L}_z A = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{D}A}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{A}(i, \mu) - A(i, \mu)}{\epsilon} \quad (1.294)$$

Называется производной Ли геометрического объекта $A(i, x)$ по отношению к векторному полю $z = (u^i(\mu^j))$.

В соответствии с (1.293) для деформированного объекта $\bar{A}(i, \mu)$ имеем

$$\bar{A}(i, \mu) = A(i, \mu) + \mathcal{D}A, \quad (1.295)$$

и таким образом можем выразить \bar{A}

Таким образом мы можем найти \bar{A} найдя прежде $\mathcal{D}A$.

В соответствии с (1.293) имеем

$$\mathcal{D}\mu^i = \bar{\mu}^i - \mu^i \quad (1.296)$$

т.е. для координат мы имеем

$$\mathcal{D}\mu^i = u^i(\mu^j)\epsilon, \quad (1.297)$$

откуда

$$\mathcal{L}_u \mu^i = u^i(\mu^j). \quad (1.298)$$

и хотя μ^i не вектор, мы видим что $\mathcal{L}_u \mu^i$ является вектором.

Рассмотрим некоторые частные случаи 1. Для скалярной функции $\varphi(\mu) \equiv \varphi(\mu^1, \dots, \mu^k)$ мы имеем

$$\mathcal{D}\varphi(\mu) = \varphi_{,p} u^p(\mu)\epsilon = \mathcal{L}_u \varphi(\mu)\epsilon, \quad (\varphi_{,p} = \partial\varphi/\partial\mu^p), \quad (1.299)$$

т.е. Производная Ли скалярной функции это производная этой функции в направлении векторного поля u .

2. Для ковариантного вектора $\eta_i(\mu)$ мы имеем

$$\mathcal{D}\eta_i = (\eta_{i,p} u^p + u^p_{,i} \eta_p)\epsilon = \mathcal{L}_u \eta_i \epsilon \quad (\eta_{i,p} = \partial\eta_i/\partial\mu^p), \quad (1.300)$$

3. Для контравариантного вектора $\zeta^i(\mu)$, в соответствии с (1.293) мы имеем

$$\mathcal{D}\zeta^i = \bar{\zeta}^i(\mu) - \zeta^i(\mu), \quad (1.301)$$

и мы можем найти $\bar{\zeta}^i(\mu)$. В соответствии с законом преобразования векторов

$$\bar{\zeta}^i(\mu) = \frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} \zeta^{j'}(\mu), \quad (1.302)$$

где с правая часть подлежит определению. Основываясь на (1.289) получим

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \frac{\partial \mu^{i'}}{\partial \mu^{j'}} - \frac{\partial u^i(\mu)}{\partial \mu^{j'}} \epsilon = \delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^{j'}} \epsilon. \quad (1.303)$$

Принимая во внимание, что $u^i(\mu) = u^i(\mu^1, \dots, \mu^k)$, запишем

$$\frac{\partial u^i}{\partial \mu^{j'}} = \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k} \frac{\partial \mu^k}{\partial \mu^{j'}} = \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k} (\delta_j^k - \frac{\partial u^k}{\partial \mu^{j'}} \epsilon). \quad (1.304)$$

Подставляя в (1.303) получим

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^k} \epsilon (\delta_j^k - \frac{\partial u^k}{\partial \mu^{j'}} \epsilon), \quad (1.305)$$

и пренебрегая членами с $(\epsilon)^2$:

$$\frac{\partial \mu^i}{\partial \mu^{j'}} = \delta_j^i - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^j} \epsilon. \quad (1.306)$$

Для второго члена с правой части (1.302), используя разложение Тейлора, запишем

$$\bar{\zeta}^{j'}(\mu) = \zeta^{j'}(\bar{\mu}) = \zeta^{j'}(\mu^i + u^i \epsilon) = \zeta^i(\mu) + \frac{\partial \zeta^{j'}}{\partial \mu^k} u^k \epsilon + \dots \quad (1.307)$$

Подставляя (1.306, 1.307) в (1.302) запишем:

$$\bar{\zeta}^i(\mu) = \zeta^i(\mu) + \frac{\partial \zeta^i}{\partial \mu^k} u^k \epsilon - \frac{\partial u^i}{\partial \mu^j} \zeta^j \epsilon, \quad (1.308)$$

и подставляя это в (1.301) запишем:

$$\mathcal{D}\zeta^i = (\zeta_{,p}^i u^p - u_{,p}^i \zeta^p) \epsilon = \mathcal{L}_u \zeta^i \epsilon. \quad (1.309)$$

Рассмотрим обратимую деформацию упругой пластинки.

Для описания кинематики обратимой деформации среды целесообразно выделить два состояния, не деформированное и деформированное.

Пусть недеформированное состояние описывается дифференцируемым многообразием \mathbb{M}^n , $n = 2$ в \mathbb{R}^3 . В отсутствие дефектов (дислокаций, дисклинаций) \mathbb{M} покрывается единой картой; существует гладкая непрерывная параметрическая поверхность \mathbb{V}_0 .

$M' = u(M)$

v

v'

M

Зададим теперь отображение $u = \hat{x}(x_1, \dots, x_n)$ переводящее тело в деформированное состояние. Отображение u является заменой координат на поверхности, или что тоже, сменой параметризации поверхности. При этом координатные линии "изогнутся и как следствие базисные векторы изменятся. Производная этого отображения переводит векторы из L_x в L'_x по формуле

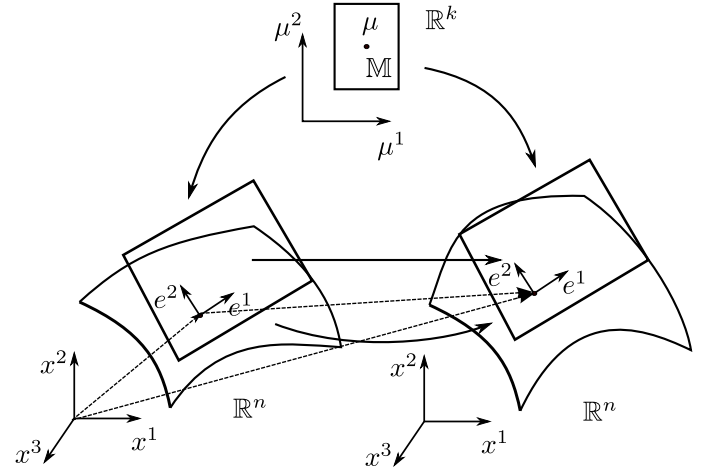


Рис. 1.37: Деформационное отображение.

$$\hat{v}^j = \frac{\partial \hat{x}^j}{\partial x^i} v^i = \bar{e}_i^0 v^i \quad (1.310)$$

Обратное к u отображение преводит векторы из L'_x в L_x по формуле

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \hat{x}^j} \hat{v}^j = \bar{e}_j \hat{v}^j \quad (1.311)$$

Определение 1.12.13 Базисы \bar{e}_j и $\bar{e}_i^{(0)}$ образуют базисы в касательных пространствах к N и M соответственно в точках $u(x)$ и x и называются индуцированными базисами.

Рассмотрим элемент длины в деформированной системе координат. Для этого к компонентам v_i в недеформированной системе координат прибавим производную отображения u по направлению этих компонент.

$$\hat{v}^j = \bar{e}_i^0 v^i + L_{v^i} u = \bar{e}_i^0 v^i + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i$$

$$\bar{e}_i v^i = (\bar{e}_i^0 + \frac{\partial u}{\partial x_i}) v^i$$

Отсюда

$$\bar{e}_i = \bar{e}_i^0 + \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (1.312)$$

Возводя в квадрат

$$\begin{aligned} g_{ik} &= \left(\bar{e}_i^0 + \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \left(\bar{e}_k^0 + \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \\ &= g_{ik}^0 + \bar{e}_i^0 \frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k^0 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.313)$$

Или

$$\begin{aligned} g_{ik} - g_{ik}^0 &= 2r_{ik}^0 = \\ &= \bar{e}_i^0 \frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k^0 \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.314)$$

Тензор r выраженный в начальной системе координат называется тензором Коши-Грина.

Рассмотрим теперь элемент длины в деформированной системе координат. Для этого от компонент \hat{v}_i в недеформированной системе координат отнимем производную отображения u по направлению этих компонент.

$$v^i = \bar{e}_j \hat{v}^i - L_{\hat{v}^j} u = \bar{e}_j \hat{v}^j - \frac{\partial u}{\partial x_i} \hat{v}_i$$

$$\bar{e}_j^0 \hat{v}^j = (\bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j}) \hat{v}^j$$

Отсюда

$$\bar{e}_j^0 = \bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad (1.315)$$

Возводя в квадрат

$$\begin{aligned} g_{jk}^0 &= \left(\bar{e}_j - \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \left(\bar{e}_k - \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \\ &= g_{jk} - \bar{e}_j \frac{\partial u}{\partial x_k} - \bar{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.316)$$

Или

$$\begin{aligned} g_{jk} - g_{jk}^0 &= 2r_{jk} = \\ &= \bar{e}_j \frac{\partial u}{\partial x_k} + \bar{e}_k \frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (1.317)$$

Тензор r выраженный в текущей (деформированной) системе координат называется тензором Альманси.

Чтобы деформация была обратимой необходимо и достаточно чтобы отображение u являлось диффеоморфизмом.

Определение 1.12.14 Если A - карта многообразия M , содержащая точку x_0 , и x^1, \dots, x^n - координаты в карте A , а B - карта многообразия содержащая точку N^l , содержащую точку $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in M$, и y^1, \dots, y^l координаты в карте B то отображение в координатах запишется в виде системы функций $y^j = f^j(x^1, \dots, x^n)$, которые называются *локальным представлением отображения f* в данных координатах. В гладком многообразии имеет смысл требование гладкости этих функций.

Определение 1.12.15 Отображение f называется *гладким*, если оно непрерывно и все представляющие его функции $f^j(x^1, \dots, x^n)$ являются гладкими, т.е. класса C^∞ .

Определение 1.12.16 Диффеоморфизмом многообразия M^n на многообразие N^l называется такой гомеоморфизм $f: M^n \rightarrow N^l$ что f и f^{-1} - гладкие отображения.

Очевидно, отношение диффеоморфности есть, отношение эквивалентности на множестве гладких многообразий. В дифференциальной топологии диффеоморфные многообразия считаются различными экземплярами одного и того же многообразия.

Определение 1.12.17 Пусть M есть C^∞ -многообразие. Многообразие N называется *подмногообразием* в M , если существует взаимно однозначное C^∞ -отображение $i: N \rightarrow M$, такое, что di взаимно однозначно в каждой точке. Тогда i называется *вложением*, и говорится что N *вложено* в M посредством i .

1.12.5 Изометрии. Изгибания.

Изгибание, это частный случай непрерывной деформации, то есть непрерывное преобразования тела без растяжений. При изгибании поверхности длины кривых не изменяются и, следовательно, поверхность в любой момент изгибания изометрична исходной поверхности. Таки образом *при соответствующей параметризации* первая квадратичная форма при изгибании поверхности не изменится.

Пусть $p \in M$ точка на гладком многообразии M . Пусть $C_p^\infty(M)$ гладкая функция на M в окрестности содержащей точку p , и $C^\infty(M)$ набор гладких функций на M .

Касательный вектор ξ к M в p это отображение

$$\begin{aligned} \xi: C_p^\infty &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \xi[f](p) \end{aligned} \quad (1.318)$$

такое, что для всех $f_1, f_2 \in C_p^\infty(M)$ и $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\xi[af_1 + bf_2] = a\xi[f_1] + b\xi[f_2]$ (линейность)
2. $\xi[f_1, f_2] = \xi[f_1]f_2(p) + f_1(p)\xi[f_2]$ (правило Лейбница.)

Пусть на гладком многообразии M задано поле метрического тензора

$$\begin{aligned} g: LM \times LM &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\xi, \zeta) &\rightarrow g(\xi, \zeta); \end{aligned} \quad (1.319)$$

Пусть $(A; \varphi)$, $\varphi = (\mu^1, \dots, \mu^n)$ является координатной системой на многообразии M в p , и (x^1, \dots, x^n) натуральная координатная система в \mathbb{R}^n (тождественное отображение \mathbb{R}^n); заметим, что $x^i \circ \varphi = \mu^i$. Для любой функции $f \in C^\infty(M)$, мы определим:

$$\frac{\partial}{\partial \mu^i} \Big|_p f = \frac{\partial f}{\partial \mu^i}(p) = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^i}(\varphi(p)) \quad (1.320)$$

$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial \mu^i} \Big|_p: C^\infty M \rightarrow \mathbb{R}$ является касательным вектором к M в p .

g ассоциирует с каждой точкой $p \in M$ скалярное произведение g_p в касательном пространстве $L_p M$ в точке p .

Гладкая кривая на многообразии M это отображение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$. В каждой точке $t \in \mathbb{R}$ мы можем рассмотреть касательный вектор к этой кривой, обозначаемый

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d}{dt} \gamma(t), \quad (1.321)$$

который действует на произвольную функцию $f \in C_{\gamma(t)}^\infty(M)$ как:

$$\dot{\gamma}(t)[f] = \frac{d(f \circ \gamma)(t)}{dt} = \frac{d(\mu^i \circ \gamma)(t)}{dt} \partial_i|_{\gamma(t)} f. \quad (1.322)$$

Заметим, что $(\mu^1 \circ \gamma; \dots; \mu^n \circ \gamma)$ является координатным представлением кривой γ .

Гладкое многообразие M наделенное метрическим тензором называется *Римановым многообразием*, и обозначается (M, g) .

Пусть (A, φ) , $\varphi = (\mu^1, \dots, \mu^n)$ координатная система в точке $p \in M$ и $\partial_1, \dots, \partial_n$ (где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial \mu^i}$) индуцированные базисные векторы. Функции g_{ij} определенные как

$$g_{ij} = g(\partial_i; \partial_j) \quad (1.323)$$

называются компонентами метрического тензора g на многообразии M . Для любых векторных полей A, B таких, что $A = a^i \partial_i$ и $B = b^j \partial_j$ можем записать:

$$g(A; B) = g(a^i \partial_i; b^j \partial_j) = a^i b^j g(\partial_i; \partial_j) = a^i b^j g_{ij} \quad (1.324)$$

Пусть M и M' два многообразия размерностей m и n соответственно. Рассмотрим открытое подмножество $W \subset M$, и гладкое отображение из W в M' . Для любой точки $p \in W$, отображение

$$du_p : \mathbb{L}_p M \rightarrow \mathbb{L}_{u(p)} M' \quad (1.325)$$

заданное как

$$\begin{aligned} du_p(\xi)[f](u(p)) &= \xi[f \circ u](p), \\ \forall \xi \in \mathbb{L}_p M, \forall f \in C^\infty(u(W)), \end{aligned} \quad (1.326)$$

линейно и называется дифференциалом отображения u в точке p . Если $(A; \varphi), \varphi = (\mu^1, \dots, \mu^n)$, является координатной системой на M в p и $(A'; \varphi'), \varphi' = (\mu'^1, \dots, \mu'^n)$ координатная система на M' в $u(p)$, тогда

$$du_p(\partial_i|_p) = \frac{\partial(\mu'^j \circ u)}{\partial \mu^i}(p) \partial_{j'}|_{u(p)}, \quad (1.327)$$

где $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial \mu^i}|_p$ и $\partial_{j'}|_{u(p)} = \frac{\partial}{\partial \mu'^j}|_{u(p)}$ матрица $\left(\frac{\partial(x'^i \circ u)}{\partial x^j} \right)_{ij=1}^n$ называется матрицей Якоби замены координат.

Определение 1.12.18 Рассмотрим случай когда $M = M'$. Дiffeоморфизм $u : M \rightarrow M'$ называется *локальной изометрией* для любых $p \in M$ и $\xi, \zeta \in \mathbb{L}_p M$ если :

$$g(du_p(\xi); du_p(\zeta)) = g(\xi, \zeta); \quad (1.328)$$

Множеств всех изометрий M имеет структуру группы и обозначается

$$\text{Isom}(M) = \{u : M \rightarrow M\} \quad (1.329)$$

и называется группой изометрии M .

Дiffeоморфизм u является изометрией если, и только если отображение u "сохраняет риманову метрику".

Рассмотрим в точке p изометрию u и две кривые (\mathbb{R}_1, γ_1) и (\mathbb{R}_2, γ_2) . По определению длина кривой, длина γ_1 (на пример):

$$l_{\gamma_1} = \int_{t_1}^{t_2} (g(\dot{\gamma}_1(t); \dot{\gamma}_1(t)))^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.330)$$

Длина образа кривой $u \circ \gamma_1$ при диффеоморфизме

$$l_{u(\gamma_1)} = \int_{t_1}^{t_2} (g(du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)); du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t))))^{\frac{1}{2}} dt \quad (1.331)$$

Следовательно

$$g(du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t)); du_{\gamma_1(t)}(\dot{\gamma}_1(t))) = g(\dot{\gamma}_1(t); \dot{\gamma}_1(t)) \quad (1.332)$$

Дифференциаль отображения в точке p который является изометрией действует на векторы $\partial_i|_p$ следующим образом:

$$du_p(\partial_i|_p) = \frac{\partial \mu'^j}{\partial \mu^i}(p) \partial_j|_{u(p)}, \quad (1.333)$$

где $\mu'^j = \mu^j \circ u$.

Следовательно

$$\begin{aligned} g(du_p(\partial_i|_p); du_p(\partial_j|_p)) &= g(\partial_i|_p; \partial_j|_p) \Leftrightarrow \\ g\left(\frac{\partial \mu'^k}{\partial \mu^i}(p) \partial_k|_{u(p)}; \frac{\partial \mu'^l}{\partial \mu^j}(p) \partial_l|_{u(p)}\right) &= g(\partial_i|_p; \partial_j|_p). \end{aligned} \quad (1.334)$$

Так как g биллинейная форма, то выражение выше можно переписать так:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\partial \mu'^k}{\partial \mu^i}(p) \partial_k|_{u(p)}; \frac{\partial \mu'^l}{\partial \mu^j}(p) \partial_l|_{u(p)}\right) \\ = \frac{\partial \mu'^k}{\partial \mu^i}(p) \frac{\partial \mu'^l}{\partial \mu^j}(p) g(\partial_k|_{u(p)}; \partial_l|_{u(p)}) \end{aligned} \quad (1.335)$$

Следовательно мы имеем

$$\frac{\partial \mu'^k}{\partial \mu^i}(p) \frac{\partial \mu'^l}{\partial \mu^j}(p) g_{kl}(u(p)) = g_{ij}(p). \quad (1.336)$$

Эта формула очень важна, так как она дает явное условия для изометрии.

Другими словами, отображение u ложно быть таким, чтобы его градиент $u_* p$ удовлетворял следующему условию

$$g(u_* p \xi; u_* p \xi) = g(\xi, \xi), \quad (1.337)$$

Можно дать следующее определение:

Определение 1.12.19 Дифференцируемое отображение $u : M \rightarrow M'$ называется *локальной изометрией*, если каждое касательное отображение $u_* : \mathbb{M}_p \rightarrow \mathbb{M}'_{u(p)}$ является линейной изометрией - *изоморфизмом векторных пространств, сохраняющим скалярное произведение*. В частности, локальная изометрия является дифференцируемым отображением максимального ранга многообразий одной и той же размерности. Локальная изометрия $u : M \rightarrow M'$ называется *изометрией*, если она является биекцией. В этом случае существует обратное отображение $u^{-1} : M' \rightarrow M$, являющееся изометрией.

Определение 1.12.20 Гладкое отображение $f : M^n \rightarrow N^l$ называется *погружением* (изгибанием), если отображение $f_* : \mathbb{L}_p M^n \rightarrow \mathbb{L}_{f(p)} N^l$ для произвольной точки $p \in M^n$ индуцирует изоморфизм пространства $\mathbb{L}_p M^n$ на подпространство $f_* \mathbb{L}_p M^n \subset \mathbb{L}_{f(p)} N^l$

Определение 1.12.21 Вложение которое также и погружение является изоморфизмом.

Мы никак не можем изогнуть изначально плоский лист бумаги так чтобы гладко наложить его на сферу, что бы выполнить такое наложение лист нужно деформировать(растянуть) - изменить его метрику. Другими словами нужно над листом нужно выполнить *неизометричное* преобразование, чтобы гладко покрыть им сферу или даже часть сферы. Однако плоским листом мы можем гладко накрыть полосу на цилиндре. Это говорит о том, что первой квадратной формы не достаточно для того, чтобы описать расположение поверхности в \mathbb{R}^n .

1.13 Вторая квадратичная форма.

Рассмотрим поверхность $\varphi(t) = \varphi(\mu^1(t), \mu^2(t))$ заданную в криволинейных координатах μ .

Восстановим в каждой точке единичный вектор нормали

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_{\mu^1} \times \partial_{\mu^2}}{|\partial_{\mu^1} \times \partial_{\mu^2}|} \quad (1.338)$$

где как обычно $\partial_{\mu^j} = \frac{\partial x^i}{\partial \mu^j}$ вектор столбец.

В каждой точке также определен второй дифференциал отображения

$$d^2\varphi = (\partial_{\mu^1}, \partial_{\mu^1}) (d\mu^1)^2 + 2(\partial_{\mu^1}, \partial_{\mu^2}) d\mu^1 d\mu^2 + (\partial_{\mu^2}, \partial_{\mu^1}) (d\mu^2)^2 + \partial_{\mu^1} d^2\mu^1 + \partial_{\mu^2} d^2\mu^2 \quad (1.339)$$

Определение 1.13.1 Второй квадратичной формой поверхности M называется скалярное произведение векторов $d^2\varphi$ и \mathbf{n} :

$$\Pi = (d^2\varphi, \mathbf{n}) = (\partial_{\mu^1}^2, \mathbf{n}) d(\mu^1)^2 + 2(\partial_{\mu^1, \mu^2}^2, \mathbf{n}) d\mu^1 d\mu^2 + (\partial_{\mu^2}^2, \mathbf{n}) d(\mu^2)^2 \quad (1.340)$$

Приняты следующие обозначения

$$L = (\partial_{\mu^1}^2, (n)), M = (\partial_{\mu^1, \mu^2}^2, (n)), N = (\partial_{\mu^2}^2, (n)),$$

тогда

$$\Pi = Ld(\mu^1)^2 + 2Md\mu^1 d\mu^2 + Nd(\mu^2)^2 \quad (1.341)$$

Так как векторы $d\varphi = \partial_{\mu^1} d\mu^1 + \partial_{\mu^2} d\mu^2$ и \mathbf{n} ортогональны (первый лежит в касательной плоскости, а второй - вектор нормали) - $(d\varphi, \mathbf{n}) = 0$, то

$$d(d\varphi, \mathbf{n}) = 0 \quad (1.342)$$

Очевидны также равенства

$$(\partial_{\mu^1}, \mathbf{b}) = 0, (\partial_{\mu^2}, \mathbf{b}) = 0 \quad (1.343)$$

Отклонение произвольной точки x поверхности M от плоскости L_x определяется формулой

$$h = (\varpi(x) - \varphi(x_0), \mathbf{n}_x) \quad (1.344)$$

где \mathbf{n}_0 - единичный вектор нормали к поверхности в точке x_0 . Это отклонение, взятое по абсолютной величине, равно расстоянию от точки x до плоскости L_x . Отклонение положительно, если точка x и конец вектора \mathbf{n} лежат по одну сторону от плоскости L_x и отрицательно, если эти точки лежат по разные стороны от плоскости L_x . (Рис)

Разность $\varphi(x) - \varphi(x_0)$ в (1.344) допускает представление

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(x_0) &= \partial_{\mu^1}|_{x_0}(\mu^1 - \mu_0^1) + \partial_{\mu^2}|_{x_0}(\mu^2 - \mu_0^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \{ \partial_{\mu^1}^2|_{x_0}(\mu^1 - \mu_0^1)^2 \} + \\ &\quad \partial_{\mu^1, \mu^2}|_{x_0}(\mu^1 - \mu_0^1)(\mu^2 - \mu_0^2) + \\ &\quad \frac{1}{2} \{ \partial_{\mu^2}^2|_{x_0}(\mu^2 - \mu_0^2)^2 \} + \\ &\quad o(\rho^2) \end{aligned} \quad (1.345)$$

где

$$\frac{o(\rho^2)}{\rho^2} \rightarrow 0 \quad (1.346)$$

при

$$\rho = \sqrt{(\mu^1 - \mu_0^1)^2 + (\mu^2 - \mu_0^2)^2} \rightarrow 0. \quad (1.347)$$

Умножим обе части равенства (1.345) скалярно на \mathbf{n}_0 , и обозначим

$$d\mu^1 = \mu^1 - \mu_0^1, \quad d\mu^2 = \mu^2 - \mu_0^2 \quad (1.348)$$

тогда получим, что

$$h = \frac{1}{2} (L_0 (d\mu^1)^2 + 2M_0 d\mu^1 d\mu^2 + N_0 (d\mu^2)^2) + o(\rho^2) \quad (1.349)$$

Отметим, что коэффициенты $L_0 = L(x_0)$, $M_0 = M(x_0)$, $N_0 = N(x_0)$ в формуле (1.349) вычислены в точке x_0 .

Сокращенно можем записать

$$h = \frac{1}{2} \Pi_0 + o(\rho^2), \quad (1.350)$$

где через Π_0 обозначена вторая квадратичная форма поверхности, вычисленная в точке x_0 и $o(\rho^2)/\rho^2 \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

По аналогии с первой квадратичной формой выражение для Π_0 можно обозначить и так

$$L_0 (d\mu^1)^2 + 2M_0 d\mu^1 d\mu^2 + N_0 (d\mu^2)^2 = f_{ij} d\mu^i d\mu^j \quad (1.351)$$

Таким образом, дифференциальная квадратичная форма $f_{ij} d\mu^i d\mu^j$, будучи ограничена на кривую $\varphi(t)$, выражает главную часть отклонения этой кривой от касательной плоскости.

Разделяя обе части равенства (??) на dt^2 приходим к равенству:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = f_{ij} v^i v^j \quad (1.352)$$

Поняк. стр. 88.

Рассмотрим на поверхности \mathbb{V} произвольную регулярную кривую φ , проходящую через точку s в направлении. Пусть

$$\varphi = \varphi(s) = \varphi(\mu^1(s), \mu^2(s)), \quad (1.353)$$

- параметризация кривой φ , где в качестве параметра выбрана длина дуги кривой.

Будем рассматривать вектор

$$\frac{d^2\varphi}{ds^2} = \varphi'' \quad (1.354)$$

Вычислим в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ три вектора:

единичный вектор касательный к кривой - $\tau = \varphi' = \frac{d\varphi}{ds}$,
единичный вектор нормали к поверхности - \mathbf{n} ,
и $\vec{b} = \vec{n} \times \vec{\tau}$.

Тройка векторов $\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b}$ линейно независима. Это позволяет представить вектор (1.354) в виде их линейной комбинации

$$\varphi'' = \alpha \vec{\tau} + \beta \vec{n} + \gamma \vec{b}. \quad (1.355)$$

Так как $(\varphi', \varphi') = 1$ то

$$\alpha(\varphi'', \vec{\tau}) = (\varphi'', \varphi') = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\varphi', \varphi') = 0.$$

Коэффициенты $\beta = (\varphi'', \vec{n})$ и $\gamma = (\varphi'', \vec{b})$ имеют специальные названия:

$k_n = (\varphi'', \vec{n})$ — нормальная кривизна φ .

$k_g = (\varphi'', \vec{b})$ — геодезическая кривизна φ

Если кривизна $k_1 = |\varphi''|$ кривой φ отлична от нуля, то для этой кривой определен единичный вектор главной нормали \vec{v} . При этом $\varphi'' = k_1 \vec{v}$.

Рис.

Отсюда вытекает, что

$$k_n = k_1(\vec{v}, \vec{n}), \quad k_g = k_1(\vec{v}, \vec{n}, \vec{\tau}) \quad (1.356)$$

Обозначим через θ угол между вектором главной нормали \vec{v} кривой φ и единичным вектором нормали \vec{n} к поверхности M . Тогда справедливо равенство

$$k_n = (\varphi'', \vec{n}) = k_1 \cos \theta \quad (1.357)$$

Покажем, что для всех кривых, проходящих по поверхности M через точку $x(\mu^1, \mu^2)$ в заданном направлении (т.е. имеющих одну и ту же касательную), произведение $k_1 \cos \theta$ принимает одно и то же значение.

Про правило дифференцирования сложной функции имеем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{ds^2} &= \partial_{\mu^1}^2 \left(\frac{d\mu^1}{ds} \right)^2 + 2\partial_{\mu^1, \mu^2}^2 \frac{d\mu^1}{ds} \frac{d\mu^2}{ds} + \\ &\partial_{\mu^2}^2 \left(\frac{d\mu^2}{ds} \right)^2 + \partial_{\mu^1} \frac{d^2 \mu^1}{ds^2} + \partial_{\mu^2} \frac{d^2 \mu^2}{ds^2} \end{aligned} \quad (1.358)$$

Умножая обе части этой формулы на единичный вектор нормали \vec{n} скалярно, с учетом равенства (1.357) получим, что

$$\begin{aligned} k_n &= k_1 \cos \theta = \\ L \left(\frac{d\mu^1}{ds} \right)^2 &+ 2M \frac{d\mu^1}{ds} \frac{d\mu^2}{ds} + N \left(\frac{d\mu^2}{ds} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.359)$$

Так как в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ кривой φ

$$ds^2 = E(d\mu^1)^2 + 2F d\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2 \quad (1.360)$$

то из предыдущего равенства вытекает формула

$$\begin{aligned} k_n &= k_1 \cos \theta = \\ \frac{L(d\mu^1)^2 + 2M d\mu^1 d\mu^2 + N(d\mu^2)^2}{\mu} &\times \\ \times E(d\mu^1)^2 + 2F d\mu^1 d\mu^2 + G(d\mu^2)^2 & \end{aligned} \quad (1.361)$$

Подчеркнем, что все функции E, F, G, L, M, N вычислены в точке $x(\mu^1, \mu^2)$.

Выражение в правой части последней формулы зависит только от отношения $d\mu^1$ к $d\mu^2$, т.е. от направления кривой φ в точке $x(\mu^1, \mu^2)$.

Проведем через точку $x(\mu^1, \mu^2)$ плоскость π параллельно вектору нормали $\vec{n}(\mu^1, \mu^2)$ к поверхности и данному направлению v . Кривая φ_n которая получается при пересечении поверхности M с плоскостью π , называется

нормальным сечением поверхности M в точке $x(\mu^1, \mu^2)$ в заданном направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$.

Рис.

Для нормального сечения угол $\theta = 0$ и формула (1.357) принимает следующий вид:

$$k_1 = k_n. \quad (1.362)$$

Полученное равенство означает, что величина k_n равна кривизне нормального сечения поверхности M в направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$.

Проведенные рассуждения дают основание назвать величину k^n нормальной кривизной поверхности M в данной точке $x = (d\mu^1, d\mu^2)$ и в данном направлении $v = (d\mu^1, d\mu^2)$:

$$k^n = k_n(x, v) \quad (1.363)$$

Если направление в точке поверхности задано, то нормальная кривизна k_n в этом направлении $(d\mu^1, d\mu^2)$ может быть вычислена по формуле

$$k^n = \frac{\Pi}{I} \quad (1.364)$$

Как видно из этой формулы, нормальная кривизна поверхности в данной точке зависит от выбора направления на поверхности.

Направление на поверхности называется главным, если нормальная кривизна в этом направлении достигает экстремального значения. *Замечание.* В каждой точке C^2 -регулярной поверхности найдется не менее двух различных главных направлений.

Определение 1.13.2 Экстремальные значения нормальных кривизн в главных направлениях называются *главными кривизнами* поверхности в данной точке.

1.14 Вычисление главных направлений и главных кривизн

. Из формулы (1.364) для главного направления $(d\mu^1 : d\mu^2)$ вытекает тождество:

$$\begin{aligned} (L - kE)(d\mu^2)^2 &+ \\ + 2(M - kF)kd\mu^1 d\mu^2 &+ (N - kG)(d\mu^2)^2 = 0. \end{aligned} \quad (1.365)$$

Продифференцируем это тождество по μ^1 . Учитывая, что производная нормальной кривизны в главном направлении обращается в нуль, получим для главного направления $(d\mu^1 : d\mu^2)$

$$(L - kE)d\mu^1 + (M - kF)d\mu^2 = 0. \quad (1.366)$$

Дифференцируя тождество (1.365) по μ^2 и рассуждая аналогично, получаем

$$(M - kF)d\mu^1 + (N - kG)d\mu^2 = 0. \quad (1.367)$$

Здесь k — главная кривизна в направлении $(d\mu^1 : d\mu^2)$.

Будем рассматривать полученные соотношения (1.366, 1.367) как систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $d\mu^1$ и $d\mu^2$. Эта система имеет ненулевые решения, так как в данной точке регулярной поверхности всегда есть главные направления.

Из этого вытекает следующая задача на собственные значения k :

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kf \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0 \quad (1.368)$$

Вычисляя определитель, получим квадратное уравнение для искомой функции k :

$$k^2(EG - F^2) - k(EN - 2FM + GL) + LN - M^2 = 0 \quad (1.369)$$

Приведенные выше рассуждения позволяют утверждать, что уравнение (1.369) имеет вещественные корни k_1 и k_2 , которые и являются главными кривизнами.

Этим корням на поверхности отвечают два различных главных направления $\mu_1^1 : \mu_1^2$ и $\mu_2^1 : \mu_2^2$, определяемых из систем

$$\begin{aligned} (L - k_l E)d\mu_l^1 + (M - k_l F)\mu_l^2 &= 0 \\ (M - k_l F)d\mu_l^1 + (N - k_l G)\mu_l^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.370)$$

Последнее уравнение можно записать в матричном виде так:

$$k_l g_{ik} v_l = f_{ik} v_l \quad (1.371)$$

где v_l вектор столбец (μ_l^1, μ_l^2) и $l = 1, 2$.

Из курса линейной алгебры известно, что в задаче на собственные значения типа (1.371) собственным числам - главным кривизнам, соответствуют *линейно независимые* собственные векторы - главные направления.

1.15 Экспоненциальное отображение.

Рассмотрим однопараметрическую группу g^t преобразований многообразия M в себя (см. определение.) Эта группа определяет векторное поле фазовой скорости по формуле (3)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x) = v(x) \quad (1.372)$$

По определению вектор это линейный оператор. Поэтому (3) можно переписать так

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g^t x) = Ax \quad (1.373)$$

Где A некоторый линейный оператор $L_x M \rightarrow L_x M$. Действительно, если на M фиксирована система координат то уравнение (3) можно записать так

$$\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t=0} = a_{i,j} x^j, \quad i = 1, \dots, n, \quad a_{i,j} = \left. \frac{\partial x^i}{\partial \mu_j} \right|_{x=0} \quad (1.374)$$

где $a_{i,j}$ матрица оператора $\in L_x M$.

Решением уравнения (1.372) с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ является отображение

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0 = \exp \left(t \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \right) x_0 \quad (1.375)$$

Действительно

$$\frac{d\varphi}{dt} = A e^{tA} x_0 = A \varphi(t) \quad (1.376)$$

Итак φ - решение. Поскольку $e^0 = E$ то $\varphi(0) = x_0$.

Рассмотрим оператор $A : \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \in L_x M$, определим также оператор e^A . Воздействуя e^A на точку x_0 получим точку $\varphi(1) = e^A x_0$.

Отсюда, и из (1.372) видно, что оператор e^A берет некоторый вектор $v \in L_x M$ приложенный в точке x_0 и сопоставляет ему точку $\varphi(t) \in M$.

Рис.

Оператор $e^{t \frac{d}{dt}} = H^t$, где $H^t : M \rightarrow M$ - оператор сдвига на t т.е.

$$(H^t)\varphi(t_0) = \varphi(t_0 + t) \quad (1.377)$$

Пусть $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ - некоторый линейный оператор.

Семейство линейных операторов $e^{tA} : M \rightarrow M$, $t \in \mathbb{R}$, является однопараметрической группой преобразований M .

Действительно, из (1.374) следует, что e^{tA} - линейный оператор. Известно также равенство:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$$

- групповое свойство. К тому же e^{tA} дифференцируемо зависит от t :

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA}$$

- как и положено экспоненте.

Поэтому, можно записать:

$$\varphi(t) = g^t x_0 = e^{tA} x_0 \quad (1.378)$$

Определение 1.15.1 Оператор A называют производящим оператором группы g^t .

Определение 1.15.2 По теореме о единственности решения обыкновенного дифференциального уравнения (1.372), отображение $\varphi(t) = x^i(t)$ задает множество *непересекающихся* интегральных кривых. Эти интегральные кривые заполняют все M (за исключением может быть точек в которых векторное поле v обращается в нуль) так, что через каждую точку x проходит одна и только одна интегральная кривая. Такое заполняющее многообразие множество кривых называется *конгруэнцией*.

При соответствующей параметризации конгруэнция может рассматриваться как многообразие.

Поскольку каждая кривая является одномерным множеством точек, множество кривых, образующих конгруэнцию, имеет размерность $n - 1$.

Оператор сдвига (1.377) можно определить и другим эквивалентным способом.

А именно, функцию $\varphi(t_0 + t) = x^i(t_0 + t)$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки t^0 :

$$\begin{aligned} x^i(t_0 + t) &= x^i(t_0) + t \left(\left. \frac{dx^i}{dt} \right|_{t_0} \right) + \frac{1}{2!} t^2 \left(\left. \frac{d^2 x^i}{dt^2} \right|_{t_0} \right) + \dots \\ &= \left(1 + t \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} t^2 \frac{d^2}{dt^2} \right) x^i|_{t_0} = \\ &= \exp \left[t \frac{d}{dt} \right] x^i|_{t_0}, \end{aligned} \quad (1.379)$$

Здесь использовано разложение функции e^A , $A \in \mathbb{R}$ в ряд Тейлора:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots$$

$$e^A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(E + \frac{A}{n} \right)^n \quad (1.380)$$

где E означает единицу.

Замечание. Оператор $A = \frac{d}{dt}$ представляет собой бесконечно малое движение вдоль интегральной кривой, а его экспонента - оператор сдвига H^t дает конечное движение.

Геодезические на поверхности.

Определение 1.15.3 Геодезической линией на поверхности называется кривая, геодезическая кривизна которой равна нулю.

Это определение выделяет класс "прямейших" линий на поверхности. Действительно, если поверхность дана, то одна и та же нормальная кривизна навязывается всякой кривой проходящей через данную точку по данному направлению, и избавиться от этой кривизны мы не можем. Напротив, геодезическая кривизна зависит от формы кривой на поверхности, и для определенного класса этих кривых можно заставить геодезическую кривизну обратиться в нуль. Итак, для того чтобы линия на поверхности была геодезической, необходимо и достаточно, или чтобы ее главная нормаль во всех точках совпадала с нормалью к поверхности

1.16 Группы и алгебры Ли.

1.16.1 Скобка Ли.

Рассмотрим два производящих оператора $A = \frac{d}{dt}$ и $B = \frac{d}{ds}$ двух групп g^t и σ^s соответственно.

Операторы A и B вообще говоря матричные, а матрицы, как известно из курса элементарной алгебры в общем не перестановочны (за исключением частных случаев).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \frac{d}{dt} &= \partial_{\mu^i} \xi^i \partial_{\mu^j} \zeta^j - \partial_{\mu^j} \zeta^j \partial_{\mu^i} \xi^i = \\ &= \partial_{\mu^i} \partial_{\mu^j} \xi^i \zeta^j - \partial_{\mu^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial \mu^j} \zeta^j - \partial_{\mu^j} \partial_{\mu^i} \zeta^j \xi^i + \partial_{\mu^j} \frac{\partial \zeta^j}{\partial \mu^i} \xi^i = \\ &= (\partial_{\mu^i} \partial_{\mu^j} - \partial_{\mu^j} \partial_{\mu^i}) \xi^i \zeta^j + \partial_{\mu^j} \frac{\partial \zeta^j}{\partial \mu^i} \xi^i - \partial_{\mu^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial \mu^j} \zeta^j = \\ &= \partial_{\mu^j} \left(\frac{\partial \zeta^j}{\partial \mu^i} \xi^i - \frac{\partial \xi^i}{\partial \mu^j} \zeta^j \right) \end{aligned} \quad (1.381)$$

Выражение $(\partial_{\mu^i} \partial_{\mu^j} - \partial_{\mu^j} \partial_{\mu^i})$ равно нулю. Это следствие того, что при движении (дифференцировании) вдоль одной координатной - μ^1 , вторая координата - μ^2 , остается постоянной, по определению. Поэтому говорят, что базисные векторные поля перестановочны (коммутируют).

Очевидно, результатом операции (1.381) является новое векторное поле, и как обычно, обозначение ∂_{μ^j} указывает на то, что система координат не фиксирована. Если мы хотим поучить результат явно, нужно фиксировать на многообразии некоторую систему координат, задаваемую отображением φ , или как еще говорят подействовать полученным оператором на функцию φ . Напомним, что в соответствии со сказанным в параграфе ... векторы, являются линейными операторами действующими на функции.

Для введенной операции имеется обозначение

$$\left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{ds} \right] = \frac{d}{dt} \frac{d}{ds} - \frac{d}{ds} \frac{d}{dt}, \quad (1.382)$$

и определение:

Определение 1.16.1 Операция (1.382) называется *скобкой Ли* векторных полей $\partial_{\mu^i} \xi^i$ и $\partial_{\mu^j} \zeta^j$. Или как еще говорят *коммутатором* операторов A и B .

Замечание. Тут мы рассматриваем уже некую область многообразия, а не одну отдельную точку. Это новое векторное поле (1.381) определяется *производными* от компонент векторов, а не только значениями в данной точке.

Определение 1.16.2 Алгеброй Ли векторных полей в области U многообразия M называется всякая совокупность A векторных полей на U , являющаяся векторным пространством относительно сложения и замкнутая относительно операции коммутирования.

Первое условие означает что, любая линейная комбинация с постоянными коэффициентами полей из A снова есть поле из A . Второе условие означает что, скобка Ли двух полей из A есть снова поле из A .

Замечание. Совокупность всех векторных полей класса C^∞ на U является алгеброй Ли. Если выделенная по той или иной причине меньшая совокупность векторных полей тоже образует алгебру Ли, то такие совокупности

тесно связаны со свойствами симметрии многообразия и с соответствующими группами симметрии, которые обычно являются группами Ли.

1.16.2 Геометрическая интерпретация скобки Ли.

Рассмотрим декартову систему координат при $n = 2$.

Рис. (а), (б)

При построении в такой системе координат точки, мы интуитивно предполагаем что оси координат неподвижны в процессе отложения отрезков по осям координат. Однако это не всегда так.

Сначала построим точку при неподвижных осях координат. Строим...

Теперь рассмотрим случай когда ось μ^2 перемещается в процессе ведения кончиком карандаша по оси μ^1 , и обратно, при движении вдоль μ^2 , ось μ^1 тоже перемещается. Строим...

Рассмотрим теперь произвольные криволинейные системы координат.

В параграфе (...) было показано, что с каждым векторным полем однозначно определяет конгруэнцию, и обратное тоже верно.

Рассмотрим два базисных векторных поля, и соответствующие им конгруэнции.

Рис.

Интегральные линии μ^1 и μ^2 полей являются координатными линиями на M . По определению μ^2 постоянно вдоль μ^1 . Другими словами μ^2 не меняется при движении вдоль μ^1 .

Сдвигами нарисуем квадрат.

Рассмотрим теперь два произвольных поля (линейные комбинации базисных векторных полей) на . Теперь при движении вдоль μ^1 μ^2 не остается постоянной. Рис.

Строим...

Покажем, что вектор, идущий из A в B , есть $\varepsilon^2 [\partial_{\mu^i} \xi^i, \partial_{\mu^j} \zeta^j]$ с точностью до членов более высокого порядка по ε .

Будем использовать для этого экспоненту производящего оператора, т.е. оператор сдвига $H^t : L_x M \rightarrow L_x M$. Используя (55 пар. 2,6) запишем:

$$x^i(R) = \exp \left[\varepsilon \frac{d}{dt} \right] x^i|_P, \quad (1.383)$$

$$x^i(A) = \exp \left[\varepsilon \frac{d}{ds} \right] \exp \left[\varepsilon \frac{d}{dt} \right] x^i|_P.$$

Аналогичный путь, идущий в точку из точки , дает

$$x^i(B) = \exp \left[\varepsilon \frac{d}{dt} \right] \exp \left[\varepsilon \frac{d}{ds} \right] x^i|_P, \quad (1.384)$$

Поэтому разность координат точек A и B равна

$$x^i(B) - x^i(A) = \left[e^{\varepsilon \frac{d}{dt}}, e^{\varepsilon \frac{d}{ds}} \right] x^i|_P. \quad (1.385)$$

Справа стоит в точности коммутатор операторов сдвига H . Переходя к разложениям Тейлора, получаем

$$\begin{aligned} & \left[e^{\varepsilon \frac{d}{dt}}, e^{\varepsilon \frac{d}{ds}} \right] = \\ & \left[1 + \varepsilon \frac{d}{dt} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2} + \delta(\varepsilon^3), \right. \\ & \left. 1 + \varepsilon \frac{d}{ds} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{d^2}{ds^2} + \delta(\varepsilon^3) \right] \\ & = \varepsilon^2 \left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{ds} \right] + \delta(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (1.386)$$

т.е.

$$x^i(B) - x^i(A) = \varepsilon^2 \left[\frac{d}{dt}, \frac{d}{ds} \right] x^i|_P \quad (1.387)$$

Это i -я компонента скобки Ли: равенство (1.387) подтверждает справедливость нашей геометрической интерпретации скобки Ли.

1.16.3 Производная Ли.

Напомним, что без введения никаких дополнительных структур на M мы не можем сравнивать векторы из различных касательных пространств, т.е. не можем определить параллельный перенос векторов, не можем определить расстояние между точками, а следовательно и углы.

Кнгруэнция позволяет определить расстояние между точками как разность значений параметра в этих точках, но только если точки лежат на одной интегральной кривой. В более общем случае необходима метрика.

Конгруэнция также дает возможность ввести понятие параллельности векторов приложенных в точках лежащих на одной интегральной кривой, в более общем случае необходимо "снабдить" наше многообразие дополнительными структурами - определить *расслоенное пространство*, в ввести *связность* на этом расслоении. Эти структуры будут определены далее.

Имея в распоряжении интегральные кривые векторного поля, можно определить производную векторного поля по параметру - как предел разности между векторами в различных точках, поделенной на расстояние между ними:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f^*(t_0) - f(t_0)}{\Delta t} = \\ & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \left(\frac{df}{dt} \right)_{t_0}. \end{aligned} \quad (1.388)$$

- здесь значение скалярного поля f в точке $t_0 + \Delta t$ равно $f(t_0 + \Delta t)$. В результате переноса этого значения обратно в точку t_0 мы получили новое (ли-тянутое) поле f^* , удовлетворяющее соотношению $\frac{df^*}{dt} = 0$. Очевидно его значение в точке t_0 тоже самое, что и в точке $t_0 + \Delta t$: $f^*(t_0) = f(t_0 + \Delta t)$.

Оператор взятия производной Ли обозначается \mathcal{L}_v - где v - векторное поле порождающее отображение переноса (в нашем случае поле $\frac{d}{dt}$).

Мы доказали, что для функций

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} = \bar{V}(f) = \frac{df}{dt} \quad (1.389)$$

- это выражение также называется производной функции f по направлению векторного поля \bar{V}

Определим теперь производную векторного поля \bar{U} по направлению векторного поля \bar{V} .

Поскольку вектор определяется своим действием на функции, мы используем в дальнейших рассуждениях произвольную функцию f . В точке t_0 поле \bar{U} дает производную $\left(\frac{df}{ds} \right)_{t_0}$, а в точке $t + \Delta t$ - производную $\left(\frac{df}{ds} \right)_{t_0} + \Delta t$. Перенос $\bar{U}(t_0 + \Delta t)$ обратно в точку t_0 мы получаем новое, ли-тянутое поле $\bar{U}^* = \frac{d}{ds^*}$, удовлетворяющее соотношениям $[\bar{U}^*, \bar{V}] = 0$ и $\bar{U}^*(t_0 + \Delta t) = \bar{U}(t_0 + \Delta t)$. Из обращения коммутатора в нуль следует, что всюду

$$\frac{d}{dt} \frac{d}{ds^*} f = \frac{d}{ds^*} \frac{d}{dt} f \quad (1.390)$$

Поэтому (для аналитических векторных полей)

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{ds^*} f \right)_{t_0} = \\ & \left(\frac{d}{ds^*} f \right)_{t_0 + \Delta t} - \Delta t \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds^*} f \right) \right)_{t_0} + \delta(\Delta t^2) \\ & = \left(\frac{d}{ds} f \right)_{t_0 + \Delta t} - \Delta t \left(\frac{d}{ds^*} \left(\frac{d}{dt} f \right) \right)_{t_0} + \delta(\Delta t^2) \\ & = \left(\frac{d}{ds} f \right)_{t_0} \\ & + \Delta t \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{d}{ds} f \right) \right)_{t_0} - \Delta t \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{d}{dt} f \right) \right)_{t_0} + \delta(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (1.391)$$

Определим производную Ли $\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U}$ как векторное поле, действие которого на f задается соотношением

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U}](f) \\ & = \lim_{\Delta t} \left[\frac{\bar{U}^*(t_0) - \bar{U}(t_0)}{\Delta t} \right] (f) \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\left(\frac{d}{ds^*} f \right)_{t_0} - \left(\frac{d}{ds} f \right)_{t_0} \right] / \Delta t \\ & = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{d}{dt} \frac{d}{ds} f - \frac{d}{ds^*} \frac{d}{dt} f \right) \end{aligned} \quad (1.392)$$

Ясно, что разность между s^* и s - первого порядка по Δt ; отсюда следует, что для получения предела последнего выражения нужно просто заменить s^* на s . Поскольку это равенство верно для всех f , мы имеем

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} = \frac{d}{dt} \bar{U} - \frac{d}{ds} \bar{V} = [\bar{V}, \bar{U}] \quad (1.393)$$

Этот результат также является совершенно естественным. Действительно согласно определению производной Ли вдоль \bar{V} , векторное поле имеет нулевую производную Ли, если оно ли-тянуто, т.е. если оно коммутирует с \bar{V} . Поэтому можно было бы с самого начала ожидать, что производная Ли одного векторного поля вдоль другого совпадает с их коммутатором. В силу антисимметрии скобки Ли мы получаем

$$\mathcal{L}_{\bar{V}} \bar{U} = -\mathcal{L}_{\bar{U}} \bar{V}. \quad (1.394)$$

- подчеркнем, что эти преобразования выполняются в одной карте.

Определим теперь, особым способом, вторую карту $x^{\alpha'}$, которая также покрывает обе окрестности R и S . Эта карта индуцирована активным точечным преобразованием в следующем смысле: для каждой преобразованной точки η , ее новые координаты $\eta^{\alpha'}$, по определению равны координатам ξ^{α} начальной точки ξ :

$$\eta^{\alpha'} := \delta_{\alpha'}^{\alpha} \xi^{\alpha} = \delta_{\alpha'}^{\alpha} \phi^{\alpha}(\eta^{\beta})$$

$$\xi^{\alpha'} = \delta_{\alpha'}^{\alpha} \phi^{\alpha}(\xi^{\beta}).$$

Естественно, мы можем обратить эти соотношения:

$$\eta^{\beta} = f^{\beta}(\eta^{\alpha'})$$

$$\xi^{\beta} = f^{\beta}(\xi^{\alpha'}).$$

Перетягивание координатной системы x^{α} может быть интерпретировано геометрически следующим способом.

Пусть окрестность заполнена желатином, и пусть координатные линии x^{α} выделены красным. Тогда если материальная точка желатина претерпит тарсформацию

$$\eta^{\alpha} = f^{\alpha}(\xi^{\beta}), \det \left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \xi^{\beta}} \right) \neq 0,$$

красные линии в ее новой позиции из координатной сетки перенесенной системы $x^{\alpha'}$.

Пусть теперь мы имеем произвольное поле $\Psi^{\Lambda}(\xi^{\beta})$ определенное на R , и мы хотим сопоставить с этим объектом соответствующий перетянутый объект (продолжение), обозначаемое $\Psi_{*}^{\Lambda}(\eta^{\beta})$, на новой окрестности, при помощи активного преобразования.

Более того, будет определено что, снова, новые компоненты перетянутого объекта, в новой точке - $\Psi_{*}^{\Lambda'}(\eta^{\beta'})$, равны старым компонентам первоначального объекта, в первоначальной точке, $\Psi^{\Lambda}(\xi^{\beta})$:

$$\Psi_{*}^{\Lambda'}(\eta^{\beta'}) := \delta_{\Lambda'}^{\Lambda} \Psi^{\Lambda}(\xi^{\beta}).$$

По Схоутену, "перетягивание геометрических объектов может быть интерпретировано геометрически. Каждый геометрический объект может быть представлен некоторой фигурой, или фигурами на многообразии, например ковариантное векторное поле в точке - стрелкой бесконечно малой длины.

Пусть точки этой фигуры помечены голубым в заполненной желатином окрестности. Тогда, если желатин деформируется, деформированные фигуры представят перетянутый объект, или как еще говорят его продолжение.

Сейчас ограничимся обсуждением бесконечно малыми движениями сгенерированными контравариантным векторным полем $v^{\alpha}(\xi^{\beta})$, таким что

$$\eta^{\alpha} = f^{\alpha}(\xi^{\beta}) = \xi^{\alpha} + v^{\alpha}(\xi^{\beta})\epsilon, |\epsilon| \ll 1.$$

1.16.4 Определение кристаллической решетки.

В параграфе (...) мы определили условия для изометричности отображения u :

$$\frac{\partial \mu^{k'}}{\partial \mu^i}(p) \frac{\partial \mu^{l'}}{\partial \mu^j}(p) g_{kl}(u(p)) = g_{ij}(p). \quad (1.397)$$

Если пространство Евклидово то

$$\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p) \delta_{kl} = \delta_{ij}. \quad (1.398)$$

где $x^{k'} = x^k \circ u$.

Очевидно производная по x^m от (??) будет равна нулю: (зачем брать производную от метрического тензора мы подробнее рассмотрим в параграфе (...))

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^m} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p) \delta_{kl} &= \frac{\partial}{\partial x^m} \delta_{ij} \Leftrightarrow \\ \left(\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^m \partial x^i}(p) \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j}(p) + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}(p) \frac{\partial^2 x^{l'}}{\partial x^m \partial x^j}(p) \right) \delta_{kl} &= 0 \end{aligned} \quad (1.399)$$

Циклическая перестановка индексов i, j, m дает:

$$\left(\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^i \partial u^m}(p) \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p) + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^m}(p) \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^i \partial u^j}(p) \right) \delta_{kl} = 0 \quad (1.400)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^j \partial u^i}(p) \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p) + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^i}(p) \frac{\partial^2 u^{i'}}{\partial u^j \partial u^m}(p) \right) \delta_{kl} = 0 \quad (1.401)$$

Складывая (1.400) с (1.399) и вычитая (1.401) найдем:

$$\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^m \partial u^i}(p) \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^j}(p) \delta_{kl} = 0. \quad (1.402)$$

умножая последнее выражение на $\frac{\partial u^j}{\partial u^{r'}}$ и суммируя по j получим:

$$\frac{\partial^2 u^{r'}}{\partial u^i \partial u^m}(p) = 0. \quad (1.403)$$

Это выражение верно для любых $1 \leq i, m, r \leq n$ и для любых p . Интегрирование дает:

$$f_i^r \doteq \frac{\partial u^{r'}}{\partial u^i} = \text{constant}; \quad (1.404)$$

После второго интегрирования, окончательно получим:

$$u^r \circ \phi = u^{r'} = f_i^r u^i + s^r, \quad (1.405)$$

где s^r является константой и f_i^r является компонентой (r, i) постоянной матрицы F .

Уравнение (1.398) может быть записано в матричном виде:

$${}^t \mathbf{F} \mathbf{F} = \mathbf{I}_n, \quad (1.406)$$

Отсюда видно, что \mathbf{F} является ортогональной матрицей.

В другой координатной системе $x = (x^1; \dots; x^n)$, определенной преобразованием $x = \mathbf{B}u$, $\mathbf{B} \in GL_n(\mathbb{R})$, матричное уравнение (1.398) запишется:

$${}^t \mathbf{F} \mathbf{G} \mathbf{F} = \mathbf{G}, \quad (1.407)$$

где \mathbf{G} матрица представляющая метрический тензор в координатной системе x ; \mathbf{F} все еще является постоянной матрицей с определителем ± 1 , но уже не является ортогональной.

Уравнение (1.405) в матричном виде запишется:

$$u' = \mathbf{F}u + s, \quad (1.408)$$

где $s \in \mathbb{R}^n$ является константой. \mathbf{F} и s называются соответственно *матричной частью* и *трансляционной частью* изометрии. Множество всех Евклидовых изометрий называется Евклидовой группой изометрии.

Соотношение (1.408) часто записывается в развернутом виде, где матричная и трансляционная части объединяются в одну матрицу большего размера:

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ \vdots \\ u^{n'} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 & s^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_n^n & s^n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.409)$$

Такое представление является практичным, но имеет тот недостаток, что вектор имеет дополнительную компоненту, что не имеет физического смысла. Другой способ совместного представления трансляционной и матричной частей, без дополнительного измерения, состоит в том, что используется техника дифференцирования; уравнение (1.405) может быть записано в виде:

$$u^{i'} = f_j^i u^j + s^i = (f_j^i u^j + s^i \partial_i u^j) = (f_j^i + s^i \partial_i) u^j. \quad (1.410)$$

или в матричной записи:

$$\begin{pmatrix} u^{1'} \\ \vdots \\ u^{n'} \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^n & \cdots & f_n^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s^1 \partial_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & s^n \partial_n \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^n \end{pmatrix} \quad (1.411)$$

Таким образом изометричные преобразования Евклидова многообразия можно записать в виде:

$$u' = \bar{\mathbf{F}} u, \quad (1.412)$$

где

$$\bar{\mathbf{F}} \doteq \mathbf{F} + \mathbf{S}. \quad (1.413)$$

В случае, когда $\mathbf{F} = I_n$, изометрия соответствует чистой трансляции и можно записать $\bar{\mathbf{S}} \doteq I_n + \mathbf{S}$. Множество чистых трансляций обозначается $\text{Trans}(\mathbb{R}^n)$.

Однако, помимо структуры группы это множество наделено также структурой многообразия. Действительно, с помощью тривиальной параметризации:

$$(s^1, \dots, s^n) \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 + s^1 \partial_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 + s^n \partial_n \end{pmatrix}, \quad (1.414)$$

может быть установлено соответствие многообразию \mathbb{R}^n . В этом случае трансляционная часть группы изометрии является группой Ли.

С каждой группой Ли связана алгебра Ли, которая соответствует касательному пространству к группе в начале координатной системы.

Преимущество теории Ли в том, что свойства групп могут быть получены изучая соответствующие алгебры, что эквивалентно изучению касательных пространств к группам Ли. В случае группы трансляции, ее Ли алгебра получается вычислением производной матрицы $\bar{\mathbf{S}}$ по s^i в точке

$s = 0$ (т.е., что в $s = (s^1; \dots; s^n) = (0; \dots; 0)$):

$$\left. \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial s^i} \right| \doteq W_i, \quad (1.415)$$

где

$$W_i = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \partial_i & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.416)$$

В соответствии с теорией многообразий W_i это касательный вектор группы $\text{Trans}(\mathbb{R}^n)$ в точке $s = 0$, а набор матриц $\{W_i | 1 \leq i \leq n\}$ составляет базис касательного пространства группы $\text{Trans}(\mathbb{R}^n)$ в $s = 0$.

Этот объект, который имеет структуру касательного пространства, обозначается $\text{trans}(\mathbb{R}^n)$ а базисные векторы W_1, \dots, W_n называются каноническим базисом $\text{trans}(\mathbb{R}^n)$. Любой вектор $\text{trans}(\mathbb{R}^n)$ может быть записан как линейная комбинация этих канонических базисных векторов.

Можно представлять алгебру Ли \mathfrak{g} группы Ли \mathcal{G} как касательное пространство, так как они изоморфны. Само название "алгебра Ли" указывает, что касательное пространство в точке, в данном случае образует алгебру. Действительно, наряду с операцией сложения, на векторном пространстве определена билинейная функция $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, называемая скобкой Ли, которая кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби. Если матрицы имеют обратные, то скобка Ли является просто коммутатором двух матриц:

$$[A, B] = AB - BA, \quad GL_n(\mathbb{R}), \quad \forall A, B \in GL_n(\mathbb{R}). \quad (1.417)$$

В частном случае трансляций, $\text{trans}(\mathbb{R})$ замкнута относительно коммутатора (т.е. взятие коммутатора в trans не выводит из trans ; действительно, для любых двух матриц W_i и W_j , $1 \leq i, j \leq n$, представляющих векторы канонического базиса $\text{trans}(\mathbb{R}^n)$, имеем:

$$= 0_n \in \text{trans}(\mathbb{R}^n). \quad (1.418)$$

$\text{trans}(\mathbb{R}^n)$ в этом случае является алгеброй.

Соотношение между алгеброй Ли и соответствующей ей группой Ли устанавливается экспоненциальным соотношением: каждый элемент группы может быть записан как экспонента элемента из соответствующей алгебры Ли. В случае инвертируемых матриц, экспоненциальное отображение обычно дается разложением экспоненциальной функции в степенной ряд.

В случае группы трансляции, и когда векторы выражаются в виде $s^i W_i$, где W_i канонический вектор принадлежащий $\text{trans}(\mathbb{R}^n)$ и $s^i \in \mathbb{R}$:

$$\exp(s^i W_i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s^i W_i)^k = \quad (1.419)$$

$$I_n + s^i W_i + \frac{1}{2} (s^i W_i)^2 + \frac{1}{3!} (s^i W_i)^3 + \dots,$$

так что:

$$\exp(s^i W_i) = \begin{pmatrix} 0 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ & & a_i^i \\ & & & \ddots \\ \emptyset & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (1.420)$$

где

$$a_i^i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (s^i \partial_i)^k \quad (1.421)$$

Применяя $\exp(W_i)$ в точке с координатами $u = (u^1; \dots; u^n)$ в n -размерном евклидовом многообразии, получим:

$$\begin{aligned} \exp(s^i W_i) u &= \\ &= I_n u + s^i W_i u + \frac{1}{2} (s^i W_i)^2 u + \frac{1}{3!} (s^i W_i)^3 u + \dots = \\ &= u + s^{(i)}, \end{aligned} \quad (1.422)$$

где $s^{(i)} = (0; \dots; s^i; \dots; 0)$, и заметим, что только первые два члена разложения дают вклад в выражение.

Для произвольного вектора $V \in \text{trans}(\mathbb{R}^n)$, где:

$$V = \sum_{i=1}^n s^i W_i, \quad (1.423)$$

где s^1, \dots, s^n являются компонентами V в каноническом базисе, имеем:

$$\exp\left\{\sum_{i=1}^n s^i W_i\right\} = \prod_{i=1}^n \exp(s^i W_i), \quad (1.424)$$

Глава 2

Элементы геометрии Римана - Картана.

2.1 Расслоенные пространства.

2.1.1 Расслоения общего вида.

Мы видели, что локально - в касательном пространстве, каждое многообразие устроено как евклидово пространство. Учитывая же отклонение соседних точек от касательной плоскости, т.е. кривизну многообразия некоторой области, на основе второй квадратичной формы и экспоненциального отображения в мы определили поправки к градиентной деформации в направлении главных кривизн, т.е. рассмотрели деформацию нелокально. Было также показано, что для существования производной Ли векторное поле не обязано существовать на всем многообразии, достаточно лишь его гладкости в некоторой области. Если же удастся найти интегральные кривые векторного поля то методом переноса Ли мы можем сравнивать векторы приложенные в любых точках на интегральной кривой - это уже глобальный, безкоординатный анализ. Безкоординатный потому, что используется определение векторов не зависящее от координат. Но так как группа Ли является также и многообразием групповая операция может быть записана в координтной форме, и следовательно производная Ли может быть вычислена явно.

Возможен и другой подход глобальному анализу многообразий. С целью установления параллельности векторов возможно определение их переноса не только вдоль интегральной кривой, но так же и вдоль произвольного пути на многообразии. Это существенно отличает эти два подхода к определению, все же, единых геометрических объектов.

Определим основной объект на котором разворачивается геометрия Римана-Картана - расслоение.

Известно, что прямое произведение двух дифференцируемых многообразий также является дифференцируемым многообразием с дифференцируемой структурой, которая определяется дифференцируемыми структурами сомножителей.

Обобщим понятие прямого произведения.

Определение 2.1.1 Расслоением называется четветка $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{F})$, где $\mathbb{E}, \mathbb{M}, \mathbb{F}$ - многообразия а $\pi : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$ - дифференцируемое отображение, которые удовлетворяют следующим условиям:

- 1) каждая точка $x \in \mathbb{M}$ имеет окрестность \mathbb{U}_x такую, что существует диффеоморфизм $\chi : \pi^{-1}(\mathbb{U}_x) \rightarrow \mathbb{U}_x \times \mathbb{F}$ (локальная тривиальность);
- 2) композиция отображений $\pi \circ \chi^{-1} : \mathbb{U}_x \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{M}$ есть проекция на первый сомножитель $(y, v) \mapsto y$ для всех $y \in \mathbb{U}_x$ и $v \in \mathbb{F}$.

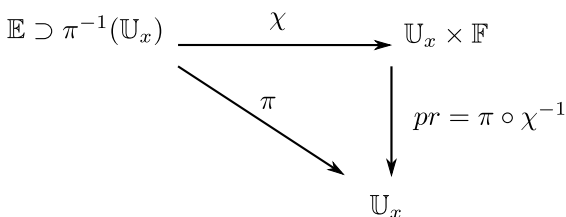


Рис. 2.1: Расслоения общего вида.

Многообразие \mathbb{E} называется пространством расслоения, \mathbb{M} - базой расслоения, \mathbb{F} типичным слоем и π - проекцией, χ - сечением.

Множество сечений расслоения \mathbb{E} обозначим $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$.

Поскольку отображение χ в условии 1) является диффеоморфизмом, то

$$\dim \mathbb{E} = \dim \mathbb{M} + \dim \mathbb{F}$$

Расслоение также называется расслоенным пространством и обозначается $\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{M}$, или, для краткости просто \mathbb{E} .

Считается, что проекция π является дифференцируемым отображением на базу \mathbb{M} , т.е. сюръективным.

Поскольку отображение π непрерывно, то согласно теореме (...) прообраз $\pi^{-1}(x)$ является замкнутым подмногообразием в \mathbb{E} , которое называется *слоем* над точкой базы $x \in \mathbb{M}$.

Замечание. Атласы заданные на базе и типичном слое, определяют атлас на пространстве расслоения в силу локальной тривиальности расслоения. Тем самым первое условие в определении расслоения является достаточным для того, чтобы дифференцируемые структуры на трех многообразиях \mathbb{E} , \mathbb{M} и \mathbb{F} были согласованы между собой. Второе требование является условием коммутативности диаграммы (рис.)

В приведенной диаграмме окрестность \mathbb{U}_x нельзя заменить на все многообразие \mathbb{M} , так как отображение χ определено локально.

Определение 2.1.2 Дифференцируемое отображение $\mathbb{M} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$ называется *сечением* или *глобальным сечением* расслоения $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$, если $\pi \circ \sigma = \text{id}(\mathbb{M})$. Аналогичным образом, дифференцируемое отображение $\mathbb{U} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{E}$, где \mathbb{U} - открытое подмножество базы \mathbb{M} , называется *локальным сечением* расслоения $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} \mathbb{M}$, если $\pi \circ \sigma = \sqsupset(\mathbb{U})$. Где id обозначает тождественное отображение.

Локальные сечения существуют у любого расслоения. Поэтому мы и говорим что каждое многообразие локально устроено как евклидово пространство. Евклидово пространство было нами определено как прямое произведение (т.е. тривиальное расслоение) числовых прямых. Но глобальная структура расслоения может быть нетривиальной, глобальные сечения расслоений существуют далеко не всегда.

Рассмотрим два расслоения над $\mathbb{M} = \mathbb{S}^1$ с одним и тем же слоем \mathbb{F} , являющимся отрезком $[a, b]$ (точка a отождествляется с a' , $b - b'$).

Рис.

Это обычное кольцо (ограниченный цилиндр) и лента Мебиуса (кольцо перекрученное один раз). Их локальные структуры одинаковы, в то время как глобальные явно различаются. Т.е. *задание базы не определяет расслоение однозначно.*

Требуется указать еще, каким образом различные части расслоения (порции расслоения над различными локальными окрестностями) "склеиваются" между собой.

Примером расслоения может служить множество \mathbb{P} , на котором задано отношение эквивалентности \sim . (см(...)). В этом случае слой образован точками, эквивалентными друг другу, базой является фактор-множество \mathbb{P}/\sim , а точками базы - классы эквивалентности.

2.1.2 Векторное расслоение.

Как было выяснено в (пар(...)), в каждой точке многообразия M существует набор касательных векторов, образующих линейное пространство $L_x(M)$.

Определение 2.1.3 Дифференцируемое многообразие $\mathbb{E}(M, \pi, V)$ называется *векторным расслоением* с базой M , проекцией π и типичным слоем V , где M - дифференцируемое многообразие и $V \simeq \mathbb{R}^n$ - векторное пространство.

Проекция π - является гладким сюръективным отображением $\mathbb{E} \xrightarrow{\pi} M$.

При этом требуется, чтобы для любого атласа $M = \cup_k U_k$ существовали отображения χ_k , удовлетворяющие следующим условиям:

1) Отображение χ_k есть диффеоморфизм $\chi_k : \pi^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times V$ такой, что $\pi \circ \chi_k^{-1}(x, v) = x$ для всех точек $x \in U$ и $v \in V$.

2) Сужение отображения χ_k на каждый слой $\chi_{k,x} : \pi^{-1}(x) \rightarrow V$ есть гомоморфизм векторных пространств для всех $x \in U^k$. При этом, если $x \in U_k \cap U_m$, то отображение

$$f_{km}(x) = \chi_{m,x} \chi_{k,x}^{-1} : V \rightarrow V,$$

является автоморфизмом, т.е. $f_{km}(x) \in GL(n, \mathbb{R})$.

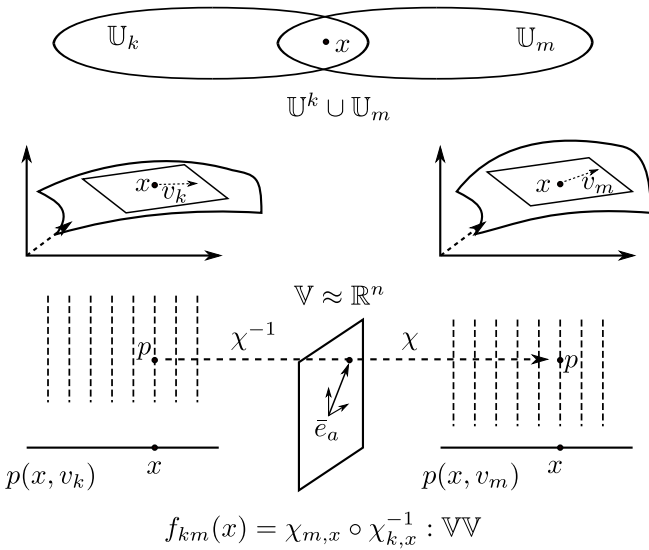


Рис. 2.2: Векторное расслоение.

Другими словами, это значит что слой векторного расслоения $\pi^{-1}(x)$ в каждой точке $x \in M$, сам является векторным пространством, гомоморфным типичному слою, а в областях пересечения карт допускаются автоморфизмы, то есть линейные отображения V на себя. С учетом свойства 1) получаем, что каждый слой изоморфен векторному пространству, $\pi^{-1}(x) \simeq V$. В условии 2) гомоморфизм можно заменить на гомеоморфизм и не требовать изначально наличия структуры векторного пространства в слое $\pi^{-1}(x)$. Гомеоморфизма достаточно для переноса структуры векторного пространства из V на слой $\pi^{-1}(x)$, при этом каждый слой будет, конечно, изоморфен V .

3) Если $U_k \cap U_m$, то отображение $f_{ij}(x)$ является гладким.

Пусть $p \in \pi^{-1}(x)$ - некоторая точка векторного расслоения \mathbb{E} из слоя над $x \in U_k \cap U_m$. Тогда $\chi_k(p) = (x, v_k)$ и

$\chi_m(p) = (x, v_m)$. Следовательно,

$$p = \chi_k^{-1}(x, v_k) = \chi_m^{-1}(x, v_m).$$

Зафиксируем базис $\hat{e}_a, a = 1, \dots, n$ в векторном пространстве V и разложим по нему векторы $v_k = v_k^a \hat{e}_a$ и $v_m = v_m^a \hat{e}_a$. Тогда из условия 2) следует равенство

$$v_m^a = v_k^b f_{km}^a{}_b,$$

где $f_{km}(x) = \{f_{km}^a{}_b(x)\} \in GL(n, \mathbb{R})$

Это свойство 3), говорит о том, что автоморфизмы задаются матрицей $GL(n, \mathbb{R})$, элементы которой гладко зависят от координат. Поэтому в определении векторного расслоения был выбран атлас вместо окрестности точки $x \in M$ как в определении расслоения общего вида.

Набор отображений $\{f_{km}\}$ называется *функциями перехода*. Отображения χ_k однозначно определяют функции перехода.

Если задано два векторных расслоения с одинаковой базой и функциями перехода, то они диффеоморфны между собой.

При задании расслоения функции перехода должны удовлетворять очевидным, необходимым условиям совместности:

- 1) для $x \in U_k$, $f_{kk} = \text{id}$;
- 2) для $x \in U_k \cup U_m \cup U_n \neq \emptyset$, $f_{km} f_{kn} f_{nm} = \text{id}$.

Если в векторном пространстве V , $\dim V = n$, зафиксирован базис $\{\hat{e}^a\}$, $a = 1, \dots, n$, то его можно отождествить с евклидовым пространством \mathbb{R}^n . После этого топология и дифференцируемая структура евклидова пространства с помощью отображений $\{\chi_i\}$ естественным образом переносятся на расслоение \mathbb{E} , превращая его в многообразие. Фактически, требование дифференцируемости отображений χ_k означает, что дифференцируемая структура на пространстве расслоения \mathbb{E} согласована с дифференцируемой структурой, индуцированной отображениями χ_k .

Если и исследуемый объект является евклидовым пространством \mathbb{R}^n , например плоскостью (рис.), то касательное пространство отождествляется с базой, и имеем евклидово пространство, которое является прямым произведением. В этом случае компоненты f_{km} не зависят от точки на базе $x \in M$ (и являются косинусами углов между векторами старого и нового базисов).

2.1.3 Касательное расслоение.

Векторное расслоение \mathbb{E} называется *касательным расслоением* если в каждом слое V введена структура евклидова пространства \mathbb{R}^n .

Определение 2.1.4 Касательное расслоение $\mathbb{L}(M)$ является векторным расслоением $\mathbb{E}(M, \pi, \mathbb{R}^n)$ с базой M , $\dim M = n$, типичным слоем \mathbb{R}^n и проекцией $\pi : (x, X) \rightarrow x$, где $X \in L_x M$.

Замечание. Для касательного расслоения размерности базы и типичного слоя совпадают.

$$\dim M = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

В касательном пространстве существует естественный способ гладко сопоставить каждому преобразованию координат автоморфизм касательного пространства. А именно, каждому преобразованию координат, соответствует тождественное преобразование касательного пространства, $f_{km} = id(L_x M)$ для всех $x \in \mathbb{U}_k \cap \mathbb{U}_m$. Если в касательном пространстве в точке $x \in \mathbb{M}$ (слое над x) выбран координатный (голономный) базис ∂_α , то при преобразовании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби, а голономный базис касательного пространства - на обратную матрицу Якоби. Поэтому сам вектор остается без изменений. Если вектор касательного пространства рассматривается как набор компонент $\{X^\alpha\}$, считая, что базис векторного пространства фиксирован, то при преобразовании координат компоненты вектора умножаются на матрицу Якоби $\partial_\alpha x^{\alpha'}$ справа. Тогда функциями перехода являются матрицы Якоби. Обе точки зрения на функции перехода допустимы.

2.2 Связность на векторном расслоении.

2.2.1 Координатное определение.

Если мы в декартовой системе координат дифференцируем функцию - получаем снова функцию, дифференцируем векторное поле - получаем снова векторное поле, дифференцируем тензорное поле - получаем снова тензорное поле. Это следствие того, матрицы связывающие f_{km} базисные векторы евклидовых пространств не зависят от точки на базе.

Сечениями векторного расслоения являются тензорные поля (ко-, или контравариантные, или и то и другое) то желательно, что бы при дифференцировании мы получали тензорные поля.

Сечение любого прямого произведения, (каковым является \mathbb{R}^n) можно дифференцировать вдоль любого векторного поля $v(x)$ базы, и в результате мы получим снова сечение.

Рассмотрим случай когда сечением является функция f :
Рис.

$$\partial_v \chi_m = (x, \partial_v f_m) = (x, (\partial_v f_{km} f_k)) \quad (2.1)$$

Рассмотрим выражение

$$\partial_v (f_{km} f_k) = (\partial_v f_{km}) f_k - f_{km} (\partial_v f_k) \quad (2.2)$$

-где $\partial_v f = df(v)$. Знак минус обусловлен ковариантным законом преобразования, и на для дальнейшего чтения это не существенно.

В силу независимости f_{km} от точки на базе первое слагаемое в (2.2) обращается в нуль.

Выражение df есть векторозначная 1-форма вида (df^1, \dots, df^n) ; ее значение на векторном поле v (производная по направлению) - гладкая вектор-функция $((df^1, \dots, df^n))$. А ее график (т.е. сечение $(x, df(v))$) и будет производной $(x, \partial_v f)$ исходного сечения $(x, f(x))$ вдоль v .

Но если расслоение не тривиально, то дифференцирование его сечения, χ , не даст снова сечения, в силу присутствия первого члена в (2.2), который нарушает закон преобразования векторных (тензорных) величин.

Скомпенсировать, появившиеся в следствие криволинейности системы координат, члены $(\partial_v f_{kk'}) f_k$ можно включив в определение производной по направлению векторного поля дополнительный член $\Gamma_{vk} f_k$.

Определение 2.2.1 Ковариантной производной вдоль векторного поля v один раз ковариантного терзора f_k называется выражение:

$$\nabla_v f_k = \partial_v f_k - \Gamma_{vk} f_k \quad (2.3)$$

- где $\Gamma_{k;v}$ - некоторая матрица (здесь суммирование по индексу k не производится).

Если мы хотим записать (2.3) в компонентах, то у коэффициентов Γ_{vk} появится один дополнительный ковариантный индекс. Он появляется в результате разложения формы связности (см. ниже) по базису dx^i , так, что $\Gamma_{ik}^j f_j dx^i$. Тогда

$$\nabla_i f_k = \frac{\partial f_k}{\partial x^i} - \Gamma_{ik}^j f_j. \quad (2.4)$$

- это ковариантная производная. Дифференцирование производится по переменным с индексом i ,

А действие связности, эквивалентно действию дифференциала - отклик компонент тензора f_k на элементарное приращение координаты dx^i .

$$\nabla f_k = df_k - \Gamma_{ik}^j f_j dx^i \quad (2.5)$$

Обычно $\nabla_v T$ - означает производную тензора по направлению, задаваемому вектором v с компонентами v^i , а $\nabla_i T$ - производная по направлению, задаваемому базисным вектором $\frac{\partial}{\partial x^i}$.

Найдем условия которым должна удовлетворять матрица Γ_{vk} (своя для каждой координатной окрестности).

Сначала вспомним, что при преобразовании координат $x^{i'} = x^{i'}(x^1, \dots, x^i)$, векторы преобразуются так:

$$\xi^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \xi^i. \quad (2.6)$$

А ковекторы так:

$$df_i = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} df_{i'} \quad (2.7)$$

Матрицу $\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}$ обозначим $f_{kk'}$.

Распишем определение $\nabla_v f_k$ заменяя i на k .

$$\begin{aligned} \nabla_v f_k &= f_{kk'} \nabla_v f_{k'}^{-1} f_{k'} = \\ f_{kk'} [\partial_v (f_{k'k'}^{-1} f_{k'}) - \Gamma_{vk'} f_{k'k'}^{-1} f_{k'}] &= \\ \partial_v f_k + f_{k'k'} \partial_v f_{k'}^{-1} - f_{k'k'} \Gamma_{vk'} f_{k'k'}^{-1} f_{k'} &= \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как в каждой точке, многообразие, локально устроено одинаково (плоское) то $\partial_v f_{k'} = \partial_v f_k$

Сравнивая теперь (2.8) с (2.3) находим

$$\Gamma_{vk} = f_{kk'} \partial_v f_{k'k'}^{-1} + f_{kk'} \Gamma_{vk'} f_{k'k'}^{-1}. \quad (2.9)$$

Аналогично запишем для вектора

Определение 2.2.2 Ковариантной производной вдоль векторного поля v один раз контравариантного терзора ξ^k называется выражение:

$$\nabla_v \xi^k = \partial_v \xi^k + \Gamma_{vk}^k \xi^k \quad (2.10)$$

- где Γ_v^k - некоторая матрица (здесь суммирование по индексу k не производится).

$$\begin{aligned} \nabla'_v \xi^{k'} &= \mathbf{f}_{kk'} \nabla_v \mathbf{f}_{kk'}^{-1} \xi^k = \\ \mathbf{f}_{kk'} [\partial_v (\mathbf{f}_{kk'}^{-1} \xi^k) + \Gamma_v^k \mathbf{f}_{kk'}^{-1} \xi^k] &= \\ \partial_v \xi^k + \xi^k \mathbf{f}_{kk'} \partial_v \mathbf{f}_{kk'}^{-1} + \xi^k \mathbf{f}_{kk'} \Gamma_v^k \mathbf{f}_{kk'}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сравнивая (2.11) с (2.10) находим

$$\Gamma_v^{k'} = \mathbf{f}_{kk'} \partial_v \mathbf{f}_{kk'}^{-1} + \mathbf{f}_{kk'} \Gamma_v^k \mathbf{f}_{kk'}^{-1}. \quad (2.12)$$

Или в компонентнах

$$\Gamma_{ij}^{k'} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial k'}{\partial k} \Gamma_{ij}^k. \quad (2.13)$$

- эти коэффициенты ведут себя как компоненты тензора только при линейных преобразованиях.

Две связности ∇' и ∇ связанные как выше называются калибровочно эквивалентными.

Матрицы Γ зависят от точки на базе. Поэтому в общем случае они являются матричными функциями. Итак, если удастся найти матричные функции Γ_v^k , удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля v . Тогда мы говорим, что на \mathbb{M} задана связность.

2.2.2 Безкоординатное определение.

Чтобы для каждого векторного поля не записывать каждый раз новую матричную функцию, определим на каждой окрестности U_k , матричную дифференциальную форму (ω_k так, что

$$\Gamma_v^k = \omega_k(v). \quad (2.14)$$

для любых пересекającychся U_k и U_m .

Тогда мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля.

Форма ω_k называется локальной формой связности.

Множество форм ω_k , $k = 1, 2, \dots, m, \dots$ заданных на касательном к M в точке x пространстве образует кокасательное пространство $\mathbb{T}_x^*(\mathbb{M})$. Обозначим его типичный слой $\Lambda_1(\mathbb{M})$.

Объединение всех кокасательных пространств образует кокасательное расслоение $\mathbb{T}^*(M)$.

Выберем в каждом слое кокасательного расслоения базис dx^i , $i = 1, \dots, n$, где n размерность многообразия \mathbb{M} .

И разложим по нему формы ω_k :

$$\omega_k = \sum_i \omega_{ik} dx^i. \quad (2.15)$$

Можно составить тензорное произведение расслоений

$$\mathbb{T}^*(\mathbb{M}) \otimes \mathbb{E} \quad (2.16)$$

Тогда связность ∇ на векторном расслоении $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ можно определить как отображение:

$$\nabla : \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(M) \rightarrow \mathcal{V}_{\mathbb{T}^* \otimes \mathbb{E}}(\mathbb{M}). \quad (2.17)$$

удовлетворяющее условиям

1) для любых сечений $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}(\mathbb{M})}$

$$\nabla(V_1 + V_2) = \nabla V_1 + \nabla V_2; \quad (2.18)$$

2) для произвольного сечения $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}(\mathbb{M})}$ и произвольной функции $f \in C^\infty(\mathbb{M})$

$$\nabla(fV) = df \otimes V + f \nabla V. \quad (2.19)$$

- правило лейбница.

Выберем в каждом слое $\pi^{-1}(x)$, $x \in \mathbb{U} \subset \mathbb{M}$ расслоения \mathbb{E} базис $e_k(x)$, этот базис называется репером.

Тогда сечение векторного расслоения $\mathbb{E}(\mathbb{M}, \pi, \mathbb{V})$ в компонентах будет:

$$V = V^k(x) e_k \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M}). \quad (2.20)$$

По определению, сечение $\nabla V \in \Lambda_1 \otimes \mathbb{V}$ представляет собой 1-форму на \mathbb{M} со значениями в векторном пространстве \mathbb{V} .

Сечение расслоения $\mathbb{T}^*(M) \otimes \mathbb{E}$ в компонентах будет

$$\nabla V = dx^i V_i^k(x) e_k. \quad (2.21)$$

Сечение расслоения $\mathbb{T}^*(M) \otimes \mathbb{E}$ обладает дополнительным ковариантным индексом сравнительно с сечением расслоения \mathbb{E} .

Рассмотрим касательное векторное поле к базе $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Тогда значение 1-формы ∇V на векторном поле X

$$\nabla_X V = \nabla V(X), \quad (2.22)$$

называется *ковариантной производной* векторного поля $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}(\mathbb{M})$ вдоль касательного векторного поля $X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$.

Очевидно, отображение (2.17) для векторов репера:

$$\nabla e_k = \omega_k^j \otimes e_j. \quad (2.23)$$

Раскладывая ω_k^j по базису dx^i , используя формулу (2.15), запишем действие связности на базисные векторы e_k

$$\nabla e_k = dx^i \otimes \omega_{ik}^j e_j \quad (2.24)$$

Определив действие связности на базисные вектора (2.23) запишем явное действие связности на произвольное векторное поле $V^k e_k$:

$$\begin{aligned} \nabla V^k e_k &= \partial_i V^k dx^i \otimes e_k + V^j dx^i \otimes \omega_{ij}^k e_k = \\ &dx^i (\partial_i V^k + V^j \omega_{ij}^k) \otimes e_k. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Выражение в скобках - ковариантная производная. Отсюда видно, что действие связности эквивалентно действию операции взятия дифференциала d .

2.3 Аффинная связность.

Аффинной связностью называется связность на касательном расслоении. Определение связности на векторном расслоении без изменений переносится на касательное расслоение.

Суть дела в том, что на касательном расслоении может действовать не только группа $GL(n, \mathbb{R})$, но и более широкая группа $\tilde{G} = GL(n, \mathbb{R}) \times L(n)$, где $L(n)$ - группа сдвигов \mathbb{R}^n , изоморфная \mathbb{R}^n . Связность в касательном расслоении, где каждый

Рассмотрим способ построения аффинной связности, основанный на свойствах аффинного пространства.

Основной конструкцией геометрии аффинной связности является *параллельное перенесение*.

Подобно тому как образцом для построения риманова пространства \mathbb{V}_n служит евклидово пространство \mathbb{R}^n в криволинейных координатах, так теперь такую же роль будет играть аффинное пространство A_n тоже в криволинейных координатах.

Итак, мы хотим отложить вектор ξ_0 заданный его координатами ξ'_0 в некоторой точке M_0 из другой точки 1 .

Нужно установить как следует изменять ξ'_0 вдоль пути M_0M_1 чтобы они определяли прежний вектор ξ_0 .

Причем мы рассматриваем ход непрерывного изменения координат ξ_i на каждом бесконечно малом участке пути.

В криволинейных координатах простое свойство

$$\xi = \xi^i \bar{e}_i \quad (2.26)$$

разложения векторов по базису теряется, однако в бесконечно малой окрестности в криволинейных координатах это свойство сохраняется.

Смещаясь из точки $M_0(x^i)$ в бесконечно близкую точку $M_1(x^i + \Delta x^i)$ мы находим вектор смещения \vec{u} как приращение радиус вектора x точки $M_0(x^i)$.

$$\vec{u} = \overrightarrow{M_0M_1} = x(x^i + \Delta x^i) - x(x^i). \quad (2.27)$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, заменяем приращение полным дифференциалом и получаем

$$\vec{u} \approx x_1 \Delta x^1 + \dots + x_n \Delta x^n. \quad (2.28)$$

Это значит, что вектор смещения \vec{u} в локальном репере $\{M_0, x_1, \dots, x_n\}$ имеет координаты, равные приблизительно приращениям Δx^i .

Итак, для бесконечно малых смещений из точки M приращения криволинейных координат Δx^i снова выражают координаты вектора смещения \vec{u} , если эти последние вычислять в локальном репере в точке M , пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка.

Пусть путь M_0M_1 задан параметрически уравнениями

$$x^i = x^i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n), t_0 \leq t \leq t_1. \quad (2.29)$$

где $x^i(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции. В каждой точке $M(t)$ этого пути мы откладываем постоянный вектор ξ_0 , координаты которого ξ^i , однако, меняются от точки к точке в виду изменения от точки к точке локального репера.

Таким образом, координаты ξ^i зависят от t :

$$\xi^i = \xi^i(t) \quad (2.30)$$

и мы хотим выяснить, по какому закону будут меняться эти функции хотя бы на бесконечно малом участке пути.

Так как функции $x^i(t)$ - непрерывно дифференцируемы то вдоль пути векторы локального репера $x_i(x^1, \dots, x^n)$, а значит и ξ^i являются непрерывно дифференцируемыми функциями t .

Относя вектор ξ_0 к локальному реперу в точке $M(t)$, пишем:

$$\xi_0 = \xi^i(t) x_i(x^1, \dots, x^n). \quad (2.31)$$

Здесь имеется ввиду, что аргументы x^n сами зависят от t согласно параметрическим уравнениям пути.

Дифференцируя по t почленно и учитывая, что $\xi_0 = \text{const}$ получим:

$$0 = d\xi^i x_i + \xi^i dx_i \quad (2.32)$$

Разложим векторы $d\xi_i$ по векторам локального репера.

По формуле полного дифференциала

$$dx_i(x^1, \dots, x^n) = x_{ij} dx^j \quad (2.33)$$

где

$$x_{ij} = \frac{\partial^2 x(x^1, \dots, x^n)}{\partial x^i \partial x^j} \quad (2.34)$$

Через каждую точку M_0 проходит одна и только одна координатная линия x^1 , именно, если x^2, \dots, x^n закрепить на значениях, которые они имеют в точке M_0 . Частная производная $\frac{\partial x}{\partial x^1}$ дает касательный вектор к координатной линии. Так что через каждую точку проходят n координатных линий с касательными векторами $x_i = \frac{\partial x}{\partial x^i}$. Эти векторы принимаются в качестве аффинного репера $\{M_0, x_1, \dots, x_n\}$. Затем они дифференцируются и получается (2.34).

Векторы x_{ij} , вполне определенные для каждой точки некоторой области \mathbb{U} (а не только вдоль рассматриваемого пути), можно разложить по векторам локального репера x_i в этой точке:

$$x_{ij} = \Gamma_{ij}^k x_k \quad (2.35)$$

Через Γ_{ij}^k обозначены коэффициенты разложения; по k происходит суммирование.

Как видно символы Кристофеля появляются в результате зависимости векторов локального базиса от точки на \mathbb{M} , и описывают скорость изменения локальных базисных векторов.

Если базис постоянен на \mathbb{M} , т.е. $x_i = \frac{\partial x}{\partial x^i} = e_i$, то $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Коэффициенты аффинной связности Γ_{ij}^k называются символами Кристофеля.

Из равенства $x_{ij} = x_{ji}$ следует $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Конечно Γ_{ij}^k зависят от точки M где производится разложение (2.35), так что

$$\Gamma_{ij}^k(M) = \Gamma_{ij}^k(x^1, \dots, x^n). \quad (2.36)$$

Вставляя разложение (2.35) в (2.33), получаем:

$$dx_i = \Gamma_{ij}^k x_k dx^j \quad (2.37)$$

после чего (2.32) принимает вид

$$0 = d\xi^k x_k + \Gamma_{ij}^k x_k \xi^i dx^j. \quad (2.38)$$

В первом члене правой части мы изменили лишь обозначение индекса суммирования на k . Ввиду линейной независимости векторов x_k обращение в нуль их линейной комбинации означает обращение в нуль и всех ее коэффициентов; следовательно,

$$d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j = 0, \quad (2.39)$$

Или, что тоже,

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j. \quad (2.40)$$

Это формула параллельного переноса вектора с координатами ξ^k из точки $M_0(x^i)$ в бесконечно близкую точку $M_1(x^i + dx^i)$.

Следует отметить, что (2.40) выражает не приращения, а дифференциалы координат ξ^k при переходе из M_0 в M_1 (пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка).

Символы кристофеля не являются тензорами.

2.3.1 Абсолютный дифференциал в аффинной связности.

Как и в случае с производной Ли, для того, чтобы дифференцировать по направлению произвольное векторное (тензорное) поле необходимо уметь вычитать друг из друга тензоры относящиеся к различным (хотя и бесконечно близким) точкам многообразия, т.е. необходимо уметь осуществлять параллельный перенос тензора на бесконечно малый вектор Δx^i .

Пусть точка M в пространстве аффинной связности L_n пробегает некоторый путь

$$x^i = x^i(t) \quad (2.41)$$

Рис.

Причем в каждой точке этого пути задан вектор $\xi(t)$. Т.е. задано векторное поле, по крайней мере вдоль данного пути.

Переходя из данной точки пути t в его бесконечно близкую точку $t + dt$, мы находим в ней вектор поля с координатами

$$\xi^k(t + dt) \approx \xi^k(t) + d\xi^k(t). \quad (2.42)$$

Здесь мы пренебрегли бесконечно малыми высшего порядка относительно dt , заменив приращения функций $\xi^k(t)$ их дифференциалами.

Однако для того чтобы оценить на сколько изменился вектор поля $\xi^k(t)$ при переходе из точки t в точку $t + dt$, мы не должны ориентироваться на дифференциалы его координат $d\xi^k(t)$, так как векторы ξ^k и $\xi^k + d\xi^k$ - это векторы, заданные в разных точках, именно в точках t и $t + dt$, а значит, отнесенные к разным локальным реперам.

При преобразовании координатной системы x^i эти локальные координатные реперы испытывают преобразования вида:

$$e_s = \frac{\partial x^i}{\partial x^s} e_i \quad (2.43)$$

где матрицы $\frac{\partial x^i}{\partial x^s}$ вычислены в разных точках и, следовательно, являются различными. Поэтому не имеет смысла сравнивать между собой векторы $\xi^k(t)$ и $\xi^k(t + dt)$, отнесенные к различно преобразующимся реперам.

Другое дело если мы предварительно перенесем параллельно вектор $\xi^k(t + dt)$ в ту же точку t , в которой задан вектор $\xi^k(t)$. Тогда оба тензора будут заданы в одной точке t , а значит отнесены к общему локальному реперу.

Вычитание из первого вектора второго будет иметь инвариантный смысл и даст нам снова вектор в точке t . Главная линейная часть этого вектора называется *абсолютным дифференциалом* $\mathcal{D}\xi^k(t)$ вектора $\xi^k(t)$.

Обозначим через $\xi_{||}^k$ вектор $\xi^k(t + dt)$, параллельно перенесенный из точки $t + dt$ в точку t . Это значит, что обратно, $\xi_k(t + dt)$ получается параллельным перенесением $\xi_{||}^k$ из точки t в точку $t + dt$.

Пользуясь формулой

$$d\xi^k = -\Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i \quad (2.44)$$

можно записать

$$\xi^k(t + dt) \approx \xi_{||}^k - \Gamma_{ij}^k \xi_{||}^j dx^i \quad (2.45)$$

Тут стоит знак приближенного равенства, так как формула (2.44) дает лишь дифференциалы, а не приращения координат параллельно переносимого вектора, так что в равенстве допускается ошибка на бесконечно малые высшего порядка.

Как видно из (2.45), $\xi_{||}^k$ отличается от $\xi_k(t + dt)$, а следовательно, и от $\xi^k(t)$, на бесконечно малую величину. Поэтому с принятой степенью точности можно заменить $\xi_{||}^k$ через $\xi_k(t)$. Действительно правая часть множится еще на dx^k , так, что ошибка получается бесконечно малой высшего порядка. По той же причине можно заменить $\xi^k(t + dt)$ через $\xi^k(t) + d\xi^k(t)$.

Выражая теперь $\xi_{||}^k$ из (2.45), получаем

$$\xi_{||}^k \approx \xi^k(t) + d\xi^k(t) + \Gamma_{ij}^k \xi^j(t) dx^i. \quad (2.46)$$

Определение 2.3.1 Главная линейная часть разности $\xi_{||}^k - \xi^k(t)$ между вектором $\xi^k(t + dt)$ параллельно перенесенным из точки $t + dt$ в точку t и вектором $\xi^k(t)$ называется *абсолютным (ковариантным) дифференциалом*, и обозначается $\mathcal{D}\xi^k(t)$.

Очевидно $\mathcal{D}\xi_k$ совпадает с тем выражением, которое в (2.46) добавляется к $\xi^k(t)$.

Итак

$$\mathcal{D}\xi^k(t) = d\xi^k(t) + \Gamma_{ij}^k \xi^j(t) dx^i. \quad (2.47)$$

Для один раз ковариантного тензорного поля:

$$\mathcal{D}f_m(t) = df_m(t) - \Gamma_{sl}^m f_m(t) dx^i. \quad (2.48)$$

До сих пор мы рассматривали тензорное поле, заданное вдоль некоторого пути, и абсолютный дифференциал $\mathcal{D}\xi^k$ брали вдоль этого пути. Если векторное(тензорное) поле задано во всем пространстве или, по крайней мере, в некоторой n -мерной его области, то абсолютный дифференциал тензора можно брать вдоль любого пути в этой области. При этом, так как координаты вектора в данной координатной системе будут функциями точки

$$\xi^k = \xi^k(x^1, \dots, x^n), \quad (2.49)$$

то

$$d\xi^k = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} dx^i \quad (2.50)$$

И основанная формула (2.47) принимает вид

$$\mathcal{D}\xi^k = \nabla_i \xi^k dx^i, \quad (2.51)$$

где через $\nabla_i \xi^k$ обозначены коэффициенты при dx^i в правой части (2.47) после подстановки туда $d\xi^k$ из (2.50):

$$\nabla_i \xi^k = \frac{\partial}{\partial x^i} \xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^j. \quad (2.52)$$

Эти коэффициенты образуют тензор, имеющий один доополнительный ковариантный индекс сравнительно с тензором ξ^k (индекс дифференцирования по i).

Для один раз ковариантного тензорного поля:

$$\nabla_i f_m = \frac{\partial}{\partial x^s} f_m + \Gamma_{sl}^m \xi^l. \quad (2.53)$$

2.4 Геодезические.

Аналогом прямых на многообразии являются геодезические кривые.

Определение 2.4.1 Кривая в пространстве аффинной связности называется геодезической, если всякий вектор $\xi_0^i (\neq 0)$, касательный к этой кривой в какой-нибудь ее точке M_0 , остается к ней касательным при параллельном переносе вдоль нее. Т.е. вектор скорости переносится вдоль кривой с помощью параллельного переноса.

Это определение подразумевает на геодезической некоторой выделенной параметризации.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $\varphi^k = x^k(t)$, где t - параметр вдоль кривой. Скоростью мы назовем вектор $\frac{dx^k}{dt} = \xi^k$.

Если касательный к кривой вектор $\frac{dx^k}{dt} = \xi^k$ ковариантно постоянен вдоль кривой, то кривая называется геодезической для данной связности.

Применим формулу параллельного перенесения к вектору $\frac{d\xi}{dt}$

$$0 = d \frac{dx^k}{dt} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^j}{dt} dx^i. \quad (2.54)$$

Разделим все на dt , приходим к уравнениям для геодезических

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0. \quad (2.55)$$

Замечание. В уравнение входит только симметрическая (по нижним индексам) часть связности Γ .

Уравнение (2.55) описывает свободное движение частицы в искривленном пространстве. Величина $\frac{d^2 x^k}{dt^2}$ аналогична ускорению (не является вектором), и "сила" действующая на частицу равна

$$-M \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} \quad (2.56)$$

где M - масса частицы. Таким образом, коэффициенты Γ выступают в роли некоторого поля, которое заставляет частицу ускоряться (по отношению к выбранной системе координат).

Приведем еще один стиль записи уравнения геодезической, для этого напомним некоторые формулы приведенные выше:

$$\begin{aligned} d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^i dx^j &= 0 \\ \mathcal{D}\xi^k &= d\xi^k + \Gamma_{ij}^k \xi^j dx^i. \\ \mathcal{D}\xi^k &= \nabla_i \xi^k dx^i \end{aligned} \quad (2.57)$$

Поскольку $\frac{d}{dt} = \xi^\alpha \partial_\alpha$ то можно записать

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = \nabla_\xi \xi = \xi(\partial_\alpha u^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta u^\gamma) \partial_\beta = 0. \quad (2.58)$$

или в компонентах

$$\ddot{x}^\alpha = -\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma. \quad (2.59)$$

В уравнение входит производная по направлению $u_\alpha \partial_\alpha u^\beta = \ddot{x}^\alpha$.

Определение 2.4.2 Векторное поле $a(t)$, определенное вдоль произвольной кривой $x(t)$ на многообразии \mathbb{M} с заданной связностью Γ ,

$$a := \nabla_\xi \xi = (\ddot{x}^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \dot{x}^\beta \dot{x}^\gamma) \partial_\alpha, \quad (2.60)$$

называется ускорением кривой.

2.5 Пространство Римана.

Определение 2.5.1 Многообразие \mathbb{M} , в котором задано поле метрического тензора

$$g_{ij}(M) = g_{ij}(x^1, \dots, x^n), \quad (2.61)$$

два раза ковариантного, симметрического и невырожденного:

$$\text{Det}|g_{ij}| \neq 0, \quad g_{ij} = g_{ji}. \quad (2.62)$$

называется Римановым пространством \mathbb{V}_n .

Можно также сказать, что риманово пространство \mathbb{V}_n - это многообразие \mathbb{M}_n , в котором в каждое касательное пространство $L_M \mathbb{M}$ внесена евклидова метрика.

Тензорное поле $g_{ij}(M)$, каждое касательное пространство из аффинного \mathbb{A}_n превращает в евклидово \mathbb{R}_n , вводя в нем скалярное произведение. Следовательно, евклидово пространство можно рассматривать как частный случай риманова.

В евклидовом пространстве всегда можно перейти в такую специальную координатную систему (аффинную) в которой координаты метрического тензора становятся константами:

$$g_{ij}(M) = \text{const}. \quad (2.63)$$

В произвольном Римановом пространстве в целом, этого сделать нельзя. Однако, по отдельности, в некоторой окрестности, возможно подобрать такие координаты x^i , чтобы в них g_{ij} были константами, тогда пространство \mathbb{V}_n называется локально евклидовым.

2.6 Тензор кручения.

Вернемся к формуле (2.13). Там первый член, очевидно, симметричен по нижним индексам, следовательно, антисимметричная по этим индексам часть Γ ведет себя как тензор

Определение 2.6.1 Тензор с компонентами

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \quad (2.64)$$

называется тензором кручения.

В параграфе (...) мы рассматривали коммутатор векторных полей $[V, U]$. Аналогично можно рассмотреть альтернативу вида $\nabla_V U - \nabla_U V$. Но в отличие от скобки Ли, где параллельный перенос выполнялся вдоль интегральных

кривых, при вычислении данного коммутатора, параллельный перенос выполняется вдоль геодезических.

Пусть в \mathbf{R}^n задана метрическая связность. Для коэффициентов связности используем обозначения Γ_{ij}^k . Более точно, если $X_i = \partial_i$ локальный координатный базис векторных полей и x^i локальные координаты тогда

$$\nabla_i X_j = \Gamma_{ij}^k X_k \quad (2.65)$$

В декартовой системе координат $\nabla_V U$ является обыкновенной производной поля U по направлению поля V :

$$\nabla_V U = (V^i \partial_i U^k) X_k \quad (2.66)$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \nabla_V U - \nabla_U V = \\ (V^i \partial_i U^k - U^i \partial_i V^k) X_k = [V, U] \end{aligned} \quad (2.67)$$

Из этого следует, что выражение $\nabla_V U - \nabla_U V$ является коммутатором векторных полей $[V, U]$.

В случае произвольной связности эти величины, вообще говоря, не равны, и их разность образует тензор типа $(1, 2)$:

$$\begin{aligned} T(V, U) &= \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U] \\ &= V^i (\partial_i U^k + \Gamma_{ij}^k U^j) X_k - U^i (\partial_i V^k + \Gamma_{ij}^k V^j) X_k \\ &\quad - (V^i \partial_i U^k - U^i \partial_i V^k) X_k \\ &= V^i U^j \Gamma_{ij}^k X_k - U^i V^j \Gamma_{ij}^k X_k \\ &= V^i U^j (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X_k \end{aligned} \quad (2.68)$$

Следовательно тензор кручения в локальных координатах:

$$\begin{aligned} T &= T_{ij}^k dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_k \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) dx^i \otimes dx^j \otimes \partial_k. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Определение 2.6.2 В римановом пространстве, всегда можно построить и притом единственным образом связность $\Gamma_{ij}^k(M)$, такую что *кручение равно нулю*.

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

Связность с нулевым тензором кручения называется симметричной связностью.

Итак, для согласованной с метрикой связности

$$0 = \nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \Gamma_{mk}^s g_{sk} - \Gamma_{sk}^s g_{ms} \quad (2.70)$$

- ковариантная производная двухвалентного ковариантного тензора.

Обозначим

$$\Gamma_{mkl} = \Gamma_{kl}^s g_{ms}. \quad (2.71)$$

Запишем еще раз условие (3.73) выписав его трижды, циклически переставляя индексы $m \rightarrow k \rightarrow l \rightarrow m$.

$$\begin{aligned} \partial_l g_{mk} &= \Gamma_{kml} + \Gamma_{mkl}, \\ \partial_m g_{kl} &= \Gamma_{lkm} + \Gamma_{klm}, \\ \partial_k g_{lm} &= \Gamma_{mlk} + \Gamma_{lmk}. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Сложим эти три уравнения со знаками $+$, $-$, $+$

$$\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{lm} - \partial_m g_{kl} = 2\Gamma_{m(lk)} + T_{klm} + T_{lmk}. \quad (2.73)$$

Отсюда можно выразить симметричную часть связности

$$\Gamma_{mlk} = \frac{1}{2} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{kl}) - \frac{1}{2} (T_{lmk} + T_{kml}). \quad (2.74)$$

Замечание. В формулу для симметричной части метрической связности входит не только метрика, но и тензор кручения.

Полная связность задается как сумма симметричной и антисимметричной частей, т.е. $\Gamma_{mlk} = \Gamma_m(lk) + \frac{1}{2}\Gamma_{mlk}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_{mlk} &= \frac{1}{2} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}) \\ &\quad - \frac{1}{2} (T_{lmk} + T_{kml} - T_{mlk}). \end{aligned} \quad (2.75)$$

Отсюда симметрическая связность

$$\Gamma_{lk}^s = \frac{1}{2} g^{sm} (\partial_l g_{mk} + \partial_k g_{ml} - \partial_m g_{lk}). \quad (2.76)$$

2.6.1 Геометрический смысл кручения.

В точке P рассмотрим два вектора ξ_P и ζ_P . Точка P и вектор ξ_P , однозначно определяют геодезическую $\gamma_\xi(t)$ (см. ...).

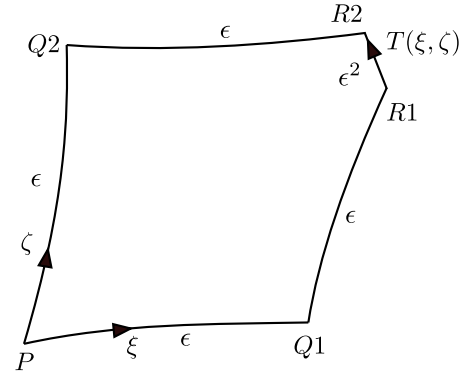


Рис. 2.3: Геометрический смысл кручения.

Перенесем параллельно вектор ζ_P в точку $Q1 \equiv \gamma_\xi(\epsilon)$, вдоль геодезической, получим вектор ζ_{Q1} в $Q1$.

Точка $Q1$ и вектор ζ_{Q1} определяют, в свою очередь, геодезическую $\gamma_{\xi_{Q1}}(t)$. Точку $\gamma_{\xi_{Q1}}(\epsilon)$ обозначим $R1$.

Теперь проделаем те же шаги поменяв местами ξ_P и ζ_P . Получим точки $Q2$ и $R2$.

Рис.

На обычной плоскости, в результате образуется параллелограмм с вершинами $P1, Q1, R1 \equiv R2, Q2$. Однако в случае общего многообразия со связностью ∇ , имеем $R1 \neq R2$, и расстояние между $R1$ и $R2$ с точностью до второго порядка малости по ϵ дается вектором $T(\xi, \zeta)$, где T - кручение связности. Можно также сказать, что вектор $T(\xi, \zeta)$ замыкает, с точностью до второго порядка малости по ϵ инфинитезимальный параллелограмм, заданный векторами ξ и ζ .

Действительно, разлагая координаты в окрестности точки P в ряд получим

$$x_Q^k = x_P^k + \frac{dx^k}{dt} \epsilon + \frac{1}{2} \frac{d^2 x^k}{dt^2} \epsilon^2 = x_P^k + \xi_P^k \epsilon - \frac{1}{2} \xi_P^i \xi_P^j \Gamma_{Pij}^k \epsilon^2, \quad (2.77)$$

- где $\xi_P^k = \frac{dx^k}{dt}$, и учтено уравнение геодезической.

Теперь параллельно перенесем вектор ζ_P в точку Q :

$$\zeta_Q^k = \zeta_P^k - (x_Q^i - x_P^i) \zeta_P^j \Gamma_{Pij}^k = \zeta_P^k - \xi_P^i \zeta_P^j \Gamma_{Pij}^k \epsilon, \quad (2.78)$$

Теперь найдем координаты точки $R1$ вдоль геодезической выпущенной из точки $Q1$:

$$x_{R1}^k = x_{Q1}^k + \zeta_{Q1}^k \epsilon - \frac{1}{2} \zeta_{Q1}^i \zeta_{Q1}^j \Gamma_{(Q1)ij}^k \epsilon^2 = x_P^k + (\xi_P^k + \zeta_P^k) \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} \xi_P^i \xi_P^j + \xi_P^i \zeta_P^j + \frac{1}{2} \zeta_P^i \zeta_P^j \right) \Gamma_{(P)(ij)}^k \epsilon^2. \quad (2.79)$$

Аналогично, координаты точки $R2$ во втором порядке по ϵ равны

$$x_{R1}^k = x_{Q1}^k + \zeta_{Q1}^k \epsilon - \frac{1}{2} \zeta_{Q1}^i \zeta_{Q1}^j \Gamma_{(Q1)ij}^k \epsilon^2 = x_P^k + (\xi_P^k + \zeta_P^k) \epsilon^2 - \left(\frac{1}{2} \xi_P^i \xi_P^j + \xi_P^i \zeta_P^j + \frac{1}{2} \zeta_P^i \zeta_P^j \right) \Gamma_{(P)(ij)}^k \epsilon^2. \quad (2.80)$$

Таким образом, получаем

$$x_{R2}^k - x_{R1}^k = \xi_P^i \zeta_P^j T_{(P)ij}^k \epsilon^2, \quad (2.81)$$

- где $T_{(P)ij}^k$ - компоненты тензора кручения в точке P .

Существует также эквивалентный способ выражения кручения.

Рассмотрим векторы ξ и ζ в точке P . Расширим их до векторных полей V, U в окрестности следующим образом: если Q некоторая точка в окрестности построим геодезическую из P и Q и параллельно перенесем векторы ξ и ζ в Q вдоль геодезической (вспомним, что параметризация геодезической не имеет значения). Все перенесенные векторы образуют векторные поля V, U .

По построению, их ковариантные производные в любых направлениях исчезают в точке P так, что мы получаем для тензора кручения выражение:

$$T_P(V, U) = (\nabla_V U)_P - (\nabla_U V)_P - [V, U]_P = -[V, U]_P. \quad (2.82)$$

Тогда "эффект" от кручения совпадает с "эффектом" от некоммутируемости векторных полей.

2.7 Тензор кривизны.

Если мы рассмотрим, например, сферу или тор, то мы увидим, что эти поверхности можно разложить на конечное число частей, каждая из которых может быть взаимнооднозначно (не обязательно изометрично) отображена на некоторую область евклидовой плоскости.

Точнее, для каждой точки P_0 многообразия можно найти вблизи этой точки такую систему координат u, v , что если

u_0, v_0 являются координатами самой точки P_0 , то существует положительное число r , обладающее следующим свойством. Любая система чисел u, v , удовлетворяющая неравенству;

$$(u - v_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2, \quad (2.83)$$

представляет собой координаты некоторой точки многообразия, близкой к P_0 и, наоборот, в достаточно малой окрестности P_0 всякая точка P имеет координаты u, v удовлетворяющие неравенству (2.83).

Сфера и тор являются примерами *проективно евклидовых многообразий*, используя стереографическую проекцию можно показать, например, что сфера локально евклидова. Именно в этом смысле каждое многообразие является локально евклидовым.

Риманово многообразие называется локально-евклидовым если в достаточно малой окрестности любой из своих точек M_0 может быть отображено на некоторую малую область евклидова пространства с сохранением линейного элемента ds^2 (изометрически). Такого рода отображение называется *развертыванием* рассматриваемой части многообразия на евклидово пространство. И обратно, полученная в результате такой операции область евклидова пространства будет разворачиваться на соответствующий малый участок многообразия.

Тензор кривизны связности позволяет определить локальную характеристику отклонения связности Γ_{jk}^i от евклидовой.

Мы знаем, что если связность допускает евклидовы координаты x^1, \dots, x^n , то в этих координатах векторы (тензоры) дифференцируются по обычным формулам:

$$\nabla_k \xi^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k}. \quad (2.84)$$

Поэтому

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) \xi^i = 0 \quad (2.85)$$

Это свойство верно в любых координатах так, как ξ^i - тензор.

Для векторных полей в любых координатах x^1, \dots, x^n имеем

$$\begin{aligned} \nabla_k \nabla_l Y^i &= \nabla_k \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i Y^q \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^i Y^q \right) + \Gamma_{pk}^i \left(\frac{\partial Y^p}{\partial x^l} + \Gamma_{ql}^p Y^q \right) - \\ &\quad \Gamma_{lk}^p \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^p} + \Gamma_{qp}^i Y^q \right) = \\ &= \frac{\partial^2 Y^i}{\partial x^k \partial x^l} + \frac{\partial Y^q}{\partial x^k} \Gamma_{ql}^i + \Gamma_{pk}^i \frac{\partial Y^p}{\partial x^l} - \Gamma_{lk}^p \frac{\partial Y^i}{\partial x^p} + \\ &\quad Y^q \frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p Y^q - \Gamma_{lk}^q \Gamma_{qp}^i Y^q. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Составим выражение $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) V^i$. После сокращений получим в координатах

$$\begin{aligned} (\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) Y^i &= \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{ql}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{pk}^i}{\partial x^l} \right) Y^q + (\Gamma_{pk}^i \Gamma_{ql}^p - \Gamma_{lk}^p \Gamma_{qp}^i) Y^q - \\ &\quad (\Gamma_{lk}^p - \Gamma_{kl}^p) \frac{\partial Y^i}{\partial x^p}. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Введем обозначение

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk}. \quad (2.88)$$

Тогда получим формулу

$$(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) Y^i = -R^i_{qkl} Y^q + T^p_{kl} \frac{\partial Y^i}{\partial x^p}, \quad (2.89)$$

где T^p_{kl} - тензор кручения. Оказывается, R^i_{qkl} - это тензор; этот тензор называется *тензором Римана* или *римановой кривизной*.

Для симметричных связностей $T^p_{kl} \equiv 0$.

Таки образом для симметричных связностей и для любого векторного поля V выражение $(\nabla_k \nabla_l - \nabla_l \nabla_k) Y^i$ имеет вид - $R^i_{qkl} Y^q$, где R^i_{qkl} - тензор Римана, определяемый формулой

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{pk} \Gamma^p_{ql} - \Gamma^i_{pl} \Gamma^p_{qk}. \quad (2.90)$$

Это выражение можно записать так

$$R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{lq}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{kq}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{kp} \Gamma^p_{lq} - \Gamma^i_{lp} \Gamma^p_{kq}. \quad (2.91)$$

В инвариантных обозначениях, для любых векторных полей V, U, Y

$$[R(V, U)Y]^i = R^i_{jkl} V^k U^l Y^j \quad (2.92)$$

или, явно

$$R(V, U)Y = \nabla_U \nabla_V Y - \nabla_V \nabla_U Y - \nabla_{[V, U]} Y, \quad (2.93)$$

где $[V, U]$ - коммутатор векторных полей.

Последнее выражение линейно по $V^i \partial_i, U^i \partial_i, Y^i \partial_i$, и для базисных векторных полей следует из определения R^i_{jkl} .

Если связность евклидова, то $R^i_{qkl} = 0$. В точках, где $\Gamma^i_{pq} = 0$ верно равенство

$$-R^i_{qkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{ql}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{qk}}{\partial x^l}. \quad (2.94)$$

Тензор кривизны позволяет сформулировать критерий локальной тривиальности аффинной связности.

Назовем аффинную связность на многообразии \mathbb{M} локально тривиальной, если для любой точки $x \in \mathbb{M}$ найдется окрестность $\mathbb{U}_x \ni x$ и такая система координат, что компоненты связности Γ^k_{ij} на \mathbb{U}_x равны нулю.

Для локальной тривиальности аффинной связности на многообразии \mathbb{M} необходимо и достаточно, чтобы ее кручение и тензор кривизны равнялись нулю на \mathbb{M} .

2.7.1 Геометрический смысл кривизны.

Мы определили кривизну рассматривая параллельный перенос вдоль произвольной (не обязательно геодезической) замкнутой кривой. Замкнутость является следствием предположения отсутствия кручения.

В евклидовом пространстве параллельное перенесение не зависит от пути. В общем случае, это не так.

Эта *неинтегрируемость* параллельного переноса характеризуется *внутренней кривизной*, которая не зависит от выбора системы координат.

Рассмотрим инфинитизимальный параллелограмм P, Q_1, R, Q_2 . Предположим, что кручение отсутствует, тогда параллелограмм замкнут.

Данный параллелограмм составлен из четырех кривых

$$\begin{aligned} \gamma_{PQ_1} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, x^\sigma = b, a \leq x^\rho \leq a + \delta a\} \\ \gamma_{Q_1R} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, b \leq x^\sigma \leq b + \delta b, x^\rho = a + \delta a\} \\ \gamma_{RQ_2} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, x^\sigma = b + \delta b, a \leq x^\rho \leq a + \delta a\} \\ \gamma_{Q_2P} &= \{\bar{x} | \bar{x} \in R^n, b \leq x^\sigma \leq b + \delta b, x^\rho = a + \delta a\} \end{aligned} \quad (2.95)$$

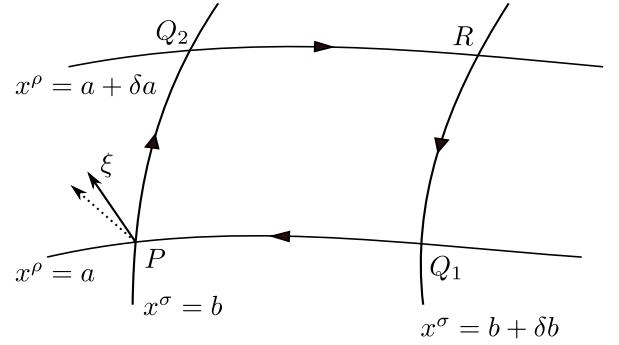


Рис. 2.4: Геометрический смысл кривизны.

Где σ и ρ фиксированные индексы, такие, что $\sigma \neq \rho$. Параллельный-перенос вектора $\xi = \xi^k \bar{e}_k$ из P в Q_1 вдоль кривой γ_{PQ_1} дает:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^k}{dx^i} &= \frac{d\xi^k}{dx^i} + \Gamma_{ji}^k \xi^j = 0, \Rightarrow \\ \frac{d\xi^k}{dx^i} &= -\Gamma_{ji}^k \xi^j \Rightarrow \\ \xi^k(Q_1) - \xi^k(P^{start}) &= - \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{j\rho}^k |_{x^\sigma=b} \xi^j dx^\rho \end{aligned} \quad (2.96)$$

Аналогично получим для параллельного перенесения вектора вдоль кривых γ_{Q_1R} , γ_{RQ_2} и γ_{Q_2P} выражения:

$$\xi^k(R) - \xi^k(Q_1) = - \int_{b+\delta b}^b \Gamma_{j\sigma}^k |_{x^\rho=a+\delta a} \xi^j dx^\sigma, \quad (2.97)$$

$$\xi^k(Q_2) - \xi^k(R) = - \int_a^{a+\delta a} \Gamma_{j\rho}^k |_{x^\sigma=b+\delta b} \xi^j dx^\rho. \quad (2.98)$$

$$\xi^k(P_{end}) - \xi^k(Q_2) = \int_b^{b+\delta b} \Gamma_{j\sigma}^k |_{x^\rho=a} \xi^j dx^\sigma. \quad (2.99)$$

Теперь мы определим разницу между вектором до параллельного переноса и после параллельного переноса по

замкнутому контуру как $\delta\xi^k = \xi^k(P^{end}) - \xi^k(P^{start})$, тогда

$$\delta\xi^k = \int_a^{a+\delta a} (\Gamma_{j\rho}^k|_{x^\sigma=b+\delta b}\xi^j - \Gamma_{j\rho}^k|_{x^\sigma=b})\xi^j dx^\rho + \int_b^{b+\delta b} (\Gamma_{j\sigma}^k|_{x^\rho=a}\xi^j - \Gamma_{j\sigma}^k|_{x^\rho=a+\delta a})dx^\sigma. \quad (2.100)$$

Так как δa и δb малые величины, с помощью теоремы о среднем получим следующую аппроксимацию для (2.100)

$$\delta\xi^k \approx \int_a^{a+\delta a} \delta b \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma_{j\rho}^k \xi^j) dx^\rho - \int_b^{b+\delta b} \delta a \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\Gamma_{j\sigma}^k) dx^\sigma \approx \delta a \delta b \left[\frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\Gamma_{j\rho}^k \xi^j) - \frac{\partial}{\partial x^\rho} (\Gamma_{j\sigma}^k \xi_j) \right] \quad (2.101)$$

Окончательно, (2.101) с (2.96) дают, что параллельный перенос вектора ξ индуцирует следующее изменение его компонент

$$\delta\xi^k \approx \delta a \delta b \left(\frac{\partial \Gamma_{\lambda\rho}^k}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\sigma}^k}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\lambda\rho}^j \Gamma_{j\sigma}^k - \Gamma_{\lambda\sigma}^j \Gamma_{j\rho}^k \right). \quad (2.102)$$

2.8 Формы кручения и кривизны.

Отметим, что тензор кручения

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \quad (2.103)$$

кососимметричен по индексам i и j , по которым производится дифференцирование, тензор кривизны

$$R_{qkl}^i = \frac{\partial \Gamma_{lq}^i}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{kq}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kp}^i \Gamma_{lq}^p - \Gamma_{lp}^i \Gamma_{kq}^p. \quad (2.104)$$

кососимметричен по индексам kl по которым также производится дифференцирование.

Геометрически, эта кососимметричность связана с ориентируемостью направления обхода некоторого бесконечно малого элемента площади, поэтому тензоры кручения и кривизны однозначно определяют некоторые дифференциальные формы.

Эли Катан указал, что разница между многообразием аффинной связности и собственно аффинным пространством, выражается в аффинном перемещении, соответствующем бесконечно-малому замкнутому контуру; это перемещение можно разложить на трансляцию и вращение; трансляция определяет *кручение*, вращение - *кривизну* многообразия.

Кручение определяет векторозначную форму, так как трансляция это вектор, кривизна - бивекторозначную форму, так как вращение - бивектор.

Соответствующие формы называются формами кручения и кривизны.

Вспомним, что если линейная форма, заданная на касательном пространстве совпадает со своей альтернативой то ее называют *внешней дифференциальной формой*. Вот и формы кручения и кривизны вследствие кососимметричности являются внешними дифференциальными формами.

Форма кручения в общем случае образуется из неголономных базисных 1-форм θ^α , которые в случае голономного базиса определяются как $\theta^\alpha = \delta_i^\alpha dx^i$, при помощи операции *внешнего ковариантного дифференцирования*.

Определение 2.8.1 Формой кручения Θ данной линейной связности называется 2-форма $\mathcal{D}\theta$

- \mathcal{D} оператор внешнего ковариантного дифференцирования. Внешний потому, что должен определять кососимметрическую форму. Ковариантность необходима в следствие зависимости базиса от точки на многообразии.

Форма кривизны, в общем случае, образуется из 1-форм связности ω_k , построенных для неголономного базиса, при помощи операции внешнего ковариантного дифференцирования.

Определение 2.8.2 Формой кривизны Ω данной линейной связности называется 2-форма $\mathcal{D}\omega$

- \mathcal{D} - оператор внешнего ковариантного дифференцирования.

Покажем, что $\mathcal{D}\theta$ и $\mathcal{D}\omega$ действительно определяют тензорные поля кручения (2.103) и кривизны (2.104).

Пусть \mathbb{V} открытое подмножество многообразия \mathbb{M}

Определим набор базисных векторных полей $\{X_1, \dots, X_n\}$. В каждой точке M подмножества \mathbb{V} X_i образуют базис для $L_M \mathbb{M}$. X^i можно определить как координатные базисные векторные поля $X_i = \partial_{x^i}$, однако в общем случае X_i на образуют координатный базис.

Затем определим набор дуальных базисных полей 1-форм $\theta^1, \dots, \theta^n$, такой, что $\theta^i(X_j) = \delta_i^j$.

Заметим, что в каждой точке $M \in \mathbb{V}$, $\{\theta_M^1, \dots, \theta_M^n\}$, образуют базис кокасательного пространства $L_M^* \mathbb{M}$.

Из свойств связности следует равенство

$$\nabla_{X_i} X_j = \omega_{ij}^k X_k, \quad (2.105)$$

где ω_{ij}^k является k -ой компонентой векторного поля $\nabla_{X_i} X_j$ на базисных векторах $\{X_i\}_{i=1}^n$. Имея формы ω_{ij}^k определим формы ω_j^k :

$$\omega_j^k := \omega_{ij}^k \theta^i \quad (2.106)$$

И обратно, имея эти формы, можно получить значения ω_{ij}^k :

$$\omega_{ij}^k = \omega_j^k(X_i). \quad (2.107)$$

Тогда связность полностью определится этими формами: дано два векторных поля $V = a^i X_i$ и $U = b^i X_i$, тогда:

$$\begin{aligned} \nabla_V X_j &= \nabla_{a^i X_i} X_j = a^i \nabla_{X_i} X_j = a^i \omega_{ij}^k X_k \\ &= a^i \omega_j^k(X_i) X_k = \omega_j^k(V) X_k. \end{aligned} \quad (2.108)$$

И следовательно

$$\begin{aligned} \nabla_V U &= \nabla_V (b^i X_i) = ((V \cdot b^i) X_i + b^i \nabla_V X_i) \\ &= (V \cdot b^j + b^j \omega_i^j(V)) X_j \end{aligned} \quad (2.109)$$

Заметим, что значения форм ω_j^k на X есть компоненты $\nabla_X X_j$ относительно поля базисов так, что:

$$\omega_j^i(X) = \omega^i(\nabla_X X_j). \quad (2.110)$$

Имеем равенство

$$\begin{aligned} \nabla_U V &= \nabla_U (\omega^j(V) X_j) \\ &= (U \cdot \omega^j(V) X_j + \omega^j(V) \nabla_U X_j) \end{aligned} \quad (2.111)$$

из которого следует

$$\omega^i(\nabla_U V) = V \cdot \omega^i(V) + \omega^j(V) \omega^i(\nabla_U X_j) \quad (2.112)$$

Определим внешний ковариантный дифференциал 1-формы θ^α :

$$\mathcal{D}\theta^\alpha = d\theta^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta = d\theta^\alpha - \theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha. \quad (2.113)$$

Применим правую часть этого уравнения к векторным полям (V, U) образующим касательное пространство.

По определению, для произвольной 1-формы имеет место равенство

$$d\theta(V, U) = V(\theta(U)) - U(\theta(V)) - \theta([V, U]) \quad (2.114)$$

Далее

$$\begin{aligned} (\theta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha)(V, U) &= (\theta^j(V) \omega_j^\alpha(U) - \theta^j(U) \omega_j^\alpha(V)) \\ &= (\theta^j(X) \omega^i(\Delta_U V_j) - \theta^j(U) \omega^i(\Delta_V X_j)) \\ &= \theta^i(\Delta_U V) - U \cdot (\theta^i(V)) - \theta^i(\nabla_V U) + V \cdot (\theta^i(U)). \end{aligned} \quad (2.115)$$

и следовательно

$$\begin{aligned} (d\omega^i - \theta^j \wedge \omega_j^i)(V, U) &= \\ V \cdot (\theta^i(U)) - U \cdot (\theta^i(V)) - \theta^i([V, U]) - (\theta^j \wedge \omega_j^i)(V, U) \\ &= \theta^i(\nabla_V U - \nabla_U V - [V, U]) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Докажем аналогичное равенство и для формы кривизны:

$$\begin{aligned} R(V, U)X_i &= \Omega_i^j(V, U)X_j = \\ ((d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j)(V, U))X_j \end{aligned} \quad (2.117)$$

Действительно

$$\begin{aligned} R(V, U)X_i &= \nabla_V \nabla_U X_i - \nabla_U \nabla_V X_i - \nabla_{[V, U]} X_i \\ &= \nabla_V (\omega_i^k(U)X_k) - \nabla_U (\omega_i^k(V)X_k) - \omega_i^k([V, U])X_k \\ &= (V \cdot (\omega_i^k(U)) - U \cdot (\omega_i^k(V)) - \omega_i^k([V, U]))X_k \\ &\quad + \omega_i^k(U) \nabla_V X_k - \omega_i^k(V) \nabla_U X_k \\ &= d\omega_i^k(V, U)X_k + (\omega_i^k(U) \omega_k^j(V)X_j - \omega_i^k(V) \omega_k^j(U)X_j) \\ &= (d\omega_i^j(V, U) - (\omega_i^k \wedge \omega_k^j)(V, U))X_j. \end{aligned} \quad (2.118)$$

Таким образом форма Ω_i^j однозначно определяет производную

$$\mathcal{D}\omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_i^k \wedge \omega_k^j. \quad (2.119)$$

$$\Omega_k^l(V, U) := \theta^l(R(V, U)X_k), \quad (2.120)$$

для векторных полей V, U на \mathbb{V} , т.е. $R(V, U)X_k = \Omega_k^l(V, U)X_l$. Используя базис $\{\theta^i \wedge \theta^j\}_{i < j}$ для 2-форм, запишем

$$\begin{aligned} \Omega_k^l &= \Omega_k^l(X_i, X_j) \theta^i \wedge \theta^j = \theta^l(R(X_i, X_j)X_k) \theta^i \wedge \theta^j \\ &= R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j = \frac{1}{2} R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j, \end{aligned} \quad (2.121)$$

Где R_{ijk}^l коэффициенты тензора кривизны относительно данного базиса:

$$R(X_i, X_j)X_k = R_{ijk}^l X_l. \quad (2.122)$$

Таким образом

$$\Omega_k^l = \frac{1}{2} R_{ijk}^l \theta^i \wedge \theta^j, \quad R_{ijk}^l = -R_{ikj}^l \quad (2.123)$$

Аналогично

$$\Theta^l = \frac{1}{2} T_{ij}^l \theta^i \wedge \theta^j, \quad T_{ij}^l = -T_{ji}^l. \quad (2.124)$$

2.9 Пространство Римана-Картана.

Определение 2.9.1 Связность называется метрически совместимой (римановой или ковариантно постоянной) если относительно этой связности

$$Q_{\alpha\beta} := -\mathcal{D}g_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.125)$$

- где $ds^2 = g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{\alpha\beta} \theta^\alpha \otimes \theta^\beta$.

В общем случае величина $Q_{\alpha\beta}$ образует тензор, и называется тензором неметричности.

Распишем следующую ковариантную производную от тензора типа $(0, 2)$:

$$\begin{aligned} Q(X, Y, Z) &= \nabla_X g(Y, Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \end{aligned} \quad (2.126)$$

Таким образом если $Q(X, Y, Z) = 0$, то

$$X(g(Y, Z)) = X(g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)) \quad (2.127)$$

Определение 2.9.2 Связность называется римановой если для любых векторных полей X, Y, Z верно равенство (2.127). Если к тому же отсутствует кручение то связность называется связностью *Ливи-Чивиты*.

Определение 2.9.3 Пространство с заданной на нем метрически совместимой связностью и отличным от нуля тензором кручения называется пространством *Римана-Картана*. В случае, если тензор кручения нулевой, пространство Римана-Картана обращается в пространство Римана.

Метрически совместимая связность обеспечивает локальную евклидовость многообразия в смысле проэктивной евклидовости. Коэффициенты связности не образуют тензор, поэтому локальные координаты можно подобрать так чтобы они обратились в нуль, при этом тензоры кручения и кривизны не обязаны быть нулевыми.

Рассмотрим метрическое многообразие с кручением. Пусть задана метрика

$$ds^2 = g_{ji} dx^j dx^i \quad (2.128)$$

И метрическая (риманова) связность Γ_{ji}^h , такая, что в ней

$$\nabla_j g_{ik} = 0 \quad (2.129)$$

- где ∇_j означает ковариантное дифференцирование в связности Γ_{ji}^h

Обозначая $\left\{ \begin{smallmatrix} h \\ j \ i \end{smallmatrix} \right\}$ символы Кристофеля сформированные метрикой g_{ji} , мы можем положить

$$\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{smallmatrix} h \\ j \ i \end{smallmatrix} \right\} + T_{ji}^h \quad (2.130)$$

- где - тензорное поле типа (1, 2).

Уравнения (2.129) и (2.130) показывают, что

$$\nabla_j g_{ih} = -T_{jih} - T_{jhi} = 0. \quad (2.131)$$

где

$$T_{jih} = T_{ji}^t g_{th}. \quad (2.132)$$

Связность Γ_{ji}^h не обязана быть симметричной и мы можем записать тензор кручения в виде:

$$S_{ji}^h = \frac{1}{2}(\Gamma_{ji}^h - \Gamma_{ji}^h) \quad (2.133)$$

Из (2.130), (2.131) и (2.133), мы найдем метрическую связность Γ_{ji}^h в виде

$$\Gamma_{ji}^h = \left\{ \begin{matrix} h \\ j \ i \end{matrix} \right\} + S_{ji}^h + S_{ji}^h + S_{ji}^h, \quad (2.134)$$

где $S_{ji}^h = g^{mh} \partial_{it} S_{mj}^t$, g^{mh} являются контравариантными компонентами метрического тензора.

Тензор кривизны метрической связности Γ_{ji}^h дается формулой:

$$R_{kji}^h = \partial_k \Gamma_{ji}^h - \partial_j \Gamma_{ki}^h + \Gamma_{kt}^h \Gamma_{ji}^t - \Gamma_{jt}^h \Gamma_{ki}^t, \quad (2.135)$$

И мы имеем

$$\begin{aligned} R_{kji}^h &= -R_{jki}^h = -R_{kjh}^i, \\ R_{kji}^h + R_{jik}^h + R_{ikj}^h &= 0, \\ R_{kji}^h &= R_{ihkj} \end{aligned} \quad (2.136)$$

- где

$$R_{kji}^h = R_{kji}^t g_{th}. \quad (2.137)$$

Для изучения геодезических линий в римановом пространстве \mathbb{V}_n и самого \mathbb{V}_n в ряде случаев приносят пользу, специальные, связанные с геодезическими линиями геометрические конструкции. В частности они позволяют строить координатные системы в V_n с наиболее простыми свойствами. Вообще говоря, в \mathbb{V}_n нельзя построить такие простые координатные системы, какими являются, например, ортонормированные координатные системы в \mathbb{R}_n , но частично все же можно приблизиться к их свойствам.

Определение 2.9.4 Координаты в которых компоненты связности и первые производные компонент метрического тензора обращаются в нуль в некоторой точке называются *геодезическими координатами*. Геодезические координаты также называют нормальными или римановыми координатами.

В некоторых случаях нельзя добиться обращения в нуль $\Gamma_{ij}^{k'}$ во всем пространстве одновременно, но можно это сделать в некоторой окрестности каждой его точки. Тогда пространство аффинной связности называется *локально аффинным* (аналогично локально евклидовому). В некоторой окрестности любой своей точки локально аффинное пространство представляет собой "кусочек аффинного пространства" и лишь в целом отличается от него.

А вообще говоря, пространство аффинной связности, даже с нулевым кручением, аффинным пространством не является, и ни в какой координатной системе $x^{i'}$, хотя бы в пределах малой окрестности данной точки M , $\Gamma_{ij}^{k'}$ не удается обратить в нуль тождественно.

Однако в случае нулевого кручения можно обратить $\Gamma_{ij}^{k'}$ в нуль в самой данной точке M .

Действительно, переходя от координат x^k к координатам $x^{k'}$, зададимся значениями $\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}$ в данной точке M произвольно, а значения $\frac{\partial^2 x^{k'}}{\partial x^i \partial x^j}$ в той же точке подберем так, чтобы $\Gamma_{ij}^{k'}$ обратились в нуль. Для этого достаточно потребовать:

$$\frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} + \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k = 0. \quad (2.138)$$

Все величины предполагаются вычисленными в данной точке M . Можно взять вместо (2.138) равносильное соотношение

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k \partial x^j}, \quad (2.139)$$

Если бы пространство обладало кручением, т.е. $\Gamma_{ij}^k \neq \Gamma_{ji}^k$ то вторые частные производные нельзя было бы вычислять по формуле (2.139).

Итак, если пространство без кручения, переходя от координат x^i к координатам $x^{i'}$, мы можем добиться обращения $\Gamma_{ij}^{k'}$ в нуль в наперед заданной точке M .

Если бы мы захотели указанным приемом добиться тождественного обращения $\Gamma_{ij}^{k'}$ в нуль, то нужно было бы обеспечить равенство (2.139) в каждой точке M , т.е. проинтегрировать соответствующую систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x^{i'}(x^1, \dots, x^n)$. Однако эта система, вообще говоря, несовместна.

Значение геодезических координат состоит в том, что в довольно малой окрестности точки M свойства многообразия близки к свойствам аффинного пространства. Формула параллельного перенесения в точке M и в соответствующих геодезических координатах $x^{i'}$ дает

$$d\xi^{k'} = 0. \quad (2.140)$$

Это значит, что при параллельном переносе компонент векторов (тензоров) в *линейном приближении* по вектору смещения не меняются. Точнее, это значит, что при бесконечно малом смещении из точки M по любому пути координаты параллельно переносимого вектора $\xi^{k'}$ получают приращения $\Delta \xi^{k'}$ бесконечно малые высшего порядка (ввиду $d\xi^{k'} = 0$). Т.е. данные координаты в точке M определены с точностью до линейных преобразований.

В остальных точках пространства координаты $x^{i'}$, геодезические в точке M , никакими преимуществами не обладают.

Свойства нормальных координат относятся к касательным пространствам, не к самому многообразию.

Коэффициенты связности аффинного пространства равны нулю в аффинных координатах и только в них.

Нормальные координаты можно выбрать только в точках, в которых связность имеет нулевое кручение и неметричность. Тем не менее, нормальные реперы, обладающие существенными свойствами нормальных координат, все еще могут быть построены когда связность нериманова.

Если X и Y координаты векторов для которых компоненты связности обращаются в нуль в некоторой точке,

то очевидно кручение должно обратиться в нуль, и компоненты неметричности обратятся в первые производные компонент метрического тензора.

Для неримановых связностей, все еще возможно построить нормальные координаты с помощью экспоненциального отображения используя *абсолютный параллелизм* (автопараллельность) неримановой связности, однако при ненулевом кручении компоненты связности не обратятся в нуль, и в присутствии неметричности компоненты метрики не будут стационарными.

Определение 2.9.5 Пространство аффинной связности называется пространством *абсолютного параллелизма*, если результат параллельного перенесения произвольного вектора ξ^i из точки P в точку O при любом выборе этих точек не зависит от пути перенесения PQ . Это значит, что по какому бы пути ни совершать переход из P в Q , мы придем в Q с одним и тем же вектором, т.е. тензор кривизны $R_{\alpha\beta\alpha}^b = 0$. По этой причине репер на многообразии можно задать глобально.

Любое многообразие M допускающее существование глобально определенного репера называется *параллелизуемым*. Отсюда вытекает следствие: многообразие M является параллелизуемым тогда и только тогда, когда касательное расслоение диффеоморфно прямому произведению $T(M) = M \times \mathbb{R}^n$ (глобально определенный репер устанавливает диффеоморфизм расслоений).

7 ПРИМЕР. Любая группа Ли является параллелизуемым многообразием если групповое умножение слева (справа) принять за определение параллельного переноса.

В случае пространства с абсолютным параллелизмом и без кручения можно, по крайней мере, в некоторой окрестности любой точки M , перейти к аффинным координатам $x^{i'}$, т.е. добиться $\Gamma_{i'j'}^{k'} = 0$. Тем самым данное пространство будет локально аффинным.

Следовательно, мы получаем возможность вектор, заданный в какой нибудь точке P , как бы откладывать из любой точки пространства. В результате возникает целое векторное поле. Любой вектор этого поля можно принять за исходный и считать, что все другие векторы поля получены его параллельным перенесением. Такое векторное поле называется *однородным*.

Допустим, что задано M с абсолютным параллелизмом. Выберем в какой либо точке p базис для $L_p(M)$ из n линейно независимых векторов $\{X_i\}_p$. Тогда некоторый вектор ξ^k в точке $p \in M$ определится как линейная комбинация данных базисных векторов. Для удобства введем обозначение получившейся совокупности линейных комбинаций

$$\xi_{(1)}^k, \dots, \xi_{(n)}^k \quad (2.141)$$

Путем их параллельного перенесения в любую точку M нашего пространства получаем n однородных векторных полей

$$\xi_{(1)}^k(M), \dots, \xi_{(n)}^k(M). \quad (2.142)$$

В силу абсолютного характера параллелизма линейная независимость при параллельном перенесении сохраняется, и в любой другой точке M' , разложение вектора ξ^k по базису X_i определяются теми же самыми коэффициентами $\{\xi_{(n)}^k\}$.

И обратно, задавая в коком-либо многообразии M , n произвольно выбранных линейно независимых векторов $\xi_1^k(M), \dots, \xi_n^k(M)$ данное многообразие можно рассматривать как пространство с абсолютным параллелизмом.

Запишем, что каждый из $\xi_{(p)}^i$ при любом бесконечно малом смещении из любой точки M должен удовлетворять формуле параллельного перенесения

$$\nabla_{\dot{x}} \dot{x} = 0. \quad (2.143)$$

в этом случае кривая $x(t)$ с параллельным векторным полем $\dot{x} = \dot{x}^\alpha \partial_\alpha$ удовлетворяющем условию (2.143) называется *автопараллельной кривой*. В случае если ∇ связность Ливи-Чивиты на римановом многообразии (M, g) , параллельный перенос является изометрией и кривая $x(t)$ называется геодезической.

Пусть M дифференцируемое многообразие, и ∇ произвольная связность на M . Возьмем произвольную точку $p \in M$, и пусть $\{X_i\}_p$ является базисом для $L_p M$.

ТЕОРЕМА 2.9.1 $\{X_i\}_p$ может быть расширен до репера $\{X_i\}$ в некоторой окрестности $U \subset M$ точки p , таким образом что $\nabla X_i = 0$ в точке p для каждого i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого i , существует автопараллель C_i в односвязной окрестности U_i точки p которая проходит через p и имеет касательный вектор X_i в точке p . Для каждого i , определен набор векторных полей $\{X_j\}$ вдоль C_i с помощью параллельного переноса $\{X_j\}_p$. При соответствующем ограничении пересечения U областью U_i , автопараллели не пересекутся, и векторные поля могут быть произвольно продолжены для формирования репера на U . Так как по построению $\nabla_{X_i} X_j = 0$ в точке p для всех i, j то $\nabla X_i = 0$ в p .

Этот результат не имеет отношения к метрике на M , а является свойством связности.

Теперь, пусть g метрика на M . Репер $\{X_i\}$ называется нормальным в точке p если $\{X_i\}_p$ ортонормальны и $\nabla X_i = 0$ в точке p . Ортонормальный базис в любой точке p на M всегда можно расширить, используя теорему (8) до локального нормального репера по отношению к любой связности. Если связность метрическая ($\nabla g = 0$), то нормальный репер может быть выбран, также, ортонормальным.

Этот результат может быть выражен через компоненты связности определенные в виде $\nabla_{X_i} X_j = \Gamma_{ij}^k X_k$. Далее, очевидно что всегда существуют координаты $\{x^i\}$ покрывающие точку p такие, что $\partial_{x^i} = X_i$ в точке p . В компонентах это формулируется следующим предложением

ТЕОРЕМА 2.9.2 Пусть M многообразие с произвольной связностью. Для любой точки $p \in M$, существуют координаты $\{x^i\}$ и репер $\{X_i\}$ в окрестности каждой точки p такие, что в точке p

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_{x^i} \\ \Gamma_{ij}^k &= 0, \end{aligned} \quad (2.144)$$

где Γ_{ij}^k компоненты связности относительно репера $\{X_i\}$.

Компоненты связности относительно репера $\{\partial_{x^i}\}$ не обязаны обращаться в нуль, даже в самой точке p . Точнее они обязательно будут ненулевыми в присутствии кручения в точке p .

Так как пространство Римана-Картана по определению обладает ненулевой кривизной и метрической связностью то нормальный репер может быть выбран ортонормальным.

2.10 Кристаллы с учетом микроструктуры.

2.10.1 Идеальные кристаллы.

Выберем один из узлов кристаллической решетки за начало координат. Тогда в силу ее периодичности остальные узлы можно перенумеровать с помощью целочисленного вектора $n = (n_1, n_2, n_3)$

$$r_n \equiv r(n) = \sum_{\alpha=1}^3 n_{\alpha} a_{\alpha}$$

Для простой решетки нумерация узлов совпадает с нумерацией атомов. Существование кристаллического состояния означает, что в широком интервале температур относительные смещения атомов малы по сравнению с постоянной решетки a (под постоянной решетки мы будем понимать величину, порядок которой совпадает с величинами основных трансляционных векторов \vec{a}_{α}). Поэтому сначала рассмотрим потенциальную энергию кристалла, атомы которого слегка смещены из равновесных положений, и выразим ее через смещения атомов $u(n)$. Учтем, что электроны столь подвижны, что в основном успевают приспособиться к движению ядер - адиабатическое приближение. В этом случае считается что потенциальная энергия кристалла U функция только координат атомных ядер, фактически совпадающих с координатами центров тяжести атомов. Воспользовавшись стандартной теорией малых колебаний представим функцию U в виде

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum_{n, n'} \beta^{ik}(n, n') u^i(n) u^k(n')$$

Для сокращения записи опускать координатные индексы i, k, l, \dots у матричных и векторных величин: $\mathbf{B} = \beta^{ik}$, $i, k=1,2,3$. Тогда:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum \mathbf{B}(\vec{n}, \vec{n}') u(\vec{n}) u(\vec{n}')$$

Коэффициенты в линейном члене разложения должны быть равны нулю (мы находимся вблизи равновесия). Для безграничной однородной решетки, в силу однородности коэффициенты матрицы \mathbf{B} должны зависеть только от разности $(n - n')$

$$\mathbf{B}(\vec{n}, \vec{n}') = \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}'),$$

Прямой подстановкой можно убедиться, что это функциональное уравнение имеет решение $\mathbf{A} = \alpha^{ik}$, $i, k=1,2,3$

Тогда:

$$U = U_0 + \frac{1}{2} \sum \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}) u(\vec{n}')$$

Используя лагранжев формализм классической механики запишем уравнение движения в символической форме (подразумевается уравнение движения для каждого атом в кристалле):

$$m \ddot{u}(\vec{n}) = - \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}')$$

Предположим, что кристалл сместился как целое: $u(n) = u_0 = \text{const}$. Тогда внутреннее состояние кристалла

изменится не может (внешние силы отсутствуют); следовательно, на атомы не будут действовать никакие дополнительные силы:

$$\sum_{\vec{n}'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') \equiv \sum_{\vec{n}'} \alpha^{ik}(\vec{n} - \vec{n}') = \sum \alpha^{ik}(\vec{n}) = 0$$

а значит добавление слагаемого

$$\sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n})$$

в правую часть уравнения движения должно оставить его инвариантным

$$\begin{aligned} m \ddot{u}(\vec{n}) &= - \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}') = \\ &= \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') [u(\vec{n}) - u(\vec{n}')] \end{aligned}$$

что демонстрирует инвариантность состояния кристалла относительно его смещения как целого.

Интересуясь гармоническими колебаниями представим зависимость смещения всех атомов от времени в виде:

$$u(\vec{n}, t) = \exp[-i\omega t] u(\vec{n})$$

Подставим это в ур-е движения, после сокращения на $\exp[-i\omega t]$ получим:

$$m\omega^2 u(\vec{n}) = \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}')$$

Введем обозначение $\varepsilon = \omega^2$ и перепишем это уравнение

$$\frac{1}{m} \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}') - \varepsilon u(\vec{n}) = 0$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$u(\vec{n}) = u \exp[i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})].$$

Вектор \vec{k} играет роль волнового вектора колебаний кристалла. Сейчас он является свободным параметром, характеризующим искомое решение. Подставляя его получаем для смещений u систему линейных однородных уравнений

$$m\omega^2 u = \sum_{n'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u e^{i\vec{k}[\vec{r}(\vec{n}') - \vec{r}(\vec{n})]}$$

Но из определения (1.1) в силу линейности следует

$$\vec{r}(\vec{n}) - \vec{r}(\vec{n}') = \sum_{\alpha=1}^3 (n_{\alpha} - n'_{\alpha}) \vec{a}_{\alpha} = \vec{r}(\vec{n} - \vec{n}')$$

И воспользовавшись преобразованием Фурье

$$\mathbf{A}(\vec{k}) = \sum_{\vec{n}} \mathbf{A}(\vec{n}) e^{-i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}$$

получим

$$m\omega^2 u - \mathbf{A}(\vec{k}) u = 0$$

В данном случае $\mathbf{A}(\vec{n})$ силовая динамическая матрица в узельном представлении, а $\mathbf{A}(\vec{k})$ та же матрица в \vec{k} представлении. Здесь следует отметить, что приведенный выше переход к \vec{k} -представлению в многом и обуславливает использование в физике твердого тела так называемого \vec{k} -пространства (обратного пространства). Этот переход

также называют переходом к коллективным координатам, так как в случае \vec{k} -представления мы выделяем целое множество атомов колебания которых соответствуют данному волновому вектору \vec{k} .

Условие совместности данной системы имеет вид

$$\text{Det} \| m\omega^2 \mathbf{I} - \mathbf{A}(\vec{k}) \| = 0$$

где \mathbf{I} - единичная матрица. Вводя для упрощения обозначение

$$D(\varepsilon) = \text{Det} \left\| \varepsilon \mathbf{I} - \frac{1}{m} \mathbf{A}(\vec{k}) \right\| \quad (2.145)$$

перепишем условие совместности

$$D(\omega^2) = 0$$

Это соотношение в механике носит название характеристического уравнения для собственных частот [?], и его решение связывает частоту возможных колебаний кристалла с квазиволновым вектором \vec{k} . Зависимость частоты от волнового вектора, как уже упоминалось, называется законом дисперсии, а само характеристическое уравнение - дисперсионным уравнением. Следовательно, решая дисперсионное уравнение, мы получаем закон дисперсии

$$\varepsilon = \omega^2(\vec{k})$$

для колебаний кристаллической решетки.

В простой решетке каждый атом является центром инверсии, поэтому

$$\mathbf{A}(\vec{n}) = \mathbf{A}(-\vec{n})$$

и очевидна вещественность матрицы $\mathbf{A}\vec{k}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\vec{k}) &= \sum \mathbf{A}(\vec{n}) \cos(\vec{k}\vec{r}(n)) = \\ &= \sum \mathbf{A}(\vec{n}) (\cos(\vec{k}\vec{r}(\vec{n})) - 1) \end{aligned}$$

Последняя часть равенства вытекает из свойства (1.8) силовой матрицы.

Если рассматривать цепочку атомов - скалярный случай вместо системы (1.19) имеется всего одно уравнение, и закон дисперсии может быть записан в явном виде:

$$\begin{aligned} \omega^2(\vec{k}) &= \frac{1}{m} \sum \alpha(\vec{n}) e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})} = \\ &= \frac{1}{m} \sum \alpha(\vec{n}) (\cos \vec{k}\vec{r}(\vec{n}) - 1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что прежде всего, закон дисперсии определяет частоту как периодическую функцию квазиволнового вектора с периодом обратной решетки:

$$\omega(\vec{k}) = \omega(\vec{k} + \vec{B})$$

Это - основное отличие закона дисперсии колебаний кристалла от закона дисперсии колебаний сплошной среды, так как для последнего характерна монотонная зависимость частоты от волнового вектора. Одновременно с этим проявляется отличие квазиволнового вектора \vec{k} от обычного волнового вектора - лишь значениям вектора \vec{k} внутри одной элементарной ячейки обратной решетки, отвечают физически неэквивалентные состояния кристалла. Элементарная ячейка обратной решетки называется зоной Бриллюэна.

Возвращаясь к закону дисперсии как решению дисперсионного уравнения (1.21), учтем, что последнее является алгебраическим уравнением третьей степени относительно ω^2 :

$$\begin{aligned} \text{Det} \| m\omega^2 \delta_{ij} - A_{ij}(\vec{k}) \| &= 0, \\ i, j &= 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Корни этого уравнения определяют три ветви закона дисперсии колебаний простой кристаллической решетки:

$$\varepsilon = \omega_\alpha^2, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

где α номер ветви колебаний.

Итак, собственные колебания кристалла могут быть представлены в виде плоских волн (1.18), частоты которых связаны с квазиволновым вектором законом дисперсии (выше).

Чтобы отличать смещения разных ветвей колебаний, запишем решение (1.18) явно в векторном виде

$$u(\vec{n}, t) = e(\vec{k}, \alpha) e^{i[\vec{k}\vec{r}(\vec{n}) - \omega t]}$$

где $e(\vec{k}, \alpha)$ - единичный вектор. Этот вектор называется вектором поляризации.

Выделим временной множитель $e^{i\omega t}$ и определим нормированные решения типа (1.28) формулой

$$\varphi_{\vec{k}\alpha}(\vec{n}) = \frac{1}{\sqrt{N}} e(\vec{k}, \alpha) e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}.$$

При условии, что рассматриваются только векторы \vec{k} находящиеся в одной элементарной ячейке обратной решетки (физически неэквивалентные) функциям (1.18) присущи естественные свойства независимости

$$\sum_{n'} \varphi_{\vec{k}\alpha}^*(\vec{n}) \varphi_{\vec{k}'\alpha'}(\vec{n}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\alpha\alpha'},$$

Всвязи с этим колебания отвечающие этим функциям называются независимыми - нормальными модами колебаний.

В скалярной модели понятие поляризации отсутствует, и координатная зависимость нормальных колебаний записывается в виде

$$\varphi_{\vec{k}}(\vec{n}) = \frac{1}{N} e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})},$$

обеспечивающим условие нормировки

$$\sum_n \varphi_{\vec{k}}^*(\vec{n}) \varphi_{\vec{k}'}(\vec{n}) = \delta_{\vec{k}\vec{k}'},$$

Зависимость нормальных колебаний от узла кристаллической решетки \vec{n} была нами найдена в ходе непосредственного решения уравнений колебаний (1.17). Однако эта зависимость следует прямо из трансляционной симметрии кристалла. Если система материальных точек совершает гармонические колебания, то ее нормальные колебания преобразуются по неприводимым представлениям группы симметрии системы

Мы выяснили, что отдельные колебания (1.18), являющиеся независимыми состояниями движения всей кристаллической решетки, характеризуются различными значениями квазиволнового вектора \vec{k} . При этом вопрос о возможных

состояниях самого вектора \vec{k} остался открытым. Далеко не все точки внутри элементарной ячейки в k - пространстве могут соответствовать независимым состояниям кристалла. Это следует хотябы из того, что множество всех точек в элементарной ячейке имеет мощность континуума, а множество независимых колебний, фактически совпадающее с множеством степеней свободы кристаллической решетки, даже в случае бесконечного кристалла является счетным. Поэтому общее качественное исследование независимых состояний (колебаний) кристалла не может считаться полным, пока не установлен спектр возможных значений \vec{k} .

Во всем изложенном была существенна трансляционная симметрия, в связи с чем решетка считалась безграничной. Рассмотрение такой решетки затруднительно в математическом отношении, ввиду того, что приходится иметь дело с бесконечным числом атомов и собственных функций - состояний (1.18):

$$u(\vec{n}) = \exp[i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})].$$

Мы можем изучать такие системы лишь полагая число атомов конечным и затем переходя к пределу, когда это число устремляется к бесконечности - переход к плотности состояний. При этом нужно было бы ввести границы как некоторые реальные поверхности, на которых, например, собственные функции обратились бы в нуль, однако в результате отражений от всех границ точные стационарные состояния такой системы изображались бы соячими волнами.

Существует математический прием, который позволяет удовлетворительно решить проблему подсчета состояний и при этом не вводить каких-либо физических эффектов, связанных с граничными условиями. Этот прием состоит в применении циклических граничных условий или *условий Борна - Кармана* в уравнении (1.17). Таким условием является требование цикличности, согласно которому

$$\begin{aligned} u(\vec{r}_n) &= u(\vec{r}_n + N_1 \vec{a}_1) = \\ &= u(\vec{r}_n + N_2 \vec{a}_2) = u(\vec{r}_n + N_3 \vec{a}_3) \end{aligned}$$

Накладывая это ограничение на (1.18) получаем

$$\begin{aligned} u(\vec{r}_n) &= u e^{i\vec{k}[\vec{r}(n_\alpha + N_\alpha a_\alpha)]} = \\ &= u e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n}_\alpha)} e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{N}_\alpha a_\alpha)} \end{aligned}$$

Учитывая (2.1 тут)

$$e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{N}_\alpha a_\alpha)} = 1.$$

Отсюда

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{N_\alpha a_\alpha} p_\alpha$$

В кубической решетке формула (1.45) может быть значительно упрощена, если положить $L_\alpha = N_\alpha a$ и направить оси координат по осям симметрии четвертого порядка:

$$k_x = \frac{2\pi}{L_1} p_1, k_y = \frac{2\pi}{L_2} p_2, k_z = \frac{2\pi}{L_3} p_3.$$

Наконец, совокупность целых чисел p_α обычно берут расположенной симметрично на числовой оси:

$$p_\alpha = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{N_{\alpha+1}}{2}, \alpha = 1, 2, 3.$$

Из (1.45) или (1.46) следует, что дискретные значения компонент вектора \vec{k} разделены интервалами $\Delta k \sim 1/L$, убывающими с увеличением линейных размеров кристалла. Поэтому в том случае, когда все линейные размеры кристалла являются макроскопическими, спектр значений \vec{k} может считаться квазинепрерывным. Последнее свойство мы использовали при анализе закона дисперсии, рассматривая частоту как непрерывную функцию квазиволнового вектора.

В дальнейшем мы будем использовать квазинепрерывность спектра значений \vec{k} , заменяя суммирование по дискретным значениям квазиволнового вектора интегрированием. Учтя соотношения (1.45) и (1.46), легко получить правило указанного перехода к интегрированию:

$$\sum_{\vec{k}} f(\vec{k}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int f(\vec{k}) d^3 k$$

где интегрирование производится по объему одной элементарной ячейки в k - пространстве (или по одной зоне Бриллюэна). Заметим, что если в формуле (1.47) положить $f(\vec{k}) \equiv 1$, то мы придем к очевидному соотношению

$$\sum_{\vec{k}} 1 = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 k = \frac{V}{V_0} = N,$$

сводящемуся к утверждению, что число независимых значений вектора \vec{k} в одной элементарной ячейке равно числу элементарных ячеек (числу атомов в простой решетке).

Для объяснения ряда свойств кристаллов, обусловленных колебаниями решетки иногда достаточно знать лишь распределение колебаний по частотам. Имея это ввиду, вводят понятие плотности колебаний.

Возпользуемся обозначением $\varepsilon = \omega^2$. Тогда число колебаний квадраты частот которых лежат в интервале $\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon$, можно записать в виде

$$dn_\alpha = N g_\alpha(\varepsilon) d\varepsilon,$$

где N - число элементарных ячеек в кристалле. Функцию $g(\varepsilon)$ мы будем называть *плотностью колебаний*. Очевидно, имеет место формула

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \delta(\varepsilon - \omega^2(\vec{k})),$$

где зависимость $\omega^2(\vec{k})$ определяется законом дисперсии кристалла, а суммирование проводится по всем физически неэквивалентным значениям этого вектора (находящимся в одной ячейке обратной решетки или в первой зоне Бриллюэна).

Преобразуем формулу (2.13) переходя к интегрированию по правилу (1.47) и производя замену переменных интегрирования:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int \delta[\varepsilon - \omega^2(\vec{k})] d^3 k = \\ &= \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int \delta(\varepsilon - \omega^2) \frac{d\omega^2 dS_{\vec{k}}}{|\nabla \omega^2(\vec{k})|}, \end{aligned}$$

где V_0 - объем элементарной ячейки кристалла.

Рассмотрим теперь как упрощаются сами уравнения движения кристалла в случае длинноволновых колебаний.

Рассмотрим колебания с малым k , т.е. колебания для которых $ak \ll 1$. Разложим косинус в правой части (1.26), по степеням его аргумента и используем то обстоятельство, что функция $\alpha(\vec{n})$ быстро убывает с ростом номер-вектора \vec{n} . Тогда в основном приближении

$$\omega^2(\vec{k}) = -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha, \beta} (\vec{k} \vec{a}_{\alpha}) (\vec{k} \vec{a}_{\beta}) \sum_{\vec{n}} \alpha(\vec{n}) n_{\alpha} n_{\beta}$$

Обозначим $\vec{k} = \vec{k} \vec{\kappa}$, введя единичный вектор направления обратном пространстве $\vec{\kappa}$, и представим (1.34) в виде

$$\omega_2 = s_2(\vec{\kappa}) k_2$$

где

$$s^2(\vec{\kappa}) = -\frac{1}{2m} \sum_{\alpha, \beta} (\vec{k} \vec{a}_{\alpha}) (\vec{k} \vec{a}_{\beta}) \sum_{\vec{n}} \alpha(\vec{n}) n_{\alpha} n_{\beta}$$

Таким образом, при малых k мы получаем характерный для анизотропной сплошной среды линейный закон дисперсии звуковых колебаний:

$$\omega = s(\kappa) k,$$

где s имеет смысл фазовой скорости звука. Этот результат вполне естественен, потому что малым k отвечают большие длины волн λ и условие $ak \ll 1$ эквивалентно требованию $\lambda \ll a$, определяющему возможность перехода от механики кристаллической решетки к механике сплошной среды.

Вернемся к уравнению движения однородной кристаллической решетки

$$m \ddot{u}(\vec{n}) = - \sum_{\vec{n}'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}')$$

Запишем его в виде

$$m \ddot{u}_s^i(\vec{r}) = - \sum_{\vec{n}', s'} \alpha_{ss'}^{ik}(\vec{n} - \vec{n}') u_{s'}^k(\vec{r}'),$$

где

$$\vec{r} = X_s(\vec{n}), \quad \vec{r}' = X_{s'}(\vec{n}').$$

Учитывая что смещения слабо изменяются в пространстве разложим функцию $u_{s'}(\vec{r}')$ в ряд около точки $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$, ограничившись членами второго порядка по $X_s^k(\vec{n}) - X_{s'}^k(\vec{n}')$:

2.10.2 Реальные кристаллы.

Рассмотрим как будут распространяться колебания при наличии в решетке изолированного изотоп-дефекта. В параграфе ... при условии что все атомы одинаковой массы мы описывали стационарные колебания кристалла уравнением

$$m \ddot{u}(\vec{n}) - m \sum_{\vec{n}'} \alpha(\vec{n} - \vec{n}') [u(\vec{n}) - u(\vec{n}')] = 0$$

Затем используя временную зависимость $e^{-i\omega t}$ переходили к частотному представлению

$$m \omega^2 u(\vec{n}) = \sum_{\vec{n}'} \mathbf{A}(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}')$$

Решение искали в виде

$$u(\vec{n}) = u e^{ik\vec{r}(\vec{n})}$$

И переходя импульсному представлению Фурье преобразованием матрицы \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\vec{k}) = \sum_{\vec{n}} \mathbf{A}(\vec{n}) e^{-ik\vec{r}(\vec{n})}$$

пришли к дисперсионному уравнению

$$\text{Det} \| m \omega^2 \mathbf{I} - \mathbf{A}(\vec{k}) \| = 0$$

с законом дисперсии

$$\omega^2 = \omega_0^2(\vec{k}) \equiv \frac{1}{m} \sum_{\vec{n}} \alpha(\vec{n}) \cos(\vec{k} \vec{r}(\vec{n}))$$

Затем в параграфе (переход к длин волн приближению) мы этим уравнением описывали акустические колебания для которых закон дисперсии

$$\omega_0^2(0) \equiv \frac{1}{m} \sum_{\vec{n}} \alpha(\vec{n})$$

и возможные частоты колебаний лежат в конечном интервале $(0, \omega_m)$.

Наиболее простой точечный дефект возникает в том случае, когда один из узлов кристаллической решетки занят атомом изотопа основного элемента, образующего кристалл. Так как атом изотопа отличается от основного атома только своей массой, то естественно считать, что возмущение кристалла при этом не меняет параметров упругой связи атомов и сводится только к изменению массы в узле, занятом изотопом. Пусть изотоп занимает узел в начале координат $\vec{n} = 0$ обладая массой M , отличной от массы основного атома. При наличии такого дефекта вместо уравнения ... мы получим систему из двух уравнений

$$M u(\vec{0}, t) - \sum_{\vec{n}'} \alpha(\vec{n}') u(\vec{n}') = 0, \quad \vec{n} = 0$$

$$m \ddot{u}(\vec{n}, t) - \sum_{\vec{n}'} \alpha(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}') = 0, \quad \vec{n} \neq 0$$

Эти уравнения можно объединить в единой записи

$$m \ddot{u}(n, t) -$$

$$\sum_{\vec{n}'} \alpha(n - \vec{n}') u(\vec{n}') =$$

$$-(M - m) \ddot{u}(0, t) \delta_{n0} \equiv F(0, t) \delta_{n0}$$

введя трехмерный символ Кронеккера $\delta_{nn'}$. В этом можно убедиться прямой подстановкой. Таким образом мы пришли к уравнению движения для невозмущенной решетки при наличии внешней силы $F = -(m - M) \ddot{u}(0, t) \delta_{n0}$ (неоднородное дифференциальное уравнение).

Перейдем в этом уравнении от временного к частотному представлению представив $u(\vec{n}, t)$ и $F(0, t)$ в виде интегралов Фурье.

$$u(\vec{n}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{\omega^2}(\vec{n}) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$u_{\omega^2}(\vec{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vec{n}, t) e^{i\omega t} dt$$

$$F(0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\omega^2}(0) e^{-i\omega t} d\omega$$

$$F_{\omega^2}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(0, t) e^{-i\omega t} dt$$

Дельта функция от времени не зависит, поэтому она остается неизменной.

Тогда () запишется в виде

$$m\varepsilon u(\vec{n}) - \sum_{n'} \alpha(\vec{n} - \vec{n}') u_{\omega^2}(\vec{n}) =$$

$$= F_{\omega^2}(0) \delta_{n0} = -(M - m) \varepsilon u_{\omega^2}(0) \delta_{n0}$$

Теперь перейдем к импульсному представлению произведя преобразование фурье над этим уравнением

$$u_{\varepsilon}(\vec{n}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} u(\varepsilon, \vec{k}) e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}$$

$$u(\varepsilon, \vec{k}) = \sum_{\vec{n}} u(\vec{n}) u_{\varepsilon}(\vec{n}) e^{-i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}$$

$$F_{\omega^2}(\vec{n}) = \frac{1}{N} \sum F(\varepsilon, \vec{k})$$

$$F(\varepsilon, \vec{k}) = \sum F_{\varepsilon}(\vec{n}) e^{-i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}$$

$$\mathbf{A}(\vec{k}) = \sum_{\vec{n}} \mathbf{A}(\vec{n}) e^{-i\vec{r}\vec{r}(\vec{n})}$$

$$1 = \sum_{\vec{n}} \delta_{n0} e^{-i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})} = e^{-i\vec{k}\vec{r}(0)}$$

Тогда уравнение (1) запишется в виде:

$$\varepsilon u(\varepsilon, \vec{k}) - \frac{\mathbf{A}(\vec{k})}{m} u(\varepsilon, \vec{k}) = \frac{F(\varepsilon, \vec{k})}{m}$$

$$(\varepsilon - \frac{1}{m} \mathbf{A}(\vec{k})) u(\varepsilon, \vec{k}) = \frac{F(\varepsilon, \vec{k})}{m}$$

отсюда

$$u(\varepsilon, \vec{k}) = \frac{F(\varepsilon, \vec{k})}{m} \frac{1}{\varepsilon - \omega^2(\vec{k})}$$

Введем функцию

$$G_{\varepsilon}(\vec{k}) = \frac{1}{\varepsilon - \omega^2(\vec{k})}$$

тогда

$$u(\varepsilon, \vec{k}) = \frac{F(\varepsilon, \vec{k})}{m} G_{\varepsilon}$$

Функция G_{ε} называется функцией Грина для идеальной решетки. Для удобства внесем константу $1/m$ в правую часть (2) и введем обозначения

$$M - m = \Delta m, \quad U_0 = -\frac{\Delta m}{m} \varepsilon$$

Тогда учитывая (5) легко видеть, что если в правой части оставить только δ_{n0} то

$$u(\varepsilon, \vec{k}) = G_{\varepsilon}(\vec{k})$$

И из (3) следует, что

$$u(\vec{n}) = G_{\varepsilon}(\vec{n}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{e^{i\vec{k}\vec{r}(\vec{n})}}{\varepsilon - \omega^2(\vec{k})}.$$

Введем формальное решение (2):

$$u(\vec{n}) = U_0 G_{\varepsilon}(\vec{n}) u(0)$$

Если отказаться от скалярной модели, то при наличии изотоп-дефекта в узле $n = 0$ аналогичное выражение для вектора смещения любого атома кристалла будет:

$$u^i(\vec{n}) = U_0 G_{\varepsilon}^{ik}(\vec{n}) u^i(0)$$

Вернемся к скалярной модели. Полагая в (12.9) $\vec{n} = 0$, мы обнаруживаем, что формула (12.9) непротиворечива лишь при условии

$$1 - U_0 G_{\varepsilon}^0(0) = 0$$

Подставляя сюда ()

$$1 - \frac{U_0}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\varepsilon - \omega^2(\vec{k})} = 0$$

Перейдя от суммирования к интегрированию по квазиволновым векторам заменив суммирование интегрированием по частотам:

$$1 - U_0 \int \frac{g_0(z) dz}{\varepsilon - z} = 0$$

здесь $g_0(\varepsilon)$ - плотность колебаний идеальной решетки. Учитывая что частоты акустических колебаний невозмущенного кристалла лежат в интервале $(0, \omega_m)$, ясно, что уравнение (12.13) имеет смысл лишь для $\varepsilon > \varepsilon_m = \omega_m^2$. Но тогда знаменатель в интеграле (12.13) всегда положителен, и уравнение (12.13) может обладать решением только при $U_0 < 0$, т.е. для легкого изотопа ($M < m$). Однако в трехмерном кристалле наличие нужного знака возмущения еще не гарантирует существования решения уравнения (12.13). В последнем легко убедиться, произведя графический анализ уравнения (12.13).

Введем обозначение

$$F(\varepsilon) = \varepsilon \int \frac{g_0(z) dz}{\varepsilon - z}$$

и, учитывая определение (12.7), перепишем (12.3):

$$F(\varepsilon) = -\frac{m}{\Delta m}.$$

Поскольку $g_0(z) \sim \sqrt{\varepsilon_m - z}$ при $z \rightarrow \varepsilon_m$, то в точке $\varepsilon = \varepsilon_m$ функция $F(\varepsilon)$ конечна и положительна ($F(\varepsilon_m) = F_m > 0$), а в малом интервале $\varepsilon - \varepsilon_m \ll \varepsilon_m$ имеет отрицательную производную:

$$F'(\varepsilon) \simeq -\varepsilon_m \int \frac{g_0(z) dz}{(\varepsilon - z)^2} < 0.$$

При $\varepsilon \gg \varepsilon_m$, в силу выбранной нами нормировки плотности колебаний $F(\varepsilon) \approx 1$, поэтому график функции $F(\varepsilon)$ обычно имеет вид кривой, представленной на рис. 2.5.

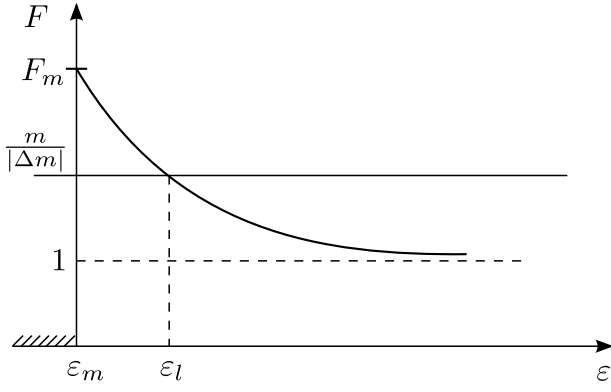


Рис. 2.5: Нахождение положения локальных частот при разных знаках Δm .

Изобразив на том же рисунке горизонтальную прямую, соответствующую правой части (12.15), мы приходим к выводу, что решение $\varepsilon = \varepsilon_l$ существует лишь при условии $|\frac{\Delta m}{m}| F_m > 1$. Если это условие выполнено, то решение уравнения (12.13) дает дискретную частоту ε_l , лежащую вне полосы непрерывного спектра (рис. 2.5, $\varepsilon_l = \omega_l^2$).

Таким образом, для возникновения колебания с дискретной частотой, расположенной вблизи акустической полосы, изотоп должен обладать массой M удовлетворяющей условию

$$M < m \left(1 - \frac{1}{F_m} \right) < m$$

Покажем, что амплитуда соответствующего колебания действительно отлична от нуля лишь в некоторой области вблизи точечного дефекта.

Амплитуда локальных колебаний дается формулой (12.9), из которой следует, что ее координатная зависимость полностью определяется поведением функции Грина идеального кристалла. Перепишем функцию Грина в виде следующего интеграла:

$$\begin{aligned} G_\varepsilon^0(\vec{n}) &= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{\exp i \vec{k} \vec{r}(\vec{n})}{\varepsilon - \omega_0^2(\vec{k})} = \\ &= \frac{V_0}{(2\pi)^3} \int \frac{\exp(i \vec{k} \vec{r}(\vec{n})) d^3 k}{\varepsilon_0^2(\vec{k})}. \end{aligned}$$

Как всегда в подобных интегралах, их поведение на больших расстояниях ($r \ll a$) в основном определяется видом подынтегральной функции при малых значениях k ($ak \ll 1$). Другими словами, основной вклад в интеграл (12.17) при больших r дает интегрирование по области малых волновых векторов, где закон дисперсии идеального кристалла квадратичен по k .

$$\omega_0^2(\vec{k}) = \omega_1^2 + \gamma^2 k^2, \quad \gamma^2 \sim (\omega_2^2 - \omega_1^2) a^2.$$

Учтем этот закон дисперсии, заменив $\varepsilon_1 = \omega_1^2$, и выполним требуемое в (12.17) интегрирование:

$$\begin{aligned} &\int \frac{\exp(i \vec{k} \vec{r} d_3 k)}{\varepsilon_1 - \varepsilon + \gamma^2 k^2} = \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{\varepsilon_1 - \varepsilon + \gamma^2 k^2} \int_0^\pi e^{(i k r \cos(\theta))} \sin(\theta) d\theta = \end{aligned}$$

$$= \frac{2\pi^2}{\gamma^2 r} \exp\left(-\frac{r}{\gamma} \sqrt{\omega_1^2 - \omega^2} \frac{r}{\gamma}\right).$$

Подставим полученный результат в формулу (12.17) и обозначим $\vec{r} = \vec{r}(\vec{n})$:

$$G_\varepsilon^0(\vec{n}) \sim \frac{1}{r} \left(-\sqrt{\omega_1^2 - \omega^2} \frac{r}{\gamma} \right)$$

Подставим (12.18) в формулу (12.9):

$$u(\vec{n}) \sim \frac{u(0)}{r} \exp\left(-\frac{r}{l}\right),$$

где введена характерная длина l , определяющая область локализации колебаний с дискретной частотой:

$$l = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_l}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_1^2 - \omega_l^2}}.$$

Таким образом, амплитуда локального колебания действительно быстро убывает с ростом расстояния r и l — длина на которой происходит это убывание.

Сам факт существования дискретной частоты, отделенной конечным интервалом от частот полосы непрерывного спектра приводит к появлению особенностей в частотных зависимостях различных характеристик процессов рассеяния и поглощения. Соответствующие резонансные особенности появляются у амплитуд рассеяния различных частиц (например, нейтронов) на локальных дефектах.

Рассмотрим локальные колебания точечного дефекта, который создается примесью замещения, когда место атома основного элемента занято "чужим" атомом. Такого же типа дефект создает вакансии в узле. При наличии этого типа дефекта меняются как масса соответствующего узла, так и постоянные упругой связи этого узла с соседними. Поэтому уравнение (12.8) должно быть заменено более общим (дефект расположен в узле $\vec{n} \equiv 0$):

$$\begin{aligned} \varepsilon u(\vec{n}) &= \frac{1}{m} \sum_{\vec{n}'} \alpha(\vec{n} - \vec{n}') u(\vec{n}') = \\ &= \sum_{\vec{n}'} U(\vec{n}, \vec{n}') u(\vec{n}') - \varepsilon \frac{\Delta m}{m} u(0) \delta_{n0} \end{aligned}$$

Где матрица $U(\vec{n}, \vec{n}')$ определяет созданное дефектом возмущение силовых коэффициентов идеальной решетки $\alpha(\vec{n} - \vec{n}')$

Если уравнение (12.21) описывает акустические колебания кристалла, то матрица возмущения должна обладать свойством, аналогичным (4.3):

$$\sum_{\vec{n}'} U(\vec{n}, \vec{n}') = \sum_{\vec{n}} U(\vec{n}, \vec{n}') = 0.$$

Отыскание локальных частот у любого точечного дефекта, в принципе, не отличается от нахождения таковых у дефекта-изотопа. Однако процедура становится очень громоздкой. Ввиду ее очевидности мы не будем ее демонстрировать.

Обратимся к анализу колебаний кристалла с одномерным (линейным) дефектом — дислокацией. Для анализа колебаний кристалла с дислокацией сделаем ряд предположений:

1) малые колебания (вблизи их новых положений равновесия в присутствии дислокации), поэтому в нулевом приближении ось дислокации можно считать фиксированной.
2) дислокация прямолинейна и ее ось перпендикулярна плоскости симметрии кристалла.

Направим ось z вдоль линии дислокации и обозначим через ξ двумерный радиус-вектор в плоскости xOy : $\vec{r}' = (\xi, z)$, $\xi = (x, y)$

Если принять, что дислокация не влияет на величину плотности вещества вдоль своей оси, то вносимое дислокацией возмущение будет связано с локальным изменением силовой матрицы. При анализе длинноволновых колебаний кристалла ($\lambda \gg a$) это возмущение естественно считать сосредоточенным на оси дислокации. Тогда рассматривая в скалярной модели смещение атомов кристалла как непрерывную функцию координат: $u = u(\xi, z)$, можно представить уравнение колебаний в виде

$$\omega^2 u(\xi, z) - \frac{1}{m} \sum_{\vec{n}'} \alpha(\vec{n} - \vec{n}') u(\xi', z') = a^2 \delta(\xi) \sum_{z'} U(z - z') u(0, z')$$

где $\delta(\xi)$ - двумерная δ -функция ($\delta(\xi) = \delta(x)\delta(y)$); суммирование по узлам кристаллической решетки может быть изменено интегрированием:

$$\sum_z \dots = \frac{1}{a} \int dz, \quad \sum_{\vec{n}} \dots = \frac{1}{a^2} \int dxdy \dots, \quad \sum_{\vec{n}} \dots = \frac{1}{V_0} \int dV \dots$$

Функция $U(z)$ в ... описывающая возмущение силовой матрицы, не зависит от частоты, является четной функцией от z и удовлетворяет очевидному требованию

$$\sum_z U(z) = 0$$

Используем однородность кристалла вдоль направления Oz и применим одномерное преобразование Фурье относительно координаты z :

$$u(\xi, z) = \frac{a}{2\pi} \int \chi_k(\xi) e^{ikz} dk, \\ \chi^k(\xi) = \sum_z u(\xi, z) e^{-ikz}$$

Уравнение для $\chi_k(\xi)$ выводится стандартным путем из ...:

$$\omega^2 \chi_k(\xi) - \sum_{\xi'} \Lambda_k(\xi - \xi') \chi_k(\xi') = a^2 \delta(\xi) U_k \chi_k(0)$$

где

$$\Lambda_k(\xi) = \frac{1}{m} \sum_{n_z} \alpha(\vec{n}) e^{-ikn_z}, \quad U_k = \sum U(z) e^{-ikz}$$

Уравнение ... является уравнением колебаний двумерного кристалла со специфическим "точечным" дефектом в начале координат. Компонента $k = k_z$ входит в это уравнение как параметр и определяет интенсивность локального

возмущения U_k . В случае $ak \ll 1$ для функции U_k имеет место очевидное разложение вытекающее из...

$$U_k = -k_2 W_0, \quad W_0 = \frac{1}{2} \sum U(z) z^2$$

Для нахождения функции $\chi_k(\xi)$ воспользуемся двумерным разложением Фурье

$$\chi_k(\xi) = \frac{a^2}{(2\pi)^2} \int \chi(\vec{\kappa}, k) e^{i\vec{\kappa}\xi} d^2 \kappa, \\ \chi(\vec{\kappa}, k) = \sum_{\xi} \chi_k(\xi) e^{-i\vec{\kappa}\xi}$$

где $\vec{\kappa}$ - двумерный волновой вектор, $\vec{\kappa} = (k_x, k_y)$.

Компоненты Фурье $\chi(\kappa, k)$ определяются из соотношения

$$[\omega^2 - \omega_0^2(\vec{\kappa}, k)] \chi(\vec{\kappa}, k) = -k^2 W_0 \chi_k(0),$$

в котором функция $\omega_0^2(\vec{\kappa}, k)$ задает закон дисперсии идеального кристалла.

Предположим для дальнейшего упрощения выкладок, что ось Oz является осью симметрии четвертого, или шестого порядка. Тогда в длинноволновом пределе

$$\omega_0^2(\vec{\kappa}, k) = s_0^2 \kappa^2 + s^2 k^2.$$

Зависимость амплитуды колебаний от ξ следует непосредственно из ...

$$\chi_k(\xi) = -(ak^2) \frac{W_0}{(2\pi)^2} \chi_k(0) \int \frac{\cos(\vec{\kappa}\xi) d^2 \kappa}{\omega^2 - s^2 k^2 - s_0^2 \kappa^2}.$$

Положив тут $\xi = 0$, получим уравнение для частот колебаний, амплитуда которых описывается этой формулой

$$1 + (ak)^2 \frac{W_0}{2\pi} \int_0^{\kappa_0} \frac{\kappa d\kappa}{\omega^2 - s^2 k^2 - s_0^2 \kappa^2} = 0.$$

Верхний предел интегрирования тут имеет порядок величины $\kappa_0 \sim 1/a$. То обстоятельство, что предел интегрирования в этой формуле определяется лишь по порядку величины и имеет характер некоторого параметра "образования", связано с модельным предположением о точечном характере возмущения в уравнении (14.5). Предположение () о дельтаобразной локализации возмущения на оси дислокации точно так же, как и закон дисперсии (), справедливо только для длинноволновых колебаний ($ak \ll 1$). В тоже время интегрирование в () и () должно распространяться на весь интервал непрерывного спектра частот. А поскольку подынтегральное выражение в () не обладает нужным для сходимости интеграла убыванием на бесконечности, мы вынуждены формально ввести естественный верхний предел интегрирования по квазиволновым векторам ($a\kappa_0 \sim \pi$).

Упростим уравнение ():

$$1 - (a)^2 \frac{W_0}{4\pi s_0^2} \ln \frac{s_0^2 \kappa_0^2}{s^2 k^2 - \omega^2} = 0,$$

опустив малые члены порядка величины

$$\frac{s^2 k^2 - \omega^2}{s_0^2 \kappa_0^2} \sim \frac{s^2 k^2}{s_0^2 k_0^2} \sim \frac{s^2 k^2}{\omega_D^2} \sim (ak)^2 \ll 1.$$

Как и в случае с изолированным изотоп-дефектом, уравнение () относительно квадратов собственных частот ω^2 имеет решение только при определенном знаке W_0 , а именно для $W_0 > 0$, причем обязательно $\omega^2 \geq s^2 k^2$. Если условие $W_0 > 0$ выполнено, то () всегда имеет решение:

$$\omega^2 = s^2 k^2 = s^2 k_0^2 \exp\left\{-\frac{4\pi s_0^2}{(ak)^2 W_0}\right\}$$

Напомним, что здесь $W_0 > 0$ и $s_0 \ll \omega_D$.

Частоты () обладают характерной для двумерных задач экспоненциальной зависимостью от интенсивности возмущения, т.е. от величины U_k . Существование локализованных вблизи дислокации колебаний требует определенного знака возмущения ($W_0 > 0$), и при нужном знаке соответствующая частота всегда отделена некоторой конечной щелью $\delta\omega$ от начала спектра собственных колебаний кристалла:

$$\delta\omega = sk - \omega_l \sim \frac{\omega_D^2}{sk} \exp\left\{-\frac{4\pi s_0^2}{(ak)^2 W_0}\right\}.$$

Мы рассмотрели бегущие вдоль дислокации упругие волны, существование которых обусловлено изменением упругих модулей в ядре дислокации.

Для идеального кристалла, в том числе подверженного однородной деформации, частоты нормальных колебаний атомов кристалла можно определить как собственные значения динамической матрицы [Моделирование на ЭВМ атомных конфигураций дефектов в металлах.]

2.11 Совместное рассмотрение.

Декартовы координаты смещений атомов линейно выражаются через нормальные координаты, и наоборот. Преобразование унитарно. (Элементарная теория колебательной структуры...). Нормальные колебания должны рассматриваться как квантовомеханические переменные (модальности).

Глава 3

Классическая механика кристаллов.

3.1 Классические уравнения движения.

Классические уравнения движения применимы для тяжелых частиц при скоростях $v \ll c$, c - скорость света, и массах $m \gg m_e$, m_e - масса электрона. Следовательно, только медленные движения (медленнее чем температурные вибрации) атомов, ионов и молекул могут быть рассмотрены, и внутренняя электронная структура игнорируется.

Рассмотрим совокупность материальных точек - механическую систему. Состояние этой системы определится если задать положение, скорость каждой точки. Определим функцию от положений и скоростей, и пусть эта функция зависит так же и от времени:

$$L = (q, \dot{q}, t)$$

Если мы произвольно зададим функции $q_i = q(t_i)$ в интервале времени $t_0 \leq t \leq t_1$, $i = 1, \dots, n$ то получим некоторое движение. В расширенном $n + 1$ мерном пространстве, где координатами являются величины q_i и время t , это движение изобразится некоторой кривой. Рассмотрим интеграл

$$W = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

В соответствии с принципом Гамильтона этот интеграл должен принять минимальное значение.

Теперь будем рассматривать все такие кривые - пути, проходящие через две заданные точки пространства $M_0(t_0, q_i^0)$ и $M_1(t_1, q_i^1)$, т.е. все возможные движения, переводящие систему из заданного начального положения q_i^0 , которое она занимала в момент t_0 , в данное конечное положение q_i^1 , которое она занимает в момент времени t_1 . При этом заранее фиксируются начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1 , начальное и конечное положение системы. В остальном движения произвольны.

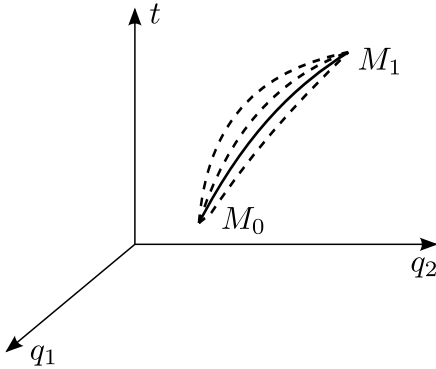


Рис. 3.1: Возможные пути.

Запишем это множество путей как произвольное однопараметрическое семейство кривых.

$$q_i = q_i(t, \alpha)$$

$$(t_0 \leq t \leq t_1; -\gamma \leq \alpha \leq \gamma; i = 1, \dots, n)$$

содержащее в себе при $\alpha = 0$ кратчайший путь; при $\alpha \neq 0$ получаются так называемые окольные пути. Пусть все эти пути имеют общее начало M_0 и общий конец M_1 :

$$q_i(t_0, \alpha) = q_i^0, q_i(t_1, \alpha) = q_i^1$$

$$(-\gamma \leq \alpha \leq \gamma; i = 1, \dots, n).$$

Тогда W представляет собой функцию параметра α , а выражение () функционал:

$$W(\alpha) = \int_{t_0}^{t_1} L[t, q_i(t, \alpha), \dot{q}_i(t, \alpha)] dt$$

Вычислим вариацию этого функционала, т.е. дифференциал по α :

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt = \\ &= \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} + \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta q_i dt \end{aligned}$$

Здесь мы преобразовали интеграл при помощи интегрирования по частям

$$\begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{p}_i} \delta q_i \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

используя для этого перестановочность операции варьирования δ и операции дифференцирования по времени d/dt (так как варьирование производится при неизменном t):

$$\begin{aligned} \delta \dot{q}_i &= \delta \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) = \frac{d}{d\alpha} \frac{d}{dt} q_i(t, \alpha) \delta \alpha = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{d\alpha} q_i(t, \alpha) \delta \alpha \right] = \frac{d}{dt} \delta q_i \end{aligned}$$

Кроме того, так как начало и конец пути не варьируются, то при $t = t_0$ и при $t = t_1$ вариации $\delta q_i = 0$. Поэтому проинтегрированная часть оказалась равной нулю.

Из условия $\delta W = 0$ и () следует что

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Эти уравнения называются уравнениями Лагранжа. Таким образом для прямого пути функции $q_i = q_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) удовлетворяют уравнениям Лагранжа. Прямые пути называют также экстремалиями.

Итак мы получили уравнения движения в координатах (q, \dot{q}) - координатах Лагранжа, исходя из некоторой функции $L(q, \dot{q})$ - функции Лагранжа.

Гамильтон предложил использовать вместо \dot{q} импульсы равные

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

поэтому переменные $t, q_i, p_i, i = 1, \dots, n$ будем называть переменные Гамильтона, а уравнения движения в этих переменных уравнениями Гамильтона. Отсюда и из уравнений лагранжа следует

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \dot{p}_i$$

Гамильтон ввел также в рассмотрение функцию:

$$H(t, q_i, p_i) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$$

Эта функция имеет простой физический смысл, а именно совпадает с полной механической энергией системы:

$$H = T + V$$

Составим полный дифференциал от этой функции

$$dH = \frac{\partial H}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

с другой стороны из (6.1) находим

$$dH = \sum_{i=1}^k p_i d\dot{q}_i + \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i - dL$$

Дифференциал функции Лагранжа $L = L(t, q_i, \dot{q}_i)$ равен:

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i.$$

Так как

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}; \quad \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i},$$

То будем иметь

$$dL = \frac{\partial L}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^k \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^k p_i d\dot{q}_i.$$

Подставляя теперь найденное значение dL в формулу (9.6) получает следующее выражение для дифференциала dH :

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial t} dt - \sum_{i=1}^k \dot{p}_i dq_i + \sum_{i=1}^k \dot{q}_i dp_i.$$

Отсюда путем сравнения полученного выражения с формулой (6.8) находим:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{dL}{dt}$$

и

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\dot{p}_i, \quad \frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i.$$

Это и есть уравнения Гамильтона.

3.2 Классические уравнения движения кристаллической решетки.

Классические

3.3 Некоторые виды межмолекулярных потенциалов.

3.4 Модель деформированных монокристаллических слоев.

Классическая граничная задача континуальной механики может быть сформулирована с учетом атомистической структуры материала. Одной из трудностей на этом пути является то, что часто не существует естественного способа определения параметра порядка. Рассмотрения единственной, изолированной дислокации недостаточно для понимания поведения материала, тогда как попытки численно смоделировать достаточное количество дислокаций требуют дорогостоящих вычислений, и неэlegantны концептуально.

Микроскопическое моделирование основано на фундаментальном допущении, что макроскопическое поведение материала состоит из микроскопических процессов, понимание которых дает возможность количественного предсказания макроскопического поведения. При микроскопическом моделировании эволюция соответствующих (микроскопических) степеней свободы описываются явно. В этом пути обычно сначала вычисляют полную энергию. Разработаны вычислительные алгоритмы минимизирующие энергию данной конфигурации - возможно метастабильной - для фиксированного набора атомов. Например, для определения структуры ядра дислокации можно взять за основу информацию о межатомных взаимодействиях.

Континуальная механика, в свою очередь, основана на допущении, что на расстоянии постоянной решетки рассматриваемое поле изменяется настолько медленно, что атомистические степени свободы можно считать "размытыми" на достаточно большой области. В частности существует явное отображение большого числа атомистических степеней свободы в единственное векторное поле смещений, именно:

$$\{\mathbf{r}_i \rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{x})\} \quad (3.1)$$

Одним из значительных достижений континуального подхода является значительное уменьшение степеней свободы исследуемой модели. Заменяя множество атомистических координат $\{\mathbf{r}_i\}$ на поле смещений приходим вместо $3N$ дискретных дифференциальных уравнений к системе из 3-х ДУрЧп. Уже эти уравнения можно исследовать методами анализа такими как метод конечных элементов.

Рассмотрим два произвольных атома с номерами m и n . Пусть $v(n)$ - это координата равновесного положения атома, а $u(n)$ - вектор его смещения. Тогда изменение квадрата расстояния между рассматриваемыми атомами в результате их смещений

$$\begin{aligned} \delta l^2(m, n) = \\ |v(m) + u(m) - v(n) - u(n)|^2 - |v(m) - v(n)|^2 = \\ [v(m - n) + \delta u(m, n)]^2 - v^2(m - n), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где для сокращения записи обозначено

$$\delta u(m, n) = u(m) - u(n). \quad (3.3)$$

Представим изменение квадрата расстояния в виде

$$\delta l^2(m, n) = 2l(m, n), \quad (3.4)$$

введя обозначение

$$I(m, n) = v(m - n)\delta u(m, n) + \frac{1}{2}\delta u^2(m, n). \quad (3.5)$$

отсюда следует симметричность этого инварианта по n, m

$$I(m, n) = I(n, m). \quad (3.6)$$

Величина $I(m, n)$ является инвариантом второго порядка по отношению к смещениям пары атомов. Расстояние между двумя атомами решетки инвариантно как относительно поступательного перемещения его как целого, так и относительно поворота его как целого. Изменение же потенциальной энергии между атомами происходит всегда, когда изменяется расстояние между атомами. Потенциальная энергия инвариантна относительно смещений и поворотов решетки как целого.

Рассмотрим случай когда поле смещений слабо зависит от номеров узлов, и потому смещения соседних атомов мало отличаются друг от друга. В таком длинноволновом пределе вектор смещения $u(n)$ можно считать непрерывной функцией координаты $v = v(n)$. Тогда для любой пары близких атомов, разлагая $u(m)$ в ряд около атома n запишем

$$u^i(m) = u^i(n) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} x_k(m - n) + \dots \quad (3.7)$$

- где $i, k = 1, 2, 3$ пространственные индексы. Можно положить

$$\delta u^i(m, n) = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} x_k(m - n) \quad (3.8)$$

Подставляя (3.8) в (3.5), получаем

$$I(m, n) = \varepsilon_{ik} x^i(m - n) x^k(m - n), \quad (3.9)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \frac{\partial u^l}{\partial x^i} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right). \quad (3.10)$$

Соотношение (3.10) совпадает с обычным определением тензора деформаций сплошной среды.

Правило Коши-Борна. Некоторые модели упругих кристаллов имеют значительные преимущества над чисто атомистическими моделями рассмотренными выше. Возможно самым простым примером континуальной теории является анизотропная линейная теория упругости. В частности, если материал подвергается деформации, которая параметризуется тензором малых деформаций ϵ , то плотность энергии деформации выражается соотношением:

$$W = \frac{1}{2} c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl}, \quad (3.11)$$

где c_{ijkl} - модули упругости, и общая энергия тела может быть записана просто как:

$$E^{tot} = \int_{\Omega} W(\epsilon) dV. \quad (3.12)$$

Заметим, что с помощью тензора упругих модулей энергии связанная с, возможно сложными, смещениями атомов в результате деформации, пакуется в несколько параметров материала. Линейные модули пружины являются тем мостом, который объединяет наши представления о атомистической структуре материала с континуальной, возможно нелинейной, теорией упругости.

Как только суммарная энергия определена как функция смещений атомов с их положений равновесия, на множество важных вопросов можно дать количественный ответ. Например можно найти затраты энергии на инфинитизимальную деформацию. Вспомним, что суммарная энергия кристалла может быть выражена в виде ряда по степеням смещения. Квадратичные члены этого ряда дают линейные модули упругости. Однако в этом разделе, нас будут интересовать нелинейные эффекты связанные с деформацией.

Рассматривая градиент деформации в точке - локально, можно изучать лишь однородные в пространстве деформации. При этом считается что *каждый вектор* среды получит одинаковое приращение длин и углов в соответствии с (2.99). Тогда макроскопическая деформация соответствует деформации векторов одной элементарной ячейки, это соответствие называется *привлком Коши-Борна*. Малую деформацию можно также считать однородной, тогда как уже упоминалось начальный и текущий базисы близки, квадратичные члены по смещениям исчезают и тензоры Кош-Грина и Альманси совпадают, и мы имеем снова градиент деформации.

Пусть

$$v(l) = e^l x_l, \quad l \in \mathbb{Z}^3 \quad (3.13)$$

- координаты атомов недеформированной конфигурации кристалла. Сдесь $\{x_l, l = 1, 2, 3\}$ базис Браве недеформированной решетки.

Координаты атомов в деформированной конфигурации, можно выразить соотношением:

$$v'(l) = u_{*x} v(l), \quad l \in \mathbb{Z}^3, \quad (3.14)$$

где - u_{*x} локальный градиент деформации.

Тут возможны два частных случая, длинна векторов остается неизменной, а углы между векторами меняются, и наоборот.

Рассмотрим преобразование кристалла из кубической симметрии в орторомбическую, т.е. углы между векторами остаются 90° , но длинна трех осей изменяется. Начальное и конечное состояния связываются преобразованием u_{*x} в котором только диагональные компоненты $u_{*x,11} = \alpha$, $u_{*x,22} = \beta$, $u_{*x,33} = \gamma$ отличны от нуля. С точки зрения упругой энергетики, такое преобразование несет как нелинейность так и невыпуклость (см. мат. опред. выпуклости).

В рамках представления Коши-Борна, плотность энергии $W_{u_{*x}}$ выражается как энергия на единицу объема однородно деформированной решетки и может быть рассчитана через атомистический потенциал. Следовательно, кристалл рассматривается как нелинейный упругий континуум наделенный плотностью энергии деформации. В частности, первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа и Лагранжев тензор касательной жесткости записываются так:

$$P_{ij} = \frac{\partial W}{\partial u_{*x,ij}}, \quad (3.15)$$

$$C_{ijkl} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_{*x,ij} \partial u_{*x,kl}}. \quad (3.16)$$

Таким образом, основным является предположение о том, что локальный градиент u_{*x} отображения u является также и континуальным градиентом деформации.

В качестве примера рассмотрим случай на атомарном уровне взаимодействия описываются методом погруженного атома. Тогда, плотность энергии деформации записывается в виде:

$$W = \frac{1}{\Omega} [U(\rho) + \Phi], \quad (3.17)$$

где Ω объем элементарной ячейки. И после утомительных вычислений получим

$$P_{ij} = \frac{1}{\Omega} \sum_l \left\{ \left[U'(\rho) f'(r(l)) + \frac{1}{2} \Phi'(r(l)) \right] \frac{x_i(l) x_s(l)}{r(l)} \right\} u_{*x,js}^{-1} \quad (3.18)$$

и

$$C_{ijkm} = \frac{1}{\Omega} \left\{ U''(\rho) \cdot \left[\sum_l f'(r(l)) \frac{\partial r(l)}{\partial u_{*x,ij}} \right] \left[\sum_l f'(r(l)) \frac{\partial r(l)}{\partial u_{*x,km}} \right] + \sum_l \left[\left(U'(\rho) f''(r(l)) + \frac{1}{2} \Phi''(r(l)) \right) \frac{\partial r(l)}{\partial u_{*x,ij}} \frac{\partial r(l)}{\partial u_{*x,km}} + \left(U'(\rho) f'(r(l)) + \frac{1}{2} \Phi'(r(l)) \right) \frac{\partial^2 r(l)}{\partial u_{*x,ij} \partial u_{*x,km}} \right] \right\} \quad (3.19)$$

где

$$r(l) = |v(l)|, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial r(l)}{\partial u_{*x,ij}} = \frac{v_i(l) v_s(l)}{r(l)} u_{*x,js}^{-1}. \quad (3.21)$$

и

$$\frac{\partial^2 r(l)}{\partial u_{*x,ij} \partial u_{*x,km}} = \frac{[\delta_{ik}(r(l))^2 - v_i(l) v_k(l)] v_s(l) v_d(l)}{(r(l))^3} u_{*x,js}^{-1} u_{*x,md}^{-1}. \quad (3.22)$$

В приведенных выше формулах, правило Коши-Борна используется для двух целей: использование сугубо атомистических данных для описания поведения материала; постановка краевой задачи для решения аналитическими методами.

Метод квазиконтинуума. В непосредственной близости ядра дислокации смещения атомов не описываются малой деформацией. Это следствие нелинейности и невыпуклости суммарной энергии полученной из атомистического анализа. Метод квазиконтинуума предоставляет схему вычислений на атомистическом уровне, что требуется вблизи ядра дислокации, без потери в целом удовлетворительного описания дальнедействующего поля дислокаций обеспечиваемого континуальным описанием.

В частности мы рассмотрим квазиконтинуум Тадмора (quasicontinuum theory of Tadmor). Теория строится из стандартного атомистического описания с последующим систематическим избавлением от избыточных степеней свободы. Это достигается сдерживающей возможностью

Рассмотрим моноатомный слой(поверхность). Выполняя над ним градиентную деформацию, как было отмечено, мы изменяем лишь его внутреннюю геометрию, т.е. меняем длины векторов и углы между ними.

После воздействия градиентной (однородной) деформации на идеальную кристаллическую решетку она остается идеальной.

$$\hat{v} = u_{*x}v \quad (3.23)$$

Рис.

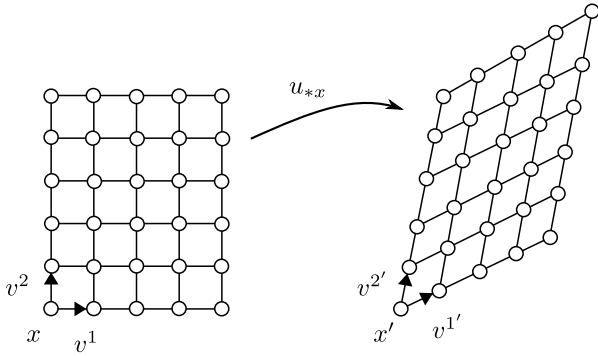


Рис. 3.2: Воздействие градиентной деформации на идеальную кристаллическую решетку.

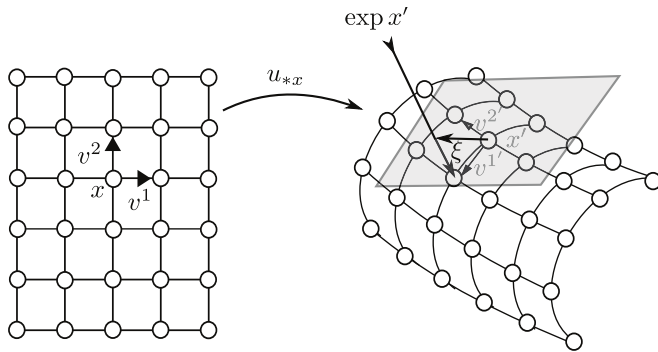


Рис. 3.3: Изометрия плоскости на часть тора. Меняется лишь способ вложения поверхности в R_3 . Внутренняя геометрия неизменна.

Запишем выражение (3.23) покомпонентно

$$\hat{v}^i = v^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} v^j \quad (3.24)$$

Это линейное преобразование в котором второй член представляет смещение частицы из v в \hat{v} .

Рассмотрим потенциальную энергию

С физической точки зрения векторы решетки имеют конечные длины, тем не менее в выражении (3.23) участвуют инфинитезимальные векторы. Взаимно однозначное соответствие между ними выполняется пока деформация почти

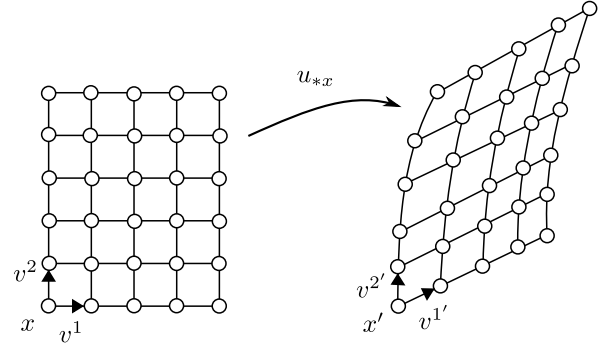


Рис. 3.4: Неоднородная деформация. Показано изменение внутренней геометрии решетки.

однородна на расстоянии векторов физической решетки. Выполняя над ним градиентные преобразования мы изменяем лишь его внутреннюю геометрию, т.е. меняем длины и углы.

Если мы хотим рассматривать неоднородную деформацию, то геометрические свойства тел нужно рассматривать *глобально*. Другими словами, нужно учитывать зависимость геометрических свойств от точки на M .

Деформированный вектор решетки зависит теперь не только от деформации поверхности(или кривой на поверхности) в данной точке, определяемых с помощью первой квадратичной формы, но также и от деформации в соседних точках, определяемых с помощью второй квадратичной формы.

Можно сказать, что это модель высшего порядка, так как, для поверхностей она включает не только метрику, но также и ее производные (символы кристофеля зависят от метрики и ее производной).

Модели в которых учитывается влияние соседних точек называются также *нелокальными*.

Мы можем выполнить над нашим слоем изометричное преобразование, изменив лишь способ его погружения в R^3 . Тогда внутренняя геометрия никак не изменится. Но очевидно, физическое состояние решетки изменится. Это изменение и описывается *геометрией погружения* (на основе второй квадратичной формы). Рис.

В этом случае атомы лежат на изогнутой поверхности, а векторы решетки можно представить как хорды этой поверхности. В этом случае неясно как выполнять однородную деформацию. Тем более в общем случае метрика кривизны не всегда совместима, т.е. может не существовать поверхности с такими внутренними и внешними свойствами.

Ясно, что отображение касательных пространств не может здесь применяться прямо. Однако можно использовать экспоненциальное отображение для поднятия и опускания векторов в касательное пространство и обратно.

Пусть A обозначает недеформированный вектор решетки, определенный как хорда между точками X и Y , т.е. $A = \vec{XY}$. В окрестности неособой точки экспоненциальное отображение обратимо. Предположим, что точка Y достаточно близка к точке X , так что \exp_X обратимо в точке Y . Если \exp_X^{-1} применить в точке Y то результатом будет вектор $W \in T_X M$. Этот вектор как обычно может

быть отображен градиентным отображением F в вектор $w \in T_x N$, который затем отображается в точку $z \in N$ посредством $\exp_{\Phi(X)=x}$. После этого деформированный вектор решетки может быть определен как хорда поверхности N с началом в точке x и концом в точке z .

Определим отображение

$$\mathcal{F}_X := \exp_{\Phi(X)} \circ F(X) \circ \exp_X^{-1} \quad (3.25)$$

из M в N , такое что

$$\mathcal{F}_X : M \rightarrow L_X M \rightarrow L_{\Phi(X)M} M \quad \text{которое} \quad (3.26)$$

$$Y \rightarrow \exp_X^{-1}(Y) \rightarrow w = FW \rightarrow z = \exp_{\Phi(X)}(w).$$

Тогда, данный недеформированный вектор $A = \vec{X}\vec{Y}$ решетки получается в два этапа. Сначала получается точка $z = \mathcal{F}_X(Y)$, затем вектор $\mathbf{a} = \Phi(\vec{X})z$.

Определение 3.4.1 Экспоненциальным правилом Коши-Борна называется отображение

$$\mathbf{a} = \mathcal{F}_X(A) := \exp_{\Phi(X)} \circ F(X) \circ \exp_X^{-1}(A). \quad (3.27)$$

Это отображение преобразует векторы недеформированной решетки в векторы деформированной в соответствии геометрий непрерывно деформированного тела.

Прямое применение этой модели связано с практическими трудностями, которые возникают при определении геодезических. Однако можно воспользоваться аппроксимацией, редуцирующей модель, все же, к локальной, но практически всегда вычислимой.

Замечание. Отображение \mathcal{F}_X , отображает точки M в N внутренне, т.е. может быть выполнено "изнутри" многообразия не прибегая к объемлющему евклидовому пространству. Тем не менее экспоненциальное правило Коши-Борна всегда внешнее. Его внешняя часть обусловлена тем, что векторы - хорды поверхности (или кривой на поверхности).

В этом расширенном кинематическом правиле, градиент деформации выражает изменение внутренней длины между атомами (определяемой как кратчайшая кривая между ними в многообразии), и также внутренних углов, но не обязательно длин и углов в объемлющем евклидовом пространстве, которые и являются объектом исследований в атомистических моделях. В действительности, при рассмотрении поверхностей локальная аппроксимация экспоненциального правила Коши-Борна зависит от второй квадратичной формы, объекта внешней геометрии.

Для наглядности рассмотрим случай цепочки атомов.

Энергия деформации атомистической системы состоит из энергии растяжения векторов решетки $V_x(a_k)$ и энергии отклонения векторов от первоначального положения V_θ :

$$U_{chain}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}^n) = \sum_{k=1}^{n_B} V_s(a_k) + \sum_{i=1}^{m_B} V_\theta(\Theta_i), \quad (3.28)$$

где a_k обозначает межатомное расстояние, Θ_i обозначает угол отклонения связи. Такой вид потенциала выбран для простоты, но эта модель может быть обобщена для более реалистичных потенциалов. Экспоненциальное правило Коши-Борна обеспечивает связь между непрерывной деформацией и дискретной структурой кристаллической решетки, и совместима с любым выбором межатомных потенциалов. Так как начальное состояние выбрано плоским,

экспоненциальное правило Коши-Борна упрощается до $\mathbf{a} = \exp_{\Phi(X)} \circ F(X) \mathbf{A}$.

Деформационное отображение описывается его евклидовыми компонентами

$$[\mathbf{F}] = [\Phi^1_{,X}, \Phi^2_{,X}]$$

где $(\cdot)_{,X}$ обозначает дифференцирование по X .

Тензор деформации Грина C это скаляр, чей корень квадратный это растяжение Λ деформированной цепочки.

$$\Lambda = \sqrt{C} = \sqrt{(\Phi^1_{,X})^2 + (\Phi^2_{,X})^2}$$

Кривизна k деформированной цепочки может быть записана как:

$$k = \frac{1}{\Lambda^3} (\Phi^2_{,X} \Phi^1_{,XX} - \Phi^1_{,X} \Phi^2_{,XX}), \quad (3.29)$$

И геометрически может быть представлена как величина обратная радиусу кривизны.

Как уже упоминалось, нахождение геодезических связано с интегрированием нелинейной системы уравнений, что связано с математическими трудностями, поэтому экспоненциальное правило Коши-Борна может быть аппроксимировано. В этой аппроксимации энергия деформации зависит от локальной деформации кривой на которой лежит цепочка.

Сопоставим каждой точке кривой окружность с радиусом $r = \frac{1}{k}$. Таким образом, окружность локально представляет собой часть рассматриваемой кривой. Экспоненциально отображение окружности определено. Геодезическая окружности, очевидно, суть сама окружность.

Первая часть экспоненциального правила Коши-Борна отображает вектор решетки \mathbf{A} длины A в вектор касательный к кривой, евклидовы компоненты которого $[(w)] = A[(F)]$ и является уже рассмотренной ранее градиентной деформацией. Следовательно, его длина это

$$w = \sqrt{C} A \quad (3.30)$$

Экспоненциально отображение окружности показано на Рис.

Рис.

Длина касательного вектора w переносится на геодезическую отображением $\exp_{\Phi(X)w}$. И мы имеем все точки для построения горды деформированной кривой в рассматриваемой точке. Таким образом длина дуги окружности определяемая вектором \mathbf{a} равна w .

Пусть θ обозначает угол образованный двумя векторами деформированной решетки. Рассмотрим тереугольник $aO\Phi(X)$. Это равнобедренный треугольник и его равные углы равны $\theta/2$. Существует третий угол, образованный дугой окружности длины w , он равен $\gamma = \pi$. Учитывая что $r = 1/k$:

$$w = \gamma r = (\pi - \theta)/k. \quad (3.31)$$

Следовательно длина \mathbf{a} :

$$a = \|\mathbf{a}\| = 2r \sin \frac{\gamma}{2}, \quad (3.32)$$

следовательно

$$a = \frac{2}{k} \sin \frac{k w}{2}, \quad] \theta = \pi - k w. \quad (3.33)$$

Заметим, что величины a и θ , являющиеся аргументами (3.28), выражены в терминах континуальной деформации. Таким образом, мы можем рассматривать a и θ , как величины определяющие величину деформации, выраженные в терминах C и k , и эти величины будут использоваться для построения моделей сред с учетом микроструктуры.

В случае цепочки атомов ячейка характеризуется одним вектором a , и одним углом θ . Энергия этой деформированной ячейки отождествляется с энергией деформации континуума умноженной на недеформированный объем этой ячейки $A \cdot W(\Phi) = V_s(a) + V_\theta(\theta)$.

Континуальная энергия деформации зависит от деформационного отображения Φ через величины C и k характеризующие деформацию локально.

Следовательно упругий потенциал цепочки, лежащей на непрерывной кривой может быть записан в виде:

$$W(C, k) = \frac{1}{A} \left[V_x \left(\frac{2}{k} \sin \frac{k\sqrt{CA}}{2} \right) + V_\theta (\pi - k\sqrt{CA}) \right] \quad (3.34)$$

Общая энергия деформации континуальной системы аппроксимирующая атомистическую энергию, может быть записана в виде

$$U_{rope}(\Phi) = \int_{\Omega_0} W(C, k) d\Omega_0. \quad (3.35)$$

Следует заметить, что при изометричных преобразованиях атомной цепочки, согласно правилу Коши-Борна энергия цепочки останется неизменной, что очевидно неверно (если только преобразования не являются поворотами, или сдвигами цепочки как целого). В свою очередь экспоненциальное правило Коши-Борна опишет изменение энергии в соответствии в выбранной модели межатомных взаимодействий.

Рассмотрим теперь применение экспоненциального правила Коши-Борна к двумерным решеткам. Используем ЕП-КБ аппроксимацию в главных направлениях. Будем отдельно рассматривать каждое главное направление V_1 и V_2 тензора кривизны, и две поправки для касательных деформированных векторов решетки w полученных экспоненциальным отображением. Для локальной аппроксимации выберем два цилиндра, радиусов $\frac{1}{k_1}$ и $\frac{1}{k_2}$.

Пусть имеем изначально плоский кристалл, экспоненциальное правило Коши-Борна упрощается до

$$a = \exp_{\Phi(X)} \circ F(X)A, \quad (3.36)$$

Таки образом M и $L_X M_0$ отождествляются. Первая часть ЭПКБ является градиентным преобразованием

$$w = FA$$

Замечание. Касательный вектор w является продолжением вектора A .

Задача на собственные значения определяет главные направления выраженные в недеформированной конфигурации, и главные кривизны поверхности N .

На рисунке видно, что только продолжения V_1 и V_2 , которые обозначены v_1 и v_2 соответственно являются ортогональными в евклидовом смысле. На этом рисунке также показан общий недеформированный вектор решетки A .

Заметим, что v_1 , v_2 и w векторы касательные к поверхности.

Рассмотрим вспомогательную евклидову координатную систему в \mathbb{R}^3 , $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3\}$ с центром в точке $x = \Phi(X)$. Пусть ее оси параллельны к v_1 , v_2 и $v_1 \times v_2$. Ассоциированный базис обозначим $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}$. Заметим, что \mathcal{B} и $\tilde{\mathcal{B}}$ повернуты друг относительно друга только как целое.

Рассмотрим, также ограничение координатной системы на $L_x M$, $\{\tilde{x}^1, \tilde{x}^2\}$ с базисом $\tilde{\mathcal{B}}_{L_x M} = \{v_1, v_2\}$.

Определим угол β между v_1 и w (лежат в $L_{\Phi(X)} M$).

Вспомним, что главные направления нормированы на C . Тогда для угла β можно записать:

$$\cos \beta = \frac{V_1 \cdot C^b \cdot A}{\sqrt{A \cdot C^b \cdot A}}, \quad \sin \beta = \frac{V_2 \cdot C^b \cdot A}{\sqrt{A \cdot C^b \cdot A}}. \quad (3.37)$$

Длина касательного деформированного вектора w может быть получена как

$$\|w\| = \sqrt{A \cdot C^b \cdot A} = \sqrt{C_{AB} A^A A^B}. \quad (3.38)$$

Компоненты w в базисе $\tilde{\mathcal{B}}_{L_x M}$ могут быть вычислены как проекции w на базисные векторы (посредством скалярного произведения) следующим образом:

$$\begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle w | v_1 \rangle \\ \langle w | v_2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \cdot C^b \cdot A \\ V_2 \cdot C^b \cdot A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{AB} A^A (V_1)^B \\ C_{AB} A^A (V_2)^B \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

На рисунке Рис. представлено экспоненциальное правило Коши-Борна для поверхности с отрицательной Гауссовой кривизной.

Рис.

Рассмотрим вспомогательный цилиндр C_∞ радиуса $\frac{1}{k_1}$ проходящий через точку $x = \Phi(X)$ с касательным пространством $L_x M$. Его ось перпендикулярна вектору v_1 . Используя определение координатной системы данное выше, цилиндр C_1 может быть изометрически отображен из $L_x M$ в \mathbb{R}^3 по формуле:

$$C_\infty : f_1(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = \left\{ \frac{1}{k_1} \sin k_1 \tilde{x}^1; \tilde{x}^2; \frac{1}{k_1} (1 - \cos k_1 \tilde{x}^1) \right\} \quad (3.40)$$

Геодезические цилиндра проходящие через точку x и касательные к w дается формулой

$$c(s) = \left\{ \frac{1}{k_1} \sin[k_1(\cos \beta)s]; (\sin \beta)s; \frac{1}{k_1} (1 - \cos[k_1(\beta)]) \right\} \quad (3.41)$$

где s параметр длины дуги.

Полагая $s = \|w\|$ образ вектора w при экспоненциальном отображении выразится в виде:

$$[\exp_{x, C_1} w] = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \sin k_1 w^1 \\ w^2 \\ \frac{1}{k_1} (1 - \cos k_1 w^1) \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.42)$$

Окончательно, поправка в направлении первой главной кривизны, это разница между (3.42) и вектором w :

$$\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{k_1} \sin k_1 w^2 - w^1 \\ 0 \\ \frac{1}{k_1} (1 - \cos k_1 w^1) \end{pmatrix} \right\} \quad (3.43)$$

Для рассмотрения второй главной кривизны выберем другой вспомогательный цилиндр с радиусом $1/k_2$, во вспомогательной координатной системе

$$C_2 : f_2(\tilde{x}^1, \tilde{x}^2) = \left(\tilde{x}^1; \frac{1}{k_2} \sin k_2 \tilde{x}^2; \frac{1}{k_2} (1 - \cos k_2 \tilde{x}^2), \right) \quad (3.44)$$

и аналогично

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{k_2} \sin k_2 w^2 - w^2 \\ \frac{1}{k_2} (1 - \cos k_2 w^2) \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Экспоненциальное правило Коши-Борна $a = \exp_{\Phi(X)} \circ FA$ тогда выразится в виде отоображения

$$a = FA + \Delta w_1 + \Delta w_2 \quad (3.46)$$

Вводя обозначение $\mathcal{L}(x) = \sin x/x$, выражение для деформированного вектора решетки в ортонормальном базисе выразится в виде :

$$\tilde{B} = \begin{Bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w^1 \mathcal{L}(k_1 w^1) \\ w^2 \mathcal{L}(k_2 w^2) \\ \frac{k_1 (w^1)^2}{2} \mathcal{L}^2(k_1 w^1/2) + \frac{k_2 (w^2)^2}{2} \mathcal{L}^2(k_2 w^2/2) \end{Bmatrix}. \quad (3.47)$$

Учитывая что $k_{1,2}$ и $V_{1,2}$ получены в ходе решения задачи на собственные значения замечаем, что $[a]_{\tilde{B}}$ зависит только от недеформированного вектора решетки A , тензора деформации Грина C , и ограничения тензора кривизны.

Длина вектора решетки может быть определена просто как

$$a = \|a\| = \sqrt{a^c a^c}$$

Угол между двумя деформированными векторами

$$\theta = \arccos \frac{\langle a|b \rangle}{ab} = \arccos \frac{a^c b^c}{ab}$$

Таким образом мы получаем величины характеризующие деформацию в виде зависимостей

$$a = f(C, K; A), \quad \theta = g(C, K; A, B) \quad (3.48)$$

Кривизну поверхности M мы при $k = 2$ можем себе ясно представить, так как мы живем в объемлющем пространстве R^3 . Однако кривизна самого пространства R^3 уже не так очевидна. Для выяснения смысла этих понятий, а также места их в теории твердого тела нужно рассмотреть еще некоторые дополнительные геометрические структуры. Эти построения позволят нам по иному рассматривать дислокации в кристаллах.

3.5 Континуальная теория.

3.5.1 Идеальные кристаллы.

Рассмотрим простейший случай, когда среда считается однородной а характерная длина упругой волны много больше постоянной решетки - длинноволновое приближение. Схема смещений атомов одномерного кристалла при таких колебаниях показана на рис. 3.5

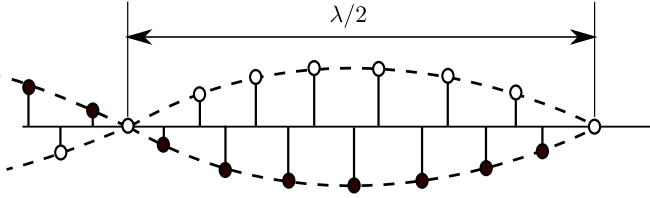


Рис. 3.5: Длинноволновые колебания одномерного кристалла со сложной решеткой.

В этом естественный шаг в решетке также мал в силу условия $a \ll \lambda$, то для анализа слабо изменяющихся в пространстве смещений можно использовать ряд упрощений. Будем считать, что во первых, "координата" атома $r = X_s(n)$ принимает непрерывный ряд значений, а, во вторых, смещение $u_s(n)$ является непрерывной функцией r . В координатном представлении эта функция в каждой точке задает гладкое, однозначное, зависящее от времени векторное поле смещений.

Так как среда однородна то отклик на внешнее механическое воздействие будет линейен, и движение среды опишется линейным дифференциальным уравнением второго порядка - волновым уравнением решением которого являются плоские волны.

Если среда находится под действием внешних сил или, в более общем случае, если любая часть среды действует с некоторой силой на соседние части, то говорят, что это тело находится в напряженном состоянии. Силы действующие на поверхность элемента объема со стороны окружающих его частей среды пропорциональны площади поверхности элемента. Сила, отнесенная к единице площади, называется напряжением.

Рассмотрим случай когда напряжение во всей среде однородно. Для этого рассмотрим четырехгранник $OABC$, рис. 3.6. Грани OBC , OAC , OAB перпендикулярны декартовым осям X_1 , X_2 , X_3 , а OP есть нормаль к плоскости ABC . Предположим, что сила k приложенная к грани ABC , причем не обязательно перпендикулярно ей, уравновешивается нормальными и тангенциальными силами, приложенными к каждой из трех других граней. Эти последние силы обозначим через t_{ik} . Индекс k отвечает нормали к грани, а индекс i - оси, которой параллелен сила. Таким образом, t_{11} представляет собой силу, которая действует на единицу поверхности и приложена к грани OBC вдоль X_1 , а t_{21} - силу, которая действует на единицу поверхности и приложена к той же грани вдоль X_2 . В состоянии равновесия сумма сил, действующих вдоль направления OX , должна быть равна сумме сил, действующих в противоположном направлении. Тогда можно записать $k_1 S_{ABC} = t_{11} S_{BOC} + t_{12} S_{COA} + t_{31} S_{AOB}$.

Направляющие косинусы l_i нормали к грани ABC

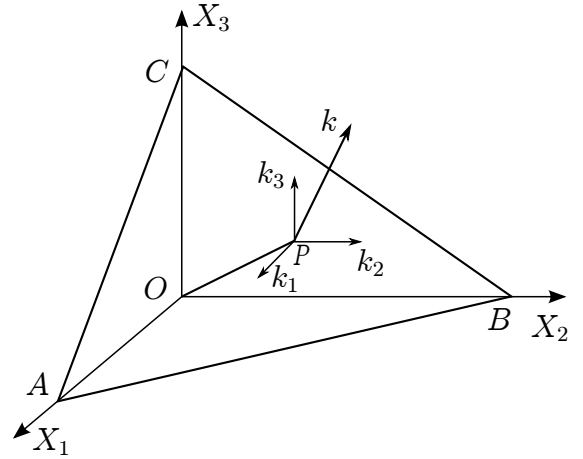


Рис. 3.6: Разложение приложенной к грани ABC силы k (отнесенной к единице площади) на компоненты.

таковы:

$$l_1 = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}; \quad l_2 = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}; \quad l_3 = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}.$$

Тогда $k_1 = t_{11}l_1 + t_{12}l_2 + t_{13}l_3$. Обобщая получим $k_m = t_{mn}l_n$. Величина t_{mn} называется тензором напряжения. Итак, тензор напряжения осуществляет связь вектора силы с вектором нормали к площадке, к которой приложена эта сила.

Рассматривая случай неоднородного (изменяющегося в пространстве) напряжения естественно приходим к волновому уравнению. Для этого выделим две плоскости AB и CD , рис 3.7. Вспомним, что напряжение это сила от-

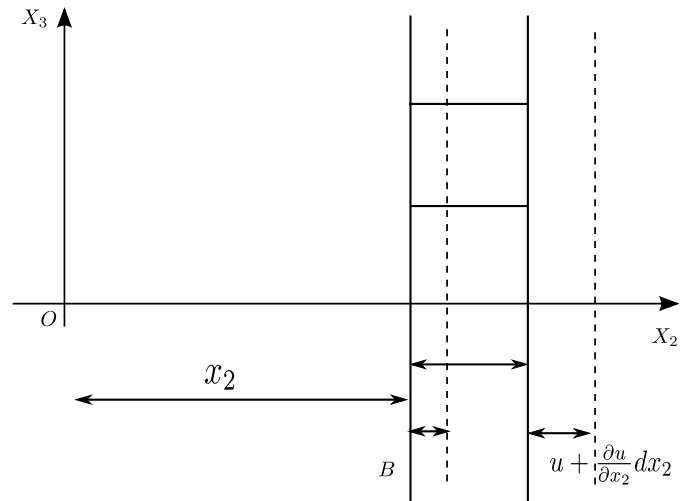


Рис. 3.7: Смещения, связанные с прохождением плоской волны в направлении OX_2

несенная к единице площади. Пусть сила проходит через точку P в направлении оси X_2 . Эта сила действует на грани EF и GH в соответствии с выражениями

$$-\left(t_{22} - \frac{1}{2} \frac{\partial t_{22}}{\partial X_2} \delta X_2\right) \delta X_1 \delta X_3$$

$$\left(t_{22} + \frac{1}{2} \frac{\partial t_{22}}{\partial X_2} \delta X_2\right) \delta X_1 \delta X_3$$

Результирующая сила есть

$$\left(\frac{\partial t_{22}}{\partial X_2} \delta X_2\right) \delta X_1 \delta X_3$$

Эта сила, действующая на единицу объема элемента $EFHG$, должна быть равна произведению массы ρ единичного объема элемента на ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$. Отсюда получаем следующее уравнение движения

$$\frac{\partial t_{22}}{\partial X_2} = \rho \ddot{u}$$

Напряжение связано с деформацией через упругие константы (жесткости)

$$t_{22} = c r_{22} = c \frac{\partial u}{\partial X_2}$$

Величина r_{22} называется тензором деформации. А $\frac{\partial u}{\partial X_2}$ компонента деформации, т.е. относительное изменение длины в направлении X_2 . Это значит, что если плоскость AB сместилась на расстояние u , тогда плоскость CD сместится на расстояние $u + (\partial u / \partial x_2) dx_2$. Тогда уравнение движения запишется в виде.

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

Деформация так же бывает однородной и не однородной. В данном случае деформация однородна. К этому вопросу мы вернемся в параграфе...

Обобщим на 3-х мерный случай. Смещение u можно записать в виде

$$u_m = r_{ml} x_l; \quad \frac{\partial u_m}{\partial x_l} = r_{ml}$$

где x_l - координаты точки, испытывающие смещения u_m . Компоненты напряжения определяются уравнениями $t_{pq} = c_{pqml} r_{ml}$, где c_{pqml} упругие жесткости (заметим что $r_{ik} = s_{ikmn} t_{mn}$, где r_{ik} компоненты тензора деформации, а s_{ikmn} упругие модули среды). После подстановки сюда r_{ml} получаем

$$t_{pq} = c_{pqml} \frac{\partial u_m}{\partial x_l}$$

$$\frac{\partial t_{pq}}{\partial x_q} = c_{pqml} \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_q \partial x_l} = \frac{\rho \partial^2 u_p}{\partial t^2}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение, с помощью которого описывается распространение упругих волн в кристаллах. Его решение позволяет представить соотношение между смещением \vec{u} и \vec{k}^* , ν и ξ в следующем виде

$$u_p = \xi_{(i)p} \exp\{2\pi i (\vec{k}_i^* \vec{r} - \nu t)\}$$

Это уравнение простой гармонической волны. По общему правилу для всех систем, способных совершать свободные гармонические колебания, частота этих колебаний пропорциональна волновому числу.

Из опытов известно, что при увеличении волнового числа - при выходе за рамки длинноволнового приближения, частота зависит от волнового числа уже нелинейно. Это явление называется дисперсией и описывается на основе рассмотрения среды с учетом ее микроструктуры.

3.5.2 Деформация.

В реальных кристаллах всегда присутствуют дефекты (вакансии, примеси, дислокации и др.). В этом метсе наука становится чрезвычайно большой. Мы же ограничимся несколькими примерами связанными с деформациями и дислокациями.

Будем считать кристалл однородной упругой средой, не учитывая дискретности его строения (континуальное приближение). Это приближение оправдано при длинах упругих волн, превышающих 10^{-6} см, что много больше межатомных расстояний, и частотах менее $10^{11} - 10^{12}$ Гц. Ультразвуковые волны используют для измерения упругих постоянных, изучения дефектов строения и ангармонизма кристаллической решетки, электронной структуры металлов и сверхпроводников.

Рассмотрим подробнее понятие однородной и неоднородной деформации.

Зафиксируем в пространстве начало координат и затем растянем струну, рис. 3.8

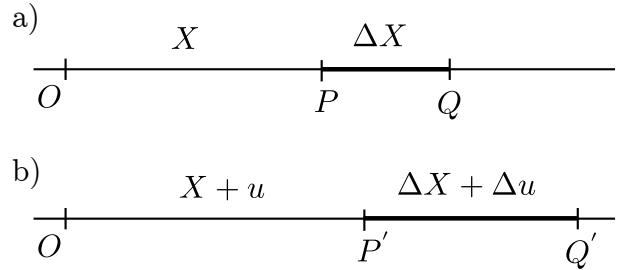


Рис. 3.8: Деформация растяжимой струны. а) до растяжения, б) после растяжения

Деформация отрезка PQ определится как отношение приращения его длины к первоначальной длине, т.е.

$$\frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

(в переменных Лагранжа)

Деформация в точке P определяется выражением

$$r = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx}$$

Таким образом, деформация в любой точке определяется просто угловым коэффициентом кривых, изображенных на рис. 3.9 Деформация есть производная смещения по координате

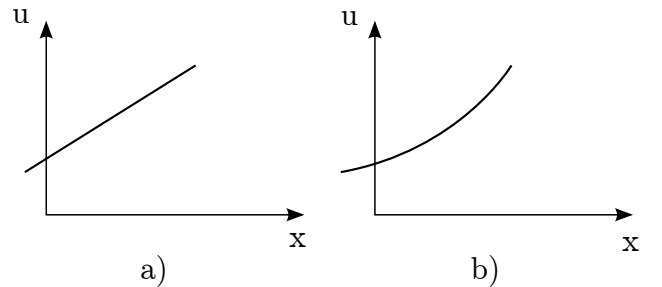


Рис. 3.9: Зависимость смещения u от координаты x в растяжимой струне. а) однородное растяжение, б) неоднородное растяжение.

динате и является безразмерной величиной. Очевидно в

соответствии с данным определением, что положение начала координат не существенна.

Для однородной деформации r - константа, и интегрирование уравнения (...)дает

$$u = u_0 + ru$$

где u_0 - смещение точки, находящейся в начале координат.

Рассмотрим теперь, как определяется деформация растяжимой плоской пластинки. Рис 3.10

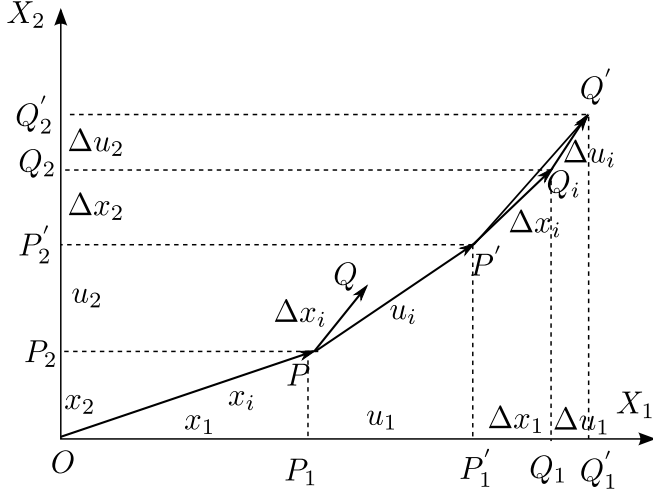


Рис. 3.10: Двумерная деформация

Найдем как смещения точек меняются с координатами. Ограничимся рассмотрением малых смещений. Пусть точка P с координатами (x_1, x_2) в неподвижной системе координат переходит после деформации в точку P' с координатами $(x_1 + u_1, x_2 + u_2)$. Следовательно, вектор u_i есть смещение точки P . Чтобы найти деформацию в этой точке пластинки, введем сначала четыре величины

$$r_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad r_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \quad r_{21} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \quad r_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}$$

или в сокращенной записи

$$r_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (i, j = 1, 2).$$

Все e_{ij} являются безразмерными величинами, малыми по сравнению с единицей. Чтобы определить их геометрический смысл, возьмем точку Q , лежащую вблизи P , так что

$$PQ = [\Delta x_i],$$

$$|PQ| = L^2 = \Delta x_i^2.$$

После деформации Q переходит в Q' ; и вектор $P'Q'$, очевидно, равен сумме двух векторов

$$[\Delta x_i] + [\Delta u_i],$$

$$|P'Q'| = L'^2 = \Delta x_i^2 + \Delta u_i^2,$$

Здесь $[\Delta u_i]$ есть разность смещений двух точек P и Q , первоначально отстоящих друг от друга на Δx_i . Тогда, как компоненты $[u_i]$ являются функциями координат, мы можем записать полное приращение вектора смещений.

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2 + \gamma_{11} \Delta x_1 + \gamma_{12} \Delta x_2$$

$$\Delta u_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \Delta x_2 \gamma_{21} \Delta x_1 + \gamma_{22} \Delta x_2$$

или кратко

$$\Delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j + \gamma_{ij} \Delta x_j \Delta x_j = r_{ij} \Delta x_j + \gamma_{ij} \Delta x_j \Delta x_j.$$

Так как $[\Delta u_i]$ и Δx_i - векторы, отсюда следует, что r_{ij} является тензором. Переходя к dx :

$$du_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = r_{ij} dx_j$$

Величину $\gamma_{ij} \Delta x_j \Delta x_j$ мы опустили как бесконечно малую высшего порядка.

Так как дифференциал это линейная часть приращения функции (вектора смещения в нашем случае) то r_{ij} характеризует линейную деформацию. Величины r_{ij} также называют градиентами деформации, а деформацию - градиентной деформацией.

Рассмотрим как будет изменяться элемент длины $|L|$ при деформации.

$$dL^2 = (dx_i)^2$$

$$(dL')^2 = (dx_i + du_i)^2 =$$

$$= dL^2 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

Поскольку во втором члене оба индекса i и k являются немymi, их можно переставить и соответственно записать этот член в явно симметричном виде

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) dx_i dx_k$$

В третьем же члене поменяем местами индексы i и l . Тогда мы получим окончательно dL'^2 в виде

$$dL'^2 = dL^2 + 2u_{ik} dx_k dx_i,$$

где

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right)$$

Этим тензором деформации и определяется изменение элемента длины при деформировании тела. В случае малых деформаций последними величинами как малыми второго порядка можно пренебречь и u_{ik} определится выражением

$$u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

Но величина r_{ik} содержит в себе больше информации чем u_{ik} . А именно r_{ik} содержит также информацию и о *кручении* при деформации. Рассмотрим теперь две ориентации вектора $[\Delta x_i]$: параллельно Ox_1 (вектор PQ_1) и параллельно Ox_2 (вектор PQ_2), рис 3.11, и тем же способом надем, как исказится прямоугольный элемент с вершиной в точке p . Для PQ_1 мы положим $\Delta x_2 = 0$; тогда уравнения (6.4) принимают вид

$$\Delta u_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 = r_{11} \Delta x_1 +$$

Смысл величин Δu_1 и Δu_2 ясен из рис. 3.11. r_{11} определяет расхождение на единицу длины отрезка PQ_1 , спроектированного на Ox_1 , ибо

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = r_{11}.$$

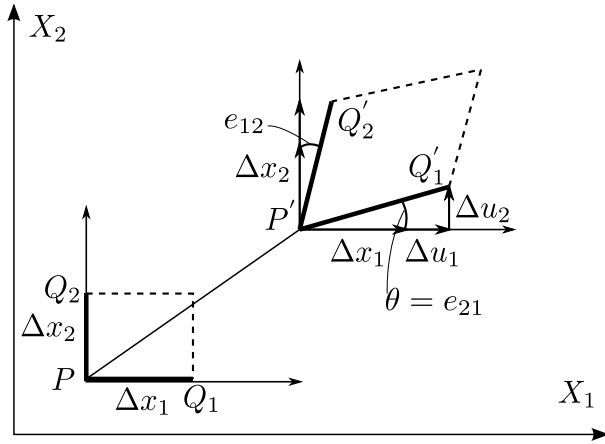


Рис. 3.11: Определение компонент деформации при двумерной деформации.

Величина r_{21} определяет поворот отрезка PQ_1 против часовой стрелки. В самом деле, тангенс угла этого поворота определяется выражением

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1 + \Delta u_1}$$

Так как мы рассматриваем только малые смещения, то u_1 и u_2 малы по сравнению с x_1 , а поэтому Δu_2 и Δu_1 малы по сравнению с Δx_1 . Следовательно,

$$\theta = \frac{\Delta u_2}{\Delta x_1} = r_{21}$$

Аналогично, величина r_{22} равна растяжению PQ_2 на единицу длины в направлении Ox_2 , а r_{12} определяет (малый) поворот по часовой стрелке PQ_2 и $P'Q'_2$.

Однако в качестве меры деформации тензор r_{ij} не годится, потому что может быть случай, когда компоненты r_{ij} но деформации тела нет. Рассмотрим простой поворот пластинки как жесткого тела в его плоскости против часовой стрелки на малый угол φ , рис 3.12. При этом как PQ_1 , так и PQ_2 поворачивается против часовой стрелки на угол φ и поэтому в соответствии с геометрическим смыслом r_{ij} , установленным выше, можно написать

$$[r_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{bmatrix}$$

Форма пластинки не искажается, но $[r_{ij}]$ не обращается в нуль, присутствуют компоненты вращения, чтобы отделить компоненты вращения от компонент r_{ij} представим этот тензор как сумму симметричного и антисимметричного тензоров

$$r_{ij} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

где $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji})$ и $\omega_{ij} = \frac{1}{2}(r_{ij} - r_{ji})$. Легко видеть, что тензор заданный таким способом, является симметричным, ибо

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(r_{ij} + r_{ji}) = \varepsilon_{ji}$$

Другой введенный тензор антисимметричен, ибо

$$\omega_{ij} = -\frac{1}{2}(r_{ji} - r_{ij}) = -\omega_{ji}$$

Выше мы видели, что в случае чистого вращения тензор $[r_{ij}]$ оказывается антисимметричным. Отсюда заключаем, что симметричная часть $[r_{ij}]$, т.е. тензор $[\varepsilon_{ij}]$, описывает деформацию. Итак, в целом

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & \frac{1}{2}(r_{12} + r_{21}) \\ \frac{1}{2}(r_{12} + r_{21}) & r_{22} \end{bmatrix}.$$

Такое разделение $[r_{ij}]$ на две части иллюстрируется фиг. 3.12.

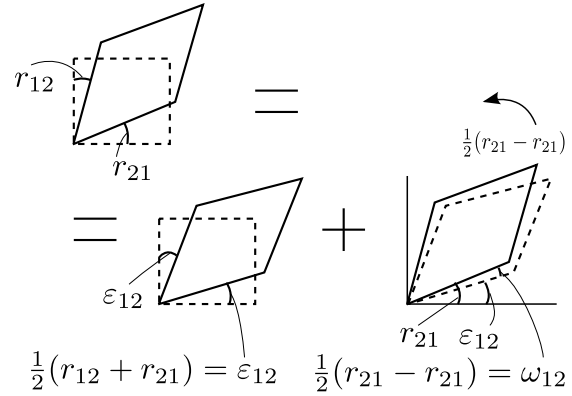


Рис. 3.12: Двумерный чертеж, иллюстрирующий то обстоятельство, что произвольная деформация (слева) равна собственно деформации (в середине) плюс поворот (справа).

Диагональные компоненты тензора $[\varepsilon_{ij}]$ представляют собой растяжения на единицу длины вдоль осей Ox_1 и Ox_2 . Компонента ε_{12} измеряет тензорную деформацию сдвига (тензорную сдвиговую деформацию). Если в недеформированном теле два линейных элемента расположены параллельно Ox_1 и Ox_2 , то после деформации угол между ними будет равен $\frac{1}{2}\pi - 2\varepsilon_{12}$ (см. средний чертеж на рис. 3.12). Заметим в частности, что тензорная деформация сдвига ε_{12} равна половине изменения угла между двумя указанными элементами. Теперь рассмотрим однородную двумерную деформацию.

Когда деформация однородна, все компоненты r_{ij} являются константами и интегрированы уравнения (6.3) дает

$$u_i = (u_0)_i + r_{ij}x_j \quad (i, j = 1, 2).$$

где $(u_0)_i$ - смещение точки, находящейся в начале координат.

Если на недеформированной пластинке проведен кривая $f(x_1, x_2) = 0$, то после деформации она переходит в $f(x'_1, x'_2) = 0$, где

$$x'_i = x_i + u_i = (u_0)_i + x_i + \varepsilon_{ij}x_j$$

Эта замена переменных линейна, а отсюда следует, что при однородной деформации:

- 1) прямая остается прямой;
- 2) параллельные линии остаются параллельными
- 3) все прямые линии, параллельные между собой, удлиняются или сокращаются в одинаковой степени;

4) эллипс переходит в иной эллипс, в частности окружность становится эллипсом.

Под действием внешних нагрузок или источников внутренних напряжений в кристалле может возникнуть неоднородная статическая деформация, искажающая кристаллическую решетку, рис. 3.13

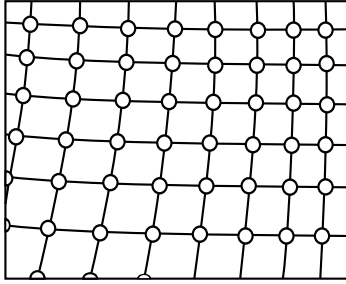


Рис. 3.13: Схема искаженной кристаллической решетки.

Если макроскопические характеристики кристалла существенно изменяются на расстояниях порядка δL и выполняется условие $\delta L \gg \bar{\lambda}$ то представление о распространении волн с определенным волновым числом можно сохранить вводя волновые пакеты, принадлежащие интервалу волновых векторов δk , где

$$\delta \gtrsim \frac{1}{\delta k} \gg \bar{\lambda}$$

Учитывая связь длины волны с величиной волнового вектора, мы приходим к неравенству $\delta k \ll k$, означаящему, что рассматриваемые волновые пакеты состоят из нормальных координат, разброс волновых векторов которых значительно меньше величин самих волновых векторов - волна практически локализована в области размера $1/\delta k \approx \delta x$ окружающей центр волнового пакета. Центр волнового пакета можно получить приравняв нулю производную фазы по волновому вектору

$$\varphi = k'x - \omega' t$$

$$\frac{d\varphi}{dk} = x - t \frac{d\omega}{dk} = 0$$

т.е.

$$x = t \frac{d\omega}{dk}$$

Физически это соответствует измерению пространственных координат с точностью до δx , где $\bar{\lambda} \ll \delta x \ll \delta L$. Точка x движется со скоростью

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

которая называется групповой скоростью волнового пакета $\exp i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)$. Таким образом, описанному волновому пакету можно с достаточной степенью точности сопоставить колебание с квазиволновым вектором \vec{k} , такое колебание будем называть фононом. Неоднородность среды проявляется, помимо прочего в неоднородности преломления для фонона, т.е. зависимости частоты фонона от координаты \vec{r} : $\omega_\alpha = \omega_\alpha(\vec{r}, \vec{r})$. Тогда вектор \vec{k} соответствующего пакета зависит от времени:

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = -\nabla \omega(\vec{k}, \vec{r}) \equiv -\frac{\partial \omega}{\partial \vec{r}}$$

Приближение в котором имеет смысл соотношение (), полностью соответствует приближению эйконала в геометрической оптике. Непосредственно из (9.3) и (9.4) можно записать уравнения движения для звукового луча:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\omega(\vec{k}, \vec{r})}{dk}; \quad \frac{d\vec{k}}{dt} = -\frac{d\omega(\vec{k}, \vec{r})}{d\vec{r}}$$

Центр волнового пакета движется из начальной точки в конечную по пути минимизирующему время движения (или что тоже самое минимизирующему длину пути) - принцип Ферма (в механике это соответствует принципу Гамильтона). Такой минимальный путь называется экстремалью. В главе 2 мы подробнее остановимся на этом понятии. Используя принцип Ферма и вариационные методы классической механики установим, что движение центра волнового пакета подчиняется уравнениям Гамильтона, где в роли энергии выступает частота как функция координат и квазиволнового вектора $\omega(\vec{r}, \vec{n})$.

Составим словарь, позволяющий переводить утверждения механики на язык звуковых лучей и наоборот:

Материальная точка - волновой пакет.

Траектория - Луч.

Скорость (V) - Групповая скорость (V).

Потенциальная энергия, функция координат $U = U(x)$ - Показатель преломления.

Энергия E - Частота ν (В диспергирующей среде $v = v(\nu, x)$ Для фазовой скорости простой аналогии в механике нет.

Траектория материальной точки и траектория светового (в нашем случае - акустического) луча совпадают при определенном соответствии потенциальной энергии и переменного в пространстве показателя преломления. Этот факт был открыт выдающимся ирландским математиком и физиком У.Р.Гамильтоном (1805-1865) в 1834 году (этот факт оказал влияние на установление связи между волновой оптикой и волновой (квантовой) механикой. Полная энергия материальной точки массы m , движущейся в потенциальном поле $U(x, y, z)$ складывается из кинетической и потенциальной, и сохраняется (в силу закона сохранения энергии) в процессе движения:

$$E = \frac{mV^2}{2} + U(x, y, z),$$

где V - абсолютная величина мгновенной скорости.

3.5.3 Дислокации.

В результате деформаций могут возникнуть необратимые изменения в кристаллической решетке - дислокации. Дислокации могут также возникать при росте кристаллов в следствие флуктуций температуры, концентрации раствора и других факторов. Дислокация это линейный дефект. Примером дислокации может служить модель, в которой в кристаллическую решетку вставлена лишняя полуплоскость. Край лишней полуплоскости, рис.3.14, называется в этом случае краевой дислокацией.

Нарушение правильной кристаллической структуры при наличии дислокации происходит лишь в малой окрестности выделенной линии - оси дислокации, и область нерегулярного расположения атомов, вытянутая вдоль оси дислокации, имеет поперечные размеры порядка величины

постоянной решетки. Если окружить дислокацию трубкой с радиусом порядка нескольких межатомных расстояний, то вне этой трубки кристалл может считаться идеальным и подвергнутым только упругим деформациям (кристаллические плоскости смыкаются друг с другом почти правильным образом), а внутри нее атомы существенно смещены относительно своих положений равновесия в идеальном кристалле и образуют структуру, называемую ядром дислокации. На рис.3.14 атомы ядра дислокации условно расположены по контуру заштрихованного пятиугольника.

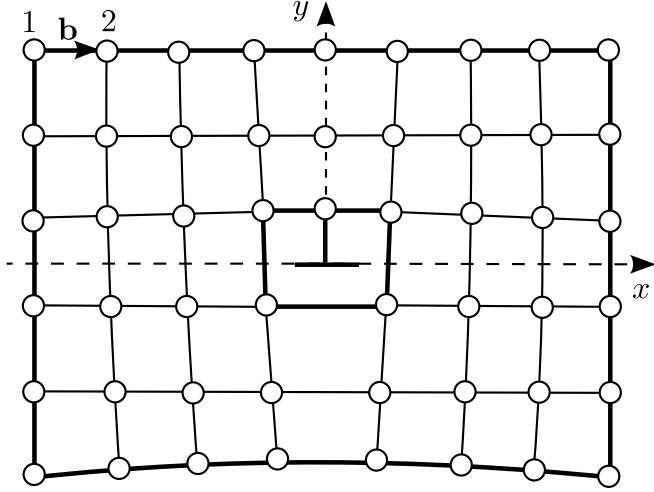


Рис. 3.14: Схема расположения атомов вблизи краевой дислокации.

Наличие деформации вдали от оси дислокации обнаруживается при обходе в плоскости xOy (рис. 3.14) по узлам решетки вдоль замкнутого контура вокруг ядра дислокации. Рассмотрим вектор смещения каждого узла от его положения в идеальной решетке и проследим за полным приращением этого вектора при указанном обходе.

(Л.Л.) С макроскопической точки зрения дислокационная деформация кристалла как сплошной среды обладает в общем случае следующими свойствами: при обходе по любому замкнутому контуру L , охватывающему линию дислокации D , вектор упругого смещения u получает определенное конечное приращение b

Дислокация является также источником внутренних напряжений, т.е. порождает вокруг себя статические упругие деформации. В ангармоническом приближении (в рамках нелинейной теории упругости) созданное дислокацией упругое также может служить причиной локализации малых гармонических колебаний на фоне искаженной решетки. Другими словами вдоль ядра дислокации распространяются волны с амплитудой быстро убывающей от ядра дислокации. Учитывая деформационное взаимодействие электронов с кристаллической решеткой, аналогичным путем можно изучить влияние дислокационных упругих полей на локализацию электронов или оптических фононов.

Проанализируем влияние дальнодействующего поля дислокации на возникновение локальных колебаний. Рассмотрим модель, дающую, однако, основные результаты.

Наиболее простой для анализа является так называемая скалярная модель кристалла, в которой предполагается, что атомы могут смещаться лишь в одном направлении. В

качестве последнего естественно выбрать направление оси винтовой дислокации ось OX_3 , в этом направлении кристалл остается трансляционно инвариантным. Если обозначить u смещение атомов из положения равновесия в идеальном кристалле, то упругую энергию кристалла можно выразить через скалярные комбинации компонент тензора деформации

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \delta_{j3} + \frac{\partial u}{\partial x_j} \delta_{i3} + \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\}$$

:

$$\mathcal{E} = A_0 u_{ik}^2 + B_0 u_{li}^2 + C_0 u_{ik} u_{kl} u_{li} + D_0 u_{ik}^2 u_{li} + E_0 u_{ii}^3.$$

В выражении (1) мы ограничились кубическими по деформации ангармоническими членами. Из (1) вытекает следующее динамическое уравнение для смещения u :

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{u} = & 2A \Delta_2 u + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} + 2C \Delta_2 \frac{\partial u}{\partial x_3} + \\ & + 4C \frac{\partial}{\partial x_3} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \right\} + \\ & 6D \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}, \end{aligned}$$

где ρ_0 - плотность недеформированной среды;

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2};$$

$$A = \frac{1}{2} A_0; \quad B = A_0 + B_0;$$

$$C = A_0 + B_0 + \frac{3}{4} C_0 + \frac{1}{2} D;$$

$$D = A_0 + B_0 + C_0 + D_0 + E_0.$$

Решения уравнения (2) ищем в виде

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = v(x_1, x_2) + \xi(x_1, x_2, x_3, t).$$

Здесь $v(x_1, x_2)$ - поле смещений вокруг винтовой дислокации; $\xi(x_1, x_2, x_3, t)$ - малые колебания. Линеаризуя (2) по малым смещениям ξ и учитывая, что $\partial v / \partial x_3 = 0$, приходим к следующей системе уравнений для v и ξ :

$$\begin{aligned} \rho_0 \ddot{\xi} = & 2A \Delta_2 \xi + 2B \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} + \\ & + 4C \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2 \partial x_3} \right\}. \end{aligned}$$

Из уравнения (4а) следует известное выражение для поля винтовой дислокации

$$v = \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

где b - модуль вектора Бюргерса. Учитывая (5) и отыскивая решение для ξ в виде монохроматической волны, распространяющейся вдоль дислокации:

$$\xi = \varphi(x_1, x_2) \exp[-i(\omega t - k_3 x_3)],$$

приходим к следующему уравнению для $\varphi(x_1, x_2)$ в полярных координатах:

$$s_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \Theta^2} \right\} - (s_2^2 k_3^2 - \omega^2) \varphi + i \frac{2bk_3 C}{\pi \rho_0} \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = 0.$$

В этом уравнении r - расстояние от оси дислокации в плоскости $X_1 O X_2$, Θ - азимутальный угол; $s_1^2 = 2A/\rho_0$; $s_2^2 = 2B/\rho_0$. Решение уравнения (6), экспоненциально убывающее при $r \rightarrow \infty$ (соответствующее локальным колебаниям), имеет вид

$$\varphi = e^{i\mu\theta} K_\nu \left(\frac{r}{s_1} (s_2^2 k_3^2 - \omega^2)^{1/2} \right),$$

$$\nu = \left(\mu^2 + \frac{2bk_3 C}{\pi \rho_0 s_1^2} \mu \right)^{1/2}$$

где $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $K_\nu(t)$ -функция Макдональда. Уравнение(6) необходимо дополнить граничными условиями на поверхности ядра дислокации

$$\frac{1}{\varphi(r_0)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=r_0} = F.$$

3.5.4 Методы дифференциальной геометрии.

3.6 Дислокации и дисклинации.

3.6.1 Метрика.

Как было показано в параграфе (...) процесс деформирования материала сопровождается изменением взаимного расположения точек сплошной среды. Чтобы в процессе деформирования тело не терпело разрывов, необходимо чтобы отображение u из начальной конфигурации в текущую было диффеоморфизмом. Если отображение, к тому же является и изоморфизмом то имеем изгибания без растяжений, т.е. меняем способ вложения тела в \mathbb{R}^3 . Деформация приводит к тому, что декартовы координаты точек идеального, недеформированного кристалла становятся криволинейными после наложения деформации. Символы Кристофеля такой системы координат становятся отличными от нуля, однако тензоры кручения и кривизны по прежнему равны нулю.

Среду можно описывать внутренней и внешней геометрией. Внутренняя основана на первой квадратичной форме (метрике), внешняя на второй квадратичной форме (учитывая кривизну - ускорение). Наблюдатель может являться соответственно внутренним и внешним.

Определим актуальную деформированную конфигурацию кристалла в Евклидовой метрике $g_{ij}^{ext} = \delta^{ij}$. Внешний наблюдатель видит актуальную конфигурацию $\mathcal{R}(t)$. Т.е. дано вложение тела в \mathbb{R}^3 , внешний наблюдатель находится как раз в \mathbb{R}^3 , и сомотрит на кристалл, например через микроскоп. Актуальное, деформированное состояние тела описывается голономными, Эйлеровыми координатами x^m , отмеченными латинскими индексами $m = 1, 2, 3$.

Определим натуральное состояние кристалла. Представим кристалл как множество маленьких кусочков идеальной решетки в которых внутренние напряжения релаксированы, т.е. в самих этих кусочках возможно выбрать такую систему координат в которой векторное поле смещений выпрямляемо. Однако в целом кристалле поле смещений не оязано быть выпрямляемо, т.е. может не существовать глобальный репер. Такое представление и называется натуральным состоянием. В общем случае деформированные элементы объема не удастся подогнать друг к другу и собрать из них непрерывное тело, если только деформация элемента не связана с деформацией его соседей условиями совместности Сен-Венана. Внутренний наблюдатель видит натуральное состояние кристалла, и может исследовать его только путем параллельного перенесения, и определения кристаллографических линий - геодезических. Натуральное состояние дается, в общем случае не голономными Лагранжевыми координатами dX^α , отмеченными греческими индексами $\alpha = 1, 2, 3$. Кроме того, натуральное состояние получается из идеальной решетки после пластической деформации.

Отображение из актуального в натуральное состояние дается формулой

$$dX^\alpha = \phi_m^\alpha dx^m \quad (3.49)$$

где ϕ_m^α матрица Якоби отображения. Эта матрица содержит физическую информацию о локальной геометрии среды.

Тензор упругой деформации ε_{mn} получается сравнением расстояния dl' между двумя точками разделенными вектором dx^m в упруго деформированном состоянии, с расстоянием dl между теми же самыми точками в релаксированном состоянии, в котором упругая деформация равна нулю:

$$dl'^2 = dx_m dx^m = g_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta$$

$$dl^2 = g_{mn} dx^m dx^n = dX^\alpha dX_\alpha. \quad (3.50)$$

Эти уравнения определяют метрику g_{mn} релаксированного состояния в Эйлеровых координатах x^m и метрику $g_{\alpha\beta}$ актуального состояния в Лагранжевых координатах dX^α .

Легко видеть, что среда содержащая дефекты, является дефектной в пространстве Евклида. Если, однако, ее рассматривать в римановой метрике, понятие дефекта теряет смысл и кристалл следует воспринимать как бездефектный. Математически это следует из того, что коэффициенты связности в евклидовом пространстве обращаются в нуль.

Разность

$$dl'^2 - dl^2 = 2\varepsilon_{mn} dx^m dx^n = 2E_{\alpha\beta} dX^\alpha dX^\beta \quad (3.51)$$

определяет тензор упругой деформации

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} (\delta_{mn} - g_{mn}) \quad (3.52)$$

Элементы длин дуг dS и ds в материальной и пространственной конфигурациях B и B , даются соответственно

$$dS^2 = dX_K dX_K = c_{kl} dx_k dx_l,$$

$$ds^2 = dx_k dx_k = C_{KL} dX_K dX_L. \quad (3.53)$$

где

$$\begin{aligned} c_{kl}(\mathbf{x}, t) &= \delta_{KL} X_{K,k} X_{L,l} = X_{K,k} X_{L,l}, \\ C_{KL}(\mathbf{X}, t) &= \delta_{kl} x_{k,K} x_{l,L} = x_{k,K} x_{l,L}, \end{aligned} \quad (3.54)$$

соответственно тензоры Коши и Грина. Запишем соотношения:

$$ds^2 - dS^2 = 2E_{KL}(\mathbf{X}, t) dX_K dX_L = 2\varepsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) dx_k dx_l \quad (3.55)$$

где

$$\begin{aligned} 2E_{KL} &= C_{KL}(\mathbf{X}, t) - \delta_{KL}, \\ 2\varepsilon_{kl} &= \delta_{kl} - c_{kl}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.56)$$

известны как Лагранжев и Эйлеров тензоры деформаций.

Альтернативным способом введения тензора деформации является разложение матрицы $\mathbf{F} = \nabla \mathbf{x}$, $F_{kK} \equiv x_{k,K}$ в произведение двух матриц, одной ортогональной, другой симметрической. Доказательство этой теоремы известно из линейной алгебры. Таким образом

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (3.57)$$

где

$$\mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{C}, \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{c}^{-1} \mathbf{b} \quad (3.58)$$

\mathbf{R} - ортогональна. \mathbf{U} и \mathbf{V} правый и левый тензоры растяжений. \mathbf{C} и \mathbf{b} правый и левый тензоры деформации Коши-Грина.

В нашей вселенной, внутренний наблюдатель не обладает способностью выполнять внешние действия над вселенной, если таковые вообще существуют. Сдесь мы рассматриваем возможность того, что вселенная может быть деформирована высшими существами "из вне". Кристалл, с другой стороны, является объектом который полностью может быть деформирован "из вне". Мы может также видеть множество деформаций просто смотря внутрь кристалла, например при помощи электронного микроскопа.

Представим некоторый кристалл и наблюдателя который может только определять кристаллографические направления и перемещаться трансляцией по кристаллической решетке. Такой внутренний наблюдатель не сможет определить деформацию выполненную "из вне". Физики исследующие мир имеют статус именно внутренних наблюдателей.

В момент времени t дефективный кристалл является трехмерным телом обозначаемым $\mathcal{R}(t)$. Дефективность кристалла не обнаруживается более. Тем не менее дефективность описывается геометрией погружения.

Метрика внешнего наблюдателя на $\mathcal{R}(t)$ - евклидова метрика δ_{ij} . В силу того, что присутствует макроскопическая деформация ε_{ij} , другая Риманова метрика определена на $\mathcal{R}(t)$, именно:

$$g_{ij}^B = \delta_{ij} - d\varepsilon_{ij}. \quad (3.59)$$

Эта метрика называется метрикой Браве.

Использование этой метрики на бездефектных областях $\mathcal{R}(t)$ ведет к существованию однозначной (one-to-one) замены координат между $\mathcal{R}(t)$ и \mathcal{R}_0 , чей градиент деформации записывается как $a_{mi} = g_{mn}^B a_i^n = \delta_{mi} - \partial_i u_m$ где u_m означает поле смещений. Отметим, что в случае малых деформаций нет разницы между верхними и нижними индексами.

В присутствии дефектов, свледующий объект (который называется "неголономность")

$$\Omega_{ijk} := \partial_k a_{ji} - \partial_i a_{jk} \quad (3.60)$$

непосредственно относится к несовместности деформации, исследовательно не исчезает пока присутствуют дефекты.

Это значит, что не существует глообальной системы координат $\{x_j^B(x_i)\}$ с гладким преобразованием координат $a_{ij} = \partial_i x_j^B$. Фактически такое гладкое a_{ij} - или, эвивалентно, такое гладкое векторное поле существует только в свободной от дефектов области кристалла.

Представим себе, что тело разрезано на небольшие элементы объема, каждый из которых определенным образом деформируется. В общем случае деформированные элементы объема не удается подогнать друг к другу и собрать из них непрерывное тело, если только деформация каждого элемента не связана с деформацией его соседей условиями совместности Сен-Венана.

Из упругой метрики, определим совместимые с ней симметрические символы кристофеля

$$\Gamma_{k;ij}^B = \frac{1}{2} (\partial_i \{x_j^B\}_{kj} + \partial_j \{x_k^B\}_{ij} - \partial_k \{x_i^B\}_{jj}), \quad (3.61)$$

для которых кручение нулевое $\Gamma_{k;[ij]}^B := \Gamma_{k;ij}^B - \Gamma_{k;jk}^B$.

А кривизна

$$R_{i;km}^B := (\partial_q \Gamma_{l;km}^B + \tilde{g}_{np}^B \Gamma_{n;km}^B \Gamma_{p;lq}^B)_{[mq]} \quad (3.62)$$

где $\tilde{g}_{np}^B = \delta_{np} + \varepsilon_{np}$ обратная к g_{np}^B при условии малых деформаций.

Связность для которой $R_{l;kmq}^B = 0$ называется *материальной связностью*, и для этой связности $\Gamma_{k;[ij]}^B$ означает тензор неоднородности.

Следует заметить, что с помощью тензора кручения, связность может быть представлена в виде двух компонент: связности Леви-Чивиты, которая зависит только от метрики, и тензора конторсии (contortion tensor), который является комбинацией тензора кручения:

$$\Gamma_{kj}^i = \bar{\Gamma}_{kj}^i + K_{kj}^i \quad (3.63)$$

где $\bar{\Gamma}_{kj}^i$ связность леви чивиты, $K_{kj}^i = \frac{1}{2} (T_{ijk} - T_{jki} + T_{kij})$, $T_{ijk} = g_{kl} T_{ij}^l$ тензор конторсии.

SMPRI2005 005 Материальное тело определяется трехмерным дифференцируемым многообразием \mathbb{M} вложенным в трехмерное Евклидово пространство \mathbb{R}^3 . Текущие координаты многообразия деформированного тела M' обозначим $x^i(i, j, k, l, m, n, \dots = 1, 2, 3)$, а декартовы координаты бездефектного тела (reference manifold \mathbb{M}) обозначим $x^a(a, b, c, d, \dots = 1, 2, 3)$. Если текущая конфигурация является бездефектной, тогда функции $x^i = x^i(x^a)$ и $x^a = x^a(x^i)$ однозначные, гладкие, дифференцируемые своих аргументов. Матрица $\beta_a^i = \partial_a x^i \equiv \frac{\partial x^i}{\partial x^a}$ это матрица деформации (discotriion matrix.)

Пусть e_a глобально определенный базис отсчетного многообразия. Метрика $e_a \cdot e_b = \delta_{ab}$ является евклидовой и связность $\omega_b^a = \Gamma_{cb}^a dx^c$ обращается в нуль соответственно. Метрическая связность текущей конфигурации есть $g_{ik} = \beta_i^a \beta_k^b \delta_{ab}$ и $\omega_k^i = \beta_a^i d\beta_k^a$.

Бездефектное многообразие \mathbb{M} характеризуется глобальным базисом $e^i = dx^i$ и плоской связностью $\omega_k^i = \beta_a^i d\beta_k^a$. Эти уравнения можно рассматривать как набор дифференциальных уравнений для e^i и ω_k^i . В этом случае тензоры кручения и кривизны нулевые и правые части уравнений интегрируемости обращаются в нуль.

$$\begin{aligned} T^i &= \mathcal{D}e^i = de^i + \omega_k^i \wedge e^k = \frac{1}{2} T_{kl}^i e^k \wedge e^l, \\ R_k^i &= \mathcal{D}\omega_k^i = d\omega_k^i + \omega_l^i \wedge \omega_k^l = \frac{1}{2} R_{klm}^i e^l \wedge e^m. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Кривизна и кручение представляют дефекты. Дефекты являются препятствием для диффеоморфности отображения из M в M' .

Для связи математической структуры с описанием дефектов, рассмотрим инфинитесимальную трансформацию

$$x^a \rightarrow x^m = (x^a + u^a(x^b))\delta_a^m. \quad (3.65)$$

где общее смещение u^a состоит из упругой и пластической частей. Упругая часть интегрируема, пластическая нет.

Общий тензор дисторсии

$$\begin{aligned} \beta_a^i &= \delta_a^i + \partial_a u_i, \\ \beta_i^a &= \delta_i^a - \partial_i u_a. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Метрика связывается в общей деформацией

$$g_{ik} = \beta_{ai}\beta_k^a = \delta_{ik} - \partial_i u_k - \partial_k u_i = \delta_{ik} - 2e_{ik}. \quad (3.67)$$

В линейной аппроксимации

$$\mathcal{D}T^i = dT^i = 0 \quad (3.68)$$

дает

$$\begin{aligned} T^i &= \omega_k^i \wedge dx^k = d\beta^i, \\ \omega_k^i &= \Gamma_{lk}^i dx^l, \\ \beta^i &= \beta_k^i dx^k = w_k^i dx^k + e_k^i dx^k. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} de_{ik} &= \frac{1}{2} (\Gamma_{ikl} + \Gamma_{lki}) dx^l, \\ dw_{ik} &= \frac{1}{2} (\Gamma_{ikl} + \Gamma_{lki}) dx^l. \end{aligned} \quad (3.70)$$

где w_{ik} это антисимметрическая часть дисторсии β_{ik} (в линейной теории упругости). Такова локальная интерпретация связности.

В присутствии дефектов, координатная система M' не голономна. Обозначая не голономные координаты e^α вместо e^i мы можем записать $e^\alpha = \beta_a^\alpha dx^a$, но β_a^α поле не является градиентным полем. Представим деформированное тело как множество маленьких кусочков идеальной решетки в которых внутренние напряжения релаксированы. Такое представление называется *натуральным состоянием*. Элемент длины dx^i в деформированном состоянии заменяется на dx^α в натуральном состоянии.

Элемент длины ds для dx^i определяется натуральной длиной $ds^2 = \delta_{\kappa\lambda} dx^\kappa dx^\lambda$. Метрика пластического многообразия $h_{kl} = \delta_{\kappa\lambda} \beta_k^\kappa \beta_l^\lambda$. Маленькие части кристалла могут быть произвольно сдвинуты и повернуты в натуральном состоянии. Матрица β_k^λ имеет калибровочную степень

свободы, т.е. задана с точностью до ортогональных преобразований $\eta_k^\kappa = O_\lambda^\kappa \beta_k^\lambda$ в метрике h_{kl} . Метрика таким образом является инвариантной относительно ортогональных преобразований в натуральном состоянии.

Введем Евклидову связность на пластическом многообразии. Плотность дислокаций математически может быть выражена как кручение многообразия.

В теории упругости мы имеем две естественные пространственные метрики:

1) обычная метрика физического пространства $g_{mk}^{(0)}$, выражается в Эйлеровых координатах (natural state),

2) метрика связанная с упругой средой g_{mk} , выражается в Лагранжевых координатах (actual state).

Их полуразность называется тензором конечных деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mk} &= \frac{1}{2} (g_{mk}^{(0)} - g_{mk}), \\ ds^2 - ds^{(0)2} &= 2\varepsilon_{mk} dx^m dx^k. \end{aligned} \quad (3.71)$$

3.6.2 Условия совместности.

Шесть компонент ε_{kl} и c_{kl} выражаются через компоненты вектора смещений u_{kl} , т.е.

$$2\varepsilon_{kl} = \delta_{kl} - c_{kl} = u_{k,l} + u_{l,k} - \delta_{mn} u_{m,k} u_{n,l}. \quad (3.72)$$

Когда вектор смещений допускает непрерывные пространственные частные производные мы можем рассчитать ε_{kl} и c_{kl} прямо подставляя u в это уравнение.

Возникает обратная задача, если заданы ε_{kl} и c_{kl} возможно ли получить однозначное непрерывное поле смещений соответствующее ε_{kl} и c_{kl} . Это задача на интегрируемость системы шести дифференциальных уравнений в частных производных (3.72) и ответ дается теоремой Римана:

ТЕОРЕМА 3.6.1 Чтобы произвольный симметрический тензор a_{kl} являлся метрическим тензором для евклидова пространства, необходимо и достаточно чтобы a_{kl} был невырожденным, положительно определенным тензором и тензор Римана R_{klmn} сформированный a_{kl} обращался в нуль.

3.6.3 Дислокации и дисклинации.

В калибровочной теории дефектов, основанной на геометрии Римана-Картана дислокации среды соответствуют отличному от нуля тензору кручения, дефекты в спиновой структуре соответствуют отличному от нуля тензору кривизны. Кроме того связность предполагается огласованной с метрикой:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ij} dx^i \otimes dx^j = g_{mk} \theta^m \otimes \theta^k \\ 0 &= \nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \omega_{ml}^s g_{sk} - \omega_{kl}^s g_{ms}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

- где индексы i, j указывают на голономный а индексы m, k на не голономный базис.

Действительно, как было показано, отличный от нуля тензор кручения $T(V, U) = \nabla_V U - \nabla_U V - [V, U]$ соответствует незамкнутости обходного пути, что соответствует

вектору Бюргерса

$$-\mathbf{b}^\alpha = \oint_{C'} dX^\alpha = \oint_C \phi_n^\alpha dx^n = \int \int T_{mn}^\alpha dx^m \wedge dx^n \quad (3.74)$$

где плотность дислокаций

$$T_{mn}^\alpha = \partial_m \phi_n^\alpha - \partial_n \phi_m^\alpha \quad (3.75)$$

получена по формуле Стокса. $T_{mn}^\alpha dx^m \wedge dx^n$ является векторозначной два формой в x^m .

Заметим, что вектор Бюргерса характеризует свойство целого контура в начальном состоянии, и является инвариантным по отношению к выбору начальной точки на этом контуре.

Вектор Бюргерса может быть выражен в конечном состоянии (в лагранжевых координатах) используя отображение

$$dX^\alpha = \phi_m^\alpha dx^m. \quad (3.76)$$

только если ни его ориентация, ни длина на завасят от его положения.

Отображение (3.76) из конечного (actual) в начальное (natural) состояние, и описывает локальную геометрию материала.

Заметим, что $\phi_m^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^m}$ является градиентом только если координаты dX^α голономны. Другими словами, когда кручение отсутствует везде, Лагранжевы координаты dX^α являются голономными, связность тогда симметрична. И если допустить, что отсутствует и неметричность символы кристоффеля тогда выражаются в виде

$$\Gamma_{spn} = \frac{1}{2}(\partial_n g_{sp} + \partial_p g_{sn} - \partial_s g_{pn}) \quad (3.77)$$

Если условия совместности выполнены, среда обладает абсолютным параллелизмом или, что тоже, отсутствием дисклинаций. В этом случае плотность дислокаций выражается тензором кручения

$$T_{mn}^s (\phi^{-1})_\alpha^s T_{mn}^\alpha = \Gamma_{nm}^s - \Gamma_{mn}^s \quad (3.78)$$

И связность тогда выражается как

$$\begin{aligned} \Gamma_{nm}^s &= (\phi^{-1})_\alpha^s \partial_m \phi_n^\alpha \\ \Gamma_{nm}'^s &= 0. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Отличный от нуля тензор кривизны $R(V, U)Y = \nabla_U \nabla_V Y - \nabla_V \nabla_U Y - \nabla_{[V, U]} Y$ приводит к тому, что вектор параллельно перенесенный по некоторому замкнутому контуру оказывается не параллельным себе в начальном состоянии, что соответствует вектору Франка.

Дисклинация не образуются в трехмерных кристаллах, так как они энергетически невыгодны. Вообще, наличие дисклинаций требует конечности рассматриваемого образца, иначе внутренняя энергия данного образца стремится к бесконечности. Свободные от дисклинаций кристаллы обладают абсолютным параллелизмом или, что тоже, дальним порядком. Эта концепция может быть выражена математически посредством параллельного переноса. Параллельное перенесение вектора ξ^s между двумя точками отделенными dx^m вдоль пути дается выражением

$$d\xi^s = -\Gamma_{pm}^s \xi^p dx^m \quad (3.80)$$

При параллельном переносе вектора ξ^s вдоль дуги геодезической его ковариантная производная

$$\mathcal{D}_p \xi^s = \partial_p \xi^s + \Gamma_{mp}^s \xi^m. \quad (3.81)$$

обращается в нуль.

В случае наличия дальнего порядка, любой вектор ξ^s возвращается в первоначальной ориентации после параллельного перенесения по любому замкнутому пути. Замкнутый путь может быть разложен в сумму элементарных отрезков геодезических, таким образом

$$\begin{aligned} \oint d\xi^s &= - \oint \Gamma_{pn}^s \xi^p dx^n \\ &= - \int \int [\partial_m (\Gamma_{pn}^s \xi^p) - \partial_n (\Gamma_{pm}^s \xi^p)] dx^m \wedge dx^n \\ &= - \int \int R_{pmn}^s \xi^p dx^m \wedge dx^n \end{aligned} \quad (3.82)$$

где тензор кривизны

$$R_{pmn}^s = \partial_m \Gamma_{pn}^s - \partial_n \Gamma_{pm}^s + \Gamma_{jm}^s \Gamma_{pn}^j - \Gamma_{jn}^s \Gamma_{pm}^j \quad (3.83)$$

является мерой плотности дисклинаций.

Равенство (3.83) выполняется для любых векторов и любого замкнутого контура. Таким образом $R_{pmn}^s = 0$ является условием абсолютного параллелизма или, что тоже, отсутствия дисклинаций.

При выполнении (3.79) тензор кривизны обращается в нуль. Геометрия становится плоской и имеем пространство абсолютного параллелизма.

Тут компоненты s, p тензора кривизны даны в конечном состоянии (в Лагранжевых координатах). Но они также могут быть даны и в начальном состоянии (Эйлеровых координатах). Только элементы контура dx^m, dx^n всегда даются в конечном состоянии среды.

Тензор неметричности Q , определяется ковариантную производную от метрики

$$Q_{qsp} = \mathcal{D}_p g_{qs} = \partial_p g_{qs} - \Gamma_{qp}^t g_{ts} - \Gamma_{sp}^t g_{qt}. \quad (3.84)$$

Соответствующий дефект называется "extra-matter".

При выполнении (3.79) связность совместима с метрикой, $Q = 0$.

3.6.4 Континуум Коссера.

В линейном континууме Коссера мерой деформации является дисторсия β и конторсия k (∇_i обозначает ковариантную производную в Евклидовой метрике):

$$\begin{aligned} \beta_{ij} &= \nabla_i u_j - \omega_{ij}, \quad \omega^{ij} = -\omega_{ji}, \\ k_{ijk} &= \nabla_i \omega_{jk} = -k_{ikj}, \end{aligned} \quad (3.85)$$

ω - бивекторное поле.

В классической теории упругости, присутствуют только деформации

$$\varepsilon_{ij} := \frac{1}{2}(\beta_{ij} + \beta_{ji}) \equiv \beta_{(ij)} = \nabla_{(i} u_{j)}. \quad (3.86)$$

Пространство Римана является аналогом тела в классической континуальной теории: точки и их относительные

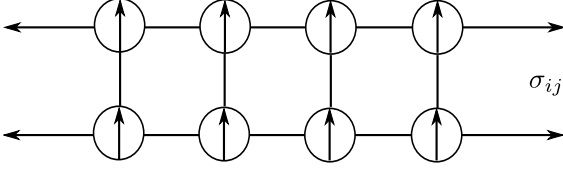


Рис. 3.15: Поле смещений $u_1 \approx x$, поле вращения $\omega_{ij} = 0$. Тогда $\beta_{11} = \varepsilon_{11} = \text{const}$ и $k_{ijk} = 0$. Однородная деформация (distortion) созданная только обычной силой деформации. Симметрическая часть напряжения $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ отвечает изменению (a variation) метрики g_{ij} .

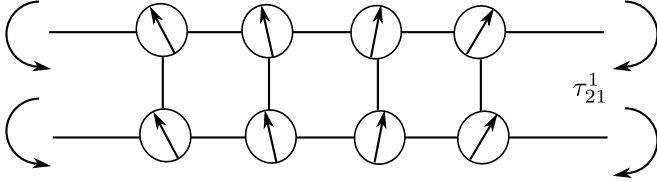


Рис. 3.16: Поле смещений $u_i = 0$, поле вращения $\omega_{12} \approx x$. Тогда $\beta_{12} = \omega_{12} \approx x$ и $k_{112} \approx \text{const}$. Однородное искривление (contortion) созданное приложением вращательного момента силы.

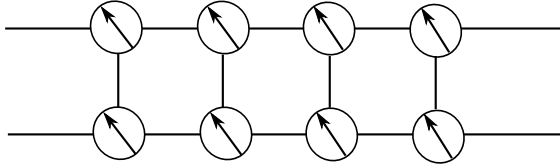


Рис. 3.17: Чистая постоянная антисимметричная часть деформации $\omega_{12} = \text{const}$.

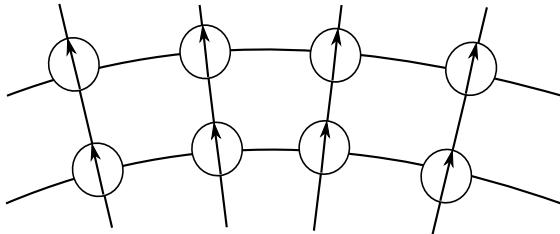


Рис. 3.18: Вращение искривлением в обыкновенной теории упругости.

расстояния - все что необходимо для описания его геометрии; аналогом деформации ε_{ij} классической теории упругости является метрический тензор g_{ij} Риманова пространства. В ОТО симметрическое напряжение $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ соответствует изменению метрики g_{ij} .

РС-пространство может быть реализовано как обобщение континуума Коссера. Мерой деформации в РС-пространстве являются

$$\begin{aligned} \theta^\alpha &= e_i^\alpha dx^i, \\ \Gamma^{\alpha\beta} &= \Gamma_i^{\alpha\beta} dx^i = -\Gamma^{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.87)$$

что в континууме Коссера соответствует

$$e_i^\alpha \rightarrow \beta_{ij}, \quad \Gamma_i^{\alpha\beta} \rightarrow k_{ijk}. \quad (3.88)$$

Тем не менее, кобазис θ^α и связность $\Gamma^{\alpha\beta}$ не могут быть выведены из поля смещений u_i и поля вращений ω_{ij} , так

как меры деформации β_{ij} и k_{ijk} не удовлетворяют условиям совместности:

$$\nabla_{[i} \beta_{j]k} + k_{[ij]k} = 0, \quad (3.89)$$

3.6.5 Основы калибровочного описания дислокаций.

Существует два основных типа дефектов в кристалле - краевые и винтовые.

Краевая. Отсутствующая полуплоскость характеризуется вектором Бюргерса перпендикулярным к дислокационной линии.

Винтовая. Тоже характеризуется вектором Бюргерса, но в этом случае он параллелен к дислокационной линии.

В рамках классической теории упругости изолированные дефекты моделируются дислокациями Вольтерра и Соммиерса. Эти теории могут быть использованы для расчета дальнедействующего поля дислокации.

Если принимать в рассмотрение множество дислокаций присутствующих в кристалле то можно использовать соответствующую теорию Кренера. Рассмотрим кубический кристалл. Усреднением мы можем получить тензор плотности дислокаций $\alpha_{ij}^k = -\alpha_{ijk}$. Индексы ij обозначают элемент площади, индекс k - направление вектора Бюргерса.

В 1953 году, Най установил взаимосвязь между плотностью дислокаций a_{ijk} и тензором конторсии K_{ijk} , который описывает относительное вращение между соседними элементами площади

$$K_{ijk} = -\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - \alpha_{kij} = -K_{ikj}. \quad (3.90)$$

Здесь выбрана буква K для аналогичности с contortional measure к континууму Коссера.

В тоже самое время с макроскопической, т.е. континуальной точки зрения, становится ясно, что откликом кристалла на его конторсию индуцируемую дислокациями являются вращающий момент напряжения, который уже упоминался в континууме Коссера.

Если к геометрии с кривизной добавить кручение, то в динамической части необходимо допустить наряду с напряжением также и крутящий момент напряжения.

Несмотря на наличие дислокаций, в каждой точке кристалла кристаллографические направления хорошо определены. Другими словами кристалл можно описать пространством с абсолютным параллелизмом (кривизна - дисклинации отсутствуют).

Связность пространства с абсолютным параллелизмом всегда может быть представлена как совокупность компонент базиса $e_\alpha = e_\alpha^k$ и кобазиса $\theta^\alpha = e_j^\alpha dx^j$ как

$$\Gamma_{ij}^k = e_\alpha^k \partial_i e_j^\alpha. \quad (3.91)$$

Соответственно с одной стороны кристалл имеет кручение, с другой стороны обеспечивает абсолютный параллелизм.

Translational gauge theory of continuously distributed dislocations.

Что является мерой деформации в полевой теории дислокаций. Очевидно кручение α или конторсия K . Но как на счет дисторсии.

Теория строится на аффинном касательном расслоении $A(\mathbb{M})$ над трехмерным пространством \mathbb{M} . В касательном

аффинном пространстве, можно выполнять трансляции точек и векторов, в этом смысле группа трансляции T_3 рассматривается как *внутренняя симметрия*.

Генераторы P_α группы трансляций соответствуют Ли-алгебробразначной 1-форме

$$\Gamma^{(T)} = \Gamma_i^{(T)\alpha} P_\alpha dx^i \quad (3.92)$$

как трансляционно калибровочный потенциал.

При преобразованиях

$$y^\alpha \rightarrow y^\alpha + \varepsilon^\alpha \quad (3.93)$$

аффинного касательного пространства они преобразуются как связность

$$\delta \Gamma_i^{(T)\alpha} = -\partial_i \varepsilon^\alpha. \quad (3.94)$$

Так как T_3 Абелева, т.е. трансляции коммутируют друг с другом, в этом законе преобразования нет однородного члена. Таким образом это преобразование напоминает фазовые преобразования электромагнитного потенциала. По той же причине, калибровочное поле напряженности

$$F^{(T)\alpha} = d\Gamma^{(T)\alpha} = \frac{1}{2} F_{ij}^{(T)\alpha} dx^i \wedge dx^j \quad (3.95)$$

напоминает обобщенную напряженность электромагнитного поля.

В добавление к трансляционно калибровочному полю важной структурой является поле ξ^α определенное как локальное сечение аффинного касательного расслоения. Геометрически, это поле определяет "начало" аффинного пространства; оно известно как радиус вектор Картана. При калибровочных преобразованиях (трансляциях) оно изменяется как

$$\xi^\alpha \rightarrow \xi^\alpha + \epsilon^\alpha. \quad (3.96)$$

Тем не менее, комбинация

$$e_i^\alpha = \partial_i \xi^\alpha + \Gamma_i^{(T)\alpha}, \quad (3.97)$$

очевидно калибровочно инвариантна.

В рамках калибровочной теории 1-форма

$$\theta^\alpha = e_i^\alpha dx^i = d\xi^\alpha + \Gamma^{(T)\alpha} \quad (3.98)$$

является как нелинейное трансляционное калибровочное поле где ξ^α интерпретируется как Голдстоуновское поле описывающее спонтанное нарушение трансляционной симметрии.

Мы можем рассматривать $\theta^\alpha = e_i^\alpha dx^i$ как кобазис нашего 3D многообразия. Тогда трансляционное калибровочное поле напряженности является 2-формой неголомности этого кобазиса:

$$F^{(T)\alpha} = d\Gamma^{(T)\alpha} = d\theta^\alpha. \quad (3.99)$$

Подводя итог, мы имеем в качестве меры деформации

$$\begin{aligned} e_i^\alpha &= \partial_i \xi^\alpha + \Gamma_i^{(T)\alpha}, \\ F^{(T)\alpha} &= d\Gamma^{(T)\alpha} = d\theta^\alpha. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Если, в линейном приближении, мы сравним эти меры с мерами континуума Коссера, то найдем, что в обобщенном

континууме Коссера

$$\begin{aligned} e_i^\alpha &\rightarrow \beta_{ij} \text{ (distorsion)}, \\ \xi^\alpha &\rightarrow u_i \text{ (displacement)}, \\ \Gamma^{(T)\alpha} &\rightarrow \omega_{ij} \text{ (!)} \\ F_{ij}^{(T)\alpha} &\rightarrow k_{kji} \text{ (contortion)}. \end{aligned} \quad (3.101)$$

Здесь $F_{ij}^{(T)\alpha} \approx a_{ijk}$ представляет плотность дислокаций (torsion). Следовательно, представляет соотношения Найа

$$K_{ijk} = -\alpha_{ijk} + \alpha_{jki} - \alpha_{kij} = -K_{ikj}. \quad (3.102)$$

и вторую фундаментальную меру деформации теории дислокаций с 9-ю независимыми компонентами соответствующими конторсии континуума Коссера.

Тем не менее, мы видим что 3 компоненты вращения Коссера, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ соответствуют 9-ти антисимметричным компонентам (трансляционного калибровочного) потенциала $\Gamma_i^{(T)\alpha}$.

Дисторсия же представляется 9-ю независимыми компонентами напряжения.

Произвольно заданной пластической дисторсии соответствует плотность дислокаций.

Упругая дисторсия определяет искажения тела, которые обеспечивают его непрерывность при данной плотности дислокаций.

По отдельности они не удовлетворяют условию совместности и для их обозначения используется термин "несовместная упругая" и "несовместная пластическая" дисторсии.

Определим основные переменные используемые в геометрической теории дефектов.

В каждой точке мы имеем локальный базис из n линейно независимых векторов $X_\alpha = X_\alpha^i \partial_i$ и дуальный базис $\theta^\beta = \theta_j^\beta dx^j$, 1-форму связности $\omega_\alpha^\beta = \omega_{i\alpha}^\beta dx^i$.

Определим 2-форму кручения

$$\Theta^\alpha := D\theta^\alpha + \omega_\beta^\alpha \wedge \theta^\beta. \quad (3.103)$$

и 2-форму кривизны

$$\Omega_\alpha^\beta := d\omega_\alpha^\beta + \omega_\gamma^\beta \wedge \omega_\alpha^\gamma. \quad (3.104)$$

Например, если была введена дисклинация посредством разрезания материала вдоль некоторой полуплоскости, вставки в образовавшуюся прорезь клина и последующей склейки берегов разреза, то каждая из точек, первоначально находившаяся на поверхности разреза, будет иметь два образа в деле с дисклинацией с одними и теми же координатами x_α . Аналогичная ситуация имеет место для каждой точки тела в случае непрерывного распределения дефектов.

Если дефекты были созданы посредством деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, то расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками, отстоящими друг от друга на dx_α определится формулой $ds^2 = (\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}) dx_\alpha dx_\beta$, причем тензор $\delta_{\alpha\beta} + 2\varepsilon_{\alpha\beta}$ играющий роль метрического тензора, будет определять в кристалле риманову метрику с неравным нулю тензором кривизны. Кроме того как будет видно из дальнейшего, тензор кручения также будет отличен от нуля. Таким образом кристаллу соответствует Риманово пространство с кручением, причем исходному идеальному

кристаллу можно сопоставить касательное к нему в каждой его точке пространство.

Локально RC-пространство евклидово (локальный репер можно выбрать ортонормированный, компоненты связности, в некоторой точке, можно обратить в нуль) следовательно для каждой точки M , существуют координаты x^i и ортонормированный кобазис θ^α в окрестности M , такие что

$$\begin{aligned}\theta^\alpha &= \delta_i^\alpha dx^i \\ \omega_\alpha^\beta &= 0\end{aligned}\quad (3.105)$$

- в точке P . Где ω_α^β 1-форма связности относительно кобазиса θ^α .

Выражение (3.105) представляет в RC-пространстве, неголономный аналог голономных Римановых нормальных координат в Римановом пространстве.

Требование локальной евклидовости естественно, так как в пренебрежении релятивистскими эффектами метрика локального наблюдателя всегда является евклидовой. Для последней существует декартова система координат.

Если в начальной конфигурации тело было бездислокационным а в конечной, имеется дислокация то деформационное отображение имеет особенность. Наличие дислокации требует создания несовместной деформации. Старая система координат уже не может служить в качестве системы координат во всем теле. В месте разреза (ядра дислокации) векторное поле смещений не существует, что говорит о нетривиальной топологии базы. Эта нетривиальная топология, вместе с дальнодействующим полем дислокации сказывается на рассеянии фононов и электронов.

Существуют три частных случая пространства Римана-Картана.

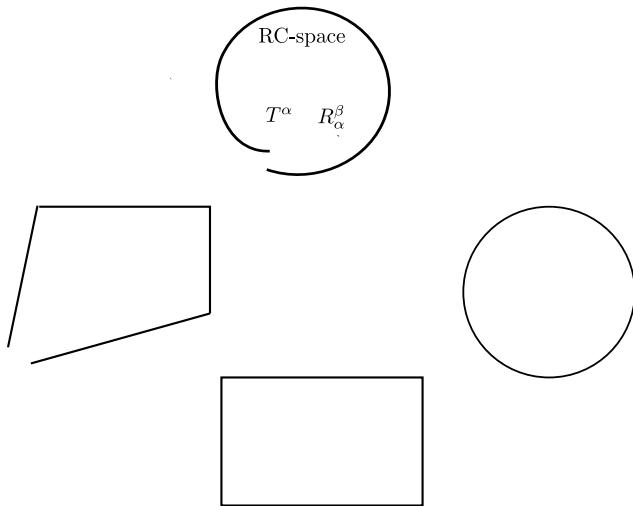


Рис. 3.19: Пространство Римана-Картана.

Рассмотрим случай когда среда не обладает дислокациями, но существуют дефекты в спиновой структуре - континуум Коссера. В этом случае тензор кривизны отличен от нуля, а тензор кручения нулевой.

В силу равенства нулю тензора кручения, символы Кристоффеля симметричны, и существует связность согласованная с метрикой - метрическая связность.

Как было показано, условием метричности связности является

- RC - пространство.

Из этого условия находим симметричную связность

Равенство нулю тензора кривизны эквивалентно условиям совместности деформации Сен-Венана.

Однозначность не однозначность, выбор системы координат.

Если дислокации были созданы посредством деформации, то расстояние между двумя бесконечно близкими точками отстоящими друг от друга на, будет определяться формулой, причем тензор, играющий роль метрического тензора, будет определять в кристалле риманову метрику с неравным нулю тензором кручения, и как будет видно, неравным нулю тензором кривизны.

Таким образом имеем пространство Римана-Картана. Локально RC-пространство Евклидово, следовательно для каждой точки P , существуют координаты и ортонормированный кобазис в окрестности, такие что

В калибровочных моделях дислокаций, основанных на группе трансляций или на полупрямом произведении группы вращений на группу трансляций, в качестве независимых переменных обычно выбираются дисторсия и поле смещений.

Из нижнего равенства в (3.105) видно, что при локальных трансляциях поле смещений постоянно сдвигается, поэтому всегда можно зафиксировать инвариантность относительно локальных трансляций таким образом, что поле смещений представляет собой калибровочный параметр локальных трансляций, и в калибровочно инвариантных моделях физические наблюдаемые от него не зависят.

Математическим объектом, который описывает все эти свойства материи является пространство Римана-Картана.

В пространстве Римана-Картана, по определению существует связность согласованная с метрикой

$$\nabla_l g_{mk} = \partial_l g_{mk} - \Gamma_{ml}^s g_{sk} - \Gamma_{kl}^s g_{ms}. \quad (3.106)$$

Обозначим

$$\Gamma_{mkl} = \Gamma_{kl}^s g_{ms}. \quad (3.107)$$

Запишем еще раз условие (3.107)

Действительно, пространство римана картана локально евклидово это значит что в касательном пространстве можно выбрать евклидову метрику.

Тензор кривизны. Действительно, параллельный транспорт вектора (тензора) в общем зависит от пути вдоль которого он переносится. Это значит, что если тензор переносится по замкнутому контуру, результирующий тензор может отличаться от начального. Тот факт, что результирующий вектор

На дифференцируемом многообразии, мы можем ввести линейную связность, компоненты которой обозначаются. Связность позволяет выполнить параллельный перенос тензоров, в частности векторов на многообразии.

Отличный от нуля тензор кривизны (нетривиальная метрика) соответствует

Будем обозначать малыми латинскими координатные (голономные) индексы.

При параллельном перенесении вектора вдоль его координаты изменяются так

$$(3.108)$$

Основываясь на этой формуле, покажем, что неисчезающее кручение

$$(3.109)$$

приводит к незамкнутости геодезического параллелограмма. Сдесь и в дальнейшем для антисимметризации принято обозначение ϵ , для симметризации σ . Параллелограмм замкнут только при малых трансляциях.

В ОТО, связность определяется с помощью симметричных символов Кристоффеля Γ , где Γ . Другими словами кручение нулевое.

Поверхности с кручением лучше описываются методом подвижного репера *frameformalism*.

В каждой точке мы имеем базис из n линейно независимых векторов e_a и сопряженный базис форм ω^a , называемый корепером, с внешнее произведение обозначается \wedge . Рис.

В каждой точке дано два векторных поля X и Y . Из точки параллельно переносятся векторы X и Y вдоль X и соответственно, в результате получаются векторы X' и Y' . Если кручение присутствует образованный параллелограмм не замкнут. Мерой незамкнутости служит вектор R .

Будем обозначать векторы неголономного базиса греческими буквами ω^a .

Связность определится как 1-форма ω^a , и четыре формы ω^a , мы можем определить ковариантную внешнюю производную в соответствии с

$$D\omega^A := d\omega^A + \rho_{B^A\alpha\beta}\Gamma_\alpha^\beta \wedge \omega^B. \quad (3.110)$$

Сдесь коэффициенты $\rho_{B^A\alpha\beta}$ описывают поведение ω^A при линейных преобразованиях, и \wedge означает внешнее произведение.

Тогда 2-форма кручения определится как

$$T^\alpha := D\vartheta^\alpha = d\vartheta^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma \wedge \vartheta^\beta. \quad (3.111)$$

Если выбран голономный (координатный) базис, тогда

$$d\vartheta^\alpha = 0. \quad (3.112)$$

и определение (3.111) совпадает с (3.110). Из (3.111) можно видеть что T^α это вид поля обусловленный потенциалом ϑ^α .

Так как мы ввели связность Γ , мы можем определить в удобной форме RC-кривизну:

$$R_\alpha^\beta := d\Gamma_\alpha^\beta + \Gamma_\gamma^\beta \wedge \Gamma_\alpha^\gamma. \quad (3.113)$$

Если мы продифференцируем (3.111) и (3.113). Мы получим прямо первое и второе тождества Бианки:

$$\begin{aligned} DT^\alpha &= R_\beta^\alpha \wedge \vartheta^\beta, \\ DR_\alpha^\beta &= 0. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Отсюда можно видеть как тесно связаны кручение и кривизна. Более того, ясно, что кручение также как и кривизна связаны с процессом параллельного перенесения на многообразии.

Cartan circuit: Translation and rotation misfits.

Так как в приложениях важную роль играет метрика, мы введем, хотя на данном этапе в этом нет необходимости, метрику $g_{ij} = g_{ji}$ которая определяет расстояния и углы.

Мы полагаем, что связность совместима с метрикой, т.е. коэффициенты неметричности исчезают

$$Q_{\alpha\beta} := -Dg_{\alpha\beta} = 0. \quad (3.115)$$

Пространства в которых выполняется это условие называются пространствами Римана-Картана (RC-space).

Мы можем решить (3.115) относительно симметричной части (неголономной) связности:

$$\Gamma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2}dg_{\alpha\beta}. \quad (3.116)$$

Далее, мы выберем ортонормальный ко-базис. Это может быть сделано при любых $n > 1$.

В соответствии с (3.116), мы найдем исчезающую часть неголономной связности.

Теперь мы готовы дать характеристику пространству Римана-Картана, так как это сделал Картан.

3.6.6 Вывод.

Мы начали (в первой главе) и подвели черту (тут) с одними теми же формулами с той лишь разницей, что теперь мы имеем представление о нелокальной нелинейной деформации и о нетривиальных топологических характеристиках кристалла. С следующим разделе мы очень кратко перечислим экспериментально наблюдаемые факты касающиеся топологии кристалла.

1. Сигнал ЭПР и калибровочные поля.
2. Некоммутативная зона Бриллюэна.
3. Квантовый эффект Холла.
4. Эффект Ааронова-Бома.
5. Сверхпроводимость.

ы