Глава 20

ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

20.1. Понятие тройного интеграла. Оценка тройного интеграла

Рассмотрим замкнутую пространственную область (V) и функцию $f(x,y,z)$, определенную в этой области. Область (V) разобьем произвольным способом на n элементарных областей (ΔV_1), $(\Delta V_2),\dots,(\Delta V_n)$ с диаметрами d_1, $d_2,\dots,d_n$ и объемами ΔV_1, $\Delta V_2,\dots,\Delta V_n$. Наибольший из диаметров обозначим буквой d. В каждой элементарной области (ΔV_k) выберем произвольно одну точку $M_k(x_k,y_k,z_k)$ и образуем произведение $f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$.

Интегральной суммой для функции $f(x,y,z)$ по области V называется сумма вида $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k$.

Тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V называется конечный предел ее интегральной суммы при $d\to 0$:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\,\Delta V_k .$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в ограниченной области V, то указанный предел существует и конечен (он не зависит от способа разбиения области V на элементарные и от выбора точек M_k).

В прямоугольных декартовых координатах тройной интеграл обычно записывают в виде $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$.

Основные свойства тройных интегралов аналогичны свойствам двойных интегралов.

Если в области V $m\le f(x,y,z)\le M$, то

$$mV\le\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV\le MV, \tag{20.1}$$

где V – объем области V. Эти неравенства выражают оценку тройного интеграла.

Пример 20.1. Оценить тройной интеграл $I=\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{25-x^2-y^2-z^2}}$, где область V определена неравенствами $x^2+y^2+z^2 \ge 9$, $x^2+y^2+z^2 \le 16$.

В данном случае область V ограничена двумя сферами: $x^2+y^2+z^2=9$, $x^2+y^2+z^2=16$, ее объем равен разности объемов двух шаров радиусов $R_1=3$ и $R_2=4$ с центрами в начале координат

$$V=V_2-V_1=\frac{4}{3}\pi R_2^3-\frac{4}{3}\pi R_1^3=\frac{4}{3}\pi(4^3-3^3)=\frac{148}{3}\pi.$$

Подынтегральная функция принимает наибольшее значение на сфере $x^2+y^2+z^2=16$, причем $M=1/\sqrt{25-16}=1/3$, а наименьшее – на сфере $x^2+y^2+z^2=9$, $m=1/\sqrt{25-9}=1/4$.

Следовательно, в соответствии с соотношениями (20.1) имеем

$$\frac{1}{4}\frac{148}{3}\pi \le I \le \frac{1}{3}\frac{148}{3}\pi, \text{ или } \frac{37}{3}\pi \le I \le \frac{148}{9}\pi.$$

20.2. Вычисление тройного интеграла в декартовых прямоугольных координатах

Если область интегрирования V определяется неравенствами $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$, $z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)$, где $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ – непрерывные функции своих аргументов, то тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz=\int\limits_{x_1}^{x_2}dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz; \qquad (20.2)$$

область V ограничена сверху поверхностью $z=z_2(x,y)$, снизу – поверхностью $z=z_1(x,y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz (рис. 20.1), вырезающей на плоскости Oxy область S_{xy}, определенную неравенствами $x_1 \le x \le x_2$, $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

Отметим, что порядок интегрирования может быть изменен; тройной интеграл можно вычислить шестью различными способами (в формуле (20.2) первое интегрирование совершается по z, второе – по y, третье – по x; оставив первое интегрирование по z, можно поменять местами второе и третье; далее, можно совершить первым интегрирование по x, а так же по y).

В частном случае, если функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ являются постоянными y_1, y_2, z_1, z_2, область интегрирования представляет собой прямоугольный параллелепипед, и формула (20.2) принимает вид

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{z_1}^{z_2} f(x,y,z)\,dz. \qquad (20.3)$$

Пример 20.2. Вычислить тройной интеграл

$$\int_0^1 dx \int_0^3 dy \int_0^2 (x+y+z)\,dz = \int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[\int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy \right\} dx.$$

Это интеграл вида (20.3). Пределы интегрирования в каждом из интегралов постоянные. Область интегрирования – прямой прямоугольный параллелепипед с измерениями a=1, b=3, c=2, одна из вершин которого находится в начале координат. Вычисляем сначала внутренний интеграл, заключенный в квадратные скобки, считая x и y постоянными:

$$\int_0^2 (x+y+z)\,dz = \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Bigg|_{z=0}^{z=2} = 2x+2y+2 = 2\,(x+y+1).$$

Второй интеграл, находящийся в фигурных скобках, принимает вид

$$\int_0^3 \left[\int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy =$$

$$= \int_0^3 2\,(x+y+1)dy = 2\int_0^3 (x+y+1)dy;$$

находим этот интеграл, считая x постоянным:

$$2\int_0^3 (x+y+1)\,dy =$$

$$= 2\left(xy + \frac{y^2}{2} + y \right) \Bigg|_{y=0}^{y=3} =$$

$$= 2\,(3x+9/2+3) = 6x+15.$$

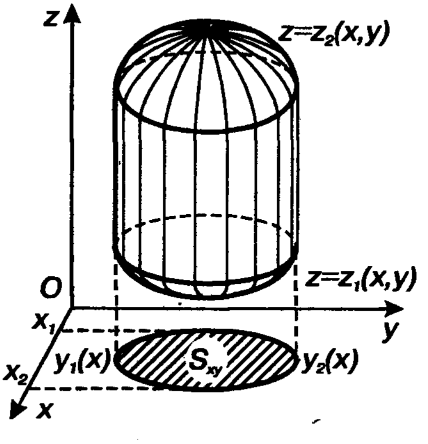

Рис. 20.1

Вычислим, наконец, внешний интеграл:

$$\int_0^1 \left\{ \int_0^3 \left[\int_0^2 (x+y+z)\,dz \right] dy \right\} dx = \int_0^1 (6x+15)\,dx = (3x^2+15x)\Big|_0^1 = 18.$$

Замечание. Интегрирование можно производить и в другом порядке. В частности,

$$\int_0^2 dz \int_0^3 dy \int_0^1 (x+y+z)\,dx = \int_0^2 dz \int_0^3 \left(y+z+\frac{1}{2} \right) dy = \int_0^2 (6+3z)\,dz = 18.$$

П р и м е р 20.3. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz$, где V – треугольная пирамида, ограниченная плоскостью $2x+y+z-4=0$ и плоскостями координат (рис. 20.2, *а*).

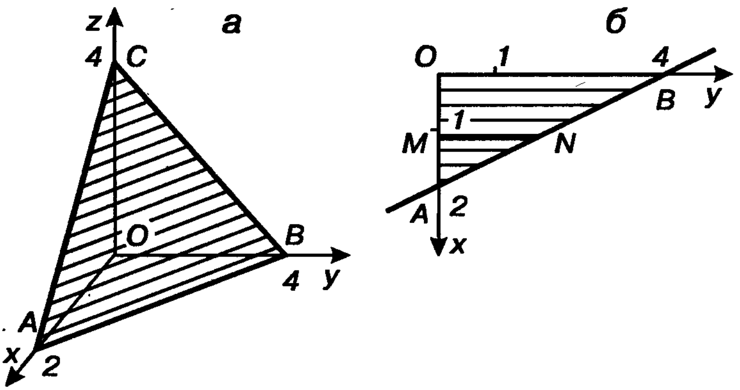

Рис. 20.2

Прежде всего расставим пределы интегрирования в данном тройном интеграле. Плоскость $2x+y+z-4=0$ пересекает плоскость Oxy по прямой $2x+y+z-4=0$, $z=0$, или $2x+y-4=0$, $z=0$. В плоскости Oxy эта прямая, проходящая через точки A и B (рис. 20.2, *б*), определяется уравнением $2x+y-4=0$. Треугольник OAB и его внутренние точки являются областью S_{xy} изменения переменных x и y (в эту область проектируется данная пирамида на плоскость Oxy). Очевидно, x изменяется в промежутке $[0, 2]$, т.е. $0 \le x \le 2$, при фиксированном x из этого промежутка (абсцисса точки M) y будет изменяться от 0 (ордината точки M) до $4-2x$ (ордината точки N; получена из уравнения прямой $2x+y-4=0$). При фиксированных x и y из области S_{xy} z будет изменяться от 0 до $4-y-2x$ (получено из уравнения плоскости $2x+y+z-4=0$).

Таким образом,

$$\iiint\limits_V y\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{4-2x} dy \int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^{4-y-2x} y\,dz = yz\Big|_{z=0}^{z=4-y-2x} = y\,(4-y-2x) = 4y-y^2-2xy,$$

$$\int\limits_0^{4-2x} (4y-y^2-2xy)\,dy = \left(2y^2-\frac{y^3}{3}-xy^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} = y^2\left(2-\frac{y}{3}-x\right)\Bigg|_{y=0}^{y=4-2x} =$$

$$= (4-2x)^2\left(2-\frac{4-2x}{3}-x\right)=\frac{1}{6}(4-2x)^3,$$

то

$$\int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{4-y-2x} ydz = \int_0^2 \frac{1}{6}(4-2x)^3 dx = -\frac{1}{6\cdot 2}\int_0^2 (4-2x)^3 d\,(4-2x) =$$

$$= -\frac{1}{12}\frac{(4-2x)^4}{4}\Bigg|_0^2 = \frac{1}{12}\frac{4^4}{4}=\frac{16}{3}.$$

Замечание. Тот же результат можно получить, меняя порядок интегрирования. В частности, проецируя пирамиду на плоскость Oyz, сводим данный тройной интеграл к следующему:

$$\iiint\limits_V ydxdydz = \int_0^4 dz \int_0^{4-z} dy = \int_0^{(4-y-z)/2} ydx = \frac{16}{3}.$$

20.3. Замена переменных в тройном интеграле

Если ограниченная замкнутая область V пространства $Oxyz$ взаимно однозначно отображается на область V_1 пространства O_1uvw с помощью непрерывно дифференцируемых функций

$$x = x\,(u, v, w),\; y = y\,(u, v, w),\; z = z\,(u, v, w) \tag{20.4}$$

и якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{20.5}$$

в области V_1 не обращается в нуль, т.е. $J \neq 0$, то замена переменных в тройном интеграле осуществляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\, dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{V_1} f(x\,(u, v, w), y\,(u, v, w), z\,(u, v, w))\,|J|\, dudvdw\,. \tag{20.6}$$

В частности, при переходе от декартовых координат x, y, z к цилиндрическим координатам ρ, φ, z (см. п. 1.14), связанным с x, y, z формулами

$$x = \rho\cos\varphi,\; y = \rho\sin\varphi,\; z = z \quad (0 \le \rho < +\infty,\; 0 \le \varphi < 2\pi,\; -\infty < z < +\infty), \tag{20.7}$$

якобиан преобразования $J=\rho$, поэтому

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iiint_{V_1} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\,\rho d\rho d\varphi dz. \tag{20.8}$$

При переходе от декартовых координат x, y, z к сферическим ρ, φ, θ, связанным с x, y, z соотношениями

$$x=\rho\sin\theta\cos\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\theta \tag{20.9}$$
$$(0\le\rho<+\infty,\ 0\le\varphi<2\pi,\ 0\le\theta\le\pi),$$

якобиан преобразования $J=\rho^2\sin\theta$ и формула (20.6) принимает вид

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=$$
$$=\iiint_{V_1} f(\rho\sin\theta\cos\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta)\,\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta. \tag{20.10}$$

Пример 20.4. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, где область V есть шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). В области V_1, являющейся образом области V, при преобразовании (20.9) переменные ρ, φ и θ меняются в следующих пределах: ρ от 0 до R, φ от 0 до 2π, θ от 0 до π. Так как подынтегральная функция $x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+$ $+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2$, а якобиан преобразования (20.9) равен $\rho^2\sin\theta$, то по формуле (20.10) получим

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz=\int_0^R d\rho\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi}\rho^2\rho^2\sin\theta d\varphi=$$
$$=\int_0^R\rho^4 d\rho\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{4\pi R^5}{5}.$$

Пример 20.5. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V z\,dxdydz$, где V – область, ограниченная верхней частью конуса $(x^2+y^2)/R^2=z^2/h^2$ и плоскостью $z=h$ $(h>0)$.

Введем цилиндрические координаты по формулам (20.7). Уравнение конуса принимает вид $\rho^2/R^2=z^2/h^2$, или $z=\pm(h/R)\,\rho$.

Новые переменные в области V_1 изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до R, φ от 0 до 2π, z от $\frac{h}{R}\rho$ до h.

По формуле (20.8) получаем

$$\iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{h\rho/R}^{h} \rho z\,dz = \int\limits_0^R \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_{h\rho/R}^{h} \rho z\,dz \right] d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^R \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \rho \frac{z^2}{2} \Bigg|_{z=h\rho/R}^{z=h} d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \int\limits_0^R \left\{ \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{h^2}{2} - \frac{h^2\rho^2}{2R^2} \right) \rho\,d\varphi \right\} d\rho =$$

$$= \frac{\pi h^2}{R^2} \int\limits_0^R (R^2 - \rho^2)\,\rho\,d\rho = \pi h^2 \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_0^R - \frac{\pi h^2}{R^2}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^R = \frac{\pi h^2 R^2}{4}.$$

Пример 20.6. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}\,dx\,dy\,dz$, где область V ограничена эллипсоидом $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

Введем так называемые обобщенные сферические координаты по формулам

$$x = a\rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = c\rho \cos\theta. \qquad (20.11)$$

Якобиан преобразования (20.11), определяемый формулой

$$J = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_\rho & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & a\rho\cos\theta\cos\varphi & -a\rho\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & b\rho\cos\theta\sin\varphi & b\rho\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -c\rho\sin\theta & 0 \end{vmatrix},$$

равен $abc\rho^2\sin\theta$. Подынтегральная функция по формулам (20.11) преобразуется к виду $\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2} = \sqrt{1-\rho^2}$, а уравнение эллипсоида запишется так: $\rho^2=1$, или $\rho=1$.

В области V_1 переменные ρ, θ, φ изменяются в следующих пределах: ρ от 0 до 1, θ от 0 до π, φ от 0 до 2π.

По формуле (20.6) получаем

$$\iiint\limits_V \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,abc\rho^2 \sin\theta\,d\rho =$$

$$= abc \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho^2\,d\rho.$$

С помощью подстановки $\rho = \sin t$ находим первый интеграл:

$$\int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\,\rho^2 d\rho = \int_0^{\pi/2} \cos t \sin^2 t \cos t\, dt = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\, dt = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\, dt = \frac{\pi}{16}.$$

Далее, $\int_0^{\pi} \sin\theta d\theta = 2$, поэтому

$$\iiint_V \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2 - z^2/c^2}\, dxdydz = abc\frac{\pi}{16}2\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi^2 abc}{4}.$$

Пример 20.7. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V (x^2+y+z^2)^3 dxdydz$, где область V ограничена цилиндром $x^2+z^2=1$ и плоскостями $y=0$, $y=1$.

Перейдем к цилиндрическим координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $y = y$, тогда уравнение цилиндра $x^2+z^2=1$ примет вид $\rho^2 = 1$, $\rho = 1$, а подынтегральная функция запишется так:

$$(x^2+y+z^2)^3 = (\rho^2+y)^3 = \rho^6 + 3\rho^4 y + 3\rho^2 y^2 + y^3.$$

При таком переходе к цилиндрическим координатам замена переменных в тройном интеграле будет осуществляться по формуле

$$\iiint_V f(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_{V'} f(\rho\cos\varphi, y, \rho\sin\varphi)\, \rho d\rho d\varphi dy$$

Следовательно,

$$\iiint_V (x^2+y+z^2)^3 dxdydz = \iiint_{V'} (\rho^2+y)^3 \rho d\rho d\varphi dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dy \int_0^1 (\rho^7 + 3\rho^5 y + 3\rho^3 y^2 + \rho y^3)\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{\rho^8}{8} + \frac{3\rho^6}{6}y + \frac{3\rho^4}{4}y^2 + \frac{\rho^2}{2}y^3\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{2}y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y^3\right) dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8}y + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{4}y^3 + \frac{1}{8}y^4\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2}\pi.$$

Пример 20.8. Исследовать, сходится ли несобственный тройной интеграл $\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}}$, где (V) – шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Данный интеграл является несобственным, так как подынтегральная функция не ограничена в рассматриваемой области (она обращается в бесконечность на границе области, т.е. на сфере $x^2+y^2+z^2=R^2$).

Выражаем этот интеграл в сферических координатах. Так как в данном случае $0 \le \rho \le R$, $0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, то по формуле (20.10) получаем

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} = \iiint\limits_{V_1} \frac{\rho^2 \sin\theta d\rho d\varphi d\theta}{\sqrt{R^2-\rho^2}} =$$

$$= \int\limits_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} \int\limits_0^\pi \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi \int\limits_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}.$$

Последний интеграл (несобственный) вычислим с помощью подстановки $\rho = R\sin t$:

$$\int\limits_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{R^2 \sin^2 t}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}} R\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} R^2 \sin^2 t dt =$$

$$= \frac{R^2}{2} \int\limits_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\, dt = \frac{R^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} - \frac{R^2}{4}\sin 2t\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{R^2\pi}{4}.$$

Итак,

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}} = 4\pi \int\limits_0^R \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = 4\pi \frac{R^2\pi}{4} = \pi^2 R^2.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится и равен $\pi^2 R^2$.

20.4. Приложения тройных интегралов

Объем V области V выражается формулой

$$V = \iiint\limits_V dxdydz. \qquad (20.12)$$

В сферических координатах этот интеграл имеет вид

$$V = \iiint\limits_{V_1} \rho^2 \sin\theta d\rho d\theta d\varphi, \qquad (20.13)$$

а в цилиндрических координатах

$$V = \iiint\limits_{V_2} \rho d\rho d\varphi dz. \qquad (20.14)$$

Если тело занимает объем V и $p = p(x, y, z)$ – плотность его в точке $M(x, y, z)$, то масса тела равна

$$m = \iiint\limits_V p(x, y, z)\, dxdydz. \tag{20.15}$$

Координаты центра тяжести тела вычисляются по формулам

$$x_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V p(x, y, z)\, xdxdydz,\quad y_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V p(x, y, z)\, ydxdydz,$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V p(x, y, z)\, zdxdydz, \tag{20.16}$$

где m – масса тела.

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей определяются интегралами

$$I_{xy} = \iiint\limits_V pz^2 dxdydz,\quad I_{xz} = \iiint\limits_V py^2 dxdydz,\quad I_{yz} = \iiint\limits_V px^2 dxdydz.$$

Момент инерции тела относительно оси Ou определяется интегралом

$$I_u = \iiint\limits_V pr^2 dxdydz,$$

где r – расстояние точки $N(x, y, z)$ тела от оси Ou. В частности, моменты инерции тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz определяются формулами

$$I_x = \iiint\limits_V p(y^2 + z^2)\, dxdydz,\quad I_y = \iiint\limits_V p(x^2 + z^2)\, dxdydz,$$
$$I_z = \iiint\limits_V p(x^2 + y^2)\, dxdydz. \tag{20.17}$$

Момент инерции тела относительно начала координат определяется формулой

$$I_0 = \iiint\limits_V p(x^2 + y^2 + z^2)\, dxdydz.$$

Очевидно, верны следующие соотношения: $I_x = I_{xy} + I_{xz}$, $I_y = I_{yx} + I_{yz}$, $I_z = I_{zx} + I_{zy}$, $I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{xz}$.

Ньютоновым потенциалом тела в точке $P(\xi, \eta, \zeta)$ называется интеграл

$$u(\xi, \eta, \zeta) = \iiint\limits_V p(x, y, z)\frac{dxdydz}{r}, \tag{20.18}$$

где V – объем тела, $p = p(x,y,z)$ – плотность тела, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Материальная точка массы m притягивается телом с силой, проекции которой F_x, F_y, F_z на оси координат Ox, Oy, Oz равны:

$$F_x = km\frac{\partial u}{\partial \xi} = km\iiint\limits_V p\frac{x-\xi}{r^3} dxdydz,$$

$$F_y = km\frac{\partial u}{\partial \eta} = km\iiint\limits_V p\frac{y-\eta}{r^3}\,dxdydz, \qquad (20.19)$$

$$F_z = km\frac{\partial u}{\partial \zeta} = km\iiint\limits_V p\frac{z-\zeta}{r^3}\,dxdydz.$$

Пример 20.9. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2+z^2=b^2$ $(0<a<b)$, $x^2+y^2=z^2$ $(z\geq 0)$.

Данное тело ограничено сферами радиусов a и b с центрами в начале координат и конусом с вершиной в начале координат и осью, совпадающей с осью Oz. Оно расположено над плоскостью Oxy. Сечение этого тела плоскостью Oyz изображено на рис. 20.3.

Для вычисления объема тела перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). Уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$ примет вид $\rho=a$, так как $x^2+y^2+z^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2\sin^2\theta\,(\cos^2\varphi+$ $+\sin^2\varphi)+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\rho^2$. Аналогично преобразуется уравнение второй сферы $\rho=b$. Уравнение конуса $x^2+y^2=z^2$ примет вид $\theta=\pi/4$, потому что $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\theta$, $z^2=\rho^2\cos^2\theta$, $\rho^2\sin^2\theta=\rho^2\cos^2\theta$, откуда $\mathrm{tg}^2\theta=1$.

По формуле (20.13) находим

$$V=\iiint\limits_V \rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta=\int\limits_a^b \rho^2 d\rho\int\limits_0^{\pi/4}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{b^3-a^3}{3}(2-\sqrt{2})\,\pi.$$

Пример 20.10. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=3z$.

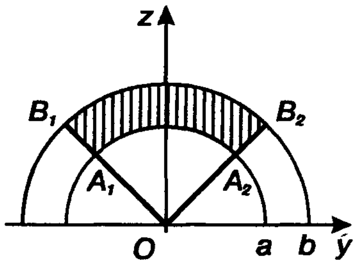

Рис. 20.3

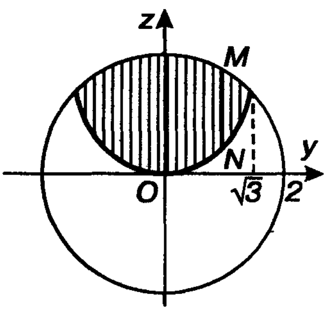

Рис. 20.4

Данное тело ограничено сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом вращения $x^2+y^2=3z$; сечение тела плоскостью Oyz изображено на рис. 20.4. Для вычисления объема тела перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (20.7). В цилиндрических координатах получаем $\rho^2+z^2=4$ (уравнение сферы), $\rho^2=3z$

(уравнение параболоида). Отметим, что при постоянных значениях ρ и φ внутри тела z изменяется от $\rho^2/3$ (для точки N пересечения с поверхностью параболоида) до $z=\sqrt{4-\rho^2}$ (для точки M пересечения с верхней частью поверхности сферы). При постоянном φ ρ изменяется от 0 (для точек, лежащих на оси Oz) до наибольшего значения в точках линии пересечения данных поверхностей, так как с возрастанием z ρ для поверхности параболоида возрастает, а для шара убывает (что видно из уравнений поверхностей). Для линии пересечения поверхностей $x^2+y^2+z^2=4$ и $x^2+y^2=3z$ имеем $z^2+3z-4=0$, откуда $z_1=1, z_2=-4$ (второй корень дает мнимые значения для ρ). Следовательно, для точек линии пересечения $z=1$, $\rho=\sqrt{3}$; внутри тела ρ изменяется от 0 до $\sqrt{3}$. Заметив еще, что φ изменяется от 0 до 2π, по формуле (20.14) получим

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{4-\rho^2}}dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\rho\sqrt{4-\rho^2}-\frac{\rho^3}{3}\right)d\rho=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2}-\frac{\rho^4}{12}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}}d\varphi=\frac{19}{6}\pi.$$

Пример 20.11. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$.

При наличии выражения $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2$ в уравнении поверхности полезен переход к обобщенным сферическим координатам по формулам (20.11). Якобиан в этом случае равен $abc\rho^2\sin\theta$.

Уравнение данной поверхности в новых координатах примет вид $\rho=1$ (ибо $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=\rho^2\sin^2\theta\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+\rho^2\cos^2\theta=\rho^2$), поэтому для данного тела ρ изменяется от 0 до 1. Заметив, что $0\le\theta\le\pi$, $0\le\varphi\le 2\pi$, по формуле (20.6) получим

$$V=\iiint_V dxdydz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1 abc\rho^2\sin\theta d\rho=$$

$$=abc\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{1}{3}\sin\theta d\theta=\frac{abc}{3}\int_0^{2\pi}(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi}d\varphi=\frac{4}{3}\pi abc.$$

Итак, $V=(4/3)\pi abc$; в частном случае, при $a=b=c=R$, получаем объем шара $x^2+y^2+z^2=R^2$, $V=(4/3)\pi R^3$.

Замечание. Поскольку эллипсоид симметричен относительно координатных плоскостей, то можно найти объем $1/8$ части данного тела. При вычислении интеграла нужно иметь в виду, что в этом случае $0\le\rho\le 1$,

$0 \le \theta \le \pi/2$, $0 \le \varphi \le \pi/2$, т.е. верхние пределы интегрирования по θ и φ отличны от предыдущих.

Пример 20.12. Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

Пусть $N(x, y, z)$ – произвольная точка данного шара, тогда ее расстояние d до начала координат выражается формулой $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, поэтому плотность p в соответствии с условием задачи определяется формулой $p(x, y, z) = k\big/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, где k – коэффициент пропорциональности. По формуле (20.15) имеем

$$m = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\, dxdydz,$$

где область V ограничена сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$. Для вычисления данного интеграла перейдем к сферическим координатам по формулам (20.9). Подынтегральная функция $k\big/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = k/\rho$, а уравнение сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ примет вид $\rho = 2R\cos\theta$.

По формуле (20.10) находим

$$m = \iiint\limits_V \frac{kdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = k \iiint\limits_{V_1} \frac{1}{\rho} \rho^2 \sin\theta\, d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho \sin\theta\, d\rho = k \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} 2R^2 \cos^2\theta \sin\theta d\theta =$$

$$= 2kR^2 \int\limits_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3\theta}{3} \right) \Bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{2}{3} kR^2 \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4}{3} \pi k R^2.$$

Пример 20.13. Найти центр тяжести шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке его обратно пропорциональна расстоянию до начала координат.

Воспользуемся формулами (20.16). Масса m была определена в предыдущей задаче (см. пример 20.12). Из соображений симметрии следует, что $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Найдем z_0:

$$z_0 = \frac{1}{m} \iiint\limits_V \frac{kzdxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Вычислим этот интеграл, перейдя к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V \frac{kz\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \frac{1}{\rho}\rho^2 \sin\theta \rho\cos\theta d\rho =$$

$$= k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta d\theta \int\limits_0^{2R\cos\theta} \rho^2 d\rho = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \frac{8R^3\cos^3\theta}{3}\sin\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$= -\frac{8kR^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta d(\cos\theta) = -\frac{8kR^3}{3}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos^5\theta}{5}\Bigg|_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{16}{15}\pi k R^3.$$

Следовательно,

$$z_0 = \frac{1}{m}\iiint\limits_V \frac{kz\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{(4/3)\,\pi k R^2}\frac{16}{15}\pi k R^3 = \frac{4}{5}R.$$

Замечание. Координаты $x_0 = 0$ и $y_0 = 0$ можно получить с помощью первых двух формул (20.16).

Пример 20.14. Вычислить момент инерции однородного куба относительно одного из его ребер.

Начало прямоугольной декартовой системы координат поместим в одной из вершин куба, а оси направим вдоль трех взаимно перпендикулярных ребер. Обозначим через a ребро куба и найдем его момент инерции относительно оси Oz, воспользовавшись третьей из формул (20.17). Так как куб является однородным, то в указанных формулах можно положить $p = 1$:

$$I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz = \int\limits_0^a\int\limits_0^a\int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dxdydz =$$

$$= \int\limits_0^a dx \int\limits_0^a dy \int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dz = a\int\limits_0^a dx \int\limits_0^a (x^2+y^2)\,dy =$$

$$= a\int\limits_0^a \left(x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=a} dx = a\int\limits_0^a \left(ax^2 + \frac{a^3}{3}\right) dx =$$

$$= a\left(\frac{ax^3}{3} + \frac{a^3x}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^5.$$