پردازش گفتار

مروری بر پردازش سیگنال دیجیتال

هادی ویسی

h.veisi@ut.ac.ir

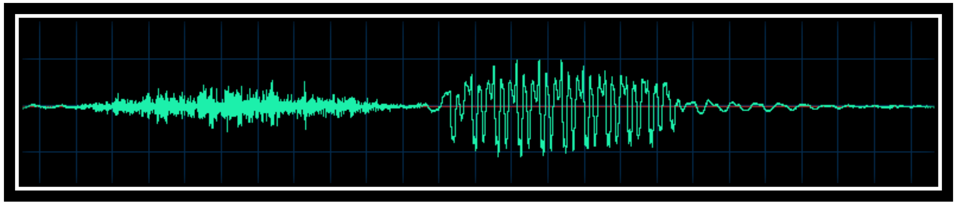
دانشگاه تهران – دانشکده علوم و فنون نوین

فهرست

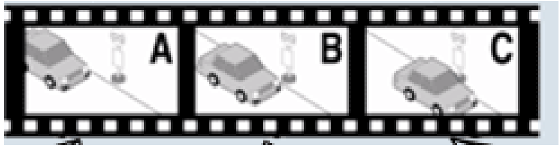
- سیگنال
- سیستم
- نمایش فوریه
  - سری فوریه (فرکانس گسسته)
  - تبدیل فوریه سریع (FFT)
  - تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته)
  - خلاصه و جمع‌بندی
- تبدیل Z
- ویژگی‌های تبدیل Z و تبدیل فوریه
- تبدیل کسینوسی گسسته (DCT)

سیگنال . . .

- سیگنال
  - تابعی از یک یا چند متغیر مستقل (از جمله زمان)
  - که حاوی اطلاعات هستند
  - درباره رفتار یا ساختار یک پدیده فیزیکی

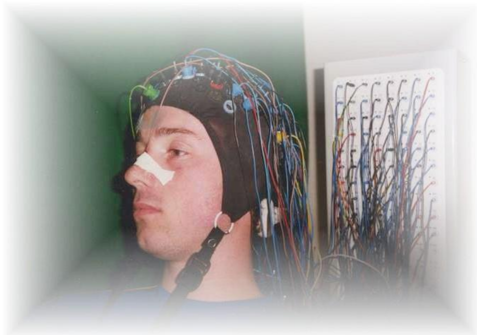


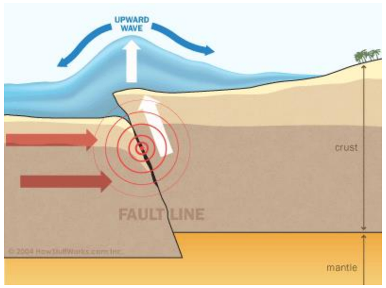
- مثال
  - یک بعدی: گفتار
    - تابعی از زمان
  - دو بعدی: تصویر
    - تابعی از طول و عرض (مکان)
  - سه بعدی: ویدئو
    - تابعی از طول و عرض (مکان) و زمان



سیگنال . . .

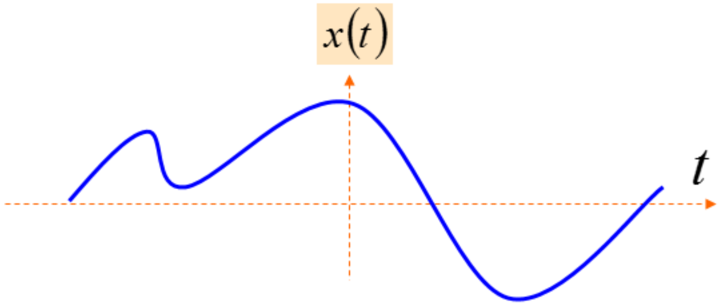
- انواع
  - الکتریکی و مخابراتی: ولتاژ، جریان، ...
  - زیستی (Biological): قلب، مغز، ...
  - محیطی: لرزش زمین، ...
  - صنعتی و ساخته انسان: قیمت سهام، مصرف برق، ...



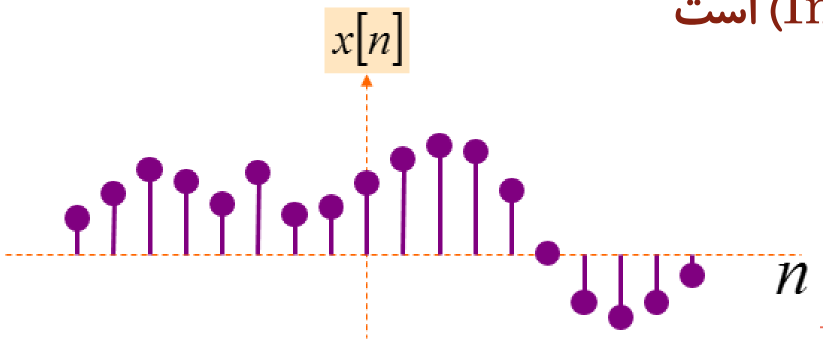


سیگنال . . .

- پیوسته در زمان (CT: Continuous-Time)
  - بیشتر پدیده های فیزیکی از این نوع هستند: فشار، دما، ولتاژ و جریان، ...

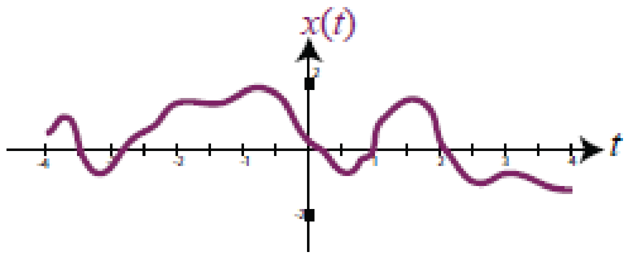


- گسسته در زمان (DT: Discrete-Time)
  - بیشتر سیگنال ها ساخت بشر از این نوع هستند: نرخ ارز، مصرف برق در تهران
  - در x[n] مقدار n یک عدد حقیقی (Integer) است
    - زمان به صورت واحدهای گسسته تغییر می کند

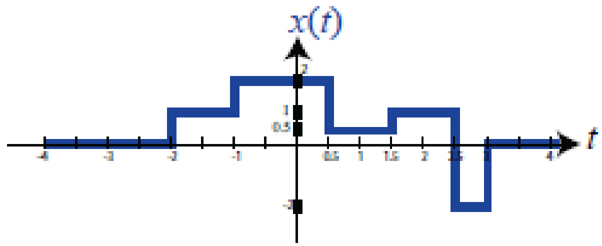


سیگنال . . .

- دامنه پیوسته (Continuous Amplitude)
  - مقدار دامنه پیوسته است
    - مقدار دما
    - مقدار جریان الکتریسیته

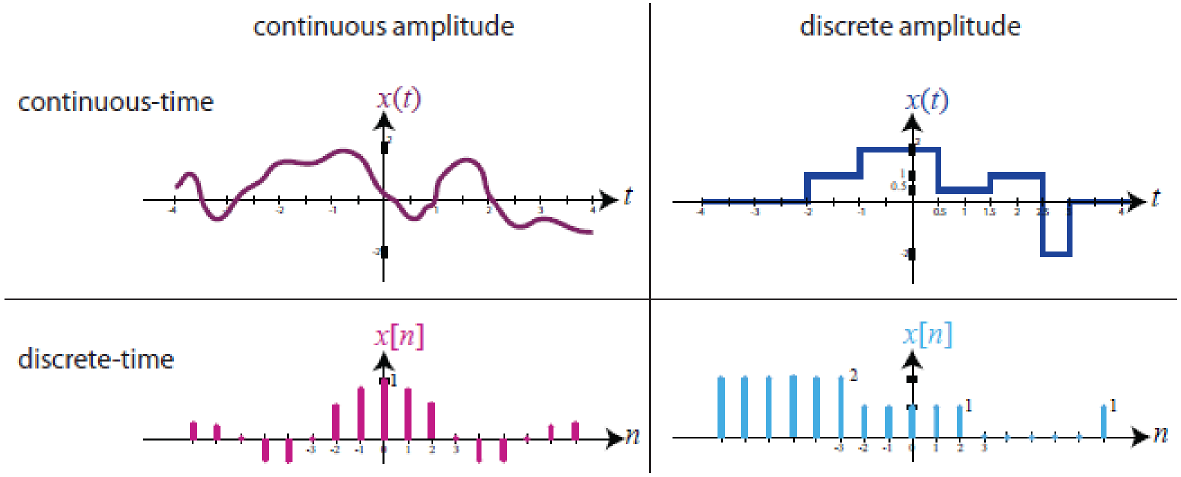


- دامنه گسسته (Discrete Amplitude)
  - مقدار دامنه گسسته است
    - یک تصویر: از تعدادی پیکسل (نقطه) تشکیل شده
    - یک فایل صوتی در رایانه
      - که از تعدادی نمونه (Sample) تشکیل شده است
    - جمعیت ایران در طول زمان



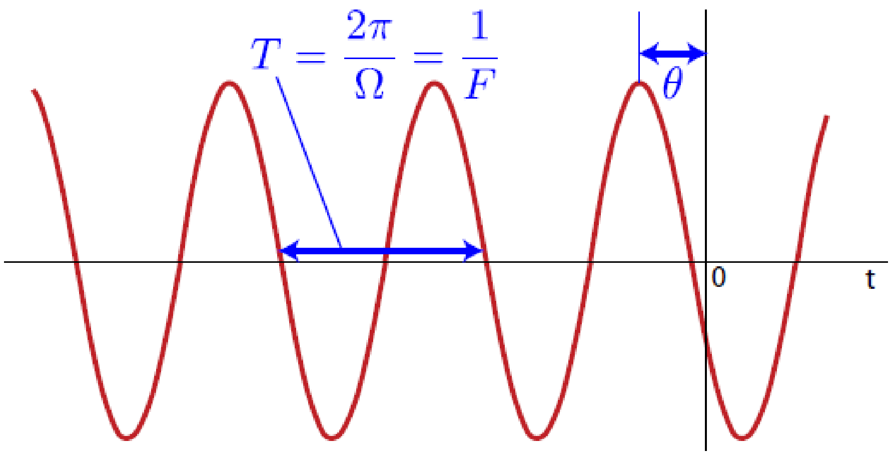
سیگنال . . .

- آنالوگ (Analog): دامنه و زمان پیوسته است
  - بیشتر سیگنالی های طبیعی
  - مسیر حرکت یک سفینه فضایی، جریان الکتریسیته، موج FM رادیو، صدا
- رقومی (Digital): دامنه و زمان گسسته است
  - علاوه بر زمان، دامنه هم سطوح محدودی دارد
  - همه سیگنال های داخل کامپیوتر گسسته هستند (Digital)



سیگنال . . .

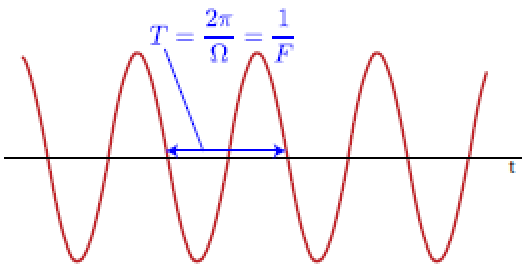
- مفهوم فرکانس (پیوسته در زمان) ..



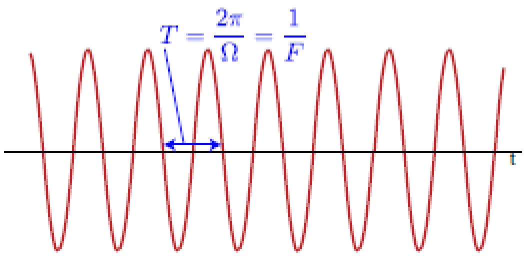
$$x_a(t) = A\cos(\Omega t + \theta) = A\cos(2\pi F t + \theta), \quad t \in \mathbb{R}$$

- analog signal, $\because -A \le x_a(t) \le A$ and $-\infty < t < \infty$
- A = amplitude
- Ω = frequency in rad/s
- F = frequency in Hz (or cycles/s); note: $\Omega = 2\pi F$
- θ = phase in rad

smaller F, larger T



larger F, smaller T

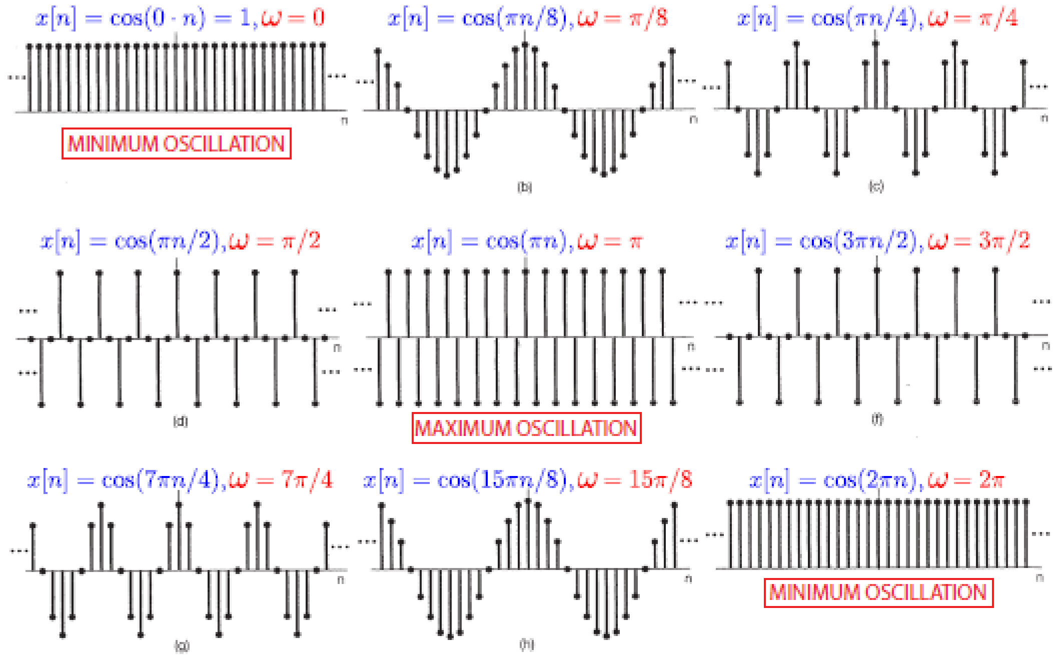


Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

سیگنال . . .

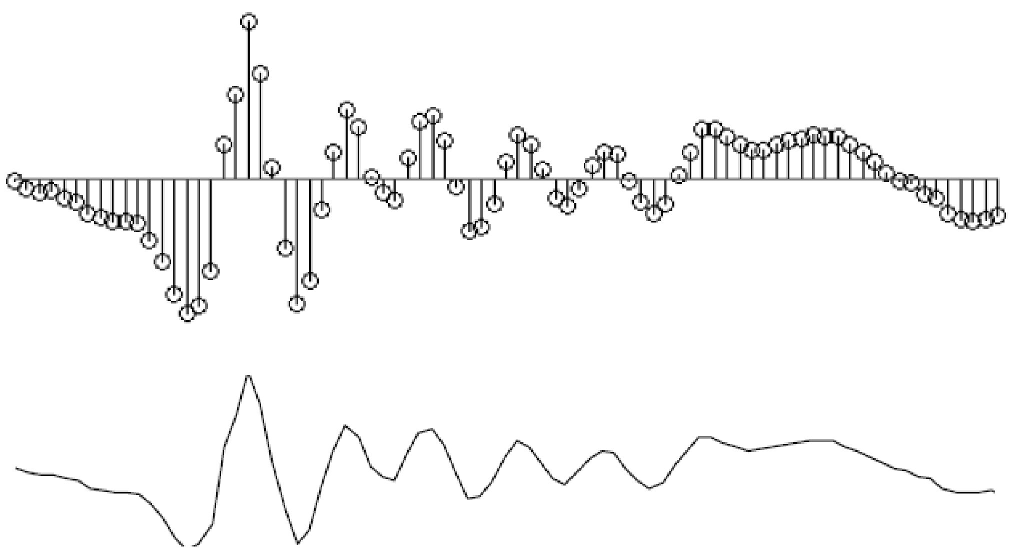
- مفهوم فرکانس (تابع سینوسی گسسته در زمان)

$$x(n) = A\cos(\omega n + \theta) = A\cos(2\pi f n + \theta), \quad n \in \mathbb{Z}$$



سیگنال . . .

- دیجیتال و آنالوگ
  - سیگنال آنالوگ $x_a(t)$
  - سیگنال دیجیتال (سیگنال زمان-گسسته) $x[n] = x_a(nT)$
    - یک عدد صحیح
    - هر T ثانیه یک نمونه برداشته می شود
  - بسامد (فرکانس) نمونه‌برداری $F_s = 1/T$
    - برای بسامد نمونه‌گیری Fs=8kHZ، مدت زمان نمونه‌برداری متناظر آن ۱۲۵ میکرو ثانیه



سیگنال . . .

- سیگنال موج سینوسی

$$x_0[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0)$$

دامنه

بسامد زاویه‌ای

فاز

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

بسامد خطی نرمال شده

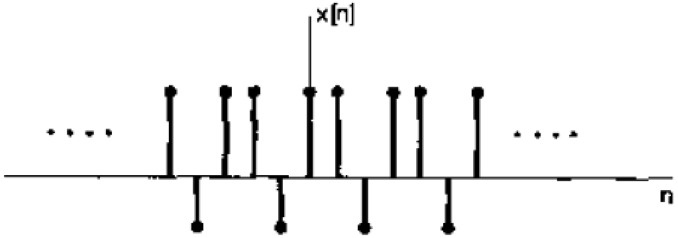
$$T_0 = 1/f_0$$

دوره تناوب

- **اهمیت سیگنال سینوسی**
  - سیگنال‌های گفتار را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از سینوس‌ها تجزیه کرد
  - وقتی پیچ باس یک آمپلی فایر را زیاد می‌کنیم تا صدا بم‌تر شود، در واقع میزان دریافت سینوس‌های با بسامد پایین را افزایش می‌دهیم

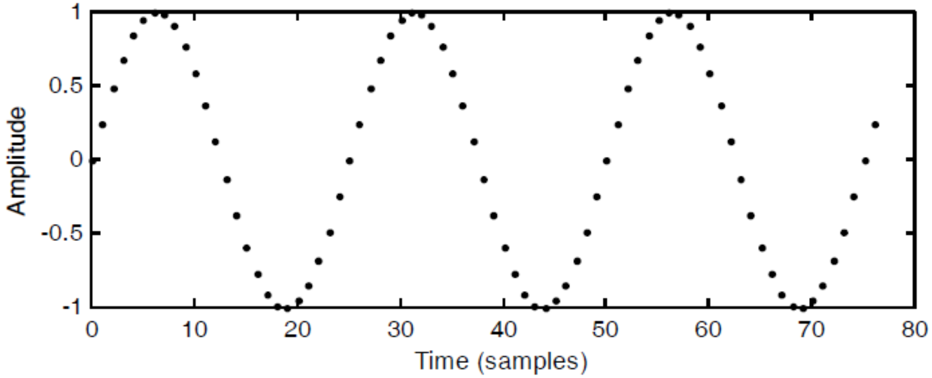
سیگنال . . .

- سیگنال دوره‌ای (Periodic)
  - سیگنال x[n] دوره‌ای با دوره N است اگر و فقط اگر x[n]=x[n+N]

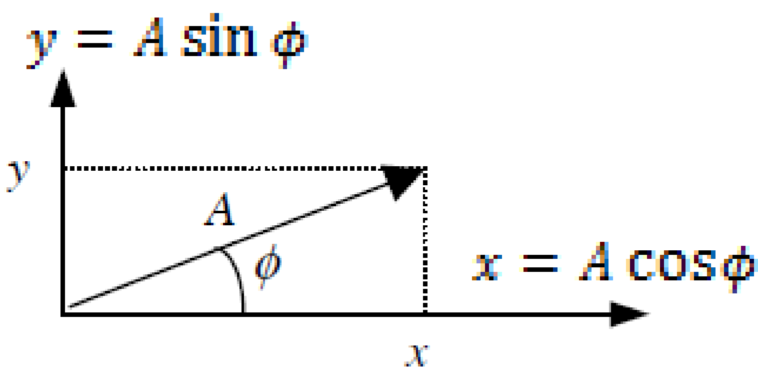


Period = 3

  - سیگنال موج سینوسی $x_0[n] = A_0 \cos(\omega_0 n + \phi_0)$
    - دوره تناوب N است اگر $\omega_0 = 2\pi/N$
    - باید $2\pi k/\omega_0$ عدد حقیقی باشد



سیگنال . . .



نمایش مختلط

- نمایش دکارتی $z = x + jy$

$\boxed{j = \sqrt{-1}}$

- نمایش قطبی $z = Ae^{j\phi}$

دامنه

فاز

$$A = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = tan^{-1}\frac{y}{x}$$

- رابطه اویلر

$$\boxed{e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi}$$

- نمایش سیگنال سینوسی

بخش حقیقی نمایش مختلط

$$x_0[n] = A_0\cos(\omega_0 n + \phi_0) = \mathrm{Re}\{A_0 e^{j(\omega_0 n + \phi_0)}\}$$

سیگنال . . .

جمع دو سیگنال سینوسی

- با بسامد یکسان ولی دامنه و فازهای مختلف

$$A_0\cos(\omega_0 n+\phi_0)+A_2\cos(\omega_0 n+\phi_1)=?$$

$$A_0 e^{j(\omega_0 n+\phi_0)}+A_1 e^{j(\omega_0 n+\phi_1)}=e^{j\omega_0 n}\left(A_0 e^{j\phi_0}+A_1 e^{j\phi_1}\right)=e^{j\omega_0 n}Ae^{j\phi}=Ae^{j(\omega_0 n+\phi)}$$

بخش حقیقی طرفین

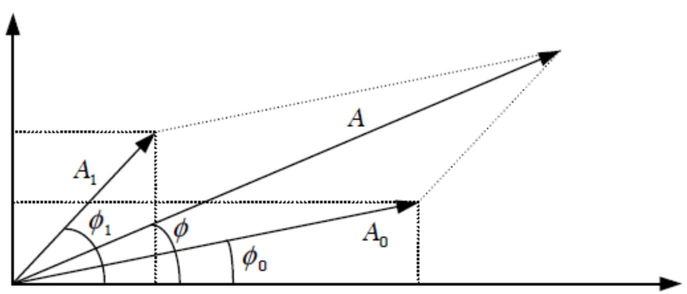
$$A_0\cos(\omega_0 n+\phi_0)+A_2\cos(\omega_0 n+\phi_1)=A\cos(\omega_0 n+\phi)$$

یک سیگنال سینوسی
با همان بسامد

$$A_0 e^{j\phi_0}+A_1 e^{j\phi_1}=Ae^{j\phi} \xrightarrow{\text{برابری بخش حقیقی و موهومی}} \tan\phi=\frac{A_0\sin\phi_0+A_1\sin\phi_1}{A_0\cos\phi_0+A_1\cos\phi_1}$$

$$A^2=A_0^2+A_1^2+2A_0A_1\cos(\phi_0-\phi_1)$$

$$\begin{cases}\sin^2\phi+\cos^2\phi=1\\ \cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b\end{cases}$$

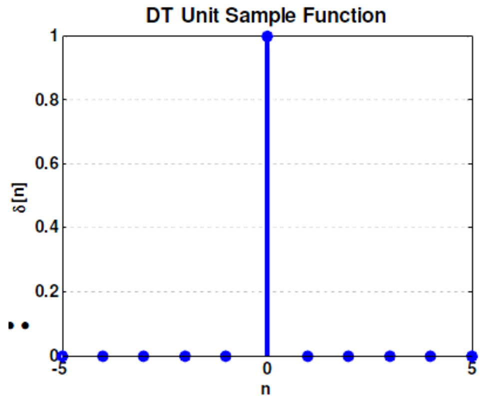


- حاصل جمع N سینوسی با بسامد یکسان، یک سینوسی دیگر با همان بسامد است

سیگنال . . .

- سیگنال ضربه واحد **δ[n] (Unit Sample (impulse) Function)**
  - هر سیگنال را می‌توان بر حسب این سیگنال نوشت

$$\delta[n]=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]=1$$



$$x[n]=\cdots+x[-2]\delta[n+2]+x[-1]\delta[n+1]+x[0]\delta[n]+x[1]\delta[n-1]+\cdots$$

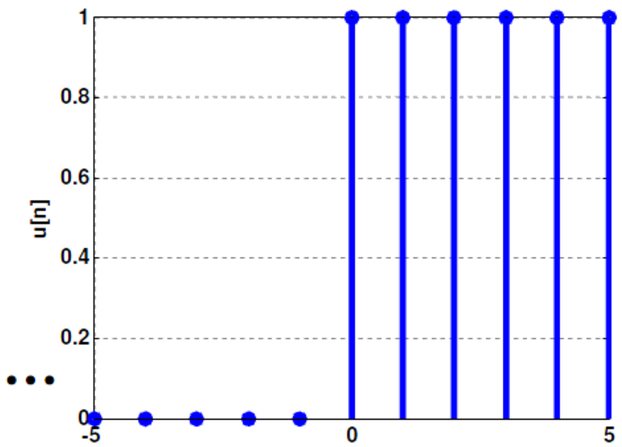
$$\Downarrow$$

$$\boxed{x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\underbrace{x[k]}_{\text{Coefficients}}\,\underbrace{\delta[n-k]}_{\text{Basic Signals}}}$$

سیگنال . . .

- **تابع پله (Unit Step Function): u[n]**
  - تعریف

$$u[n]=\begin{cases}1, n\geq 0\\ 0, n<0\end{cases}$$



  - داریم

$$u[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\dots$$

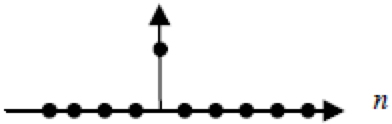
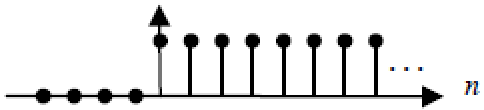
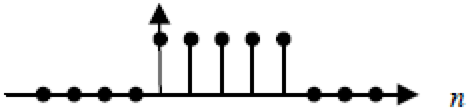
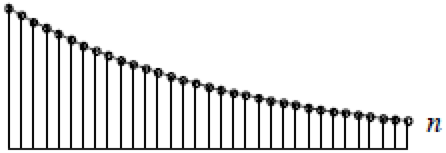
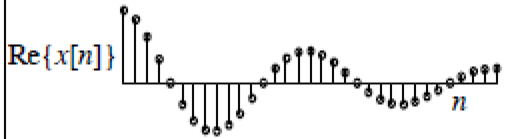
or

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u[k]\delta[n-k]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

  - به صورت معکوس داریم $\delta[n]=u[n]-u[n-1]$

سیگنال . . .

- چند سیگنال دیجیتال رایج

Kronecker delta, or *unit impulse*	$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$	
Unit step	$u[n]=\begin{cases}1 & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$	
Rectangular signal	$\mathrm{rect}_N[n]=\begin{cases}1 & 0\leq n<N\\ 0 & otherwise\end{cases}$	
Real exponential	$x[n]=a^n u[n]$	
Complex exponential	$x[n]=a^n u[n]=r^n e^{jn\omega_0}u[n]$ $=r^n(\cos n\omega_0+j\sin n\omega_0)u[n]$	

سیگنال

- توان (Power)
  - میانگین اندازه نمونه ها

$$P_\infty = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} |x[n]|^2$$

تعداد نمونه های سیگنال

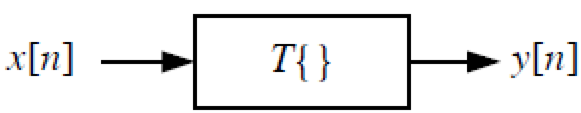
- انرژی (Energy)
  - جمع اندازه نمونه ها

$$E_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

سیستم‌های دیجیتال . . .

- تعریف
  - ابزاری است که یک عملیات روی یک سیگنال انجام می دهد
    - یک سیگنال را به عنوان ورودی دریافت می کند و یک سیگنال دیگر را به عنوان خروجی تولید می‌کند
    - پردازش (Process) سیگنال = عبور دادن سیگنال از یک سیستم
    - یک سیستم را می توان یک پردازش روی سیگنال در نظر گرفت که سیگنال ورودی را به سیگنال دیگری تبدیل (Transform) می کند

$$y[n] = T\{x[n]\}$$



  - سیستم $T\{\,\}$
  - دریافت سیگنال ورودی $x[n]$
  - تولید سیگنال خروجی $y[n]$

- مثال: سیستم تبدیل گفتار به متن
  - ورودی: سیگنال یک بعدی گفتار
  - خروجی: دنباله گسسته کلمات

سیستم‌های دیجیتال . . .

- ویژگی . . .
  - علّی (Causality): سیستمی که خروجی آن به ورودی‌های آن در زمان آینده وابسته نیست و فقط به ورودی‌های حال و گذشته وابسته است
  - بدون حافظه (Memoryless): خروجی y[n] سیستم وابستگی به ورودی های زمان قبلی و بعد x[n±N] وابسته نیست
    - به لحظه قبل و بعد وابسته نیست
  - خطی (Linear): سیستم T خطی (Linear) است، اگر و تنها اگر
    - برای همه a_1ها و a_2ها
    - برای تمام سیگنال‌های $x_1[n]$ و $x_2[n]$

$$T\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1T\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

  - نامتغیر با زمان (Time-Invariant): جابجایی ورودی به اندازه مشخص، معادل همان میزان جابجایی در خروجی باشد

$$y[n-n_0]=T\{x[n-n_0]\}$$

سیستم‌های دیجیتال . . .

- ویژگی . . .
  - **سیستم‌های غیرخطی** (Nonlinear)
    - عدم ارضای رابطه خطی
    - بیشتر سیستم‌های پردازش گفتار غیرخطی هستند!

$$T\{a_1x_1[n]+a_2x_2[n]\}=a_1T\{x_1[n]\}+a_2T\{x_2[n]\}$$

  - **سیستم پایدار** (Stable)
    - به ازای ورودی با دامنه (انرژی) محدود، خروجی با دامنه (انرژی) ایجاد کند
      - اگر $|x[n]|<\infty$ باشد، آنگاه $|y[n]|<\infty$ (برای همه nها)
  - **سیستم معکوس‌پذیر** (Invertible)
    - اگر در سیستمی به ازای ورودی x[n] خروجی y[n] را تولید کند، معکوس‌پذیر است اگر سیستم دیگری وجود داشته باشد که به ازای ورودی y[n]، خروجی x[n] را تولید کند.

سیستم‌های دیجیتال . . .

ویژگی . . .

- سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI: Linear Time-Invariant)
- وقتی ورودی سیستم ضربه واحد δ[n] است $\delta[n] \rightarrow h[n]$

From TI:

$$\Downarrow$$

$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]$$

From LTI:

If	$x_k[n] \rightarrow y_k[n]$	
Then	$\sum_k a_k x_k[n] \rightarrow \sum_k a_k y_k[n]$	

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]}_{\text{Convolution Sum}}$$

- رابطه ورودی و خروجی

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

کانولوشن

پاسخ ضربه

- پاسخ ضربه h[n]: پاسخ سیستم وقتی که ورودی x[n]=δ[n] (تابع ضربه) است

سیستم‌های دیجیتال . . .

- ویژگی
  - سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI: Linear Time-Invariant)
  - رابطه ورودی و خروجی

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]h[n-k]=x[n]*h[n]$$

کانولوشن

پاسخ ضربه

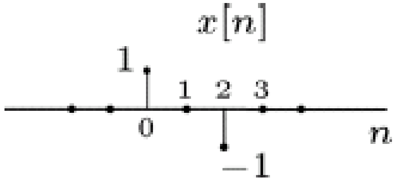
- وقتی سیگنالی از یک سیستم LTI عبورد می‌کند، سیگنال ورودی در تابع مشخصه سیستم کانوالو می‌شود

- کل سیستم را می‌توان با داشتن تابع h[n] تعریف کرد
  - تابع مشخصه سیستم
  - مهم ترین ویژگی: با داشتن پاسخ سیستم برای برخی ورودی های خاص، می توان پاسخ سیستم را برای همه ورودی ها حساب کرد.

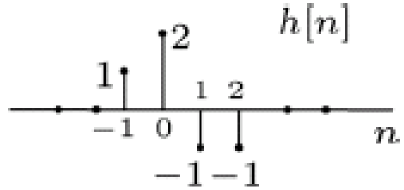
سیستم‌های دیجیتال . . .

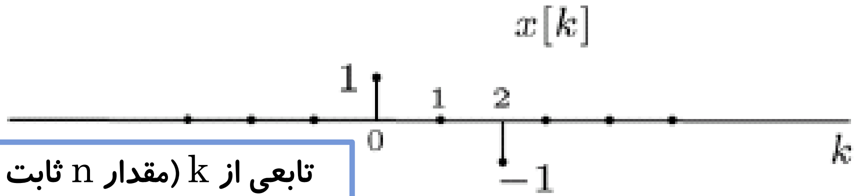
$$y[n] = \sum_{k \to -\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

مثال کانولوشن (۱)

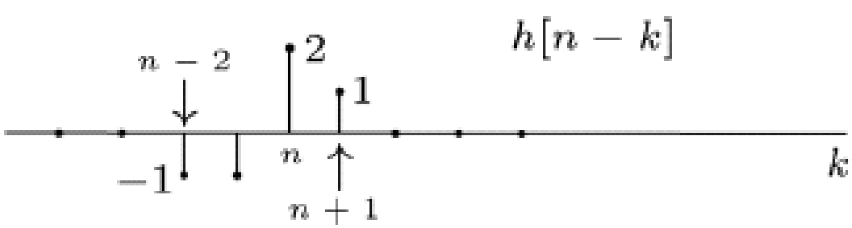


⇓





تابعی از k (مقدار n ثابت است)



$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k]$$

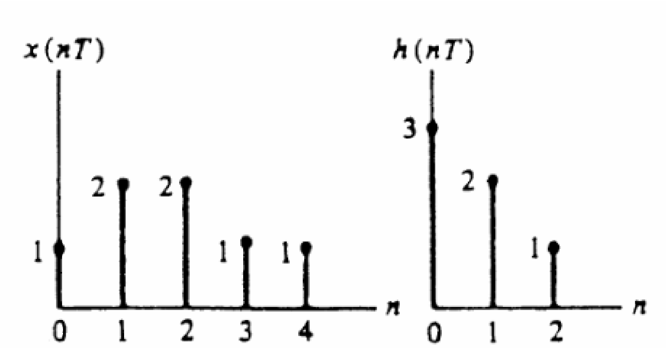
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k]$$

$$
\begin{aligned}
y[n] &= 0 \quad \text{for } n < -1 \\
y[-1] &= 1 \times 1 = 1 \\
y[0] &= 0 \times 1 + 1 \times 2 = 2 \\
y[1] &= (-1) \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times (-1) = -2 \\
y[2] &= (-1) \times 2 + 0 \times (-1) + 1 \times (-1) = -3 \\
y[3] &= (-1) \times (-1) + 0 \times (-1) = 1 \\
y[4] &= (-1) \times (-1) = 1 \\
y[n] &= 0 \quad \text{for } n > 4
\end{aligned}
$$

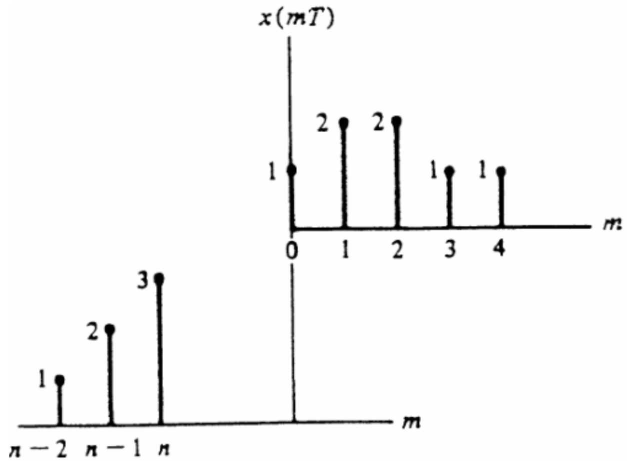
- معکوس کردن h[k]: h[-k]
- شیفت دادن h[-k]: h[-k+n]
- ضرب h[-k+n] در x[k]
- جمع

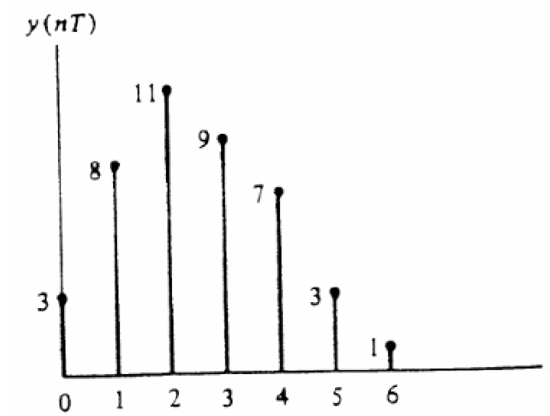
سیستم‌های دیجیتال . . .

- مثال کانولوشن (۲)



			Samples $x(mT)$					
	0	0	1	2	2	1	1	0
$n = 0$	1	2	3	0	0	0	0	0
$n = 1$	0	1	2	3	0	0	0	0
$n = 2$	0	0	1	2	3	0	0	0
$n = 3$	0	0	0	1	2	3	0	0
$n = 4$	0	0	0	0	1	2	3	0
$n = 5$	0	0	0	0	0	1	2	3
$n = 6$	0	0	0	0	0	0	1	2





Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

سیستم‌های دیجیتال . . .

مثال کانولوشن (۳)

$$\begin{array}{rcccccccc} x[n] = & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & \ldots \\ h[n] = & 1, & 2, & 3, & 0, & 0, & 0, & \ldots \end{array}$$

$$y[n] = \begin{cases} 5, 11, 15, 3, 2, 12, 0, 0, \ldots, & n = 0, 1, 2, 3, \ldots \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

- $n = 0$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[0-i] = & \ldots, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[0] = 5 \cdot 1 = 5$$

- $n = 1$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[1-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[1] = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 11$$

- $n = 2$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[2-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[2] = 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 15$$

- $n = 3$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[3-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[3] = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 3$$

- $n = 4$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[4-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[4] = (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 2$$

- $n = 5$

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[5-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[5] = 4 \cdot 3 = 12$$

- $n > 5$ (shown for $n = 6$)

$$\begin{array}{rccccccccccc} x[i] = & & & & & 5, & 1, & -2, & 4, & 0, & 0, & 0, \ldots \\ h[n-i] = & \ldots, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 3, & 2, & 1 \end{array}$$

$$y[n] = 0, \quad n > 5$$

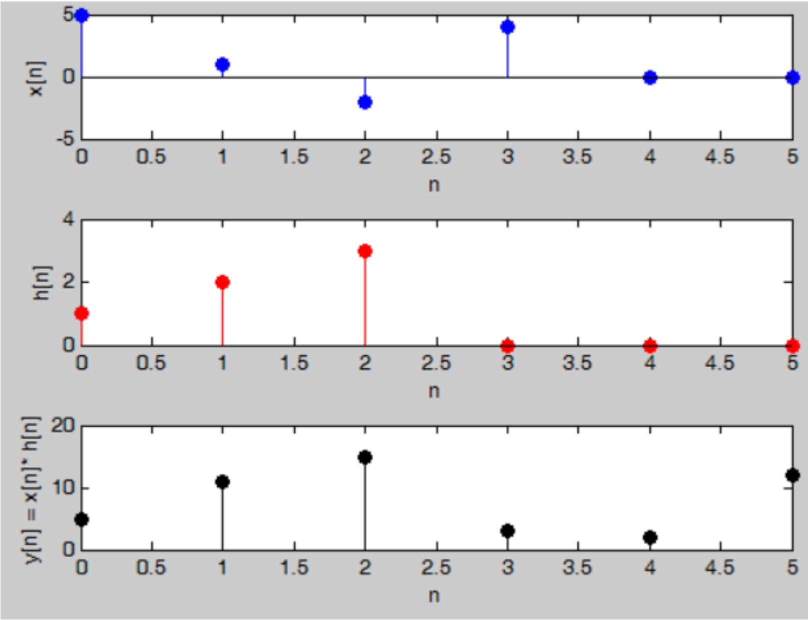
سیستم‌های دیجیتال . . .

Speech_ConvExample.m

- مثال کانولوشن (۳)
  - در MATLAB

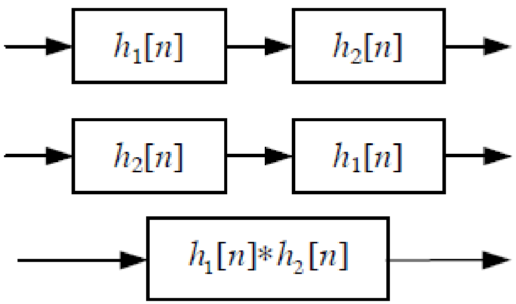
$$x[n] = \; 5, \; 1, \; -2, \; 4, \; 0, \; 0, \; \ldots$$
$$h[n] = \; 1, \; 2, \; 3, \; 0, \; 0, \; 0, \; \ldots$$

```
n = 0:5;
x = [5 1 -2 4 0 0];
h = [1 2  3 0 0 0];
y = conv(x, h);
subplot(3,1,1);
stem(n, x, 'b-', 'fill');
xlabel('n');  ylabel('x[n]');

subplot(3,1,2);
stem(n, h, 'r-', 'fill');
xlabel('n'); ylabel('h[n]');

subplot(3,1,3);
stem(n, y(1:length(n)), 'k-', 'fill');
xlabel('n');  ylabel('y[n] = x[n]* h[n]');
```



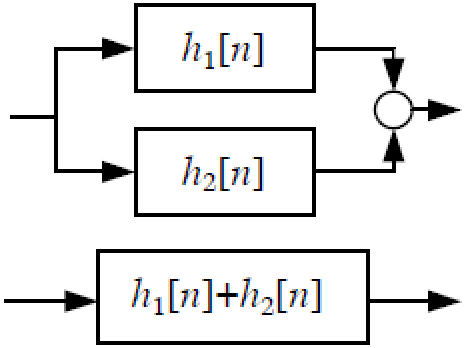
سیستم‌های دیجیتال . . .

- سیستم خطی و نامتغیر با زمان (LTI): ویژگی‌های کانولوشن
  - تعویض‌پذیری (Commutative)



$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

  - توزیعی (Distributive)



$$x[n]*\left(h_1[n]+h_2[n]\right)=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

  - انجمنی (Associative)

$$x[n]*\left(h_1[n]*h_2[n]\right)=\left(x[n]*h_1[n]\right)*h_2[n]=x[n]*h_1[n]*h_2[n]$$

سیستم‌های دیجیتال . . .

- سیستم خطی و متغیر با زمان (LTV: Linear Time-Variant)
  - رابطه ورودی و خروجی

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x[k]g[n,n-k]$$

  - سیستم LTI یک حالت خاص از LTV است

$$g[n,n-k]=h[n-k]$$

  - مثال: مدولاتور دامنه (AM: amplitude modulator)

$$y[n]=x[n]\cos\omega_0 n$$

  - سیگنال گفتار خروجی یک سیستم LTV است!
    - به دلیل مشکل بودن تحلیل سیستم‌های LTV، آنها را به صورت تقریبی با LTI تحلیل می‌کنند

سیستم‌های دیجیتال

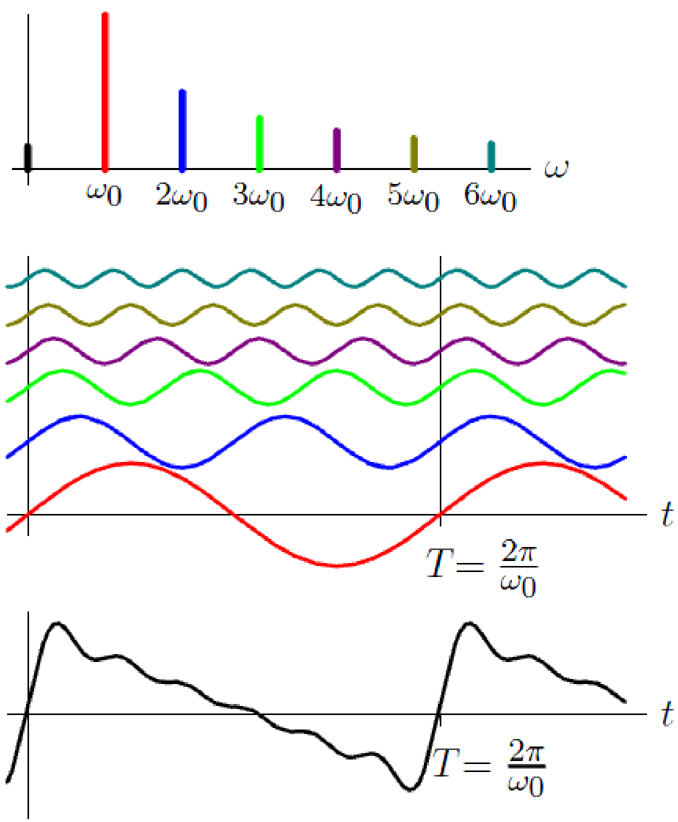
- سیستم‌های غیرخطی: در پردازش گفتار

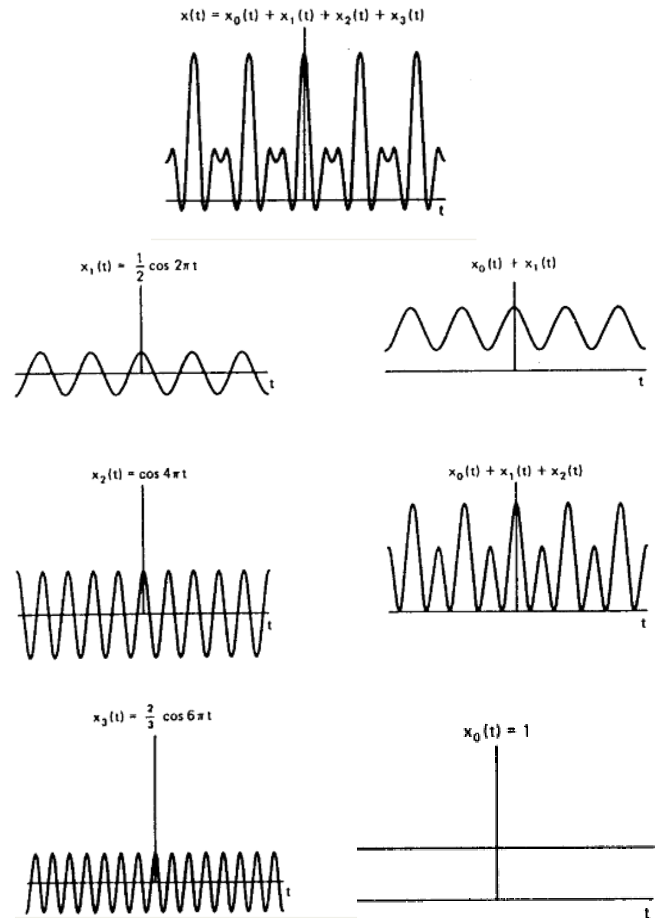
Nonlinear System	Equation
Median Smoother of order $(2N+1)$	$y[n] = \text{median}\{x[n-N], \cdots, x[n], \cdots, x[n+N]\}$
Full-Wave Rectifier	$y[n] = \lvert x[n] \rvert$
Half-Wave Rectifier	$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[n] \geq 0 \\ 0 & x[n] < 0 \end{cases}$
Frequency Modulator	$y[n] = A\cos\left(\omega_0 + \Delta\omega x[n]\right)n$
Hard-Limiter	$y[n] = \begin{cases} A & x[n] \geq A \\ x[n] & \lvert x[n] \rvert < A \\ -A & x[n] \leq -A \end{cases}$
Uniform Quantizer (L-bit) with $2N = 2^L$ intervals of width Δ	$y[n] = \begin{cases} (N-1/2)\Delta & x[n] \geq (N-1)\Delta \\ (m+1/2)\Delta & m\Delta \leq x[n] < (m+1)\Delta \quad 0 \leq m < N-1 \\ (-m+1/2)\Delta & -m\Delta \leq x[n] < -(m-1)\Delta \quad 0 < m < N-1 \\ (-N+1/2)\Delta & x[n] < -(N-1)\Delta \end{cases}$

دارای حافظه

نمایش فوریه: سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- ایده: هر سیگنالی را می‌توان بر حسب توابع نمایی (سینوس و کسینوس) با فرکانس‌ها و اندازه‌های مختلف نوشت





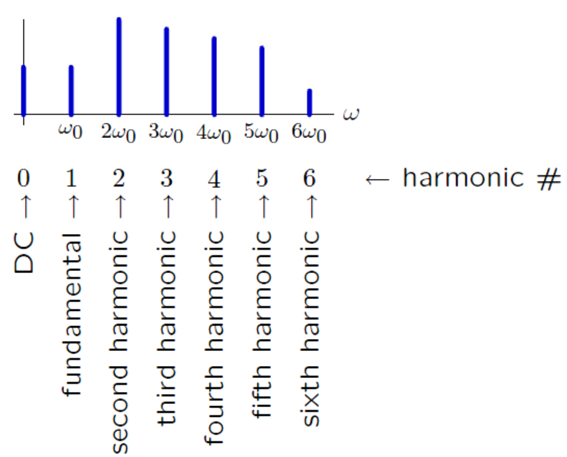
سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- تبدیل فوریه گسسته (DFT: Discrete Fourier Transform)
  - سیگنال گسسته متناوب با دوره تناوب N
  - داریم: $x_N[n] = x_N[n+N]$

ضرایب فوریه سری فوریه

$$X_N[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x_N[n] e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0 \le k < N$$

$$x_N[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_N[k] e^{j2\pi nk/N} \qquad 0 \le n < N$$



- مقدار $X_N[k]$ به ازای k=0 را DC می‌گویند
- مقدار $X_N[k]$ به ازای k=±1 را هارمونی اول (اصلی)
- به ازای k=±2 را هارمونی دوم
- و ...

سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- تبدیل گسسته یک سیگنال (گسسته)
  - خروجی تبدیل یک سیگنال گسسته است

$$X[k] = \mathrm{T}\{x[n]\}$$

  - تبدیل خطی: سیگنال ورودی را به صورت ترکیبی خطی از سیگنال دیگری است

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[k]\varphi_k[n]$$

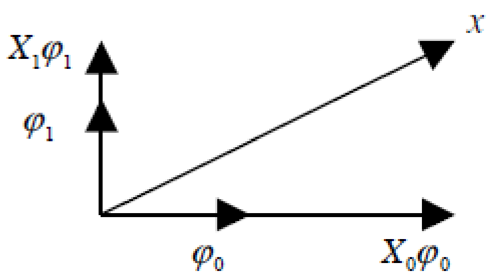
مجموعه‌ای از توابع متعامد

  - توابع متعامد (Orthonormal)

ضرب داخلی

$$<\varphi_k[n], \varphi_l[n]> = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_k[n]\varphi_l^*[n] = \delta[k-l]$$

  - بنابراین X[k]، نگاشت (Projection) بردار x[n] روی توابع متعامد است



$$X[k] =< x[n], \varphi_k[n] >$$

$$X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x_N[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0\le k<N$$

$$x_N[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_N[k]e^{j2\pi nk/N} \qquad 0\le n<N$$

سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- مثال: تابع سینوسی

$$x[n]=\cos(\pi n/8)+\cos(\pi n/4+\pi/4)$$

$$\cos x=\mathrm{Re}(e^{ix})=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x=\mathrm{Im}(e^{ix})=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

- متناوب با $N = 16 \rightarrow \omega_0 = \pi/8$
- از قانون اویلر داریم

$$x[n]=\frac{1}{2}[e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n}]+\frac{1}{2}[e^{j\pi/4}e^{j2\omega_0 n}+e^{-j\pi/4}e^{-j2\omega_0 n}]$$

- ضرایب سری فوریه $a_k=X_N[k]$

$$a_0=0$$
$$a_1=1/2$$
$$a_{-1}=1/2$$
$$a_2=e^{j\pi/4}/2$$
$$a_{-2}=e^{-j\pi/4}/2$$
$$a_3=0$$
$$a_{-3}=0$$
$$\vdots$$

ضرایب سری فوریه

$$a_{15}=a_{-1+16}=a_{-1}=\frac{1}{2}$$

$$a_{66}=a_{2+4\times16}=a_2=e^{j\pi/4}/2$$

- داریم $a_{k+N}=a_k$

$$e^{j(k+N)\omega_0 n}=e^{jk\omega_0 n}e^{\overbrace{jN\omega_0 n}^{2\pi n}}=e^{jk\omega_0 n}$$

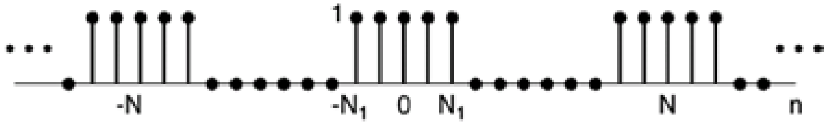
- ویژگی انحصاری در حالت گسسته ⇦ سری فوریه متناوب است

$$X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0\le k<N$$

$$x_N[n]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_N[k]e^{j2\pi nk/N} \qquad 0\le n<N$$

سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- مثال: موج مربعی . . .



- سیگنال ورودی: گسسته و متناوب
- ضرایب مضرب N

$$a_0=\sum_{n=-N_1}^{N_1} x[n]=2N_1+1=a_N=a_{-N}=a_{6N}=\cdots$$

- سایر ضرایب (غیر مضرب N)

$$a_k=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\omega_0 n}=\sum_{m=0}^{2N_1} e^{-jk\omega_0(m-N_1)}$$

Using m=n+N1

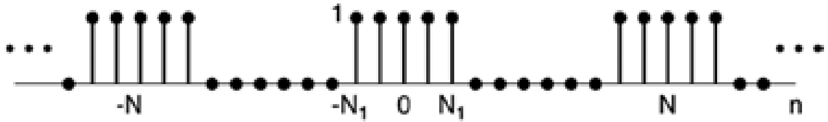
$$=e^{jk\omega_0 N_1}\sum_{m=0}^{2N_1}(e^{-jk\omega_0})^m=e^{jk\omega_0 N_1}\frac{1-e^{-jk\omega_0(2N_1+1)}}{1-e^{jk\omega_0}}$$

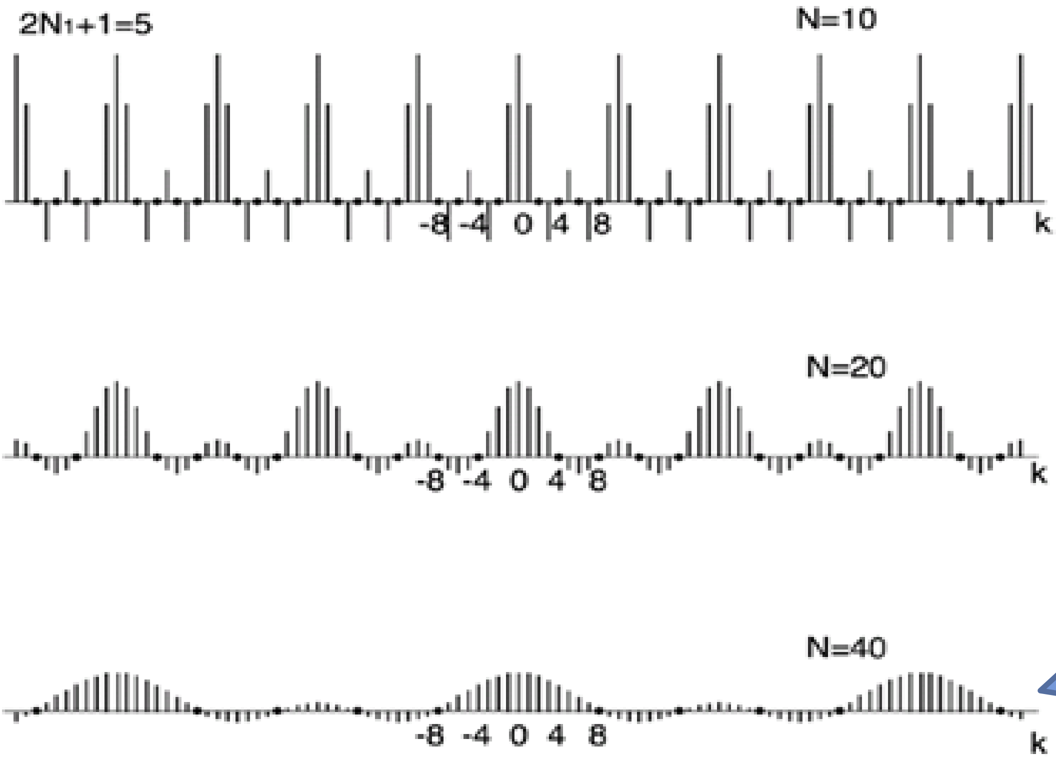
$$\sum_{n=0}^{N-1} r^n=\frac{1-r^N}{1-r}$$

$$=\frac{\sin[k(N_1+1/2)\omega_0]}{\sin(k\omega_0/2)}=\frac{\sin[2\pi k(N_1+1/2)/N]}{\sin(\pi k/N)}$$

سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

- مثال: موج مربعی
  - سیگنال ورودی: گسسته و متناوب
  - سیگنال خروجی: گسسته و متناوب





$$a_k = \frac{\sin[2\pi k (N_1 + 1/2)/N]}{\sin(\pi k / N)}$$

$$e^{j(k+N)\omega_0 n} = e^{jk\omega_0 n} \overbrace{e^{jN\omega_0 n}}^{2\pi n} = e^{jk\omega_0 n}$$

تبدیل گسسته متناوب است

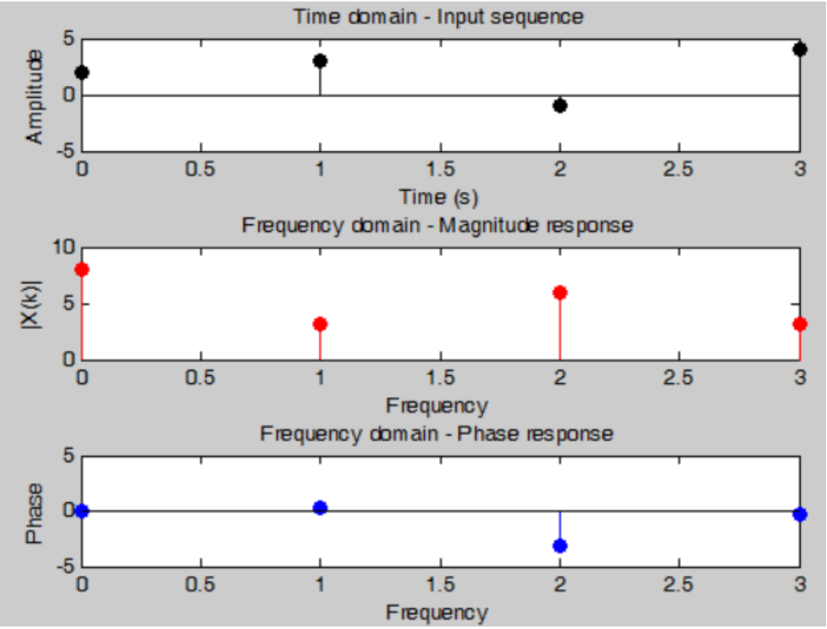
با افزایش دوره تناوب، سیگنال حوزه فوریه
به سمت پیوسته شدن پیش می رود

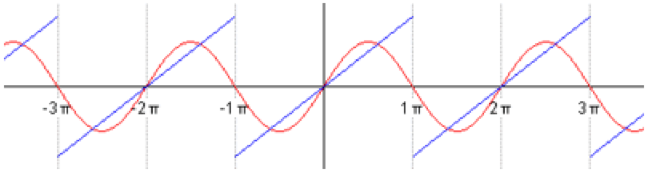
سری فوریه (فرکانس گسسته) . . .

Speech_DFTExample.m

- مثال
  - در MATLAB

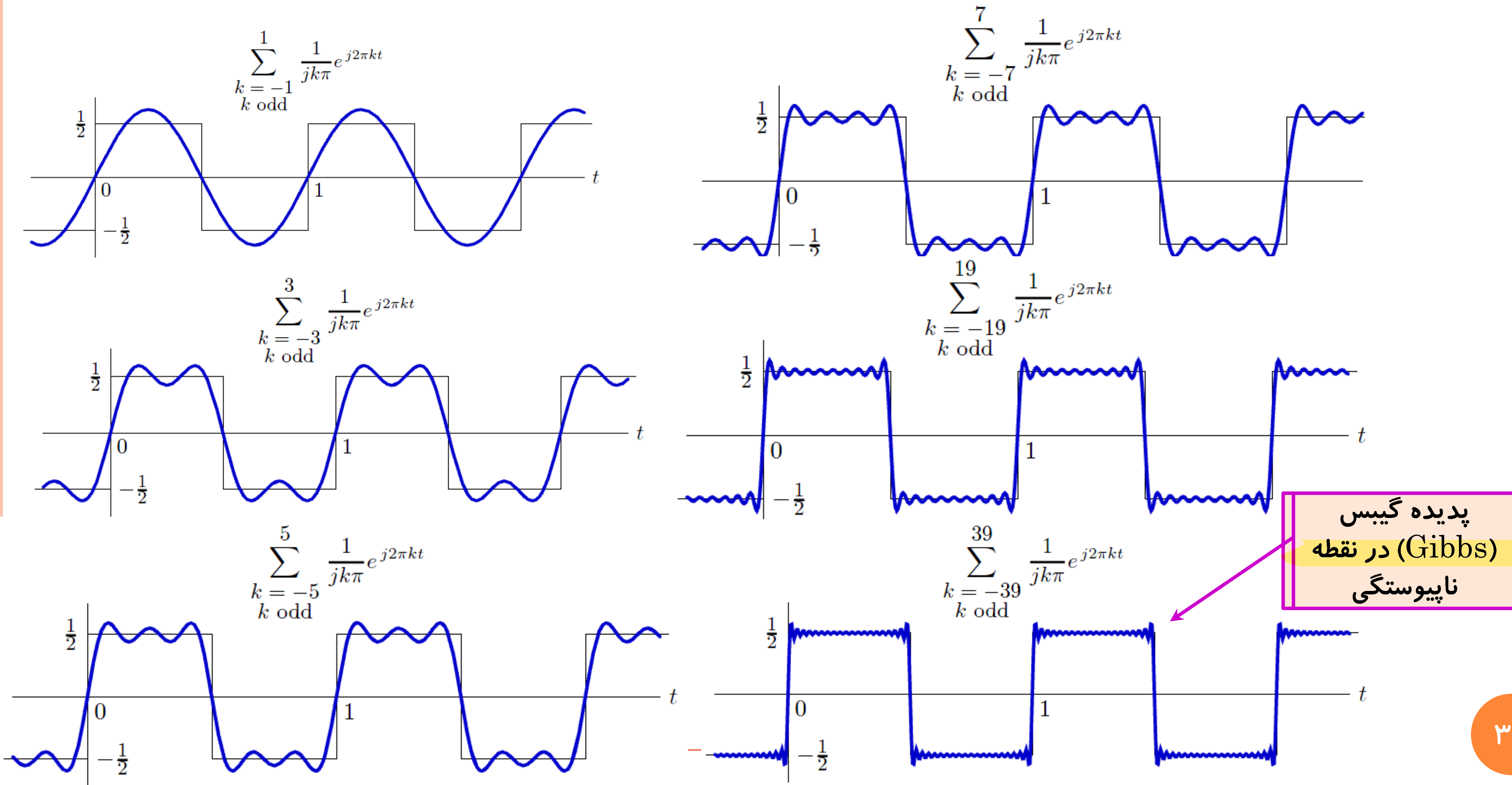
```
x = [2 3 -1 4];
N = length(x);
X = zeros(N,1);
for k = 0:N-1
   for n = 0:N-1
      X(k+1) = X(k+1) + x(n+1)*exp(-j*2*pi*n*k/N);
   end
end
t = 0:N-1;
subplot(311)
stem(t,x,'k-','fill');
xlabel('Time (s)');    ylabel('Amplitude');
title('Time domain - Input sequence')
subplot(312)
stem(t,abs(X),'r-','fill')
xlabel('Frequency');   ylabel('|X(k)|');
title('Frequency domain - Magnitude response')
subplot(313)
stem(t,angle(X),'b-','fill')
xlabel('Frequency');  ylabel('Phase');
title('Frequency domain - Phase response')
```





سری فوریه (فرکانس گسسته)

- تبدیل فوریه گسسته = سری فوریه
  - برای سیگنال مربعی (پیوسته!) – اثر افزایش تعداد ضرایب



تبدیل فوریه سریع (FFT) . . .

- محاسبه ضرایب فوریه
  - روش عادی: N^2 محاسبات (ضرب و جمع)

$$\boxed{X_N[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x_N[n]e^{-j2\pi nk/N} \qquad 0\le k<N}$$

- محاسبه تبدیل فوریه سریع (FFT: Fast Fourier Transform)
  - مبنای ۲ (Radix-2)

$$W_N=e^{-j2\pi/N}$$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \qquad 0\le k<N$$

  - فرض: N زوج است
    - نقاط زوج x: f[n]=x[2n]
    - نقاط فرد x: g[n]=x[2n+1]

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N/2-1} f[n]W_{N/2}^{nk}+W_N^k\sum_{n=0}^{N/2-1} g[n]W_{N/2}^{nk}=F[k]+W_N^kG[k]$$

تبدیل N/2 نقطه‌ای f[n]– نقاط 0 تا N/2

تبدیل N/2 نقطه‌ای g[n]

  - به دلیل تقارن (برای x[n] حقیقی): برای $\frac{N}{2}\le k<N$

$$F[k+N/2]=F[k]$$

$$G[k+N/2]=G[k]$$

  - برای N که توانی از ۲ است: محاسبات = $N.log_2^N$

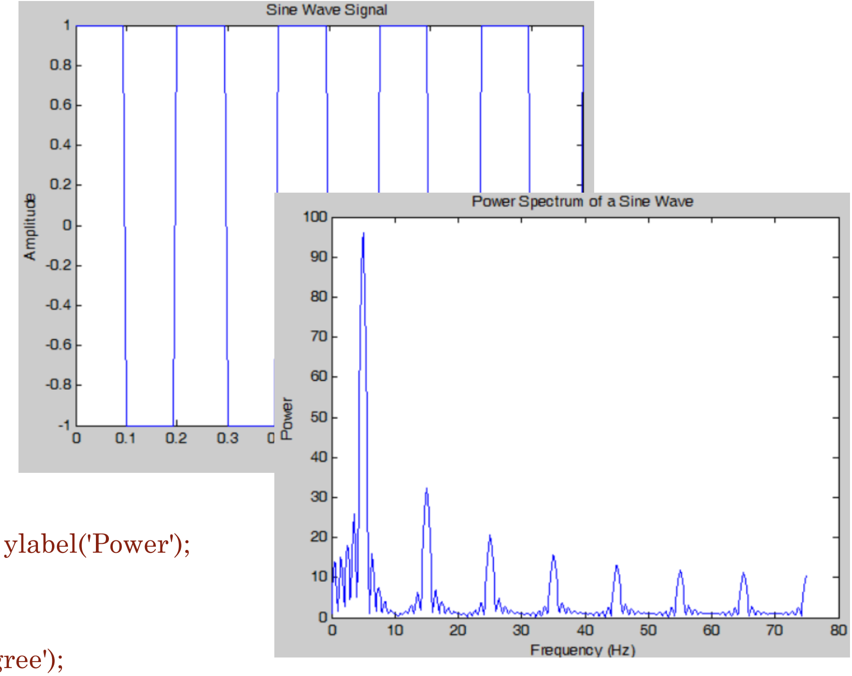
Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

تبدیل فوریه سریع (FFT)

Speech_FFTExample.m

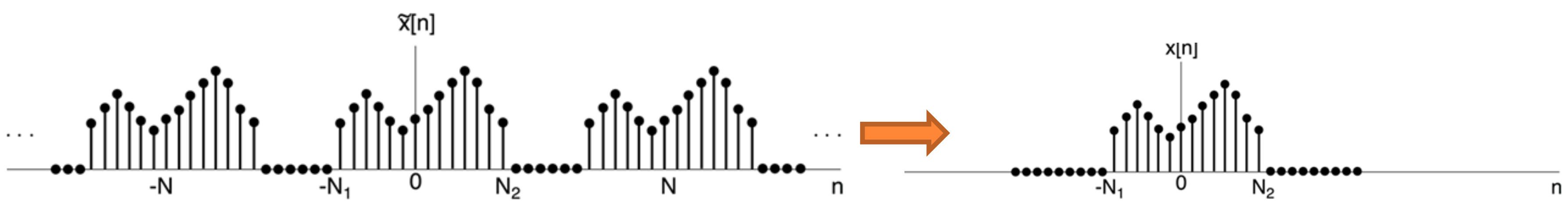
- مثال
  - در MATLAB

```
Fs = 150; % Sampling frequency
t = 0:1/Fs:1; % Time vector of 1 second
f = 5; % Create a sine wave of f Hz
x = sin(2*pi*t*f); % Sine Wave
pha=1/3*pi;%phase shift
x = cos(2*pi*t*f + pha); % Cosine Wave with Phase Shift
x = square(2*pi*t*f);  % Square Wave

nfft = 1024; % Length of FFT
X = fft(x,nfft);
X = X(1:nfft/2); % FFT is symmetric, throw away second half
Mag = abs(X); % Take the magnitude of fft of x
Phase = angle(X); % Phase of fft of x
f = (0:nfft/2-1)*Fs/nfft;
figure(1);    plot(t,x);
title('Wave Signal'); xlabel('Time(s)'); ylabel('Amplitude');

figure(2);    plot(f,Mag);
title('Power Spectrum of the Wave');  xlabel('Frequency (Hz)');    ylabel('Power');

figure(3);    plot(f,rad2deg(Phase));
title('Phase of the Wave');   xlabel('Frequency (Hz)');  ylabel('Degree');
```



نمایش فوریه: تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- وقتی که سیگنال متناوب نباشد
  - تبدیل فوریه گسسته (FT: Fourier Transform)
  - مقدار تناوب ← ∞: سری فوریه ← تبدیل فوریه



- ورودی: سیگنال گسسته غیرمتناوب
- خروجی: سیگنال پیوسته و متناوب

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- تبدیل فوریه گسسته (DTFT: Discrete-Time Fourier Transform)
  - وقتی ورودی یک سیستم LTI، یک سیگنال نمایی (مختلط) مانند $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ باشد

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0 (n-k)} = e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} = e^{j\omega_0 n} H(e^{j\omega_0})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$$

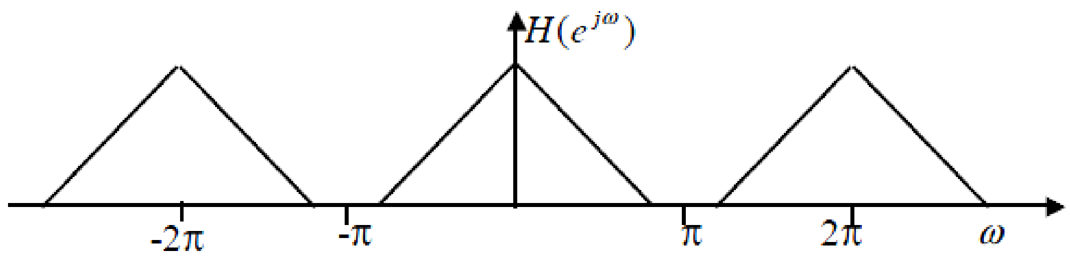
تبدیل فوریه h[n]
پاسخ فرکانسی سیستم

  - خروجی ضریبی از ورودی است
    - خروجی یک نمایی مختلط با همان بسامد و دامنه است که در مقدار $H(e^{j\omega_0})$ (مختلط) ضرب شده

Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- تبدیل فوریه گسسته- ویژگی‌ها
  - تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ پیوسته است
  - تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ دوره‌ای با دوره 2π است (بین π و $-\pi$)



- $H(e^{j\omega})$ = تابع تبدیل (Transfer Function) یا پاسخ فرکانسی (Frequency Response)
- ω = فرکانس زاویه‌ای = $2\pi f$

- تبدیل فوریه $H(e^{j\omega})$ تابعی مختلط است

اندازه (دامنه)

فاز

$$H(e^{j\omega}) = H_r(e^{j\omega}) + jH_i(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

$$\text{Magnitude} = \sqrt{\text{real}^2 + \text{Imag}^2}$$

$$\text{Angle} = \tan^{-1}\left(\frac{\text{imag}}{\text{real}}\right)$$

Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- شرط لازم برای داشتن تبدیل فوریه
  - محدود بودن انرژی

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- تبدیل فوریه گسسته- معکوس

$$\boxed{h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

  - داریم

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]e^{-j\omega m}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}d\omega = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]\delta[n-m] = h[n]$$

  - که

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega(n-m)}d\omega = \delta[n-m]$$

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

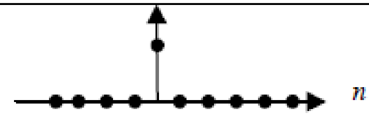
- تبدیل فوریه گسسته (DTFT) و معکوس آن

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} \quad \text{Analysis equation}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad \text{Synthesis equation}$$

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- مثال: تابع ضربه

$\delta[n]=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & otherwise\end{cases}$	

$$x[n]=\delta[n] \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n]e^{-j\omega n}=1$$

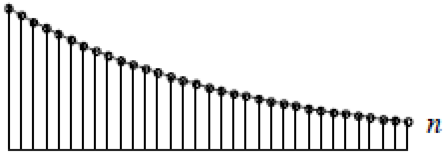
- حالت جابجا شده

$$x[n]=\delta[n-n_0] \quad \Rightarrow \quad X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta[n-n_0]e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_0}$$

- دامنه ۱ و فاز $-\omega n_0$

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته) . . .

- مثال: تابع نمایی (نزولی)



$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \frac{a}{1-r}$ Infinite Sum فرمول

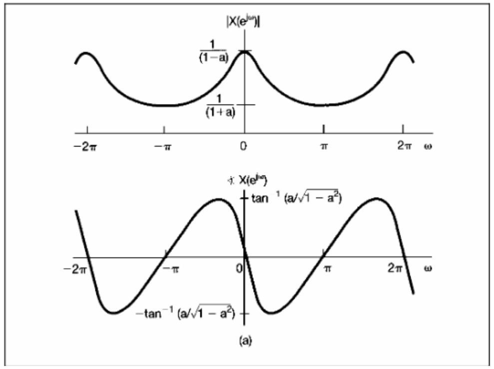
$$x[n] = a^n u[n], |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n}_{|ae^{-j\omega}|<1} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1}{(1-a\cos\omega) + ja\sin\omega}$$

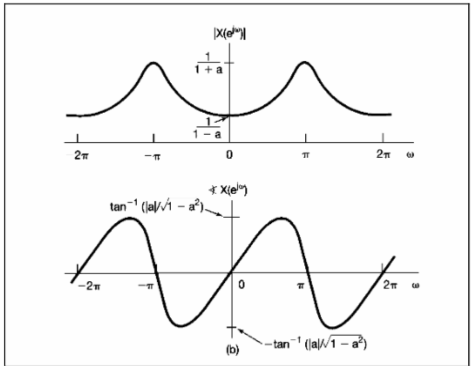
$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega + a^2}}$$

$$\omega = 0: X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1-2a+a^2}} = \frac{1}{1-a}$$

$$\omega = \pi: X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{1+2a+a^2}} = \frac{1}{1+a}$$



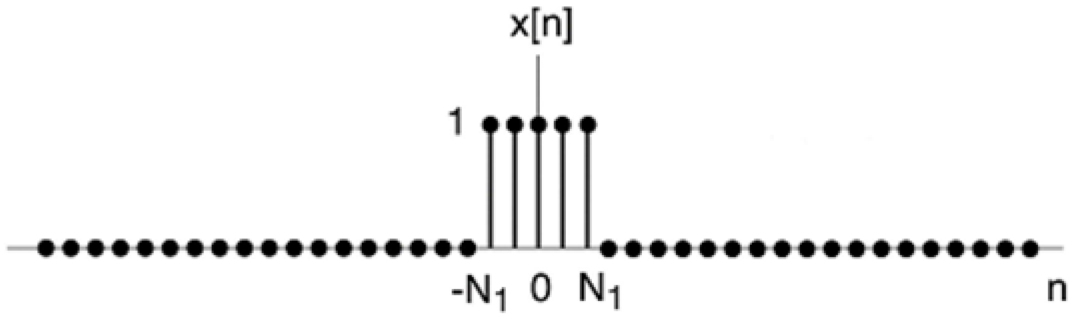
a>0



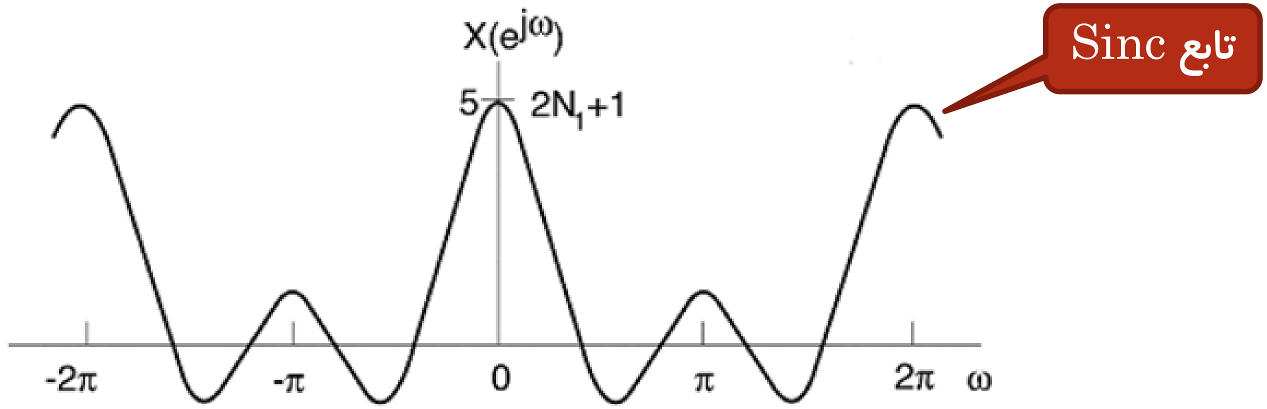
a<0

تبدیل فوریه (فرکانس پیوسته)

- مثال: موج مربعی



$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}=\sum_{n=-N_1}^{N_1}(e^{-j\omega})^n=\frac{\sin\omega(N_1+\frac{1}{2})}{\sin(\omega/2)}=X(e^{j(\omega-2\pi)})$$

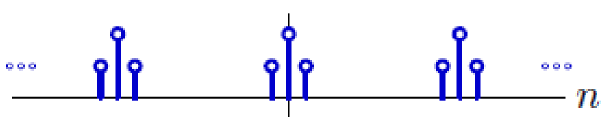


Hadi Veisi (h.veisi@ut.ac.ir)

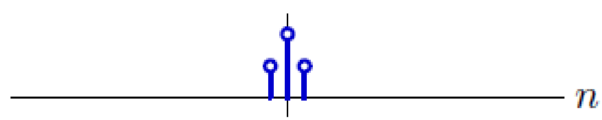
نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- چهار حالت برای زمان
  - discrete vs. continuous (↕)
  - periodic vs. non-periodic (↔)

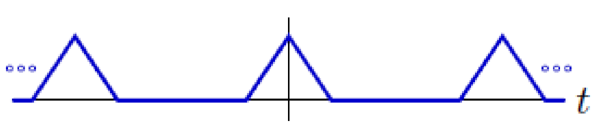
DT Fourier Series



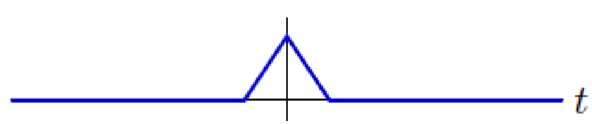
DT Fourier transform



CT Fourier Series



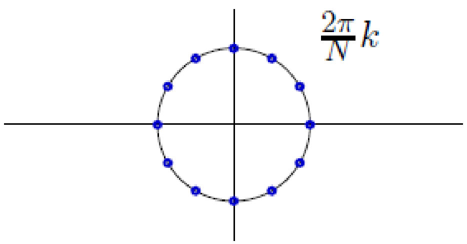
CT Fourier transform



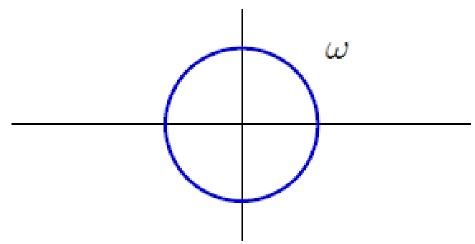
نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- چهار حالت فرکانس
  - discrete vs. continuous (↔)
  - periodic vs. non-periodic (↕)

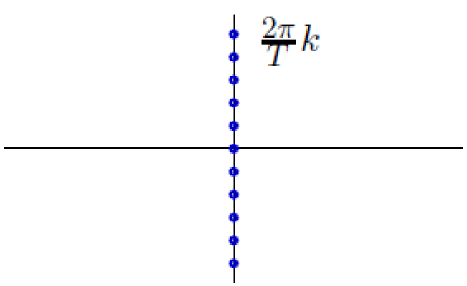
DT Fourier Series



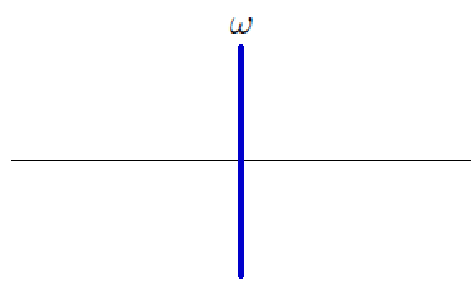
DT Fourier transform



CT Fourier Series



CT Fourier transform



نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- مقایسه نمایش‌های فوریه

نمایش فوریه	نوع	حوزه زمان	حوزه فرکانس
Fourier Series	Continuous Time Fourier Series (CTFS)	periodic, continuous	discrete, non-periodic
	Discrete Time Fourier Series (DTFS)	periodic, discrete	discrete, periodic
Fourier Transform	Continuous Time Fourier Transform (CTFT)	non-periodic, continuous	continuous, non-periodic
	Discrete Time Fourier Transform (DTFT)	non-periodic, discrete	continuous, periodic (2π periodic)

نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- دوره‌ای بودن–نبودن در حوزه زمان

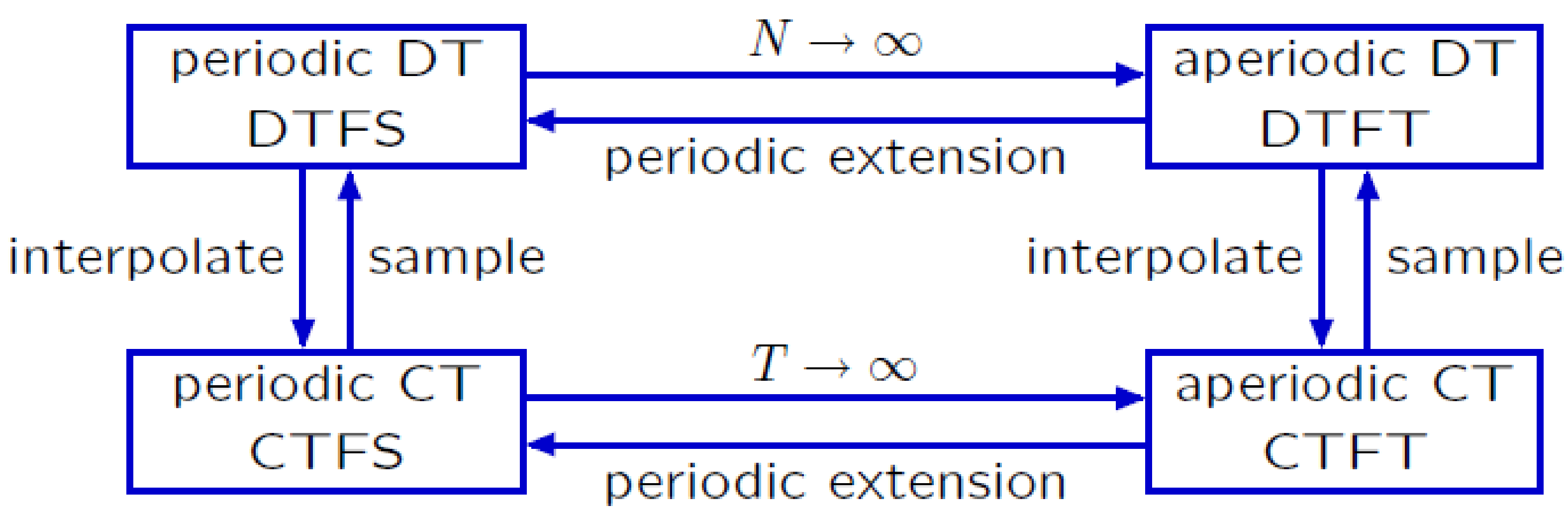
حوزه زمان	حوزه فرکانس
periodic	discrete
non-periodic	continuous

- پیوسته–گسسته بودن در حوزه زمان

حوزه زمان	حوزه فرکانس
discrete	periodic
continuous	non-periodic

نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- نمایش‌های مختلف فوریه
  - DTFS (discrete-time Fourier series): periodic DT
  - DTFT (discrete-time Fourier transform): non-periodic DT
  - CTFS (continuous-time Fourier series): periodic CT
  - CTFT (continuous-time Fourier transform): non-periodic CT



نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی . . .

- روابط

DT Fourier Series

$$a_k = a_{k+N} = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$x[n] = x[n+N] = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DT Fourier transform

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\Omega$$

CT Fourier Series

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j\frac{2\pi}{T}kt}dt$$

$$x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j\frac{2\pi}{T}kt}$$

CT Fourier transform

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

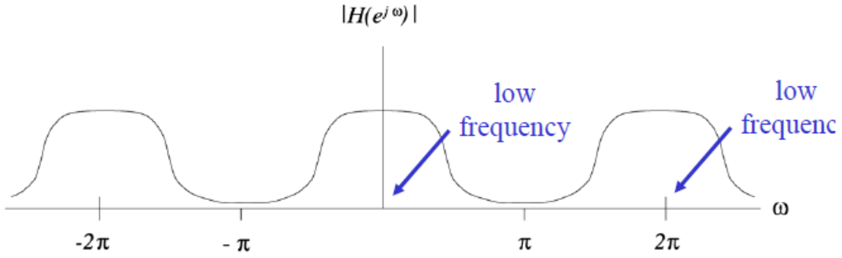
نمایش فوریه: خلاصه و جمع‌بندی

- تبدیل فوریه
  تعدادی از توابع

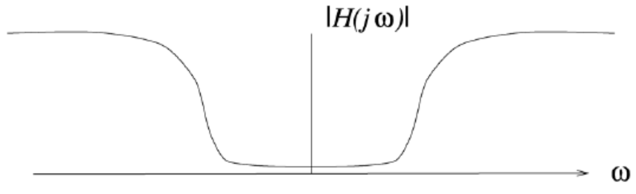
Signal	Fourier transform	Fourier series coefficients (if periodic)
$\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$, $a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$, $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \{\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)\}$	(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$, $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ irrational $\Rightarrow$ The signal is aperiodic
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi l)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Periodic square wave $x[n] = \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & N_1 < \lvert n\rvert \le N/2 \end{cases}$ and $x[n+N] = x[n]$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin[(2\pi k/N)(N_1 + \frac{1}{2})]}{N \sin[2\pi k/2N]}, \quad k \ne 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, \quad k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}$ for all k
$a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] \begin{cases} 1, & \lvert n\rvert \le N_1 \\ 0, & \lvert n\rvert > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin[\omega(N_1 + \frac{1}{2})]}{\sin(\omega/2)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \le \lvert\omega\rvert \le W \\ 0, & W < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$ $X(\omega)$ periodic with period 2π	—
$\delta[n]$	1	—
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi\delta(\omega - 2\pi k)$	—
$\delta[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$	—
$(n+1)a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^2}$	—
$\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} a^n u[n], \quad \lvert a\rvert < 1$	$\frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})^r}$	—

فیلتر کردن . . .

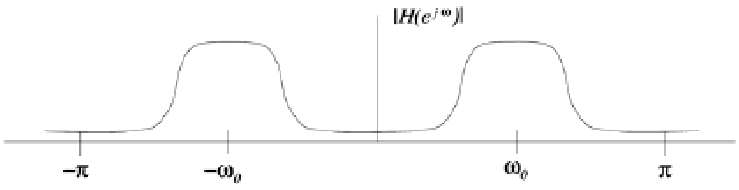
- فیلتر: حذف بازه‌های فرکانسی خاص
  - فیلتر پایین گذر (Lowpass Filter)
    - حذف فرکانس‌های بالا
    - داریم $H(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+2\pi)})$
    - بیشترین فرکانس در π



  - فیلتر بالاگذر (Highpass Filter)
    - حذف فرکانس های پایین



  - فیلتر میان گذر (Bandpass Filter)
    - حذف فرکانس های بالا و پایین

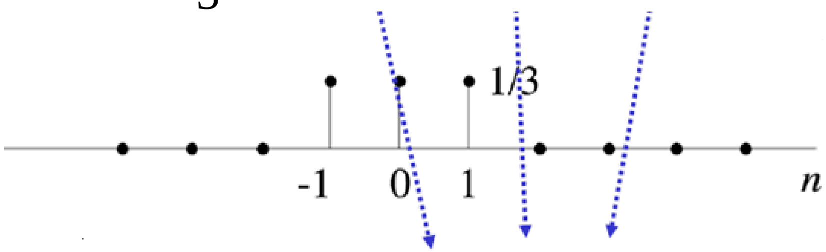


فیلتر کردن . . .

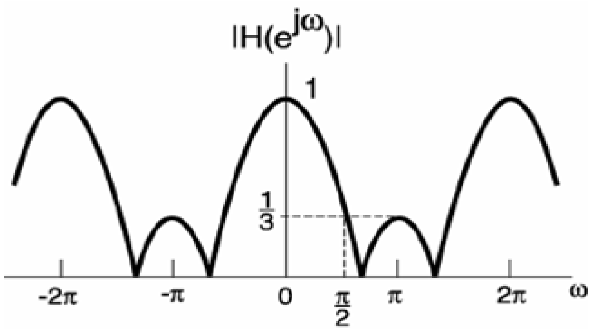
- مثال: میانگین گیری/هموارسازی (Averager/Smoother)
  - حذف نویز و مات کردن تصویر

$$y[n]=\frac{1}{3}\{x[n-1]+x[n]+x[n+1]\}$$

$$h[n]=\frac{1}{3}\{\delta[n-1]+\delta[n]+\delta[n+1]\}$$



$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h[n]e^{-j\omega n}=\frac{1}{3}[e^{-j\omega}+1+e^{j\omega}]=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cos\omega$$



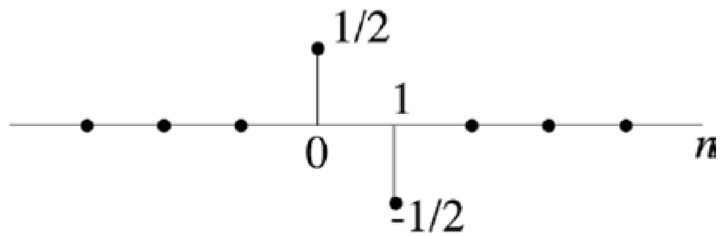
LPF

فیلتر کردن . . .

- مثال: مشتق (differentiator)
  - تشخیص لبه در تصویر

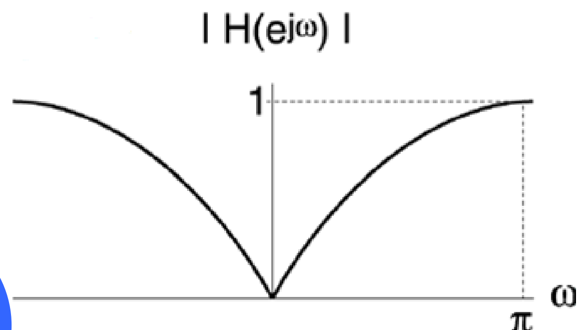
$$y[n]=\frac{1}{2}\{x[n]-x[n-1]\}$$

$$h[n]=\frac{1}{2}\{\delta[n]-\delta[n-1]\}$$



$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{2}(1-e^{-j\omega})=je^{-j\omega/2}\sin(\omega/2)$$

$$|H(e^{j\omega})|=|\sin(\omega/2)|$$

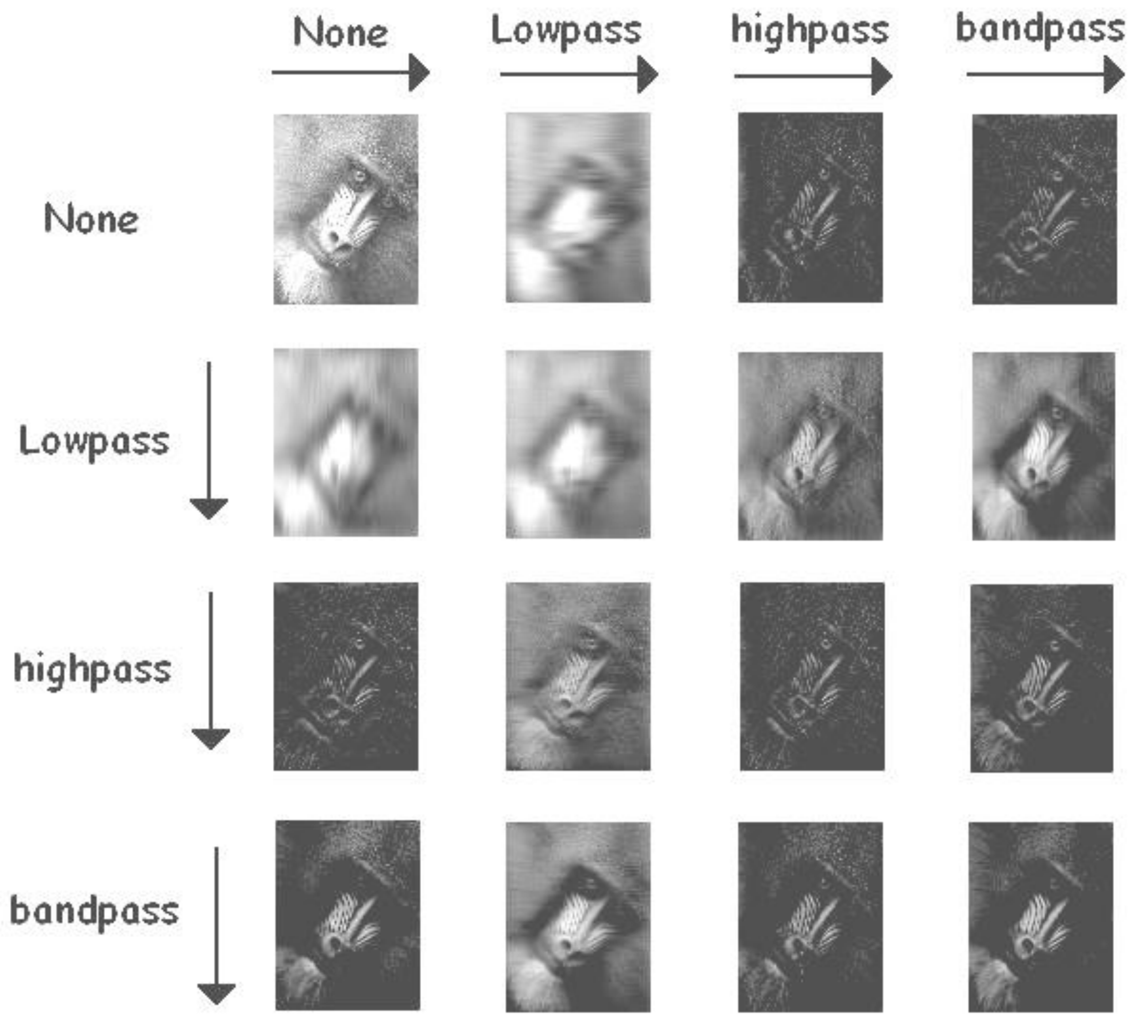


HPF

Passes high-frequency components

فیلتر کردن

- مثال



تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .

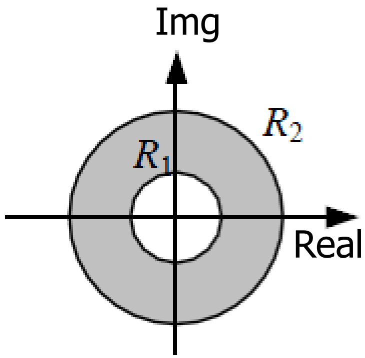
تبدیل Z

- حالت توسعه یافته تبدیل فوریه گسسته
- تبدیل z = تبدیل فوریه اگر $z = e^{j\omega}$
- شرط وجود تبدیل z $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]||z|^{-n} < \infty$

z= متغیر مختلط

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$$

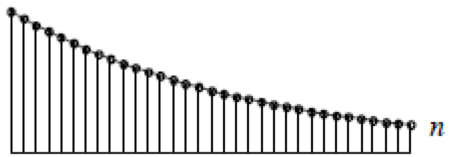
- فقط برای مقادیری مشخص از z این شرط برقرار است
  - ناحیه ROC: region of convergence



$$R_1 < |z| < R_2$$

- سیگنال h[n] دارای تبدیل فوریه است اگر تبدیل z آن شامل دایره واحد باشد، |z|=1
  - ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد

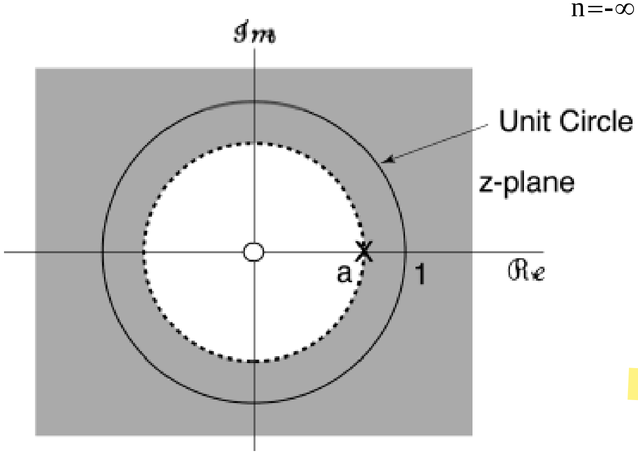
تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .



- مثال: تابع نمایی (سمت راست)

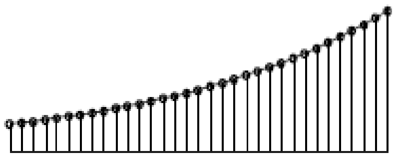
$$h_3[n] = a^n u[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1-az^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

شرط: $|az^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$



- ناحیه همگرایی: $|a| < |z|$
- قطب (Pole): مقادیری که مخرج را برابر صفر می‌کنند
  - در اینجا z=a
- صفر (Zero): مقادیری که صورت را برابر صفر می‌کنند
  - در اینجا z=0
- شرط پایداری: ناحیه همگرایی شامل دایره واحد باشد، پس باید $|a| < 1$
  - قطب داخل دایره واحد باشد
- قطب خارج از دایره واحد: سیستم ناپایدار یا غیرعلی (یا هر دو)

تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .



- مثال: تابع نمایی (سمت چپ)

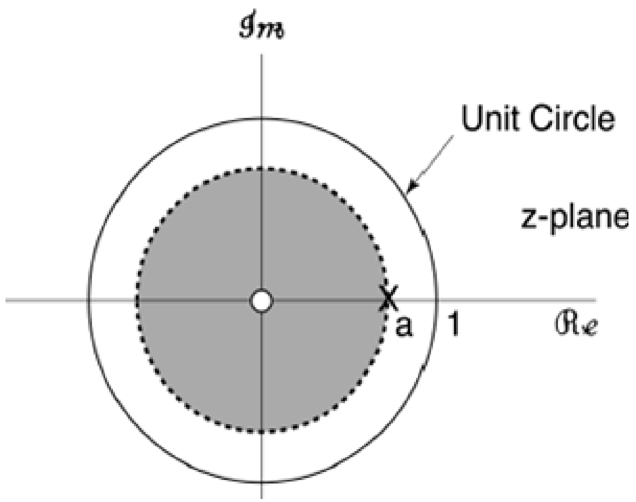
$h_4[n] = -a^n u[-n-1]$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ -a^n u[-n-1] z^{-n} \right\}$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(a^{-1} z \right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1}z} = \frac{a^{-1}z}{a^{-1}z - 1} = \frac{z}{z-a}$$

شرط: $\left| a^{-1}z \right| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$



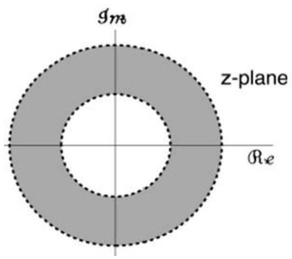
- تبدیل Z حاصل با تبدیل Z تابع مثال قبلی یکسان است
  - تفاوت در ROC

تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .

- مثال: چند تابع رایج

Signal	Z-Transform	Region of Convergence
$h_1[n] = \delta[n-N]$	$H_1(z) = z^{-N}$	$z \neq 0$
$h_2[n] = u[n] - u[n-N]$	$H_2(z) = \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$z \neq 0$
$h_3[n] = a^n u[n]$	$H_3(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|a\| < \|z\|$
$h_4[n] = -a^n u[-n-1]$	$H_4(z) = \dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$

- برای توابعی که ترکیبی خطی از توابع نمایی به ازای n<0 و n>0 است
  - تبدیل Z حاصل به صورت کسری چند جمله ای، X(z) = N(z)/D(z) است
  - ناحیه ROC به صورت حلقه است



تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .

- استفاده برای تعیین مشخصات سیستم
  - سیستم LTI علّی (causal) = اگر پاسخ فرکانسی آن علّی باشد: $h[n]=0$ برای $n<0$
    - سیستم‌های واقعی عموماً علی هستند
    - ROC شامل ناحیه بیرون از دایره واحد و شامل نقطه بینهاست باشد
    - در توابع چندجمله ای: درجه صورت از درجه مخرج بیشتر نباشد
  - سیستم پایدار (stable): ورودی محدود، خروجی محدود را نتیجه می‌دهد
    - تابع $h[n]$ دارای تبدیل فوریه است و ناحیه همگرایی شامل دایره واحد است

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

- معکوس تبدیل z

$$h[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint H(z) z^{n-1} dz$$

انتگرال روی یک مسیر بسته در ناحیه همگرایی

تبدیل Z (فرکانس پیوسته) . . .

- تبدیل معکوس توابع گویا
  - تبدیل به یکی از فرم‌های شناخته شده

$$H_5(z)=\frac{2+8z^{-1}}{2-5z^{-1}-3z^{-2}}=\frac{A}{1-3z^{-1}}+\frac{B}{1+(1/2)z^{-1}}=\frac{(2A+2B)+(A-6B)z^{-1}}{2-5z^{-1}-3z^{-2}}$$

دو قطب در ۳ و ۰.۵−

$$2A+2B=2$$
$$A-6B=8$$

$$H_5(z)=2\left(\frac{1}{1-3z^{-1}}\right)-\left(\frac{1}{1+(1/2)z^{-1}}\right)$$

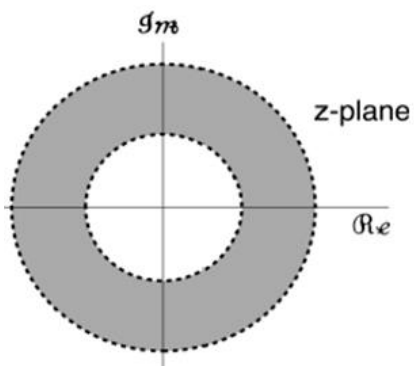
$$H_4(z)=\frac{1}{1-3z^{-1}}$$

$$H_3(z)=\frac{1}{1+(1/2)z^{-1}}$$

$|z|<3$

ناحیه همگرایی
باید شامل دایره واحد باشد
(شرط پایداری)

$1/2<|z|$



$$h_4[n]=-3^n u[-n-1] \rightarrow \boxed{h_5[n]=-2\cdot 3^n u[-n-1]-(-1/2)^n u[n]} \leftarrow h_3[n]=(-1/2)^n u[n]$$

ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه . . .

- کانولوشن

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

- تبدیل کانولوشن به ضرب توسط تبدیل فوریه گسسته و تبدیل Z

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]\right)z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k]z^{-n}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-(n+k)}\right)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]z^{-k}H(z) = X(z)H(z)$$

ناحیه همگرایی = اشتراک ناحیه همگرایی X(z) و H(z)

- رابطه دوگان $x[n]y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(e^{j\omega}) * Y(e^{j\omega})$

ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه . . .

قضیه پارسوال و توان طیف

مزدوج مختلط (complex conjugate)

z=x+jy ($Ae^{j\theta}$) → z=x-jy ($Ae^{-j\theta}$)

- خودهمبستگی (autocorrelation)

$$R_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]x^*[m]=\sum_{l=-\infty}^{\infty}x[l]x^*[-(n-l)]=x[n]*x^*[-n]$$

- توان طیف

$$S_{xx}(\omega)=X(\omega)X^*(\omega)=\left|X(\omega)\right|^2$$

- تبدیل فوریه خودهمبستگی = توان طیف

$$R_{xx}[n]\leftrightarrow S_{xx}(\omega) \Leftarrow R_{xx}[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_{xx}(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

- قرار دادن n=0 در روابط فوق نتیجه می دهد (قضیه پارسوال: Parseval)
  - برابری انرژی سیگنال برای محاسبه در حوزه زمان و فرکانس

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x[n]\right|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|X(\omega)\right|^2d\omega}$$

ویژگی‌های تبدیل Z و فوریه

- خلاصه

Property	Signal	Fourier Transform	z-Transform
Linearity	$ax_1[n]+bx_2[n]$	$aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$	$aX_1(z)+bX_2(z)$
Symmetry	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$	$X(z^{-1})$
	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$	$X^*(z^*)$
	$x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$	$X^*(1/z^*)$
	$x[n]$ real	$X(e^{j\omega})$ is *Hermitian* $X(e^{-j\omega})=X^*(e^{j\omega})$ $\left\|X(e^{j\omega})\right\|$ is even[6] $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$ is even $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ is odd[7] $\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$ is odd	$X(z^*)=X^*(z)$
	$\mathrm{Even}\{x[n]\}$	$\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$	
	$\mathrm{Odd}\{x[n]\}$	$j\,\mathrm{Im}\{X(e^{j\omega})\}$	
Time-shifting	$x[n-n_0]$	$X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$	$X(z)z^{-n_0}$
Modulation	$x[n]e^{j\omega_0 n}$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$	$X(e^{-j\omega_0}z)$
	$x[n]z_0^n$		$X(z/z_0)$
Convolution	$x[n]*h[n]$	$X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$	$X(z)H(z)$
	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})$	
Parseval's Theorem	$R_{xx}[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m+n]x^*[m]$	$S_{xx}(\omega)=\left\|X(\omega)\right\|^2$	$X(z)X^*(1/z^*)$

function $f(x)$ is called even if and only if $f(x)=f(-x)$.
function $f(x)$ is called odd if and only if $f(x)=-f(-x)$.

تبدیل کسینوسی گسسته (DCT)

- تبدیل DCT-II
  - معادل تبدیل DFT برای داده های حقیقی و متقارن

$$C[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\pi k(n+1/2)/N\right) \quad \text{for } 0\le k<N$$

$$x[n]=\frac{1}{N}\left\{C[0]+2\sum_{k=1}^{N-1} C[k]\cos\left(\pi k(n+1/2)/N\right)\right\} \quad \text{for } 0\le n<N$$

$$X[k]=2e^{j\pi k/2N}C[k] \quad \text{for } 0\le k<N$$

$$X[2N-k]=2e^{-j\pi k/2N}C[k] \quad \text{for } 0\le k<N$$

دموی برخط

- امتحان کنید

- http://pages.jh.edu/~signals/
- http://ptolemy.eecs.berkeley.edu/eecs20/berkeley/body.html
- www.fourier-series.com