

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	سیگنال‌ها
۱۸	سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان و خواص آن‌ها
۳۷	سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان پیوسته در زمان - انتگرال کانولوشن
۴۹	سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان گسسته در زمان - جمع کانولوشن
۵۵	خواص سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان
۶۲	سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاضلی خطی با ضرایب ثابت
۷۷	تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان - مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه
۸۰	تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب (سری فوریه پیوسته در زمان)
۹۷	تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه پیوسته در زمان)
۱۲۳	فیلتر کردن، نمونه‌برداری و مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان
۱۳۷	تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان - مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه
۱۴۰	تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان متناوب (سری فوریه گسسته در زمان)
۱۵۷	تحلیل فوریه سیگنال‌های گسسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه گسسته در زمان)
۱۷۹	فیلتر کردن سیگنال‌های گسسته در زمان
۱۸۴	دوگانی در تحلیل فوریه پیوسته و گسسته در زمان
۱۸۷	پردازش گسسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان
۱۹۳	تبدیل لاپلاس
۲۱۹	تبدیل z

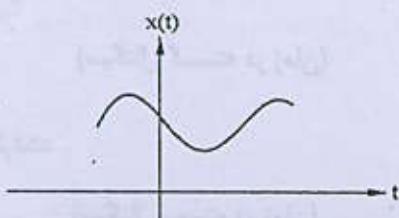
## ۱- سیگنال‌ها

### ۱-۱- سیگنال‌ها و خواص آن‌ها

تعریف سیگنال: تابعی از یک یا چند متغیر مستقل است و حاوی اطلاعات می‌باشد.

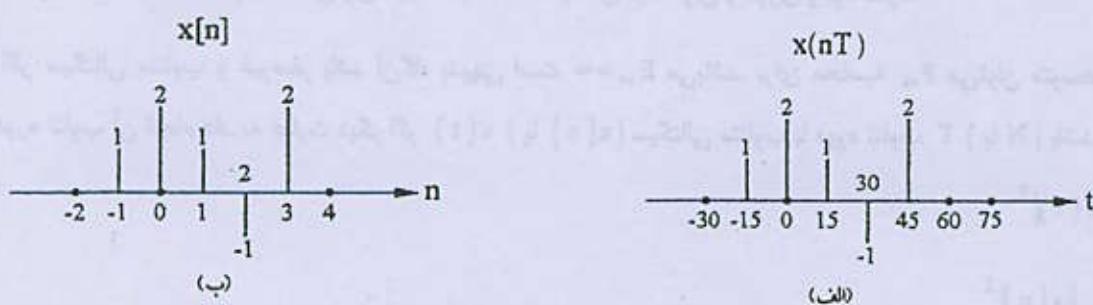
تقسیم‌بندی سیگنال‌ها: برای سیگنال‌ها با توجه به خواص مورد نظر می‌توان تقسیم‌بندی‌های مختلفی به شرح زیر انجام داد.

الف - سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) پیوسته در زمان (۲) گسترش در زمان تقسیم‌بندی کرد. در سیگنال‌های پیوسته در زمان، متغیر مستقل پیوسته است و این سیگنال‌ها برای تمام مقادیر پیوسته‌ای که متغیر مستقل می‌تواند به خود بگیرد، تعریف می‌شوند. برای مشخص کردن این دسته از سیگنال‌ها متغیر مستقل را درون پرانتز قرار می‌دهیم. به عنوان مثال سیگنال  $x(t)$  در شکل (۱-۱) نشان داده است:



شکل ۱-۱- نمونه‌ای از یک سیگنال پیوسته در زمان

سیگنال‌های گسترش در زمان تنها در زمان‌های گسترش تعریف شده‌اند و در نتیجه برای این سیگنال‌ها متغیر مستقل تنها مقادیر گسترش‌هایی به خود می‌گیرد. بدیهی است که این سیگنال‌ها با نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته در زمان بدست می‌آیند. به عنوان مثال در شکل (۱-۲-الف) سیگنال نمونه‌برداری شده  $x(nT)$  یک سیگنال گسترش در زمان است. همان‌طور که از شکل ملاحظه می‌شود سیگنال فوق دارای نمونه‌هایی با فاصله  $T=15$  از یکدیگر است. به منظور آن که فاصله نمونه‌برداری در محاسبات سیگنال‌های گسترش در زمان تائیر نداشته باشد، معمولاً متغیر مستقل آن‌ها را شماره نمونه‌ها انتخاب می‌کنند و شماره نمونه‌ها را درون کروشه قرار می‌دهند تا ماهیت گسترش بودن سیگنال نیز مشخص گردد. در شکل (۱-۲-ب) سیگنال گسترش  $[n]x[n]$  استخراج شده از روی شکل (۱-۲-الف) نشان داده شده است. بدیهی است  $n$  فقط می‌تواند مقادیر صحیح داشته باشد.



شکل ۱-۲- (الف) سیگنال نمونه‌برداری شده از یک سیگنال گسترش در زمان (ب) سیگنال گسترش از یک سیگنال پیوسته در زمان بر مسرب شماره نمونه

## تمثیله و تملیل سیستم‌ها

ب - سیگنال‌ها را می‌توان به سه دسته (۱) سیگنال انرژی (۲) سیگنال غیرتوان و انرژی تقسیم‌بندی کرد. برای درک بهتر این سه نوع سیگنال ابتدا به تعریف انرژی کل ( $E_{\infty}$ ) و توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود ( $P_{\infty}$ ) برای سیگنال‌های پیوسته و گسسته در زمان می‌پردازیم.

انرژی کل ( $E_{\infty}$ ) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (\text{سیگنال پیوسته در زمان})$$

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 \quad (\text{سیگنال گسسته در زمان})$$

توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود ( $P_{\infty}$ ) یک سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt \quad (\text{سیگنال پیوسته در زمان})$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \quad (\text{سیگنال گسسته در زمان})$$

با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت:

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} \quad (\text{سیگنال پیوسته در زمان})$$

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2N+1} \quad (\text{سیگنال گسسته در زمان})$$

با توجه به تعاریف فوق سه نوع سیگنال را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

سیگنال توان سیگنالی است که توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن در رابطه  $P_{\infty} > 0$  صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی  $E_{\infty} = \infty$  می‌شود.

سیگنال انرژی سیگنالی است که انرژی کل آن در رابطه  $E_{\infty} < 0$  صدق کند. بدیهی است برای چنین سیگنالی  $P_{\infty} = 0$  می‌شود.

سیگنال غیر توان و انرژی سیگنالی است که در آن  $E_{\infty} = P_{\infty} = 0$  می‌باشد.

در شکل (۳-۱) سه نمونه از این سه نوع سیگنال نشان داده شده‌اند.

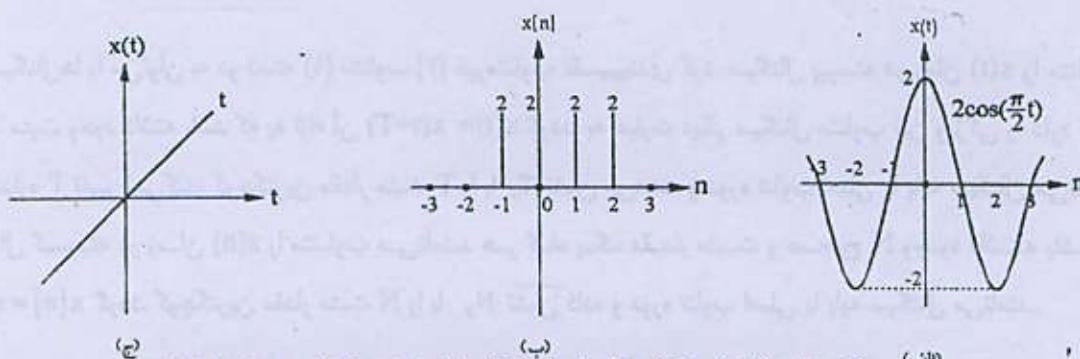
ذکر: با توجه به تعاریف  $P_{\infty}$  و  $E_{\infty}$  می‌توان نتیجه گرفت که سیگنال تواناً توان و انرژی وجود ندارد.

ذکر: اگر سیگنالی متناوب و غیرصفر باشد آن‌گاه بدیهی است  $E_{\infty} = \infty$  می‌باشد. برای محاسبه  $P_{\infty}$  می‌توان متوسط‌گیری را روی یک دوره تناوب آن انجام داد. به عبارت دیگر اگر  $(t) x(n)$  سیگنالی متناوب با دوره تناوب  $T$  (یا  $N$ ) باشد، آن‌گاه:

$$P_{\infty} = P = \frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2$$

$$P_{\infty} = P = \frac{1}{N} \sum_{n<N} |x(n)|^2$$

در نتیجه سیگنال متناوب نمی‌تواند یک سیگنال انرژی باشد و سیگنال فوق سیگنال توان یا سیگنال غیرتوان و انرژی است.



شکل ۱-۳- (الف) سیگنال توان (ب) سیگنال انرژی (ج) سیگنال غیر توان و انرژی

تست نمونه - (آزاد ۷۹) قدرت سیگنال زیر چقدر است؟

$$h(t) = \begin{cases} 2 & t < -10 \\ 4 & -10 < t \leq 10 \\ 6 & 10 \leq t \end{cases}$$

18.66 (۴)

3 (۳)

4 (۲)

20 (۱)

حل:

$$\begin{aligned} P_a &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left( \int_{-10}^{-10} 4dt + \int_{-10}^{10} 16dt + \int_{10}^T 36dt \right) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{4(-10+T) + 16(10+10) + 36(T-10)}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{40T + K}{2T} = 20 \end{aligned}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

 تست نمونه - در مورد سیگنال‌های  $x_1(t) = \cos(2t)$ ,  $x_2(t) = e^{-t}u(t)$  کدام گزینه صحیح است؟

 (۱) سیگنال  $x_1(t)$  سیگنال توان است و انرژی  $x_2(t)$  محدود می‌باشد.

 (۲) سیگنال  $x_1(t)$  سیگنال انرژی است و انرژی  $x_2(t)$  بی‌نهایت می‌باشد.

 (۳) سیگنال  $x_1(t)$  سیگنال توان است و انرژی  $x_2(t)$  بی‌نهایت می‌باشد.

 (۴) سیگنال  $x_1(t)$  سیگنال انرژی است و انرژی  $x_2(t)$  محدود می‌باشد.

حل:

$$E_{x_1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_1(t)|^2 dt = \int_0^{+\infty} e^{-2t} dt = \frac{e^{-2t}}{-2} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

$$E_{x_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x_2(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^2(2t) dt = \infty$$

 پس  $(t) x_1$  سیگنال انرژی و  $(t) x_2$  سیگنال توان است.

پس گزینه (۲) صحیح است.

## تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



ج - سیگنال‌ها را می‌توان به دو دسته (۱) متناوب (۲) غیرمتناوب تقسیم‌بندی کرد. سیگنال پیوسته در زمان  $(t)x$  را متناوب می‌نامند هر گاه یک  $T$  مثبت وجود داشته باشد که به ازاء آن  $x(t+T)=x(t)$  گردد. به عبارت دیگر سیگنال متناوب این ویژگی را دارد که در اثر جابجایی زمانی به اندازه  $T$  تغییر نمی‌کند. کوچکترین مقدار مثبت  $T$  را با  $T_0$  نشان می‌دهند و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند. سیگنال گسته در زمان  $[n]x$  را متناوب می‌نامند هر گاه یک مقدار مثبت و صحیح  $N$  وجود داشته باشد که به ازاء آن  $x[n]=x[n+N]$  گردد. کوچکترین مقدار مثبت  $N$  را با  $N_0$  نشان داده و دوره تناوب اصلی یا پایه سیگنال می‌نامند.

**تذکرہ:** برخی از سیگنال‌های متناوب (توابع ثابت) فاقد دوره تناوب اصلی می‌باشند.

**تذکرہ:** با توجه به تعریف سیگنال متناوب گسته در زمان دقت شود که دوره تناوب این سیگنال‌ها نمی‌تواند مقادیر غیر صحیح باشد.

**تذکرہ:** بدیهی است سیگنالی که نتوان برای آن دوره تناوب  $T$  (یا  $N$ ) بدست آورد را سیگنال غیرمتناوب می‌نامند.

**مثال:** سیگنال  $x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-n)}$  متناوب است یا غیرمتناوب؟ در صورت متناوب بودن دوره تناوب اصلی آن را تعیین کنید.

**حل:** برای تعیین متناوب یا نامتناوب بودن سیگنال فوق باید درستی رابطه  $x(t+T)=x(t)$  را بررسی کنیم:

$$x(t+T)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2(t+T)-n)}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t+2T-n)}$$

با فرض صحیح بودن مقدار  $2T$  می‌توان تغییر متغیر  $m=n-2T$  داد و در نتیجه:

$$x(t+T)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-(2t-m)}=x(t)$$

بنابراین  $x(t)$  به ازاء کلیه مقادیر  $T$  به گونه‌ای که  $2T$  عدد صحیح باشد متناوب است و کوچکترین مقدار مثبت  $T$  (دوره تناوب

اصلی  $x(t)$  برابر  $\frac{1}{2}T_0$  است.

**تست نمونه -** (سراسری ۸۵) توان  $(P)$  و انرژی  $(E)$  سیگنال  $x[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$  به ترتیب عبارتند از:

$$E=+\infty, P=0 \quad (2)$$

$$E=+\infty, P=\frac{41}{18} \quad (1)$$

$$E=\frac{64}{9}, P=0 \quad (4)$$

$$E=+\infty, P=+\infty \quad (3)$$

**حل:** با روشی مشابه مثال قبل می‌توان نشان داد  $[n]x$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $N_0=2$  است. بنابراین گزینه‌های (۲) و (۳) صحیح نیستند. زیرا  $E=+\infty$  و  $P \neq 0$  می‌باشند. از طرفی نزولی بودن سری تعریف کننده  $[n]x$ ، محدود بودن نمونه‌های این سیگنال را تضمین می‌کند. بنابراین  $P=+\infty$  و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

اگر بخواهیم  $P$  را محاسبه نماییم، با توجه به آن که  $N_0=2$  است داریم:

$$P=\frac{1}{2}\left(x^2[0]+x^2[1]\right)$$

$$x[0] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|2m|} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-2|m|} = 1 + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-2m} = 1 + 2(2^{-2} + 2^{-4} + \dots) = 1 + 2 \times \frac{2^{-2}}{1 - 2^{-2}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$x[1] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|1-2m|} = 2 \sum_{m=1}^{+\infty} 2^{-(2m-1)} = 2(2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-5} + \dots) = 2 \times \frac{2^{-1}}{1 - 2^{-2}} = \frac{4}{3}$$

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{25}{9} + \frac{16}{9} \right) = \frac{41}{18}$$

د - سیگنال‌ها را می‌توان به چهار دسته (۱) زوج (۲) فرد (۳) هم زوج هم فرد (۴) نه زوج نه فرد تقسیم‌بندی کرد.  
سیگنال  $x(t)$  (یا  $x[n]$ ) را زوج می‌نامند هر گاه  $x(t) = x[-t]$  (یا  $x[n] = x[-n]$ ) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال زوج نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به محور عمودی متقارن است. (مانند شکل (۱ - ۴ - الف))  
سیگنال  $x(t)$  (یا  $x[n]$ ) را فرد می‌نامند هر گاه  $x(t) = -x[-t]$  (یا  $x[n] = -x[-n]$ ) باشد.

تذکر: از تعریف یک سیگنال فرد نتیجه می‌شود که نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات تقارن دارد. همچنین  $x(0) = 0$  (یا  $x[0] = 0$ ) می‌باشد. (مانند شکل (۱ - ۴ - ب))

سیگنال هم زوج هم فرد به سیگنالی اطلاق می‌شود که هر دو شرط مربوط به سیگنال‌های زوج و فرد را برآورده سازد. به عبارت دیگر نمودار این سیگنال‌ها توأم نسبت به مبدأ مختصات و محور عمودی تقارن دارد.

تذکر: از نظر تحلیلی تنها سیگنال هم زوج هم فردی که ابهام ندارد، سیگنال  $x(t) = x[-t]$  (یا  $x[n] = x[-n]$ ) است. به عنوان مثال سیگنال نشان داده شده در شکل (۱ - ۴ - ج) یک سیگنال هم زوج هم فرد با رابطه  $|x(t)| = |x(-t)|$  است. ملاحظه می‌کنید که غیر از  $t = 0$  در بقیه نقاط در انتخاب مقدار  $x(t)$  دچار ابهام می‌شوند. این مشکل در مورد سیگنال‌های گستته در زمان نیز وجود دارد به گونه‌ای که برای هر نمونه دو مقدار قرینه وجود خواهد داشت! لذا از نظر طبقه‌بندی سیگنال‌ها و نقش آن‌ها در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیگنال‌های هم زوج هم فرد نقش مهمی ندارند.

سیگنال نه زوج، نه فرد سیگنالی است که هیچ کدام از شروط زوج یا فرد بودن را برآورده نسازد. (مانند شکل (۱ - ۴ - د))

تذکر: اگر سیگنالی نه زوج نه فرد باشد آن را می‌توان به صورت مجموع دو سیگنال، یکی فرد و دیگری زوج نوشت. اگر سیگنال فرد را با:

$$x_e(t) = \text{odd}\{x(t)\}$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

روابط فوق برای سیگنال‌های گستته در زمان نیز صادق است.

تذکر: اگر  $x(t)$  (یا  $x[n]$ ) فرد باشد آن گاه داریم:

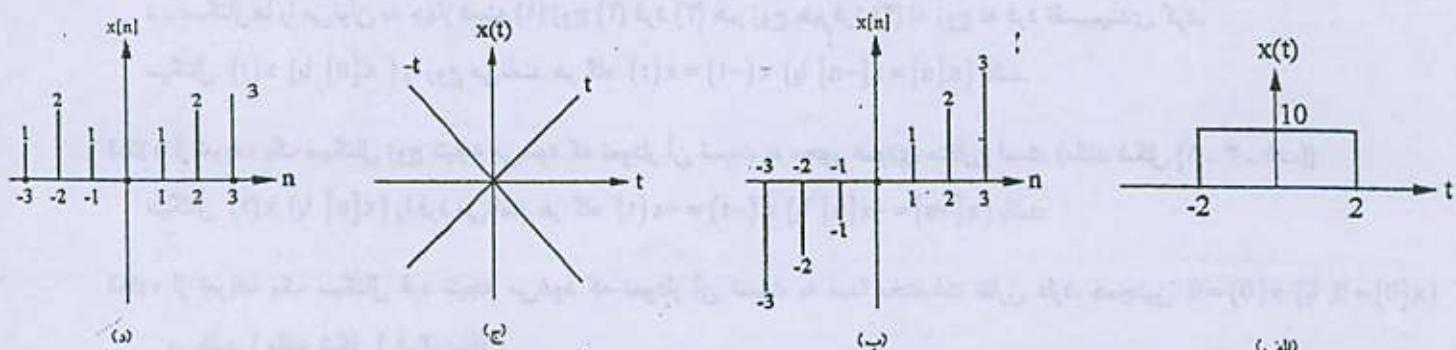
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 0 \quad \left( \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = 0 \right)$$

تذکر: اگر دو سیگنال هر دو زوج یا فرد باشند حاصل ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی زوج و اگر یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد باشد حاصل ضرب آن‌ها در یکدیگر سیگنالی فرد است.

تذکر: اگر  $x(t)$  (یا  $x[n]$ ) سیگنالی نه زوج، نه فرد باشد آنگاه داریم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_e^2(t) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_o^2(t) dt$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^2[n]$$



شکل ۱-۴- (الف) سیگنال (و) نه زوج (ب) سیگنال هم (و) هم فرد (د) سیگنال نه فرد

## ۱-۲- تبدیلات متغیر مستقل

یکی از مفاهیم بنیادی تحلیل سیگنال و سیستم، تبدیل سیگنال است. در این بخش به تبدیلات ساده متغیر مستقل می‌برداریم. در این تبدیلات، متغیر مستقل سیگنال (یعنی محور زمان) تغییر کرده و سیگنال در جهت عمودی تغییری نخواهد داشت.

**الف - وارونگی محور زمان:** اگر در سیگنال پیوسته در زمان  $t$  به  $t$ - و در سیگنال گستته در زمان  $n$  به  $n$ - تبدیل شود، نمودار سیگنال فوق نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود.

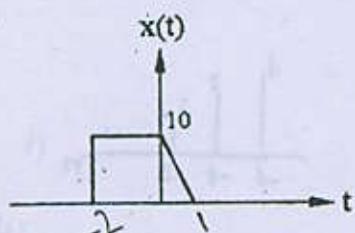
**ب - جابجایی زمانی:** با تبدیل  $t$  به  $t-t_0$  در سیگنال پیوسته در زمان  $n$  به  $n-n_0$  (یا  $n_0$  عدد صحیح) در سیگنال گستته در زمان، سیگنال روی محور زمان جابجا می‌شود. اگر  $t_0 > 0$  (یا  $n_0 < 0$ ) جابجایی به سمت راست و در صورتی که  $t_0 < 0$  (یا  $n_0 > 0$ ) باشد، جابجایی به سمت چپ خواهد بود.

**ج - فشردن یا گستردن:** با تبدیل  $t$  به  $at$  در سیگنال پیوسته در زمان  $n$  به  $an$  در سیگنال گستته در زمان (با فرض  $a > 0$ ) سیگنال در جهت محور زمان فشرده یا گسترده می‌شود. اگر  $a > 1$  باشد سیگنال فشرده و اگر  $0 < a < 1$  باشد سیگنال گسترده می‌شود.

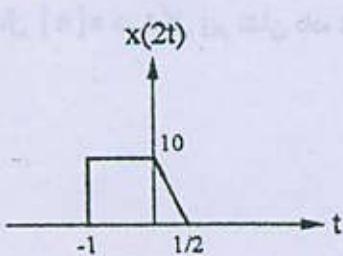
تذکر: در هنگامی که سیگنال گستته در زمان باشد، با فشردن آن تعدادی از نمونه‌ها حذف گردیده و با گستردن آن تعدادی صفر اضافه می‌شود.

تذکر: در برخی مواقع تبدیل متغیر مستقل به صورت  $t = \alpha n + \beta$  (یا  $n = \frac{t-\beta}{\alpha}$ ) می‌باشد که  $\alpha, \beta$  ثابت‌های حقیقی می‌باشند. در این وضعیت هر سه نوع تبدیل متغیر مستقل را به صورت توأم داریم.

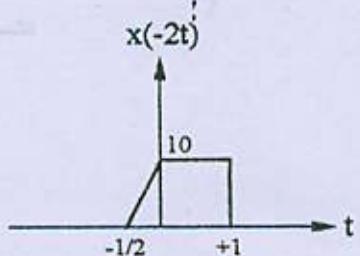
مثال: فرض کنید  $x(t)$  یک سیگنال پیوسته در زمان مطابق شکل زیر باشد.  $(-2t-3)x$  را رسم کنید.



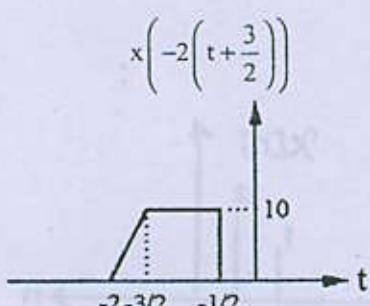
هل: به دو طریق نشان داده شده در شکل‌های زیر می‌توان این مثال را حل کرد:



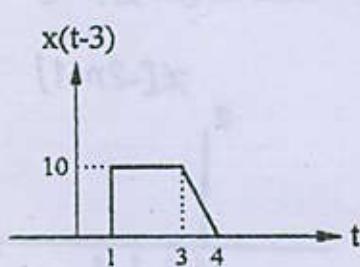
(فریدن)



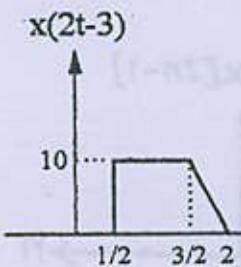
(معکوس کردن)



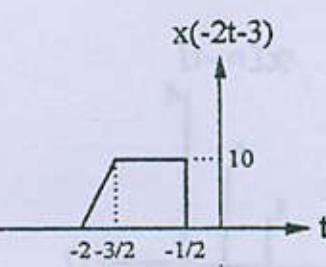
(شیفت به چپ)



(شیفت به راست)

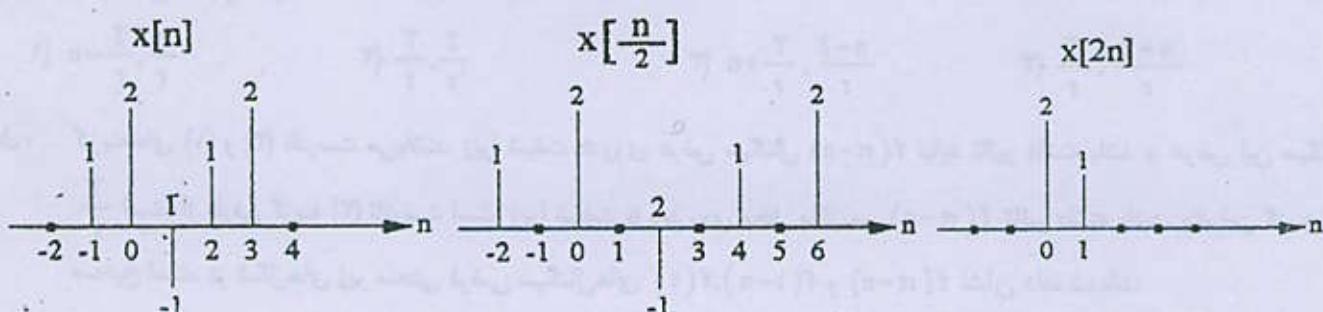


(فریدن)



(معکوس کردن)

مثال: در شکل‌های زیر چگونگی فشرده شدن و گستردگی گستته در زمان در این شکل‌ها نشان داده شده‌اند.



## تمثیله و تملیل سیستمها

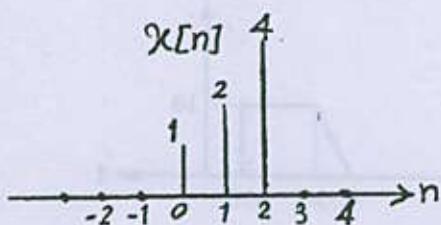
۸

تست نمونه - اگر  $x[n] = 2^n(u[n] - u[n-3])$  باشد، آنگاه شکل (۱) کدام است؟

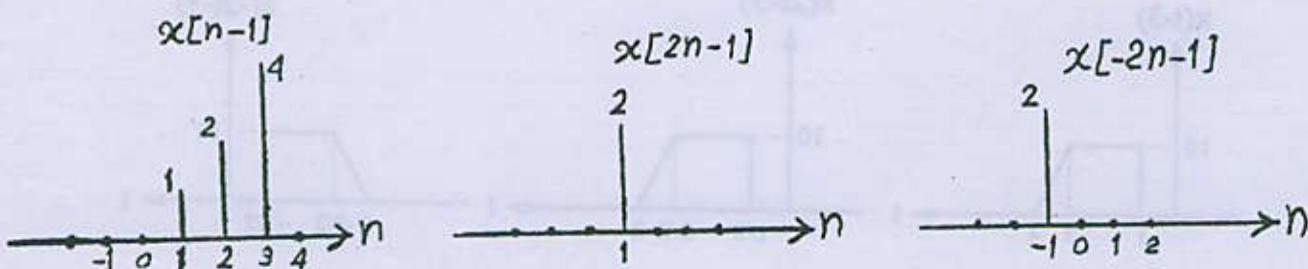


هل:

سیگنال  $x[n]$  در شکل زیر نشان داده شده است:



سیگنال فوق را ابتدا شیفت داده تا  $x[n-1]$ ، سپس فشرده کرده تا  $x[2n-1]$  و در نهایت معکوس کرده تا  $x[-2n-1]$  بدست می‌آید. این شکل‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:



پس گزینه (۳) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۵) اگر  $f(t)$  سیگنالی به عرض  $T$  و ماکریتمی واقع بر  $t=2$  باشد، در آن صورت عرض و محل ماکریتم  $f(rt-n)(r>0)$  عبارتند از:

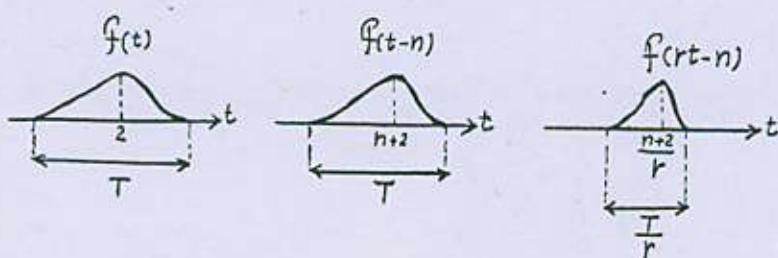
$$\frac{n+2}{r}, \frac{T}{r} \quad (4)$$

$$\frac{n-2}{r}, \frac{T}{r} + n \quad (3)$$

$$\frac{2}{r}, \frac{T}{r} \quad (2)$$

$$\frac{n}{r}, \frac{T}{r} - n \quad (1)$$

هل: گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. زیرا شیفت  $n$  روی عرض سیگنال  $f(\pi-n)$  نباید تاثیر داشته باشد و عرض این سیگنال  $\frac{T}{r}$  است. از طرفی گزینه (۲) نادرست است. زیرا شیفت  $n$  باید روی محل ماکریتم  $f(rt-n)$  تاثیر داشته باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است. در شکل‌های زیر منحنی فرضی سیگنال‌های  $f(t-n)$ ,  $f(t)$  و  $f(rt-n)$  نشان داده شده‌اند:

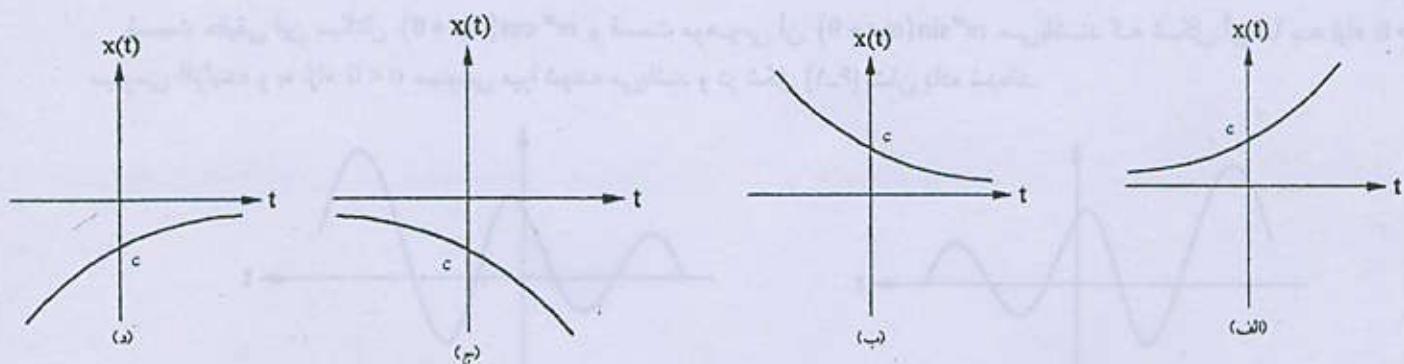


### ۱-۳- برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

در این بخش برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان معرفی می‌شوند. این سیگنال‌ها علاوه بر آن که در طبیعت وجود دارند، برای ساخت سایر سیگنال‌ها نیز استفاده می‌شوند.

**الف - سیگنال‌های نمائی پیوسته در زمان:** شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها  $x(t) = ce^{\alpha t}$  است که با توجه به وضعیت  $c$  و  $\alpha$  سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردند.

**الف - ۱ - سیگنال نمائی حقیقی:** اگر  $c$  و  $\alpha$  حقیقی باشند آن‌گاه سیگنال حاصل را سیگنال نمائی حقیقی پیوسته در زمان می‌نامند. در شکل (۵-۱) نمودار این سیگنال به ازاء مقادیر مثبت و منفی  $c$  و  $\alpha$  رسم شده است.



شکل ۱-۵ - نمودار سیگنال  $x(t) = ce^{\alpha t}$  به ازای (الف)  $c > 0$  و  $a > 0$  (ب)  $c > 0$  و  $a < 0$  (ج)  $c < 0$  و  $a < 0$  (د)  $c < 0$  و  $a > 0$

**الف - ۲ - سیگنال متناوب نمائی مختلف و سینوسی:** اگر  $c$  حقیقی و  $a$  موهومی باشند، دسته مبهم از سیگنال‌های نمائی بدست می‌آیند. با فرض  $1 = j\omega_0$  و  $a = j\omega_0$  داریم:

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow \operatorname{Re}\{x(t)\} = \cos(\omega_0 t), \quad \operatorname{Im}\{x(t)\} = \sin(\omega_0 t)$$

ملاحظه کنید قسمت حقیقی و موهومی سیگنال  $e^{j\omega_0 t}$  سیگنال‌های  $\cos(\omega_0 t)$  و  $\sin(\omega_0 t)$  می‌باشند. خواص مهم سیگنال  $e^{j\omega_0 t}$  عبارتند از:

(۱) این سیگنال به ازاء کلیه مقادیر  $\omega_0$  متناوب و دوره تناوب آن  $T_0 = \frac{2k\pi}{\omega_0}$  است.

(۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال به ازاء  $k = 1$  یا  $k = -1$  بدست آمده و  $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$  است.

(۳) با افزایش  $\omega_0$  مقدار  $T_0$  کوچکتر شده و در نتیجه سرعت تغییرات این سیگنال افزایش می‌یابد.

(۴) سیگنال فوق یک سیگنال توان با  $P = 1$  است. البته توان متوسط در فاصله زمانی نامحدود آن با توان متوسط روی یک دوره تناوب برابر است.

(۵) از روی سیگنال فوق هارمونیک‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

(۱)  $\phi_k(t)$  را هارمونیک اصلی (پایه)،  $\omega_0$  را فرکانس اصلی (پایه) می‌نامند. بدینهی است

تعداد هارمونیک‌های پیوسته در زمان بی‌نهایت می‌باشد.

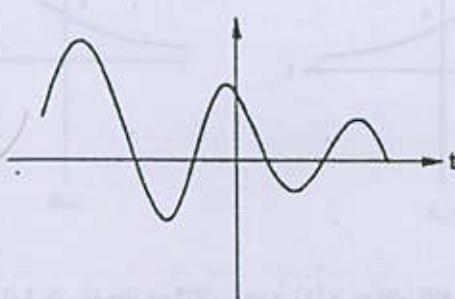
نتیجه - سیگنال‌های  $\sin(\omega_0 t)$  و  $\cos(\omega_0 t)$  با دوره تناوب  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  و دوره تناوب اصلی  $T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$  نیز به ازاء کلیه مقادیر  $\omega$  با دوره تناوب متناظر است.

متناوب می‌باشند. همچنین برای این دو سیگنال  $P_\infty = \frac{1}{2}$  است. هارمونیک‌ها نیز برای این دو سیگنال به صورت  $\sin(k\omega_0 t)$  و  $\cos(k\omega_0 t)$  تعریف می‌گردند.

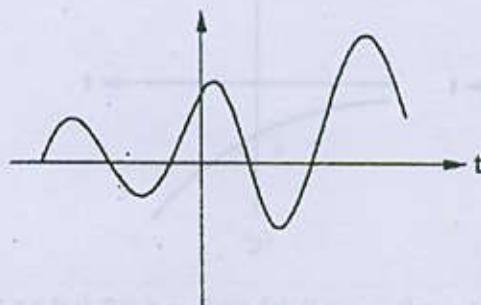
الف - ۳- سیگنال نمائی مختلط : اگر  $c$  و  $a$  هر دو مختلط باشند، آن‌گاه سیگنال نمائی مختلط بدست می‌آید. با فرض  $c = re^{j\theta}$  داریم:

$$x(t) = re^{j\theta} \cdot e^{(\sigma + j\omega_0)t} = re^{\sigma t} e^{j(\omega_0 t + \theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال  $re^{\sigma t} \cos(\omega_0 t + \theta)$  و قسمت موهومی آن  $re^{\sigma t} \sin(\omega_0 t + \theta)$  می‌باشند که شکل آن‌ها به ازاء  $\sigma > 0$  سینوسی افزاینده و به ازاء  $\sigma < 0$  سینوسی میرا شونده می‌باشند و در شکل (۱-۶) نشان داده شده‌اند.



(ب)



(الف)

شکل ۱-۶- (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

ب - توابع پله و ضربه واحد پیوسته در زمان:

تابع پله واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

تابع ضربه واحد به صورت زیر تعریف می‌شود:

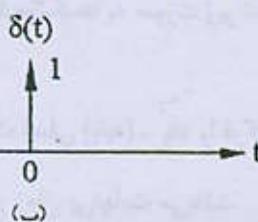
$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \text{ویژه} & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_0^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

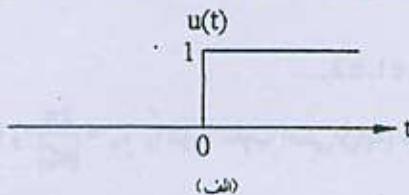
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t) dt = 1$$

ویژگی به گونه‌ای است که

یعنی سطح زیر منحنی تابع ضربه برابر یک است. نمودار تابع پله و ضربه واحد در شکل (۱-۷) نشان داده شده‌اند.



(ب)



(الف)

شکل ۱-۷- (الف) نمودار تابع پله واحد (ب) نمودار تابع ضربه واحد

تذکر: تابع پله در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u(f(t)) = \begin{cases} 1 & f(t) > 0 \\ 0 & f(t) \leq 0 \end{cases}$$

به عبارت دیگر برای ترسیم نمودار این تابع باید یک فرآیند تعیین علامت انجام شود.

تذکر: تابع  $\delta(f(t))$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(f(t)) = \begin{cases} 0 & f(t) \neq 0 \\ \text{ویژه} & f(t) = 0 \end{cases}$$

ویژگی به گونه‌ای است که سطح زیر منحنی  $\delta(f(t))$  برابر یک باشد.

برای ترسیم این تابع باید ابتدا نقاطی که به ازای آن‌ها  $f(t) = 0$  می‌شود را تعیین کرد. اگر این نقاط را  $t_1, t_2, \dots, t_n$  بنامیم داریم:

$$f(t) = k(t - t_1)(t - t_2)\dots(t - t_n)$$

آن‌گاه با توجه به رابطه  $\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$  می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\delta(f(t)) = \frac{1}{|k|} \left\{ \frac{1}{|t_1 - t_2| \dots |t_n - t_1|} \delta(t - t_1) + \dots + \frac{1}{|t_n - t_1| \dots |t_{n-1} - t_n|} \delta(t - t_n) \right\}$$

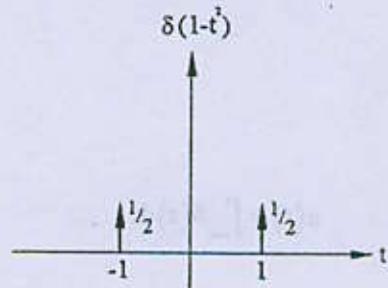
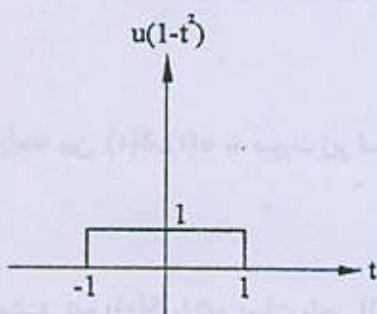
مثال: توابع  $u(1-t^2)$  و  $\delta(1-t^2)$  را رسم کنید.

عمل:

$$u(1-t^2) = \begin{cases} 0 & 1-t^2 < 0 \\ 1 & 1-t^2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow u(1-t^2) = \begin{cases} 0 & t > 1, t < -1 \\ 1 & -1 < t < 1 \end{cases}$$

$$\delta(1-t^2) = \delta((1-t)(1+t)) = \frac{1}{2}\delta(1-t) + \frac{1}{2}\delta(1+t)$$

در شکل‌های زیر نمودار این دو تابع نشان داده شده‌اند:



## تمثیله و تحلیل سیستمها

تست نمونه - (آزاد ۷۹) اگر  $x(t)$  تابع ضربه واحد باشد و  $x = 8t - t^3$  در نظر گرفته شود، حاصل انتگرال زیر چقدر خواهد بود؟

$$A = \int_{-1}^{\infty} \delta(x) dt$$

$$A = \frac{-1}{4} \quad (۴)$$

$$A = \frac{-3}{16} \quad (۳)$$

$$A = \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$A = \frac{3}{16} \quad (۱)$$

حل:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(8t - t^3) = \delta\left(t(\sqrt{8} - t)(\sqrt{8} + t)\right) = \frac{1}{\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}} \delta(\sqrt{8} + t) \\ &+ \frac{1}{\sqrt{8} \times 2\sqrt{8}} \delta(\sqrt{8} - t) + \frac{1}{\sqrt{8} \times \sqrt{8}} \delta(t) = \frac{1}{16} \delta(\sqrt{8} + t) + \frac{1}{16} \delta(\sqrt{8} - t) + \frac{1}{8} \delta(t) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$A = \int_{-1}^{\infty} \delta(x) dt = \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{3}{16}$$

پس گزینه (۱) صحیح است. دقت کنید حذف گزینه های (۳) و (۴) از جواب های صحیح از ابتدا مشخص بود. زیرا مقادیر منفی می باشند.

تذکر: یکی از خواص مهم تابع ضربه خاصیت غربالی آن است که به صورت زیر است:

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t) dt = x(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$$

تذکر: قضیه کلی تر از خاصیت غربالی تابع ضربه، رابطه زیر است. در رابطه زیر  $\delta^{(n)}(t-t_0)$  مشتق مرتبه  $n$  از  $\delta(t-t_0)$  است:

$$\int_{t_1}^{t_2} x(t)\delta^{(n)}(t-t_0) dt = \begin{cases} (-1)^n x^{(n)}(t) \Big|_{t=t_0} & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 < t_1 \quad t_0 > t_2 \end{cases}$$

بدیهی است اگر  $t_1 = -\infty$  و  $t_2 = \infty$  باشند، خاصیت غربالی تابع ضربه را خواهیم داشت.

تذکر: با توجه به تعریف تابع ضربه واحد می توان رابطه زیر را به دست آورد:  $a$  یک اسکالر حقیقی است

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

تذکر: رابطه بین  $u(t), \delta(t)$  به صورت زیر است:

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \quad u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$$

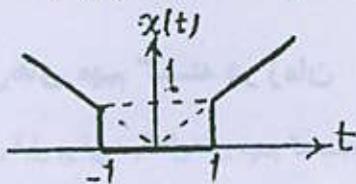
تذکر: مشتق تابع  $\delta(t)$  را تابع دوبلت واحد  $(\delta'(t))$  و انتگرال تابع  $u(t)$  را تابع شب واحد  $(r(t))$  می نامند و داریم:

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \quad r(t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$



تست نمونه - (آزاد ۷۹) کدام یک از دو ضابطه زیر برای سیگنال  $x(t)$  نشان داده شده در شکل روبرو صحیح است؟

$$x(t)$$



$$x(t) = u(t^2 - 1) + r(t^2 - 1) \quad (1)$$

$$x(t) = u(t^2 - 1) + r(t - 1) + r(-t - 1) \quad (2)$$

(۲) فقط ضابطه (۱) و (۲) درست است.

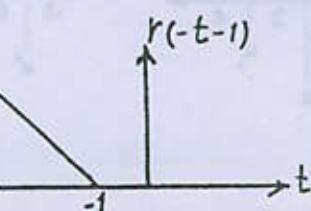
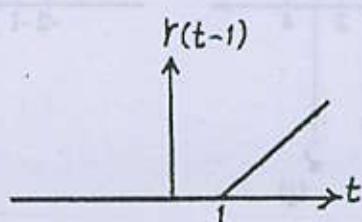
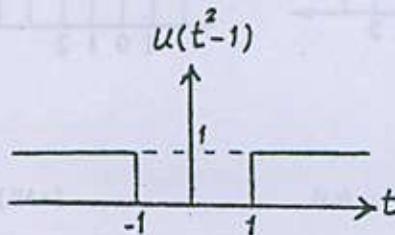
(۳) هیچ‌کدام از دو ضابطه درست نیستند.

هل :

با توجه به تعریف تابع شیب واحد نتیجه می‌گیریم:

$$r(t^2 - 1) = \begin{cases} t^2 - 1 & t^2 - 1 > 0 \\ 0 & t^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

بنابراین ضابطه (۱) صحیح نیست. اما ضابطه (۲) صحیح است. شکل‌های  $u(t^2 - 1)$ ,  $r(t - 1)$  و  $r(-t - 1)$  در زیر رسم شده‌اند:



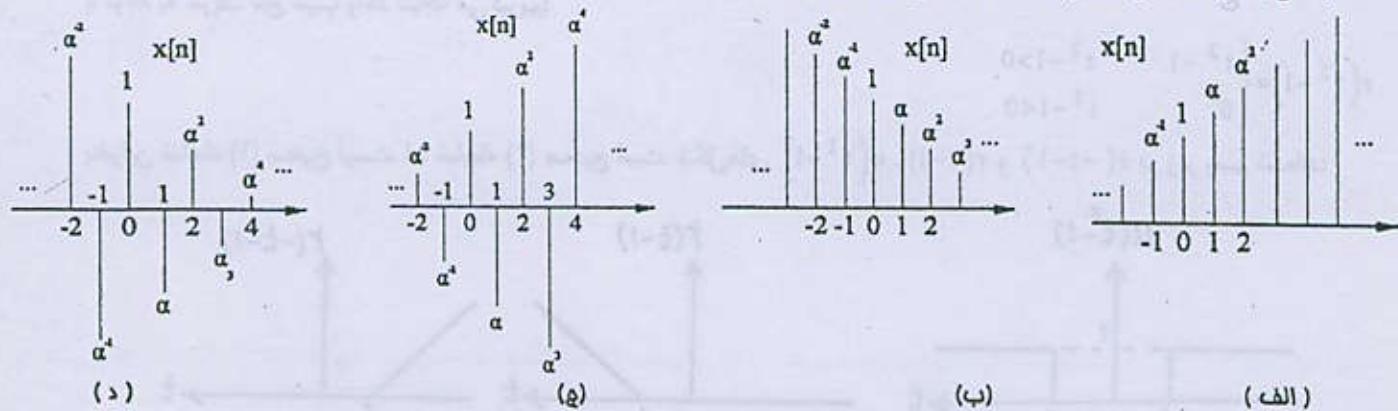
بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

### ۱-۴- برخی سیگنال‌های مهم گستته در زمان

در این بخش مشابه بخش قبل برخی سیگنال‌های مهم گستته در زمان بررسی خواهد شد.

**الف - سیگنال‌های نمائی گستته در زمان:** شکل کلی این دسته از سیگنال‌ها  $x[n] = c\alpha^n$  است. با توجه به مقادیر  $c$  و  $\alpha$  سه نوع از این سیگنال‌ها معرفی می‌گردد.

**الف - ۱- سیگنال نمائی حقیقی:** اگر  $c$  و  $\alpha$  حقیقی باشند، سیگنال حاصل یک سیگنال نمائی حقیقی است. در شکل (۱-۱) این سیگنال به ازاء  $c=1$  و مقادیر مختلف  $\alpha$  نشان داده شده است.



شکل ۱-۱. سیگنال نمائی حقیقی به ازای (الف)  $\alpha > 1$  (ب)  $0 < \alpha < 1$  (ج)  $-1 < \alpha < 0$

**الف - ۲- سیگنال نمائی مختلط و سینوسی:** اگر  $c$  حقیقی و  $e^{j\omega_0 n} = \alpha$  باشند، این سیگنال بدست می‌آید. با فرض  $c = 1$

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \rightarrow \operatorname{Re}\{x[n]\} = \cos(\omega_0 n), \quad \operatorname{Im}\{x[n]\} = \sin(\omega_0 n)$$

بنابراین قسمت‌های حقیقی و موهومی این سیگنال به ترتیب  $\cos(\omega_0 n)$  و  $\sin(\omega_0 n)$  می‌باشند.

خواص مهم سیگنال  $e^{j\omega_0 n}$  عبارتند از:

(۱) این سیگنال به ازای کلیه مقادیر  $\omega_0$  متناوب نیست و فقط هنگامی متناوب است که  $\omega_0$  مضرب گویانی از  $\pi$  باشد. دلیل آن است

که دوره تناوب این سیگنال یعنی  $N = \frac{2k\pi}{\omega_0}$  باید یک عدد صحیح باشد.

(۲) دوره تناوب اصلی این سیگنال لزوماً به ازای  $k=1$  بدست نمی‌آید. بلکه هر  $k$  که اولین عدد مثبت برای  $N$  را بدهد مشخص کننده دوره تناوب اصلی سیگنال است.

(۳) با افزایش  $\omega_0$  لزوماً سرعت تغییرات این سیگنال زیاد نمی‌شود. بلکه افزایش یا کاهش سرعت این سیگنال مطابق جدول زیر متناوباً در بازه‌های  $2\pi$  تکرار می‌شود.

$\omega_0$ (مضرب)	۰	$\pi$	$2\pi$	$3\pi$	$4\pi$	.....	$\pi$ (گویا از)
سرعت تغییرات $e^{j\omega_0 n}$	۰	۰	۰	۰	۰	.....	

۴) سیگنال فوق نیز یک سیگنال توان با  $P = P_0 = 1$  است.

۵) از روی این سیگنال نیز می‌توان هارمونیک‌های گستته در زمان را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\phi_k[n] = e^{j\omega_0 n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N_0 - 1 \quad (\text{یا هر } N_0 \text{ عدد صحیح پشت سر هم})$$

$$e^{j\omega_0 n} \text{ را هارمونیک اصلی (پایه)، } \omega_0 \text{ را فرکانس اصلی (پایه) (با شرط } \omega_0 \text{ مضرب گویا از } \pi \text{) و } N_0 = \frac{2k\pi}{|\omega_0|} \text{ (به ازاء اولین عدد}$$

صحیح مثبت) را دوره تناوب اصلی (پایه) می‌نامند.

دقت کنید تعداد هارمونیک‌های گستته در زمان  $N_0$  است.

**مثال :** سیگنال  $\cos(2n)$  متناوب نیست زیرا  $2 = \omega_0$  و مضرب گویانی از  $\pi$  نیست. اما سیگنال  $\sin(5\pi n)$  متناوب بوده و دوره تناوب آن برابر است با:

$$N = \frac{2k\pi}{5\pi} = \frac{2k}{5} \xrightarrow{k=5} N_0 = 2 \quad \text{دوره تناوب اصلی}$$

تست نمونه - کدام گزینه صحیح نیست؟

۱) سیگنال  $(6\pi t + 30^\circ) \cos(3\pi t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $\frac{1}{3}$  است.

۲) سیگنال  $\sin[3\pi n]$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی 6 است.

۳) سیگنال  $e^{\frac{n}{2}}$  یک سیگنال غیرمتناوب است.

۴) سیگنال  $\cos\left[\frac{2\pi n}{7}\right]$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی 7 است.

هل:

برای سیگنال  $(6\pi t + 30^\circ) \cos(3\pi t)$  داریم:

$$T = \frac{2k\pi}{6\pi} = \frac{k}{3} \xrightarrow{k=1} T_0 = \frac{1}{3}$$

برای سیگنال  $\sin[3\pi n]$  داریم:

$$N = \frac{2k\pi}{3\pi} = \frac{2k}{3} \xrightarrow{k=3} N_0 = 2$$

برای سیگنال  $e^{\frac{n}{2}}$  داریم:

$$\omega_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{سیگنال فوق متناوب نیست.}$$

برای سیگنال  $\cos\left[\frac{2\pi n}{7}\right]$  داریم:

$$N = \frac{2k\pi}{\frac{2\pi}{7}} = 7k \xrightarrow{k=1} N_0 = 7$$

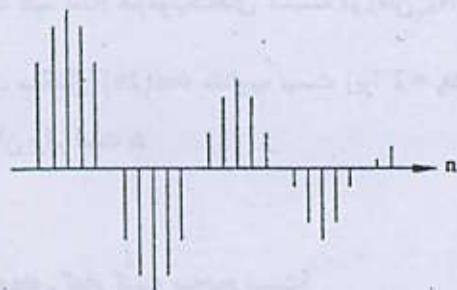
پس گزینه (۲) تنها گزینه نادرست است.

الف - ۳ - سیگنال نمائی مختلط کلی: اگر  $c$  و  $\alpha$  هر دو مختلط باشند. آن‌گاه این سیگنال بدست می‌آید. با فرض  $c = re^{j\theta}$  و

$$\alpha = ke^{j\omega_0 n}$$

$$x[n] = re^{j\theta} \cdot k^n e^{j\omega_0 n} = rk^n e^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

قسمت حقیقی این سیگنال  $rk^n \cos(\omega_0 n + \theta)$  و قسمت موهومی آن  $k \sin(\omega_0 n + \theta)$  است که به ازای  $|k| > 1$  سینوسی افزاینده و به ازای  $|k| < 1$  سینوسی میرا شونده می‌باشد و در شکل (۹-۱) نشان داده شده‌اند:



(ب)



(الف)

شکل ۹-۱ (الف) سیگنال سینوسی افزاینده (ب) سیگنال سینوسی میرا شونده

### ب - توابع پله و ضربه گستته در زمان

تابع پله واحد گستته در زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

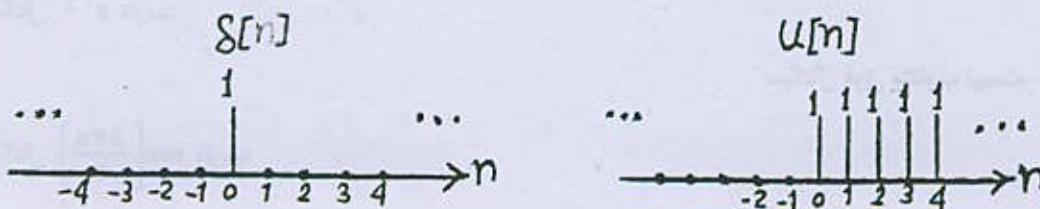
$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

تابع ضربه واحد گستته در زمان (یا تابع نمونه واحد) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

بدینفس است که برای تابع ضربه واحد داریم  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] = 1$

نمودار تابع پله واحد و ضربه واحد گستته در زمان در شکل (۱۰-۱) نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۰-۱- (الف) نمودار تابع پله واحد گستته (ب) نمودار تابع ضربه واحد گستته

تذکر: خاصیت غربالی تابع ضربه گستته در زمان با روابط زیر تعریف می‌گردد:

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n] = x[0]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]$$

تذکر: رابطه بین  $\delta[n]$  و  $u[n]$  به صورت زیر است:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^n \delta[k] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

تذکر: با توجه به تعریف تابع ضربه واحد گستته در زمان می‌توان نتیجه گرفت: (a) اسکالر حقیقی است)

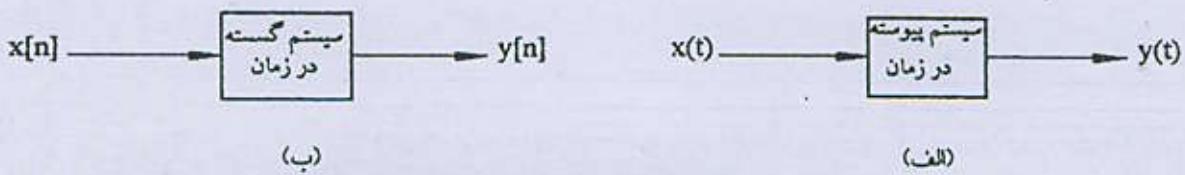
$$\delta[a n] = \delta[n]$$

## ۲- سیستم‌های پیوسته و گسسته در زمان و خواص آن‌ها

### ۲-۱- سیستم‌ها، تقسیم‌بندی و اتصالات آن‌ها

**تعریف سیستم:** سیستم مجموعه‌ای سازمان یافته از واحدهای مختلف (زیر سیستم‌ها) می‌باشد که با اثر متقابل و برای دستیابی به اهداف خاص طراحی می‌شود.

**تقسیم‌بندی سیستم‌ها:** سیستم‌ها در اولین تقسیم‌بندی به دو دسته (۱) سیستم پیوسته در زمان و (۲) سیستم گسسته در زمان تقسیم می‌شوند. سیستم پیوسته در زمان سیستمی است که در آن سیگنال‌های ورودی پیوسته در زمان به سیگنال‌های خروجی پیوسته در زمان تبدیل می‌شوند. در صورتی که سیستم گسسته در زمان سیستمی است که سیگنال‌های ورودی گسسته در زمان را به سیگنال‌های خروجی گسسته در زمان تبدیل می‌کند. در شکل (۲-۱) این دو نوع سیستم نشان داده شده‌اند.



شکل ۲-۱- (الف) سیستم پیوسته در زمان (ب) سیستم گسسته در زمان

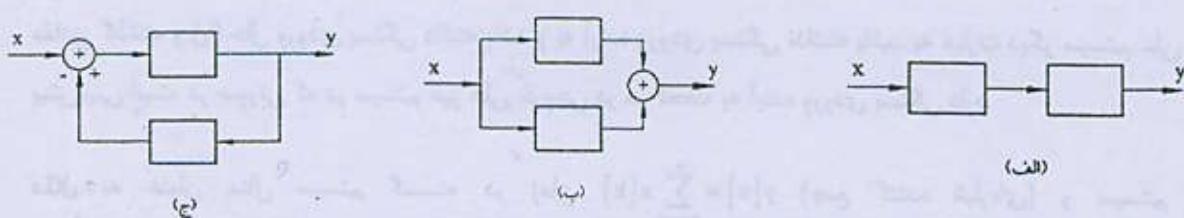
تذکرہ: تقسیم‌بندی سیستم‌ها به دو نوع ذکر شده محدود نمی‌شود و در برخی سیستم‌های پیچیده تر ممکن است ورودی یا خروجی پیوسته در زمان و دیگری گسسته در زمان باشد. در ادامه و در مبحث نمونه‌برداری، این دسته از سیستم‌ها نیز بررسی می‌گردد.

**اتصال سیستم‌ها:** معمولاً سیستم‌های واقعی از اتصال زیر سیستم‌های ساده‌تر تشکیل می‌شوند. لذا چگونگی اتصال آن‌ها و بررسی خواص مربوطه اهمیت زیادی دارد. به طور کلی سه اتصال اساسی (پایه) برای سیستم‌ها وجود دارد که عبارتند از:

۱) اتصال سری: در این اتصال ورودی به یکی از سیستم‌ها اعمال شده و خروجی از سیستم دوم گرفته می‌شود. خروجی سیستم اول نیز به ورودی سیستم دوم متصل می‌گردد. در شکل (۲-۲-الف) این اتصال نشان داده شده است و در برخی مواقع اتصال متوالی یا زنجیره‌ای (cascade) نیز نامیده می‌شود.

۲) اتصال موازی: در این اتصال ورودی به هر دو سیستم اعمال شده و خروجی آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند و خروجی کلی را درست می‌کنند. در شکل (۲-۲-ب) این اتصال نشان داده شده است.

۳) اتصال فیدبک: در این اتصال خروجی سیستم اول که خروجی کلی نیز می‌باشد، توسط سیستم دوم تغییر داده شده و پس از کم شدن یا جمع شدن با ورودی (فیدبک منفی یا مثبت) به ورودی سیستم اول داده می‌شود. در شکل (۲-۲-ج) این اتصال نشان داده شده است.



شکل ۲-۲. (الف) اتصال سری (ب) اتصال موازی (ج) اتصال هیدبک

## ۲-۲- خواص سیستم‌ها

در این بخش برخی از خواص اساسی سیستم‌های پیوسته و گستته در زمان بررسی می‌گردند. در این بررسی شش خاصیت اصلی سیستم‌ها معرفی می‌گردند.

**الف - سیستم‌های حافظه‌دار و بدون حافظه:** سیستمی بدون حافظه نامیده می‌شود که خروجی آن به ازاء هر متغیر مستقل (هر زمان) به ورودی در همان مقدار متغیر مستقل (همان زمان) بستگی داشته باشد. به عبارت دیگر در سیستم بدون حافظه خروجی به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارد. در غیر این صورت سیستم را حافظه‌دار می‌نامند.

**مثال:** به عنوان مثال سیستم گستته در زمان  $y[n] = 2(x[n] - x^2[n])$  و سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = 10x^3(t)$  بدون حافظه می‌باشند. اما سیستم گستته در زمان  $y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{+M} x[n-k]$  که یک سیستم میانگین‌گیر است، یک سیستم با حافظه می‌باشد.

**مثال:** در میان عناصر مداری مقاومت LTI با رابطه  $v(t) = R_i(t)$  یک عنصر بدون حافظه می‌باشد. در صورتی که سلف و خازن با روابط  $v_L(t) = L \frac{di_L}{dt}$  و  $v_C(t) = C \frac{dv_C}{dt}$  می‌باشند. این عناصر حافظه‌دار می‌باشند.

**تذکر:** هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را حافظه‌دار نمایند.

**مثال:** سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y(t) = \begin{cases} t & t \leq 2 \\ x^2(t) & t > 2 \end{cases}$  بدون حافظه است. زیرا اثری از وابستگی به گذشته یا آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی

$y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) > 0 \\ 2x(t-1) & x(t) \leq 0 \end{cases}$  به دلیل حافظه‌دار بودن ضابطه  $(t-1)x^2$  و سیستم گستته در زمان با رابطه خروجی - ورودی

$y[n] = \begin{cases} x[n] & x[n-1] \geq 0 \\ n^2 x[n] & x[n-1] < 0 \end{cases}$  به دلیل حافظه‌دار بودن شروط رابطه، سیستم‌های حافظه‌دار می‌باشند.

## تبزیه و تمیل سیستم‌ها

**ب - سیستم‌های علی و غیرعلی - Causality:** سیستمی را علی (یا سببی) می‌نامند که در آن خروجی در هر لحظه تنها بد مقادیر گذشته و (یا) حال ورودی بستگی داشته باشد و به آینده ورودی بستگی نداشته باشد. به عبارت دیگر سیستم علی یک سیستم بدون پیش‌بینی است. در صورتی که در سیستم غیر علی خروجی در هر لحظه به آینده ورودی بستگی دارد.

مثال: به عنوان مثال سیستم گسته در زمان  $y[n] = \sum_{k=-M}^n x[k]$  (جمع کننده انبارهای) و سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^M x[n-k]$  سیستم‌های علی می‌باشند. در صورتی که سیستم گسته در زمان  $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & x[n] \geq 1 \\ (n+2)^2 & x[n] < 1 \end{cases}$  یک سیستم غیرعلی است.

تذکر: هنگامی که رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد، هم ضابطه‌ها و هم شروط می‌توانند سیستم را غیرعلی نمایند.

مثال: سیستم گسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \begin{cases} x[n-1] & x[n] \geq 1 \\ (n+2)^2 & x[n] < 1 \end{cases}$  علی است زیرا اثری از واپسگی به آینده ورودی در ضابطه‌ها و شروط این سیستم ملاحظه نمی‌شود. در صورتی که سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y(t) = \begin{cases} x(t+1) & x(t-1) \geq 0 \\ 2x(t) & x(t-1) < 0 \end{cases}$  به دلیل غیرعلی بودن ضابطه  $x(t+1)$  و سیستم گسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \begin{cases} x^2[n] & x[n+1] \leq 1 \\ x[n-1] & x[n+1] > 1 \end{cases}$  به دلیل غیرعلی بودن شروط رابطه، سیستم‌های غیرعلی می‌باشند.

تذکر: اگر یک سیستم علی باشد، آن‌گاه اگر دو ورودی آن به ازای  $t < t_0$  (یا  $n < n_0$ ) با یکدیگر برابر باشند آن‌گاه خروجی‌های متناظر این دو ورودی نیز تا زمان  $t = t_0$  (یا  $n = n_0$ ) با یکدیگر برابر می‌باشند یعنی داریم:

$$\text{if } x_1(t) = x_2(t) \quad t < t_0 \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) \quad t < t_0$$

$$\text{if } x_1[n] = x_2[n] \quad n < n_0 \Rightarrow y_1[n] = y_2[n] \quad n < n_0$$

تذکر: اگر متغیر مستقل زمان باشد، آن‌گاه بدیهی است که سیستم‌های غیر علی از نظر فیزیکی قابل ساخت و پیاده‌سازی نمی‌باشند.

تذکر: بر چند سیستم‌های علی اهمیت زیادی دارند، اما اگر متغیر مستقل زمان نباشد این اهمیت از نظر عملی یک محدودیت نمی‌باشد و این دسته از سیستم‌های غیرعلی قابل ساخت می‌باشند.

مثال: سیستم گسته  $y[n, m] = \frac{1}{2M+1} \sum_{l=-M}^M \sum_{k=-M}^M x[n-k, m-l]$  یک فیلتر میانگین غیر علی است که در پردازش تصویر

کاربرد دارد. اما در رابطه فیلتر فوق  $n, m$  زمان نمی‌باشند بلکه نشان‌دهنده موقعیت Pixel فعلی (طول و عرض آن) هستند. لذا فیلتر فوق با وجود غیرعلی بودن قابل ساخت می‌باشد.

تذکرہ: بدیهی است که اگر یک سیستم بدون حافظه باشد، علی نیز خواهد بود اما عکس آن لزوماً صادق نیست. همچنین اگر یک سیستم غیرعلی باشد لزوماً با حافظه می‌باشد. اما عکس آن لزوماً صادق نیست.

**ج - سیستم‌های وارون‌پذیر و وارون ناپذیر:** سیستم وارون‌پذیر سیستمی است که به ازا ورودی‌های متمایز خروجی‌های متمایز بدهد. به عبارت دیگر داریم:

$$\text{if } x_1(t) = x_2(t) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t)$$

و رابطه فوق برای حالت گستته در زمان نیز صادق است.

اگر سیستمی وارون‌پذیر باشد آن گاه می‌توان توسط یک سیستم وارون از روی خروجی سیستم اصلی ورودی آن را به طور یکتا و بدون ابهام بدست آورد.

اگر نتوان از روی خروجی یک سیستم، ورودی آن را بدون ابهام و به صورت یکتا تعیین کرد آن گاه سیستم فوق وارون‌پذیر است.

**مثال:** سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = 2x(t) + 1$  وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن از رابطه  $x(t) = \frac{y(t)-1}{2}$  ورودی را به طور یکتا تعیین می‌کند.

**مثال:** سیستم گستته در زمان  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^n y[k] - y[n-1]$  وارون‌پذیر است و سیستم وارون آن از رابطه  $y[n] = x[n] - x[n-1]$  بدست می‌آید.

**مثال:** سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = x^2(t)$  وارون‌پذیر است زیرا به ازا دو ورودی  $x(t) = A$  و  $x(t) = -A$ ، خروجی یکسان  $y(t) = A^2$  را ایجاد کرده و در نتیجه نمی‌توان از روی  $y(t)$  مقدار  $x(t)$  را به طور یکتا تعیین کرد.

تذکرہ: در مواقعی که یک سیستم مقادیری از ورودی را به ازا برخی زمان‌ها صفر (یا حذف) می‌کند، در این موارد سیستم وارون‌پذیر است. زیرا بدیهی است که نمی‌توان از روی خروجی، ورودی را به طور یکتا بدست آورد.

**مثال:** سیستم گستته در زمان  $y[n] = \begin{cases} x[n] & n < 0 \\ x[n+1] & n \geq 0 \end{cases}$  وارون‌پذیر است. زیرا این سیستم  $x[0]$  را حذف کرده و اثری از  $x[0]$  در خروجی وجود ندارد. لذا هنگام تعیین ورودی از روی خروجی نمی‌توان  $x[0]$  را به دست آورد.

**د - سیستم‌های پایدار و ناپایدار:** پایداری از جمله مفاهیمی است که با توجه به کاربرد موردنظر در سیستم‌های مختلف تعاریف متفاوتی دارد. یکی از این معیارها که در این درس مورد استفاده قرار می‌گیرد، معیار ورودی محدود خروجی محدود (BIBO) است. با این معیار سیستم پایدار سیستمی است که پاسخ با دامنه محدود به ورودی با دامنه محدود دهد. از نظر ریاضی سیستم پایدار به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{if } |x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq B < \infty \quad \text{به ازا تمام زمان‌ها}$$

این تعریف برای پایداری BIBO سیستم‌های گستته در زمان به همین صورت است.

سیستم ناپایدار سیستمی است که به ورودی با دامنه محدود خروجی با دامنه نامحدود بدهد.

## تمزیه و تمیل سیستم‌ها

مثال: به عنوان مثال برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه  $y(t) = x^2(t)$  و با فرض  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$  داریم:

$$|y(t)| = |x(t)|^2 = A^2 < \infty$$

پس این سیستم پایدار است.

مثال: برای سیستم گسسته در زمان با رابطه  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  و با فرض  $\sum_{k=-\infty}^n |x[k]| < \infty$  داریم:

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^n x[k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^n |x[k]| \leq \sum_{k=-\infty}^n A = \infty$$

پس این سیستم ناپایدار است.

مثال: برای سیستم پیوسته در زمان با رابطه  $y(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$  و با فرض  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(\tau)| d\tau < \infty$  داریم:

$$|y(t)| = \left| \int_0^t x(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |x(\tau)| d\tau \leq \int_0^t A d\tau = At$$

سیستم فوق ناپایدار است زیرا به ازای  $t \rightarrow \infty$  دامنه خروجی به سمت بینهایت می‌رود.

هـ - سیستم‌های تغییرپذیر و تغییرنایپذیر با زمان: به لحاظ مفهومی سیستم تغییرنایپذیر با زمان است که رفتار و مشخصات آن با زمان تغییر نکند. اما با زبان سیگنال‌ها و سیستم‌ها، سیستمی را تغییر نایپذیر با زمان می‌نامند هر گاه هر شیفت زمانی در سیگنال ورودی، دقیقاً در سیگنال خروجی ظاهر شود. به عبارت دیگر اگر به ورودی این سیستم  $x(t)$  (یا  $x[n]$ ) اعمال شود و خروجی  $y(t)$  (یا  $y[n]$ ) حاصل گردد، آن گاه اگر به این سیستم  $x(t-t_0)$  (یا  $x[n-n_0]$ ) اعمال شود، خروجی  $y(t-t_0)$  (یا  $y[n-n_0]$ ) خواهد شد.

مثال: سیستم  $y(t) = x^2(t)$  (مربع کننده) را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم سیگنال  $x(t-t_0)$  را به عنوان ورودی اعمال کنیم خواهیم داشت:

$$y_1(t) = z^2(t) = x^2(t-t_0) = y_1(t-t_0)$$

بنابراین سیستم فوق تغییرنایپذیر با زمان است.

تذکر: اگر زمان (یا متغیر مستقل) از آرگومان سیگنال خارج شود معمولاً سیستم تغییرپذیر با زمان می‌شود.

مثال: سیستم  $y[n] = nx[n]$  را در نظر بگیرید. این سیستم تغییرپذیر با زمان است زیرا متغیر  $n$  از آرگومان سیگنال  $x$  خارج شده است. می‌توان با یک مثال تغییرپذیر با زمان بودن این سیستم را نشان داد.

$$x_1[n] = \delta[n] \rightarrow y_1[n] = n\delta[n] = 0$$

$$x_2[n] = \delta[n-1] \rightarrow y_2[n] = n\delta[n-1] = \delta[n-1] \neq x_1[n-1]$$

تذکر: عملیاتی مانند فشردن، گستردن و وارون کردن یک سیگنال و هر تغییر روی متغیر مستقل (غیر از تبدیل  $t \rightarrow t-t_0$  یا  $n \rightarrow n-n_0$ ) معمولاً باعث می‌شود که سیستم مربوطه تغییرنایپذیر با زمان گردد. زیرا این قبیل عملیات مستقیماً روی شیفت سیگنال تأثیر دارند.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه  $y(t) = x(-t)$  را در نظر بگیرید. این سیستم تغییرناپذیر با زمان است. زیرا این سیستم یک سیستم وارون کننده سیگنال است. می‌توان تغییرپذیر بودن این سیستم را با مثال نقض نشان داد:

$$x_1(t) = \delta(t) \rightarrow y_1(t) = \delta(-t) = \delta(t)$$

$$x_2(t) = \delta(t-1) \rightarrow y_2(t) = \delta(-t-1) = \delta(t+1) \neq y_1(t-1)$$

مثال: سیستم‌های با روابط  $y[n] = \frac{x[n+1]}{x[n-1]}$  و  $y(t) = x^2(t-1)$ ،  $y[n] = 2x[n-1] + 2$ ،  $y(t) = \sin^2(x(t))$  همگی تغییرپذیر با

تغییرناپذیر با زمان هستند. زیرا متغیر مستقل از آرگومان سیگنال خارج نشده و همچنین روی متغیر مستقل تنها تبدیل  $t$  به  $t-t_0$  یا  $n-n_0$  به  $n$  انجام شده است.

مثال: سیستم‌های با روابط  $y[n] = x\left[-\frac{n}{2} + 1\right]$  و  $y(t) = x(\sin(t))$ ،  $y[n] = x[n^2]$ ،  $y(t) = x(2t+1)$  همگی تغییرپذیر با

زمان هستند. زیرا روی متغیر مستقل تبدیلاتی غیر از تبدیل  $t$  به  $n-n_0$  یا  $n$  به  $n-t_0$  یا  $n$  انجام گرفته و باعث تغییرپذیر با زمان شدن سیستم شده است.

تذکر: اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد و اگر یکی از ضابطه‌ها تغییرپذیر با زمان باشد آن‌گاه سیستم تغییرپذیر با زمان می‌شود. اما اگر کلیه ضابطه‌ها تغییرناپذیر با زمان باشند آن‌گاه در صورتی که شروط تابعی از زمان باشند معمولاً سیستم تغییرپذیر با زمان و اگر شروط تابعی از ورودی باشند معمولاً سیستم تغییرناپذیر با زمان می‌شود.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geq 0 \\ tx(t) & x(t) < 0 \end{cases}$  زیرا ضابطه  $t \cdot x(t)$  آن متغیر با زمان است.

مثال: سیستم گسسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \begin{cases} x^2[n] & n \geq 2 \\ x[n-1] & n < 2 \end{cases}$  تغییرپذیر با زمان است. زیرا شروط آن با زمان تغییر می‌کنند و در نتیجه پاسخ سیستم به  $x[n-n_0]$  برابر  $y[n-n_0]$  نمی‌شود.

مثال: سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y(t) = \begin{cases} 2x(t-1) & x(t) \geq 1 \\ \sin(x(t)) & x(t) < 1 \end{cases}$  تغییرناپذیر با زمان است. زیرا شروط آن فقط تابعی از ورودی است و در نتیجه پاسخ سیستم به  $x(t-t_0)$  برابر  $y(t-t_0)$  می‌شود.

تست نمونه - (سراسری ۸۵) سیستم  $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) < 0 \\ x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases}$  دارای کدام خواص زیر است؟

۱) تغییرپذیر با زمان - وارونپذیر

۲) تغییرپذیر با زمان - وارونپذیر

۱) تغییرپذیر با زمان - وارونپذیر

۲) تغییرپذیر با زمان - وارونپذیر

## پرس تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

هل، سیستم فوق تغییرناپذیر با زمان است. زیرا خاصیت‌های آن تغییرناپذیر با زمان و شروط تابعی از ورودی می‌باشد. از طرفی سیستم وارون ناپذیر است. زیرا به عنوان مثال پاسخ این سیستم به ورودی‌های  $x_1(t) = \delta(t)$  و  $x_2(t) = u(t)$  یکسان و برابر  $y(t) = -u(t)$  است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

و - سیستم‌های خطی و غیر خطی: یک سیستم را خطی می‌نامند اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

(۱) خاصیت همگنی: اگر پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t)$  برابر  $y(t)$  باشد آن‌گاه پاسخ سیستم فوق به ورودی  $\alpha x(t)$  یک اسکالر دلخواه مختلط است) برابر  $\alpha y(t)$  خواهد شد.

(۲) خاصیت جمع پذیری: اگر پاسخ این سیستم به ورودی  $x_1(t)$  برابر  $y_1(t)$  و پاسخ به ورودی  $x_2(t)$  برابر  $y_2(t)$  باشد، آن‌گاه پاسخ سیستم فوق به ورودی  $x_1(t) + x_2(t)$  برابر  $y_1(t) + y_2(t)$  خواهد شد.

تلکه، تعریف خطی بودن برای سیستم‌های گستته در زمان نیز مشابه سیستم‌های پیوسته در زمان است و باید دو خاصیت ذکر شده را داشته باشند.

تلکه، نتیجه دو خاصیت خطی بودن و همگنی برقرار بودن خاصیت جمع آثار (اصل بر هم نهی) در سیستم‌های خطی است. یعنی هر ترکیب خطی از ورودی‌ها مانند  $\sum_k \alpha_k x_k(t)$  همان ترکیب خطی از خروجی‌ها یعنی  $\sum_k \alpha_k y_k(t)$  را بوجود می‌آورد.

تلکه، یک نتیجه بدیهی از خاصیت همگنی صفر بودن پاسخ یک سیستم خطی به ورودی صفر، است. به عبارت دیگر اگر  $x(t) = 0$  (یا  $x[n] = 0$ ) باشد آن‌گاه  $y(t) = 0$  (یا  $y[n] = 0$ ) خواهد شد. بدیهی است که این شرط کافی نبوده و یک شرط لازم برای خطی بودن سیستم است.

مثال: سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = x^3(t)$  را در نظر بگیرید. بدیهی است که این سیستم غیر خطی است. به عنوان مثال این سیستم خاصیت همگنی را برآورده نمی‌سازد.

$$\text{if } x_2(t) = \alpha x_1(t) \Rightarrow y_2(t) = x_2^3(t) = \alpha^3 x_1^3(t) \neq \alpha y_1(t)$$

مثال: سیستم پیوسته در زمان  $y(t) = \cos(2t)x(t)$  یک سیستم خطی است برای اثبات اگر به این سیستم ورودی  $x_1(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$  داریم:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \cos(2t)x_1(t) = \cos(2t)(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) = \alpha_1 \cos(2t)x_1(t) + \alpha_2 \cos(2t)x_2(t) \\ &= \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \end{aligned}$$

مثال: سیستم گستته در زمان  $y[n] = \operatorname{Re}\{x[n]\}$  خطی نیست. زیرا اسکالر  $\alpha$  در حالت کلی ممکن است مختلط باشد. لذا سیستم خاصیت همگنی ندارد.

تلکه، یکی از مواردی که باعث غیرخطی شدن یک سیستم می‌شود وجود عدد ثابت یا یک سیگنال مشخص جمع شونده با ورودی است. وجود این عامل باعث می‌شود که پاسخ سیستم به ورودی صفر برابر صفر نشود و در نتیجه سیستم غیرخطی گردد.

**مثال:** سیستم‌های  $y(t) = x(t) + \sin(t)$  و  $y[n] = x[n-1] + n$  همگی غیرخطی هستند. زیرا باسخ آن‌ها به ورودی صفر برابر صفر نیست.

**تذکر:** اعمال یک تابع غیرخطی روی ورودی باعث غیرخطی شدن سیستم می‌گردد. در صورتی که اعمال تابع خطی روی متغیر مستقل باعث غیرخطی شدن سیستم نمی‌گردد.

**مثال:** سیستم‌های  $y(t) = \frac{x(t-1)}{x(t)}$  و  $y[n] = x^2[n] + x[n]$  همگی غیرخطی هستند. زیرا یک تابع غیرخطی روی ورودی اعمال شده است. در صورتی که سیستم‌های  $y(t) = \sin(x(t))$  و  $y[n] = x[n^2 - 1]$  به دلیل عدم اعمال تابع غیرخطی روی ورودی همگی سیستم‌های خطی می‌باشند.

**تذکر:** اگر رابطه بین خروجی و ورودی یک سیستم چند ضابطه‌ای باشد آن‌گاه اگر یکی از ضابطه‌ها غیرخطی باشد آن‌گاه سیستم غیرخطی می‌شود. اما اگر کلیه ضابطه‌ها خطی باشند آن‌گاه در صورتی که شروط تابعی از ورودی باشند معمولاً سیستم غیرخطی و اگر شروط فقط تابعی از زمان باشند معمولاً سیستم خطی می‌شود.

**مثال:** سیستم گستته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \begin{cases} x[n]+1 & n \geq 0 \\ x[n-1] & n < 0 \end{cases}$  غیرخطی است زیرا ضابطه  $x[n]+1$  آن غیرخطی است.

**مثال:** سیستم پیوسته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) \geq 1 \\ 2x(t+1) & x(t) < 1 \end{cases}$  غیرخطی است. زیرا شروط آن تابعی از ورودی می‌باشد.

**مثال:** سیستم گستته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \begin{cases} x[n]+x[n-1] & n \geq -1 \\ 2x[n+1] & n < -1 \end{cases}$  خطی است. زیرا کلیه ضابطه‌ها خطی و شروط نیز فقط به زمان بستگی دارند.

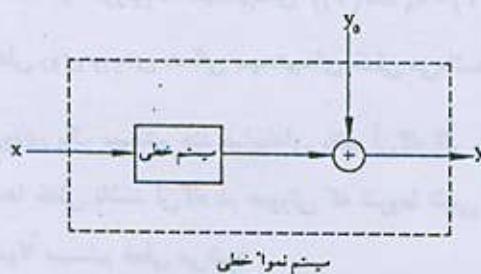
$$\text{ تست نمونه - (سراسری ۸۴) سیستم : } y(t) = \begin{cases} x(t) + y(t-1) & y(t-1) \leq 0 \\ x(t) - y(t-1) & y(t-1) > 0 \end{cases}$$

- (۱) خطی و عکس ناپذیر است.
- (۲) غیرخطی و عکس پذیر است.
- (۳) غیرخطی و عکس ناپذیر است.

**هل:** سیستم فوق غیرخطی است. زیرا شروط آن تابعی از خروجی و در نتیجه تابعی از ورودی می‌باشد. از طرفی سیستم وارون پذیر است و سیستم وارون آن  $|y(t-1)| + y(t) = x(t)$  می‌باشد. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

## تمزیه و تمدید سیستم‌ها

لذا، یک سیستم را نماؤ خطی می‌نامند هر گاه تفاضل پاسخ‌های سیستم به دو ورودی دلخواه یک تابع خطی از تفاضل دو ورودی آن باشد. به عبارت دیگر اگر پاسخ این سیستم به ورودی  $(t) x_1$  (یا  $[n] x_1$ ) برابر  $y_1$  (یا  $[n] y_1$ ) و پاسخ این سیستم به ورودی  $(t) x_2$  (یا  $[n] x_2$ ) برابر  $y_2$  (یا  $[n] y_2$ ) باشد، آن‌گاه  $y$  بر حسب  $x_1$  و  $x_2$  بر حسب  $y_1$  و  $y_2$  خطی نیستند. اما  $y = y_1 - y_2$  بر حسب  $\Delta x = x_2 - x_1$  یک تابع خطی است. می‌توان نشان داد خروجی هر سیستم نماؤ خطی را می‌توان به صورت مجموع خروجی یک سیستم خطی و یک سیگنال نوشت که این سیگنال پاسخ ورودی صفر سیستم نماؤ خطی است. این ترکیب در شکل (۲-۲) نشان داده شده است.



شکل ۲-۲ ساختار یک سیستم نماؤ خطی

تست نمونه - (آزاد ۸۱) کدام گزینه بیان درست ویژگی‌های سیستم  $y(t) = x(\sin(t))$  است؟

- ۱) ناپایدار و غیرعلی      ۲) بدون حافظه و بدون حافظه      ۳) غیرعلی و پایدار

هل :

سیستم فوق غیرعلی است زیرا به عنوان مثال داریم:

$$t = -\frac{\pi}{2} \rightarrow y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = x(-1)$$

از طرفی سیستم فوق پایدار است زیرا:

$$\text{if } |x(t)| \leq A < \infty \Rightarrow |x(\sin(t))| \leq A < \infty \Rightarrow |y(t)| \leq A < \infty$$

پس گزینه (۳) درست است.

تست دومونه - (آزاد ۸۱) رابطه ورودی - خروجی یک سیستم زمان پیوسته به صورت زیر است:

$$y(t) = T\{x(t)\} = \begin{cases} tx(t) & t < |x(t)| \\ x(-t) & t \geq |x(t)| \end{cases}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

- ۱) سیستم علی و پایدار است      ۲) سیستم غیرعلی و ناپایدار است      ۳) سیستم غیرعلی و پایدار است

حل:

ضابطه  $y(t) = tx(t)$  نمی‌تواند سیستم را غیرعلی کند. از طرفی ضابطه  $x(t) = -x(t)$  چون فقط به ازای  $t$  های مثبت صادق است. لذا این ضابطه نیز نمی‌تواند سیستم را غیرعلی کند. پس سیستم همواره علی است. از طرفی ضابطه  $x(t) = -tx(t)$  نمی‌تواند سیستم را ناپایدار کند. اما ضابطه  $x(t) = ty(t)$  به ازای  $t \rightarrow -\infty$  می‌تواند سیستم را ناپایدار کند. پس سیستم ناپایدار است.

لذا سیستم علی و ناپایدار است و در نتیجه گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۰) دو سیستم پیوسته داریم کدام گزینه نادرست است؟

$$1) y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-2) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad 2) y(t) = \begin{cases} x(t) + x(t-2) & x(t) \geq 0 \\ 0 & x(t) < 0 \end{cases}$$

(۱) هر دو سیستم خطی هستند

(۲) سیستم ۱ تغییرپذیر با زمان و سیستم ۲ تغییرناتپذیر با زمان است

(۳) هر دو سیستم سببی هستند

حل:

گزینه شماره (۱) نادرست است. زیرا سیستم ۲ خطی نیست. زیرا  $x(t)$  روی محور افقی رابطه  $y(t) = x(t)$  و  $x(t) = y(t)$  تاثیر دارد. در مورد گزینه‌های دیگر هر دو سیستم پایدار و هر دو سیستم علی هستند. زیرا ضابطه‌های ناپایدار و غیر علی کردن را ندارند. از طرفی گزینه (۴) نیز صحیح است. زیرا در سیستم ۱ که ضابطه‌ها با زمان تغییر می‌کنند، سیستم تغییرپذیر با زمان و در سیستم ۲ که ضابطه‌ها با ورودی تغییر می‌کنند، سیستم تغییرناتپذیر با زمان است. پس تنها گزینه (۱) نادرست است.

تذکر: در توابع چند ضابطه‌ای، هر گاه کلیه ضابطه‌ها خطی و تغییرناتپذیر با زمان باشند، آن گاه اگر مانند سیستم ۱ در تست فوق، ضابطه‌ها با  $t$  (یا  $n$ ) از یکدیگر متمایز گردند، سیستم معمولاً خطی و تغییرناتپذیر با زمان می‌شود. اما اگر مانند سیستم ۲ در تست فوق، ضابطه‌ها با  $x(t)$  (یا  $[n]$ ) از یکدیگر متمایز گردند، سیستم معمولاً غیرخطی و تغییرناتپذیر با زمان می‌شود.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = \begin{cases} t & t \leq x(t) \\ x(t) & t \geq x(t) \end{cases}$$

(۱) این سیستم با حافظه و ناپایدار است.

(۲) این سیستم بدون حافظه و ناپایدار است.

(۳) این سیستم با حافظه و پایدار است.

حل:

سیستم فوق بدون حافظه است. زیرا نه ضابطه‌ها و نه شروط هیچ کدام به آینده یا گذشته ورودی بستگی ندارند. از طرفی ضابطه  $y(t) = t$  به ازاء  $t \rightarrow -\infty$  می‌تواند خروجی را بی‌نهایت کند. لذا سیستم فوق پایدار نیست.

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

تست نمونه - ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y[n] = \begin{cases} x[n+1] & n \geq 0 \\ x[n] & n \leq -1 \end{cases}$$

- (۱) این سیستم علی و وارون پذیر است.  
 (۲) این سیستم غیرعلی و وارون ناپذیر است.  
 (۳) این سیستم علی و وارون ناپذیر است.

هل :

سیستم فوق به واسطه ضابطه  $y[n] = x[n+1]$  غیرعلی است. از طرفی با توجه به آن که نمونه صفرم ورودی ( $x[0]$ ) در خروجی ظاهر نمی‌شود بنابراین سیستم وارون ناپذیر است.  
 پس گزینه (۳) صحیح است.

تست نمونه - ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = e^t \{x(t)\}$$

- (۱) این سیستم خطی و تغییرنایذیر با زمان است.  
 (۲) این سیستم غیرخطی و تغییرنایذیر با زمان است.

هل :

با توجه به رابطه  $y(t) = e^t \{x(t)\} = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$   
 بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۰) در یک سیستم زمان گستته، خروجی سیستم  $[n]$  بر حسب ورودی سیستم  $[n]$   $x$  با رابطه زیر تعیین می‌گردد :

$$y[n] = \begin{cases} n & n \leq x[-n] \\ x[n] & n > x[-n] \end{cases}$$

پس در این صورت سیستم ..... است.

- (۱) علی و پایدار      (۲) غیرعلی و پایدار  
 (۳) علی و ناپایدار      (۴) غیرعلی و ناپایدار

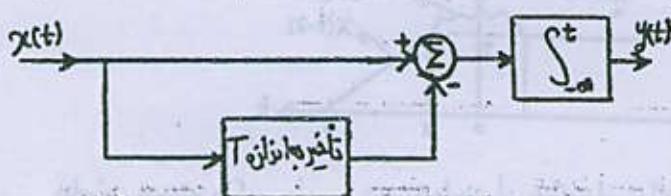
هل :

وجود  $-n$  در رابطه سیستم فوق باعث غیرعلی شدن سیستم به ازاء  $n < 0$  می‌گردد.  
 به عنوان مثال به ازاء  $n = -3$  داریم:

$$y[-3] = \begin{cases} -3 & -3 \leq x[3] \\ x[-3] & -3 > x[3] \end{cases}$$

که بدینهی است برای تعیین خروجی در  $n = -3$  نیاز به ورودی در  $n = 3$  است.  
 از طرفی ضابطه  $y[n] = x[n]$  باعث ناپایداری سیستم به ازاء  $n = -3$  می‌شود. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۴) سیستم داده شده در شکل :



- (۱) تغییرپذیر با زمان و پایدار است.
- (۲) تغییرپذیر با زمان و ناپایدار است.
- (۳) تغییرنایپذیر با زمان و پایدار است.
- (۴) تغییرنایپذیر با زمان و ناپایدار است.

حل :

با توجه به شکل داده شده داریم:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t (x(t') - x(t'-T)) dt'$$

برای بررسی تغییرنایپذیر بودن این سیستم، ورودی  $z(t) = x(t-t_0)$  را اعمال می‌کنیم:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t (z(t') - z(t'-T)) dt' = \int_{-\infty}^t (x(t'-t_0) - x(t'-t_0-T)) dt'$$

با تغییر متغیر  $t' - t_0 = t''$  داریم:

$$w(t) = \int_{-\infty}^{t-t_0} (x(t'') - x(t''-T)) dt'' = y(t-t_0)$$

پس سیستم فوق تغییرنایپذیر با زمان است.

از طرفی با توجه به آن که سیستم سطح زیر منحنی تفاضل ورودی و تاخیر یافته آن را حساب می‌کند، لذا پایدار نیز می‌باشد زیرا با فرض  $|x(t)| \leq A$ ، خروجی همواره محدود است. بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

دقت کنید که تست فوق را با تبدیل لاپلاس نیز می‌توان حل کرد که در قسمت‌های آتی به آن اشاره می‌گردد.

تست نمونه - (سراسری ۸۴) ضابطه بین ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  ی سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-2) & t \geq 2 \\ x(t^2) & -2 \leq t \leq 2 \\ x(t+2) & t < -2 \end{cases}$$



این سیستم ..... است.

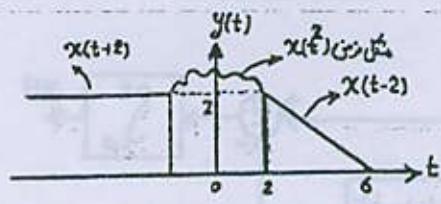
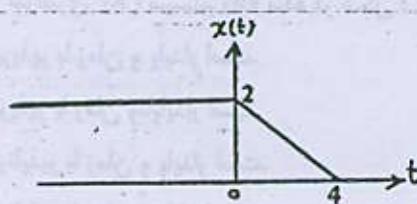
- (۱) خطی و معکوس‌پذیر
- (۲) غیرخطی و معکوس‌پذیر
- (۳) خطی و معکوس‌نایپذیر

حل :

سیستم فوق خطی است زیرا در ضابطه‌های آن هیچ‌گونه عملیات غیرخطی روی دامنه انجام نگرفته است. البته ادعای فوق را با اعمال ورودی  $x_1(t) + \alpha_1 x_2(t)$  به سیستم فوق و به دست آوردن پاسخ  $y_1(t) + \alpha_1 y_2(t)$  می‌توان اثبات کرد.

برای بررسی معکوس‌پذیری این سیستم به این نکته دقت کنید که ورودی با ضابطه‌های اول و سوم کاملاً در خروجی مشخص شده و برای تعیین ورودی از روی خروجی نیاز به ضابطه دوم نیست. این نکته در شکل فرضی صفحه بعد نشان داده شده است:

## تمثیله و تکمیل سیستمها



بنابراین سیستم معکوس‌بازیر و سیستم وارون آن عبارت است از:

$$x(t) = \begin{cases} y(t+2) & t \geq 0 \\ y(t-2) & t < 0 \end{cases}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست دهمه - (سراسری ۸۳) اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییرپذیر با زمان هم باشد) به تابع پله  $u(t-\alpha)$  را با  $y(t, \alpha)$  نمایش دهیم، پاسخ آن سیستم به تابع ضربه  $\delta(t-\alpha)$  چه خواهد بود؟

$$-\frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha) \quad (۴) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha) \quad (۵) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha) \quad (۶) \quad -\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha) \quad (۷)$$

حل :

آن تست را با دو روش حل می‌کنیم:

روش اول - از تعریف مشتق برای رابطه بین  $(\alpha(t-\alpha))$ ,  $u(t-\alpha)$  و  $\delta(t-\alpha)$  استفاده می‌کنیم:

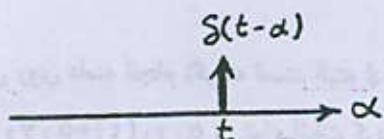
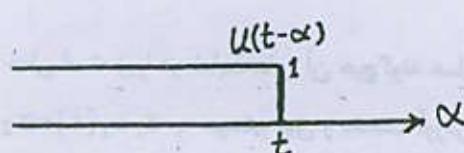
$$\delta(t-\alpha) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{u(t-\alpha) - u(t-\Delta-\alpha)}{\Delta}$$

پاسخ سیستم به ورودی  $u(t-\alpha)$  برابر  $g(t, \alpha)$  است. بنابراین پاسخ سیستم به ورودی  $u(t-\Delta-\alpha)$  برابر  $g(t, \Delta+\alpha)$  می‌باشد و با توجه به خطی بودن سیستم داریم:

$$\delta(t-\alpha) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{g(t, \alpha) - g(t, \Delta+\alpha)}{\Delta} = -\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha)$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

روش دوم - سیستم فوق اگرچه نسبت به زمان متغیر است اما نسبت به  $\alpha$  تغییرپذیر نیست. بنابراین اگر  $u(t-\alpha)$  و  $\delta(t-\alpha)$  نسبت به  $\alpha$  رسم شوند، شکل‌های زیر به دست می‌آینند:



از شکل‌های فوق به دست می‌آوریم  $\delta(t-\alpha) = -\frac{\partial u(t-\alpha)}{\partial \alpha}$  و بنابراین با توجه به آن که سیستم خطی و نسبت به متغیر  $\alpha$

تغییرناپذیر است پس پاسخ سیستم به  $\delta(t-\alpha)$  برابر  $-\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha)$  است. پس گزینه (۱) صحیح است.

## خودآزمائی اول

۱ - قدرت سیگنال زیر چقدر است؟

$$x(t) = \begin{cases} 3 & t \leq -5 \\ 5 & -5 < t < 10 \\ 2 & 10 \leq t \end{cases}$$

۳ (۴)

۶.۵ (۳)

۵ (۲)

۴.۵ (۱)

۲ - (سراسری ۸۵) توان (P) و انرژی (E) سیگنال  $x[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n-2m|}$  به ترتیب عبارتند از:

$$E = +\infty, P = \frac{41}{18} (۱)$$

$$E = +\infty, P = 0 (۲)$$

$$E = +\infty, P = +\infty (۳)$$

$$E = \frac{64}{9}, P = 0 (۴)$$

۳ - (سراسری ۸۵) اگر  $f(t)$  سیگنالی به عرض T و ماکزیممی واقع بر  $t=2$  باشد، در آن صورت عرض و محل ماکزیمم  $f(\tau-n)(\tau > 0)$  عبارتند از:

$$\frac{n}{\tau}, \frac{T}{\tau}-n (۱)$$

$$\frac{2}{\tau}, \frac{T}{\tau} (۲)$$

$$\frac{n-2}{\tau}, \frac{T}{\tau}+n (۳)$$

$$\frac{n+2}{\tau}, \frac{T}{\tau} (۴)$$

۴ - (سراسری ۸۱) معکوس سیستم  $y(t) = \frac{1}{2}x(4-2t)$  در صورتی که معکوس پذیر باشد، کدام است؟

$$y(t) = x(t-2) (۲)$$

$$y(t) = x(2-t) (۱)$$

$$y(t) = 2x\left(-2 - \frac{t}{2}\right) (۴)$$

$$y(t) = 2x\left(2 - \frac{t}{2}\right) (۳)$$

۵ - (سراسری ۸۲) سیستم زمان پیوسته تعریف شده با رابطه  $y(t) = x\left(\frac{t}{2}\right) + x(t-1)$  برای همه t دارای کدام خواص است؟

(۱) خطی، متغیر با زمان، غیر علی

(۲) غیرخطی، متغیر با زمان، غیر علی

(۳) خطی، نامتغیر با زمان، غیر علی

(۴) غیرخطی، نامتغیر با زمان، علی

## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها

۶ - (سراسری ۸۰) در یک سیستم زمان گستته، خروجی سیستم  $[n] \times [n]$  با حسب ورودی سیستم  $[n] \times [n]$  با رابطه زیر تعیین می‌گردد:

$$y[n] = \begin{cases} n & n \leq x[-n] \\ x[n] & n > x[-n] \end{cases}$$

پس در این صورت سیستم ..... است.

(۴) غیرعلی و ناپایدار

(۳) علی و ناپایدار

(۲) غیرعلی و پایدار

(۱) علی و پایدار

۷ - کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

(۱) سیستم  $\{y[n]\} = \text{Re}\{x[n]\}$  ی خطی است.

(۲) سیستم  $[y[n]] = x[n]x[n-1]$  وارون پذیر است.

(۳) سیستم  $[y[n]] = x[1-n]$  بدون حافظه است.

(۴) سیستم  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} x[k]$  وارون پذیر است.

۸ - (آزاد ۸۲) کدام یک از گزاره‌های زیر ناصحیح است؟

(۱) سیستم  $\tau y(t) = \int_{-\infty}^{t-1} e^{(t-\tau)} x(\tau) d\tau$  تغییرپذیر با زمان و پایدار است.

(۲) سیستم  $y(t) = e^{jx(t)}$  علی و پایدار است.

(۳) سیستم  $y[n] = nx[n]$  تغییرپذیر با زمان و ناپایدار است.

(۴) سیستم  $y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n]$  وارون پذیر است.

۹ - (آزاد ۸۰) کدام یک از جملات زیر درست است؟

(۱) سیستم  $y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n=2k \\ 0 & n \neq 2k \end{cases}$  یک سیستم سبیی است.

(۲) سیستم  $y[n] = 2x[n] + x[2n-3]$  یک سیستم خطی است.

(۳) سیستم  $y[n] = (n+1)x[n]$  یک سیستم حافظه‌دار است.

(۴) سیستم  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  یک سیستم پایدار است.

۱۰ - کدام یک از گزاره‌های زیر درست است؟

(۱) اگر از یک سیگنال پیوسته در زمان متناوب نمونه‌برداری شود، سیگنال گستته در زمان حاصل لزوماً متناوب است.

(۲) اگر یک سیستم علی معکوس پذیر باشد، سیستم معکوس آن نیز لزوماً علی است.

(۳) اتصال سری دو سیستم غیرخطی، لزوماً یک سیستم غیرخطی است.

(۴) اگر یک سیستم غیرعلی باشد، لزوماً این سیستم باحافظه است.

۱۱ - کدام یک از گزاره‌های زیر نادرست است؟

- (۱) یک سیستم گستته در زمان علی است اگر و فقط اگر بدون حافظه باشد.

$$(2) \text{ سیستم با رابطه } y(t) = \frac{dx}{dt} \text{ خطی و باحافظه است.}$$

- (۳) اگر یک سیستم خطی باشد، پاسخ آن به ورودی صفر، برابر صفر می‌باشد.

- (۴) ورودی یک سیستم تغییرناپذیر با زمان متناوب باشد، خروجی آن نیز لزوماً متناوب خواهد بود.

۱۲ - (آزاد ۸۳) کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

$$(1) \text{ سیستم } y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + x[n] \text{ پایدار است.}$$

$$(2) \text{ سیستم } y(t) = x(\sin(t)) \text{ خطی و علی است.}$$

$$(3) \text{ سیستم } y(t) = \int_{-\infty}^{2t} e^{(t-\tau)} x(\tau) d\tau \text{ تغییرناپذیر با زمان و پایدار است.}$$

$$(4) \text{ سیستم } y(t) = x(\sin(t)) \text{ خطی و غیرعلی است.}$$

۱۳ - (سراسری ۸۲) سیستم زمان گستته‌ای با رابطه  $y[n] = \begin{cases} x[n] + c & n \geq n_0 \\ 0 & n < n_0 \end{cases}$  می‌باشد در

موردن این سیستم کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) خطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان

- (۲) خطی، دارای حافظه، علی و متغیر با زمان

- (۳) غیر خطی، دارای حافظه، علی و نامتغیر با زمان

- (۴) غیرخطی، بدون حافظه، علی و متغیر با زمان

۱۴ - (آزاد ۷۹) ضابطه بین ورودی و خروجی سیستمی به صورت زیر است. گزینه صحیح را انتخاب کنید.

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha} x(\alpha-t) d\alpha$$

- (۱) این سیستم پایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

- (۲) این سیستم ناپایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

- (۳) این سیستم پایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

- (۴) این سیستم ناپایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

۱۵ - (آزاد ۷۹) پاسخ یک سیستم زمان گستته خطی به ورودی  $x[n] = \delta[n-k]$ ، یعنی ورودی ضربه واحد اعمال شده در محل  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{به صورت } y[n] = \begin{cases} 1 & |n| = 0 \\ 0 & |n| \neq 0 \end{cases} \text{ می‌باشد. پاسخ این سیستم به یک ورودی دلخواه } x[n] \text{ از چه ضابطه‌ای پیروی می‌کند؟}$$

$$y[n] = x[-1] + x[0] + x[1] \quad (2)$$

$$y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n+1] \quad (1)$$

$$y[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i] \{ \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n+1] \} \quad (4)$$

$$y[n] = x[n] \{ \delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n+1] \} \quad (3)$$

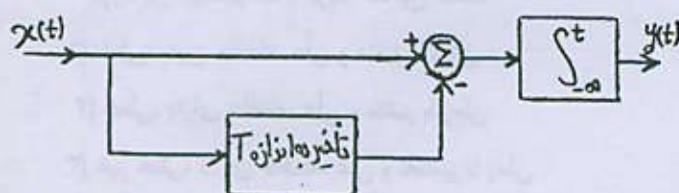
۱۶ - (سراسری ۸۴) سیستم پیوسته زمان با توصیف ورودی  $(t)x(t)$  و خروجی  $y(t)$  به فرم  $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$  را در نظر بگیرید. این سیستم:

- ۱) تغییرنایذیر با زمان و معکوسنایذیر است.
- ۲) تغییرنایذیر با زمان و معکوسنایذیر است
- ۳) تغییرنایذیر با زمان و معکوسنایذیر است.
- ۴) تغییرنایذیر با زمان و معکوسنایذیر است.

۱۷ - (سراسری ۸۰) سیستم S با توصیف ورودی - خروجی  $y(t) = \frac{\sin(x(t) + 2t)}{x(t-1)}$  کدام دسته از خواص زیر را دارد؟

- ۱) غیرعلی، تغییرنایذیر با زمان، نایابدار
- ۲) علی، تغییرنایذیر با زمان، پایدار
- ۳) علی، تغییرنایذیر با زمان، نایابdar
- ۴) علی، تغییرنایذیر با زمان، پایدار

۱۸ - (سراسری ۸۴) سیستم داده شده در شکل:



۱۹ - (سراسری ۸۳) سیستم گسته توصیف شده با معادله  $y[n] = a^{x[n]}$  و  $a > 1$  را دریم. در مورد این سیستم کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

- ۱) این سیستم غیرخطی، غیرعلی و پایدار است.
- ۲) این سیستم خطی، با حافظه و نایابدار است.
- ۳) این سیستم تغییرنایذیر با زمان، علی و نایابدار است.
- ۴) این سیستم تغییرنایذیر با زمان، بیحافظه و پایدار است.

۲۰ - (سراسری ۸۴) ضابطه بین ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  سیستمی به صورت زیر است:

$$y(t) = \begin{cases} x(t-2) & t \geq 2 \\ x(t^2) & -2 \leq t \leq 2 \\ x(t+2) & t < -2 \end{cases}$$

این سیستم ..... است.

- ۱) خطی و معکوسنایذیر
- ۲) غیرخطی و معکوسنایذیر
- ۳) خطی و معکوسنایذیر
- ۴) غیرخطی و معکوسنایذیر

۲۱ - (سراسری ۸۳) رابطه ورودی و خروجی یک سیستم پیوسته به صورت :

$$y(t) = \begin{cases} \frac{x(t)}{|x(t)|} & x(t) \neq 0 \\ 0 & x(t) = 0 \end{cases}$$

- (۱) خطی و تغییرنپذیر با زمان است.
- (۲) خطی و تغییرنپذیر با زمان است.
- (۳) غیرخطی و تغییرنپذیر با زمان است.
- (۴) غیرخطی و تغییرنپذیر با زمان است.

۲۲ - (سراسری ۸۴) سیستم :

$$y(t) = \begin{cases} x(t) + y(t-1) & y(t-1) \leq 0 \\ x(t) - y(t-1) & y(t-1) > 0 \end{cases}$$

- (۱) خطی و عکس‌نپذیر است.
- (۲) غیرخطی و عکس‌نپذیر است.
- (۳) خطی و عکس‌نپذیر است.
- (۴) غیرخطی و عکس‌نپذیر است.

۲۳ - (سراسری ۸۳) اگر پاسخ یک سیستم خطی (که می‌تواند تغییرنپذیر با زمان هم باشد) به تابع پله  $u(t-\alpha)$  را با  $g(t, \alpha)$  نمایش دهیم، پاسخ آن سیستم به تابع ضربه  $\delta(t-\alpha)$  چه خواهد بود؟

$$-\frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha) \quad (۴) \quad \frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha) \quad (۳) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, \alpha) \quad (۲) \quad -\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, \alpha) \quad (۱)$$

۲۴ - (سراسری ۸۰) پاسخ یک سیستم خطی به ورودی  $x_1(t) = u(t-\tau)$  (پله واحد اعمال شده در لحظه  $\tau \in \mathbb{R}$ ) به صورت  $y_1(t) = u(t+\tau)$  است. پاسخ  $y_2(t) = u(t-\tau)$  این سیستم به ضربه واحد اعمال شده در لحظه  $\tau$  یعنی  $\delta(t-\tau)$  چیست؟

$$-\delta(t+\tau) \quad (۲) \quad \delta(t-\tau) \quad (۱)$$

$$\begin{cases} \delta(t+\tau) & \tau < 0 \\ -\delta(t+\tau) & \tau > 0 \end{cases} \quad (۴) \quad \begin{cases} \delta(t-\tau) & \tau > 0 \\ -\delta(t-\tau) & \tau < 0 \end{cases} \quad (۳)$$

۲۵ - (سراسری ۸۵) پاسخ یک سیستم زمان‌گسته خطی (که لزوماً LTI نیست) به ورودی  $x_1[n] = u[n-m]$  برابر  $y_1[n] = (-1)^n$  می‌باشد و این خاصیت به ازای جمع مقادیر صحیح  $m \in \mathbb{Z}$  وجود دارد. پاسخ این سیستم به ورودی  $x_2[n] = \delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]$  چه خواهد بود؟

$$y_2[n] = (-1)^n + 1 \quad (۴) \quad y_2[n] = (-1)^n - 1 \quad (۳) \quad y_2[n] = 4 \quad (۲) \quad y_2[n] = 0 \quad (۱)$$

۲۶ - (سراسری ۸۴) رابطه ورودی - خروجی یک سیستم گستته به صورت زیر می‌باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم غلط می‌باشد.  
(منظور از  $n \bmod 27$  باقیمانده مثبت تقسیم عدد  $n$  بر عدد صحیح 27 می‌باشد.)

$$y[n] = x[n \bmod 27]$$

- (۱) سیستم علی است.
- (۲) سیستم خطی است.
- (۳) سیستم معکوس‌نپذیر است.
- (۴) سیستم تغییرنپذیر با زمان است.

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

۲۷ - (سراسری ۸۵) با در نظر گرفتن سیستم‌های داده شده زیر:

$$y[n] = \sum_{k=n}^{n+6} x[k] \quad \text{سیستم ۲:} \quad \text{و} \quad y[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right] & n \text{ زوج} \\ 0 & n \text{ فرد} \end{cases} \quad \text{سیستم ۱:}$$

۱) سیستم ۱ عکس‌پذیر و سیستم ۲ تغییرپذیر با زمان است.

۲) سیستم ۱ عکس‌نایپذیر و سیستم ۲ تغییرنایپذیر با زمان است.

۳) سیستم ۱ عکس‌پذیر و سیستم ۲ تغییرنایپذیر با زمان است.

۴) سیستم ۱ عکس‌نایپذیر و سیستم ۲ تغییرپذیر با زمان است.

$$28 - (\text{سراسری ۸۵}) \text{ سیستم } y(t) = \begin{cases} x(t) & x(t) < 0 \\ x(t-2) & x(t) \geq 0 \end{cases} \quad t \text{ دارای کدام خواص زیر است?} \quad \times \times$$

۱) تغییرپذیر با زمان - وارون‌پذیر

۲) تغییرنایپذیر با زمان - وارون‌نایپذیر

## یادداشت

نحوه این مقاله

۱۵/۰۲/۰۷-۱

۰۹/۰۲/۰۸-۲

۳- آنچه از فرمایی انت در متن مذکور است

۴- خوش شود

۵- این مسأله از آرگان خارج شود

۶- نیز در کسری دارویی

۷- شروع تابع از زیر

۸- مسأله از ووکی بین

۹- این مسأله از ووکی ۱

۱۰- این مسأله از ووکی ۲

۱۱- وجودی علایق ۱

۱۲- کمالیت از خود و خودی

۱۳- شروع تابع از ووکی بین

### ۳- سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان پیوسته در زمان - انتگرال کانولوشن

در بخش قبل برخی خواص اساسی سیستم‌ها معرفی گردیدند. از میان این خواص دو خاصیت خطی و تغییرناپذیر با زمان بودن نقش مهمی در تحلیل سیگنال و سیستم دارند. دلیل آن است که اولاً تحلیل سیستم‌های LTI ساده‌تر از سیستم‌های غیر LTI است و ابزار قوی برای تحلیل آن‌ها وجود دارد. ثانیاً بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان به صورت سیستم‌های LTI مدل کرد. یکی از مهم‌ترین این ابزار قضیه کانولوشن می‌باشد که در سیستم‌های پیوسته در زمان به صورت انتگرال کانولوشن نمود پیدا می‌کند. در این بخش به بررسی انتگرال کانولوشن و خواص آن در این سیستم‌ها می‌پردازیم.

#### ۱-۳- انتگرال کانولوشن

یکی از خواص مهم تابع ضربه، خاصیت غربالی آن است. برای تابع ضربه داریم:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

این رابطه را می‌توان به شکل دیگری تفسیر کرد. رابطه فوق نشان می‌دهد که هر سیگنال دلخواه مانند  $x(t)$  را می‌توان در فضای بینهایت بعدی بر حسب ضربه واحد و شیفت‌یافته‌های آن نوشت. اگر سیگنال  $x(t)$  به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h(t)$  اعمال شود به راحتی می‌توان نشان داد که خروجی این سیستم از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t-\tau) d\tau$$

معادله فوق را انتگرال کانولوشن می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$y(t) = x(t) * h(t)$$

انتگرال کانولوشن نمایش خروجی یک سیستم LTI بر حسب ورودی و پاسخ ضربه آن می‌باشد و نشان می‌دهد که برای یک سیستم LTI می‌توان از روی پاسخ ضربه و ورودی آن، خروجی را تعیین کرد. روش محاسبه انتگرال کانولوشن ساده و به صورت زیر است:

(۱) ابتدا تغییر متغیر  $\tau$  به  $\tau - t$  می‌دهیم تا  $x(\tau)$  و  $h(\tau)$  بدست آیند.

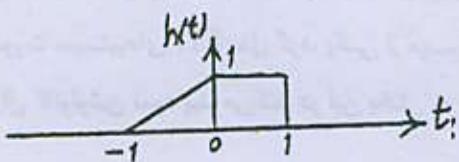
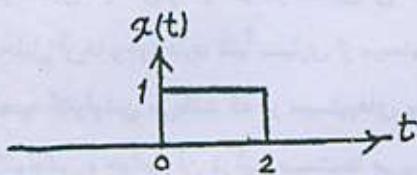
(۲) یکی از دو سیگنال را ثابت نگه داشته و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم. در این مرحله  $x(\tau)$  و  $h(-\tau)$  (یا  $h(\tau)$  و  $x(-\tau)$ ) بدست می‌آیند.

(۳) سیگنال معکوس شده را به اندازه  $|t|$  به سمت راست به ازای  $t > 0$  و به سمت چپ به ازای  $t < 0$  شیفت داده تا سیگنال‌های  $x(\tau)$  و  $h(\tau - t)$  (یا  $h(\tau)$  و  $x(\tau - t)$ ) حاصل شوند.

(۴)  $t$  را از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر داده و با انتگرالگیری از حاصلضرب  $x(\tau) h(\tau - t)$  (یا  $x(\tau) h(\tau)$ ) مقدار  $y(t)$  را به ازاء تمام  $t$ ‌ها بدست می‌آوریم.

## تمثیله و تحلیل سیستمها

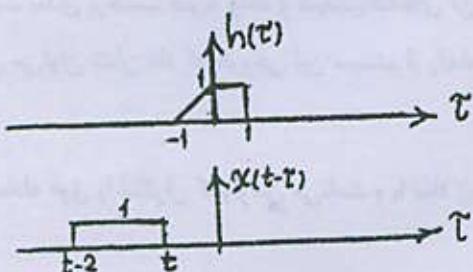
مثال: فرض کنید پاسخ ضربه  $h(t)$  و ورودی یک سیستم LTI  $(x(t))$  در شکل زیر نشان داده شده‌اند. پاسخ  $y(t)$  این سیستم را از طریق انتگرال کانولوشن بدست آورید.



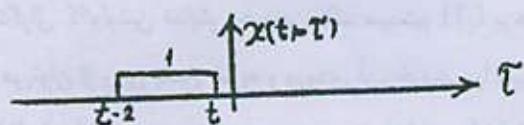
هل: سیگنال  $h(t)$  را ثابت نگه داشته و  $x(t)$  را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط این سیگنال‌ها و وضعیت‌های مختلف در زیر نشان داده شده‌اند.

$$\begin{aligned} x(t-\tau) &= 1 && \text{رابطه I} \\ t-2 < \tau < t \end{aligned}$$

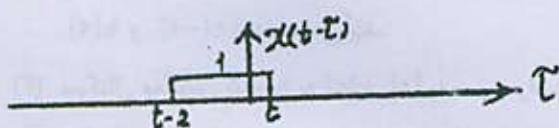
$$h(\tau) = \begin{cases} 1+\tau & 1 < \tau < 0 \rightarrow \\ 1 & 0 < \tau < 1 \rightarrow \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{رابطه II} \\ \text{رابطه III} \end{array}$$



$$x(t-\tau) \quad \text{با II و III تلاقی ندارد} \quad I: t \leq -1 \quad : \quad y(t) = 0$$

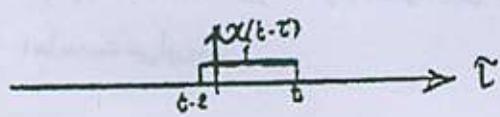


$$x(t+\tau) \quad I: -1 < t \leq 0 \quad \text{در حال ورود به II است.} \quad y(t) = \int_{-1}^t (1+\tau) d\tau$$



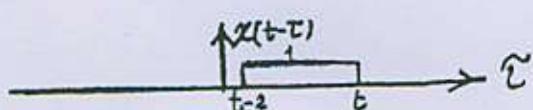
$$0 < t \leq 1 \quad : \quad y(t) = \int_{-1}^0 (1+\tau) d\tau + \int_0^t d\tau$$

I در حال ورود به III است و II کاملاً درون I است.



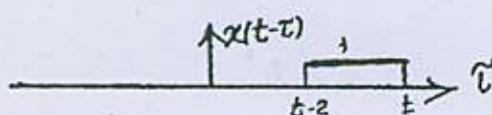
$$1 < t \leq 2 \quad : \quad y(t) = \int_{-1}^0 (1+\tau) d\tau + \int_0^1 d\tau$$

I در حال خروج از II است و III کاملاً درون I است.



$$2 < t \leq 3 \quad : \quad y(t) = \int_{-1}^1 d\tau$$

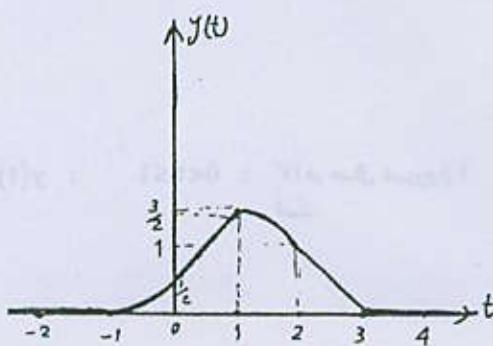
I در حال خروج از II است.



III : I با II و III تلاقی ندارد.  $y(t)=0$

با محاسبه انتگرال‌های فوق خواهیم داشت:

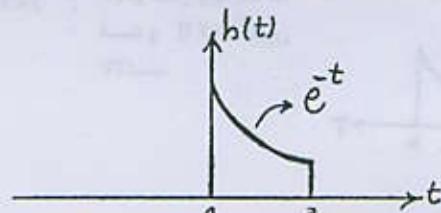
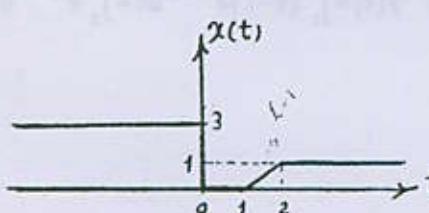
$$y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq -1 \\ \frac{t^2}{2} + t + \frac{1}{2} & -1 < t \leq 0 \\ \frac{1}{2} & 0 < t \leq 1 \\ -\frac{t^2}{2} + t + 1 & 1 < t \leq 2 \\ 3-t & 2 < t \leq 3 \\ 0 & 3 < t \end{cases}$$



تذکر: ماهیت انتگرال کانولوشن نشان‌دهنده پیوسته بودن سیگنال  $(t)x(t)$  و  $(t)h(t)$  فاقد توابع ویژه مانند ضربه باشند، سیگنال  $(t)y$  یک تابع پیوسته است.

تذکر: ملاحظه کنید که  $x(t)$  در خارج از فاصله  $[0, 2]$  و  $h(t)$  در خارج از فاصله  $[-1, 1]$  متعدد با صفر می‌باشند. بنابراین  $(t)y$  در خارج از فاصله  $[0+(-1), 1+2]$  متعدد با صفر شده است. این خاصیت یکی از خواص مهم انتگرال کانولوشن است که در ادامه بررسی خواهد شد.

مثال: با فرض آن که  $x(t)$  و  $h(t)$  مطابق شکل‌های زیر باشند، پاسخ  $(t)y$  را بدست آورید.



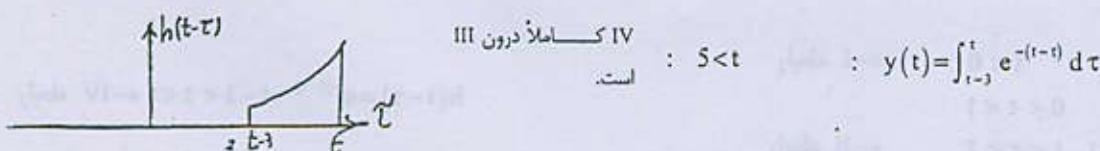
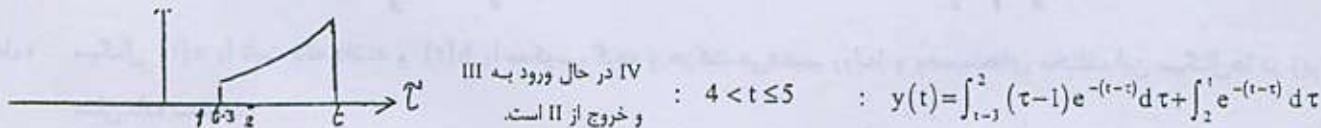
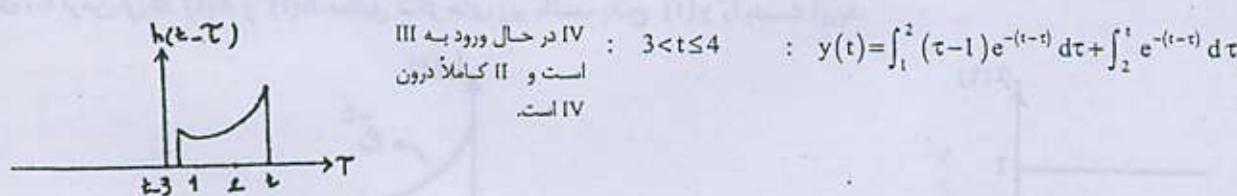
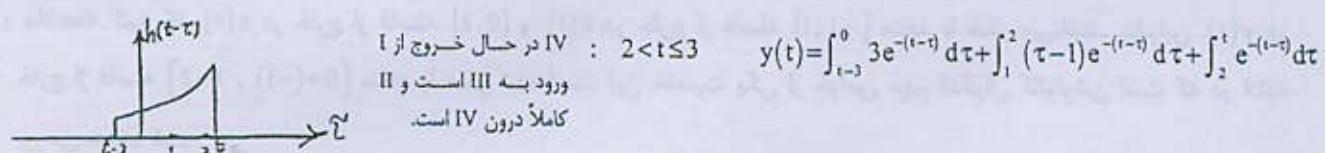
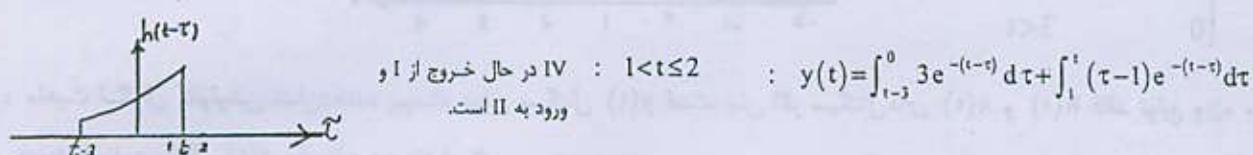
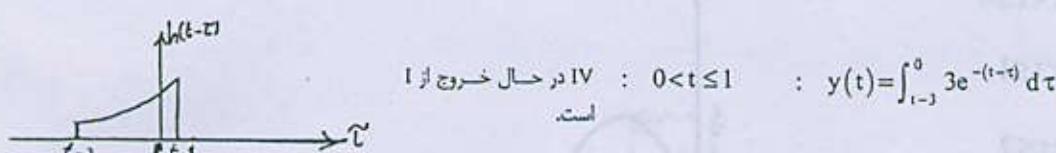
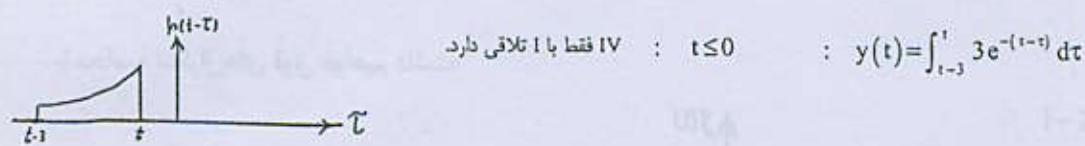
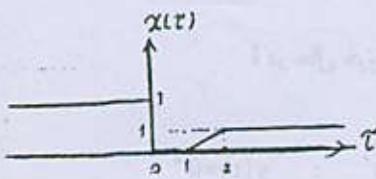
مثلاً: سیگنال  $x(t)$  را ثابت نگه داشته و  $h(t)$  را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط و وضعیت‌های مختلف این سیگنال‌ها در زیر نشان داده شده‌اند.

$$x(\tau) = \begin{cases} 3 & \tau < 0 \\ 0 & 0 < \tau < 1 \\ \tau - 1 & 1 < \tau < 2 \\ 1 & \tau > 2 \end{cases}$$

رابطه I ←  
رابطه II ←  
رابطه III ←

$$h(t-\tau) = e^{-(t-\tau)} \quad t-3 < \tau < t \leftarrow \text{IV}$$

## تمایه و تملیل سیستم‌ها



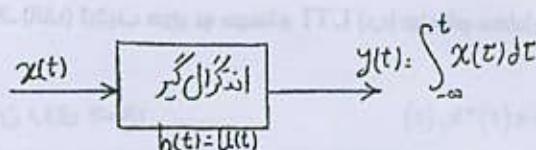
تذکر: تابع ضربه در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

$$x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0) \Rightarrow x(t) * \delta(t) = x(t)$$

تذکر: تابع پله در اپراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

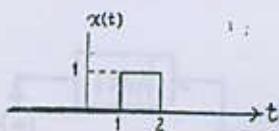
$$x(t) * u(t-t_0) = \int_{-\infty}^{t-t_0} x(\tau) d\tau \Rightarrow x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

تذکر: با توجه به رابطه‌های بالا می‌توان نتیجه گرفت پاسخ ضربه یک سیستم انتگرال‌گیر تابع پله واحد می‌باشد.

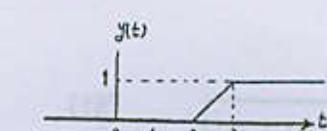


شکل ۲-۱- پاسخ ضربه انتگرال‌گیر برابر پله واحد است.

تست نمونه - (سراسری ۸۵) ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است. پاسخ ضربه سیستم چیست؟



$$\delta(t-1) - \delta(t-2) \quad (۱)$$



$$u(t-1) - u(t-2) \quad (۲)$$

$$u(t-2) \quad (۳)$$

$$u(t-1) \quad (۴)$$

حل: سیستم فوق علاوه بر انتگرال‌گیری از ورودی، یک واحد نیز آن را به سمت راست شیفت داده است. بنابراین پاسخ ضربه آن  $u(t-1) u(t-2)$  است و گزینه (۱) صحیح است.

### ۲-۳- خواص انتگرال کانولوشن

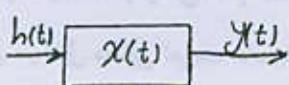
در این بخش برخی از خواص مهم انتگرال کانولوشن معرفی و نتایج آن‌ها بررسی می‌گردد.

(۱) خاصیت عرض کانولوشن:

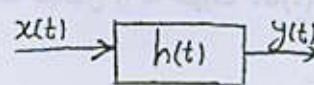
اگر  $x(t)$  در خارج از فاصله  $[a_1, b_1]$  و  $h(t)$  در خارج از فاصله  $[a_2, b_2]$  متعدد با صفر باشند، آنگاه  $y(t) = x(t) * h(t) = 0$  در خارج از فاصله  $[a_1 + a_2, b_1 + b_2]$  متعدد با صفر است.

$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$  خاصیت جابجایی:

تذکر: خروجی‌های دو سیستم LTI نشان داده شده در شکل (۲-۳) با یکدیگر برابر می‌باشند. به عبارت دیگر می‌توان جای پاسخ ضربه و ورودی را با یکدیگر تعویض کرد.



(ب)



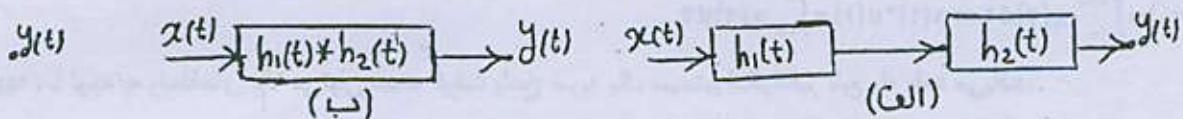
(الف)

شکل ۲-۲- دو شکل نشان داده شده در (الف) و (ب) معادل می‌باشند

$$x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$$

(۳) خاصیت شرکت‌پذیری:

نتیجه: دو سیستم LTI سری با پاسخ ضربه‌های  $(h_1(t) \text{ و } h_2(t))$  را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $(h_1(t) * h_2(t))$  (شکل ۳-۳-ب) تبدیل کرد.

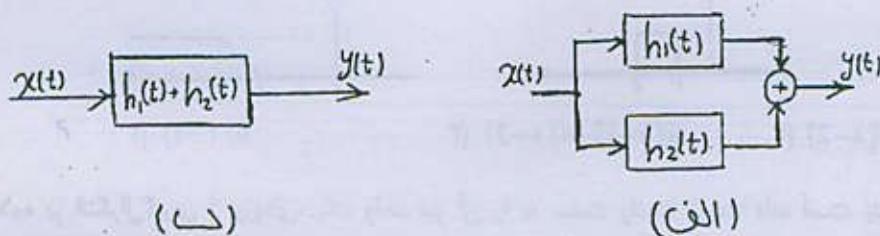


شکل ۳-۳-۳. (الف) ترکیب سری دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

(۴) خاصیت توزیع‌پذیری کانولوشن روی جمع:

نتیجه: دو سیستم LTI موازی با پاسخ‌های ضربه  $(h_1(t) \text{ و } h_2(t))$  را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $(h_1(t) + h_2(t))$  (شکل ۳-۳-ب) تبدیل کرد.



شکل ۳-۳-۴. (الف) ترکیب موازی دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

$$\text{if } y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = x(t) * \frac{dh(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} * h(t)$$

(۵) خاصیت مشتق کانولوشن:

نتیجه: اگر از ورودی یک سیستم LTI مشتق گرفته شود، آنگاه از خروجی نیز مشتق گرفته خواهد شد. به عبارت دیگر اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی  $x(t)$  برابر  $y(t)$  باشد، آنگاه پاسخ آن سیستم به ورودی  $\frac{dx}{dt}$  برابر  $\frac{dy}{dt}$  خواهد بود.

(۶) خاصیت سطح زیرمنحنی کانولوشن: اگر سطح زیر منحنی یک سیگنال مانند  $x(t)$  را با  $A_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt$  تعریف کنیم آنگاه:  
به عبارت دیگر سطح زیر منحنی حاصل کانولوشن برابر است با حاصلضرب سطوح زیرمنحنی سیگنال‌های کانولو شده.

(۷) خاصیت گشتاور مرتبه اول کانولوشن: اگر گشتاور مرتبه اول یک سیگنال را به صورت  $m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} t x(t) dt$  تعریف کنیم و نیز سطح زیر منحنی این سیگنال مطابق تعریف خاصیت (۶) باشد، آنگاه:  
 $A_y = m_y = m_x A_h + m_h A_x$

به عبارت دیگر گشتاور مرتبه اول حاصل کانولوشن برابر است با مجموع حاصلضرب سطح یکی از سیگنال‌های کانولو شده در گشتاور مرتبه اول دیگری.

(۸) خاصیت مرکز نقل کانولوشن: اگر مرکز نقل یک سیگنال را به صورت  $\frac{m_x}{A_y} = \eta_x$  تعریف کنیم که  $m_x$  و  $A_y$  به ترتیب گشتاور مرتبه اول و سطح زیرمنحنی این سیگنال باشند، آنگاه:

$$\text{if } y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow \eta_y = \eta_x + \eta_h$$

به عبارت دیگر مرکز نقل حاصل کانولوشن برابر است با مجموع مرکز نقل سیگنال‌های کانولو شده.

تست نمونه - (سراسری ۸۱) سطح زیر منحنی  $y(t)$  به صورت  $A_y = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt$  تعریف می‌شود اگر رابطه ورودی و خروجی یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان  $x(t) * h(t) = y(t)$  باشد که  $x(t)$  ورودی،  $y(t)$  خروجی و  $h(t)$  پاسخ ضربه آن است، سطح زیر منحنی سیگنال خروجی یعنی  $A_y$  کدام است؟

$$A_y = A_x A_h \quad (2)$$

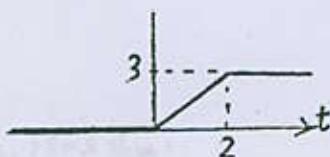
$$A_y = A_x + A_h \quad (1)$$

$$(4) \text{ رابطه مشخصی بین } A_y, A_x \text{ و } A_h \text{ وجود ندارد.}$$

$$A_y = A_x * A_h \quad (3)$$

هل: با توجه به خاصیت (۶) انتگرال کانولوشن گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تست نمونه - (ازادی ۷۹) در شکل رو به رو پاسخ پله یک سیستم LTI نشان داده شده است. اگر به سیستم فوق ورودی  $x(t) = \begin{cases} 0 & |t| < 1 \\ 1 & |t| \geq 1 \end{cases}$  را اعمال کنیم، خروجی سیستم در لحظه  $t=0$  چقدر خواهد بود؟



$$3 \quad (4)$$

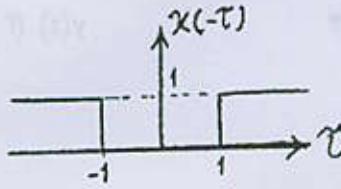
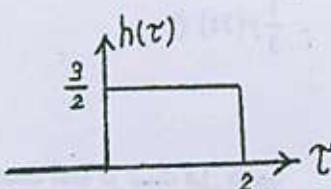
$$2.25 \quad (3)$$

$$1.5 \quad (2)$$

هل:

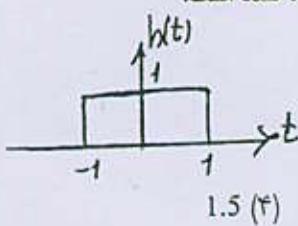
$$y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(-\tau) d\tau$$

در شکل‌های زیر  $x(-\tau)$  و  $h(\tau) = \frac{ds(\tau)}{d\tau}$  رسم شده‌اند.



در نتیجه  $y(0) = \frac{3}{2} \times 1 \times 1 = \frac{3}{2}$  می‌شود و گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است.



$$1.5 \quad (4)$$

اگر ورودی سیستم برابر با  $x(t) = U_{-2}(t+1) - U_{-1}(t) - U_0(t) - U_1(t-1)$  باشد، در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظه  $t=2$  کدام است؟

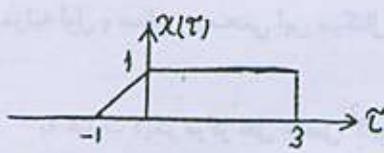
$U_0(t)$  معرفی تابع پله واحد و  $U_{-1}(t)$  معرف تابع شب واحد می‌باشد)

$$3 \quad (3)$$

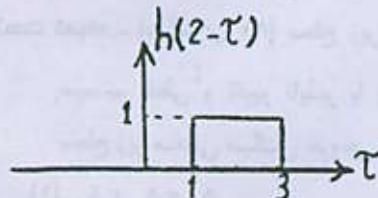
$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (1)$$

هل: در شکل زیر  $x(\tau)$  و  $h(2-\tau)$  رسم شده‌اند. بنابراین داریم:



$$y(2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(2-\tau)d\tau = 2 \times 1 = 2$$



پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تست لموله - (سراسری ۸۳) اگر  $z(t) = x(t) * y(t)$  باشد، در آن صورت  $x(2t) * y(2t)$  برابر است با:

$$\frac{1}{2}z(2t) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{4}z(2t) \quad (۲)$$

$$2z(2t) \quad (۳)$$

$$z(2t) \quad (۴)$$

هل:

$$x(2t) * y(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(2\tau)y(2(t-\tau))d\tau$$

با فرض  $\tau = 2\tau$  داریم:

$$x(2t) * y(2t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\lambda)y(2t-\lambda) \frac{d\lambda}{2} = \frac{1}{2}z(2t)$$

پس گزینه (۴) صحیح است.

$$\frac{1}{|k|}z(kt) = x(kt) * y(kt) \quad z(t) = x(t) * y(t)$$

تست لموله - (آزاد ۸۱) اگر  $y(t) = x(t) * h(t)$  باشد، آنگاه  $x(3t) * h(3t)$  برابر است با:

$$\frac{1}{3}y(t) \quad (۱)$$

$$y(t) \quad (۲)$$

$$\frac{1}{3}y(3t) \quad (۳)$$

$$y(3t) \quad (۴)$$

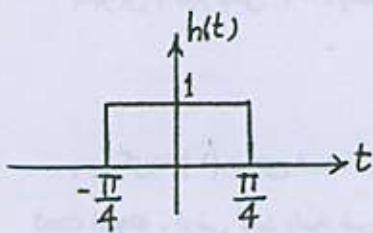
هل:

با توجه به فرمول به دست آمده در تست قبل داریم:

$$x(3t) * h(3t) = \frac{1}{3}y(3t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت نشان داده شده در شکل مقابل است:



در صورتی که نورودی این سیستم  $x(t) = [u(t) - u(t-\pi)] \sin(t)$  در لحظه  $t = \frac{\pi}{2}$  کدام مقدار خواهد بود؟

۴) صفر

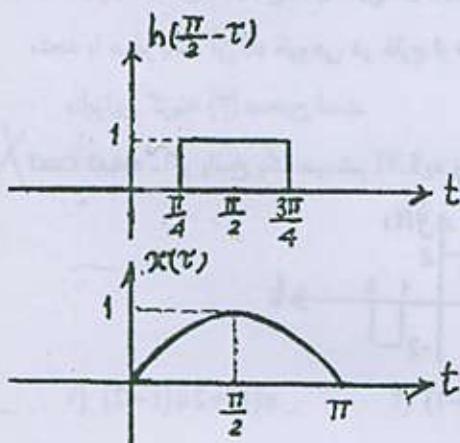
 ۳)  $\pi$ 

 ۲)  $\pi\sqrt{2}$ 

 ۱)  $\sqrt{2}$ 

حل:

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h\left(\frac{\pi}{2} - \tau\right) d\tau = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(\tau) d\tau = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$



بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۰) مقدار  $y(t) = [e^{-t} u(t)] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$  در رابطه  $y(t)$  را به ازاء  $t=1$  تقریباً چقدر است؟

 ۴)  $\frac{-2}{e}$ 

 ۳)  $\frac{2}{e}$ 

 ۲)  $\frac{-1}{e}$ 

 ۱)  $\frac{1}{e}$ 

حل:

با توجه به خاصیت تابع ضربه در کانولوشن داریم:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(t-3k)} u(t-3k)$$

بنابراین با قرار دادن  $t = 1$  بدست می‌آوریم:

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-(1-3k)} u(1-3k) = \sum_{k=-\infty}^0 e^{-(1-3k)} = e^{-1} + e^{-4} + e^{-7} + \dots = e^{-1}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

**تست نموده -** فرض کنید پاسخ ضربه یک سیستم LTI پیوسته در زمان  $h(t) = u(t) - u(t-1)$  باشد. کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟

(۱) هر ورودی به این سیستم اعمال شود، عرض خروجی محدود خواهد بود.

(۲) هیچ ورودی برای این سیستم وجود ندارد که خروجی با عرض محدود دهد.

(۳) برخی از ورودی‌ها ممکن است برای این سیستم خروجی با عرض محدود ایجاد کنند.

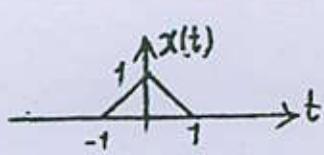
(۴) خروجی این سیستم ممکن است عرض محدود یا عرض نامحدود باشد اما این امر به شکل ورودی بستگی ندارد.

حل:

با توجه به آن که پاسخ ضربه این سیستم در خارج از فاصله  $[0, 1]$  برابر صفر است و با فرض آن که ورودی در خارج از فاصله  $[a, b]$  متحدد با صفر باشد آن‌گاه خروجی در خارج از فاصله  $[a, b+1]$  متحدد با صفر می‌گردد.

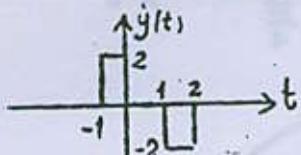
بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**تست نموده -** اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی  $x(t) = u(t) + u(t-3)$  برابر  $y(t) = u(t) + 2u(t-1) + 2u(t-2)$  باشد، پاسخ این سیستم به ورودی شیب واحد کدام است؟



(۴) هیچ‌کدام

$$u(t) + u(t-3) \quad (۳)$$

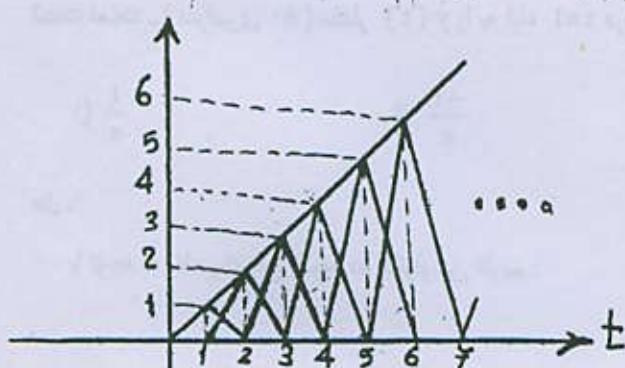


$$2u(t) + 2u(t-1) \quad (۲)$$

$$u(t) + 2u(t-2) \quad (۱)$$

حل:

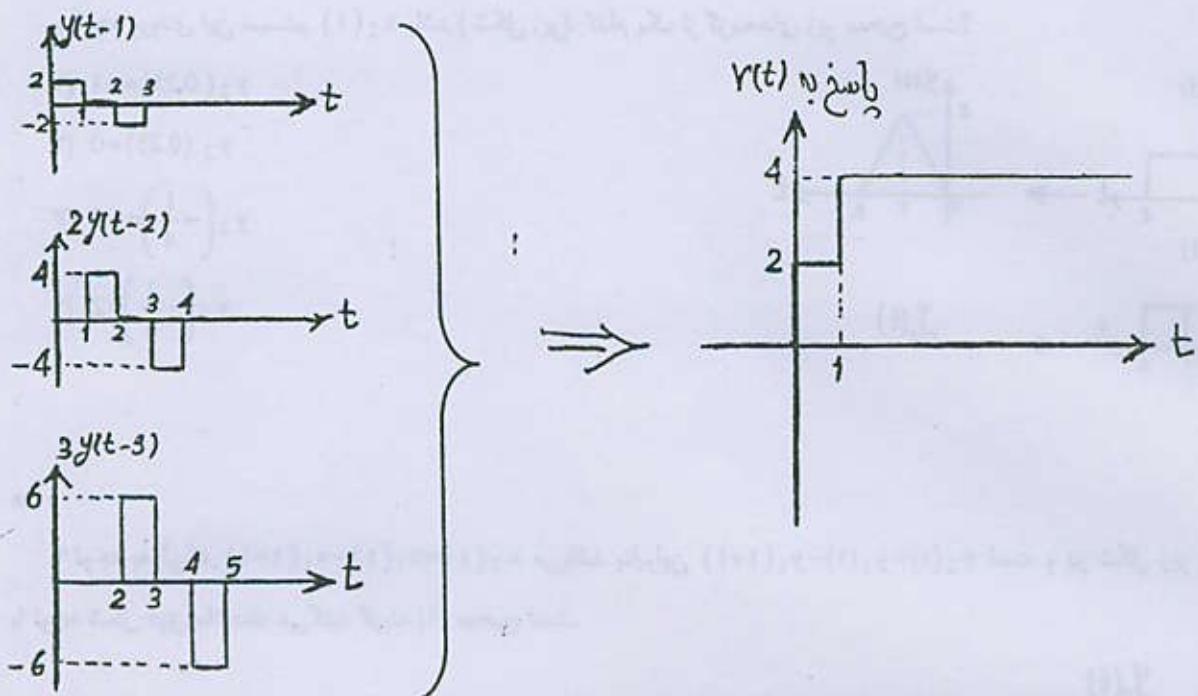
با توجه به شکل زیر می‌توان رابطه بینتابع شیب واحد و سیگنال  $x(t)$  را بدست آورد:



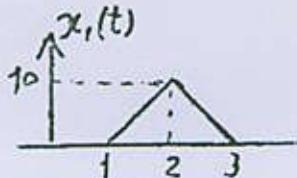
$$r(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x(t-k)$$

بنابراین با توجه به LTI بودن سیستم پاسخ سیستم به ورودی شیب واحد  $\sum_{k=1}^{+\infty} k y(t-k)$  می‌بانند که با توجه به شکل‌های زیر برابر

$(2u(t) + 2u(t-1))$  است. بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

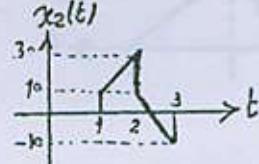


نست نمونه - اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی  $x_1(t)$  برابر  $y_1(t) = e^{-t}u(t-2) + 2u(t)$  باشد، پاسخ این سیستم به ورودی  $x_2(t)$  کدام است؟



$$y_1(t) = 2u(t) + e^{-t}u(t-2) + \delta(t-2) + \delta(t) \quad (1)$$

هیچکدام



$$y_2(t) = 4u(t) + e^{-t}u(t-2) + e^{-2}\delta(t-2) + 2\delta(t) \quad (2)$$

$$y_2(t) = 2u(t) + e^{-t}u(t-2) \quad (3)$$

هل:

با توجه به شکل‌های  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  نتیجه می‌گیریم:

$$x_2(t) = 2x_1(t) + \frac{dx_1(t)}{dt}$$

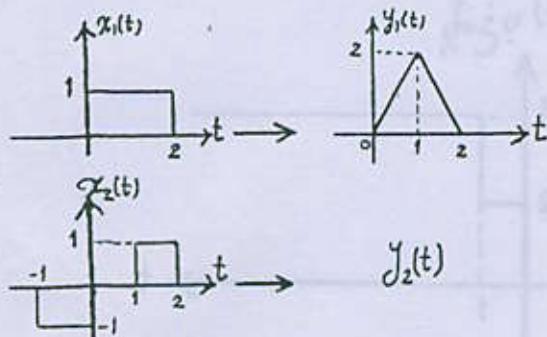
بنابراین:

$$\begin{aligned} y_2(t) &= 2y_1(t) + \frac{dy_1(t)}{dt} = 2 \left( e^{-t}u(t-2) + 2u(t) \right) + \left( e^{-t}\delta(t-2) - e^{-t}u(t-2) + 2\delta(t) \right) \\ &= e^{-t}u(t-2) + 4u(t) + 2\delta(t) + e^{-2}\delta(t-2) \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## تبزیه و تمدیل سیستم‌ها

تست نمونه - (آزاد ۸۴) می‌دانیم در صورتی که ورودی یک سیستم LTI،  $x_1(t)$  باشد، خروجی آن  $y_1(t)$  خواهد بود (شکل زیر).  
چنانچه ورودی این سیستم  $x_2(t)$  باشد (شکل زیر)، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



$$y_2(0.25) = -1 \quad (1)$$

$$y_2(0.25) = 0 \quad (2)$$

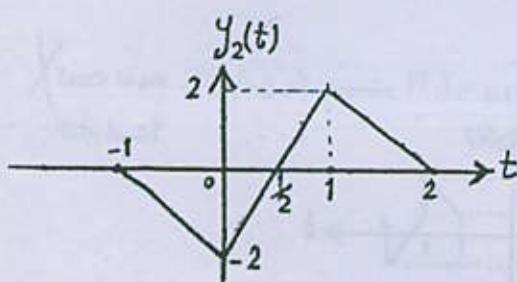
$$y_2\left(-\frac{1}{4}\right) = -2 \quad (3)$$

$$y_2\left(-\frac{1}{4}\right) = 2 \quad (4)$$

هل:

با توجه به آن که  $y_2(t) = y_1(t) - y_1(t+1)$  می‌باشد بنابراین  $x_2(t) = x_1(t) - x_1(t+1)$  است و در شکل زیر رسم شده است.

با توجه شکل فوق ملاحظه می‌کنید گزینه (1) صحیح است.



### ۳- سیستم‌های خطی و تغییر ناپذیر با زمان گستته در زمان - جمع کانولوشن

در این بخش، قضیه کانولوشن را برای سیستم‌های گستته در زمان که به صورت جمع کانولوشن مطرح می‌شود، بررسی خواهیم کرد. سپس در ادامه خواص جمع کانولوشن نیز معرفی می‌گردد.

#### ۳-۱- جمع کانولوشن

خاصیت غربالی تابع ضربه، برای سیگنال‌های گستته در زمان به صورت زیر است :

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

از معادله فوق نیز می‌توان تفسیر نوشتند هر سیگنال دلخواه مانند  $[n]x$  بر حسب توابع ضربه و شیفت‌یافته‌های آن را داشت. لذا با توجه به خواص همگنی و جمع بذیری یک سیستم LTI، می‌توان خروجی هر سیستم LTI گستته در زمان را به صورت زیر بدست آورد:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k]$$

معادله فوق را جمع کانولوشن می‌نامند و با نماد زیر نشان می‌دهند:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

جمع کانولوشن نمایش خروجی یک سیستم LTI گستته در زمان بر حسب ورودی و پاسخ ضربه آن می‌باشد و نشان می‌دهد که در سیستم‌های گستته در زمان LTI نیز می‌توان خروجی را از روی ورودی و پاسخ ضربه بدست آورد.

روش محاسبه جمع کانولوشن مانند انتگرال کانولوشن و شامل مراحل زیر است:

(۱) ابتدا تغییر متغیر  $n$  به  $k$  داده تا  $[k]x$  و  $[k]h$  بدست آیند.

(۲) یکی از دو سیگنال را ثابت نگه داشته و دیگری را نسبت به محور عمودی معکوس می‌کنیم. در این مرحله  $[k]x$  و  $[k]h$  (یا  $[k]h[-k]$ ) بدست می‌آیند.

(۳) سیگنال معکوس شده را به اندازه  $|n|$  به سمت راست به ازای  $0 < n$  و به سمت چپ به ازای  $0 < n$  شیفت داده تا سیگنال‌های  $x[n-k]$  و  $h[n-k]$  (یا  $h[k]$  و  $x[n-k]$ ) حاصل شوند.

(۴)  $n$  را از  $-\infty$  تا  $+\infty$  تغییر داده و با محاسبه مجموع حاصلضرب  $x[n-k]h[n-k]$  (یا  $x[k]h[n-k]$ ) مقدار  $y[n]$  را به ازاء تمام  $n$ ها بدست می‌آوریم.

تلگر: محاسبه جمع کانولوشن کاملاً مشابه محاسبه انتگرال کانولوشن است. اما به دو دلیل محاسبه حاصل جمع کانولوشن اندکی مشکل‌تر از انتگرال کانولوشن است. اولاً حاصل جمع کانولوشن گستته است و در تعیین بازه‌ها باید دقت بیشتری شود. ثانیاً محاسبه حاصل جمع معمولاً مشکل‌تر از محاسبه انتگرال می‌باشد. در محاسبه حاصل جمع، فرمول مجموع  $N$  جمله از یک تصاعد هندسی، در برخی اوقات مفید می‌باشد. فرمول فوق عبارتست از:

## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها

$$S_N = \frac{t_1(1-q^N)}{1-q}$$

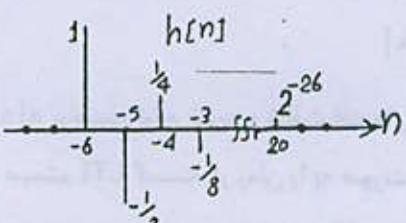
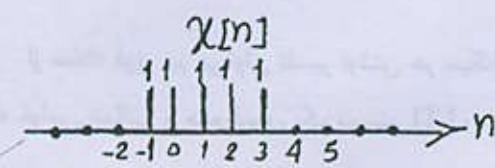
N جمله اول یک تصاعد هندسی

$$\text{if } |q| < 1 \rightarrow S_N = \frac{t_1}{1-q}$$

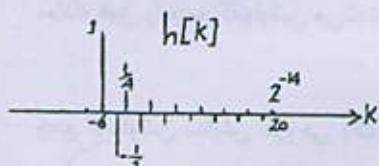
q: قدر نسبت تصاعد هندسی

t<sub>1</sub>: جمله اول تصاعد هندسی

مثال: فرض کنید پاسخ ضربه  $x[n]$  و ورودی  $h[n]$  یک سیستم LTI مطابق با شکل‌های زیر باشند. پاسخ  $y[n]$  این سیستم را بدست آورید.



هل: سیگنال  $h[n]$  را ثابت نگه داشته و  $x[n]$  را معکوس کرده و حرکت می‌دهیم. روابط این سیگنال‌ها و وضعیت‌های مختلف در زیر نشان داده شده‌اند.

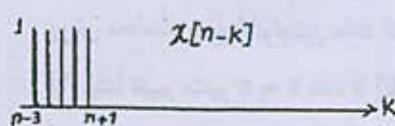


$$x[n-k] = 1 \quad n-3 \leq k \leq n+1$$

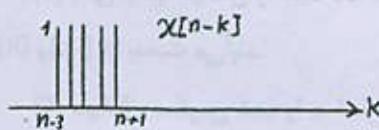
$$h[k] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6} \quad -6 \leq k \leq 20$$

رابطه I

رابطه II

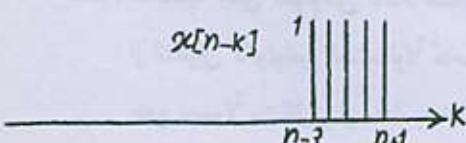


$$n \leq -8 \quad \rightarrow \quad y[n] = 0$$

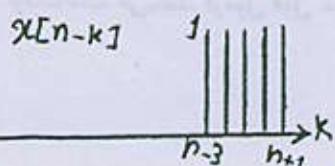


$$-7 \leq n \leq -4 \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=-6}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}$$

$$I : -3 \leq n \leq 19 \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=n-3}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}$$



$$20 \leq n \leq 23 \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_{k=n-3}^{20} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6}$$



$$n \geq 24 \quad \rightarrow \quad y[n] = 0$$

هر کدام از مجموعهای به دست آمده را می‌توان با فرمول مجموع جملات یک تصاعد هندسی محاسبه کرد:

$$\sum_{k=-6}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+7} = \frac{1 \times \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right)$$

$$\sum_{k=n-3}^{n+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+7} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3} \times \frac{1 + \frac{1}{32}}{\frac{3}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{-1}{8}\right) \times \frac{11}{16} = \frac{-11}{128} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\sum_{k=n-3}^{20} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+6} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+4} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^{26} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{24-n}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{-1}{8}\right) \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{24-n}\right) = \frac{-1}{12} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^{24}\right)$$

بنابراین داریم:

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n \leq -8 \\ \frac{2}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+8}\right) & -7 \leq n \leq -4 \\ \frac{-11}{128} \left(-\frac{1}{2}\right)^n & -3 \leq n \leq 19 \\ \frac{-1}{12} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^{24}\right) & 20 \leq n \leq 23 \\ 0 & 24 \leq n \end{cases}$$

تذکر: مجدداً مانند کانولوشن بیوسته در زمان ملاحظه می‌کنید با توجه به آن که  $x[n]$  در خارج از فاصله  $[-1, 3]$  و  $h[n]$  در خارج از فاصله  $[20, 26]$  متعدد با صفر می‌باشند،  $y[n]$  در خارج از فاصله  $[-7, 23]$  متعدد با صفر می‌گردد. این خاصیت نیز مربوط به عرض کانولوشن است که در ادامه بررسی و معرفی خواهد شد.

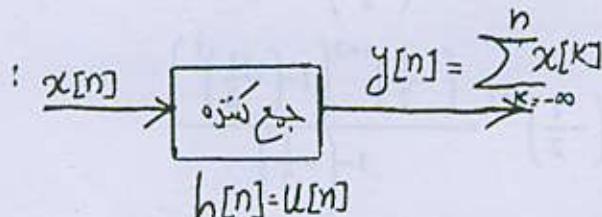
تذکر:تابع ضربه گستته در زمان نیز در ایراتور کانولوشن طبق رابطه زیر عمل می‌کند:

$$x[n] * \delta[n - n_0] = x[n - n_0] \Rightarrow x[n] * \delta[n] = x[n]$$

تذکرہ: تابع پله در اپراتور کانولوشن طبق رابطہ زیر عمل کند:

$$x[n]*u[n-n_0] = \sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x[k] \Rightarrow x[n]*u[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

تلیمہ۔ با توجه به روابط بالا می‌توان نتیجہ گرفت پاسخ ضربہ یک سیستم جمع کننده تابع پله واحد می‌باشد.



شکل ۲-۱. پاسخ ضربہ جمع کننده برابر پله واحد است.

## ۲-۴- خواص جمع کانولوشن

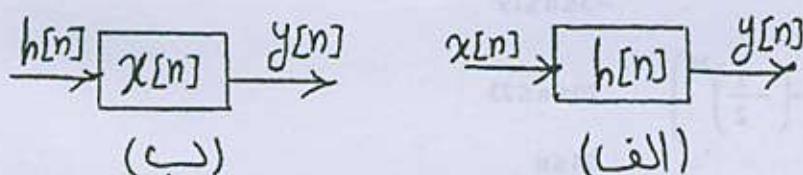
جمع کانولوشن نیز مانند انتگرال کانولوشن دارای خواصی است که اکثر این خواص مشابه خواص انتگرال کانولوشن می‌باشند. در این بخش به معرفی و بررسی این خواص می‌پردازیم.

(۱) خاصیت عرض کانولوشن: اگر  $x[n]$  در خارج از فاصله  $[a_1, b_1]$  و  $y[n]$  در خارج از فاصله  $[a_2, b_2]$  متحدد با صفر باشند، آنگاه  $y[n] = x[n]*h[n]$  در خارج از فاصله  $[a_1+a_2, b_1+b_2]$  متحدد با صفر است.

$$x[n]*h[n] = h[n]*x[n]$$

(۲) خاصیت جابجایی:

تلیمہ، خروجی‌های سیستم‌های LTI نشان داده شده در شکل (۲-۴) با یکدیگر برابر می‌باشند. به عبارت دیگر می‌توان جای پاسخ ضربہ و ورودی را با یکدیگر تعویض کرد.

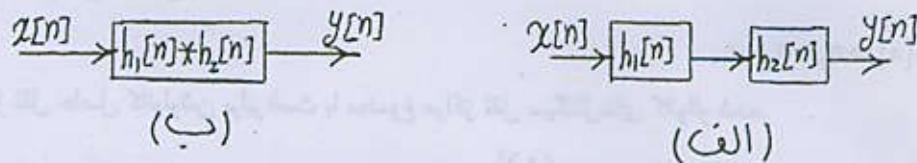


شکل ۲-۲. دو شکل نشان داده شده در (الف) و (ب) معادل می‌باشند.

(۳) خاصیت شرکت‌پذیری:

$$x[n]*(h_1[n]*h_2[n]) = (x[n]*h_1[n])*h_2[n]$$

نتیجه: دو سیستم LTI سری با پاسخ ضربه‌های ضربه  $[n]$  و  $h_1[n] * h_2[n]$  (شکل ۴-۳-الف) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $[n]$  و  $h_1[n] * h_2[n]$  (شکل ۴-۳-ب) تبدیل کرد.

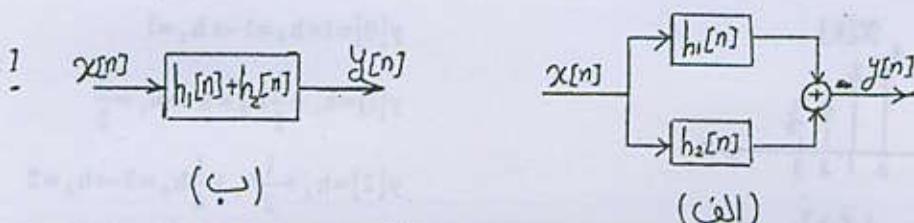


شکل ۴-۳-الف) ترکیب سری دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

(۴) خاصیت توزیع پذیری کانولوشن روی جمع:

$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

نتیجه: دو سیستم LTI موازی با پاسخ ضربه‌های  $[n]$  و  $h_1[n] + h_2[n]$  (شکل ۴-۴-الف) را می‌توان به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $[n]$  و  $h_1[n] + h_2[n]$  (شکل ۴-۴-ب) تبدیل کرد.



شکل ۴-۴-الف) ترکیب موازی دو سیستم LTI (ب) سیستم معادل ترکیب بند (الف)

(۵) خاصیت نمو کانولوشن:

نتیجه: اگر از ورودی یک سیستم LTI نمو گرفته شود، آنگاه از خروجی نیز نمو گرفته خواهد شد. به عبارت دیگر اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی  $x[n]$  برابر  $y[n]$  باشد، آنگاه پاسخ سیستم فوق به ورودی  $x[n] - x[n-1]$  برابر  $y[n] - y[n-1]$  خواهد بود.

(۶) خاصیت جمع نمونه‌های یک سیگنال: اگر  $A_y$  را به صورت  $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] A_n$  تعریف کنیم، آنگاه:

$$\text{if } y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow A_y = A_x A_h$$

به عبارت دیگر مجموع نمونه‌های حاصل کانولوشن برابر است با حاصلضرب مجموع نمونه‌های سیگنال‌های کانولالشده.

(۷) خاصیت گشتاور مرتبه اول کانولوشن: اگر گشتاور مرتبه اول یک سیگنال گستته در زمان را به صورت  $m_y = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n x[n]$  تعریف کنیم و  $A_y$  نیز مجموع نمونه‌های این سیگنال مطابق با تعریف خاصیت (۶) باشد، آنگاه:

$$\text{if } y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow m_y = m_x A_h + m_h A_x$$

به عبارت دیگر گشتاور مرتبه اول حاصل کانولوشن برابر است با مجموع حاصلضرب جمع نمونه‌های یکی از سیگنال‌های کانولالشده در گشتاور مرتبه اول دیگری.

(۸) خاصیت مرکز ثقل کانولوشن: اگر مرکز ثقل یک سیگنال را به صورت  $\frac{m}{A}$  تعريف کنیم که  $m$  و  $A$  به ترتیب گشتاور مرتبه اول و مجموع نمونه‌های این سیگنال باشند، آنگاه:

$$\text{if } y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow \eta_y = \eta_x + \eta_h$$

به عبارت دیگر مرکز ثقل حاصل کانولوشن برابر است با مجموع مرکز ثقل سیگنال‌های کانولو شده.

تست نموده: (آزاد ۸۰) ورودی یک سیستم LTI سبی به صورت  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  باشد. اگر  $y[0]=1$  و  $y[1]=2$  و  $y[2]=3$  و  $y[3]=4$  باشند، مقدار پاسخ ضربه سیستم در  $n=3$  یعنی  $h[3]$  کدام است؟

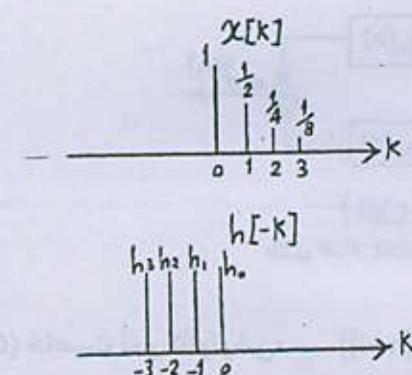
2.5 (۴)

1 (۳)

1.5 (۲)

2 (۱)

هل: با توجه به رابطه جمع کانولوشن و سبی بودن سیستم (در بخش بعد بررسی می‌گردد) و اطلاعات داده شده، شکل‌های زیر را می‌توان برای  $x[k]$  و  $h[-k]$  رسم کرد.



$$y[0] = 1 \times h_0 = 1 \rightarrow h_0 = 1$$

$$y[1] = h_1 + \frac{1}{2}h_0 = 2 \rightarrow h_1 = \frac{3}{2}$$

$$y[2] = h_2 + \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{4}h_0 = 3 \rightarrow h_2 = 2$$

$$y[3] = h_3 + \frac{1}{2}h_2 + \frac{1}{4}h_1 + \frac{1}{8}h_0 = 4 \rightarrow h_3 = \frac{5}{2}$$

پس گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

## ۵ - خواص سیستم‌های خطی و تغییرناپذیر با زمان (LTI)

در دو بخش قبل به معرفی انتگرال و جمع کانولوشن و برخی خواص آن‌ها پرداختیم. در این بخش سایر خواص سیستم‌های LTI را با توجه به قضیه کانولوشن بررسی می‌کنیم. تأکید اصلی در این بخش سایر خواص سیستم‌های LTI مانند علی بودن، بدون حافظه بودن، پایداری و وارون‌پذیری بر مبنای پاسخ ضربه آن‌ها می‌باشد. در انتهای این بخش به معرفی و بررسی پاسخ پله سیستم‌های LTI می‌پردازیم.

### ۵-۱- سیستم‌های LTI حافظه‌دار و بدون حافظه

سیستم بدون حافظه سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه بستگی داشته باشد. حال اگر سیستم فوق LTI باشد و با فرض گستته در زمان بودن داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \underbrace{h[0]x[n]}_{\text{این جمله فقط به حال ورودی بستگی دارد}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]}_{\text{این جمله به گذشته و آینده ورودی بستگی دارد}}$$

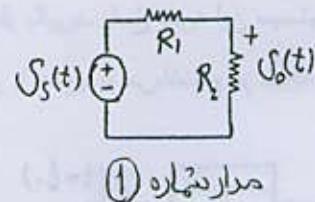
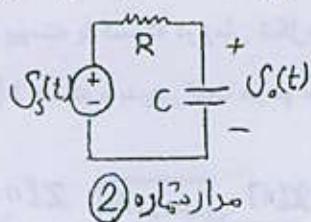
بنابراین شرط بدون حافظه بودن آن است که:

$$h[n] = 0 \quad n \neq 0 \Rightarrow h[n] = k\delta[n]$$

این شرط برای سیستم LTI پیوسته در زمان نیز صادق است و برای این سیستم نیز شرط بدون حافظه بودن آن است که پاسخ ضربه  $h(t) = k\delta(t)$  باشد. در غیر این صورت سیستم غیرعلی است.

مثال: دو مدار زیر را در نظر بگیرید. اگر  $v_o(t)$  ورودی و  $v_o(t)$  خروجی باشند، در مدار شماره (۱) پاسخ ضربه مدار  $v_o(t) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \delta(t)$  است. لذا این مدار بدون حافظه است. در صورتی که اگر پاسخ ضربه مدار شماره (۲) را بدست آوریم، داریم

$$v_o(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}$$



### ۵-۲- سیستم‌های LTI علی و غیرعلی

سیستم علی سیستمی است که خروجی آن در هر لحظه به ورودی در همان لحظه و زمان‌های قبل بستگی داشته باشد. حال اگر سیستم فوق LTI باشد و با فرض گستته در زمان بودن داریم:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \underbrace{\sum_{k=-\infty}^0 h[k]x[n-k]}_{\text{این جمله فقط به گذشته و آینده ورودی بستگی دارد}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]}_{\text{این جمله به گذشته و حال ورودی بستگی دارد}}$$

## تبیین و تحلیل سیستم‌ها

بنابراین شرط علی بودن یک سیستم LTI عبارت است از:

$$h[n]=0 \quad n < 0$$

این شرط برای سیستم LTI پیوسته در زمان نیز صادق است و برای این سیستم نیز شرط علی بودن آن است که  $\int_{-\infty}^0 h(t) dt = 0$ . به عبارت دیگر یک سیستم LTI علی است اگر پاسخ ضربه آن در زمان‌های منفی (یعنی قبل از اعمال ضربه) صفر باشد.

نکته: می‌توان نشان داد که پاسخ یک سیستم LTI علی به پله واحد (پاسخ پله سیستم) نیز در زمان‌های منفی صفر می‌باشد.

نکته: گرچه علی بودن از خواص سیستم‌هاست، ولی معمولاً سیگنالی را که در زمان‌های منفی صفر باشد، سیگنال علی می‌نامند. بنابراین می‌توان گفت یک سیستم LTI به شرطی علی است که پاسخ ضربه‌اش یک سیگنال علی باشد.

مثال: مدارهای نشان داده شده در مثال بخش قبل هر دو دارای پاسخ ضربه‌ای می‌باشند که در زمان‌های منفی صفر هستند. بنابراین دو مدار فوق علی می‌باشند که با توجه به قابل ساخت بودن مدارات فوق امری بدیهی است.

### ۵-۳. سیستم‌های LTI پایدار و ناپایدار

سیستم ناپایدار با معیار BIBO سیستمی است که به ازای ورودی با دامنه محدود، خروجی با دامنه محدود بدهد. حال اگر سیستم فوق باشد و با فرض گستره در زمان بودن داریم:

$$\text{if } |x[n]| \leq A < \infty \Rightarrow |y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| |x[n-k]| \leq A \times \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$$

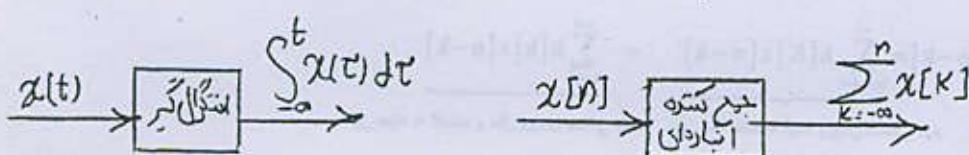
شرط آن که سیستم فوق پایدار باشد آن است که عبارت بدست آمده محدود گردد. یعنی  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|$  باشد. به عبارت دیگر یک سیستم LTI هنگامی پایدار است که پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع‌بذری باشد.

به طریق مشابه نیز می‌توان نشان داد شرط پایداری یک سیستم LTI پیوسته در زمان مطلقاً انتگرال‌بذری بودن پاسخ ضربه آن یعنی  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$  است.

مثال: سیستم تأخیردهنده پیوسته یا گستره در زمان شکل‌های زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم‌ها به ترتیب  $h(t)=\delta(t-t_0)$  و  $h[n]=\delta[n-n_0]$  هستند و بدیهی است هر دو مطلقاً انتگرال‌بذری یا جمع‌بذری می‌باشند و در نتیجه هر دو سیستم پایدار می‌باشند.

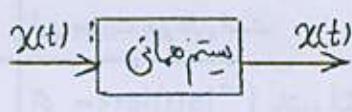


مثال: سیستم‌های انتگرال‌گیر یا جمع‌کننده ابزارهای شکل‌های زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه این سیستم‌ها به ترتیب  $h(t)=u(t)$  و  $h[n]=u[n]$  می‌باشند و بدیهی است هیچکدام مطلقاً انتگرال‌بذری نبوده و در نتیجه هر دو سیستم ناپایدار می‌باشند.

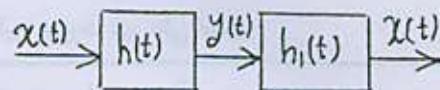


#### ۴-۵- سیستم‌های LTI وارون‌پذیر و وارون‌ناپذیر

اگر یک سیستم LTI وارون‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان توسط یک سیستم وارون از روی خروجی آن، ورودی را بدون ابهام بدست آورد. می‌توان نشان داد که این سیستم وارون نیز LTI می‌باشد. در شکل (۵-۱) این دو سیستم و ترکیب آن‌ها که یک سیستم همانی را نتیجه می‌دهد، نشان داده شده‌اند.



(ب)



(الف)

شکل ۵-۱. (الف) ترکیب سری یک سیستم وارون‌پذیر با سیستم وارون آن

(ب) ترکیب کردن سیستم اصلی با سیستم وارون آن. سیستم همانی را ترتیمه می‌دهد

از آنجایی که پاسخ ضربه سیستم همانی  $\delta(t)$  است و با توجه به خواص سیستم‌های سری داریم:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t)$$

بنابراین اگر یک سیستم LTI وارون‌پذیر باشد، آنگاه حاصل کانولوو پاسخ ضربه آن با پاسخ ضربه سیستم وارون، ضربه واحد می‌شود.

خاصیت فوق برای سیستم‌های LTI گستته در زمان نیز صادق بوده و داریم:

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

لذکه، روابط به دست آمده در واقع ارتباط بین پاسخ ضربه یک سیستم LTI وارون‌پذیر و پاسخ ضربه سیستم وارون را نشان می‌دهند. اگرچه

این روابط برای تعیین پاسخ ضربه سیستم وارون موثر نمی‌باشند، اما در فصول آتی خواهیم دید که با استفاده از ابراتورهای فوریه،

لابلاس و Z می‌توان روابط فوق را به روابطی موثر جهت تعیین سیستم وارون تبدیل کرد.

در جدول (۵-۱) هر چهار خاصیت ذکر شده برای سیستم‌های LTI بطور خلاصه آورده شده‌اند:

نوع سیستم خاصیت	سیستم پیوسته در زمان	سیستم گستته در زمان
بدون حافظه بودن	اگر $h(t) = k\delta(t)$ باشد، آنگاه سیستم بدون حافظه و در غیر این صورت با حافظه است.	اگر $h[n] = k\delta[n]$ باشد، آنگاه سیستم بدون حافظه و در غیر این صورت با حافظه است.
علی بودن	اگر $h(t) = 0$ باشد، آنگاه سیستم علی و در غیر این صورت غیر علی است.	اگر $h[n] \neq 0$ باشد، آنگاه سیستم علی و در غیر این صورت غیر علی است.
پایداری	اگر $\int_{-\infty}^{\infty}  h(t)  dt < \infty$ باشد، آنگاه سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.	اگر $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  h[n]  < \infty$ باشد، آنگاه سیستم پایدار و در غیر این صورت ناپایدار است.
وارون پذیر بودن	اگر سیستم وارون پذیر باشد و پاسخ ضربه سیستم وارون $h(t)*h_1(t) = \delta(t)$ باشد آنگاه داریم: $h_1(t) = h(t)$	اگر سیستم وارون پذیر باشد و پاسخ ضربه سیستم وارون $h_1[n]*h[n] = \delta[n]$ باشد آنگاه داریم: $h_1[n] = h[n]$

جدول ۵-۱- خواص اصلی سیستم‌های LTI بر اساس پاسخ ضربه آنها

### ۵-۵- پاسخ پله سیستم‌های LTI

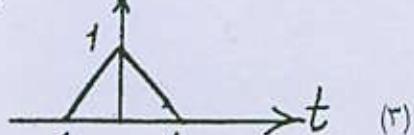
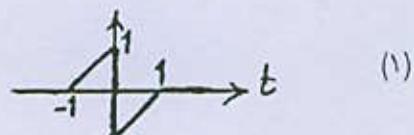
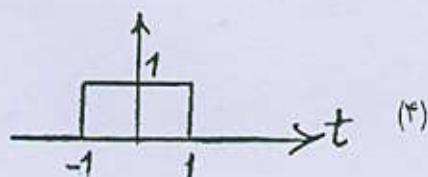
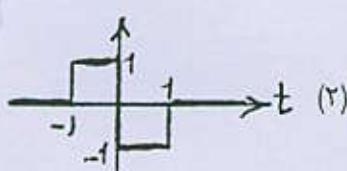
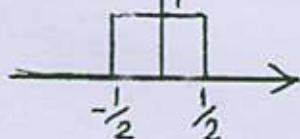
در بخش‌های قبل دیدیم که با استفاده از پاسخ ضربه یک سیستم LTI می‌توان رفتار این سیستم را به طور کامل توصیف کرد. اما سیگнал دیگری که برای توصیف رفتار یک سیستم استفاده می‌شود پاسخ پله یک سیستم LTI با نماد  $s(t)$  یا  $[n]$  نشان داده می‌شود و طبق تعریف پاسخ سیستم به ورودی پله واحد می‌باشد.

با توجه به قضیه کانولوشن و خواص سیستم‌های LTI ، بین پاسخ پله و ضربه هر سیستم LTI می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} \quad s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad (\text{برای سیستم‌های پیوسته در زمان})$$

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \quad s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad (\text{برای سیستم‌های گستته در زمان})$$

تست نمونه - (آزاد ۷۹) اگر دو سیستم LTI مشابه را که پاسخ پله هر یک مطابق شکل رو به رو است را با هم کاسکاد (سری) کنیم، پاسخ پله سیستم حاصل چه خواهد بود؟



هل؛ تست فوق را با دو روش حل می‌کنیم.

- ۱- ابتدا پاسخ ضربه سیستم را بدست آورده و با کانولوشن کردن در خودش پاسخ ضربه سیستم ترکیب شده از دو سیستم سری را تعیین کرده و در نهایت با انتگرال‌گیری پاسخ پله را بدست می‌آوریم.

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$h_T(t) = h(t) * h(t) = \left( \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right) * \left( \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$$

$$s_T(t) = \int_{-\infty}^t h_T(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & t < -1 \\ 1 & -1 \leq t < 0 \\ -1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & t \geq 1 \end{cases}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

- ۲- قضیه کانولوشن را می‌توان اعمال کرده و رابطه‌ای برحسب پاسخ پله‌ها بدست آورد:

$$\begin{aligned} h_T(t) = h(t) * h(t) &\Rightarrow \frac{ds_T(t)}{dt} = \frac{ds(t)}{dt} * \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d^2}{dt^2}(s(t) * s(t)) \\ &\Rightarrow s_T(t) = \frac{d}{dt}(s(t) * s(t)) = s(t) * \frac{ds(t)}{dt} = s(t) * \left( \delta\left(t + \frac{1}{2}\right) - \delta\left(t - \frac{1}{2}\right) \right) \Rightarrow s_T(t) = s\left(t + \frac{1}{2}\right) - s\left(t - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

تست نمونه - (آزاد ۸۱) در مورد علی بودن و پایداری سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h[n]$  کدام گزینه صحیح است؟

$$h[n] = n \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$$

(۱) علی و نایابدار

(۲) علی و پایدار

(۳) غیرعلی و نایابدار

(۴) غیرعلی و پایدار

(۱) علی و نایابدار

(۲) علی و پایدار

- هل؛ با توجه به آن که  $h[n] = 0$  برای  $n < 0$  می‌باشد بنابراین سیستم علی است. اما برای تعیین پایداری سیستم باید مطلقاً انتگرال‌پذیر بودن پاسخ ضربه آن را بررسی کرد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{3}{27} + \frac{4}{81} + \dots < \infty$$

مالحظه می‌کنید که سری نزولی است و در نتیجه مجموع فوق به یک مقدار محدود همگرا می‌شود. بنابراین سیستم پایدار است و گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

## تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

تست نمونه - (سراسری ۸۱) اگر  $h[n] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1]$  باشد، حاصل عبارت  $x[n]*h[n]$  (سراسری ۸۱) کدام است؟

$$2\{\delta[n+1] + 2\delta[n] + \delta[n-1]\} + 2\delta[n-4] \quad (۱)$$

$$\delta[n+1] + \delta[n-1] + 2\delta[n] + \delta[n-2] - 2\delta[n-3] \quad (۲)$$

$$4\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 2\delta[n] + \delta[n+1] - \delta[n-4] \quad (۳)$$

$$2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4] \quad (۴)$$

هل :

$$\begin{aligned} x[n]*h[n] &= h[n] + 2h[n-1] - h[n-3] = 2\delta[n+1] + 2\delta[n-1] + 2[2\delta[n] + 2\delta[n-2]] - (2\delta[n-2] + 2\delta[n-4]) \\ &= 2\delta[n+1] + 4\delta[n] + 2\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 2\delta[n-4] \end{aligned}$$

پس گزینه (۴) صحیح می‌باشد.

تست نمونه - (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه  $h(t) = e^{iat} u(3t+1)$  می‌باشد.

(۱) معرف تابع پله واحد است. این سیستم :

- (۱) علی و بایدار است      (۲) علی و ناپایدار است      (۳) غیرعلی و پایدار است      (۴) غیرعلی و ناپایدار است

هل :

پاسخ ضربه سیستم به ازاء  $t = -\frac{1}{3}$  برابر صفر است. بنابراین این سیستم غیرعلی است. از طرفی داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} |e^{-iat}| dt = \int_{-\frac{1}{3}}^{+\infty} dt = \infty$$

پس سیستم ناپایدار است. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۳) اگر پاسخ ضربه واحد یک سیستم LTI زمان گستته به صورت  $y[n] = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$  باشد، خروجی سیستم در

حالت دائمی به ورودی پله به اندازه ۳، برابر است با:

$$3 \quad (۴) \qquad \qquad 4 \quad (۲) \qquad \qquad \frac{3}{4} \quad (۱) \qquad \qquad \frac{4}{3} \quad (۳)$$

هل :

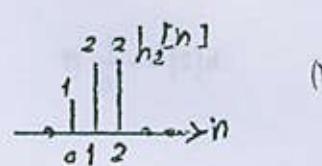
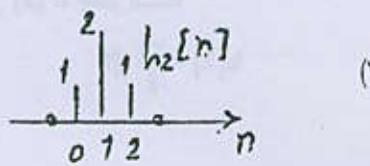
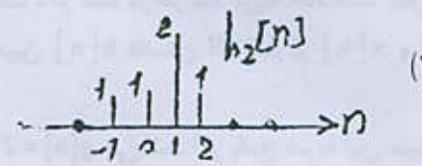
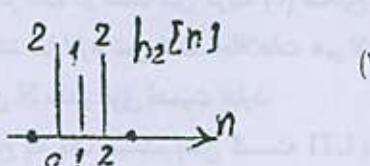
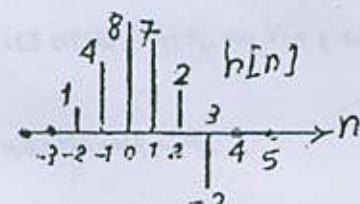
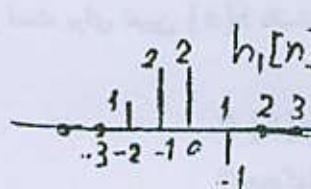
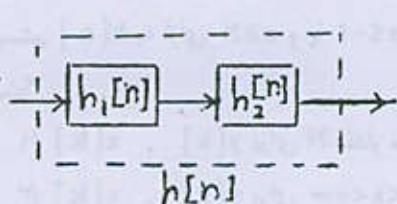
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 3\left(\frac{1}{4}\right)^k u[k]u[n-k] = 3 \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

چون پاسخ حالت دائم سبّ تم مورد نظر است بنابراین  $n = \infty$  قرار داده می‌شود:

$$y[n] \Big|_{n=\infty} = 3 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = 3 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots\right) = 3 \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = 4$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. البته این تسبیت را می‌توان با سایر روش‌ها مانند تبدیل فوریه یا تبدیل z نیز حل کرد.

تست نمونه - اگر در شکل مقابل  $h[n]$  و  $h_1[n]$  به صورت زیر باشند،  $h_2[n]$  چه خواهد بود؟



حل:

با توجه به آن که  $h[n] = h_1[n] * h_2[n]$  می‌باشد، از خاصیت عرض کانولوشن نتیجه می‌گیریم که سیگنال  $h_2[n]$  در محدود  $[0, 2]$  قرار گرفته و سه نمونه دارد. با توجه به رابطه کانولوشن داریم:

$$h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] h_2[n-k]$$

$$n=-2: \quad h[-2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] h_2[-2-k] \Rightarrow 1 \times h_2[0] = 1 \Rightarrow h_2[0] = 1$$

$$n=-1: \quad h[-1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] h_2[-1-k] \Rightarrow 1 \times h_2[1] + 2 \times h_2[0] = 4 \Rightarrow h_2[1] = 2$$

$$n=0: \quad h[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] h_2[-k] \Rightarrow 1 \times h_2[2] + 2 \times h_2[1] + 2 \times h_2[0] = 8 \Rightarrow h_2[2] = 2$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

تذکر: در تست اخیر ملاحظه کردید برای تعیین یکی از سیگنال‌ها با طول  $N$  نیاز به  $N$  مقدار از حاصل کانولوشن و  $N$  مقدار از سیگنال دیگر می‌باشد. البته این  $N$  مقدار لزوماً مقادیر متواال از سیگنال‌های فوق نیستند. به عنوان مثال در این تست به جای استفاده از  $h_1[0] = 2$  و  $h_1[1] = -1$  و  $h_1[3] = -2$  به صورت زیر استفاده کنیم:

$$n=3: \quad h[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1[k] h_2[3-k] \Rightarrow (-1) \times h_2[2] = -2 \Rightarrow h_2[2] = 2$$

## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها



تست نمونه - (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گستته LTI با ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم پاسخ ضربه سیستم  $h[n]$  به ازای  $n \geq N$  و یا  $n \leq -1$  صفر است. برای تعیین  $h[n]$  دانستن کدام دسته زوج ورودی - خروجی هم لازم و هم کافی است؟

$$y[k] = x[k] \quad (2)$$

$$y[k] = x[k] \quad (1)$$

هیچ کدام

$$y[k] = x[k] \quad (-\infty < k < +\infty) \quad (3)$$

هل، با توجه به نکات ذکر شده در تست قبل گزینه (۳) صحیح است. دقت کنید اطلاعات ذکر شده در هر سه گزینه اطلاعات کافی برای تعیین  $h[n]$  هستند اما لازم نمی‌باشد. اطلاعات هم لازم و هم کافی برای تعیین  $h[n]$  دانستن  $N$  مقدار از  $x[k]$  و  $y[k]$  است و متواالی بودن  $N$  مقدار فوق اهمیت ندارد.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) پاسخ پله یک سیستم زمان گستته LTI به صورت  $g[n] = 2^{-n-1} u[n+1]$  می‌باشد. اگر پاسخ ضربه این سیستم را با  $h[n]$  نشان دهیم، مقدار  $h[2]$  چقدر است؟

$$h[2] = -\frac{1}{16} \quad (4)$$

$$h[2] = \frac{1}{16} \quad (3)$$

$$h[2] = -\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$h[2] = \frac{1}{8} \quad (1)$$

هل:

$$h[n] = g[n] - g[n-1] \Rightarrow h[2] = g[2] - g[1] = 2^{-3} - 2^{-2} = -\frac{1}{8}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۴) کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

۱) سیستم  $\frac{1}{x(t)} y(t) = e^t$  علی، پایدار و تغییرناپذیر با زمان است.

۲) سیستم با پاسخ ضربه  $h[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$  خطی، پایدار و علی است.

۳) سیستم  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(\lambda-1)} u(\lambda+1) x(t-\lambda) d\lambda$  حافظه‌دار، خطی و پایدار است.

و غیری

۴) سیستم  $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$  وارون‌پذیر، ناپایدار و علی است.

هل:

گزاره آورده شده در گزینه (۱) صحیح است. زیرا سیستم فوق علی و تغییرناپذیر با زمان است و با توجه به آن که  $|y(t)| = 1$  است بنابراین پایدار می‌باشد.

گزاره آورده شده در گزینه (۲) نیز صحیح است. زیرا داریم:

گزاره آورده شده در گزینه (۳) ناصحیح است. زیرا داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2(\lambda-1)} u(\lambda+1) x(t-\lambda) d\lambda = e^{-2(t-1)} u(t+1) * x(t)$$

بنابراین این سیستم یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h(t) = e^{-2(t-1)} u(t+1)$  است و واضح است که غیرعلی است.

گزاره آورده شده در گزینه (۴) نیز صحیح است سیستم فوق وارون‌پذیر با سیستم وارون  $x[n] = y[n] - y[n-1]$  و همچنین ناپایدار و علی است.

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

پادداشت

## ۶- سیستم‌های توصیف شده با معادلات دیفرانسیل و تفاصلی خطی با ضرایب ثابت

یک دسته بسیار مهم از سیستم‌های پیوسته در زمان سیستم‌های می‌باشند که رابطه بین ورودی و خروجی آن‌ها توسط یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت مشخص شده است. در سیستم‌های گسته در زمان این معادله به معادله تفاصلی با ضرایب ثابت تبدیل می‌شود. در این بخش به بررسی این سیستم‌ها، خواص و چگونگی تحقق ساده آن‌ها می‌برداریم.

### ۶-۱- سیستم‌های پیوسته در زمان

اگر  $(t)x$  ورودی و  $(t)y$  خروجی این سیستم باشند، آنگاه معادله دیفرانسیل زیر ورودی و خروجی را به یکدیگر ارتباط می‌دهد:

$$\sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k y}{dt^k} = \sum_{i=0}^N b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

تعیین  $(t)y$  از این معادله ساده و مشخص و مربوط به درس معادلات دیفرانسیل است. اما در درس تجزیه و تحلیل سیستم‌ها معمولاً از تبدیل لاپلاس برای حل این دسته از معادلات استفاده می‌شود که در ادامه معرفی و بررسی خواهد شد.

مهم‌ترین مسئله‌ای که در ارتباط با این دسته از سیستم‌ها مطرح می‌شود، LTI و علی بودن آن‌ها می‌باشد. یعنی آیا صرف آنکه رابطه بین ورودی و خروجی این سیستم‌ها به صورت یک معادله خطی با ضرایب ثابت است تضمین می‌کند که سیستم فوق LTI و علی باشد یا خیر؟ قضیه زیر به این سؤال پاسخ می‌دهد:

**قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که یک سیستم بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، LTI و علی باشد آن است که سیستم در سکون (آرامش) اولیه باشد. یعنی قبل از اعمال ورودی به سیستم، خروجی آن صفر باشد. مثلاً اگر در  $t_0$  داشته باشیم  $y(t_0) = 0$ ، آنگاه در  $t_0 \leq t < t_0 + \Delta t$  باید شرایط اولیه زیر را به کار برد:**

$$y(t_0) = \frac{dy}{dt} \Big|_{t=t_0} = \dots = \frac{d^{M-1}y}{dt^{M-1}} \Big|_{t=t_0} = 0$$

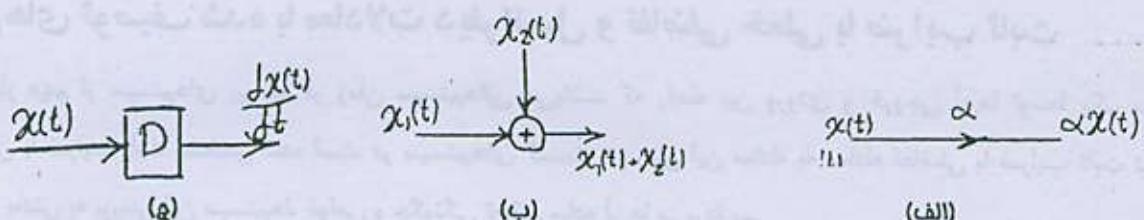
مثال: برای آن که سیستم با معادله دیفرانسیل  $x = 2y' - 2y'' + y$  و با فرض  $y(t) = u(t)$  یک سیستم LTI و علی باشد، شرایط اولیه را باید به صورت  $y(0) = 0$  و  $y'(0) = 0$  انتخاب کنیم تا سیستم شرایط آرامش اولیه را داشته باشد.

سیستم‌های بیان شده توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت را می‌توان به شیوه‌ای ساده و به صورت نمودارهای جعبه‌ای حاصل از اتصال بلوک دیاگرام‌های پایه نشان داد. این نحوه نمایش علاوه بر آن که باعث بالا رفتن درک از رفتار سیستم می‌شود، برای شبیه‌سازی و تحقق آن‌ها به صورت نرم‌افزاری یا سخت‌افزاری نیز مفید می‌باشد. برای ساخت این قبیل از معادلات سه بلوک پایه نشان داده شده در شکل

۶-۱) کافی است. سه عنصر فوق شامل ضرب کننده در اسکالر، جمع کننده و مشتق‌گیر می‌باشند.



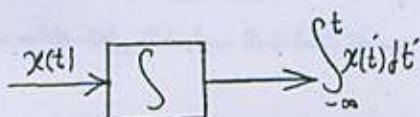
## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها



شکل ۶-۱. عناصر پایه مهندسی نمایش جعبه‌ای سیستم‌های پیوسته در امان توصیف شده توسط معادله دیفرانسیل فطی با ضرایب ثابت

(الف) ضرب‌گننده در اسکالر (ب) مجمع‌گننده (ج) مشتق‌گیر

غیر از مشتق‌گیر، ساخت دو بلوک دیگر توسط عناصر ساده مداری بسیار متداول و عملی است. اما ساخت مشتق‌گیر و استفاده از آن متداول نیست. زیرا حساسیت مشتق‌گیر نسبت به خطأ و نویز بسیار زیاد است. لذا برای رفع این مشکل با انتگرال‌گیری از حل‌فین معادله دیفرانسیل و تبدیل آن به معادله انتگرالی، می‌توان به جای مشتق‌گیر از انتگرال‌گیر شکل (۶-۲) استفاده کرد که کاربردی‌تر و عملی‌تر می‌باشد.



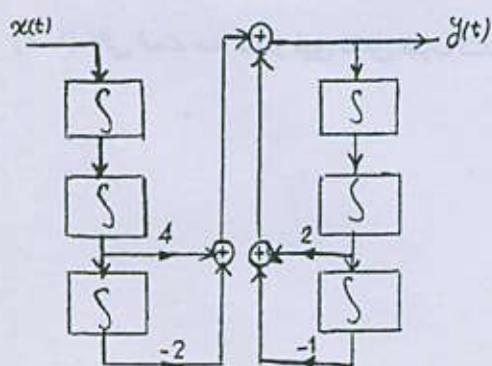
شکل ۶-۲. عنصر پایه انتگرال‌گیر

با استفاده از بلوک‌های پایه فوق می‌توان به روش‌های مختلف سیستم‌ها را تحقق داد از بین این روش‌ها و ساختارها دو روش تحت عنوانیں روش مستقیم یک (I) و روش مستقیم دو (Direct Form II) اهمیت زیادی دارند که در مثال زیر به معرفی و بررسی این دو ساختار می‌پردازیم.

مثال: نمایش جعبه‌ای سیستم  $\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{dy}{dt} + y = 4\frac{dx}{dt} - 2x$  را با روش مستقیم I و II بدست آورید.

حل: برای تعیین تحقق به روش مستقیم I ابتدا معادله را به معادله انتگرالی تبدیل کرده و سپس ع را بر حسب بقیه جمله‌ها بدست آورده و شکل ساختار را مستقیماً از روی این معادله تعیین می‌کنیم.

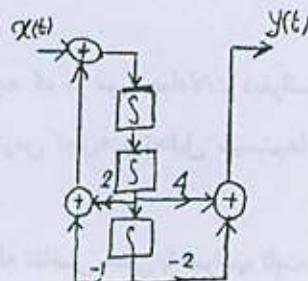
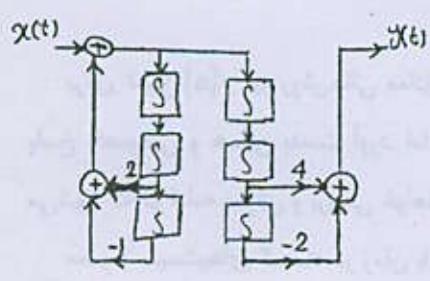
$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\frac{dy}{dt} + y = 4\frac{dx}{dt} - 2x \rightarrow y - 2\int y + \int \int y = 4\int x - 2\int \int x \rightarrow y = 4\int x - 2\int \int x + 2\int y - \int \int y$$



فرم مستقیم I ←

در این فرم برای تحقق یک معادله دیفرانسیل از مرتبه M، حداقل M و حداقل 2M انتگرال‌گیر لازم است.

برای بدست آوردن تحقق به روش مستقیم II، از ساختار روش مستقیم I استفاده می‌شود. بدین شکل که نیمه سمت راست و چپ ساختار I را با یکدیگر تعویض کرده و سپس انتگرالگیرهای قرار گرفته در کنار یکدیگر را ادغام می‌کنیم. دلیل آن که می‌توان نیمه سمت راست و چپ را با یکدیگر تعویض کرد. خطی بودن این دو سیستم سری با یکدیگر و خاصیت جابجایی اپراتور کانولوشن می‌باشد. در شکل‌های زیر مراحل کار و تعیین شکل مستقیم II نشان داده شده‌اند.

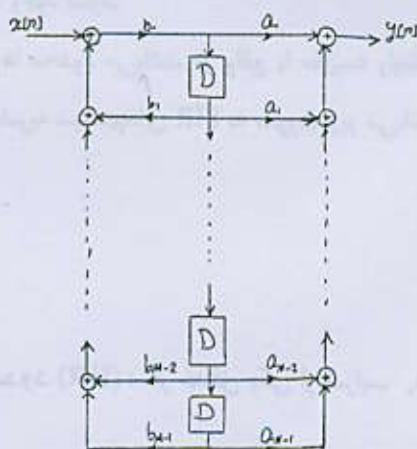


فرم مستقیم II ←

در این فرم برای تحقق یک معادله دیفرانسیل از مرتبه M، نیاز به M انتگرالگیر است.

تذکر: اگرچه راه منطقی تعیین فرم مستقیم II از روی معادله دیفرانسیل و بالعکس استفاده از فرم مستقیم I است، اما با توجه به شکل (۶-۳) و معادله زیر می‌توان ارتباط بین آن‌ها را مستقیماً و بدون استفاده از فرم مستقیم I تعیین کرد.

$$y(t) = b_0 \left\{ a_0 x(t) + a_1 \int_{N-1}^t x + \dots + a_{N-1} \underbrace{\int \dots \int}_{\text{مرتبه } N-1} x + b_1 \int_{M-1}^t y + \dots + b_{M-1} \underbrace{\int \dots \int}_{\text{مرتبه } M-1} y \right\}$$



شکل ۶-۳ - شکل کل فرم مستقیم II

## ۶-۲- سیستم‌های گستته در زمان

اگر  $[n]x$  ورودی و  $[n]y$  خروجی این سیستم باشند، آن‌گاه ورودی و خروجی این سیستم توسط معادله تفاضلی زیر به یکدیگر ارتباط پیدا می‌کند:

$$\sum_{k=0}^M a_k y[n-k] = \sum_{i=0}^N b_i x[n-i]$$

برای تعیین  $[n]y$  نیز روش‌های معادل آنچه که در مورد معادلات دیفرانسیل داشتیم، وجود دارد. یعنی برای این معادلات نیز می‌توان پاسخ خصوصی و همگن بدست آورد. اما در درس تجزیه و تحلیل سیستم‌ها معمولاً از تبدیل  $Z$  برای حل این دسته از معادلات استفاده می‌شود که در ادامه معرفی و بررسی خواهد شد.

معمولًاً سیستم‌های گستته در زمان با معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت به دو دسته تقسیم می‌شوند:

الف - سیستم‌های با پاسخ ضربه محدود (FIR): اگر در معادله تفاضلی سیستم  $a_0 \neq 0$  باشد، آنگاه داریم:

$$y[n] = \sum_{i=0}^N \frac{b_i}{a_0} x[n-i]$$

این سیستم را یک سیستم FIR می‌نامند. سه خاصیت بارز یک سیستم FIR عبارتند از:

- (۱) خروجی در هر لحظه فقط به مقدار ورودی در همان لحظه و لحظات قبل بستگی دارد و مقادیر قبلی خروجی هیچ نقشی در تعیین خروجی در یک لحظه خاص ندارند.
- (۲) در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود ندارد.

(۳) عرض پاسخ ضربه این سیستم‌ها محدود می‌باشد. در واقع با مقایسه رابطه بین ورودی و خروجی آن‌ها و رابطه جمع کانولوشن می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ ضربه سیستم‌های FIR به صورت زیر می‌باشد:

$$h[n] = \begin{cases} \frac{b_n}{a_0} & 0 \leq n \leq N \\ 0 & \text{در بقیه نمونه‌ها} \end{cases}$$

ب - سیستم‌های با پاسخ ضربه نامحدود (IIR): اگر حداقل یکی از ضرایب  $a_i$  به ازای  $i \neq 0$  غیرصفر باشد، آنگاه داریم:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{i=0}^N b_i x[n-i] - \sum_{k=1}^M a_k y[n-k] \right\}$$

این سیستم را IIR می‌نامند. سه خاصیت بارز یک سیستم IIR عبارتند از:

- (۱) خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی در همان لحظه و لحظات قبل، به مقادیر قبلی خروجی نیز بستگی دارد.
- (۲) در ساختار این سیستم‌ها فیدبک وجود دارد.

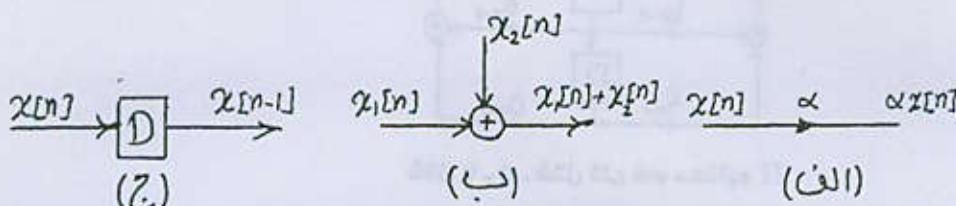
(۳) عرض پاسخ ضربه این سیستم‌ها نامحدود می‌باشد.

در مورد سیستم‌های گستته در زمان بیان شده توسط یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت نیز شرط سکون یا آرامش اولیه، باعث

LTI و علی شدن سیستم می‌شود. قضیه زیر در این ارتباط وجود دارد:

قضیه - شرط لازم و کافی برای آن که یک سیستم بیان شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت، LTI و علی باشد آن است که سیستم در سکون (آرامش) اولیه باشد. یعنی قبل از اعمال ورودی به سیستم، خروجی آن صفر باشد. مثلاً اگر در  $n \leq n_0$  داشته باشیم  $x[n] = 0$ ، آنگاه در  $n \leq n_0$  نیز داریم  $y[n] = 0$  و برای یافتن جواب معادله تفاضلی در  $n > n_0$  باید شرایط اولیه  $y[n_0] = y[n_0 - 1] = \dots = y[n_0 - (M-1)] = 0$  را بکار برد.

مثال: برای آن که سیستم با معادله تفاضلی  $y[n] = u[n-3] + 2y[n] = 4x[n-2] - x[n]$  یک سیستم LTI و علی باشد، باید داشته باشیم  $y[3] = y[2] = y[1] = 0$  تا سیستم شرایط آرامش اولیه را داشته باشد. سیستم‌های گسسته در زمان بیان شده توسط معادله تفاضلی با ضرایب ثابت را نیز می‌توان توسط نمودارهای جعبه‌ای حاصل از اتصال بلوک دیاگرام‌های پایه نشان داد. عناصر پایه شامل خربکننده در اسکالار، جمع‌کننده و تأخیر دهنده در شکل (۶-۴) نشان داده شده‌اند.

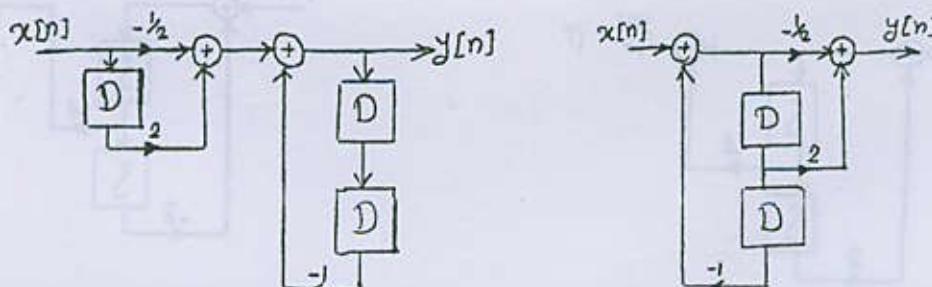


شکل ۶-۴. عناصر پایه مجهت نمایش جعبه‌ای سیستم‌های گسسته در (مان توصیف شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت (الف) خربکننده در اسکالار (ب) همچو کننده (ج) تأخیر دهنده

با استفاده از بلوک‌های پایه فوق می‌توان به روش‌های مختلف سیستم‌ها را تحقق داد. از میان این روش‌ها و ساختارها می‌توان به شکل مستقیم یک (I) و شکل مستقیم دو (II) اشاره کرد که در مثال زیر به بررسی این دو ساختار می‌برداریم.

مثال: نمایش جعبه‌ای  $y[n] = 2x[n-1] - x[n-2] + 2y[n] = 4x[n-2] - x[n-1] - 2y[n]$  را با روش مستقیم I و II بدست آورید.

$$y[n] = 2x[n-1] - \frac{1}{2}x[n] - y[n-2] \quad \text{عمل:}$$



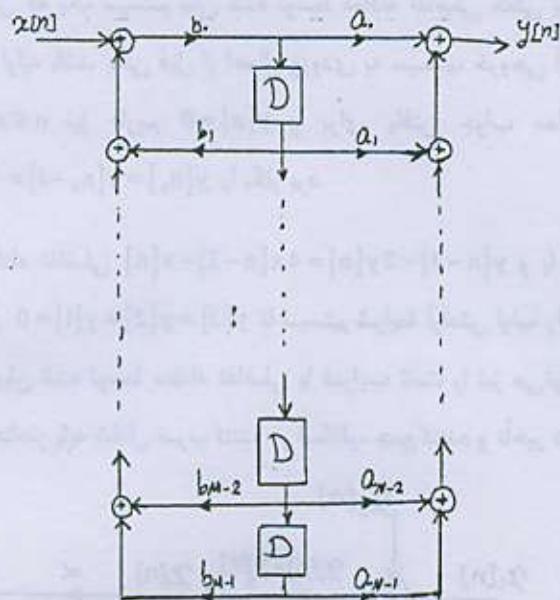
فرم مستقیم I، در این فرم برای تحقق یک معادله تفاضلی M مرتبه  $M$ ، مداخل M و مداخل  $2M$  تأثیردهنده لازم است.

فرم مستقیم II، در این فرم برای تحقق یک معادله تفاضلی از مرتبه  $M$ ، نیاز به  $M$  تأثیردهنده است.

ذکر: در مورد سیستم‌های گسسته نیز می‌توان به طور مستقیم و بدون استفاده از فرم مستقیم I، ارتباط بین معادله تفاضلی و فرم مستقیم II را تعیین کرد. شکل (۶-۵) و رابطه زیر نشان دهنده این ارتباط است.

$$y[n] = b_0 \{a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + \dots + a_{N-1} x[n-N] + b_1 y[n-1] + \dots + b_{M-1} y[n-M]\}$$

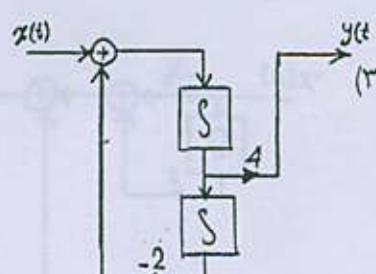
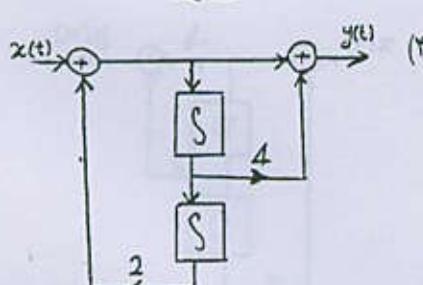
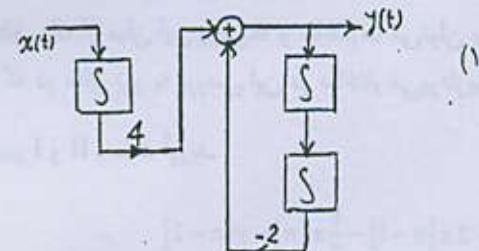
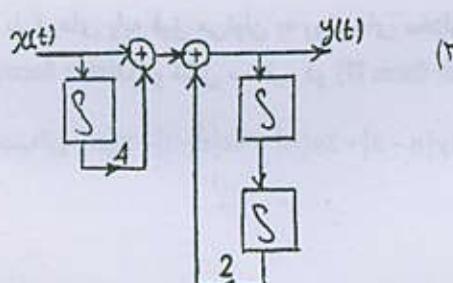
## تمثیله و تکمیل سیستمها



شکل ۴-۵- شکل گل فرم مستقیم II

تست نمونه - شکل مستقیم دو (Direct Form II) برای سیستم با معادله دیفرانسیل زیر کدام است؟

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2y = 4\frac{dx}{dt}$$



حل :

با توجه به مطالب اورده شده، گزینه (۳) صحیح است. دقت کنید گزینه های (۱) و (۲) شکل مستقیم I هستند و در نتیجه از ابتدا نادرست بودن آن ها مشخص است.

تست نمونه - سیستم گستته در زمان با رابطه ورودی - خروجی زیر را در نظر بگیرید. کدام عبارت در مورد این سیستم درست است؟

$$y[n] - y[n-1] = 2x[n]$$

۱) سیستم فوق یک سیستم FIR همواره خطی و علی است.

۲) سیستم فوق یک سیستم IIR همواره خطی و علی است.

۳) سیستم فوق یک سیستم FIR است اما لزوماً خطی و علی نیست.

۴) سیستم فوق یک سیستم IIR است اما لزوماً خطی و علی نیست.

دل:

چون خروجی در هر لحظه به لحظات قبل خروجی بستگی دارد، در نتیجه سیستم فوق IIR است. بنابراین گزینه‌های (۱) و (۳) نادرست می‌باشند. از طرفی آرامش (سکون) اولیه سیستم مشخص نشده است. لذا سیستم لزوماً خطی و علی نیست. پس گزینه (۴) صحیح است.

## خودآزمانی دوم

۱ - (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه یک سیستم خطی و تغییرنابذیر با زمان در شکل زیر نمایش داده شده است.

$$x(t) = U_{-2}(t+1) - U_{-1}(t) - U_{-2}(t-3)$$

اگر ورودی سیستم برابر با باشد، در این صورت مقدار خروجی سیستم در لحظه  $t=2$  کدام است؟

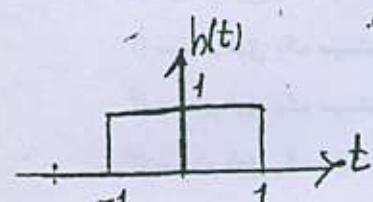
$$(U_{-1}(t)) \text{ معرفی تابع پله واحد و } (U_{-2}(t)) \text{ معرف تابع شیب واحد می‌باشد}$$

1.5 (۴)

3 (۳)

2 (۲)

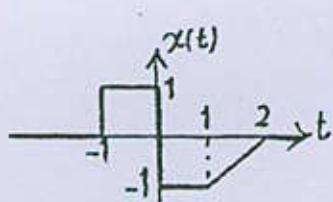
1 (۱)



۲ - (سراسری ۸۰) مقدار  $y(t) = [e^{-t} u(t)] * \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t-3k)$  در رابطه  $t=1$  به ازاء  $y(t)$  را تقریباً چقدر است؟

 $\frac{-2}{e}$  (۴) $\frac{2}{e}$  (۳) $\frac{-1}{e}$  (۲) $\frac{1}{e}$  (۱)

۳ - (سراسری ۸۱) یک سیستم خطی و تغییرنابذیر با زمان دارای پاسخ ضربه  $h(t) = e^{-t} \delta(t) + u(t-1)$  می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t)$  که در



زیر نمایش داده شده است در نقاط  $t=\frac{3}{2}$  و  $t=+\infty$  به ترتیب با کدام گزینه

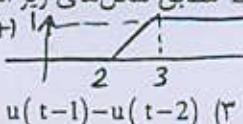
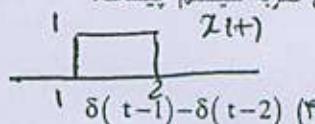
برابر است؟

 $-\frac{1}{2}$  و  $-\frac{1}{2}$  (۴) $-\frac{1}{2}$  و ۰ (۳)

۰ و ۱ (۲)

۱ و -۱ (۱)

۴ - (سراسری ۸۵) ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  یک سیستم LTI مطابق شکل‌های زیر است. پاسخ ضربه سیستم چیست؟

 $u(t-2)$  (۲) $u(t-1)$  (۱)

۵ - (سراسری ۸۵) اگر به یک سیستم LTI زمان - گسته با پاسخ ضربه  $[n]$ ، ورودی  $[n]$ ، خروجی  $[n]$  داشته باشد، در این صورت پاسخ ضربه  $[n]$  اعمال شود، پاسخ این سیستم،  $[n]y$ ، عبارت خواهد بود از:

$$y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n+1] + \frac{1}{4}h[n+2] \quad (۱)$$

$$y[n] = h[n] + 2h[n+1] + 4h[n+2] \quad (۲)$$

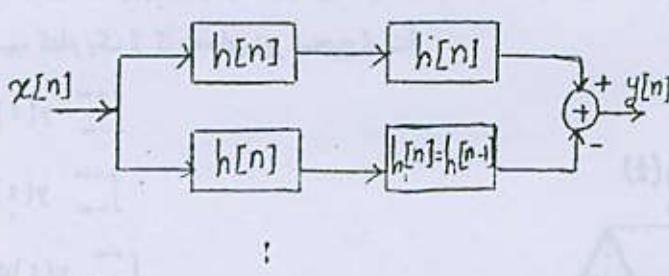
$$y[n] = h[n] + \frac{1}{2}h[n-1] + \frac{1}{4}h[n-2] \quad (۳)$$

$$y[n] = h[n] + 2h[n-1] + 4h[n-2] \quad (۴)$$

۶ - (سراسری ۸۲) اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI گسته به صورت  $h[n] = (n+1)u[n+1]$  باشد، در این صورت پاسخ سیستم به ورودی  $x[n] = u[n] - u[n-2]$  کدام است؟

 $(n+1)u[n]$  (۴) $(2n+1)u[n]$  (۳) $n u[n]$  (۲) $2n u[n]$  (۱)

- (آزاد ۸۰) اگر  $h[n] = (n+1)u[n]$  باشد، پاسخ ضربه کلی سیستم مقابله کدام است؟



$$h_{tot}[n] = \frac{n+1}{2}u[n] \quad (1)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{n+2}{2}u[n] \quad (2)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{(n+1)(n+2)}{2}u[n] \quad (3)$$

$$h_{tot}[n] = \frac{n+1}{n+2}u[n] \quad (4)$$

- (سراسری ۸۲) اگر در شکل زیر  $x(nT) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=\pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$  باشد، در آن صورت  $y(t)$  برابر است با:



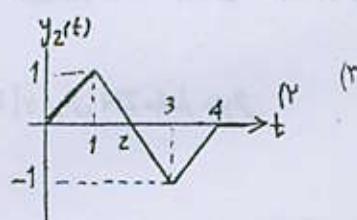
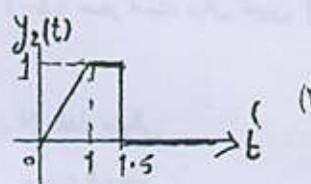
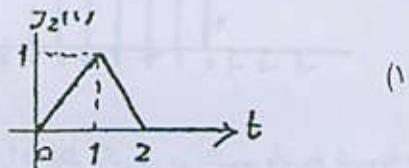
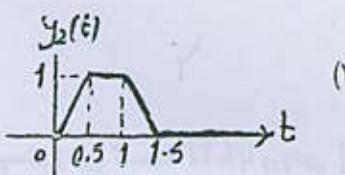
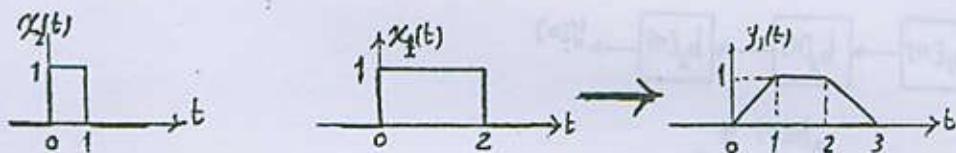
$$x(t) \quad (2)$$

$$h(t) \quad (1)$$

$$x(t) * h(t) \quad (4)$$

$$\delta(t) \quad (3)$$

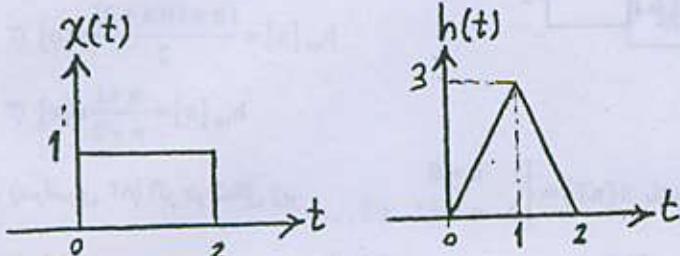
- (سراسری ۸۲) یک سیستم خطی مستقل از زمان (LTI) مفروض است. اگر به این سیستم سیگنال  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$  اعمال شود در این صورت  $y_1(t)$  را در خروجی دریافت می‌کنیم. اگر  $x_2(t)$  اعمال شود، خروجی سیستم چه حواهد بود؟



## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها



- ۱۰ - (آزاد ۸۴) فرض کنید ورودی  $x(t)$  و پاسخ ضربه  $h(t)$  یک سیستم LTI به صورت زیر باشند. در صورتی که خروجی این سیستم را  $y(t)$  بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟



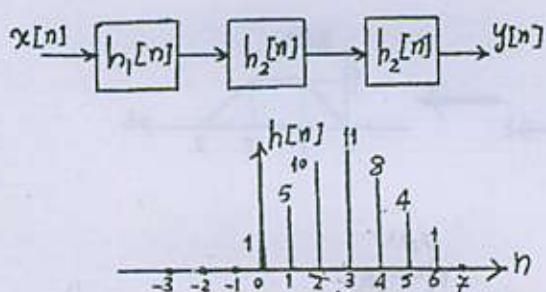
$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 5 \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 3 \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 2.5 \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} y(t) dt = 6 \quad (4)$$

- ۱۱ - (آزاد ۸۴) اتصال متوالی سه سیستم علی LTI را مطابق شکل زیر در نظر بگیرید. پاسخ ضربه  $h_2[n]$  برابر است با  $h_2[n] = u[n] - u[n-2]$  و پاسخ ضربه کلی سیستم به صورت زیر است. مقدار  $h_1[3]$  برابر است با:



$$h_1[3] = 0 \quad (1)$$

$$h_1[3] = 1 \quad (2)$$

$$h_1[3] = 2 \quad (3)$$

$$h_1[3] = 3 \quad (4)$$

- ۱۲ - (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گستته LTI با ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  را در نظر بگیرید. من دانیم پاسخ ضربه سیستم به ازای  $n \geq N$  و یا  $n \leq -1$  صفر است. برای تعیین  $h[n]$  دانستن کدام دسته زوج ورودی - خروجی هم لازم و هم کافی است؟

$$y[k], x[k] \quad (2)$$

$$y[k], x[k] \quad (1)$$

(۳) هیچ کدام

$$y[k], x[k] \quad (3)$$

- ۱۳ - (آزاد ۸۳) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت زیر است:

$$h[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^{-n+1} u[n-1]$$

در صورتی که پاسخ پله آن  $s[n]$  باشد، مقدار  $s[3]$  کدام است؟

$$s[3] = \frac{19}{9} \quad (2)$$

$$s[3] = \frac{5}{3} \quad (1)$$

$$s[3] = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \quad (4)$$

$$s[3] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad (3)$$

۱۴ - اگر پاسخ یک سیستم LTI به ورودی  $y(t) = e^{-3t}u(t)$  برابر  $\frac{dx}{dt}$  باشد، پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

$$h(t) = e^{-2t}u(t) \quad (1)$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t+1) \quad (2)$$

$$h(t) = e^{-2t+1}u(t+1) \quad (3)$$

$$h(t) = e^{-2t+1}u(t) \quad (4)$$

۱۵ - کدام گزینه از جملات زیر نادرست است؟

(۱) یک سیستم LTI گستته در زمان علی است، اگر و تنها اگر پاسخ پله آن به از  $t < 0$  صفر باشد.

(۲) اگر پاسخ ضربه یک سیستم LTI، متاوب و غیرصفر باشد، سیستم فوق لزوماً ناپایدار است.

(۳) اگر عرض پاسخ ضربه یک سیستم LTI گستته در زمان محدود باشد، سیستم لزوماً پایدار است.

(۴) رابطه ورودی - خروجی ترکیب سری دو سیستم LTI به ترتیب اتصال آن‌ها به یکدیگر بستگی ندارد.

۱۶ - (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI دارای پاسخ ضربه  $h(t) = e^{iat}u(3t+1)$  می‌باشد.

((۱) معرف تابع پله واحد است). این سیستم:

(۱) علی و پایدار است      (۲) غیرعلی و ناپایدار است      (۳) غیرعلی و پایدار است      (۴) غیرعلی و ناپایدار است

۱۷ - (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه یک LTI به صورت  $h(t) = e^t u(-1-t)$  داده شده است که در آن  $u(t)$  تابع پله واحد می‌باشد. در این

صورت سیستم چگونه است؟

(۱) پایدار و علی      (۲) ناپایدار و غیرعلی      (۳) ناپایدار و علی      (۴) پایدار و غیرعلی

۱۸ - (سراسری ۸۳) اگر  $z(t) = x(t)*y(t)$  باشد، در آن صورت  $x(2t)*y(2t)$  برابر است با:

$$\frac{1}{2}z(2t) \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}z(2t) \quad (2)$$

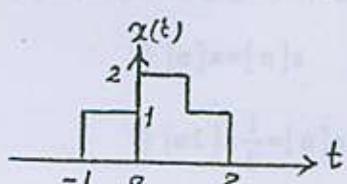
$$2z(2t) \quad (3)$$

$$z(2t) \quad (4)$$

۱۹ - (آزاد ۸۲) فرض کنید ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  یک سیستم LTI به صورت زیر باشد:

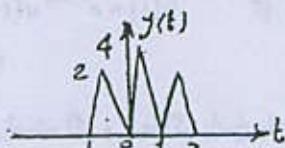


در صورتی که ورودی این سیستم به شکل زیر باشد:



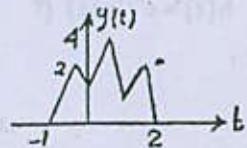
کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم درست است؟

(۲) خروجی به صورت زیر خواهد بود:

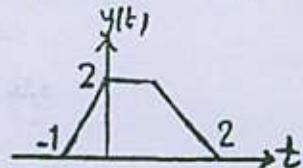


(۳) خروجی این سیستم را نمی‌توان بدون محاسبه پاسخ ضربه آن بدست آورد.

(۱) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



(۳) خروجی به صورت زیر خواهد بود:



۲۰ - (آزاد ۸۲) فرض کنید  $s(t)$  پاسخ پله یک سیستم LTI باشد. در این صورت پاسخ کلی سیستم  $y(t)$ ، به ورودی دلخواه  $x(t)$  با شرط این که  $x(t) = 0$  برای زمان‌های  $t < 0$  صفر باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

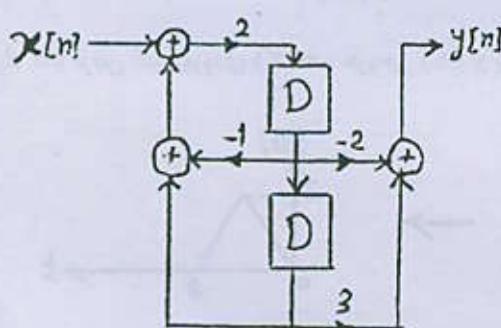
$$y(t) = \int_0^{+\infty} \frac{dx(\tau)}{d\tau} s(t-\tau) d\tau + x(0^+) s(t) \quad (۲)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad (۱)$$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} x(\tau) s(t-\tau) d\tau + x(0^+) s(t) \quad (۴)$$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} \frac{d^2 x(\tau)}{d\tau^2} s(\tau) d\tau \quad (۳)$$

۲۱ - اگر شکل مستقیم دو (Direct Form II) یک سیستم LTI گستته زمانی به صورت مقابل باشد، آن‌گاه معادله تفاضلی بیان کننده این سیستم کدام است؟



$$y[n] = x[n-1] + 2x[n-2] - y[n-1] + y[n-2] \quad (۱)$$

$$y[n] = 2(-2x[n-1] + 3x[n-2] - y[n-1] + y[n-2]) \quad (۲)$$

$$y[n] = 2(x[n-1] + x[n-2] - y[n-1] + 2y[n-2]) \quad (۳)$$

۴ هیچ‌کدام

۲۲ - (سراسری ۸۰) با تعاریف  $b(t) \triangleq x(t) * \delta(2t)$  و  $a[n] \triangleq x[n] * \delta[2n]$  کدام گزینه صحیح است؟

$$b(t) = \frac{1}{2} x(t) \quad (۲)$$

$$a[n] = x[n] \quad (۱)$$

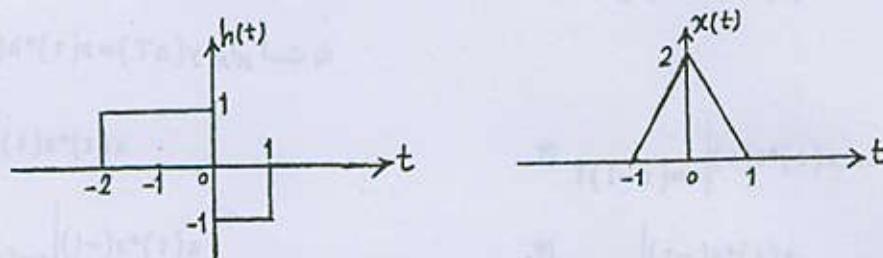
$$b(t) = x(2t) \quad a[n] = x[2n] \quad (۱)$$

$$b(t) = \frac{1}{2} x(2t) \quad (۴)$$

$$a[n] = \frac{1}{2} x[2n] \quad (۴)$$

$$b(t) = x(2t) \quad a[n] = x[n] \quad (۳)$$

۲۳ - (سراسری ۸۴) ورودی  $(x(t))$  و پاسخ ضربه  $(h(t))$  یک سیستم LTI به شکل زیر است:



به ازای چه مقداری از  $t$  خروجی سیستم ماکریم مقدار را دارد و مقدار خروجی در لحظه  $t = 1$  چیست؟

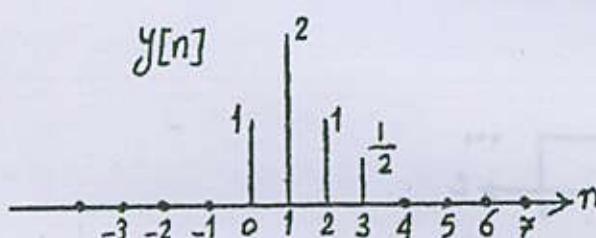
(۱) به ازای  $t = 1$  خروجی ماکریم مقدار را دارد و به ازای  $t = 1$  مقدار خروجی برابر است با ۲.

(۲) به ازای  $t = -1$  خروجی ماکریم مقدار را دارد و به ازای  $t = 1$  مقدار خروجی برابر است با -۱.

(۳) به ازای  $t = 1$  خروجی ماکریم مقدار را دارد و به ازای  $t = 1$  مقدار خروجی برابر است با ۱.

(۴) به ازای  $t = -1$  خروجی ماکریم مقدار را دارد و به ازای  $t = 1$  مقدار خروجی برابر است با  $\frac{-1}{2}$ .

۲۴ - (سراسری ۸۳) پاسخ یک سیستم LTI گستته به ضربه شیفت یافته  $[x[n] = \delta[n-1]]$  به صورت مقابل است. در مورد این سیستم کدام گزینه صحیح است؟



(۱) علی، حافظه‌دار و ناپایدار

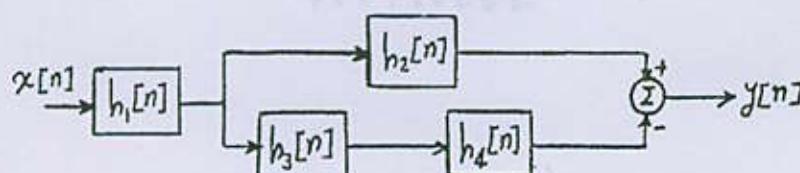
(۲) غیرعلی، حافظه‌دار و ناپایدار

۲۵ - (سراسری ۸۰) اتصال سیستم‌های LTI شکل زیر را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه  $[h[n]]$  سیستم کل با این فرض که:

$$h_4[n] = \delta[n-2], \quad h_3[n] = h_2[n] = (n+1)u[n]$$

$$h_1[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{4}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

باشد، کدام است؟



$$\delta[n] - \frac{1}{2}u[n] + \delta[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}u[n-1] - \frac{1}{2}u[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3] \quad (۴)$$

$$u[n] - \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + u[n-2] \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2}\delta[n] + \frac{5}{4}\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \frac{5}{2}u[n-3] \quad (۳)$$

۲۶ - (سراسری ۸۴) اگر  $y(t) = s(T-t) \Delta x(t) * h(t)$  باشد که در آن  $h(t) = s(t) * h(t)$  است، در آن صورت مقدار

$$y(nT) = x(t) * h(t) \Big|_{t=nT}$$

$$x(t) * s(t) \Big|_{t=(n-1)T} \quad (2)$$

$$x(t) * s(-t) \Big|_{t=nT} \quad (4)$$

$$x(t) * s(t) \Big|_{t=nT} \quad (1)$$

$$x(t) * s(-t) \Big|_{t=(n-1)T} \quad (3)$$

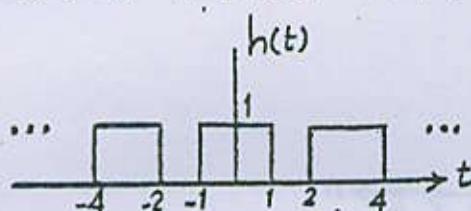
۲۷ - سیستم گستته در زمان با رابطه ورودی - خروجی و شرایط اولیه زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{cases} y[n] - y[n-2] = x[n] \\ y[0] = y[-1] = 0 \end{cases}$$

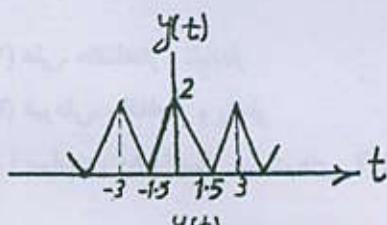
این سیستم به ازای کدام یک از ورودی‌های  $\underbrace{x_1[n]}_{\text{LTI}} = u[n] - u[n-4]$  و  $\underbrace{x_2[n]}_{\text{LTI}} = \delta[n] - u[n]$  و  $x_3[n] = u[n] - u[n-4]$  و  $x_4[n] = 0$  و علی است؟

(۱) هر دو ورودی  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$   
 (۲) هیچ کدام از ورودی‌ها

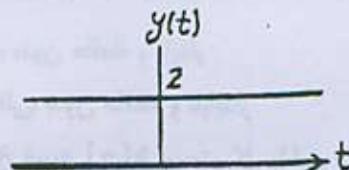
۲۸ - (سراسری ۸۵) فرض کنید پاسخ ضربه یک سیگنال پریودیک با پریود  $T_0 = 3$  به صورت زیر باشد. اگر سیگنال ورودی به سیستم برابر  $x(t) = u(t+1) - u(t-1)$  باشد، خروجی سیستم کدام از موارد زیر است؟



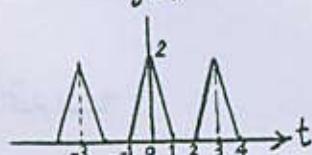
(2)



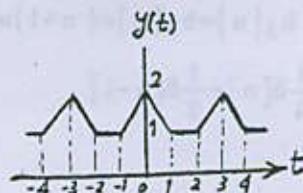
(1)



(3)



(4)



(3)

پادداشت

## ۲- تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان - مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه

در بخش‌های قبلی به معرفی سیگنال‌ها و سیستم‌ها و خواص آن‌ها پرداخته و سپس به تحلیل سیستم‌های LTI پیوسته و گسته در زمان بر مبنای انتگرال یا جمع کاتولوشن پرداختیم. در بخش‌های آتی این جزو به معرفی و بررسی تحلیل فوریه برای سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته در زمان می‌پردازیم که بر مبنای نوشتند یک سیگنال بر حسب سیگنال نمائی مختلط (یا سیگنال سینوسی و کسینوسی) می‌باشد. بر این مبنای سری فوریه پیوسته در زمان (برای سیگنال‌های متناوب) و تبدیل فوریه پیوسته در زمان (برای سیگنال‌های متناوب و نامتناوب) معرفی می‌گردند. سری فوریه و تبدیل فوریه دو مزیت عمده دارند. اولاً در تحلیل و طراحی سیستم‌ها دانستن پارامترها، خواص و مفاهیم حوزه فرکانس مانند پهنای باند، طیف سیگنال و .... مفید می‌باشد. ثانیاً خاصیت جمع آثار یک سیستم خطی و این واقعیت که پارامتر یک سیستم LTI به ورودی سینوسی با یک فرکانس خاص، یک سینوسی با همان فرکانس است، باعث می‌گردد تا روابط و ابزار مناسبی چیز تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها در حوزه فوریه حاصل گردد. در واقع تبدیل فوریه (یا لاپلاس) به ما اجازه می‌دهد تا یک معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت توصیف کننده یک سیستم LTI را به یک معادله جبری تبدیل نمائیم.

### ۷- پاسخ سیستم‌های پیوسته در زمان LTI به توابع نمائی مختلط

در بخش‌های قبلی نمایش و تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI براساس انتگرال کاتولوشن صورت گرفت. این نمایش بر مبنای خاصیت غربالی تابع ضربه واحد بود که در واقع نمایش سیگنال‌ها به صورت ترکیب خطی ضربه‌های جابجا شده می‌باشد. در این بخش به دنبال نوع دیگر از نمایش سیگنال‌ها بر حسب سیگنال‌های پایه می‌باشیم به گونه‌ای که پاسخ سیستم‌های LTI به این سیگنال‌های پایه ساده‌تر بددست آیند. پس در واقع در این بخش به دنبال سیگنال‌های پایه‌ای می‌باشیم که دو خاصیت اساسی زیر را داشته باشند:

- ۱- باید بتوان تعداد زیادی از سیگنال‌های مفید را به صورت ترکیب خطی از این سیگنال‌های پایه نوشت. (شرط وجود و همگرایی)
- ۲- پاسخ سیستم LTI به هر کدام از سیگنال‌های پایه باید به سادگی بددست آید. در نتیجه با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توان پاسخ را به سیگنال ورودی نوشته شده بر حسب این سیگنال‌های پایه به سادگی بددست آورد.

تعريف: سیگنالی که پاسخ سیستم به آن، حاصلضرب یک عدد ثابت (در حالت کلی می‌تواند مختلط باشد) در آن سیگنال باشد را تابع ویژه و دامنه این عدد ثابت را مقدار ویژه سیستم می‌نامند (با مقدار ویژه ماتریس‌ها اشتباه نشود!!). شکل (۷-۱) نشان دهنده تعریف فوق می‌باشد.



شکل ۷-۱- (۱)  $y(t) = Kx(t)$  یک تابع ویژه و  $|K|$  مقدار ویژه سیستم می‌باشد

قضیه، سیگنال  $x(t) = e^s t$  در حالت کلی یک عدد مختلط است) یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد.

اثبات:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau) h(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)} h(\tau) d\tau = e^s \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau = H(s) e^s$$

بنابراین اگر به سیستم LTI ورودی  $e^s$  اعمال شود، آنگاه باسخ سیستم به این ورودی  $H(s) e^s$  خواهد بود که  $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt$  می‌باشد و  $y(t) = H(s) e^s$  باسخ ضربه سیستم است.

مثال: سیستم تأخیر دهنده  $y(t) = x(t-t_0)$  را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی  $e^s$  اعمال کنیم، داریم:

$$y(t) = x(t-t_0) = e^{s(t-t_0)} = e^s \cdot e^{-st_0} \cdot x(t) = H(s)x(t)$$

حال اگر از طریق باسخ ضربه بخواهیم  $H(s)$  را بدست آوریم خواهیم داشت:

$$h(t) = \delta(t-t_0) \Rightarrow H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-t_0) e^{-st} dt = e^{-st_0}$$

باتوجه به قضیه اخیر و با در نظر گرفتن آن که  $s$  در حالت کلی می‌تواند یک عدد مختلط باشد، می‌توان سه نوع نمایش سیگنال‌ها برحسب توابع  $e^s$  را معرفی کرد

(۱) سری فوریه پیوسته در زمان: اگر  $\omega_0 s = jk\omega_0$  باشد ( $k$  عدد صحیح) آنگاه:

$$(e^{jk\omega_0 t}) \quad (ک=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad \text{توابع ویژه (هارمونیک‌ها)}$$

در این حالت مکان هندسی  $s$  ها نقاط منفصل روی محور  $\omega$  می‌باشد (شکل ۲-۷-الف) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های  $e^{jk\omega_0 t}$  نوشته می‌شود. باسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $e^{jk\omega_0 t} H(jk\omega_0)$  است. این نوع نمایش را سری فوریه پیوسته در زمان سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.

(۲) تبدیل فوریه پیوسته در زمان: اگر  $\omega_0 s = j\omega$  باشد آنگاه:

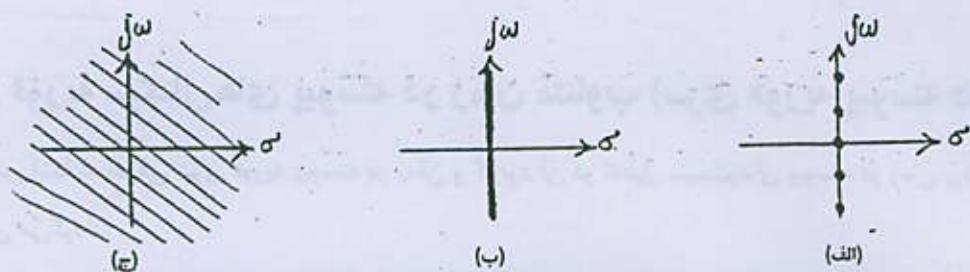
$$(e^{j\omega t}) \quad \text{توابع ویژه}$$

در این حالت مکان هندسی  $s$  ها کل محور  $\omega$  می‌باشد (شکل ۲-۷-ب) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های  $e^{j\omega t}$  نوشته می‌شود. باسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $e^{j\omega t} H(j\omega)$  است. این نوع نمایش را تبدیل فوریه پیوسته در زمان سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.

(۳) تبدیل لاپلاس: اگر  $\omega_0 s = \sigma + j\omega$  باشد آنگاه:

$$(e^{(\sigma+j\omega)t}) \quad \text{توابع ویژه}$$

در این حالت مکان هندسی  $s$  ها کل صفحه مختلط می‌باشد (شکل ۲-۷-ج) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های  $e^{\sigma t}$  نوشته می‌شود و باسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $e^{\sigma t} H(s)$  است. این نوع نمایش را تبدیل لاپلاس سیگنال می‌نامند و در ادامه بررسی خواهد شد.



شکل ۷-۱- همان S ها در صفحه مفتلت (الف) سری فوریه (ب) تبدیل فوریه (ج) تبدیل لاپلاس

در جدول ۷-۱ خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل فوق آورده شده است:

کاربرد	$H(s)$	پاسخ سیستم به سیگنال پایه	سیگنال‌های پایه	مکان S	s	نام تبدیل
تحلیل سیگنال‌های متاوب	$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-jkw_0t} dt$	$H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$	$e^{jk\omega_0 t}$	نقاط منفصل روی محور $j\omega$	$s = jk\omega_0$	سری فوریه
تحلیل سیگنال‌های متاوب و نامتاوب	$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$	$H(j\omega)e^{j\omega t}$	$e^{j\omega t}$	کل محور $j\omega$	$s = j\omega$	تبدیل فوریه
تحلیل سیگنال‌های متاوب و نامتاوب	$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$	$H(s)e^{st}$	$e^{st}$	کل صفحه مختصاً	$s = \sigma + j\omega$	تبدیل لاپلاس

جدول ۷-۱- خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل بر مبنای تابع نمائی مفتلت

## ۸- تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب (سری فوریه پیوسته در زمان)

در این بخش ابتدا به معرفی سری فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان برداخته و سپس خواص آن معرفی و بررسی می‌گردد.

### ۱- سری فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعريف: سیگنال متناوب  $x(t) \times$  با دوره تناوب اصلی  $T_0$  را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

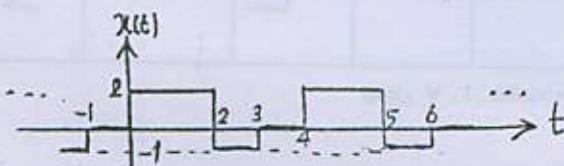
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j k \omega_0 t}$$

در رابطه فوق  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$  فرکانس اصلی (پایه) نامیده می‌شود.  $a_k$  ضرایب سری فوریه می‌باشند و از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j k \omega_0 t} dt$$

در رابطه فوق  $\int_{T_0}$  معرف انتگرال گیری روی هر بازه زمانی دلخواه به اندازه  $T_0$  می‌باشد.

مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال را بدست آورید.



حل: دوره تناوب اصلی این سیگنال  $T_0 = 4$  و در نتیجه فرکانس پایه آن  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{\pi}{2}$  است. بنابراین داریم:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j \frac{k\pi}{2} t}$$

$$a_k = \frac{1}{4} \int_0^4 x(t) e^{-j \frac{k\pi}{2} t} dt = \frac{1}{4} \left( \int_0^1 2 e^{-j \frac{k\pi}{2} t} dt - \int_1^2 e^{-j \frac{k\pi}{2} t} dt \right) \stackrel{k \neq 0}{=} a_k = \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 2 e^{-j \frac{k\pi}{2} t} \Big|_0^1 & -e^{-j \frac{k\pi}{2} t} \Big|_1^2 \\ -j \frac{k\pi}{2} & -j \frac{k\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \times \begin{pmatrix} 2(1 - e^{-j k\pi}) & e^{-j \frac{k\pi}{2}} - e^{-j k\pi} \\ j \frac{k\pi}{2} & j \frac{k\pi}{2} \end{pmatrix} = \frac{2 - 3e^{-j k\pi} + e^{-j \frac{k\pi}{2}}}{j 2 k \pi} = \frac{1}{j 2 k \pi} \left( 2 - 3(-1)^k + e^{-j \frac{k\pi}{2}} \right)$$

اما برای تعیین  $a_0$  داریم:

$$a_0 = \frac{1}{4} \int_0^4 x(t) dt = \frac{1}{4} (2 \times 2 - 1 \times 1) = \frac{3}{4}$$

برای چند کا اول داریم:

$$k=1 : a_1 = \frac{1}{j2\pi} \left( 2+3+e^{-j\frac{3\pi}{2}} \right) = \frac{1}{j2\pi} (5+j) = \frac{1}{2\pi} (1-j5)$$

$$k=2 : a_2 = \frac{1}{j4\pi} \left( 2-3+e^{-j3\pi} \right) = \frac{1}{j4\pi} (2-3-1) = \frac{-2}{j4\pi} = \frac{1}{2\pi} j$$

$$k=3 : a_3 = \frac{1}{j6\pi} \left( 2+3+e^{-j\frac{9\pi}{2}} \right) = \frac{1}{j6\pi} (5-j) = \frac{1}{6\pi} (-1-j5)$$

تذکر: با توجه به تعریف  $a_k$  و مثال اخیر ملاحظه می‌کنید که ضرایب  $a_k$  در حالت کلی مختلط می‌باشند. لذا عموماً برای ترسیم آن‌ها، دامنه  $|a_k|$  و فاز  $\angle a_k$  جداگانه رسم می‌شوند که این منحنی‌ها را نمودار میله‌ای ضرایب سری فوریه می‌نمایند.

تذکر: ضریب  $a_0$  از رابطه  $a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt$  بدست می‌آید. این رابطه مقدار میانگین یا DC یک سیگنال متناوب را می‌دهد. پس  $a_0$  در واقع مقدار DC سیگنال را مشخص می‌کند.

تذکر: برخی از سیگنال‌های متناوب اهمیت زیادی در تحلیل فوریه سیستم‌ها و سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن سری فوریه آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۱-۸) برخی از این سیگنال‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود.

ضرایب سری فوریه	سیگنال
$a_k = \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$	$x(t) = e^{j\omega_0 t}$
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=\pm 1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$	$x(t) = \cos(\omega_0 t)$
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k=1 \\ -\frac{1}{2j} & k=-1 \\ 0 & k \neq \pm 1 \end{cases}$	$x(t) = \sin(\omega_0 t)$
$a_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$	$x(t) = 1$
$a_k = \frac{1}{T}$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nT)$
$a_k = \frac{\omega_0 T_1}{\pi} \sin c\left(\frac{k\omega_0 T_1}{\pi}\right) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$	$x(t) = \begin{cases} 1 &  t  < T_1 \\ 0 & T_1 \leq  t  < \frac{T}{2} \end{cases}$ $x(t) = x(t-T)$

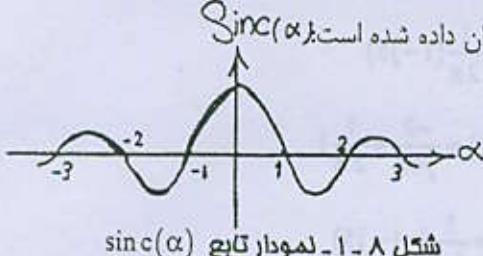
جدول ۱-۸ - ضرایب سری فوریه برخی سیگنال‌های مهم پیوسته در زمان

## تمایه و تملیل سیستم‌ها

تذکر: تابع  $\text{sinc}$  که در جدول (۱.۸) استفاده شده است، یکی از توابع مهیم در تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها می‌باشد. این تابع به صورت زیر

تعریف شده و منحنی آن در شکل (۱.۸) نشان داده شده است:

$$\text{sinc}(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi\alpha}$$

شکل ۱.۸ - لمودار تابع  $\text{sinc}(\alpha)$ 

دقت کنید تابع فوق تقارن زوج دارد و دامنه آن نزولی است. همچنین صفرهای تابع فوق به ازاء  $\alpha = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  می‌باشند.

**شکل مثلثاتی سری فوریه:** در مبحث سیگنال‌ها و سیستم‌ها نمایش سری فوریه به صورت نمائی متداولتر می‌باشد. اما اگر سیگنال

$x(t)$  حقیقی باشد می‌توان آن را به صورت مثلثاتی و به صورت زیر نمایش داد:

$$x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t)]$$

ضرایب  $a_k$ ,  $A_k$ ,  $\theta_k$ ,  $B_k$  و  $C_k$  ارتباط مستقیمی با ضرایب  $a$ , دارند و داریم:

$$a_k = A_k e^{j\theta_k} = B_k + jC_k$$

بنابراین اگر  $x$  به شکل قطبی نوشته شود، از روی دامنه و فاز آن می‌توان  $A_k$  و  $\theta_k$  را بدست آورد. اما اگر  $a$  به شکل دکارتی

نوشته شود، از روی قسمت حقیقی و موهومی آن می‌توان  $B_k$  و  $C_k$  را تعیین کرد.

تقارن‌های سیگنال در شکل دوم مثلثاتی سری فوریه (نوشتن سری بر حسب سینوس‌ها و کسینوس‌ها) اهمیت زیادی دارند و باعث

ساده‌تر شدن شکل سری به شرح زیر می‌گردند:

(۱) اگر  $x(t)$  تقارن زوج داشته باشد، آنگاه داریم:

$$C_k = 0 \quad \text{به ازاء کلیه } k \text{ ها} \Rightarrow x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega_0 t)$$

(۲) اگر  $x(t)$  تقارن فرد داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} B_k = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \quad \text{به ازاء کلیه } k \text{ ها} \Rightarrow x(t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega_0 t)$$

(۳) اگر  $x(t)$  تقارن نیم موج داشته باشد یعنی  $x(t) = -x(t \pm \frac{T}{2})$  (از نظر نمودار سیگنالی که تقارن نیم موج دارد، در نصف دوره تناوب

خود قرینه نصف دیگر می‌باشد) آنگاه داریم:

$$\begin{cases} C_k = B_k = 0 \\ a_0 = 0 \end{cases} \quad \text{به ازاء } k \text{ زوج} \Rightarrow x(t) = \sum_{\substack{k=1 \\ \text{فرد}}}^{\infty} (B_k \cos(k\omega_0 t) - C_k \sin(k\omega_0 t))$$

(۴) اگر  $x(t)$  تقارن زوج و نیم‌موج داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} C_k = 0 & \text{به ازاء کلیه } k \text{ ها} \\ B_k = 0 & \text{به ازاء } k \text{ زوج} \\ a_0 = 0 & \text{به ازاء } k=0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cos(k\omega_0 t)$$

(۵) اگر  $x(t)$  تقارن فرد و نیم‌موج داشته باشد، آنگاه داریم:

$$\begin{cases} B_k = 0 & \text{به ازاء کلیه } k \text{ ها} \\ C_k = 0 & \text{به ازاء } k \text{ زوج} \\ a_0 = 0 & \text{به ازاء } k=0 \end{cases} \Rightarrow x(t) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\omega_0 t)$$

**همگرائی سری فوریه:** ملاحظه کردید که سری فوریه برای یک سیگنال پیوسته در زمان به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

این سری هنگامی معنا پیدا می‌کند و قابل استفاده است که:

(۱) اولاً هیچکدام از ضرایب  $a_k$  بی‌نهایت نشوند.

(۲) ثانیاً سری به مقدار  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$  همگرا شود.

قضایای متعددی در زمینه همگرائی سری فوریه در کتب مختلف ریاضی آورده شده‌اند. از آن جمله می‌توان به قضیه (شرایط) دریکله اشاره کرد

**قضیه (شرایط) دریکله:** اگر  $x(t)$  دارای سه شرط زیر باشد:

شرط ۱:  $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ .

شرط ۲: تعداد نقاط اکسترم (۱) در هر دوره تناوب نامحدود نباشد.

شرط ۳: تعداد نقاط ناییوستگی (۱) در هر دوره تناوب و همچنین مقدار هر ناییوستگی نامحدود نباشند.

آنگاه اولاً کلیه ضرایب سری فوریه  $a_k$  برای این سیگنال محدود می‌باشند. ثانیاً نمایش سری فوریه در صورت پیوسته بودن  $x(t)$  در هر مقدار  $t$  و در صورت ناییوستگی (۱) در تمام مقادیر  $t$  غیر از نقاط انفصل، با مقدار سیگنال برابر است. سری در نقاط انفصل به مقدار میانگین دو طرف ناییوستگی میل می‌کند.

## ۲-۸- کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI

در قسمت‌های قبل بخش (۱-۸) به معرفی سری فوریه پیوسته در زمان و شرایط همگرائی آن پرداختیم. اما در این قسمت کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های LTI را بررسی خواهیم کرد.

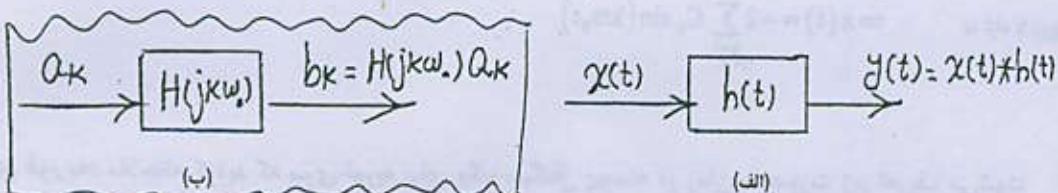
فرض کنید یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h(t)$  مفروض است. به این سبستم یک ورودی متناوب  $x(t)$  اعمال می‌کنیم. هدف تعیین خروجی  $y(t)$  است (شکل ۲-۸ - الف). بدینهی است به دلیل LTI بودن سیستم، خروجی  $y(t)$  نیز متناوب با همان دوره تنابع اصلی ورودی است. برای تحلیل این سیستم توسط تحلیل سری فوریه، ابتدا سری فوریه  $x(t)$  را نوشه و با استفاده از آن ضرایب سری فوریه خروجی را بدست می‌آوریم (شکل ۲-۸ - ب)).

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$b_k = H(jk\omega_0) a_k$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$



شکل ۲-۸ - (الف) رابطه ورودی - خروجی یک سیستم LTI در موجه (مان (ب) رابطه بین ضرایب سری فوریه و خروجی ۹ خروجی)

بنابراین با داشتن ورودی و پاسخ ضربه یک سیستم می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. اما تعیین خروجی از روی ضرایب سری فوریه آن غیر از موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا در مواقعي که خروجی  $y(t)$  مورد نظر باشد، استفاده از سری فوریه (جز در موارد خاص) مفید نیست. اما در صورتی که تعیین ضرایب سری فوریه خروجی که در واقع دامنه هارمونیک‌هادر خروجی یک سیستم (یک فیلتر) هستند، مورد نظر باشند، استفاده از سری فوریه مفید خواهد بود.

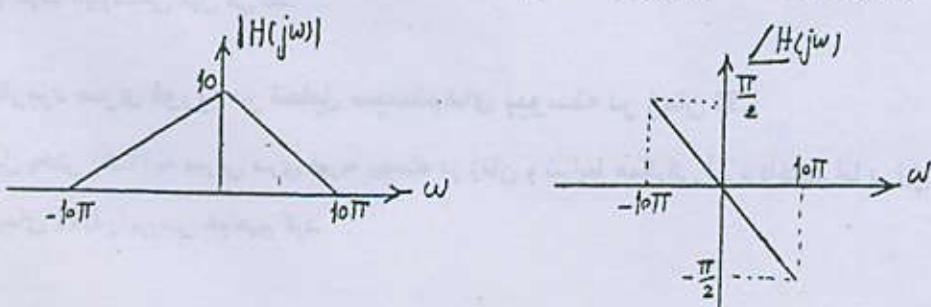
تذکر: موارد خاصی که از روی ضرایب سری فوریه یک سیگنال می‌توان آن سیگنال را بدست آورد معمولاً موقعي است که سیگنال یکی از سیگنال‌های جدول ۱-۸) باشد.

تذکر: در برخی مسائل بجای  $y(t)$  یک سیستم،  $H(j\omega)$  داده می‌شود که پاسخ فرکانسی سیستم نامیده می‌شود و در بخش‌های آتی معرفی خواهد شد. بدینهی است برای تعیین  $H(jk\omega_0)$  از روی  $H(j\omega)$  باید مقدار  $H(j\omega)$  را در مضارب صحیح  $\omega$  محاسبه کرد.

مثال: فرض کنید  $x(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تنابع اصلی  $T_0 = \frac{1}{2}$  و ضرایب سری فوریه  $a_0 = 1$

$a_{-1} = a_1 = \frac{1}{2}$  و  $a_2 = a_{-2} = \frac{1}{4}$  می‌باشد. این سیگنال به یک سیستم با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega)$  مطابق با شکل زیر زیر اعمال

می‌شود. ضرایب سری فوریه و معادله خروجی را بدست آورید.



هل: اگر ضرایب سری فوریه خروجی را  $b_k$  بنامیم، داریم:

$$\begin{cases} b_k = a_k H(jk\omega_0) \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 4\pi \end{cases} \Rightarrow b_k = a_k H(j4k\pi) \quad \begin{matrix} |b_k| = |a_k| |H(j4k\pi)| \\ \angle b_k = \angle a_k + \angle H(j4k\pi) \end{matrix}$$

بنابراین به ازاء  $k$  های مختلف داریم:

$$\begin{cases} |b_0| = 1 \times 10 = 10 \\ \angle b_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow b_0 = 10$$

$$\begin{cases} |b_1| = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \\ \angle b_1 = 0 - \frac{\pi}{5} = -\frac{\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_1 = 3 e^{-j\frac{\pi}{5}}$$

$$\begin{cases} |b_{-1}| = \frac{1}{2} \times 6 = 3 \\ \angle b_{-1} = 0 + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_{-1} = 3 e^{j\frac{\pi}{5}}$$

$$\begin{cases} |b_2| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \\ \angle b_2 = 0 - \frac{2\pi}{5} = -\frac{2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{5}}$$

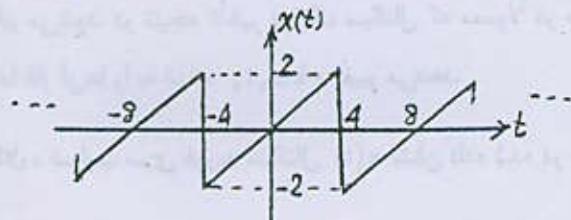
$$\begin{cases} |b_{-2}| = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \\ \angle b_{-2} = 0 + \frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Rightarrow b_{-2} = \frac{1}{2} e^{j\frac{2\pi}{5}}$$

بنابراین خروجی  $y(t)$  را می‌توان به صورت زیر نوشت:

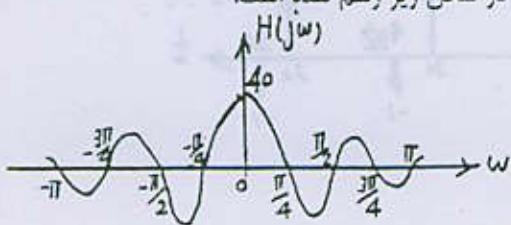
$$y(t) = 10 + 3 e^{j(4\pi t - \frac{\pi}{5})} + 3 e^{-j(4\pi t - \frac{\pi}{5})} + \frac{1}{2} e^{j(8\pi t - \frac{2\pi}{5})} + \frac{1}{2} e^{-j(8\pi t - \frac{2\pi}{5})} \Rightarrow y(t) = 10 + 6 \cos\left(4\pi t - \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(8\pi t - \frac{2\pi}{5}\right)$$

مثال: یک سیستم با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega) = \frac{10 \sin(4\omega)}{\omega}$  را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم موج دندانه ارهای شکل زیر را اعمال

کنیم، ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورید.



هل: پاسخ فرکانسی سیستم به شکل تابع  $\text{sinc}$  است و به صورت تقریبی در شکل زیر رسم شده است.



اما اگر در سیگنال ورودی توجه کنیم ملاحظه خواهیم کرد:

$$T_0 = 8 \rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

ملاحظه می‌شود که هارمونیک‌های ورودی غیر از هارمونیک DC روی صفرهای  $(j\omega)H$  قرار می‌گیرند. بنابراین این سیستم فقط هارمونیک DC ورودی را از خود عبور می‌دهد. زیرا داریم:

$$H\left(j\frac{k\pi}{4}\right) = 0 \quad k \neq 0$$

اما سیگنال ورودی یک سیگنال فرد است و فاقد مؤلفه DC است و برای این سیگنال  $a_0 = 0$  می‌باشد. بنابراین تمام ضرایب سری فوریه خروجی برابر صفر می‌باشند و در نتیجه  $y(t) = 0$  خواهد بود.

مثال: ضرایب سری فوریه قطار ضربه  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 5\delta\left(t + k\frac{T}{3}\right)x$  را بدست آورید.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{5}{10} \delta\left(t + \frac{kT}{30}\right) \stackrel{(1.1)}{\Rightarrow} a_k = \frac{1}{2} \times \frac{1}{T} = \frac{15}{30}$$

هل:

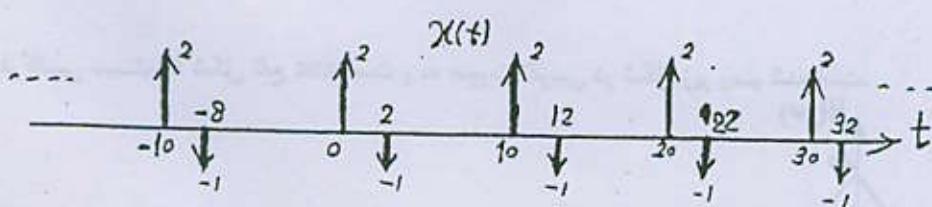
### ۲-۳-۸ - خواص سری فوریه پیوسته در زمان

نمایش سری فوریه خواص مهمی دارد که مفهوم آن را بازتر کرده و همچنین برای تعیین ضرایب سری فوریه سیگنال‌های پیچیده‌تر مفید می‌باشد. این خواص در جدول (۲.۸) آورده شده‌اند و در ادامه بررسی خواهند گردید. فرآگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر می‌باشد.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه ضرایب سری فوریه از انتگرال‌گیری استفاده می‌شود، بنابراین ضرایب سری فوریه خاصیت خطی دارند.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا و تبدیل به  $x(t-t_0)$  گردد، آنگاه ضریب سری فوریه سیگنال جدید برابر می‌شود. در نتیجه تأخیر در یک سیگنال که معمولاً در سیستم‌های مخابراتی اتفاق می‌افتد، دامنه ضرایب سری فوریه را تغییر نداده و فقط فاز آن‌ها را به اندازه  $-k\omega_0 t_0$  تغییر می‌دهد.

مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال  $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u(n) - \sum_{n=0}^{\infty} n^2 u(-n)$  را بدست آورید.



هل: اگر  $x_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-10n)$  فرض شود، طبق جدول (۱) داریم  $a_k = \frac{1}{10}$ . از طرفی با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که

$$\text{بنابراین با توجه به خواص خطی و جابجایی زمانی ضریب سری فوریه داریم: } b_k = 2x_1(t) - x_1(t-2)$$

$$b_k = 2a_k - a_k e^{-jk\frac{2\pi}{10}k^2} = \frac{1}{10} \left( 2 - e^{-j\frac{2\pi k}{5}} \right)$$

ضرایب سری فوریه	سینکمال متناسب	خاصیت
$a_k$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} x(t)$ متناسب با دوره تناوب $T_0$ و فرکانس پایه	
$b_k$	$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} y(t)$ متناسب با دوره تناوب $T_0$ و فرکانس پایه	
$Aa_k + Bb_k$	$Ax(t) + By(t)$	خطی بودن
$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$	$x(t-t_0)$	جابجایی زمانی
$a_{k-M}$	$e^{jM\omega_0 t} x(t)$	جابجایی فرکانسی
$a_{-k}$	$x^*(t)$	مزدوج گیری
$a_{-k}$	$x(-t)$	ولوونگی زمانی
	$x(\alpha t) \quad \alpha > 0$	
$a_k$	$\frac{T_0}{\alpha} \text{ متناسب با دوره تناوب اصلی}$	نتیر مقياس زمانی
$T_0 a_k b_k$	$\int_{T_0} x(\tau) y(t-\tau) d\tau$	کالولشن متناسب
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{k-1}$	$x(t) y(t)$	ضریب در حوزه زمان
$jk \omega_0 a_k$	$\frac{dx(t)}{dt}$	مشتق در حوزه زمان
$\frac{a_k}{jk \omega_0} \quad k \neq 0$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \quad \text{فاقد مؤلفه DC} \quad x(t)$	انتگرال در حوزه زمان
$a_k = a_{-k}$ $\text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\}$ $\text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\}$ $ a_k  =  a_{-k} $ $\angle a_k = -\angle a_{-k}$	$x(t) = x^*(t) \quad \text{حقیقی} \quad x(t)$	تقارن سینکمال‌های حقیقی
$a_k = a_k^* = a_{-k}$ $(a_k \text{ حقیقی و زوج})$	$x(t) = x^*(t) = x(-t) \quad x(t)$	تقارن سینکمال‌های حقیقی و زوج
$a_k = -a_k^* = -a_{-k}$ $(a_k \text{ مهوم و فرد})$	$x(t) = x^*(t) = -x(-t) \quad x(t)$	تقارن سینکمال‌های حقیقی و فرد
$a_k = \text{Re}\{a_k\} + j\text{Im}\{a_k\} = \text{ev}\{a_k\} + \text{odd}\{a_k\}$ $\text{Re}\{a_k\} = \text{ev}\{a_k\}$ $j\text{Im}\{a_k\} = \text{odd}\{a_k\}$	$x(t) = x_e(t) + x_o(t) \quad x(t)$	تجزیه زوج و فرد سینکمال‌های حقیقی
$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0}  x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty}  a_k ^2$		رابطه بارسوال برای سینکمال‌های متناسب

جدول ۸- خواص سری فوریه پیوسته در زمان

(۳) جابجایی فرکانسی: این خاصیت مشابه خاصیت جابجایی زمانی است. یعنی اگر ضرایب سری فوریه روی محور فرکانس جابجا شده و تبدیل به  $\omega$  گردند، آنگاه سیگنال زمانی در  $e^{j\omega t}$  ضرب می‌شود. در نتیجه با ضرب یک سیگنال در  $e^{j\omega t}$ ، می‌توان ضرایب سری فوریه آن را جابجا کرد. (سیگنال را مدوله کرد)

(۴) مزدوج گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، ضرایب سری فوریه آن به  $\omega$  تبدیل می‌شوند. یعنی علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی نیز قرینه می‌شوند.

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز قرینه می‌شوند.

(۶) تغییر مقیاس زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان فشرده یا گسترده گردد، ضرایب سری فوریه آن هیچ تغییری نخواهد کرد. وقتی کنید سیگنال فشرده یا گسترده شده در حوزه زمان یعنی  $(at)x(a>0)$  از نظر شکل مشابه  $(t)x$  است اما فقط دوره تناوب اصلی آن  $\frac{T_0}{a}$  می‌باشد. لذا اگرچه شکل ضرایب سری فوریه سیگنال جدید مانند سیگنال قبلی است، اما فرکانس پایه سیگنال جدید  $a\omega_0$  است.

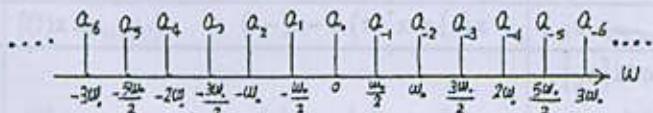
مثال: فرض کنید  $(t)x$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $T_0$  و ضرایب سری فوریه  $a$  می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال  $y(t)=x^*(2t)-x\left(\frac{-t}{2}\right)$  می‌باشند. سیگنال  $y(t)$  نیز دوره تناوب  $2T_0$  و فرکانس اصلی  $\frac{\omega_0}{2}$  دارد.

طبق جدول (۲-۸) ضرایب سری فوریه  $(2t)x$  برابر  $a$  با فرکانس پایه  $2\omega_0$  و ضرایب سری فوریه  $x\left(\frac{-t}{2}\right)$  برابر  $-a$  با فرکانس پایه  $\frac{\omega_0}{2}$  است. در شکل‌های زیر ضرایب سری فوریه این سیگنال‌ها و همچنین ضرایب  $y$  نشان داده شده‌اند:

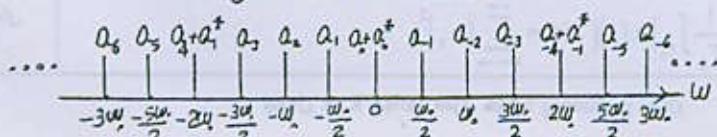
ضرایب سری فوریه  $x^*(2t)$



ضرایب سری فوریه  $x\left(\frac{-t}{2}\right)$



ضرایب سری فوریه  $y(t)$





بنابراین داریم:

$$b_2 = a_{-2}, \quad b_4 = a_{-4} + a_{-1}^*$$

مثال: اگر  $(t)x$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $T_0 = 6$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  باشد و ضرایب سری فوریه  $x(-3t-4)$  را  $b_k$  بنامیم، رابطه بین  $b_k$  و  $a_k$  را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\text{FS}} a_k \\ x(t-4) &\xrightarrow{\text{FS}} e^{-jk\frac{2\pi}{6} \times 4} a_k = a_k e^{-jk\frac{4\pi}{3}} \\ x(-t-4) &\xrightarrow{\text{FS}} a_{-k} e^{jk\frac{4\pi}{3}} \\ x(-3t-4) &\xrightarrow{\text{FS}} b_k = a_{-k} e^{jk\frac{4\pi}{3}} \quad k=0, \pm 3, \pm 6, \dots \end{aligned}$$

دقت کنید فرکانس پایه  $(t)x$  برابر  $\frac{\pi}{3}$  است در حالی که فرکانس پایه سیگنال جدید  $\pi$  می‌باشد.

(۷) کانولوشن متناوب: در جدول (۲-۸) فرمول مربوطه به کانولوشن متناوب آورده شده است. همانطور که ملاحظه می‌کنید، این ایزاتور در حوزه فوریه به ضرب تبدیل می‌شود.

(۸) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، ضرایب سری فوریه آنها با یکدیگر کانولوشن شوند. این خاصیت در مدولاسیون و نمونه‌برداری سیگنال‌های متناوب کاربرد دارد.

مثال: فرض کنید  $(t)x$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب  $T_0 = 4$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال  $y(t) = 2x(t)\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + x(2t)$

مل: با توجه به آن که دوره تناوب  $(t)x$  برابر  $T_0 = 4$  می‌باشد بنابراین فرکانس اصلی آن  $\frac{\pi}{2}$  است. بنابراین برای  $(t)y$  دوره

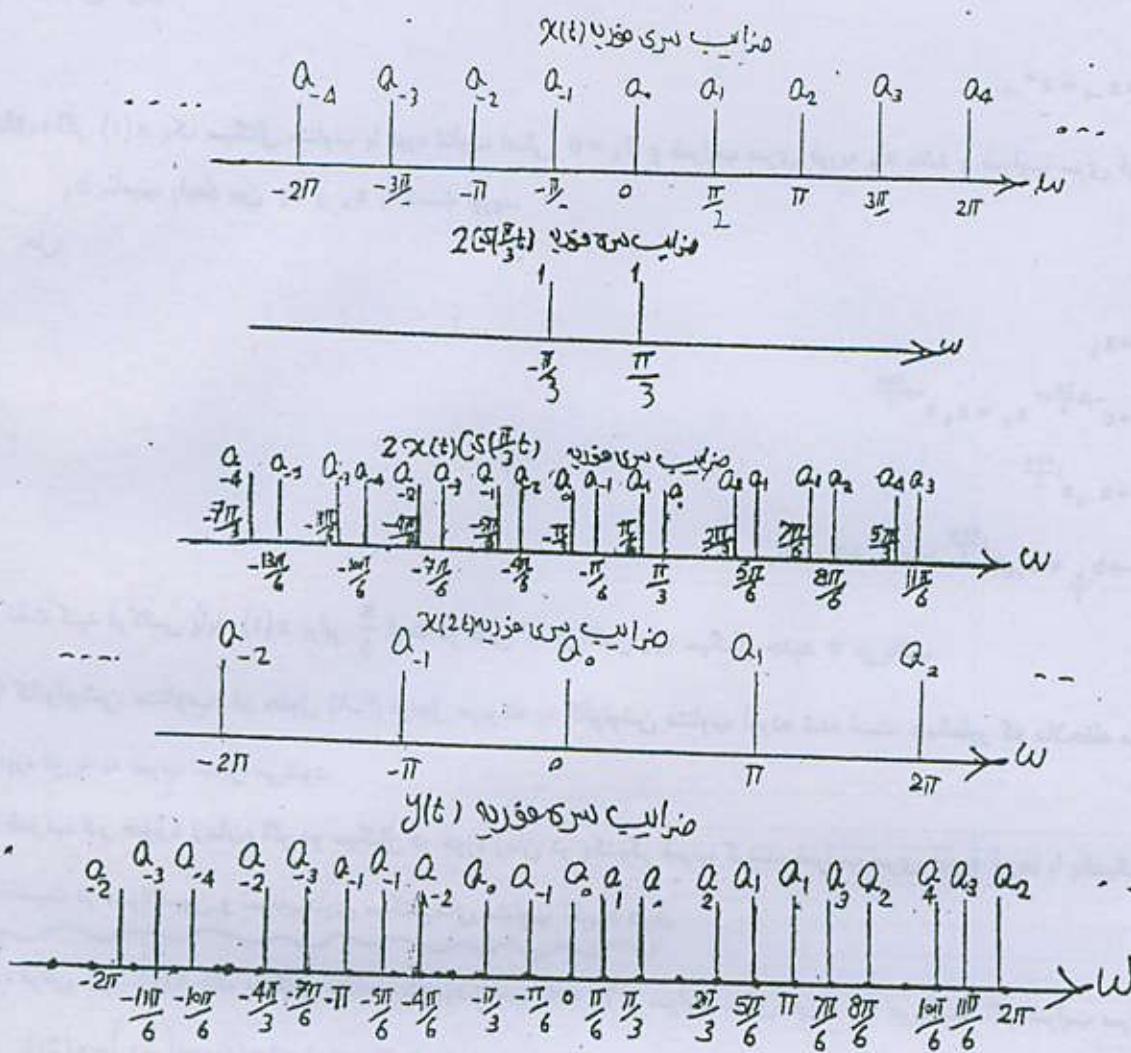
تناوب  $T_0 = 2$  و فرکانس اصلی  $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$  است. از طرفی دوره تناوب سیگنال  $\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$  برابر 6 و فرکانس اصلی آن  $\frac{\pi}{3}$  است.

اگر کوچکترین ضرب مشترک دوره تناوب‌ها را محاسبه کنیم، نتیجه می‌گیریم که دوره تناوب  $(t)y$  برابر 12 و فرکانس اصلی آن  $\frac{\pi}{6}$  است. ضرایب سری فوریه سیگنال‌های فوق در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده‌اند و با توجه به این شکل‌ها نتیجه

می‌گیریم:

$$b_1 = 0, \quad b_2 = a_1, \quad b_{10} = a_4$$

## تمثیل و تملیل سیستم‌ها



(۹) مشتق در حوزه زمان: مشتق گرفتن از یک سیگنال باعث می‌شود ضرایب سری فوریه آن در  $j\omega_0$  ضرب شود.

(۱۰) انتگرال در حوزه زمان: با انتگرال‌گیری از یک سیگنال متناوب و محدود و فاقد مؤلفه DC، ضرایب سری فوریه در  $\frac{1}{j\omega_0}$

ضرب می‌شوند. دلیل آنکه لازم است سیگنال فاقد مؤلفه DC باشد، لزوم صفر بودن  $a_0$  است. زیرا ضریب  $\frac{1}{j\omega_0}$  به ازاء  $k=0$  بینهایت است و در نتیجه سری فوریه وجود ندارد.

(۱۱) تقارن سیگنال‌های حقیقی: اگر سیگنالی حقیقی باشد، ضرایب سری فوریه آن تقارن مزدوج (هرمیتی) دارند. در این تقارن  $a_k = a_{-k}$  می‌باشد. یعنی اگر ضرایب سری فوریه را نسبت به محور عمودی قرینه کنیم، با مزدوج ضرایب برابر می‌شود. این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی ضرایب سری فوریه تقارن فرد بیدا کنند.

(۱۲) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز حقیقی و زوج می‌شوند.

(۱۳) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن موهومی و فرد می‌شوند.

(۱۴) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج ضرایب سری فوریه که برابر با قسمت حقیقی این ضرایب است را نتیجه می‌دهد. قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد ضرایب سری فوریه که برابر با حاصلضرب قسمت موهومی این ضرایب در ز است را نتیجه می‌دهد.

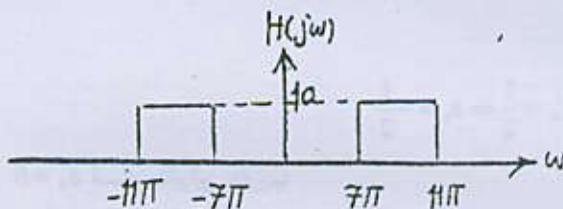
مثال: با توجه به جدول (۱-۸) ملاحظه می‌کنید که سیگنال  $\cos(\omega_0 t)$  که یک سیگنال حقیقی و زوج است، دارای ضرایب سری فوریه حقیقی و زوج می‌باشد. در حالی که  $\sin(\omega_0 t)$  که یک سیگنال حقیقی و فرد است، دارای ضرایب سری فوریه موهومی و فرد می‌باشد. همچنین ضرایب سری فوریه سیگنال غیرحقیقی  $e^{j\omega_0 t}$  قادر نقرن مزدوج است.

(۱۵) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناوب: این رابطه یکی از روابط مهم در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها و مخابرات می‌باشد و نشان می‌دهد توان یک سیگنال را می‌توان از روی ضرایب سری فوریه آن نیز بدست آورد.

مثال: فرض کنید شکل سری فوریه سیگنال  $x(t)$  به صورت زیر است:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|}} e^{jk\pi t}$$

اگر این سیگنال از یک سیستم با پاسخ فرکانسی به شکل زیر عبور کند، توان سیگنال خروجی این سیستم چقدر است؟



هل: بدینی است با توجه به شکل  $H(j\omega)$  و فرکانس اصلی  $x(t)$  فقط ضرایب  $a_4, a_{-4}, a_2, a_{-2}, a_0$  و  $a_{-10}, a_{10}$  ورودی از سیستم عبور کرده و در ضمن هر کدام در ۱۰ ضرب می‌شوند. بنابراین اگر خروجی این سیستم را  $y(t)$  بنامیم، داریم:

$$P_y = 100 \left( 2 \times \frac{1}{2^4} + 2 \times \frac{1}{2^{10}} \right) = 200 \times \frac{5}{2^{10}} = \frac{125}{128}$$

مثال: اطلاعات زیر در مورد سیگنال  $x(t)$  داده شده است. این سیگنال را تعیین کنید.

(۱)  $x(t)$  یک سیگنال حقیقی است.

(۲)  $x(t)$  با دوره تناوب  $T = 4$  متناوب است و ضرایب سری فوریه آن  $a_4$  است.

(۳) برای  $|k| > 1$  داریم  $a_k = 0$ .

(۴) سیگنالی که ضرایب سری فوریه آن  $b_k = a_{-k} e^{-jk\pi/2}$  است، فرد می‌باشد.

$$(5) \int_a^b |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

هل:

$$\begin{aligned}
 (2) &\Rightarrow \text{فقط ضرایب } a_0 \text{ و } a_1 \text{ و } a_{-1} \text{ در سری فوریه (t) وجود دارند.} \\
 (2) &\Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\
 (1) &\Rightarrow a_{-1} = a_1 \Rightarrow x(t) = a_0 + a_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} + a_1 e^{-\frac{j\pi t}{2}} = a_0 + a_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} + \left( a_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} \right)^* = a_0 + 2 \operatorname{Re} \left[ a_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} \right] = a_0 + 2a_1 \cos \left( \frac{\pi}{2} t \right) \\
 (4) &\Rightarrow a_{-1} = b_1 \Rightarrow x(-t+1) \Rightarrow b_1 = -b_{-1}, b_0 = 0 \quad \text{برای این سیگنال ضرب} \\
 &\qquad \qquad \qquad \text{x(-t+1) حلقی و فرد است} \Rightarrow x(-t+1) = b_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} + b_{-1} e^{-\frac{j\pi t}{2}} \\
 &\qquad \qquad \qquad = b_1 e^{\frac{j\pi t}{2}} - b_1 e^{-\frac{j\pi t}{2}} = 2j b_1 \sin \left( \frac{\pi}{2} t \right)
 \end{aligned}$$

با توجه به آن که شیفت و وارون کردن روی توان یک سیگنال تأثیر ندارد بنابراین داریم:

$$(5) \Rightarrow \frac{1}{4} \int_{-1}^1 |x(-t+1)|^2 dt = \frac{1}{2} \Rightarrow 2|b_1|^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow |b_1| = |b_{-1}| = \frac{1}{2}$$

با توجه به آن که  $b_1$  و  $b_{-1}$  باید موهومی باشند بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{j}{2} \Rightarrow \frac{j}{2} = a_{-1} e^{-\frac{j\pi}{2}} \Rightarrow a_{-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ \text{یا} \\ b_1 = -\frac{j}{2} \Rightarrow -\frac{j}{2} = a_{-1} e^{-\frac{j\pi}{2}} \Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

از طرفی چون  $b_0 = 0$  است بنابراین  $a_0 = 0$  است. بنابراین داریم:

$$x(t) = \pm \cos \left( \frac{\pi}{2} t \right)$$

### خودآزمائی سوم

- (آزاد ۸۰) ضرایب سری فوریه قطار ضربه  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 3\delta(2t - kT_0)$  کدام می‌باشد؟

$$a_k = \frac{2}{T_0} \quad (۱)$$

$$a_k = \frac{3}{2T_0} \quad (۲)$$

$$a_k = \frac{3}{T_0} \quad (۳)$$

$$a_k = \frac{6}{T_0} \quad (۴)$$

- (سراسری ۸۲) دوره تناوب اصلی سیگنال  $x(t)$  برابر  $T_0$  و ضرایب سری فوریه آن  $a_k$  می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال  $b_k$  را بنامیم آن‌گاه ضریب  $b_2$  کدام است؟  $y(t) = x(t) + x(2t)$

$$b_2 = a_1 + a_2 \quad (۱)$$

$$b_2 = a_2 - a_1 \quad (۲)$$

$$b_2 = 2a_2 \quad (۳)$$

$$b_2 = 2a_1 \quad (۴)$$

- (سراسری ۸۵) دوره تناوب اصلی سیگنال  $x(t)$ ،  $T_0$  و ضرایب سری فوریه آن  $a_k$  می‌باشد. اگر ضرایب سری فوریه  $y(t) = x(t) + x\left(\frac{3}{2}t\right)$  را با  $b_k$  نمایش دهیم،  $b_2$  کدام یک از عبارت‌های زیر است؟

$$a_1 + a_2 \quad (۱)$$

$$2a_1 \quad (۲)$$

$$a_2 \quad (۳)$$

$$a_1 \quad (۴)$$

- (۴)  $x_1(t)$  را سیگنال پیوسته در زمان با فرکانس پایه  $\omega_1$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  فرض کند. اگر ضرایب سری فوریه و فرکانس پایه  $x_2(t) = x_1(1-t) + x_1(t-1)$  را به ترتیب  $b_k$  و  $\omega_2$  بنامیم، آن‌گاه کدام گزینه درست است؟

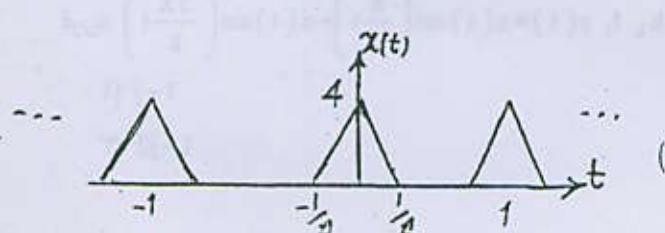
$$b_k = e^{-j\omega_1 t} (a_{-k} + a_k), \quad \omega_2 = 2\omega_1 \quad (۱)$$

$$b_k = e^{-j\omega_1 t} (a_{-k} + a_k), \quad \omega_2 = \omega_1 \quad (۲)$$

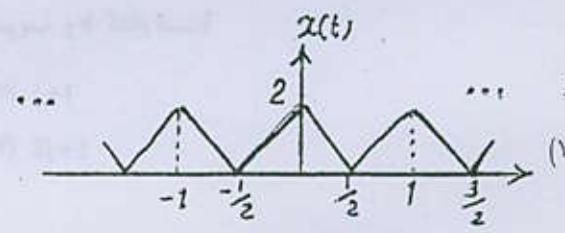
$$b_k = e^{-j\omega_1 t} (a_{-k} + a_k), \quad \omega_2 = \omega_1 \quad (۳)$$

$$b_k = e^{-j\omega_1 t} (a_{-k} + a_k), \quad \omega_2 = 2\omega_1 \quad (۴)$$

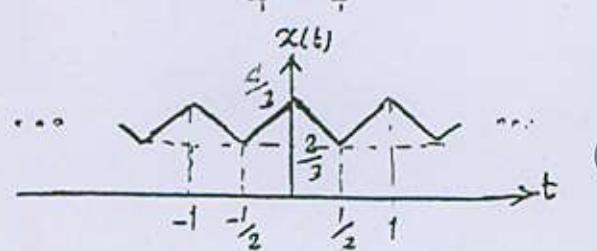
- (آزاد ۸۰) سیگنال  $x(t)$  با دوره تناوب  $T_0 = 1$  دارای ضربه سری فوریه  $a_k = \left( \text{sinc}\left(\frac{k}{2}\right) \right)^2$  می‌باشد.  $x(t)$  کدام است؟



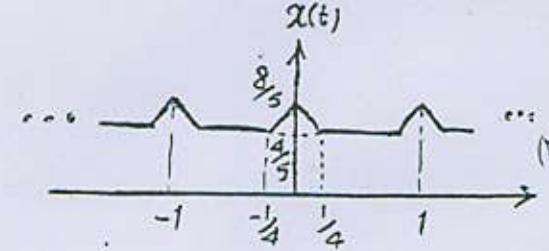
(۱)



(۲)



(۳)



(۴)

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

۶- فرض کنید یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با سری فوریه  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^{|k|}} e^{\frac{j\pi k t}{4}}$  به یک فیلتر پائین گذر ایده‌آل با پاسخ فرکانسی

$$H(j\omega) = 2\pi \left( \frac{3\omega}{2\pi} \right)$$

$$\frac{13}{4} \quad (2)$$

$$\frac{13}{8} \quad (1)$$

۳) هیچکدام

$$\frac{13}{2} \quad (3)$$

۷- (آزاد ۸۱) سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt = \frac{\sin 4\omega}{\omega}$  اگر ورودی این سیستم

سیگنال متناوب  $x(t)$  با پریود  $T = 8$  و به صورت  $\begin{cases} 1 & 0 \leq t < 4 \\ -1 & 4 \leq t < 8 \end{cases}$  باشد ضرایب سری فوریه خروجی ( $y_k$ ) کدام خواهد بود؟

$$y_k = \begin{cases} \frac{16}{\pi j k} & k \text{ زوج} \\ 0 & k \text{ فرد} \end{cases} \quad (4)$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & k \text{ زوج} \\ \frac{16}{\pi j k} & k \text{ فرد} \end{cases} \quad (5)$$

$$y_k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \frac{16}{\pi j k} & k \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$y_k = 0 \quad \forall k \quad (1)$$

۸- یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان و فاقد DC با سری فوریه  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{jk\omega_0 t}}{|k|}$  به یک سیستم با پاسخ فرکانسی

۹- اعمال می‌شود. به ازای کدام  $\omega_0$  دامنه هارمونیک دوم از ۳۰٪ دامنه هارمونیک اول در خروجی سیستم کمتر می‌گردد؟

$$\omega_0 = \pi \quad (2)$$

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

۳) هیچکدام

$$3 \text{ هر دو} \quad (3)$$

۹- اگر  $(t) x$  یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با دوره تناوب اصلی  $T_0 = 16$  و ضرایب سری فوریه  $a_k = 1 + j^{k^2}$  باشد و ضرایب سری

$$y(t) = x(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + x(t) \sin\left(\frac{3\pi}{8}t\right) \quad \text{فوريه}$$

$$1+j \quad (2)$$

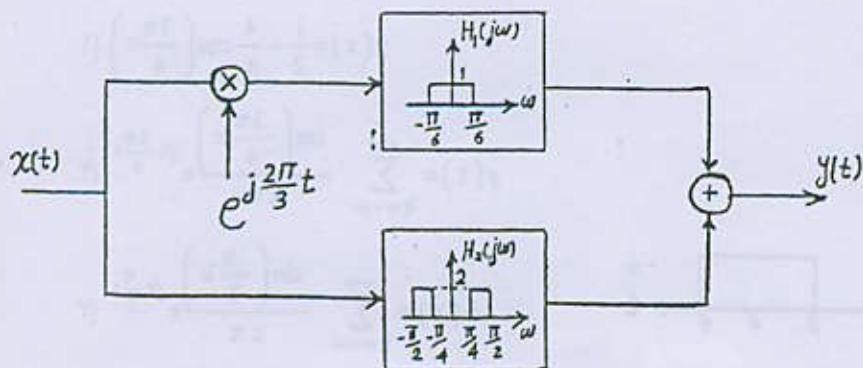
$$1-j \quad (1)$$

$$1+j2 \quad (4)$$

$$1-j2 \quad (3)$$

۱۰- در شکل زیر فرض کنید  $x(t)$  یک سیگنال متناوب پیوسته در زمان با دوره تناوب  $T_0 = 6$  و ضرایب سری فوریه

$$a_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ \frac{1}{\pi|k|} & k \neq 0 \end{cases}$$



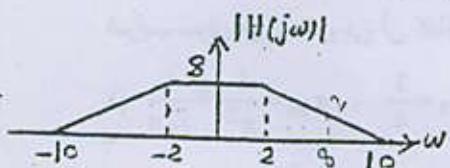
$$y(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad (1)$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad (2)$$

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad (3)$$

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) \quad (4)$$

۱۱- (سراسری ۸۱) منحنی‌های اندازه و فاز پاسخ فرکانسی یک فیلتر داده شده‌اند. اگر  $y(t)$  خروجی  $x(t)$  کدام است؟

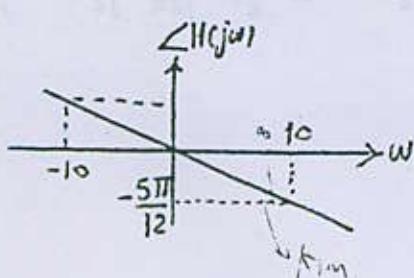


$$\frac{32}{\pi} + \frac{8}{\pi} \cos\left(4t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (1)$$

$$\frac{32}{\pi} + \frac{8}{\pi} \cos\left(8t - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (2)$$

$$\frac{16}{\pi} \cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{8}{\pi} \cos\left(16t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (3)$$

$$\frac{32}{\pi} + \frac{16}{\pi} \cos\left(8t - \frac{\pi}{3}\right) \quad (4)$$



## تمزیه و تمثیل سیستم‌ها

۱۲- (آزاد ۸۴) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه  $h(t) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}t\right)}{\pi t}$  در نظر بگیرید. ورودی این سیستم بنجره مستطیلی متناسب زیر است. خروجی  $y(t)$  چگونه خواهد بود؟

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right) \quad (1)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}k\right)}{k\pi} e^{jk\frac{3\pi}{4}t} \quad (2)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)}{k\pi} e^{jk\frac{\pi}{2}t} \quad (3)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \quad (4)$$

۱۳- (آزاد ۸۳) یک سیستم LTI را با پاسخ ضربه  $h(t) = \frac{\sin(1.5\pi t)}{\pi t}$  در نظر بگیرید. چنانچه ورودی این سیستم یک سیگنال متناسب با

دوره تناوب دو ثانیه و به صورت زیر باشد:

$$x(t) = \begin{cases} 1-t+\sin(\pi t) & 0 < t < 1 \\ 1+\sin(\pi t) & 1 < t < 2 \end{cases}$$

ضرایب سری فوریه خروجی آن کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{\pm 1} = \frac{1}{\pi^2} \mp \frac{1}{j2\pi} \quad (2) \quad \text{و بقیه ضرایب صفرند.}$$

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{\pm k} = \frac{1}{k^2\pi^2} + \frac{(-1)^k}{j2k\pi} \quad (4) \quad \text{و بقیه ضرایب صفرند.}$$

## ۹- تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه پیوسته در زمان)

در بخش قبل سری فوریه برای سیگنال‌های پیوسته در زمان متناوب بررسی گردید. در این بخش به معرفی تبدیل فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان پرداخته و خواص آن معرفی و بررسی می‌گردند. این تبدیل علاوه بر سیگنال‌های متناوب برای نمایش فوریه سیگنال‌های نامتناوب نیز مناسب می‌باشد.

### ۱-۹- تبدیل فوریه پیوسته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LT

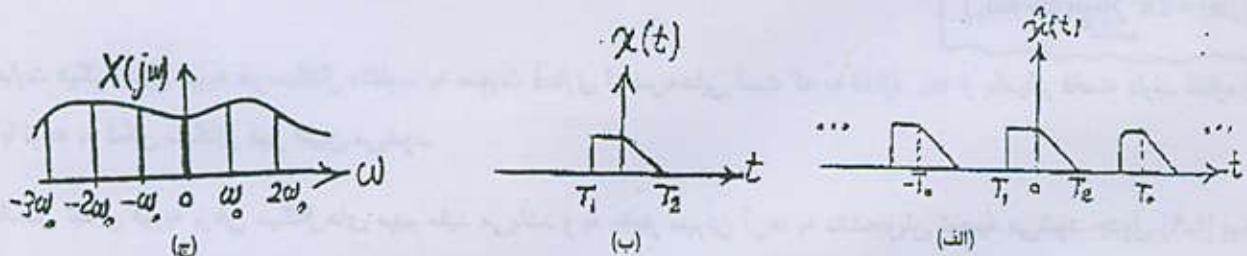
تعریف، سیگنال نامتناوب  $x(t)$  را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه این سیگنال با  $X(j\omega)$  (یا  $\hat{x}(t)$ ) نشان داده می‌شود و رابطه بین  $x(t)$  و  $X(j\omega)$  به صورت زیر است:

$$\boxed{\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt && : \text{معادله تبدیل فوریه} \\ x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega && : \text{معادله عکس تبدیل فوریه} \end{aligned}}$$

تذکرہ: اگر  $\hat{x}(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب  $T_0$ ، فرکانس اصلی  $\omega_0$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  باشد، آنگاه  $a_k$  را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$a_k = \frac{1}{T_0} X(jk\omega_0)$$

در رابطه فوق  $X(j\omega)$  تبدیل فوریه سیگنال  $x(t)$  می‌باشد.  $\hat{x}(t)$  سیگنال نامتناوبی است که مشابه یکی از دوره‌های تناوب  $x(t)$  است. در واقع ضرایب سری فوریه  $\hat{x}(t)$  با نمونه‌برداری از تبدیل فوریه  $x(t)$  بدست می‌آیند. شکل (۱-۹) ارتباط بین  $x(t)$  و  $\hat{x}(t)$  را در حوزه زمان و فرکانس نشان می‌دهد.



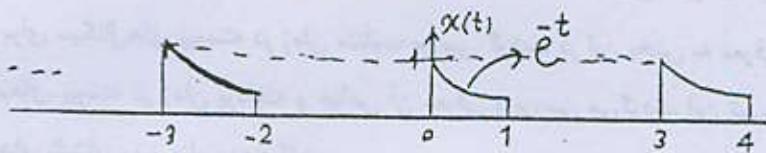
شکل ۹-۱- (الف) یک سیگنال متناوب فرضی (ب) سیگنال نامتناوب مشابه یک دوره تناوب سیگنال بند

(الف) (ه) تبدیل فوریه فرضی سیگنال بند (ب) و لمحه بدست آوردن ضرایب سری فوریه سیگنال بند (الف)

## تمثیله و تملیل سیستمها



مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال  $(t) \times$  شکل زیر را با استفاده از تبدیل فوریه بدست آورید



حل: ابتدا تبدیل فوریه سیگنال  $x_1(t) = e^{-t} \cdot u(t)$  را بدست می‌آوریم:

$$X_1(\omega) = \int_0^1 e^{-t} \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-(1+j\omega)t}}{-(1+j\omega)} \Big|_0^1 = \frac{1-e^{-(1+j\omega)}}{1+j\omega}$$

حال با توجه به آن که دوره تناوب  $(t) \times$  برابر  $T_0 = 3$  است بنابراین داریم:

$$a_k = \frac{1}{T_0} X_1 \left( jk \frac{2\pi}{3} \right) = \frac{1}{3} \times \frac{1-e^{-\left(1+j\frac{2k\pi}{3}\right)}}{1+j\frac{2k\pi}{3}}$$

تذکر: ملاحظه می‌کنید تبدیل فوریه یک سیگنال (برخی مواقع طیف سیگنال نیز نامیده می‌شود) در حالت کلی یک تابع مختلط است. لذا دامنه و فاز آن جداگانه تعیین شده و رسم می‌گردند که به ترتیب طیف دامنه و فاز نامیده می‌شوند.

تذکر: با توجه به تعریف تبدیل فوریه، ملاحظه می‌شود که  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt = X(0)$  می‌باشد. این رابطه در واقع مقدار DC یک موج نامتناوب را نشان می‌دهد. پس  $X(0)$  در واقع معرف مقدار DC سیگنال  $(t) \times$  است.

تذکر: (تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب) اگر  $(t) \times$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $T_0$ ، فرکانس پایه  $\omega_0$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  باشد، آن‌گاه می‌توان نشان داد تبدیل فوریه آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

به عبارت دیگر تبدیل فوریه هر سیگنال متناوب به صورت قطاری از ضریب‌هایی است که به اندازه  $\omega_0$  از یکدیگر فاصله دارند. اندازه این ضریب‌ها با توجه به شکل سیگنال فوق تعیین می‌شود.

تذکر: داشتن تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و به خاطر سپردن آن‌ها به دانشجویان توصیه می‌شود. جدول (۱-۹) برخی از این زوج‌های فوریه را نشان می‌دهد.

بررسی رسان اصلی  $2\pi$  فریب نو. معکاری سیستم

راست.

تبدیل فوریه	سینکل
$X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$x(t) = e^{j\omega_0 t}$
$X(j\omega) = \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$x(t) = \cos(\omega_0 t)$
$X(j\omega) = \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$x(t) = \sin(\omega_0 t)$
$X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$	$x(t) = 1$
$X(j\omega) = 1$	$x(t) = \delta(t)$
$X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}$	$x(t) = \delta(t - t_0)$
$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$	$x(t) = u(t)$
$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$	$x(t) = e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$
$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^2}$	$x(t) = t e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$
$X(j\omega) = \frac{1}{(a + j\omega)^n}$	$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), \operatorname{Re}\{a\} > 0$
$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{T}\right)$	$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$
$X(j\omega) = \frac{2 \sin(\omega T)}{\omega} = 2T \sin c\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$	$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = \begin{cases} 1 &  t  < T \\ 0 &  t  > T \end{cases}$
$X(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 &  \omega  < W \\ 0 &  \omega  > W \end{cases}$	$x(t) = \frac{\sin(Wt)}{\pi t}$ صفر خواهد بود
$X(j\omega) = T \sin c^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$	$x(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ t }{T} &  t  < T \\ 0 &  t  > T \end{cases}$
$X(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{W}\right) = \begin{cases} 1 - \frac{ \omega }{W} &  \omega  < W \\ 0 &  \omega  > W \end{cases}$	$x(t) = \frac{W}{2\pi} \sin c^2\left(\frac{Wt}{2\pi}\right)$
$X(j\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$x(t) = e^{-\alpha t }, \alpha > 0$

مدول ۹ - ۱ - تبدیل فوریه برای سینکل‌های مجهز بیوسته در زمان

$$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$

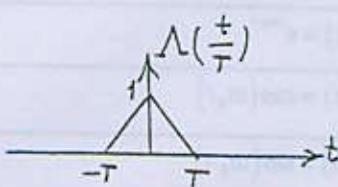
$$\xrightarrow{F} 2T \sin c\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

$$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$$

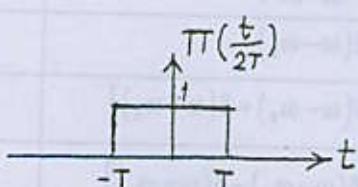
$$\xrightarrow{F} T \sin c^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

نمایند (نکات بزرگ را در نظر نداشته باشند)

در جدول (۹-۱) دوتابع (.۱)  $\Pi$  و (.۲)  $\Lambda$  استفاده شده است که در شکل‌های (۲-۹) و (۳-۹) نمودار این دوتابع نشان داده شده‌اند.



شکل ۹-۳- پالس مربعی متقارن



شکل ۹-۴- پالس مربعی متقارن

**همگرائی تبدیل فوریه:** با توجه به ارتباط تزدیک میان تبدیل فوریه و سری فوریه، به نظر می‌رسد شرایط همگرائی تبدیل فوریه مشابه شرایط همگرائی سری فوریه باشد. قضیه زیر شرایط دریکله را برای همگرائی تبدیل فوریه بیان می‌کند:

قضیه (شرایط) دریکله: اگر  $x(t)$  دارای سه شرط زیر باشد:

شرط ۱:  $|x(t)|$  مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد، یعنی  $\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$

شرط ۲: در هر بازه زمانی محدود، تعداد نقاط اکسترموم  $x(t)$  محدود باشد.

شرط ۳: در هر بازه زمانی محدود، تعداد نقاط ناپیوستگی  $x(t)$  و همچنین مقادیر ناپیوستگی‌ها محدود باشد.

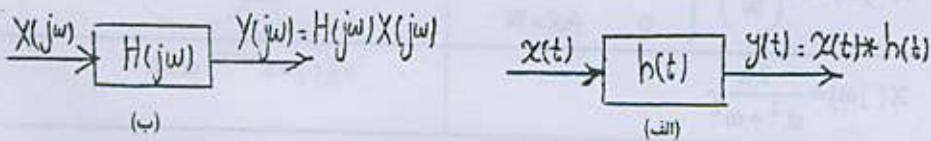
آنگاه تبدیل فوریه سیگنال  $x(t)$  وجود داشته و با عکس تبدیل فوریه گرفتن از آن، سیگنال بدست می‌آید که غیر از نقاط ناپیوستگی، در سایر نقاط با  $x(t)$  برابر است.

## ۹-۲- کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم‌های پیوسته در زمان LTI:

در بخش قبل ملاحظه کردید سری فوریه ابزار مناسبی جهت تعیین خروجی یک سیستم LTI نیست و با استفاده از آن (غیر از سیگنال‌های خاص) فقط می‌توان خرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد در این بخش خواهیم دید که تبدیل فوریه یک روش مناسب و ساده برای تعیین خروجی سیستم‌های LTI می‌باشد.

تعیین خروجی یک سیستم LTI از روی ورودی از خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه نتیجه می‌شود. یعنی تبدیل فوریه کانولوشن دو سیگنال برابر حاصل ضرب تبدیل فوریه آن‌ها می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل (۹-۴) داریم:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$



شکل ۹-۴- (الف) رابطه ورودی- خروجی یک سیستم LTI در موزه زمان (ب) (رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی

## تجزیه و تملیل سیستم‌ها

بنابراین تبدیل فوریه خروجی یک سیستم LTI برابر است با حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه (پاسخ فرکانسی سیستم). برای تعیین خروجی سیستم باید از تبدیل فوریه آن عکس تبدیل فوریه گرفت که معمولاً برای گرفتن عکس تبدیل فوریه از بسط یک کسر به کسرهای جزئی و خواص سری فوریه استفاده می‌شود. بحث مریبوط به بسط یک کسر به کسرهای جزئی را می‌توانید از کتب پایه ریاضی مطالعه نمائید. خواص سری فوریه در ادامه معرفی و بررسی خواهند شد.

**مثال:** یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t)$  را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی  $x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$  اعمال شود، خروجی  $y(t)$  این سیستم را بدست آورید.

حل:

$$H(j\omega) = F\{h(t)\} = 1 + \frac{2}{1+j\omega} = \frac{3+j\omega}{1+j\omega}$$

$$X(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega} - \frac{1}{2+j\omega} = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{3+j\omega}{(1+j\omega)^2(2+j\omega)} = \frac{1}{2+j\omega} + \frac{2}{(1+j\omega)^2} + \frac{-1}{1+j\omega} \Rightarrow y(t) = (e^{-2t} + 2te^{-t} - e^{-t})u(t)$$

تذکر: برای توابعی مانند  $\cos(\omega_0 t)$  و  $\sin(\omega_0 t)$  که آن‌ها را می‌توان برحسب  $e^{j\omega_0 t}$  نوشت و با توجه به آنکه  $e^{j\omega_0 t}$  یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI است، می‌توان خروجی سیستم را ساده‌تر بدست آورد. روابط زیر با توجه به این اصل بدست می‌آیند:

$$\text{if } x(t) = e^{j\omega_0 t} \Rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)| e^{j(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))}$$

$$\text{if } x(t) = \cos(\omega_0 t) \Rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$$

$$\text{if } x(t) = \sin(\omega_0 t) \Rightarrow y(t) = |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$$

در روابط فوق  $H(j\omega_0)$  معرف مقدار  $H(j\omega)$  در فرکانس  $\omega_0 = \omega$  است. دقت کنید پاسخ به دست آمده پاسخ در حالت دائم می‌باشد و با این روش نمی‌توان پاسخ گذراي سیستم را بدست آورد.

**مثال:** پاسخ حالت دائم یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $x(t) = \cos(2t)$  به ورودی  $H(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega+1)^2}$  بدست آورید.

حل:

$$H(j2) = \frac{j2}{(j2+1)^2} = \frac{j2}{-3+j4} = \frac{2e^{j90^\circ}}{5e^{j126.8^\circ}} = \frac{2}{5} e^{-j36.8^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$y(t) = \frac{2}{5} \cos(2t - 36.8^\circ)$$

تست نمونه - یک سیستم LTI وارون پذیر با پاسخ پله  $s(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$  را در نظر بگیرید. پاسخ ضربه سیستم وارون کدام است؟

$$h(t) = \delta(t) - \delta'(t) \quad (3) \quad h(t) = \delta(t) + 2\delta'(t) \quad (2) \quad h(t) = \delta(t) \quad (1)$$

هل:

ابتدا پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی این سیستم را به دست می‌آوریم:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega} = \frac{1}{1 + j2\omega}$$

اگر پاسخ ضربه و پاسخ فرکانسی سیستم وارون را به ترتیب با  $h_1(t)$  و  $H_1(j\omega)$  نشان دهیم، آن‌گاه:

$$h(t)^*h_1(t) = \delta(t) \Rightarrow H(j\omega)H_1(j\omega) = 1$$

بنابراین:

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{H(j\omega)} = 1 + j2\omega \Rightarrow h_1(t) = \delta(t) + 2\delta'(t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) پاسخ ضربه یک سیستم LTI به صورت  $h(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2}$  می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t) = \sin^2(\pi t)$  می‌باشد. پاسخ این سیستم را به دست می‌آوریم:

چیست؟

$$y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2(\pi t) \quad (3) \quad y(t) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2(\pi t) \quad (2) \quad y(t) = \frac{1}{2} \quad (1)$$

هل:

با توجه به جدول (۱-۹) پاسخ فرکانسی این سیستم را به دست می‌آوریم:

$$h(t) = \frac{\sin^2(\pi t)}{(\pi t)^2} = \text{sinc}^2(t) \Rightarrow H(j\omega) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

از طرفی داریم:

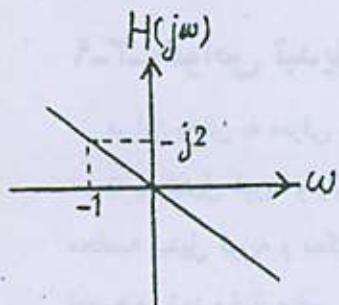
$$x(t) = \sin^2(\pi t) = \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2}$$

بدینه است که فقط فرکانس  $\omega = 0$  از این سیستم عبور می‌کند و در نتیجه:

$$y(t) = \frac{1}{2} \times H(j0) = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) فرض کنید پاسخ فرکانسی یک سیستم LTI و علی به صورت زیر باشد:



در صورتی که تبدیل فوریه ورودی این سیستم  $X(j\omega) = \frac{1}{2+j\omega}$  باشد و خروجی سیستم را  $y(t)$  بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

$$y(0^+) = 4 \quad (2)$$

$$y(t) = 4e^{-2t} u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = 4e^{-2t} u(t) - 2\delta(t) \quad (3)$$

$$y(\infty) = 0 \quad (2)$$

هل:

با توجه به شکل  $H(j\omega) = j2\omega$  است و بنابراین:

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{j2\omega}{2+j\omega} = 2 - \frac{4}{2+j\omega} \Rightarrow y(t) = 2\delta(t) - 4e^{-2t} u(t)$$

با توجه به گزینه‌های داده شده ملاحظه می‌کنید که غیر از گزینه (۲) بقیه گزینه‌ها ناصحیح می‌باشند. بنابراین به نظر می‌رسد تست اشکال تایی دارد. اگر روی شکل داده شده  $j2 - j2 + j2$  تبدیل شود آنگاه  $H(j\omega) = -j2\omega$  است و داریم:

$$Y(j\omega) = \frac{-j2\omega}{2+j\omega} = -2 + \frac{4}{2+j\omega} \Rightarrow y(t) = -2\delta(t) + 4e^{-2t} u(t)$$

در این حالت گزینه (۱) تنها گزینه ناصحیح است.

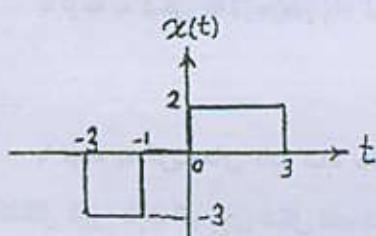
### ۳-۹- خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان

در این بخش به معرفی خواص تبدیل فوریه پیوسته در زمان می‌پردازیم. این خواص نیز همانند خواص ضرایب سری فوریه بینش زیادی نسبت به تبدیل فوریه و رابطه بین سیگنال در حوزه زمان و تبدیل فوریه آن می‌دهد. همچنین به کمک این خواص می‌توان پیچیدگی محاسبه تبدیل فوریه و معکوس آن را کاهش داد. خواص تبدیل فوریه در جدول (۲-۹) آورده شده‌اند. فرآگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر فراهم می‌کند.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال از انتگرال استفاده می‌شود، بنابراین تبدیل فوریه خاصیت خطی دارد.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنال روی محور زمان جابجا شده و به  $x(t-2)$  تبدیل گردد، آنگاه تبدیل فوریه آن در  $e^{-j\omega t}$  ضرب می‌شود. بنابراین اگر پاسخ فرکانسی یک کانال باشد (یعنی دامنه ثابت و فاز خطی داشته باشد) آنگاه سیگنال خروجی کانال تأخیر یافته سیگنال ورودی است و اعوجاج ندارد.

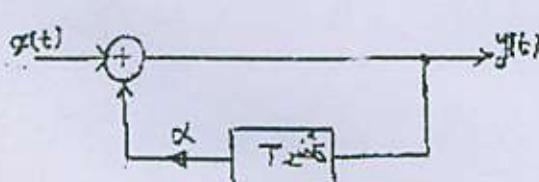
مثال: تبدیل فوریه سیگنال شکل زیر را بدست آورید.



هل: از خواص خطی و جابجایی زمانی و تبدیل فوریه پالس متقارن استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2\Pi\left(\frac{t-1.5}{3}\right) - 3\Pi\left(\frac{t+2}{2}\right) \Rightarrow X(j\omega) = 2e^{-j1.5\omega} \times 3\sin c\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) - 3e^{j2\omega} \times 2\sin c\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \\ &= 6e^{-j1.5\omega} \sin c\left(\frac{3\omega}{2\pi}\right) - 6e^{j2\omega} \sin c\left(\frac{\omega}{\pi}\right) \end{aligned}$$

تست نمونه - پاسخ ضریب سیستم نشان داده شده در شکل زیر کدام است؟



$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT) \quad (1)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k \delta(t - kT) \quad (2)$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{2k} \delta(t - kT) \quad (3)$$

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^{2k} \delta(t - kT) \quad (4)$$

تبدیل فوریه	سیگنال نامتناوب	خاصیت
$X(j\omega)$	$x(t)$	
$Y(j\omega)$	$y(t)$	
$A X(j\omega) + B Y(j\omega)$	$Ax(t) + By(t)$	خطی بودن
$e^{-j\omega_0 t} X(j\omega)$	$x(t - t_0)$	جایگاه زمان
$X(j(\omega - \omega_0))$	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	جایگاه فرکانس
$X^*(-j\omega)$	$x^*(t)$	مزدوج گیری
$X(-j\omega)$	$x(-t)$	وارونگی زمان
$X(j\omega) Y(j\omega)$	$x(t) * y(t)$	کالولوشن در حوزه زمان
$\frac{1}{2\pi} X(j\omega)^* Y(j\omega)$	$x(t) y(t)$	ضرب در حوزه زمان
$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$	$x(at)$	تنفس مقیاس زمانی و فرکانسی
$2\pi x(-\omega)$	$X(t)$	دوگانی
$j\omega X(j\omega)$	$\frac{dx(t)}{dt}$	مشتق در حوزه زمان
$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi x(0)\delta(\omega)$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	انتگرال در حوزه زمان
$\frac{dX(j\omega)}{d\omega}$	$-jt x(t)$	مشتق در حوزه فرکانس
$\int_a^\infty X(u) du$	$-\frac{x(t)}{jt} + \pi x(0)\delta(t)$	انتگرال در حوزه فرکانس
$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$		
$\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = \operatorname{Re}\{X(-j\omega)\}$	$ X(j\omega)  =  X(-j\omega) $	تقارن سیگنال‌های حقیقی
$\operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = -\operatorname{Im}\{X(-j\omega)\}$	$\angle X(j\omega) = -\angle X(-j\omega)$	
$X(j\omega) = X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ (حقیقی و زوج)	$x(t) = x^*(t) x(t) = x^*(t) x(t)$	زوج
$X(j\omega) = -X^*(j\omega) = -X(-j\omega)$ (موموس و فرد)	$x(t) = x^*(t) = x(-t) x(t)$	فرد
$X(j\omega) = \operatorname{Re}\{X(j\omega)\} + j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = X_r(j\omega) + X_o(j\omega)$	$x(t) = x_r(t) + x_o(t)$	تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی
$\operatorname{Re}\{X(j\omega)\} = X_r(j\omega)$ تبدیل فوریه $x_r(t)$ برابر است با		
$j \operatorname{Im}\{X(j\omega)\} = X_o(j\omega)$ تبدیل فوریه $x_o(t)$ برابر است با		
$X(0) = \int_{-\infty}^\infty x(t) dt$		سطوح زیرمنحنی سیگنال
$2\pi x(0) = \int_{-\infty}^\infty X(j\omega) d\omega$		سطوح زیرمنحنی تبدیل فوریه
$E_x = \int_{-\infty}^\infty  x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty  X(j\omega) ^2 d\omega$		وابطه پارامتریک مابین سیگنال‌های نامتناوب

جدول ۹ - فواید تبدیل فوریه پیوسته در زمان

$$(+) \rightarrow \int_{-\infty}^\infty x(t) dt$$

$$\int_{-\infty}^\infty X(j\omega) d\omega$$

دل:

رابطه  $y(t) = x(t) + \alpha y(t-T)$  با توجه به شکل عبارت است از:

$$y(t) = x(t) + \alpha y(t-T)$$

بنابراین داریم:

$$h(t) = \delta(t) + \alpha h(t-T) \Rightarrow h(t) - \alpha h(t-T) = \delta(t)$$

اگر از طرفین تبدیل فوریه گرفته شود بدست می‌آوریم:

$$H(j\omega) - \alpha e^{-j\omega T} H(j\omega) = 1 \Rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega T}} = 1 + \alpha e^{-j\omega T} + \alpha^2 e^{-j2\omega T} + \dots$$

در نهایت با عکس تبدیل فوریه گرفتن از این رابطه،  $h(t)$  بدست می‌آید:

$$h(t) = 1 + \alpha \delta(t-T) + \alpha^2 \delta(t-2T) + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \delta(t-kT)$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

**نکته:** (کانال ایده‌آل - تاخیر گروه) در یک سیستم انتقال یا کانال مخابراتی اگر سیگنال خروجی کپی و المتنی دقیقی از سیگنال ورودی باشد آن‌گاه این انتقال بدون اعوجاج بوده و کانال را کانال ایده‌آل می‌نامند. در این تعریف منظور از کپی سیگنال آن است که دامنه خروجی می‌تواند از دامنه ورودی کوچکتر یا بزرگتر بوده و خروجی نسبت به ورودی دارای تاخیر زمانی معین باشد. به عبارت دیگر اگر  $y(t)$  و  $x(t)$  به ترتیب ورودی و خروجی این کانال باشند آنگاه:

$$y(t) = kx(t-t_d)$$

در این رابطه  $k$  نشان دهنده تغییر دامنه و  $t_d$  نشان دهنده تاخیر زمانی خروجی نسبت به ورودی است. اگر از طرفین رابطه فوق تبدیل فوریه گرفته شود بدست می‌آوریم:

$$Y(j\omega) = ke^{-j\omega t_d} X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$$

به عبارت دیگر باسخ فرکانسی یک کانال ایده‌آل  $H(j\omega) = ke^{-j\omega t_d}$  است که اگر از طرفین این رابطه دامنه و فاز گرفته شود بدست می‌آوریم:

$$|H(j\omega)| = |k|$$

$$\angle H(j\omega) = -\omega t_d \pm m\pi$$

بنابراین ملاحظه می‌شود که دامنه باسخ فرکانسی یک کانال ایده‌آل ثابت و فاز باسخ فرکانسی آن خطی با شب منفی می‌باشد.  $t_d$  که نشان دهنده تاخیر خروجی نسبت به ورودی یک کانال ایده‌آل است را تاخیر گروه (group delay) کانال می‌نامند. اگر کانال ایده‌آل نباشد با توجه به تعریف تاخیر گروه کانال ایده‌آل، تاخیر گروه را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega} \{ \angle H(j\omega) \}$$

بدینه است در هنگام ایده‌آل نبودن کانال تاخیر گروه ثابت نبوده و تابعی از  $\omega$  می‌شود.

مثال: تاخیر گروه یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$  را بدست آورید.

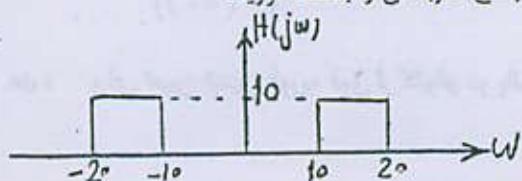
حل:

$$H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} \Rightarrow \angle H(j\omega) = -2 \operatorname{Arg}(\omega)$$

$$\Rightarrow \tau(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

(۳) جابجایی فرکانسی: با ضرب  $e^{j\omega_0 t}$  در سیگنال زمانی، تبدیل فوریه سیگنال در حوزه فرکانس جابجا شده و به  $X(j(\omega - \omega_0))$  تبدیل می‌شود (یعنی سیگنال مدوله می‌شود).

مثال: پاسخ فرکانسی یک سیستم به صورت زیر است (فیلتر میان گذر ایده‌آل). پاسخ ضربه آن را بدست آورید.



حل: از خواص خطی و شیفت فرکانسی و عکس تبدیل فوریه پالس متقارن استفاده می‌کنیم:

$$H(j\omega) = 10 \left( \Pi\left(\frac{\omega+15}{10}\right) + \Pi\left(\frac{\omega-15}{10}\right) \right) \Rightarrow h(t) = 10 \left( e^{j15t} \times \frac{\sin(5t)}{\pi t} + e^{-j15t} \times \frac{\sin(5t)}{\pi t} \right) \Rightarrow h(t) = \frac{20 \cos(15t) \sin(5t)}{\pi t}$$

تست نمونه - (آزاد ۷۹) اگر تبدیل فوریه (f) را  $X(f)$  بنامیم تبدیل فوریه سیگنال  $y(t) = x(t-2)e^{j4\pi f t}$  چه خواهد بود؟

$$Y(f) = X(f-2)e^{j4\pi f} \quad (2)$$

$$Y(f) = X(f+2)e^{j4\pi f} \quad (1)$$

$$Y(f) = X(f-2)e^{-j4\pi f} \quad (3)$$

$$Y(f) = X(f+2)e^{-j4\pi f} \quad (3)$$

حل:

از خواص شیفت در حوزه زمان و شیفت در حوزه فرکانس استفاده می‌کنیم:

$$x(t) \xrightarrow{F.T} X(f)$$

$$x(t-2) \xrightarrow{F.T} e^{-j4\pi f} X(f)$$

$$e^{j4\pi f} x(t-2) \xrightarrow{F.T} e^{-j4\pi(f-2)} X(f-2) = e^{-j4\pi f} X(f-2)$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

(۴) مزدوج گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، تبدیل فوریه آن علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی قرینه می‌شود

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه تبدیل فوریه آن نسبت به محور عمودی قرینه خواهد شد.

تذکر: از خاصیت وارونگی زمانی و با توجه به تعریف یک تابع زوج یا فرد نتیجه می‌گیریم که اگر سیگنالی زوج باشد، تبدیل فوریه آن نیز زوج و اگر فرد باشد آن گاه تبدیل فوریه آن نیز فرد می‌شود اگر سیگنال نه زوج و نه فرد باشد آن گاه تبدیل فوریه آن نیز نه زوج و نه فرد است.

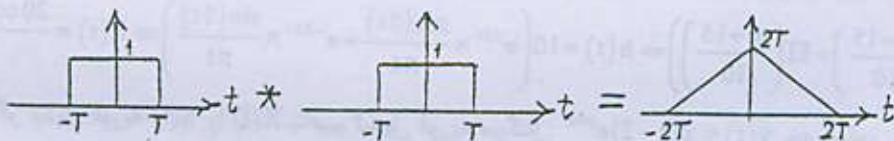
(۶) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان با یکدیگر کانولوشن شوند، تبدیل فوریه آن‌ها در حوزه فرکانس در یکدیگر ضرب می‌شوند. کاربرد مهم این خاصیت، بدست اوردن پاسخ یک سیستم LTI می‌باشد. علاوه بر این می‌توان از خاصیت فوق جهت تعیین تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های پیچیده نیز استفاده کرد.

مثال: در جدول (۱-۹) تبدیل فوریه پالس مثلثی متقارن به عرض  $T$  آورده شده است. با استفاده از تبدیل فوریه پالس مربعی متقارن  $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$  و خواص تبدیل فوریه، فرمول مربوط به تبدیل فوریه  $\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$  را بدست اورید.

هل: برای تعیین تبدیل فوریه فوق از کانولوشن دو پالس مربعی استفاده می‌شود. اگر دو پالس مربعی را با یکدیگر کانولوشن کنیم داریم:

$$\Pi\left(\frac{t}{2T}\right) * \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = 2T \Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)$$

شکل زیر نشان دهنده این کانولوشن است:



با تبدیل فوریه گرفتن از رابطه فوق داریم:

$$\left( F\left\{\Pi\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} \right)^2 = 2T F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} \Rightarrow \left( 2T \sin c\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \right)^2 = 2T F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} \Rightarrow F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2T}\right)\right\} = 2T \sin c^2\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)$$

با تبدیل  $T$  به  $T$  در رابطه بدست آمده خواهیم داشت:

$$F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \sin c^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) \frac{2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\omega} e^{j\frac{3\omega}{2}} d\omega$$

تست نمونه - (آزاد ۸۳) در صورتی که  $(t) g$  به صورت نشان داده در شکل زیر باشد، مقدار  $\omega$  داشت:

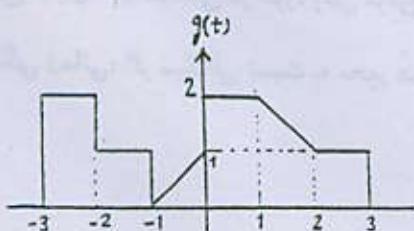
برابر است با:

$$A = \pi \quad (1)$$

$$A = 2\pi \quad (2)$$

$$A = 3\pi \quad (3)$$

$$A = 4\pi \quad (4)$$





هل:

$$\text{با فرض } F(j\omega) = G(j\omega) \frac{\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}}{\text{داریم:}}$$

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{\frac{j\omega}{2}} d\omega = 2\pi f(t) \Big|_{t=\frac{3}{2}} = 2\pi (g(t)^* \Pi(t)) \Big|_{t=\frac{3}{2}} = 2\pi \int_1^2 g(t) dt = 2\pi \times \frac{3}{2} = 3\pi$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است. برای تعیین عکس تبدیل فوریه  $\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}$  از جدول (۹-۱) استفاده کنید.

(۷) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، تبدیل فوریه آن‌ها در حوزه فرکانس با یکدیگر کاتوالو می‌شوند. از خاصیت فوق در بحث مدولاسیون و نمونه‌برداری و بطور کلی در مواقعی که چند سیگنال در یکدیگر ضرب می‌شوند، استفاده می‌گردد.

مثال: اگر تبدیل فوریه سیگنال  $x(t)$  را  $X(\omega)$  بنامیم، تبدیل فوریه  $y_1(t) = x(t)\sin(\omega_0 t)$  و  $y_2(t) = x(t)\cos(\omega_0 t)$  را بدست آورید.

هل:

$$Y_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_0)$$

$$Y_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{\pi}{j} [\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] = \frac{1}{2j} X(\omega - \omega_0) - \frac{1}{2j} X(\omega + \omega_0)$$

(۸) تغییر مقیاس زمانی و فرکانسی: اگر سیگنالی در حوزه زمان فشرده یا گسترده شود، در حوزه فرکانس عکس آن اتفاق می‌افتد. یعنی فشرده شدن یک سیگنال در حوزه زمان، معادل گسترده شدن طیف آن در حوزه فرکانس می‌باشد. همچنین گسترده شدن آن در حوزه زمان، معادل فشرده شدن طیف آن در حوزه فرکانس می‌باشد.

(۹) دوگانی: یکی از خواص جالب تبدیل فوریه دوگانی است. بدین شکل که اگر بخواهیم تبدیل فوریه سیگنالی مانند  $x(t)$  را بدست آوریم و شکل  $x(t)$  مشابه تبدیل فوریه سیگنال  $x(-t)$  یعنی  $X(-\omega)$  باشد، آنگاه داریم:

$$X_1(\omega) = 2\pi x_2(-\omega)$$

مثال: عکس تبدیل فوریه  $\cos(\omega)$  و  $\sin(\omega)$  را بدست آورید.

هل: با توجه آن که تبدیل فوریه  $\cos(t)$  برابر  $\frac{1}{2}[\delta(\omega-1)+\delta(\omega+1)]$  و تبدیل فوریه  $\sin(t)$  برابر  $\frac{-1}{2j}[\delta(\omega-1)-\delta(\omega+1)]$  می‌باشد و با توجه به خاصیت دوگانی داریم:

$$F\left\{\pi[\delta(t-1)+\delta(t+1)]\right\} = 2\pi \cos(-\omega) \Rightarrow F\left\{\frac{1}{2}[\delta(t-1)+\delta(t+1)]\right\} = \cos(\omega)$$

$$F\left\{\frac{\pi}{j}[\delta(t-1)-\delta(t+1)]\right\} = 2\pi \sin(-\omega) \Rightarrow F\left\{\frac{-1}{2j}[\delta(t-1)-\delta(t+1)]\right\} = \sin(\omega)$$

تست نمونه - (آزاد ۸۳) برای سیگنال  $x(t) = \frac{1}{\pi} \times \frac{1}{t^2 + 1}$ ، مقدار تبدیل فوریه آن در  $\omega = \frac{\pi}{4}$  چقدر است؟

0.456 (۴)

6.890 (۲)

1.432 (۲)

2.139 (۱)

هل:

از تبدیل فوریه  $|x(t)|^2 e^{-|\omega|}$  و خاصیت دوگانی استفاده می‌کنیم:

$$e^{-|t|} \xrightarrow{F.T} \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$\frac{2}{1+t^2} \xrightarrow{F.T} 2\pi e^{-|\omega|}$$

$$\frac{1}{\pi} \times \frac{1}{1+t^2} \xrightarrow{F.T} e^{-|\omega|} \Rightarrow X(j\omega) \Bigg|_{\omega=\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}} \approx 0.456$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

(۱۰) مشتق در حوزه زمان: مشتق گرفتن از یک سیگنال باعث می‌شود که تبدیل فوریه آن در  $\omega j$  ضرب شود. از این خاصیت می‌توان در تحلیل سیستم‌هایی که توسط معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیان شده‌اند جهت تعیین خروجی، پاسخ فرکانسی، پاسخ ضربه و ... استفاده کرد.

مثال: یک سیستم LTI علی با معادله دیفرانسیل ورودی - خروجی  $\frac{d^3y}{dt^3} + \frac{d^2y}{dt^2} = 2 \frac{d^2x}{dt^2} + x$  را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی، پاسخ

ضربه و پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t) = 10e^{-t}u(t)$  را بدست آورید.

هل: با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله دیفرانسیل فوق به دست می‌آوریم:

$$(j\omega)^3 Y(j\omega) + (j\omega)^2 Y(j\omega) = 2(j\omega)^2 X(j\omega) + X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{2(j\omega)^2 + 1}{(j\omega)^2(j\omega + 1)}$$

$$h(t) = F^{-1}\{H(j\omega)\} = F^{-1}\left\{\frac{3}{j\omega + 1} + \frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{-1}{j\omega}\right\} = (3e^{-t} + t - 1)u(t)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 1} \times \frac{2(j\omega)^2 + 1}{(j\omega)^2(j\omega + 1)} = 10 \frac{2(j\omega)^2 + 1}{(j\omega)^2(j\omega + 1)^2}$$

$$= 10 \left( \frac{1}{(j\omega)^2} + \frac{-2}{j\omega} + \frac{3}{(j\omega + 1)^2} + \frac{2}{j\omega + 1} \right) \Rightarrow y(t) = 10(t - 2 + 3te^{-t} + 2e^{-t})u(t)$$

تست نمونه - خروجی  $y(t)$  یک سیستم LTI علی، با معادله زیر به ورودی  $x(t)$  آن مرتبط شده است:

$$\frac{dy}{dt} + 10y = \int_{-\infty}^t x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$

که در آن  $(z(t) = e^{-t}u(t) + 3\delta(t))$  می‌باشد. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

$$h(t) = \frac{1}{9}(e^{-t} + 17e^{-10t})u(t) \quad (2)$$

$$h(t) = \frac{1}{9}(e^{-t} + te^{-t} - 6e^{-10t})u(t) \quad (1)$$

۴) هیچ‌کدام

$$h(t) = \frac{1}{2}(2e^{-t} - e^{-10t})u(t) \quad (3)$$

حل:

با توجه به تعریف کانولوشن داریم:

$$\frac{dy}{dt} + 10y = x(t)*z(t) - x(t)$$

با تبدیل فوریه گرفتن از طرفین معادله فوق به دست می‌آوریم:

$$(j\omega + 10)Y(j\omega) = X(j\omega)(Z(j\omega) - 1) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{Z(j\omega) - 1}{j\omega + 10}$$

$$= \frac{\frac{1}{1+j\omega} + 2}{j\omega + 10} = \frac{2j\omega + 3}{(j\omega + 1)(j\omega + 10)} = \frac{\frac{1}{9}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{17}{9}}{j\omega + 10} \Rightarrow h(t) = \frac{1}{9}e^{-t}u(t) + \frac{17}{9}e^{-10t}u(t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. البته می‌توانستیم این تست را با استفاده از تبدیل لاپلاس حل کنیم.

تست نمونه - (آزاد ۸۲) سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 3y = \frac{dx}{dt} + 2x$$

پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t) = e^{-t}u(t)$  عبارت است از:

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}e^{-t} + te^{-t} + \frac{1}{2}e^{-3t}\right]u(t) \quad (2)$$

حل:

از طرفین معادله تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$((j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3)Y(j\omega) = (j\omega + 2)X(j\omega) \Rightarrow$$

$$Y(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)}X(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} = \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{-\frac{1}{4}}{j\omega + 3}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}te^{-t}u(t) + \frac{1}{4}e^{-t}u(t) - \frac{1}{4}e^{-3t}u(t)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است. این تست را نیز می‌توان با تبدیل لاپلاس حل کرد.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) فرض کنید تبدیل فوریه  $(\tau)x(\tau)$  را با  $X(j\omega)$  و تبدیل فوریه  $(\tau)g(\tau)$  را با  $G(j\omega)$  نمایش دهیم. چنانچه رابطه بین  $(\tau)x(\tau)$  و  $(\tau)g(\tau)$  به صورت زیر باشد:

$$x(\tau) = \int_{\tau-3}^{\tau-1} g(\tau)d\tau$$

کدام یک از گزینه‌های زیر درست است؟ (\* اپراتور کانولوشن است)

$$X(j\omega) = \left[ \frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0) \delta(\omega) \right] * \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} e^{j2\omega} \quad (1)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} e^{-j2\omega} \quad (2)$$

$$X(j\omega) = \left[ \frac{1}{j\omega} G(j\omega) + \pi G(0) \delta(\omega) \right] * \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} e^{-j2\omega} \quad (3)$$

$$X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} e^{j2\omega} \quad (4)$$

هل :

با دو روش این تست را حل می‌کنیم:

**روش اول** - از طرفین مشتق و سپس تبدیل فوریه می‌گیریم:

$$\frac{dx(\tau)}{d\tau} = g(\tau-1) - g(\tau-3) \Rightarrow j\omega X(j\omega) = (e^{-j\omega} - e^{-j3\omega}) G(j\omega) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega} - e^{-j3\omega}}{j\omega} G(j\omega)$$

$$\Rightarrow X(j\omega) = e^{-j2\omega} \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} G(j\omega) = e^{-j2\omega} \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} G(j\omega)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

**روش دوم** - با توجه به رابطه داده شده داریم:

$$x(\tau) = \int_{\tau-3}^{\tau-1} g(\tau)d\tau = g(\tau) * \Pi\left(\frac{\tau-2}{2}\right) \Rightarrow X(j\omega) = G(j\omega) \frac{2 \sin(\omega)}{\omega} e^{-j2\omega}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

(۱۱) انتگرال در حوزه زمان: انتگرال گیری از یک سیگنال در بازه زمانی  $-\infty < \tau < \infty$  باعث می‌شود که تبدیل فوریه آن در  $\frac{1}{j\omega}$  ضرب شده

و به واسطه مؤلفه DC ورودی یک جمله  $\delta(\omega)X(0)\pi$  نیز ظاهر می‌شود.

(۱۲) مشتق در حوزه فرکانس: با ضرب  $(\tau-j)$  در یک سیگنال، از تبدیل فوریه آن مشتق گرفته می‌شود.

(۱۳) انتگرال در حوزه فرکانس: رابطه انتگرال در حوزه فرکانس مشابه رابطه آن در حوزه زمان است. اما انتگرال گیری از  $\omega$  تا  $+\infty$

انجام می‌شود.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) اگر تبدیل فوریه سیگنال  $x(t)$  را  $X(f)$  بنامیم، تبدیل فوریه  $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha$  چه خواهد بود؟

$$Y(f) = \frac{1}{2} X(0) \delta(f) + j \frac{X(f)}{2\pi f} \quad (2)$$

$$Y(f) = -j \frac{X(f)}{2\pi f} \quad (3)$$

$$Y(f) = X(0) \delta(f) + j \frac{X(f)}{2\pi f} \quad (1)$$

$$Y(f) = j \frac{X(f)}{2\pi f} \quad (3)$$

هل؛ در جدول (۱-۲) تبدیل فوریه  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau$  آورده شده است. نحوه بدست آوردن عبارت فوق به صورت زیر است:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau = x(t) * u(t) \Rightarrow F\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) d\tau\right\} = X(j\omega) F\{u(t)\} = X(j\omega) \left( \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right) = \frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0) \delta(\omega)$$

با توجه به آن که در تست  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha$  داریم پس:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha &= x(t) * u(-t) \Rightarrow F\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) d\alpha\right\} = X(j\omega) F\{u(-t)\} \\ &= X(j\omega) \left( \frac{-1}{j\omega} + \pi \delta(-\omega) \right) = X(f) \left( \frac{j}{2\pi f} + \frac{1}{2} \delta(f) \right) = \frac{j}{2\pi f} X(f) + \frac{1}{2} X(0) \delta(f) \end{aligned}$$

پس گزینه (۲) صحیح می‌باشد.

(۱۴) تقارن سیگنال‌های حقیقی: اگر سیگنالی حقیقی باشد، تبدیل فوریه آن تقارن مزدوج (هرمتی) دارد در این تقارن  $X(j\omega) = X^*(-j\omega)$  می‌باشد یعنی اگر تبدیل فوریه را نسبت به محور عمودی فرکانس قرینه کنیم، با مزدوج تبدیل فوریه برابر می‌شود این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی تبدیل فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی تبدیل فوریه تقارن فرد پیدا کنند.

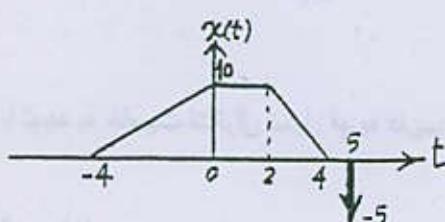
(۱۵) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن نیز حقیقی و زوج است.

(۱۶) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه تبدیل فوریه آن موهومی و فرد است.

(۱۷) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: تبدیل فوریه قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج طیف که برابر با قسمت حقیقی طیف است را نتیجه می‌دهد. تبدیل فوریه قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد طیف که برابر با قسمت موهومی طیف ضربدر زمی باشد را نتیجه می‌دهد.

(۱۸) سطح زیر منحنی سیگنال: اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال  $x(t) = 0$  قرار دهیم آنگاه ملاحظه می‌گردد که سطح زیر منحنی یک سیگنال برابر مقدار تبدیل فوریه آن به ازاء  $\omega = 0$  می‌شود.

مثال: سیگنال  $x(t)$  نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. اگر تبدیل فوریه این سیگنال را  $X(j\omega)$  بنامیم،  $X(j\omega) \Big|_{\omega=0}$  چقدر است؟

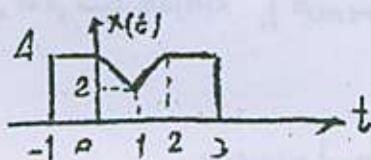


## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها

هل: از خاصیت سطح زیر منحنی سیگنال استفاده می‌کنیم:

$$X(j\omega) \Big|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = \frac{10}{2}(2+8) - 5 = 45$$

تست نمونه - (آزاد ۸۰) سیگنال  $x(t)$  در شکل مقابل داده شده است. مقدار انتگرال  $\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega) d\omega$  چقدر است؟  $X(j\omega)$  تبدیل فوریه  $x(t)$  است.



24π (۲)

8π (۳)

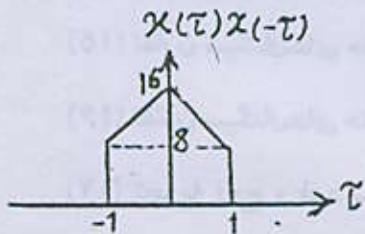
14π (۱)

48π (۴)

هل:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X^2(j\omega) d\omega = 2\pi(x(t) * x(t)) \Big|_{t=0} = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)x(-\tau) d\tau$$

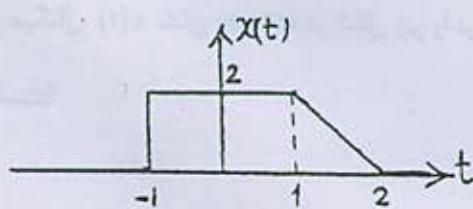
در شکل زیر منحنی  $x(-\tau)x(\tau)$  رسم شده است:



بنابراین  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau)x(\tau) d\tau = 24$  و در نتیجه گزینه (۲) صحیح است.

(۱۹) سطح زیر منحنی تبدیل فوریه: اگر در رابطه عکس تبدیل فوریه  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega$  قرار داده شود، آنگاه ملاحظه می‌گردد که انتگرال تبدیل فوریه برابر  $2\pi x(0)$  می‌شود.

تست نمونه - (سراسری ۸۱) اگر سیگنال  $x(t)$  مطابق شکل زیر باشد و  $X(j\omega)$  تبدیل فوریه آن باشد، حاصل  $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega$  چقدر است؟



2π (۲)

2 (۳)

4π (۱)

4 (۴)

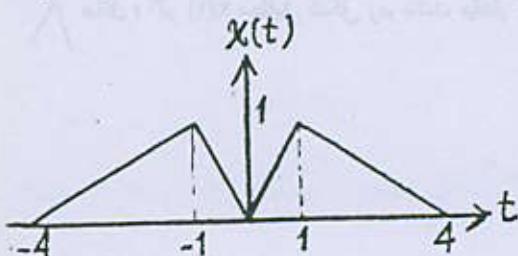
هل: با توجه به خاصیت انتگرال تبدیل فوریه داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$$

بس گزینه (۱) صحیح می‌باشد.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) در صورتی که  $(t)$  به صورت داده شده در شکل زیر باشد، مقدار تبدیل فوریه آن در  $\omega=0$  چه مقدار خواهد بود؟

- ۱) صفر
- ۰.۵ (۲)
- ۴ (۳)
- ۸ (۴)



حل:

$$X(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) dt = 4$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۲۰) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب: این رابطه یکی از روابط مهم در درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها و مخابرات می‌باشد و نشان می‌دهد انرژی یک سیگنال را می‌توان از روی تبدیل فوریه آن بدست آورد.

مثال: از خواص تبدیل فوریه استفاده کرده  $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(t) dt$  و  $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^4(t) dt$  را بدست آورید.

حل: از جدول (۱-۹) تبدیل فوریه  $\sin^2(t)$  را بدست آورده و سپس از خاصیت سطح زیر منحنی سیگنال و خاصیت پارسوال استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول (۱-۹) داریم:

$$F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)\right\} = T \sin^2\left(\frac{\omega T}{2\pi}\right)^{\tau=2\pi} \Rightarrow F\left\{\Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = 2\pi \sin^2(\omega) \Rightarrow F\left\{\frac{1}{2\pi} \Lambda\left(\frac{t}{2\pi}\right)\right\} = \sin^2(\omega)$$

حال از قضیه دوگانی استفاده کرده و بدست می‌آوریم:

$$F\{\sin^2(t)\} = 2\pi \times \frac{1}{2\pi} \Lambda\left(\frac{-\omega}{2\pi}\right) = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)$$

با توجه به خاصیت سطح زیر منحنی یک سیگنال داریم:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^2(t) dt = \Lambda\left(\frac{\omega}{2\pi}\right)|_{\omega=0} = 1$$

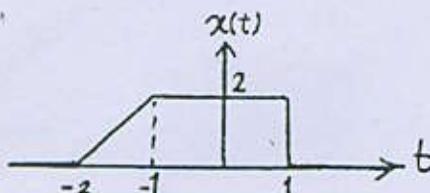
حال از قضیه پارسوال استفاده کرده و بدست می‌آوریم:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin^4(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda^2\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) d\omega = \frac{1}{2\pi} \times 2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{\omega}{2\pi}\right)^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \times \left[ \frac{1 - \frac{\omega}{2\pi}}{\frac{-3}{2\pi}} \right] \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3}$$

## تبیه و تحلیل سیستم‌ها



مثال: اگر  $x(t)$  مطابق شکل زیر باشد، مقدار  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \frac{\sin(2\omega)}{\omega} e^{j\omega} d\omega$  چقدر است؟



هل:

فرض کنید  $Y(j\omega) = X(j\omega) \frac{\sin(2\omega)}{\omega}$  باشد با توجه به خاصیت کانولوشن در حوزه زمان و جدول (۱-۹) داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2} x(t) * \Pi\left(\frac{t}{4}\right)$$

با توجه به رابطه عکس تبدیل فوریه داریم:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

بنابراین با مقایسه روابط فوق می‌توان مقدار  $A$  را بدست آورد:

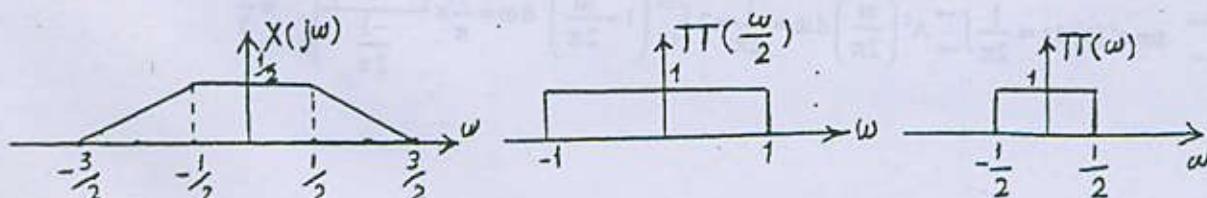
$$A = 2\pi y(t) \Big|_{t=1} = 2\pi \times \frac{1}{2} x(t) * \Pi\left(\frac{t}{4}\right) \Big|_{t=1} = \pi \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \Pi\left(\frac{1-\tau}{4}\right) d\tau = \pi \int_{-1}^1 x(\tau) d\tau = 4\pi$$

مثال: تبدیل فوریه سینگنال  $x(t) = \frac{\sin(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi^2}$  را بدست آورید.

هل:

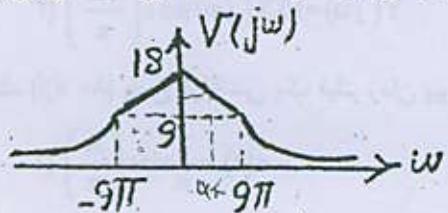
$$x(t) = \pi \left( \frac{\sin(t)}{\pi} \right) \left( \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi} \right) \Rightarrow X(j\omega) = \frac{1}{2} F\left\{ \frac{\sin(t)}{\pi} \right\} * F\left\{ \frac{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\pi} \right\} = \frac{1}{2} \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right) * \Pi(\omega)$$

دو تابع فوق و نصف حاصل کانولوشن آن‌ها در زیر نشان داده شده‌اند:



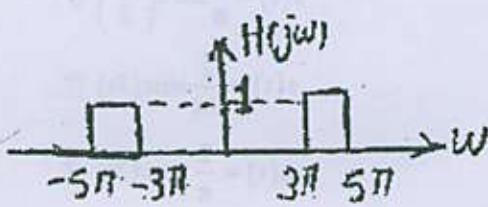
## خودآزمانی چهارم

- (آزاد ۸۰) سیگنال  $x(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب  $T_0 = 1$  است که با متناوب کردن سیگنال  $v(t)$  بدست آمده است  
 - (آزاد ۸۱) طیف سیگنال  $x(t)$  از سیستمی با پاسخ فرکانسی داده شده عبور کند، خروجی آن کدام است؟



$$28\cos(4\pi t) \quad (۲)$$

$$28\cos(2\pi t) \quad (۱)$$

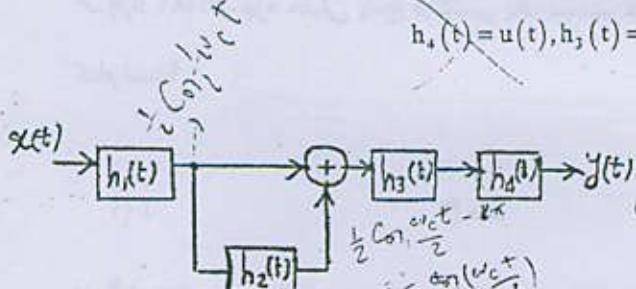


$$14\cos(4\pi t) + 28\cos(2\pi t) \quad (۴)$$

$$14\cos(4\pi t) \quad (۳)$$

- (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۳) اتصال چند سیستم LTI را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$h_4(t) = u(t), h_3(t) = \frac{\sin(3\omega_c t)}{\pi}, H_2(j\omega) = e^{-j2\pi\frac{\omega}{\omega_c}}, h_1(t) = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\sin(\omega_c t)}{2\pi} \right] \quad \text{فرض کنید}$$



در صورتی که ورودی سیستم  $x(t) = \sin(2\omega_c t) + \cos\left(\frac{1}{2}\omega_c t\right)$  باشد، خروجی  $y(t)$  کدام می‌گزیند است؟

$$\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) \quad (۱)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) + \sin(2\omega_c t) \right] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega_c t - 2\pi}{2}\right) \right] \quad (۳)$$

$$\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) + \cos\left(\frac{\omega_c t - 2\pi}{2}\right) + \sin(2\omega_c t - 4\pi) \right] \quad (۴)$$

- (آزاد ۸۴) فرض کنید  $Y(j\omega) = u(\omega+2) - u(\omega-2)$  و تبدیل فوریه  $y(t) = x(t)\cos(t)$  به صورت  $y(t) = x(t)$  باشد (x چگونه باید باشد؟)

$$x(t) = \frac{2\sin(t)}{\pi t} \quad (۲)$$

$$x(t) = \frac{\sin(t)}{\pi t} \quad (۱)$$

$$x(t) = \frac{2\sin(2t)}{\pi t} \quad (۴)$$

$$x(t) = \frac{\sin(2t)}{\pi t} \quad (۳)$$

## تمثیله و تبدیل سیستم‌ها

۴- (آزاد ۸۴) چنانچه خروجی یک سیستم LTI به صورت  $y(t) = \int_{t-5}^{t+5} x(\tau) d\tau$  باشد، تبدیل فوریه آن برابر است با:

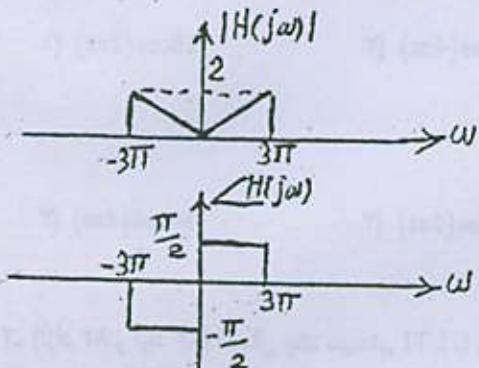
$$Y(j\omega) = \frac{1}{5} X(j\omega) \sin c\left(\frac{\omega}{10\pi}\right) \quad (1)$$

$$Y(j\omega) = 10 X(j\omega) e^{-j5\omega} \sin c\left(\frac{5\omega}{\pi}\right) \quad (2)$$

$$Y(j\omega) = \frac{1}{5} X(j\omega) e^{-j5\omega} \sin c\left(\frac{\omega}{10\pi}\right) \quad (3)$$

$$Y(j\omega) = 10 X(j\omega) \sin c\left(\frac{5\omega}{\pi}\right) \quad (4)$$

۵- (آزاد ۸۰) پاسخ فرکانسی یک فیلتر زمان پیوسته در شکل مقابل داده شده است. پاسخ پله فیلتر کدام است؟



$$s(t) = \frac{2}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{3t}{\pi}\right) \quad (1)$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \sin c\left(\frac{3t}{2}\right) \quad (2)$$

$$s(t) = \frac{2}{3\pi} \text{sinc}(3t) \quad (3)$$

$$s(t) = \frac{2}{\pi} \text{sinc}(3t) \quad (4)$$

۶- (آزاد ۸۱) اگر جزء حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم علی و حقیقی زمان - پیوسته به صورت زیر باشد، مقدار پاسخ ضربه در  $t = \frac{1}{2}$  کدام است؟

$$\operatorname{Re}\{H(j\omega)\} = \cos(\omega)$$

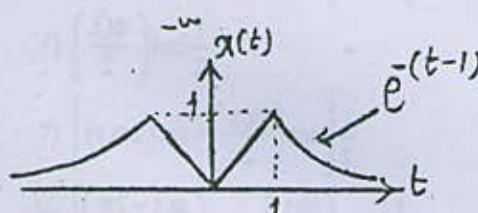
۳) نمی‌توان مشخص نمود

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

۲) صفر

۱) ۱

۷- (آزاد ۸۲) برای سیگنال  $x(t)$  نشان داده شده در شکل زیر مقدار عبارت  $a = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \frac{2\sin(\omega)}{2\pi\omega} e^{j2\omega} d\omega$  برابر است با:



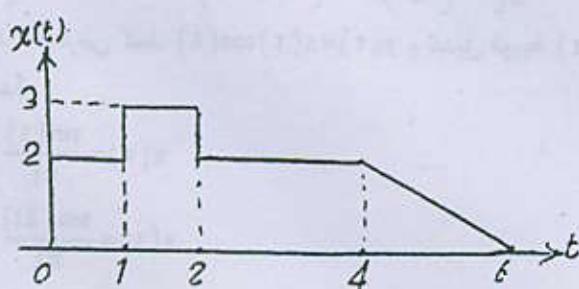
1.3647 (1)

0.3647 (2)

$\infty$  (3)

0.8647 (4)

۸- (سراسرنی ۸۱) اگر سیگنال  $x(t)$  مطابق شکل مقابل باشد و  $X(\omega) = X(\omega)|_{\omega=0}$  تبدیل فوریه آن باشد، در این صورت چقدر



است؟

10 (1)

11 (2)

12 (3)

13 (۱۴)

## تمثیله و تملیله سیستم‌ها

۹- (سراسری ۸۲) پاسخ فرکانسی سیستم زمان پیوسته‌ای به صورت  $H(j\omega) = \cos(\omega)$  است. این سیستم در کدام گروه قرار دارد؟

- (۱) غیرعلی، پایدار، معکوس‌نایپذیر  
 (۲) علی، پایدار، معکوس‌نایپذیر  
 (۳) غیرعلی، ناپایدار، معکوس‌نایپذیر

۱۰- (سراسری ۸۱) اگر قسمت حقیقی پاسخ فرکانسی یک سیستم خطی و تغییرنایپذیر با زمان حقیقی و علی برابر  $H_R(\omega) = \pi\delta(\omega)$  باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟

$$h(t) = u(t) - u(t-1) \quad (۴)$$

$$h(t) = e^{-t} u(t) \quad (۵)$$

$$h(t) = u(t) \quad (۶)$$

$$h(t) = \delta(t) \quad (۷)$$

۱۱- (سراسری ۸۲) اگر رابطه زیر مابین تبدیل فوریه‌های ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  در یک سیستم زمان پیوسته برقرار باشد، در آن صورت سیستم جز کدام دسته است؟

$$Y(j\Omega) = e^{j\Omega} X(j\Omega) + j \frac{dX(j\Omega)}{d\Omega}$$

- (۱) خطی، تغییرنایپذیر با زمان، غیرعلی  
 (۲) خطی، تغییرنایپذیر با زمان، علی  
 (۳) غیرخطی، تغییرنایپذیر با زمان، علی

۱۲- (آزاد ۸۰) به یک سیستم LTI با پاسخ ضربه  $h(t) = e^{-2t} u(t)$  ورودی زیر اعمال شده است. اگر  $Y(j\omega)$  تبدیل فوریه خروجی باشد مقدار آن در مبدا (یعنی  $(Y(j0))$ ) چقدر است؟

$$6 \quad (۱)$$

$$12 \quad (۴) \quad \frac{3}{2} \quad (۳)$$

۱۳- (آزاد ۷۹) حاصل انتگرال زیر چقدر است؟

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin[\pi(t-a)]}{\pi(t-a)} \frac{\sin[\pi(t+a)]}{\pi(t+a)} dt$$

$$A = 1 \quad (۴)$$

$$A = \frac{\sin^2(\pi a)}{(\pi a)^2} \quad (۳)$$

$$A = \frac{\sin(2\pi a)}{2\pi a} \quad (۲)$$

$$A = \frac{\sin(\pi a)}{\pi a} \quad (۱)$$

۱۴- (آزاد ۸۴) فرض کنید سیگнал  $f(t)$  به صورت نشان داده شده در شکل زیر باشد. مقدار انتگرال  $A = \int_{-\infty}^{+\infty} F^2(j\omega) d\omega$  چقدر است؟

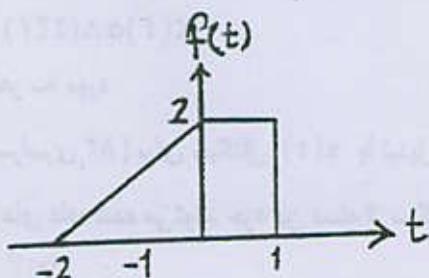
تبدیل فوریه  $F(j\omega)$  است

$$A = 12\pi \quad (۱)$$

$$A = 6\pi \quad (۲)$$

$$A = 24\pi \quad (۳)$$

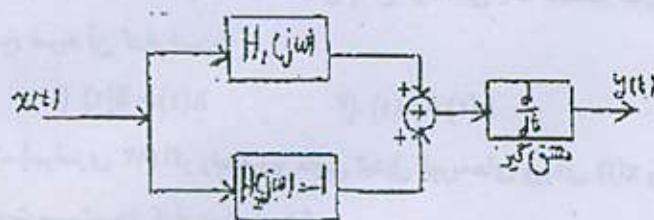
$$A = 18\pi \quad (۴)$$



## تماریه و تحلیل سیستم‌ها

۱۵- (سراسری ۸۱) اگر در سیستم نمایش داده شده در شکل زیر  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$  باشد، در این صورت تابع تبدیل کل سیستم

$$\text{کدام است؟ } \left( H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \right)$$



$$\frac{\omega^2}{1+j\omega} \quad (1)$$

$$j\omega[H_1(j\omega)-1] \quad (2)$$

$$\frac{1}{j\omega} \left[ \frac{1}{1+j\omega} - 1 \right] \quad (3)$$

$$\frac{d}{d\omega} \left[ \frac{-j\omega}{1+j\omega} \right] \quad (4)$$

۱۶- (ازاد ۸۲) برای سیگنال  $x(t) = \frac{d}{dt} \frac{7\sin[50(t-2)]}{2\pi(t-2)}$ ، مقدار تبدیل فوریه آن  $X(j\omega)$  در  $\omega = \frac{\pi}{4}$  چقدر است؟

$$\frac{7\pi}{4} e^{-j\frac{\pi}{2}} \quad (1)$$

$$\frac{7\pi}{8} \quad (2)$$

$$\frac{7\pi}{4} e^{j\frac{\pi}{2}} \quad (3)$$

$$\frac{7\pi}{8} e^{j\frac{\pi}{4}} \quad (4)$$

۱۷- (سراسری ۸۰) اگر یک سیستم LTI دارای تابع تبدیل فرکانسی  $H(\omega) = \frac{2a-j\omega}{2a+j\omega}$  باشد، پاسخ ضربه سیستم ( $h(t)$ ) کدام است؟  $(a > 0)$

$$\delta(t) - 4ae^{-2at} u(t) \quad (1)$$

$$-\delta(t) + 4ae^{-2at} u(t) \quad (2)$$

$$-\delta(t) - 4ae^{-2at} u(-t) \quad (3)$$

$$\delta(t) + 4ae^{-2at} u(-t) \quad (4)$$

۱۸- (سراسری ۸۴) سیگنالی پائین‌گذر با پهنای باند  $\frac{1}{2T}$  و صادق در  $\dots, \pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm n$  می‌باشد.  $x(nT) = 0$  کدام فرم (فرم‌های) زیر را دارد؟

$$X(f) \alpha \Lambda(Tf) \quad (1)$$

$$X(f) \alpha \Pi(Tf) \quad (2)$$

$$X(f) \alpha \Lambda(2Tf) \quad (3)$$

(۴) هر سه مورد

۱۹- (سراسری ۸۳) برای سیگنال  $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ ، خاصیت  $X(j\omega)$  با تبدیل فوریه آن دسته از سیگنال‌ها باشد؟

سیگنال‌های داده شده می‌توانند جزو این دسته از سیگنال‌ها باشند؟

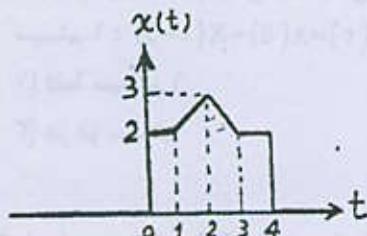
$$e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} \quad (1)$$

$$e^{-\frac{(t+1)^2}{2}} \quad (2)$$

$$(t-1)e^{-\frac{(t-1)^2}{2}} \quad (3)$$

$$te^{-\frac{t^2}{2}} \quad (4)$$

۲۰— (سراسری ۸۰) اگر سیگنال  $x(t)$  مطابق شکل زیر باشد و  $X(\omega)$  تبدیل فوریه آن باشد، مقادیر  $\angle X(\omega)$  و  $\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega d\omega}$  به ترتیب چقدر است؟



$$2\pi \omega \quad (1)$$

$$0 \quad (2)$$

$$2\pi -\omega \quad (3)$$

$$0 \quad (4)$$

۲۱— (سراسری ۸۴) فرض کنید دو سیستم مجهول مطابق شکل زیر به صورت متوالی به یکدیگر متصل شده‌اند. به ورودی سیستم سیگنال  $x(t) = \text{sinc}(t)$  را اعمال می‌کنیم.  $y(t) = \text{sinc}(2t)$  و  $z(t) = \text{sinc}(t)$  می‌شوند. کدام یک از دو سیستم A و B می‌توانند LTI باشند؟

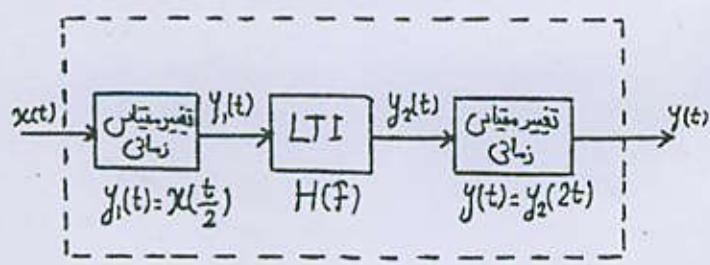
(۱) فقط A

(۲) فقط B

(۳) هردو

(۴) هیچ کدام

۲۲— (سراسری ۸۰) سیستمی از سه طبقه متوالی شکل زیر تشكیل شده است. در این شکل  $H(f)$  تابع تبدیل طبقه وسط می‌باشد کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟



(۱) LTI نیست.

(۲) LTI است با تابع تبدیل  $H(2f)$

(۳) LTI است با تابع تبدیل  $H\left(\frac{f}{2}\right)$

(۴) LTI است با تابع تبدیل  $H(f)$

۲۳— (آزاد ۸۴) پاسخ فرکانسی یک سیستم علی و پایدار را به صورت  $H(j\omega) = \frac{1-j\omega}{1+j\omega}$  در نظر بگیرید. چنانچه تاخیر گروه (group delay) این سیستم را با  $\tau(\omega)$  نشان دهیم، کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟

$$\tau(\omega) = 0, \omega > 0 \quad (1)$$

$$\tau(\omega) > 0, \omega > 0 \quad (2)$$

$$\tau(\omega) < 0, \omega > 0 \quad (3)$$

$$\tau(\omega) < 0, \omega < 0 \quad (4)$$

## تمثیله و تملیل سیستمها

۲۴- (سراسری ۸۵) فرض کنید  $(t)x$  ورودی و  $(t)y$  خروجی سیستم بوده و  $X(j\omega)$  تبدیل فوریه ورودی سیستم است. کدام یک از دو سیستم زیر تغییرناپذیر با زمان (TI) می‌باشد؟

$$\text{سیستم ۲: } y(t) = X(0) + x(t-3)$$

۲) فقط سیستم ۲

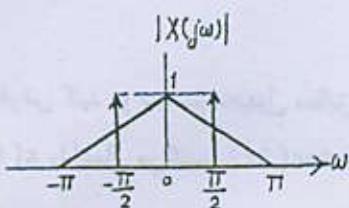
۳) هیچ کدام از دو سیستم

$$\text{سیستم ۱: } y(t) = x(0) + X(t-3)$$

۱) فقط سیستم ۱

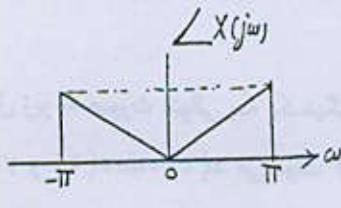
۲) هر دو سیستم

۲۵- (سراسری ۸۵) سیگنال پیوسته  $(t)x$  را با تبدیل فوریه  $(j\omega)X$  در نظر بگیرید که اندازه و فاز  $(j\omega)X$  مطابق شکل زیر می‌باشد. کدام یک از عبارات زیر صحیح است؟



$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \infty \quad (3)$$



$$(1) x(t) \text{ حقیقی بوده و}$$

$$(2) x(t) \text{ زوج بوده و}$$

پادداشت

## ۱۰- فیلتر کردن، نمونه‌برداری و مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان

در بخش‌های قبل به بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته در زمان پرداختیم و سری و تبدیل فوریه را معرفی کردیم. در این بخش کاربرد تحلیل فوریه را در سه نوع سیستم عملی یعنی فیلترها، نمونه‌بردارها و مدولاتورها بررسی خواهیم کرد. لازم به ذکر است سه مبحث فوق بسیار گسترده و خارج از حوصله این درس می‌باشند و در نتیجه به اختصار مختصر و در حد درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها بررسی می‌گردد.

### ۱۰-۱- فیلتر کردن سیگنال‌های پیوسته در زمان

در بسیاری از کاربردهای تمايل داریم دامنه نسبی مولفه‌های فرکانسی (طیف) یک سیگنال را تعییر داده و حتی برخی از آن‌ها را کاملاً حذف کنیم. این فرآیند فیلتر کردن نام دارد و سیستمی که در طیف یک سیگنال تغییرات بوجود می‌آورد، فیلتر نام دارد با توجه به کاربرد فیلترها، دسته‌ای از فیلترها که شکل طیف را بنا به هدفی خاص تغییر می‌دهند را فیلترهای شکل‌دهی فرکانس و دسته‌ای دیگر که برای عبور تقریباً بدون اعوجاج بعضی از فرکانس‌ها و تضعیف شدید یا حذف بعضی دیگر از فرکانس‌ها به کار می‌روند را فیلترهای فرکانس گزین می‌نامند. در این درس تنها به معرفی و بررسی دسته خاصی از فیلترهای فرکانس گزین تحت عنوان فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل پرداخته می‌شود.

به طور کلی یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(j\omega) = \begin{cases} ke^{-j\omega t_0} & \text{باند عبور} \\ 0 & \text{باند قطع} \end{cases}$$

با توجه به خواص تبدیل فوریه نتیجه می‌گیریم که یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل در باند قطع ورودی را حذف کرده و از خود عبور نمی‌دهد و در باند عبور دامنه ورودی را در ک ضرب کرده و تاخیر  $t_0$  در آن ایجاد می‌کند. به عبارت دیگر هیچ اعوجاجی در باند عبور ایجاد نمی‌کند و مانند یک کانال ایده‌آل می‌باشد.

با توجه به باند عبور و باند قطع انتخابی برای فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل می‌توان آن‌ها را به شرح زیر دسته‌بندی کرد:

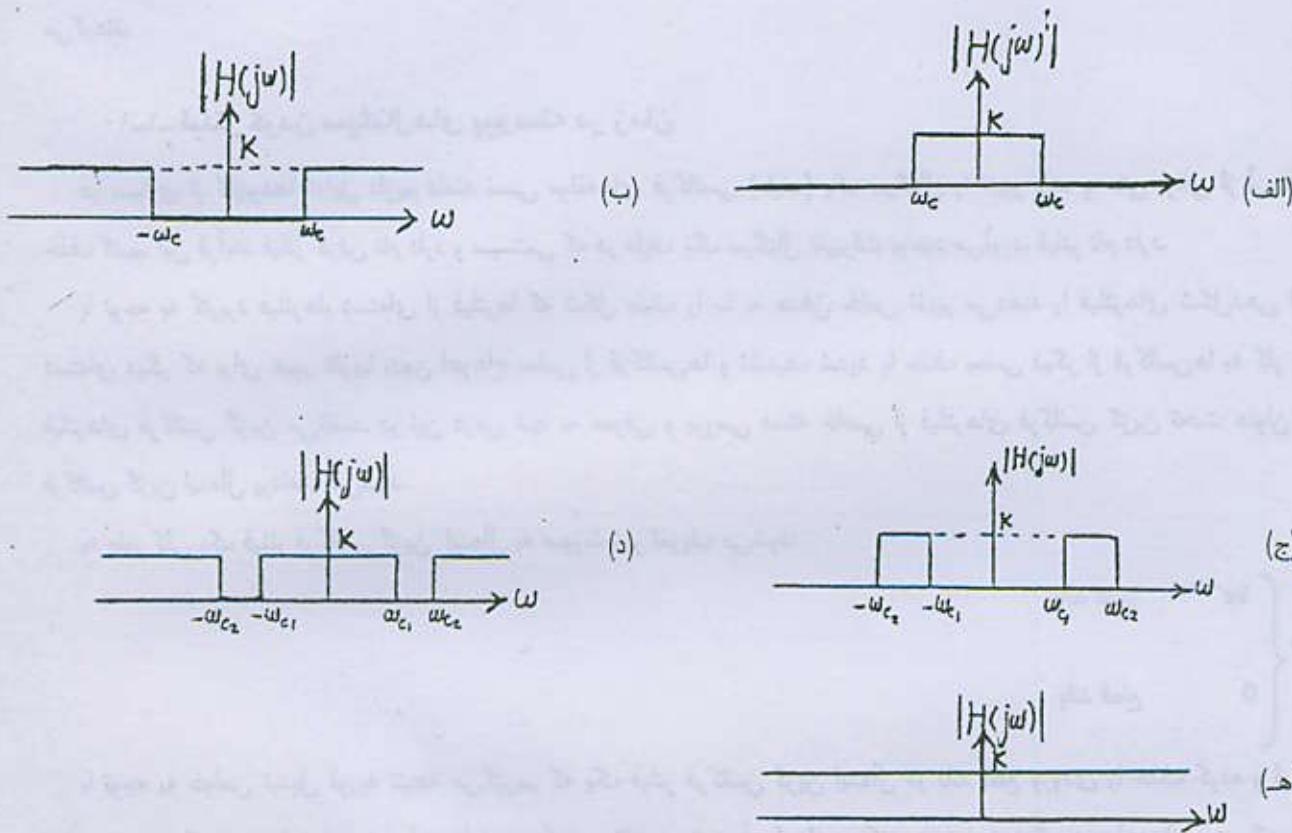
۱- فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل (LPPF): در این فیلتر باند عبور  $\omega_c$  و باند قطع  $\omega_b$  می‌باشند. شکل (۱۰-۱-الف) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد.  $\omega$  را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۲- فیلتر بالاگذر ایده‌آل (HPF): در این فیلتر باند عبور  $\omega_b$  و باند قطع  $\omega_c$  می‌باشند. شکل (۱۰-۱-ب) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد.  $\omega$  را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۳- فیلتر میان گذر ایده‌آل (BPF): در این فیلتر باند عبور  $\omega_b$  و باند قطع  $\omega_c$  و  $\omega_b < \omega_c$  می‌باشند. شکل (۱۰-۱-ج) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد.  $\omega_b$  و  $\omega_c$  را فرکانس‌های قطع فیلتر می‌نامند.

## تمزیه و تمیل سیستم‌ها

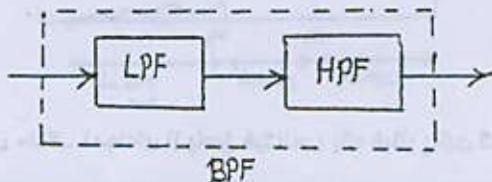
- ۴- فیلتر میان نگذر ایده‌آل (BRF): در این فیلتر باند عبور  $\omega_c < \omega < \omega_c$  و باند قطع  $\omega < \omega_c$  و  $\omega_c < \omega$  می‌باشد شکل (۴-۱۰-د) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد  $\omega_c$  و  $\omega_c$  را فرکانس‌های قطع فیلتر می‌نامند.
- ۵- فیلتر تمام گذرا ایده‌آل (APF): در این فیلتر باند عبور به ازاء کلیه فرکانس‌های است و باند قطع نداریم. کاربرد این فیلتر برای تغییر فاز ورودی است. شکل (۴-۱۰-ه) پاسخ دامنه این فیلتر را نشان می‌دهد.



شکل ۴-۱۰-پاسخ فرکانس (الف) فیلتر پائین گذرا ایده‌آل (ب) فیلتر بالاگذرا ایده‌آل (ج) فیلتر

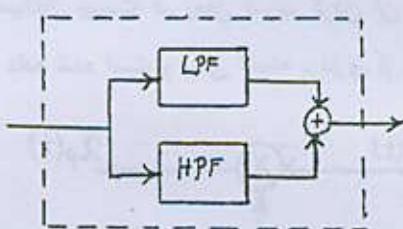
میان گذرا ایده‌آل (د) فیلتر میان نگذرا ایده‌آل (ه) فیلتر تمام گذرا ایده‌آل

نکره، ترکیب سری یک فیلتر پائین‌گذر با یک فیلتر بالاگذر، یک فیلتر میان‌گذر را نتیجه می‌دهد. اگر فرکانس قطع فیلتر بالاگذر را  $\omega_1$  و فرکانس قطع پائین‌گذر را  $\omega_2$  بنامیم، فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان‌گذر حاصل  $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$  می‌باشدند (فرض می‌شود  $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$  است). شکل (۲-۱۰) نشان‌دهنده این ترکیب می‌باشد.



شکل ۲-۱۰ - ترکیب سری LPF و HPF یک BPF را تثیمه می‌دهد

نکره، ترکیب موازی یک فیلتر بالا‌گذر، یک فیلتر میان‌گذر را نتیجه می‌دهد. اگر فرکانس قطع فیلتر پائین‌گذر را  $\omega_1$  و فرکانس قطع فیلتر بالاگذر را  $\omega_2$  بنامیم، فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان‌گذر حاصل  $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$  می‌باشدند (فرض می‌شود  $\omega_1 < \omega_c < \omega_2$  است). شکل (۳-۱۰) نشان‌دهنده این ترکیب می‌باشد.



شکل ۳-۱۰ - ترکیب موازی LPF و HPF یک BRF را تثیمه می‌دهد

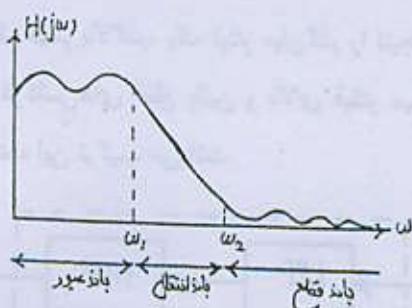
نکره، فیلترهای ایده‌آل سیستم‌های LTI غیرعلی می‌باشند. بنابراین از نظر فیزیکی ساخت آن‌ها امکان‌پذیر نیست. برای نشان دادن غیرعلی بودن آن‌ها پاسخ ضربه فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل را به عنوان مثال بدست می‌آوریم. برای این فیلتر داریم:

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \Pi\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \Rightarrow h(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c(t-t_0)}{\pi}\right)$$

مالحظه می‌کنید که پاسخ ضربه این سیستم در  $t=0$  غیرصفر است و بنابراین فیلتر فوق غیرعلی است.

نکره، با توجه به غیرعلی بودن فیلترهای ایده‌آل، فیلترهای واقعی (غیرایده‌آل) اهمیت زیادی ییدا می‌کنند. در این فیلترها علاوه بر باند عبور و باند قطع، باند انتقال نیز وجود دارد که بین دو باند قطع و عبور است. همچنین پاسخ در باند قطع و عبور لزوماً هموار نبوده و ممکن است دارای تمحق باشد. شکل (۴-۱۰) نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر پائین‌گذر غیر ایده‌آل به ازای  $\omega > \omega_c$  را نشان می‌دهد.

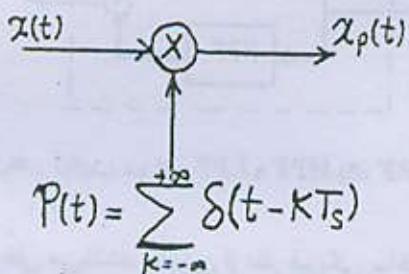
## تمزیه و تمیل سیستم‌ها



شکل ۱۰-۴۶. نمودهای ای پاسخ هرگانس یک فیلتر پائین گذر غیر ایده‌آل

## ۱۰-۲- نمونه‌برداری از سیگنال‌های پیوسته در زمان

نمونه‌برداری اولین عملیات جهت تبدیل سیگنال‌های پیوسته در زمان (آنالوگ) به سیگنال‌های دیجیتال می‌باشد توسط نمونه‌برداری می‌توان یک سیگنال پیوسته در زمان را به یک سیگنال گستته در زمان تبدیل کرد. عکس عمل نمونه‌برداری یعنی بازسازی سیگنال پیوسته در زمان از روی سیگنال گستته در زمان را درونیابی می‌نامند و سیستمی که این عمل را انجام می‌دهد فیلتر درونیاب نامیده می‌شود. ساده‌ترین راه برای نمونه‌برداری از یک سیگنال پیوسته در زمان ضرب کردن آن در قطار ضربه می‌باشد. این فرآیند که نمونه‌برداری ایده‌آل نامیده می‌شود، در شکل ۱۰-۵ نشان داده شده است و برای نمونه‌برداری از سیگنال  $x(t)$ ، از ضرب کردن این سیگنال در  $p(t)$  استفاده شده است.



شکل ۱۰-۵. سیستم نمونه‌بردار ایده‌آل

در شکل ۱۰-۵ دوره تناوب نمونه‌برداری  $T_s$  در فرکانس نمونه‌برداری نامیده می‌شوند. درک مفهوم نمونه‌برداری ایده‌آل با توجه به شکل ۱۰-۵ بسیار ساده است و جگونگی نمونه‌برداری توسط ضرب در قطار ضربه قابل درک می‌باشد. اما تحلیل سیستم فوق در حوزه فرکانس و بررسی طیف سیگنال  $x(t)$  می‌تواند جهت تعیین فیلتر درونیاب کارگشای باشد. به عبارت دیگر به منظور تحلیل طیفی نمونه‌بردار ایده‌آل ابتدا فرض می‌کنیم سیگنال  $x(t)$  یک سیگنال باند محدود و پائین گذر می‌باشد. به این داریم:

$$X(\omega) = 0 \quad |\omega| > W$$

در شکل ۱۰-۶ الف) طیف فرضی این سیگنال نشان داده شده است. تبدیل فوریه سیگنال  $p(t)$  در جدول ۱۰-۹ آورده شده است و

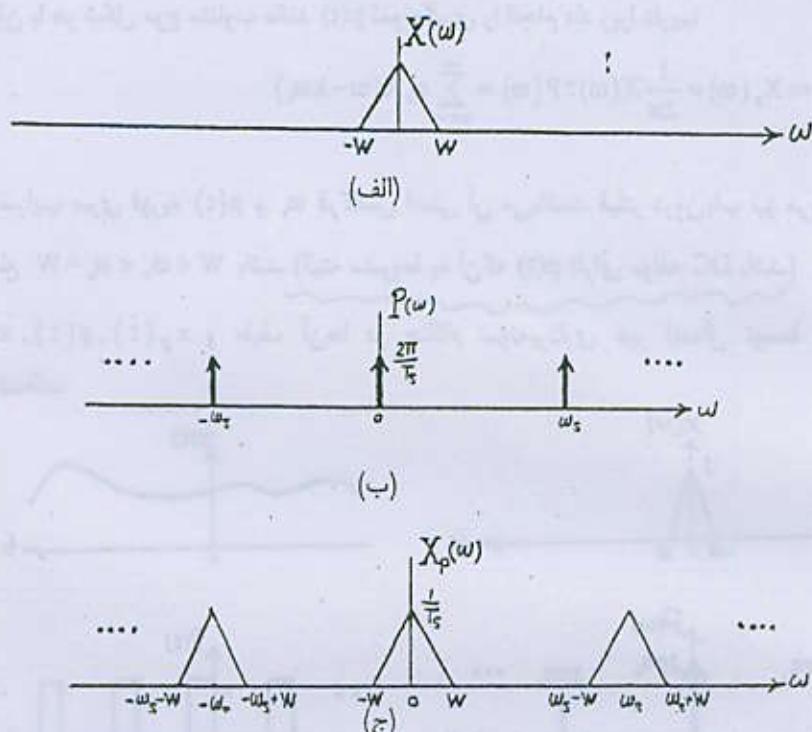
داریم:

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

در شکل (۱۰-۶ ب) نشان داده شده است. حال با توجه رابطه  $(t) = x(t)p(t)$  و خاصیت ضرب در حوزه زمان داریم:

$$X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)$$

ملاحظه می‌کنید با نمونه‌برداری کردن از یک سیگنال، طیف آن با فواصل  $\omega_s$  تکرار می‌شود. در شکل (۱۰-۶ ج) طیف سیگنال خروجی نمونه بردار با فرض عدم تداخل طیفی نشان داده شده است.



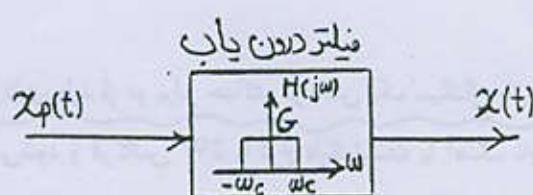
شکل ۱۰-۶. (الف) طیف فرضی برای  $x(t)$  (ب) طیف سیگنال نمونه برداری  $p(t)$  (ج) طیف سیگنال

نمونه‌برداری شده  $(t)$  با فرض عدم تداخل طیفی

ملاحظه می‌کنید با فرض عدم تداخل طیفی، می‌توان سیگنال  $(t)x$  را از روی  $(t)$  توسط یک فیلتر پائین‌گذر استخراج کرد به عبارت دیگر مطابق شکل (۱۰-۷)، فیلتر درون‌یاب در نمونه‌برداری ایده‌آل یک فیلتر پائین‌گذر با فرکانس قطع  $\omega_c$  و بفره  $G$  می‌باشد که باید در شروط زیر صدق کنند:

$$W < \omega_c < \omega_s - W$$

$$G = T_s$$



شکل ۱۰-۷. فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل برای بازیابی  $x(t)$  از  $x_p(t)$

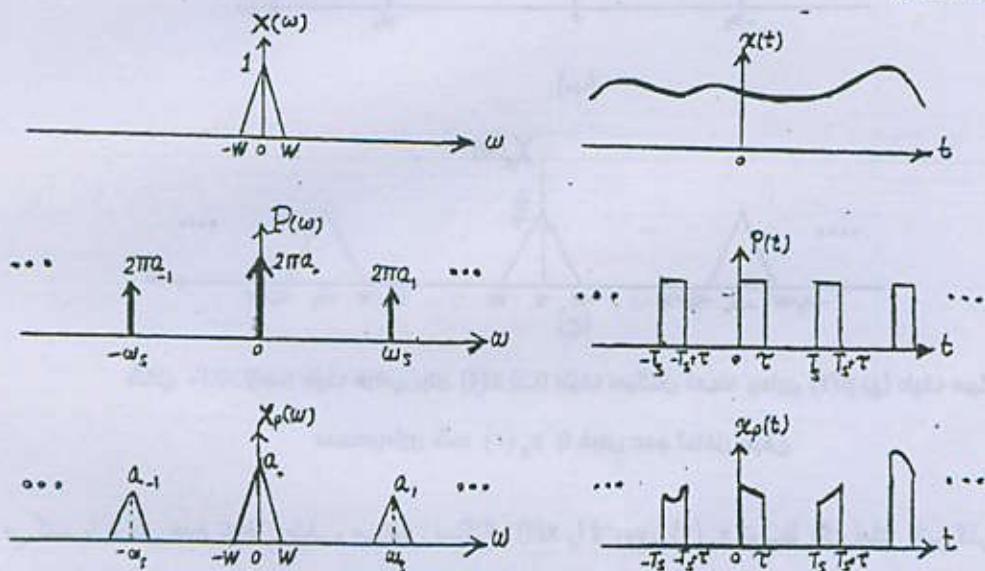
تذکر: اگرچه به نظر می‌رسد فیلتر درون‌باب به سادگی قابل تحقق است، اما دقت کنید فیلتر پائین‌گذر ایده‌آل غیرعلی است و قابل ساخت نمی‌باشد. در عمل باید از فیلتر پائین‌گذر غیر ایده‌آل استفاده کرد و در نتیجه خروجی فیلتر درون‌باب تقریبی از  $(t) \times$  خواهد بود.

تذکر: (نمونه‌برداری غیر ایده‌آل) استفاده از قطار ضربه برای نمونه‌برداری از یک سیگنال عملاً به دلیل قابل ساخت نبودن آن امکان‌پذیر نیست. لذا معمولاً از پالس‌های تیز به جای ضربه استفاده می‌شود که این نمونه‌برداری را غیر ایده‌آل می‌نامند. به طور کلی از نظر تئوری می‌توان با هر شکل موج متناظر مانند  $p(t)$  نمونه‌گیری را انجام داد زیرا داریم:

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_i) \Rightarrow X_p(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * P(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X(\omega - k\omega_i)$$

در رابطه فوق،  $a_k$  ضرایب سری فوریه  $p(t)$  و  $\omega_i$  فرکانس اصلی آن می‌باشد. فیلتر درون‌باب نیز می‌تواند یک فیلتر پائین‌گذر با بهره  $G = \frac{1}{a_0}$  و فرکانس قطع  $-W < \omega_i < W$  باشد. (البته مشروط به آن که  $p(t)$  دارای مولفه DC باشد.)

بنویان مثال  $x(t), p(t), x_p(t)$  و طیف آن‌ها در هنگام نمونه‌برداری غیر ایده‌آل توسط موج مربعی متناظر در شکل (۸-۱۰) نشان داده شده‌اند:



شکل ۸-۱۰ - هنگامی نمونه‌برداری غیر ایده‌آل توسط موج مربعی متناظر در موزه‌های (زمان و فرکانس)

تذکر: (قضیه نمونه‌برداری) در سرتاسر بحث فوق فرض عدم تداخل طبیعی در سیگنال نمونه‌برداری شده را داشتیم. این فرض فقط هنگامی درست است که داشته باشیم:

$$\omega_i - W > W \Rightarrow \omega_i > 2W$$

به عبارت دیگر فرکانس نمونه‌برداری باید از دو برابر حداقل فرکانس یک سیگنال پائین‌گذر (باند محدود) بیشتر باشد. این شرط تحت عنوان قضیه نمونه‌برداری نشانه می‌شود و فرکانس  $2W$  را نرخ نایکوئیست یا آهنگ نایکوئیست می‌نامند. فرکانس  $W$  که نصف آهنگ نایکوئیست است را فرکانس نایکوئیست می‌نامند.

آنچه زیرا نایکوئیست

آنچه زیرا نایکوئیست



دقیق کنید قضیه نمونه‌برداری لازم می‌دارد که فرکانس نمونه‌بردار از آهنگ نایکوئیست بیشتر باشد. لذا تساوی فرکانس نمونه‌بردار با آهنگ نایکوئیست لزوماً باعث نمی‌شود که بتوان سیگنال اصلی را از روی سیگنال نمونه‌برداری شده بازسازی کرد.

مثال: حداکثر فرکانس صوت منتقل شده از طریق خط تلفن تقریباً  $f_m = 3.4\text{ KHZ}$  است. لذا آهنگ نایکوئیست برای این سیگنال  $2f_m = 6.8\text{ KHZ}$  بوده و فرکانس نمونه‌برداری باید بزرگ‌تر از این مقدار باشد.

$$\text{مثال: آهنگ نایکوئیست را برای سیگنال } x(t) = \frac{\sin(2000t)}{\pi} \text{ بدست آورید.}$$

حل:

با توجه به جدول (۱-۹) داریم:

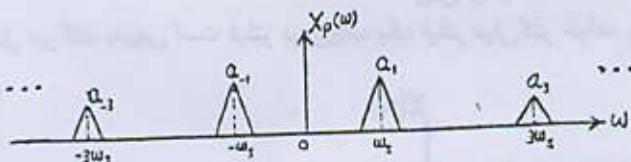
$$X(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{4000}\right)$$

بنابراین حداکثر فرکانس در سیگنال فوق  $\omega_m = 2000$  و در نتیجه آهنگ نایکوئیست آن  $4000 = 2\omega_m$  است.

لذگر: در برخی موارد خاص می‌توان با نرخی پایین‌تر از آهنگ نایکوئیست از یک سیگنال پائین‌گذر (باند محدود) نمونه‌برداری کرد. یکی از این موارد خاص هنگامی است که سیگنال نمونه‌بردار تقارن نیم موج دارد و در نتیجه ضرایب زوج سری فوریه آن صفر است. در این حالت داریم:

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_s) \Rightarrow X_p(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k X(\omega - k\omega_s)$$

نمودار  $X_p(\omega)$  برای  $X(\omega)$  فرضی در شکل (۱۰-۹) نشان داده شده است.



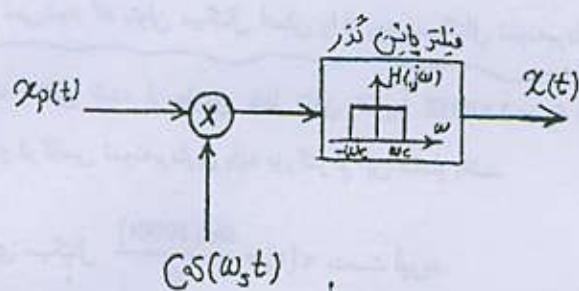
شکل ۱۰-۹ - طیف سیگنال نمونه‌برداری شده با هرضن تقارن نیم موج سیگنال نمونه‌بردار

با توجه به شکل (۱۰-۹) شرط عدم تداخل عبارت است از:

$$3\omega_s - W > \omega_s + W \Rightarrow \omega_s > W$$

ملحوظه می‌کنید در این حالت نرخ لازم برای نمونه‌برداری باید بزرگ‌تر از نصف آهنگ نایکوئیست باشد. البته بدینهی است برخلاف نمونه‌برداری عادی، فیلتر درون‌باب LPF نیست و برای بازسازی سیگنال اصلی باید طیف سیگنال نمونه‌برداری شده را مجدداً به مبدأ منتقل کرد شکل (۱۰-۱۰) سیستم بازیابی  $x(t)$  از  $x_p(t)$  را نشان می‌دهد.

## تمزیه و تملیل سیستمها

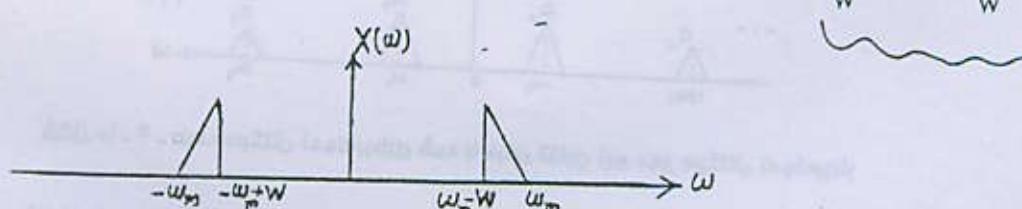


شکل ۱۰-۱۰- سیستم بازیابی  $(\text{X}(t)) \rightarrow (\text{X}_p(t))$  برای هالت که سیگنال نمونهبردار دارای تقارن نیم موج باشد

تذکر: دقت کنید اگرچه از نظر تئوری نرخ نمونهبرداری از یک سیگنال پایین گذر (باند محدود) باید اندازی بزرگتر از آهنگ نایکوئیست باشد اما عملاً پهنای باند و فرکانس قطع فیلتر پایین گذر درون یا ب در گیرنده تعیین کننده حداقل نرخ لازم برای نمونهبرداری است و این نرخ بیشتر از آهنگ نایکوئیست است.

مثال: در انتقال صوت دیجیتال از طریق خط تلفن، اگرچه آهنگ نایکوئیست KHZ 6.8 است، اما به دلیل محدودیت پهنای باند فیلتر درون یا ب در گیرنده، نرخ نمونهبرداری حداقل KHZ 8 انتخاب می شود.

تذکر: طبق قضیه نمونهبرداری، فرکانس نمونهبرداری باید از دو برابر حداقل فرکانس سیگنال (آهنگ نایکوئیست) بیشتر باشد. اما برای سیگنال های میان گذر می توان نرخ نمونهبرداری را کمتر از آهنگ نایکوئیست انتخاب کرد می توان نشان داد اگر طیف یک سیگنال میان گذر مطابق شکل (۱۱-۱۰) دارای حداقل فرکانس  $\omega_m$  و آهنگ نایکوئیست  $2\omega_m$  و پهنای باند W باشد آن گاه می توان سیگنال میان گذر اصلی را از روی سیگنال نمونهبرداری شده با نرخ  $\frac{2\omega_m}{k}$  بدست آورد. k عدد صحیح است که در رابطه  $\frac{\omega_m}{W} < k < 1$  صدق می کند بدین معنی است فیلتر درون یا ب یک فیلتر میان گذر خواهد بود.



شکل ۱۱-۱۰- نمایش یک سیگنال میان گذر فرضی با نرخ نایکوئیست  $2\omega_m$  و پهنای باند W

مثال: یک سیگنال میان گذر با حداقل و حداقل فرکانس  $f_2 = 12\text{KHZ}$  و  $f_1 = 14.5\text{KHZ}$  را در نظر بگیرید. نرخ نایکوئیست و حداقل فرکانس لازم برای نمونهبرداری مناسب برای این سیگنال را بدست آورید.

حل: نرخ نایکوئیست این سیگنال  $2f_2 = 29\text{KHZ}$  است. اما برای تعیین حداقل فرکانس نمونهبرداری مناسب داریم:

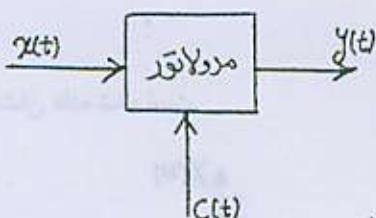
$$\frac{f_2}{f_2 - f_1} = \frac{14.5}{2.5} = 5.8$$

بنابراین  $k=5$  است و داریم:

$$f_1 = \frac{2f_2}{k} = \frac{29}{5} = 5.8\text{KHZ}$$

## ۱۰-۲- مدولاسیون سیگنال‌های پیوسته در زمان

مدولاتورها و دمدولاتورها بلوک‌های اصلی در اکثر سیستم‌های مخابراتی می‌باشند. مدولاتور در فرستنده قرار گرفته و سیگنال پیام را درون سیگنال دیگری تحت عنوان سیگنال حامل قرار می‌دهد. و دمدولاتور در گیرنده قرار گرفته و سیگنال پیام را استخراج می‌کند. در فرآیند مدولاسیون، دو سیگنال مطابق شکل (۱۰-۱۲) به مدولاتور وارد شده و یک سیگنال خارج می‌شود. سیگنال‌های ورودی پیام ( $x(t)$ ) و سیگنال حامل ( $C(t)$ ) نام دارند و سیگنال خروجی را سیگنال مدوله شده می‌نامند.



شکل ۱۰-۱۲- مدولاتور

استفاده از مدولاسیون دلایل گوناگونی دارد یکی از دلایل مهم پائین‌گذر بودن اغلب پیام‌ها و میان‌گذر بودن کانال‌های انتقال است. لذا برای تطبیق مشخصات فرکانسی سیگنال ارسالی با محیط انتقال، به جای پیام، سیگنال حامل که فرکانس آن مطابق با مشخصات فرکانسی محیط انتقال است، ارسال گردیده و پیام ( $x(t)$ ) یکی از پارامترهای حامل را تغییر داده تا در گیرنده بتوان از روی حامل پیام را استخراج کرد. البته دلایل دیگری نیز برای مدوله کردن یک سیگنال وجود دارند که از حوصله این بحث خارج است.

از اولین تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌ها با توجه به ماهیت پیام صورت می‌گیرد. اگر پیام ماهیت پیوسته در زمان (آنالوگ) داشته باشد مدولاسیون را آنالوگ و اگر ماهیت دیجیتال داشته باشد مدولاسیون را دیجیتال می‌نامند.

تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌های آنالوگ که بحث اصلی ما در این بخش می‌باشد بر اساس شکل حامل ( $C(t)$ ) صورت می‌گیرد. اگر ( $C(t)$ ) موج سینوسی باشد، مدولاسیون را مدولاسیون سینوسی یا موج پیوسته (CW) می‌نامند. در صورتی که اگر ( $C(t)$ ) موج مرتعی باشد مدولاسیون را مدولاسیون بالسی می‌نامند.

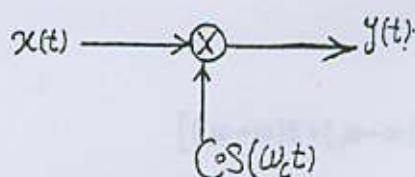
تقسیم‌بندی روی مدولاسیون‌های آنالوگ بر اساس پارامتر کنترل شونده حامل توسط پیام و به شرح زیر انجام می‌شود:

(۱) مدولاسیون دامنه (AM): در این مدولاسیون دامنه حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

(۲) مدولاسیون فرکانس (FM): در این مدولاسیون فرکانس حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

(۳) مدولاسیون فاز (PM): در این مدولاسیون فاز حامل توسط پیام کنترل می‌شود.

در این مبحث یک نوع ساده از مدولاسیون آنالوگ با حامل سینوسی و از نوع AM تحت عنوان مدولاسیون DSB بررسی می‌گردد. بلوک دیاگرام مدولاتور DSB در شکل (۱۰-۱۳) نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱۳- مدولاتور DSB

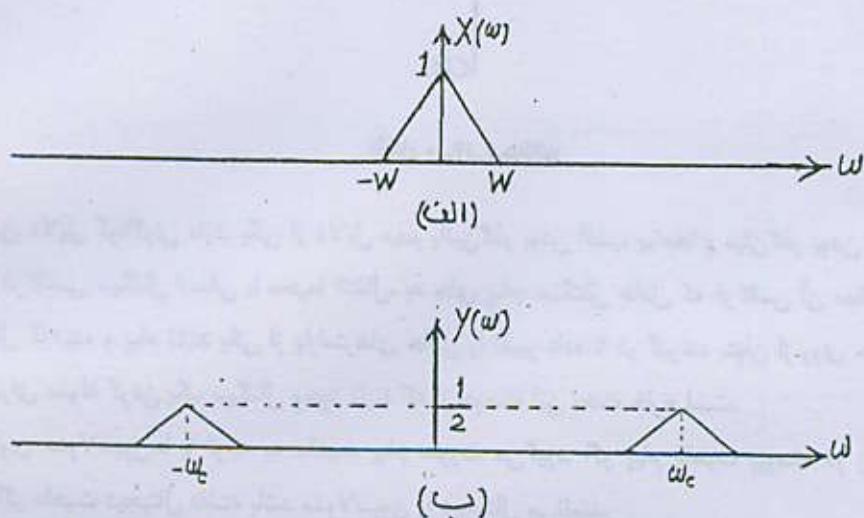
## تمثیل و تحلیل سیستم‌ها

با توجه به شکل (۱۰-۱۳) ملاحظه می‌کنید بیام  $x(t)$  با ضرب در حامل  $\cos(\omega_c t)$  دامنه آن را کنترل می‌کند. برای تحلیل بهتر این مدولاتور و ایده گرفتن برای طراحی مدولاتور آن از تحلیل در حوزه فرکانس استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم  $x(t)$  یک سیگنال باند محدود پائین‌گذر با تبدیل فوریه  $X(\omega)$  نشان داده شده در شکل (۱۰-۱۴-الف) باشد آنگاه:

$$y(t) = x(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

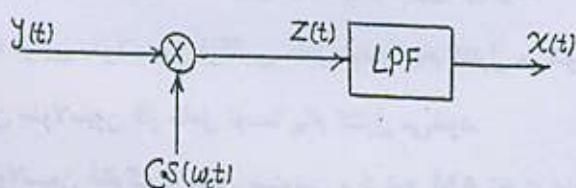
$$\Rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{2} X(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} X(\omega + \omega_c)$$

طیف  $(\omega) Y(\omega)$  در شکل (۱۰-۱۴-ب) نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۱۴-الف) طیف سیگنال پیام (ب) طیف سیگنال مدوله شده

شکل (۱۰-۱۴-ب) نشان می‌دهد که خروجی مدولاتور یک سیگنال میان‌گذر حول فرکانس  $\omega_0$  می‌باشد و معمولاً  $\omega >> W$  است. همچنین از روی شکل فوق می‌توان نتیجه گرفت که با ضرب  $y(t)$  در  $\cos(\omega_c t)$  و سپس استفاده از یک فیلتر پائین‌گذر می‌توان سیگنال نیام را استخراج کرد. شکل (۱۵-۱۰) مدولاتور DSB را نشان می‌دهد.



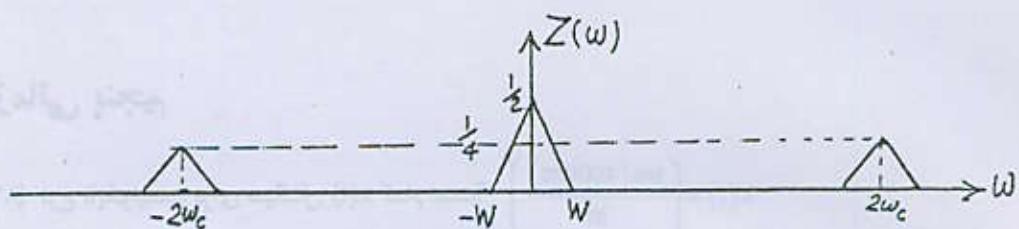
شکل ۱۵-۱۰- مدولاتور DSB

با توجه به شکل (۱۰-۱۵) داریم:

$$z(t) = y(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow Z(\omega) = \frac{1}{2\pi} Y(\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)]$$

$$= \frac{1}{2} Y(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2} Y(\omega + \omega_c)$$

طیف  $(\omega) Z(\omega)$  در شکل (۱۰-۱۶) نشان داده شده است.


 شکل ۱۶-۱۰- طیف سیگنال  $z(t)$ 

مشخصات فیلتر پائین گذر با توجه به شکل (۱۶-۱۰) عبارت ایست از:

$$W < \omega_{LP} < 2\omega_c - W$$

$$G = 2$$

## خودآزمائی پنجم

۱- (آزاد ۸۱) نرخ نایکوئیست برای سیگنال  $x(t)$  کدام است؟

$$x(t) = \left( \frac{\sin(4000\pi t)}{\pi} \right)^2$$

32000HZ (۴)

4000HZ (۳)

16000HZ (۲)

8000HZ (۱)

۲- (سراسری ۸۱)  $x(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $T_m$  و فرکانس اصلی  $\omega_m \triangleq \frac{2\pi}{T_m}$  می‌باشد. نرخ نایکوئیست این سیگنال با کدام گزینه برابر است؟

 $2\omega_m$  (۲) $\omega_m$  (۱)(۳) به شکل موج  $x(t)$  بستگی دارد(۴) مضرب محدود و صحیحی از  $\omega_m$ 

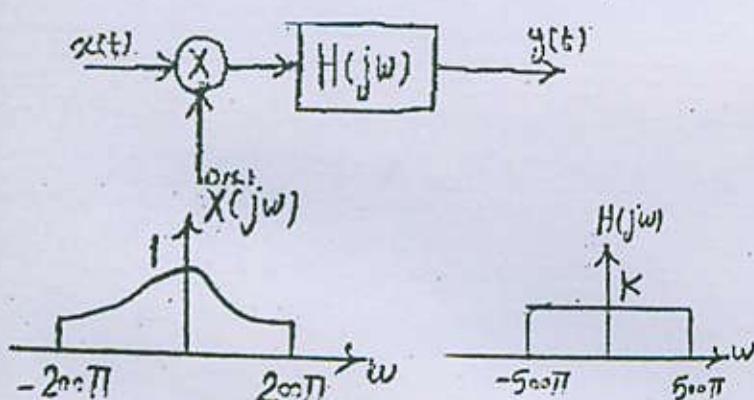
۳- (آزاد ۸۰) از سیگنال  $x(t)$  به وسیله قطار ضربه  $p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_s)$  نمونه برداری می‌شود و سیگنال نمونه برداری شده از یک فیلتر پانین گذر با پاسخ فرکانسی  $H(j\omega)$  در شکل مقابل عبور داده می‌شود. مقدار  $k$  و حداکثر  $T_s$  را طوری تعیین کنید که  $y(t) = x(t)$  (طیف سیگنال ورودی داده شده است)

$$T_s < \frac{1}{100} \text{S}, \quad k = T_s \quad (۱)$$

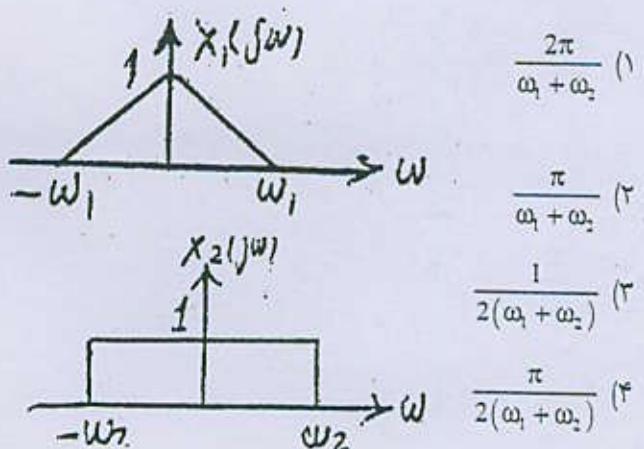
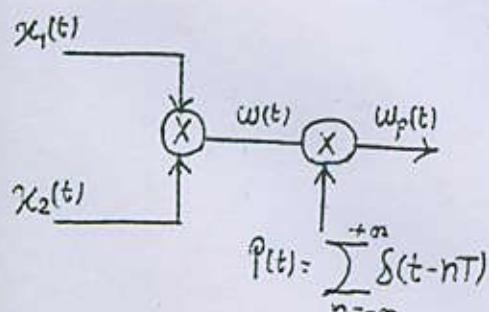
$$T_s < \frac{1}{150} \text{S}, \quad k = T_s \quad (۲)$$

$$T_s < \frac{1}{350} \text{S}, \quad k = T_s \quad (۳)$$

$$T_s < \frac{1}{250} \text{S}, \quad k = T_s \quad (۴)$$



۴- (آزاد ۸۱ و آزاد ۸۴) حداکثر پریود نمونه برداری برای آن که بتوان  $x(t)$  را از  $w$  بازیابی کرد کدام است؟

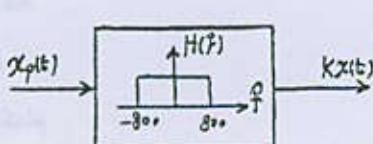


## تجزیه و تملیل سیستم‌ها

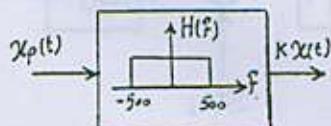
۵- سیگنال  $x(t)$  یک سیگنال باند محدود با حداقل فرکانس ۳۰۰HZ است. از این سیگنال توسط سیگنال

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[ \delta\left(t - \frac{k}{1000}\right) - \delta\left(t - \frac{k-0.5}{1000}\right) \right]$$

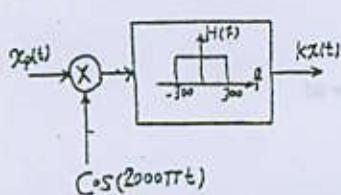
سیستم‌های زیر می‌توان  $x(t)$  را از روی  $p(t)$  بازسازی کرد؟



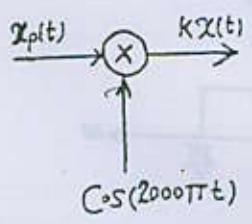
۲



۱



۴



۳

۶- آهنگ نایکوئیست و حداقل فرکانس برای نمونه‌برداری مناسب از سیگنال  $x(t) = \frac{\sin(1000\pi t)\cos(8000\pi t)}{\pi t}$  به ترتیب چقدر

می‌باشد؟

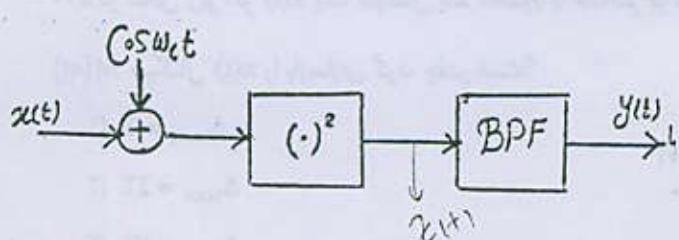
8 KHZ و 8 KHZ (۱)

2 KHZ و 8 KHZ (۲)

9 KHZ و 9 KHZ (۳)

2.25 KHZ و 9 KHZ (۴)

۷- در شکل زیر فرکانس‌های قطع پائین و بالای فیلتر میان گذر ( $\omega_c$  و  $\omega_m$ ) در چه محدوده‌ای باشند تا  $y(t)$  یک سیگنال مدوله شده داشته با فرکانس حامل  $\omega$  باشد؟ (یام  $x(t)$  باند محدود با حداقل فرکانس  $\omega_m$  است)



$$\omega_c + \omega_m < \omega_c < 2\omega_c \quad \text{and} \quad 2\omega_m < \omega_c < \omega_c - \omega_m \quad (۱)$$

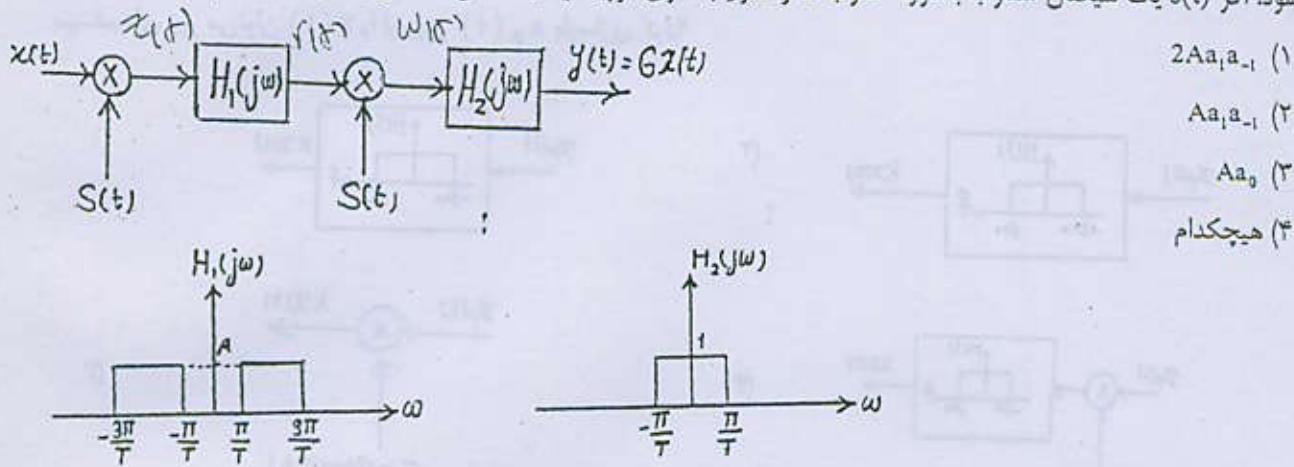
$$\omega_c + \omega_m < \omega_c < \omega_c - \omega_m \quad \text{and} \quad \omega_m < \omega_c < \omega_c - \omega_m \quad (۲)$$

$$\omega_c + \omega_m < \omega_c < 2\omega_c - \omega_m \quad \text{and} \quad 2\omega_m < \omega_c < \omega_c - \omega_m \quad (۳)$$

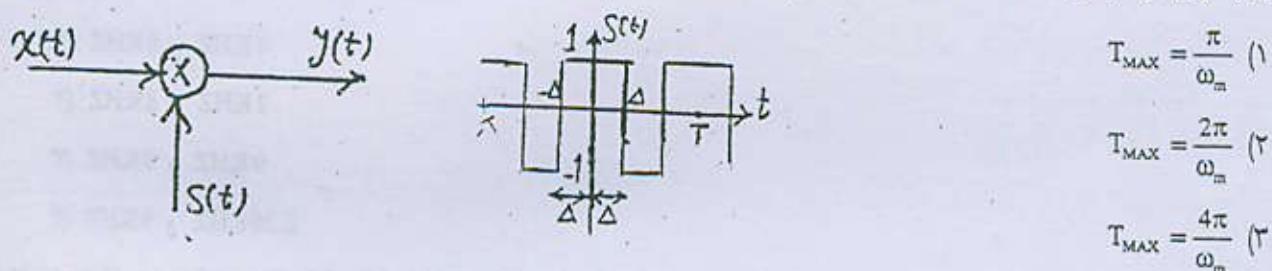
هیچکدام

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

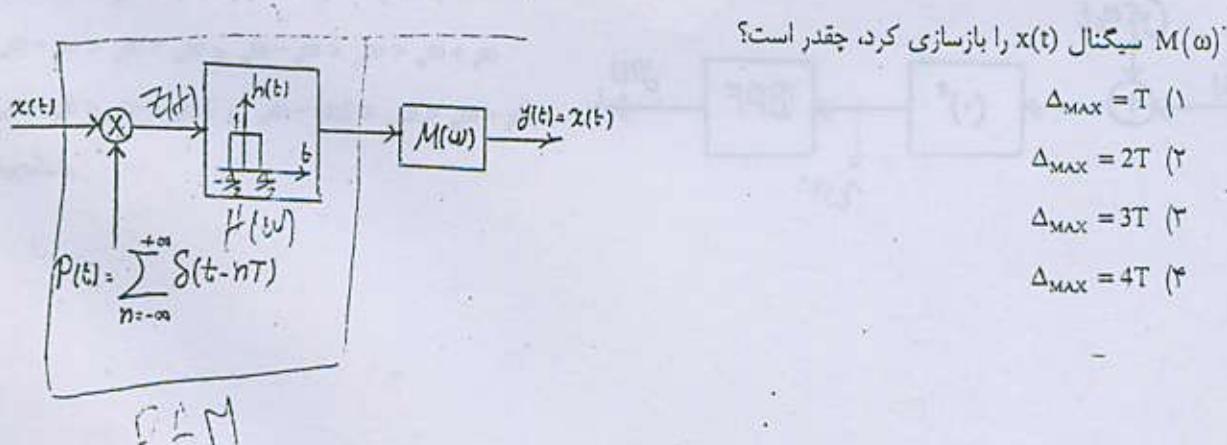
- ۸- شکل زیر یک تقویت‌کننده فرکانس پائین را نشان می‌دهد که در آن سیگنال موردنظر ابتدا مدوله شده و پس از تقویت مجدداً مدوله می‌شود. اگر  $x(t)$  یک سیگنال متناوب با دوره  $T$  و خرایب سری فوریه  $a_n$  باشد، آن گاه ضربیت تقویت ( $G$ ) چقدر است؟



- ۹- در شکل زیر اگر  $x(t)$  یک سیگنال باند محدود با حداکثر فرکانس  $\omega_m$  باشد، آن گاه حداکثر مقدار  $T$  برای آن که بتوان  $x(t)$  را از روی  $y(t)$  بازسازی کرد، چقدر است؟



- ۱۰- در شکل زیر اگر  $x(t)$  یک سیگنال باند محدود با حداکثر فرکانس  $\frac{\pi}{T}$  باشد، حداکثر مقدار  $\Delta$  به گونه‌ای که بتوان با استفاده از فیلتر



یادداشت



## ۱۱ - تحلیل فوریه سیگنال‌های گستته در زمان - مقدمه‌ای بر تحلیل بر مبنای توابع ویژه

در بخش‌های قبل تحلیل فوریه برای سیگنال‌ها و سیستم‌های پیوسته در زمان معرفی و بررسی گردید. در این بخش و چند بخش آتی سری و تبدیل فوریه را برای سیگنال‌های گستته در زمان معرفی و خواص و کاربرد آن‌ها را در تحلیل سیستم‌های گستته در زمان LTI بررسی خواهیم کرد. سری و تبدیل فوریه گستته در زمان دو مزیت عمده دارند. اولاً در تحلیل و طراحی سیستم‌ها دانستن پارامترها، خواص و مفاهیم حوزه فرکانس مانند پهنای باند، طیف سیگنال و ..... مفید می‌باشد. ثانیاً خاصیت جمع آثار یک سیستم خطی و این واقعیت که پاسخ یک سیستم LTI گستته در زمان به ورودی سینوسی با یک فرکانس خاص، یک سینوسی با همان فرکانس است، باعث می‌گردد که روابط و ابزار مناسبی جهت تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها در حوزه فوریه حاصل گردد. در واقع تبدیل فوریه گستته در زمان ( یا تبدیل  $Z$  ) به ما اجازه می‌دهد تا یک معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت توصیف کننده یک سیستم LTI گستته در زمان را به یک معادله جبری تبدیل نمائیم.

### ۱۱-۱ - پاسخ سیستم‌های گستته در زمان LTI به توابع نمائی مختلط

در بخش‌های قبل تحلیل سیستم‌های گستته در زمان LTI توسط جمع کاتولوشن معرفی گردید. این تحلیل بر مبنای نمایش یک سیگنال گستته در زمان به صورت ترکیب خطی از توابع ضربه جایجا شده بود. در این بخش به دنبال نوع دیگری از نمایش سیگنال‌های گستته در زمان بر حسب سیگنال‌های پایه می‌باشیم که دو خاصیت اساسی زیر را داشته باشند:

۱- باید بتوان تعداد زیادی از سیگنال‌های مفید گستته در زمان را به صورت ترکیب خطی از این سیگنال‌های پایه نوشت (شرط وجود و همگرانی).

۲- پاسخ هر سیستم LTI گستته در زمان به هر کدام از این سیگنال‌های پایه به سادگی به دست آید. در نتیجه با توجه به LTI بودن سیستم، می‌توان پاسخ سیستم LTI را به سیگنال ورودی نوشته شده بر حسب این سیگنال‌های پایه به سادگی بدست آورد. تعریف سیگنالی که پاسخ سیستم به آن، حاصلضرب یک عدد ثابت (در حالت کلی می‌تواند مختلط باشد) در آن سیگنال باشد را تابع ویژه سیستم می‌نامند. دامنه عدد ثابت فوق را مقدار ویژه آن سیستم می‌نامند (با مقدار ویژه ماتریس‌ها اشتباه نشود ! ). شکل (۱۱ - ۱) نشان دهنده تعریف فوق می‌باشد.



شکل ۱۱ - ۱ - [n] × یک تابع ویژه برای سیستم نمایش داده شده و | k | مقدار ویژه سیستم می‌باشند.

## تمثیل و تحلیل سیستم‌ها



قضیه: سیگنال  $x[n] = z^n$  (z در حالت کلی یک عدد مختلط است) یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد.

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k}h[k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n$$

اثبات:

بنابراین اگر به سیستم LTI ورودی  $z^n$  اعمال شود، آنگاه پاسخ سیستم به این ورودی  $H(z)z^n$  خواهد بود که

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}$$

مثال: سیستم تأخیر دهنده  $y[n] = x[n-n_0]$  را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم ورودی  $x[n] = z^n$  اعمال کنیم، داریم:

$$y[n] = x[n-n_0] = z^{n-n_0} = z^n \cdot z^{-n_0} = z^{-n_0} x[n] = H(z)x[n]$$

حال اگر بخواهیم  $H(z)$  را با استفاده از پاسخ ضربه بدست آوریم، داریم:

$$h[n] = \delta[n-n_0] \Rightarrow H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n-n_0]z^{-n} = z^{-n_0}$$

با توجه به قضیه اخیر و با در نظر گرفتن آن که z در حالت کلی می‌تواند یک عدد مختلط باشد، می‌توان سه نوع نمایش سیگنال برحسب توابع  $z^n$  را معرفی کرد.

(۱) سری فوریه گستته در زمان: اگر  $z = e^{jk\omega_0 n}$  باشد (k عدد صحیح) آنگاه داریم:

$$e^{jk\omega_0 n} : \text{تتابع ویژه} \quad (هارمونیک‌ها) \quad k=0, 1, 2, \dots, N_0 - 1$$

در این حالت مکان هندسی z ها نقاط منفصل روی دایره واحد با اختلاف فاز  $\omega$  از یکدیگر می‌باشند (شکل ۱۱ - ۲ - الف) و هر سیگنال گستته به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های پایه  $e^{jk\omega_0 n}$  نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI گستته به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $H(e^{jk\omega_0 n})$  خواهد بود. این نوع نمایش را سری فوریه گستته در زمان یک سیگنال می‌نامند و در بخش دوازده بررسی خواهد شد.

(۲) تبدیل فوریه گستته در زمان: اگر  $z = e^{j\omega n}$  باشد آنگاه داریم:

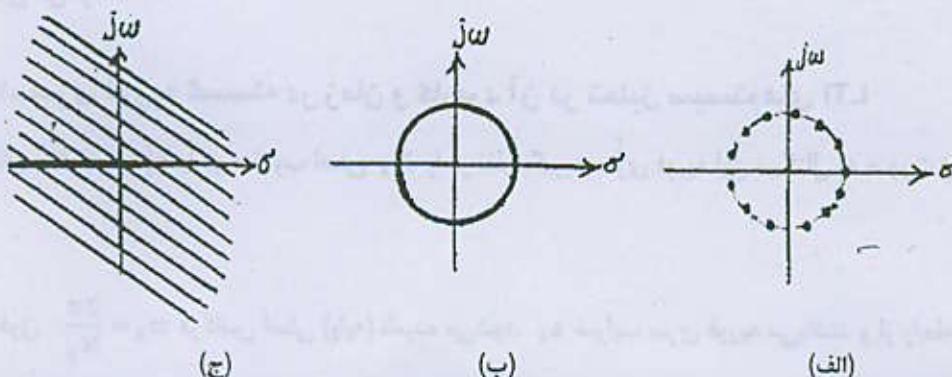
$$e^{j\omega n} : \text{تتابع ویژه}$$

در این حالت مکان هندسی z ها کل دایره واحد می‌باشد (شکل ۱۱ - ۲ - ب) و هر سیگنال گستته به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های  $e^{j\omega n}$  نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI گستته به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $H(e^{j\omega n})$  خواهد بود. این نوع نمایش را تبدیل فوریه گستته در زمان یک سیگنال می‌نامند و در بخش سیزده بررسی خواهد شد.

(۳) تبدیل z: اگر  $z = re^{j\omega n}$  باشد آنگاه داریم:

$$z^n = r^n e^{jn\omega n} : \text{تتابع ویژه}$$

در این حالت مکان هندسی  $z$  ها کل صفحه مختلط می‌باشد (شکل (۱۱ - ۲ - ج)) و هر سیگنال به صورت ترکیب خطی از سیگنال‌های پایه  $z^n$  نوشته می‌شود و پاسخ سیستم LTI به هر کدام از این سیگنال‌های پایه برابر  $H(z) = z^n$  خواهد بود. این نوع نمایش را تبدیل  $z$  یک سیگنال گسسته می‌نامند و در بخش هیجدهم بررسی خواهد شد.



شکل ۱۱ - ۲ - مکان  $z$  ها در صفحه مختلط (الف) سری فوریه گسسته در زمان (ب) تبدیل فوریه گسسته در زمان (ج) تبدیل  $z$

در جدول (۱۱ - ۱) خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل فوق آورده شده است:

نام تبدیل	$z$	مکان $z$	پایه سیگنال‌های پایه	پاسخ سیستم به سیگنال‌های پایه	کاربرد	$H(z)$
سری فوریه گسسته در زمان	$z = e^{j\omega_0}$	نقاط منفصل روی دایره واحد	$e^{jk\omega_0 n}$	$H(e^{j\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$	تحلیل سیگنال‌های متناوب گسته در زمان	$H(e^{j\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk\omega_0 n}$
تبدیل فوریه گسسته در زمان	$z = e^{j\omega}$	کل دایره واحد	$e^{j\omega n}$	$H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب گسته در زمان	$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n}$
تبدیل $z$	$z = r e^{j\omega}$	کل صفحه مختلط	$z^n$	$H(z) z^n$	تحلیل سیگنال‌های متناوب و نامتناوب گسته در زمان	$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] z^{-n}$

جدول ۱۱ - ۱ - خلاصه‌ای از سه نوع تبدیل بر مبنای تابع نمایی مختلط گسسته

## ۱۲- تحلیل فوریه سیگنال‌های گستته در زمان متناوب (سری فوریه گستته در زمان)

در این بخش ابتدا به معرفی سری فوریه گستته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های گستته در زمان پرداخته و سپس خواص آن معرفی و بررسی می‌گردد.

### ۱۲-۱- سری فوریه گستته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LT

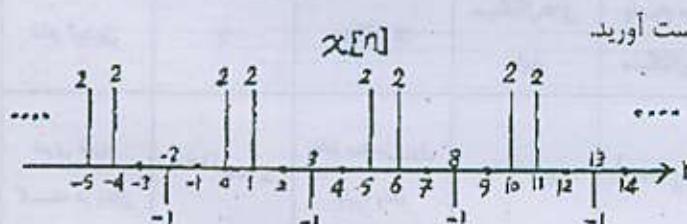
تعریف، سیگنال متناوب  $x[n]$  با دوره تناوب اصلی  $N_0$  را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x[n] = \sum_{k \in \{N_0\}} a_k e^{j k \omega_0 n}$$

در رابطه فوق  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$  فرکانس اصلی (بایه) نامیده می‌شود. ضرایب سری فوریه می‌باشند و از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \{N_0\}} x[n] e^{-j k \omega_0 n}$$

در روابط فوق  $\sum_{n \in \{N_0\}}$  معرف جمع کردن به ازاء  $N_0$  عدد صحیح متوالی است.



مثال: شکل زیر را در نظر بگیرید. سری فوریه این سیگنال را بدست آورید.

دوره تناوب اصلی این سیگنال  $N_0 = 5$  و در نتیجه فرکانس پایه آن  $\omega_0 = \frac{2\pi}{5}$  است.

بنابراین داریم:

$$x[n] = \sum_{k=0}^4 a_k e^{j \frac{2k\pi}{5} n}$$

$$a_k = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x[n] e^{-j \frac{2k\pi}{5} n} = \frac{1}{5} \left( 2 + 2e^{-j \frac{2\pi}{5}} - e^{-j \frac{6\pi}{5}} \right)$$

ضرایب سری فوریه این سیگنال به ازای  $k$  های مختلف عبارتند از:

$$\dots = a_{-10} = a_{-5} = a_0 = a_5 = a_{10} = \dots = \frac{1}{5} (2 + 2 - 1) = \frac{3}{5}$$

$$\dots = a_{-9} = a_{-4} = a_1 = a_6 = a_{11} = \dots = \frac{1}{5} \left( 2 + 2e^{-j \frac{2\pi}{5}} - e^{-j \frac{6\pi}{5}} \right) = 0.685 - j0.5$$

$$\dots = a_{-8} = a_{-3} = a_2 = a_7 = a_{12} = \dots = \frac{1}{5} \left( 2 + 2e^{-j \frac{4\pi}{5}} - e^{-j \frac{12\pi}{5}} \right) = 0.015 - j0.045$$

$$\dots = a_{-7} = a_{-2} = a_3 = a_8 = a_{13} = \dots = \frac{1}{5} \left( 2 + 2e^{-j\frac{6\pi}{5}} - e^{-j\frac{18\pi}{5}} \right) = 0.015 + j0.045$$

$$\dots = a_{-6} = a_{-1} = a_4 = a_9 = a_{14} = \dots = \frac{1}{5} \left( 2 + 2e^{-j\frac{8\pi}{5}} - e^{-j\frac{24\pi}{5}} \right) = 0.685 + j0.5$$

تذکرہ: دقت کنید ضرایب سری فوریہ با دوره تناوب  $N_0$  متنابض می‌باشد، همچنین  $a_k = a_{-k}$  است و در بخش‌های بعد ملاحظه خواهید کرد که از خواص اصلی ضرایب سری فوریہ سیگنال‌های حقیقی است.

تذکرہ: با توجه به تعریف  $a_k$  و مثال اخیر، ملاحظه می‌کنید ضرایب  $a_k$  در حالت کلی مختلط می‌باشد، لذا معمولاً برای ترسیم آن‌ها، دامنه  $|a_k|$  و فاز  $\angle a_k$  جداگانه رسم می‌شوند. این منحنی‌ها را نمودارهای میله‌ای ضرایب سری فوریہ می‌نامند.

تذکرہ: دقت کنید برخلاف سری فوریہ پیوسته در زمان، تعداد هارمونیک‌های لازم برای مشخص کردن سری فوریہ یک سیگنال گستته در زمان محدود و برابر دوره تناوب اصلی  $N_0$  آن است. دلیل این امر محدود بودن تعداد هارمونیک‌های گستته در زمان می‌باشد.

$\hookrightarrow$  مقدار DC میله ای

تذکرہ: ضریب  $a_k$  از رابطه  $a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n}$  بدست می‌آید. این تعریف نشان می‌دهد ضریب  $a_k$  از تقسیم مجموع  $N_0$  نمونه متوالی  $x[n]$  بر  $N_0$  بدست می‌آید و معرف مقدار DC سیگنال  $x[n]$  است.

تذکرہ: در مثال قبل ملاحظه کردید ضرایب سری فوریہ گستته در زمان با دوره تناوب  $N_0$  متنابض می‌باشد که  $N_0$  دوره تناوب اصلی سیگنال است. اثبات به صورت زیر است:

$$a_{k+N_0} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-j(k+N_0)\omega_0 n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} e^{-jN_0\omega_0 n}$$

$$= \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} e^{-j2m\pi n} = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = a_k$$

تذکرہ: برخی از سیگنال‌های متنابض گستته اهمیت زیادی در تحلیل فوریه سیستم‌ها و سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن سری فوریه گستته آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۱۲ - ۱) برخی از این سیگنال‌ها اورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود اگرچه در بدو امر به خاطر سپردن فرمول‌های مربوط به سری فوریه گستته در زمان مشکل به نظر می‌رسد، اما فرمول‌های فوق تا حد زیادی مشابه فرمول‌های ضرایب سری فوریه پیوسته در زمان می‌باشند. با این تفاوت که اولاً در حالت گستته این ضرایب با دوره تناوب  $N$  متنابض می‌باشند و ثانیاً در توابع سینوسی در صورتی که  $\frac{2m\pi}{\omega_0} = N$  باشد (یعنی فرکانس تابع سینوسی روی فرکانس اصلی قرار نگرفته باشد)، آنگاه ضرایب سری فوریه به جای  $a_k = \pm m$  روی  $a_k$  قرار می‌گیرند. در ضمن اگر فرکانس  $m$  این توابع مضرب گویانی از  $\pi$  نباشد، آنگاه متنابض نبوده و نمی‌توان برای آن‌ها سری فوریه نوشت.

ضرایب سری فوریه گستته		سیگنال
$a_k = \begin{cases} 1 & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases}$	$\omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = e^{j\omega_0 n}$ فرض: $\omega_0$ مضرب گویا از $\pi$
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases}$	$\omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = \cos(\omega_0 n)$ فرض: $\omega_0$ مضرب گویا از $\pi$
$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = m, m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j} & k = -m, -m \pm N, -m \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases}$	$\omega_0 = \frac{2m\pi}{N}$	$x[n] = \sin(\omega_0 n)$ فرض: $\omega_0$ مضرب گویا از $\pi$
$a_k = \begin{cases} 1 & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0 & \text{بقیه } k \text{ ها} \end{cases}$		$x[n] = 1$
$a_k = \frac{\sin\left[\frac{2k\pi\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)}{N}\right]}{N \sin\left[\frac{2k\pi}{2N}\right]}$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}$	$k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \dots$ $k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$	محض مربع متناسب $x[n] = \begin{cases} 1 &  n  \leq N_1 \\ 0 & N_1 <  n  \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$
$a_k = \frac{1}{N}$	به ازاء کلیه $k$ ها	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$

جدول ۱۶-۱ - ضرایب سری فوریه برای سیگنال های مهم گستته در زمان

مثال: برای سه سیگنال  $\cos(2n)$ ,  $\cos(4n)$  و  $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  ضرایب سری فوریه را در صورت وجود بدست آورید.

دلیل: سیگنال  $\cos(2n)$  متناسب نیست و بنابراین نمی توان سری فوریه برای آن نوشت. برای سیگنال  $\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  داریم:

$$N_0 = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8k \xrightarrow{k=1} N_0 = 8$$

بنابراین فرکانس پایه این سیگنال  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{4}$  است و داریم:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) = \frac{1}{2j} e^{j\frac{\pi}{4}n} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{\pi}{4}n} \rightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{2j}, & a_{-1} = -\frac{1}{2j} \\ a_k = 0, & k \neq \pm 1 \\ a_{k+2} = a_k \end{cases}$$

در مورد این سیگنال ضرایب سری فوریه با دوره تناوب  $N = 8$  متناوب می‌باشند و ضرایب سری فوریه غیرصفر آن عبارتند از:

$$\dots = a_{-7} = a_1 = a_9 = a_{17} = \dots = \frac{1}{2j}$$

$$\dots = a_{-9} = a_{-1} = a_7 = a_{15} = \dots = -\frac{1}{2j}$$

برای سیگنال  $\text{e}^{j3\pi n}$  داریم:

$$N = \frac{2k\pi}{\omega_0} = \frac{2k\pi}{3\pi} = \frac{2k}{3} \xrightarrow{k=3} N_0 = 2$$

بنابراین فرکانس پایه این سیگنال  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \pi$  است و داریم:

$$\begin{cases} a_3 = 1 \\ a_k = 0, & k \neq 3 \\ a_{k+2} = a_k \end{cases}$$

در مورد این تابع ضرایب سری فوریه با دوره تناوب  $N = 2$  متناوب می‌باشند و اگر بخواهیم کلیه ضرایب سری فوریه غیرصفر آن را

بنویسیم داریم:

$$\dots = a_{-1} = a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 1$$

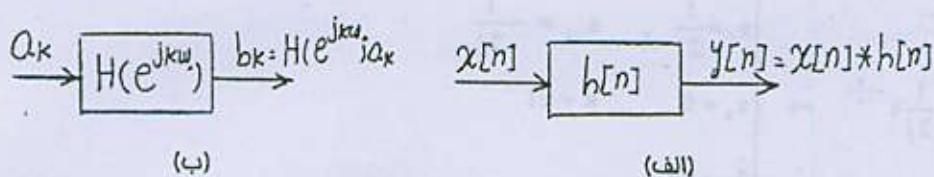
## ۱۲-۲- کاربرد سری فوریه در تحلیل سیستم‌های گستته در زمان LTI:

در بخش (۱۲-۱) به معرفی سری فوریه گستته در زمان پرداختیم. در این بحث کاربرد سری فوریه گستته در زمان در تحلیل سیستم‌های LTI بررسی می‌گردد.

فرض کنید یک سیستم LTI گستته با پاسخ ضربه  $[n] h$  مفروض است. به این سیستم ورودی متناوب  $[n] x$  اعمال شده و هدف تعیین خروجی  $[n] y$  است (شکل (۱۲-۲-الف)). بدیهی است به دلیل LTI بودن سیستم، خروجی  $[n] y$  نیز متناوب بوده و دوره تناوب اصلی آن برابر دوره تناوب اصلی ورودی است. برای تحلیل این سیستم توسط تحلیل سری فوریه، ابتدا سری فوریه گستته  $[n] x$  را نوشتند و با استفاده از آن ضرایب سری فوریه خروجی را بدست می‌آوریم (شکل (۱۲-۲-ب)).

$$x[n] = \sum_{k \in \{N_0\}} a_k e^{jk\omega_0 n} \quad b_k = H(e^{jk\omega_0}) a_k$$

$$y[n] = \sum_{k \in \{N_0\}} b_k e^{jk\omega_0 n} \quad H(e^{jk\omega_0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-jk\omega_0 n}$$



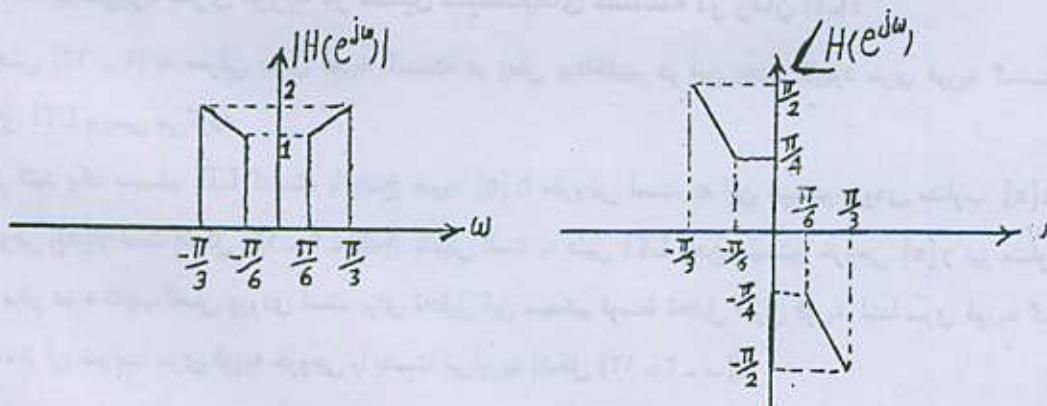
شکل ۱۲ - ۲ - (الف) رابطه ورودی - خروجی یک سیستم LTI گستته در موجه آمان (ب) رابطه بین ضرایب سری فوریه ورودی و خروجی

بنابراین با داشتن ورودی و پاسخ ضربه یک سیستم می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. اما تعیین خروجی از روی ضرایب سری فوریه غیر از موارد خاص امکان‌پذیر نیست. لذا در مواقعي که خروجی  $[n]$  مورد نظر باشد، استفاده از سری فوریه (غیر از موارد خاص) مفید نیست. اما درصورتی که هدف تعیین ضرایب سری فوریه خروجی (داننه هارمونیک‌ها) باشد، استفاده از سری فوریه مفید است.

تذکر: موارد خاصی که از روی ضرایب سری فوریه یک سیگنال می‌توان آن سیگنال را بدست آورد معمولاً موقعي است که سیگنال یکی از سیگنال‌های جدول (۱۲ - ۱) باشد.

تذکر: در برخی مسائل به جای  $[n]$  یک سیستم،  $H(e^{j\omega})$  داده می‌شود. این تابع که پاسخ فرکانسی سیستم نام دارد، در بخش‌های آن معرفی خواهد شد. بدینه ای است برای تعیین  $H(e^{j\omega})$  از روی  $H(e^{jkw})$ ، باید مقادیر  $H(e^{jkw})$  را در مضارب صحیح  $2\pi$  محاسبه کرد. بدینه ای است  $H(e^{j\omega})$  یک تابع متناوب از  $\omega$  با دوره تناوب  $2\pi$  است.

مثال: فرض کنید  $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-8k]$  به یک سیستم با پاسخ فرکانسی  $H(e^{j\omega})$  اعمال می‌شود. پاسخ دامنه و فاز این سیستم روی یک دوره تناوب ( $2\pi$ ) در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده‌اند. خروجی  $[n]$  را بدست آورید.



هل:

دوره تنابع سیگنال  $[n]x$  برابر  $8 = N_0$  است. لذا ضرایب سری فوریه این سیگنال  $a_k = \frac{1}{8}$  با فرکانس پایه  $\omega_0 = \frac{\pi}{4}$  می‌باشد.

با توجه به پاسخ فرکانسی سیستم ملاحظه می‌شود فقط هارمونیک‌ها به ازاء  $k = \pm 1$  از سیستم عبور می‌کنند. در نتیجه اگر ضرایب سری فوریه خروجی را  $[n]y$  بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \quad \rightarrow |b_1| = |a_1| \left| H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) \right| = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \\ &\quad \angle b_1 = \angle a_1 + \angle H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right) = 0 - \frac{3\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} \\ b_{-1} &= a_{-1} H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) \quad \rightarrow |b_{-1}| = |a_{-1}| \left| H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) \right| = \frac{1}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{16} \\ &\quad \angle b_{-1} = \angle a_{-1} + \angle H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right) = 0 + \frac{3\pi}{8} = \frac{3\pi}{8} \\ b_k &= 0 \quad k \neq \pm 1 \quad \text{به ازاء} \quad , \quad b_{k+\delta} = b_k \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$y[n] = b_1 e^{j\frac{\pi}{4}n} + b_{-1} e^{-j\frac{\pi}{4}n} = \frac{3}{16} e^{j\frac{\pi}{4}n - j\frac{3\pi}{8}} + \frac{3}{16} e^{-j\frac{\pi}{4}n + j\frac{3\pi}{8}} = \frac{3}{8} \cos\left(\frac{\pi}{4}n - \frac{3\pi}{8}\right)$$

نتگاه دقت کنید  $(e^{jn\omega})H$  یک تابع متناوب از  $\omega$  با دوره تنابع  $2\pi$  است. در مثال اخیر و برخی مسائل و مثال‌های آتی ممکن است فقط یک دوره تنابع آن نشان داده شود.

### ۱۲-۳- خواص سری فوریه گستته در زمان

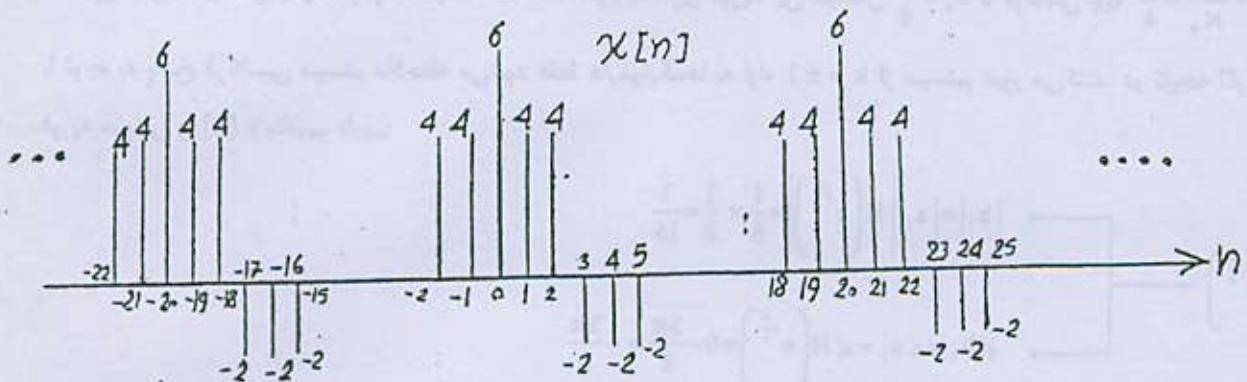
نمایش سری فوری گستته خواص مهمی دارد که علاوه بر آن که مفهوم آن را بازتر می‌کند، برای تعیین ضرایب سری فوریه سیگنال‌های پیچیده‌تر مفید می‌باشد. این خواص در جدول (۱۲-۲) آورده شده‌اند و در ادامه بررسی خواهند گردید. فرآگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر می‌باشد.

(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه ضرایب سری فوریه گستته از جمع استفاده می‌شود، بنابراین ضرایب سری فوریه گستته خاصیت خطی دارند.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی روی محور زمان جابجا گردیده و تبدیل به  $[n-n_0]x$  گردد، آنگاه ضرایب سری فوریه سیگنال جدید  $e^{-jk\omega_0 n_0}$  برابر می‌شوند. در نتیجه تأثیر در یک سیگنال گستته در زمان به اندازه  $n_0$  نمونه، دامنه ضرایب سری فوریه را تغییر نداده و فقط فاز آن‌ها را به اندازه  $n_0\omega_0 - k$  تغییر می‌دهد.

## تمثیله و تحلیل سیستمها

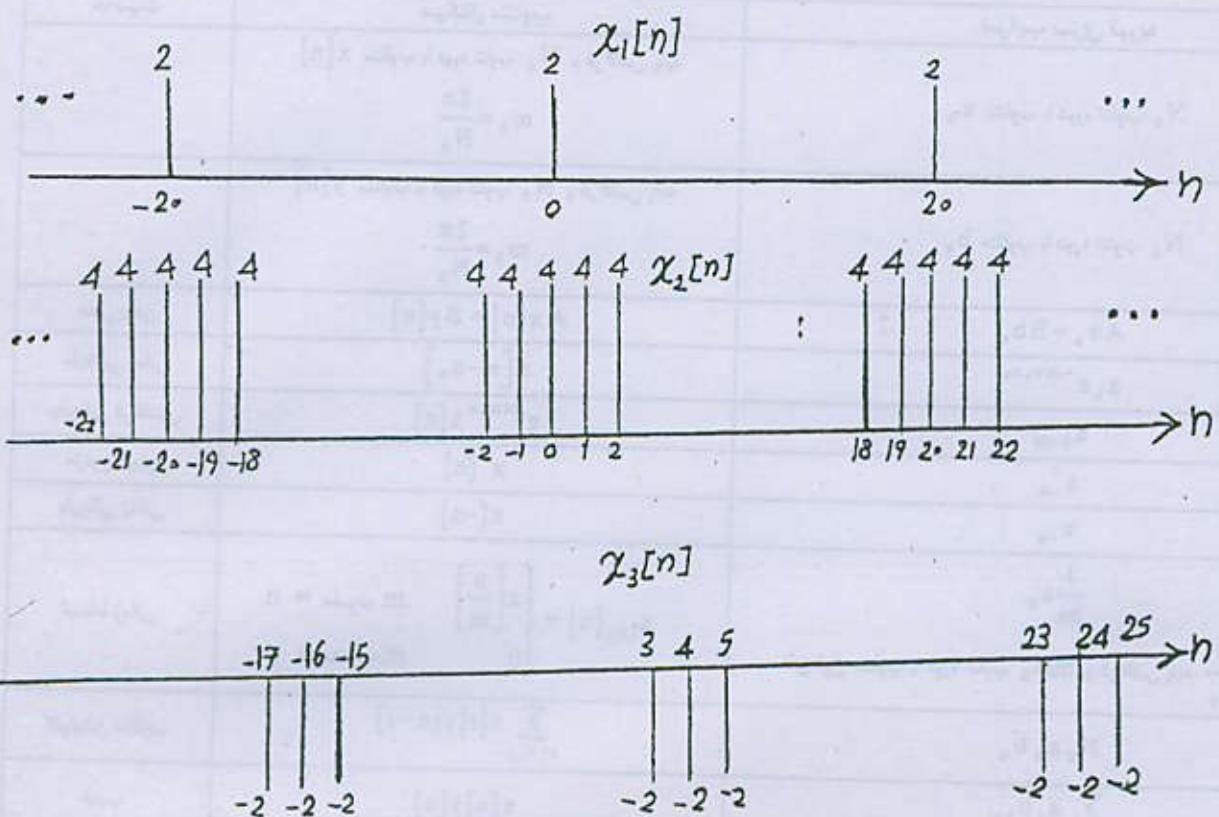
مثال: با استفاده از جدول (۱-۱۲) و خواص خطی و جابجایی زمانی، ضرایب سری فوریه سیگنال زیر را بدست آورید.



هل:

سیگنال متناوب  $x[n]$  را می‌توان به صورت مجموع سیگنال‌های متناوب ساده‌تر که ضرایب سری فوریه آن‌ها در جدول (۱-۱۲) موجود است، تجزیه کرد. این کار را می‌توان به چندین روش مختلف انجام داد. به عنوان مثال سیگنال فوق مجموع سیگنال‌های  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  و  $x_3[n]$  می‌باشد:

خاصیت	سیگنال متناسب	ضرایب سری فوریه
	$x[n] \propto \text{متناسب با دوره تناوب } N_0 \text{ و فرکانس پایه } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$	$N_0 a_k$ متناسب با دوره تناوب
	$y[n] \propto \text{متناسب با دوره تناوب } N_0 \text{ و فرکانس پایه } \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$	$N_0 b_k$ متناسب با دوره تناوب
خطی بودن	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
حلباجی زمانی	$x[n-n_0]$	$a_k e^{-jk\omega_0 n_0}$
جایجاپی فرکانسی	$e^{jM\omega_0 n} x[n]$	$a_{k-M}$
مزدوج گیری	$x^*[n]$	$a_{-k}$
وازوگنی زمانی	$x[-n]$	$a_{-k}$
لیپاژ زمانی	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{m}\right] & m \text{ مضرب } n \\ 0 & m \text{ مضرب } n \neq n \end{cases}$	$\frac{1}{m} a_k$ تابع فوق متناسب با دوره تناوب $mN_0$ و فرکانس پایه $\frac{2\pi}{mN_0}$ است
کانولوشن متناسب	$\sum_{r \in \langle N_0 \rangle} x[r]y[n-r]$	$N_0 a_k b_k$
ضرب	$x[n]y[n]$	$\sum_{l \in \langle N_0 \rangle} a_l b_{k-l}$
تفاضل لول	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-jk\omega_0}) a_k$
جمع اشاره‌ای	$\sum_{k=-n}^n x[k]$ $(a_0=0) \text{ DC } x[n]$	$\frac{a_k}{1-e^{-jk\omega_0}}$
نتارن سیگنال‌های حقیقی	$x[n]=x^*[n] x[n])$	$a_k = a_{-k}$ $Re\{a_k\}=Re\{a_{-k}\} \quad  a_k = a_{-k} $ $Im\{a_k\}=-Im\{a_{-k}\} \quad \angle a_k = -\angle a_{-k}$
نتارن سیگنال‌های حقیقی و زوج	$x[n]=x^*[n]=x[-n] \quad (x[n] \text{ حقیقی و زوج})$	$a_k=a_k^*=a_{-k}$ حقیقی و زوج
نتارن سیگنال‌های حقیقی و فرد	$x[n]=x^*[n]=-x[-n] \quad (x[n] \text{ حقیقی و فرد})$	$a_k=-a_k^*=-a_{-k}$ موهومی و فرد
تجزیه زوج و فرد	$x[n]=x_e[n]+x_o[n] \quad (x[n] \text{ حقیقی و فرد})$	$a_k=Re\{a_k\}+jIm\{a_k\}=ev\{a_k\}+odd\{a_k\}$ $Re\{a_k\}=ev\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه $x_e[n]$ برابر است با $jIm\{a_k\}=odd\{a_k\}$ ضرایب سری فوریه $x_o[n]$ برابر است با
رابطه پارسال برای سیگنال‌های متناسب	$\frac{1}{N_0} \sum_{k \in \langle N_0 \rangle}  x[n] ^2 = \sum_{k \in \langle N_0 \rangle}  a_k ^2$	$\text{ضریب } \frac{N_0}{2} \text{ به ازای } N_0 \text{ زوج}$ $a_{\frac{N_0}{2}} = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} (-1)^n x[n]$
	$x[0]=\sum_{k \in \langle N_0 \rangle} a_k$	مجموع ضرایب سری فوریه
	$a_0=\frac{1}{N_0} \sum_{n \in \langle N_0 \rangle} x[n]$	مجموع شمعونه‌های سیگنال



ضرایب سری فوریه هر سه سیگنال را می‌توان از جدول (۱-۱۲) و خواص خطی و جابجایی زمانی بدست آورد:

$$x_1[n] \xrightarrow{\text{F.S.}} a_k = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad \text{به ازاء تمام } k \text{ ها}$$

$$x_2[n] \xrightarrow{\text{F.S.}} b_k = 4 \frac{\sin\left[\frac{2k\pi(2+\frac{1}{2})}{20}\right]}{20\sin\left[\frac{2k\pi}{40}\right]} = \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right)}{5\sin\left(\frac{k\pi}{20}\right)}$$

$$x_3[n] \xrightarrow{\text{F.S.}} c_k = -2 \frac{\sin\left[\frac{2k\pi(1+\frac{1}{2})}{20}\right]}{20\sin\left[\frac{2k\pi}{40}\right]} e^{-jk\frac{2\pi}{20} \times 4} = \frac{\sin\left(\frac{3k\pi}{20}\right)}{-10\sin\left(\frac{k\pi}{20}\right)} e^{-jk\frac{2\pi}{5}}$$

بنابراین ضرایب سری فوریه  $x[n]$  برابر است با:

$$x[n] \xrightarrow{\text{F.S.}} d_k = a_k + b_k + c_k$$

(۳) جابجایی فرکانسی: این خاصیت مشابه خاصیت جابجایی زمانی است. یعنی اگر ضرایب سری فوریه روی محور فرکانس جابجا شده و تبدیل به  $a_{-M-M}$  گردند، آنگاه سیگنال زمانی در  $e^{jM\omega_n n}$  ضرب می‌شود. در نتیجه با ضرب یک سیگنال در  $e^{jM\omega_n n}$ ، می‌توان ضرایب سری فوریه آن را جابجا و سیگنال را مدوله کرد.

تذکره با توجه به رابطه  $e^{j\omega_0 n} = e^{j\pi n} = (-1)^n$  نتیجه می‌گیریم با ضرب  $(-1)^n$  در یک سیگنال گسته در زمان، ضرایب سری فوریه آن  $\frac{N_0}{2}$  جایجا می‌شوند یعنی ضرایب سری فوریه سیگنال  $[n] x^n (-1)^n$  برابر  $\frac{N_0}{2} a_k$  است.

(۴) مزدوج گیری: اگر سیگنالی در حوزه زمان مزدوج گردد، ضرایب سری فوریه آن به  $a_k$  تبدیل می‌شوند. یعنی علاوه بر مزدوج شدن، نسبت به محور عمودی نیز قرینه می‌شوند.

(۵) وارونگی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز قرینه می‌شوند.

(۶) انبساط زمانی: اگر سیگنال گسته در زمان در حوزه زمان گستردۀ شود، تعدادی صفر بین نمونه‌ها اضافه می‌شوند. لذا در این حالت می‌توان ضرایب سری فوریه سیگنال منبسط شده را به ضرایب سری فوریه سیگنال اصلی ارتباط داد. از جدول (۲-۱۲) ملاحظه می‌شود اگر سیگنال با ضریب  $m$  منبسط شود، ضرایب سری فوریه آن  $\frac{1}{m} a_k$  می‌شوند. دقت کنید دوره تناوب سیگنال منبسط شده  $mN_0$  و فرکانس

$$\text{پایه آن } \frac{2\pi}{m N_0} \text{ می‌شود.}$$

مثال: اگر ضرایب سری فوریه سیگنال  $[n] x$  را  $a_k$  و ضرایب سری فوریه سیگنال  $[n] x^{(3)}$  را  $b_k$  بنامیم، ضرایب  $b_2$  و  $b_3$  را برحسب ضرایب  $a_k$  بدست آورید. دوره تناوب  $[n] x$  را  $N_0 = 8$  فرض کنید.

دل: فرکانس پایه سیگنال  $[n] x$  برابر  $\omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{\pi}{4}$  می‌باشد. بنابراین  $[n] x$  دارای ضرایب سری فوریه  $a_k$  و فرکانس

پایه آن  $\frac{\omega_0}{3} = \frac{\pi}{12}$  است. ضرایب سری فوریه  $[n+1] x$  برابر  $e^{\frac{jk\pi}{4}}$  و در نتیجه ضرایب سری فوریه  $[n-1] x$  برابر

$-e^{-\frac{jk\pi}{4}}$  و در نهایت سری فوریه  $[n-2] x$  برابر  $e^{-\frac{jk\pi}{4}}$  می‌باشند (دقت کنید  $e^{\pm j\frac{k\pi}{4}}$  پس از تبدیل  $k$  به  $-k$  و

سپس مزدوج شدن تغییری نخواهد کرد). همچنین فرکانس پایه  $[n-1] x$  نسبت به فرکانس پایه  $[n] x$  تغییر نکرده و

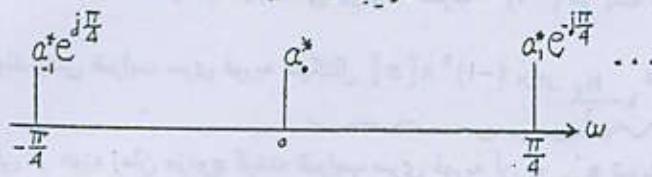
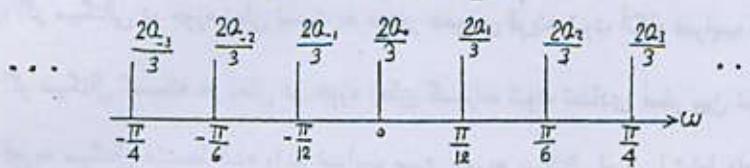
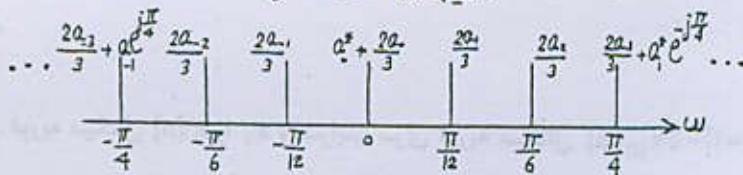
است. با توجه به شکل‌های مربوط به ضرایب سری فوریه  $[n] x$ ،  $2x_{(3)}[n]$  و  $y[n]$  داریم:

$$b_2 = \frac{2a_2}{3}$$

$$b_3 = \frac{2a_3}{3} + a_1 e^{-\frac{j\pi}{4}}$$

دقت کنید ضرایب سری فوریه سیگنال‌های  $[n] x$  و  $[n-1] x$  متناظر با دوره تناوب  $N_0 = 8$  و ضرایب سری فوریه سیگنال‌های

$[n-2] x$  و  $y[n]$  متناظر با دوره تناوب  $3N_0 = 24$  می‌باشند.

ضرایب مری فوری  $\chi_{[-n+1]}^*$ ضرایب مری فوری  $2\chi_{[n]}^*$ ضرایب مری خود  $\chi_{[n]}$ 

(۷) کانولوشن متناوب: اگر دو سیگنال گسته متناوب در حوزه زمان به طور متناوب کانولو شوند، ضرایب سری فوریه آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند و  $N$  برابر می‌گردند.

(۸) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند، آنگاه ضرایب سری فوریه آن‌ها بطور متناوب با یکدیگر کانولو شوند.

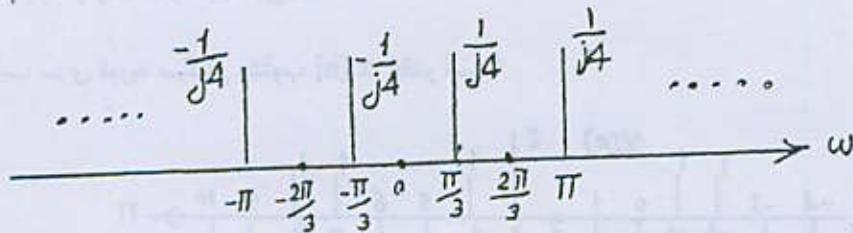
مثال: ضرایب سری فوریه سیگنال  $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$  را از دو روش (۱) مستقیم و (۲) استفاده از خاصیت ضرب در حوزه زمان بدست آوردید.

مل: (۱) در روش مستقیم حاصلضرب دو تابع سینوسی و کسینوسی را به حاصل جمع تبدیل کرده و سپس ضرایب سری فوریه هر کدام از جمله‌ها را به دست آورده و با یکدیگر جمع می‌کنیم:

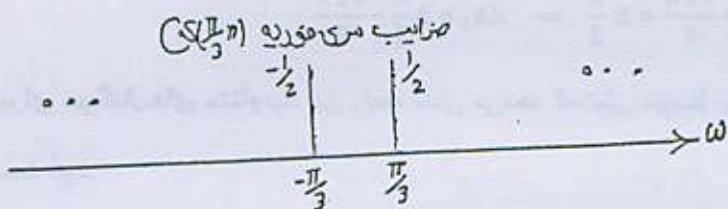
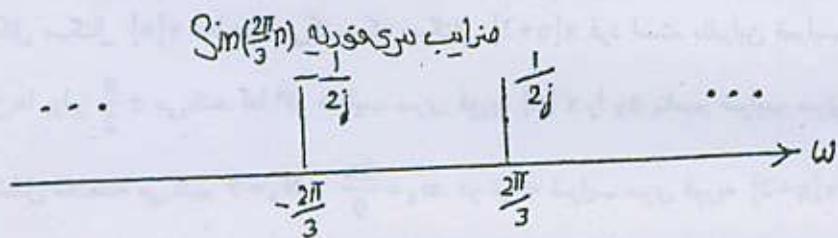
$$x[n] = \frac{1}{2} \sin(\pi n) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$



دوره تناوب این سیگنال  $N = 6$  و فرکانس پایه آن  $\frac{\pi}{3}$  است. با توجه به جدول (۱-۱۲) می‌توان ضرایب سری فوریه این سیگنال را به صورت زیر نشان داد:



(۲) ضرایب سری فوریه سیگنال‌های  $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$  و  $\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$  در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:



ضرب دو سیگنال فوق باعث کانوالو شدن ضرایب سری فوریه آن‌ها می‌شود که با کانوالو کردن دو شکل فوق به نتیجه یکسان باشد (۱).

می‌رسیم.

(۹) تفاضل اول: در سیگنال‌های گستته در زمان، تفاضل اول جایگزین مشتق در سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌باشد. اگر از سیگنال تفاضل اول گرفته شود، ضرایب سری فوریه آن در  $(e^{-jk\omega_0} - 1)$  ضرب می‌شوند.

(۱۰) جمع انبارهای: در سیگنال‌های گستته در زمان، جمع انبارهای جایگزین انتگرال در سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌باشد. اگر جمع انبارهای سیگنالی که فاقد DC است محاسبه گردد، سیگنال حاصل متناوب است و ضرایب سری فوریه آن  $\frac{1}{1-e^{-jk\omega_0}}$  برابر می‌شوند.

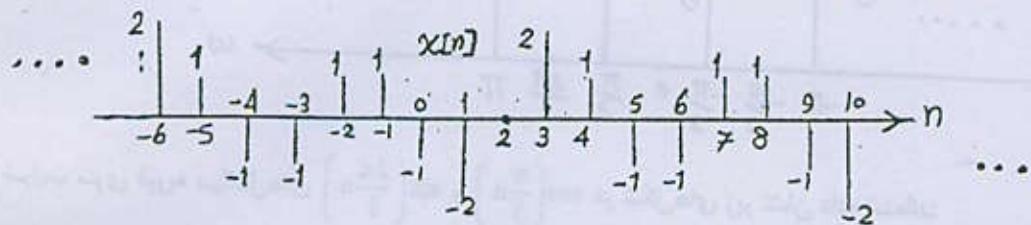
(۱۱) تقارن سیگنال‌های حقیقی: ضرایب سری فوریه سیگنال‌های گستته حقیقی مانند سیگنال‌های پیوسته در زمان تقارن مزدوج (هرپیش) دارند. در این تقارن  $a_n = a_{-n}$  می‌باشد. یعنی اگر ضرایب سری فوریه را قرینه کنیم، با مزدوج ضرایب برابر می‌شوند. این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی ضرایب سری فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی ضرایب سری فوریه تقارن فرد بیدا کنند.

(۱۲) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنالی حقیقی و زوج باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن نیز حقیقی و زوج می‌شوند.

(۱۳) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنالی حقیقی و فرد باشد، آنگاه ضرایب سری فوریه آن موهومی و فرد می‌شوند.

(۱۴) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: قسمت زوج یک سیگنال حقیقی، قسمت زوج ضرایب سری فوریه که برابر با قسمت حقیقی این ضرایب است را نتیجه می‌دهد. قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد ضرایب سری فوریه که برابر با حاصلضرب قسمت موهومی این ضرایب در  $\omega$  است را نتیجه می‌دهد.

مثال: فاز ضرایب سری فوریه سیگنال متناظر  $[n]x$  چقدر است?



با توجه به شکل سیگنال  $[n]x$  ملاحظه می‌کنیم که سیگنال  $[n+2]x$  فرد است. بنابراین ضرایب سری فوریه  $[n+2]x$  موهومی و فرد است و فاز آن‌ها برابر  $\frac{\pi}{2}$  می‌باشد. اما اگر ضرایب سری فوریه  $[n]x$  را  $a_k$  بنامیم ضرایب سری فوریه  $[n+2]x$  برابر  $a_k e^{j\frac{4k\pi}{9}}$  می‌باشد و داریم:

$$\angle \left( a_k e^{j\frac{4k\pi}{9}} \right) = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle a_k + \frac{4k\pi}{9} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle a_k = \pm \frac{\pi}{2} - \frac{4k\pi}{9}$$

(۱۵) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های متناظر: این رابطه نشان می‌دهد که توان متوسط یک سیگنال متناظر را می‌توان از روی ضرایب سری فوریه آن بدست آورد.

(۱۶) مجموعه نمونه‌های یک سیگنال: اگر در رابطه محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال گستته  $k$  را صفر قرار دهیم ملاحظه خواهیم کرد که جمع نمونه‌های یک سیگنال متناظر گستته روی یک دوره تناوب آن  $N_0 a$  است.

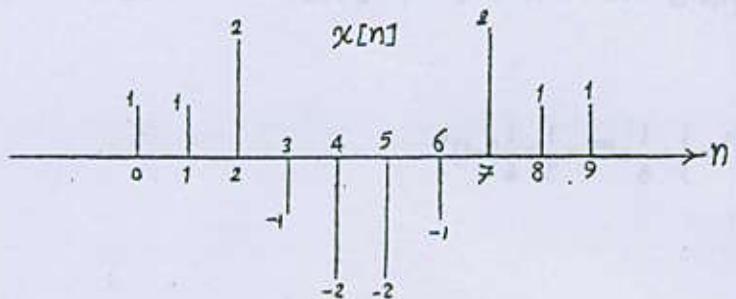
(۱۷) مجموع ضرایب سری فوریه: اگر در رابطه سری فوریه یک سیگنال گستته  $n$  را صفر قرار دهیم ملاحظه خواهیم کرد که مجموع ضرایب سری فوریه یک سیگنال متناظر گستته روی یک دوره تناوب آن  $[0]x$  است.

(۱۸) ضریب  $\frac{N_0}{2}$  به ازاء  $N_0$  زوج: اگر در رابطه محاسبه ضرایب سری فوریه یک سیگنال گستته  $k$  را  $\frac{N_0}{2}$  قرار دهیم و  $N_0$  زوج باشد، آنگاه ملاحظه خواهیم کرد که مجموع نمونه‌های قرار گرفته در زمان‌های زوج منهای مجموع نمونه‌های قرار گرفته در زمان‌های فرد یک سیگنال روی یک دوره تناوب آن برابر  $\frac{N_0}{2} a$  است.

مثال: یک سیگنال گستته در زمان متناوب با دوره تناوب  $N_0 = 10$  که روی یک دوره تناوب خود به شکل زیر است را در نظر بگیرید اگر ضرایب سری فوریه این سیگنال را با  $a_k$  نشان دهیم، مطلوبست تعیین:

$$\sum_{k=-35}^{25} a_k \quad (3) \quad \sum_{k=0}^9 a_k \quad (2) \quad a_0 \quad (1)$$

$$\sum_{k=-6}^3 |a_k|^2 \quad (5) \quad \sum_{k=-3}^{+3} a_{10k+5} \quad (4) \quad \times$$



$$a_0 = \frac{1}{N_0} \sum_{n \in N_0} x[n] = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 x[n] = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$\sum_{k=0}^9 a_k = x[0] = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{k=-35}^{25} a_k = \sum_{k=-5}^{+5} a_k = \sum_{k=-5}^{+4} a_k + a_5 = x[0] + \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 (-1)^n x[n] = 1 + 0 = 1 \quad (3)$$

$$\sum_{k=-3}^{+3} a_{10k+5} = 7a_5 = \frac{7}{10} \sum_{n=0}^9 (-1)^n x[n] = 0 \quad (4)$$

$$\sum_{k=-6}^3 |a_k|^2 = \frac{1}{10} \sum_{n=0}^9 |x[n]|^2 = \frac{1}{10} (1+1+4+1+4+4+1+4+1+1) = \frac{11}{5} \quad (5)$$

مثال: فرض کنید اطلاعات زیر در مورد سیگنال گستته  $x[n]$  داده شده است:

(۱)  $x[n]$  با دوره تناوب ۶ متناوب است.

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 2 \quad (2)$$

$$\sum_{n=1}^7 (-1)^n x[n] = 1 \quad (3)$$

(۴) در میان تمام سیگنال‌هایی که سه شرط بالا را دارند،  $x[n]$  حداقل توان متوسط را دارد.

با توجه به اطلاعات فوق سیگنال  $x[n]$  را تعیین کنید.

هل: با توجه به (۱) نتیجه می‌گیریم که سیگنال  $x[n]$  دارای شش ضریب سری فوریه است که با دوره تناوب  $N_0 = 6$  تکرار می‌شوند.

با توجه به (۲) داریم:

$$\sum_{n=0}^5 x[n] = 6a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}$$

## تمدیه و تمثیل سیستم‌ها

با توجه به (۳) داریم:

$$\sum_{n=1}^7 (-1)^n \times [n] = 6a_1 = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{6}$$

با توجه به آنکه طبق رابطه پارسوال توان متوسط سیگنال فوق از رابطه:

$$P = \sum_{k=0}^5 |a_k|^2$$

بدست می‌آید و طبق (۴) سیگنال  $x[n]$  باید حداقل توان متوسط را داشته باشد، نتیجه می‌گیریم:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$$

بنابراین داریم:

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j\omega_0 n} = a_0 + a_1 e^{j\frac{2\pi}{6}n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} e^{j\pi n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} (-1)^n$$

## خودآزمائی ششم

۱ - (آزاد ۷۹) سیگنال زمان گستته پریودیک  $x[n] = \{\dots, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, 2, 1, 0, \dots\}$  که در آن نمونه صفرم

سیگنال  $x[0] = 2$  می باشد را در نظر بگیرید. ضریب  $e^{j\frac{2\pi}{3}}$  در بسط به سری فوریه این سیگنال چیست؟

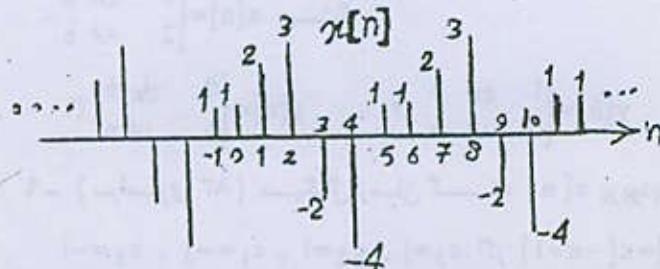
$$\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

۲ - (سراسری ۸۲) برای سیگنال گستته و متناوب  $x[n]$  در شکل زیر با ضرایب سری فوریه  $a_k$ ، مقدار کدام است؟



۳ - (آزاد ۷۹) یک سیگنال متناوب با تناوب  $N=8$  و ضرایب سری فوریه  $a_{k-4} = -a_k$  است. اگر ضرایب سری فوریه سیگنال

$$y[n] = \left( \frac{1+(-1)^n}{2} \right) x[n-1]$$

$$b_k = 0 \quad (1)$$

$$b_k = 4a_k \quad (2)$$

$$b_k = 2a_k e^{-jk\frac{\pi}{4}} \quad (3)$$

$$b_k = a_k e^{-jk\frac{\pi}{4}} \quad (4)$$

۴ - (آزاد ۸۱) اگر  $y[n] = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{6}n\right)$  و  $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{6}n + \frac{\pi}{4}\right)$  باشند، ضرایب غیرصفر سری فوریه سیگنال  $y[n]$  کدام گزینه

خواهد بود؟ (۱) ضرایب سری فوریه سیگنال  $x[n]$ . (۲)  $y[n]$ . (۳)  $x[n-3]$  است.

$$\{C_0, C_{\pm 1}\} \quad (1)$$

$$\{C_{\pm 1}, C_{\pm 2}\} \quad (2)$$

$$\{C_0, C_{\pm 1}, C_{\pm 2}\} \quad (3)$$

۵ - (آزاد ۸۰) اگر ضرایب سری فوریه سیگنال گستته و متناوب  $x[n]$  را  $a_k$  و ضرایب سری فوریه سیگنال  $y[n] = -x[n-3]$  را  $b_k$  باشیم، رابطه بین  $a_k$  و  $b_k$  کدام است؟ (دوره تناوب هر دو سیگنال  $N=6$  است)

$$b_k = -e^{jk\frac{6\pi}{N}} a_k \quad (1) \quad b_k = -e^{jk\frac{6\pi}{N}} a_{-k} \quad (2) \quad b_k = -e^{-jk\frac{6\pi}{N}} a_k \quad (3) \quad b_k = -e^{-jk\frac{6\pi}{N}} a_{-k} \quad (4)$$

۶ - (سراسری ۸۱) کدام گزینه بیان کننده ضرایب سری فوریه برای سیگنال گستته  $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$  می باشد؟

$$a_1 = -\frac{1}{4j}, \quad a_2 = +\frac{1}{4j}, \quad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{11} = -\frac{1}{2j} \quad (1)$$

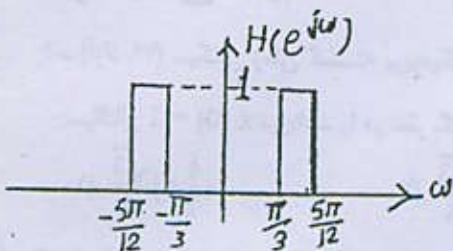
$$a_1 = \frac{1}{4j}, \quad a_2 = -\frac{1}{4j}, \quad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{11} = -\frac{1}{2j} \quad (2)$$

$$a_1 = \frac{1}{2j}, \quad a_2 = -\frac{1}{2j}, \quad a_3 = \frac{1}{2j}, \quad a_{11} = -\frac{1}{2j} \quad (3)$$

$$a_1 = -\frac{1}{4j}, \quad a_2 = \frac{1}{4j}, \quad a_3 = -\frac{1}{4j}, \quad a_{11} = \frac{1}{4j} \quad (4)$$

## تجزیه و تحلیل سیستم‌ها

۲ - (ازاد ۸۱) اگر  $x[n]$  سیگنال متناوب باشد، فیلتر شده  $x[n]$  با فیلتر  $H(e^{j\omega})$  کدام است؟



(۲) صفر

$$1 + \sin\left(\frac{3\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (۱)$$

$$1 + \cos\left(\frac{3\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (۲)$$

$$\sin\left(\frac{3\pi n}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (۳)$$

۳ - (ازاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گستته LTI به صورت  $H(f) = |\sin(\pi f)|$  می‌باشد. پاسخ این سیستم به ورودی

$$x[n] = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 2 & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$y[n] = (-1)^n \quad (۴)$$

$$y[n] = -(-1)^n \quad (۵)$$

$$y[n] = \begin{cases} 1 & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases} \quad (۶)$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & \text{زوج } n \\ 1 & \text{فرد } n \end{cases} \quad (۷)$$

۴ - (سراسری ۸۳) سیگنال زمان گستته  $x[n]$  پریودیک با پریود  $N_0 = 4$  است. ضرایب سری فوریه آن عبارتند از  $y[n] = x[-n+1]$ . اگر  $y[n] = x[-n+1] \cdot c_3 = j$ ,  $c_2 = 1$ ,  $c_1 = -j$ ,  $c_0 = -1$  نشان دهیم،  $d_3, d_2, d_1, d_0$  چه خواهد بود؟

$$j \quad (۴)$$

$$1 \quad (۵)$$

$$-j \quad (۶)$$

$$-1 \quad (۷)$$

۵ - (سراسری ۸۴) ضرایب سری فوریه دنباله متناوب  $x[n]$  دارای دوره تناوب  $N$  (زوج) را با  $X[k]$  نمایش می‌دهیم. در آن صورت

ضرایب سری فوریه دنباله  $x[n] = (-1)^n$  برابرند با:

$$-X\left[k + \frac{N}{2}\right] \quad (۸)$$

$$X\left[k - \frac{N}{2}\right] \quad (۹)$$

$$-X[k] \quad (۱۰)$$

$$X[-k] \quad (۱۱)$$

### ۱۳- تحلیل فوریه سیگنال‌های گستته در زمان نامتناوب (تبدیل فوریه گستته در زمان)

در بخش قبل سری فوریه گستته در زمان معرفی و بررسی گردید و ملاحظه کردید عمدترين تفاوت‌های سری فوریه گستته در زمان نسبت به سری فوریه پیوسته در زمان محدود بودن ابعاد سری به واسطه محدود بودن تعداد هارمونیک‌ها و متناوب بودن ضرایب سری فوریه می‌باشد اما اکثر روابط بین سری فوریه گستته و پیوسته شبیه یکدیگر هستند. در این بخش به معرفی تبدیل فوریه گستته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های گستته در زمان پرداخته و خواص آن معرفی و بررسی می‌گردد. ملاحظه خواهد کرد که این تبدیل نیز نسبت به تبدیل فوریه پیوسته در زمان تفاوت‌ها و شاباهات‌هایی دارد.

#### ۱۳-۱- تبدیل فوریه گستته در زمان و کاربرد آن در تحلیل سیستم‌های LTI

تعريف: سیگنال نامتناوب  $[n]x$  را در نظر بگیرید. تبدیل فوریه گستته در زمان این سیگنال را با  $(e^{j\omega})X$  نشان می‌دهند و رابطه آن به صورت زیر است:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega} \quad \text{رابطه تبدیل فوریه:}$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega \quad \text{رابطه عکس تبدیل فوریه:}$$

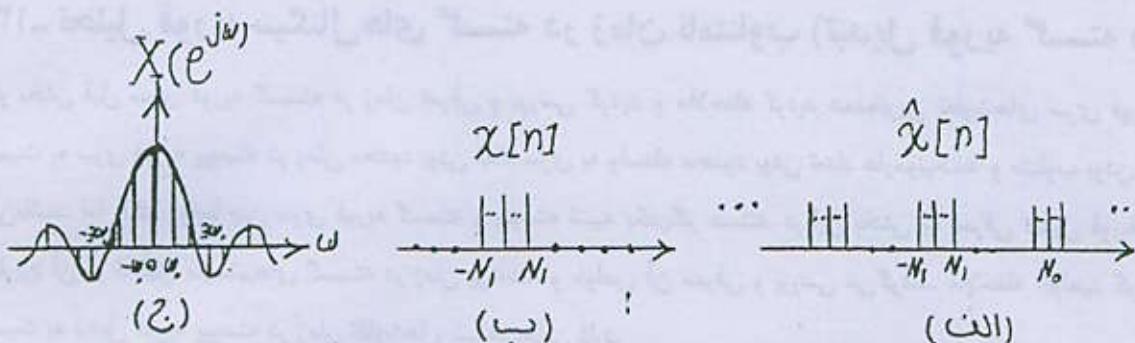
تلک؛ با توجه به تعريف  $(e^{j\omega})X$  ملاحظه می‌کنید روابط تبدیل فوریه گستته شباهت زیادی به روابط تبدیل فوریه پیوسته دارند. تفاوت‌های عمدترين دو تبدیل، متناوب بودن  $(e^{j\omega})X$  و محدود بودن فاصله انتگرال‌گیری در رابطه عکس تبدیل فوریه می‌باشد. این دو تفاوت ناشی از این واقعیت است که سیگنال  $(e^{j\omega})X$  یک سیگنال متناوب از  $\omega$  با دوره تناوب  $2\pi$  است و در نتیجه  $(e^{j\omega})X$  نیز یک سیگنال متناوب از  $\omega$  با دوره تناوب  $2\pi$  می‌شود و در نتیجه در رابطه عکس تبدیل فوریه حدود انتگرال محدود به بازه  $2\pi$  می‌شود.

تلک؛ اگر  $[n]\hat{x}$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب  $N$ ، فرکانس پایه  $\omega_0$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  باشد، آنگاه  $a_k$  را می‌توان از رابطه زیر بدست آورد:

$$a_k = \frac{1}{N_0} X(e^{jk\omega_0})$$

در رابطه فوق  $(e^{j\omega})X$  تبدیل فوریه سیگنال  $[n]x$  می‌باشد.  $[n]x$  سیگنال نامتناوبی است که مشابه یکی از دوره‌های تناوب  $\hat{x}[n]$  است. در واقع ضرایب سری فوریه  $[n]\hat{x}$  با نمونه‌برداری فرکانسی از تبدیل فوریه  $[n]x$  به ازاء فرکانس‌های مضارب صحیح  $\omega_0$  بدست می‌آیند.

شکل (۱-۱۲) این ارتباط را نشان می‌دهد.



شکل ۱-۱۲-۱. (الف) یک سیگنال متناوب فرضی (ب) سیگنال نامتناوب مشابه یک دوره تناوب سیگنال بند (الف)

(ج) تبدیل فوریه فرضی سیگنال بند (ب) و نموده بدست آوردن ضرایب سری فوریه سیگنال بند (الف)

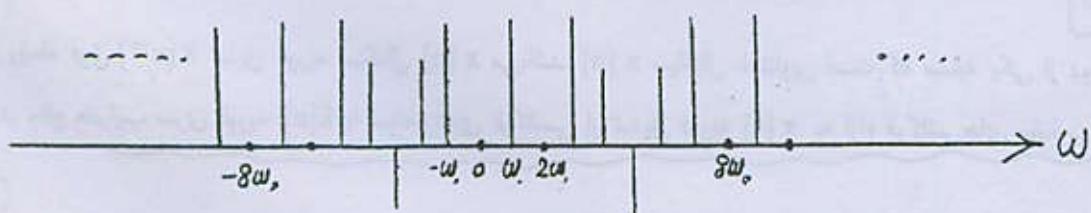
تذکرہ: دقت کنید تبدیل فوریه یک سیگنال گستته (که در برخی مواقع طیف سیگنال نامیده می‌شود) در حالت کلی یکتابع مختلط است. لذا معمولاً دامنه و فاز آن جداگانه تعیین و رسم می‌گردند که به ترتیب طیف دامنه و طیف فاز نام دارند.

تذکرہ: با توجه به تعریف تبدیل فوریه، ملاحظه می‌شود که  $\sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega_0} = X(\omega_0)$  می‌باشد. این رابطه در واقع مقدار DC یک سیگنال نامتناوب گستته را نشان می‌دهد.

تذکرہ: (تبدیل فوریه گستته سیگنال‌های متناوب) اگر  $x[n]$  یک سیگنال متناوب با دوره تناوب اصلی  $N$ ، فرکانس پایه  $\omega_0$  و ضرایب سری فوریه  $a_k$  باشد، آنگاه می‌توان داد تبدیل فوریه گستته آن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$X(\omega_0) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

به عبارت دیگر مانند سیگنال‌های متناوب بیوسته در زمان، در سیگنال‌های متناوب گستته در زمان نیز تبدیل فوریه قطاری از ضربه‌هایی به فاصله  $\omega_0$  از یکدیگر است. اما در حالت گستته به دلیل متناوب بودن ضرایب سری فوریه  $a_k$  با دوره تناوب  $N$ ، قطار ضربه فوق نیز با دوره تناوب  $N$  ضربه یا  $2\pi = \omega_0$  متناوب می‌باشد. (شکل (۱-۱۳)).

شکل ۱-۱۳-۱. تبدیل فوریه یک سیگنال گستته متناوب فرضی با دوره تناوب  $N = 8$ 

تذکرہ: دانستن تبدیل فوریه گستته برخی سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و به خاطر سپردن آن‌ها به دانشجویان توصیه می‌شود. جدول (۱-۱۳) برخی از این زوج‌های فوریه را نشان می‌دهد. دقت کنید اکثر فرمول‌ها در جدول فوق مشابه تبدیل فوریه گستته در زمان می‌باشند. با این تفاوت که کلیه تبدیل فوریه‌های گستته در زمان متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  می‌باشند.

همگرایی تبدیل فوریه گستته در زمان: با توجه به آن که در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گستته حدود سیگما نامحدود می‌باشد، لذا امکان واگرا شدن سری وجود دارد. بدین منظور بررسی شرایطی که  $x[n]$  باید داشته باشد تا سری فوق همگرا شود، ضروری به نظر می‌رسد. شرایط فوق مانند حالت پیوسته در زمان می‌باشد و در کتب ریاضی آورده شده است. اما انتگرال به جمع تبدیل می‌شود. یعنی اگر  $x[n]$  مطلقاً جمع پذیر باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty$$

با این‌زی سیگنال فوق محدود باشد:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

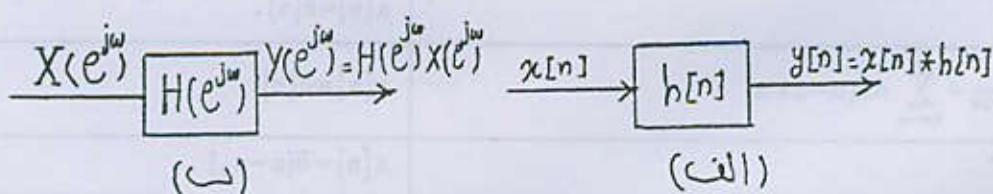
آنگاه همگرایی جمع در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گستته تضمین می‌شود.

### ۱۳-۲- کاربرد تبدیل فوریه در تحلیل سیستم‌های گستته در زمان LTI :

در بخش قبل ملاحظه کردید سری فوریه ابزار مناسبی جهت تعیین خروجی یک سیستم LTI نیست و با استفاده از آن فقط می‌توان ضرایب سری فوریه خروجی را بدست آورد. در این بخش خواهیم دید که تبدیل فوریه گستته یک روش مناسب و ساده جهت تعیین خروجی سیستم‌های LTI می‌دهد.

تعیین خروجی یک سیستم LTI گستته در زمان از روی ورودی و با استفاده از تبدیل فوریه گستته در زمان بر اساس خاصیت کانولوشن تبدیل فوریه گستته می‌باشد. بر مبنای این خاصیت، تبدیل فوریه کاتوالو دو سیگنال گستته در زمان برابر حاصلضرب تبدیل فوریه آن‌ها می‌باشد. بنابراین با توجه به شکل (۱۳-۲) داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$



شکل ۱۳-۲- (الف) (ابطه) ورودی - خروجی یک سیستم LTI گستته در موزه (مان (ب) (ابطه) بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی

تبدیل فوریه	سینکنال
$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi)$	$x[n] = e^{j\omega_0 n}$
$X(e^{j\omega}) = \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) + \delta(\omega + \omega_0 - 2k\pi) \}$	$x[n] = \cos(\omega_0 n)$
$X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(\omega - \omega_0 - 2k\pi) - \delta(\omega + \omega_0 - 2k\pi) \}$	$x[n] = \sin(\omega_0 n)$
$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$	$x[n] = 1$
موج مربعی متاوب	
$X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$ مطابق جدول (۱-۱۲) $a_k$	$x[n] = \begin{cases} 1 &  n  \leq N_1 \\ 0 & N_1 \leq  n  \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ $x[n+N] = x[n]$
$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2k\pi}{N}\right)$	$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$
$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$	$x[n] = \begin{cases} 1 &  n  \leq N_1 \\ 0 &  n  > N_1 \end{cases}$
$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq  \omega  \leq W \\ 0 & W <  \omega  \leq \pi \end{cases}$ متابع با دوره تناوب $2\pi$	$x[n] = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \sin c\left(\frac{Wn}{\pi}\right)$ $0 < W < \pi$
$X(e^{j\omega}) = 1$	$x[n] = \delta[n]$
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - 2k\pi)$	$x[n] = u[n]$
$X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$	$x[n] = \delta[n - n_0]$
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}}$	$x[n] = \alpha^n u[n] \quad  \alpha  < 1$
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^2}$	$x[n] = (n+1)\alpha^n u[n] \quad  \alpha  < 1$
$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})^r}$	$x[n] = \frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} \alpha^n u[n] \quad  \alpha  < 1$

بنابراین تبدیل فوریه خروجی یک سیستم LTI گستته در زمان برابر است با حاصلضرب تبدیل فوریه ورودی در تبدیل فوریه پاسخ ضربه (پاسخ فرکانسی سیستم). برای تعیین خروجی سیستم باید عکس تبدیل فوریه آن را محاسبه کرد. معمولاً برای محاسبه عکس تبدیل فوریه از بسط یک کسر به کسرهای جزئی و خواص تبدیل فوریه استفاده می‌شود. بحث مربوط به بسط یک کسر به کسرهای جزئی را می‌توانید از کتب پایه ریاضی مطالعه نمائید. خواص تبدیل فوریه در ادامه معرفی و بررسی خواهند شد.

**مثال:** یک سیستم گستته در زمان با پاسخ ضربه  $h[n] = \alpha^n u[n]$  و با فرض  $1 - |\alpha| > 0$  را در نظر بگیرید. پاسخ این سیستم به ورودی  $x[n] = \beta^n u[n]$  را بدست آورید.

هل: مثال فوق را برای دو حالت  $\alpha = \beta$  و  $\alpha \neq \beta$  حل می‌کنیم.

(۱)  $\alpha \neq \beta$ : در این حالت با توجه به جدول (۱-۱۲) داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})} = \frac{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}}{1-\alpha e^{-j\omega}} + \frac{\frac{-\beta}{\alpha-\beta}}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \alpha^n u[n] + \frac{-\beta}{\alpha-\beta} \beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha-\beta} (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) u[n]$$

(۲)  $\alpha = \beta$ : در این حالت با توجه به جدول (۱-۱۲) داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \Rightarrow y[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$$

**تذکره:** برای توابعی مانند  $e^{j\omega_0 n}$ ،  $\cos(\omega_0 n)$  و  $\sin(\omega_0 n)$  که آنها را می‌توان بر حسب  $e^{j\omega_0 n}$  نوشت و با توجه به آن که  $e^{j\omega_0 n}$  یک تابع ویژه برای سیستم‌های LTI گستته در زمان است، می‌توان خروجی سیستم را ساده‌تر بدست آورد. روابط زیر با توجه به این اصل بدست می‌آیند:

$$\text{if } x[n] = e^{j\omega_0 n} \Rightarrow y[n] = |H(e^{j\omega_0})| e^{j(\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0}))}$$

$$\text{if } x[n] = \cos(\omega_0 n) \Rightarrow y[n] = |H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0}))$$

$$\text{if } x[n] = \sin(\omega_0 n) \Rightarrow y[n] = |H(e^{j\omega_0})| \sin(\omega_0 n + \angle H(e^{j\omega_0}))$$

در روابط فوق  $|H(e^{j\omega_0})|$  معرف مقدار  $H(e^{j\omega_0})$  در فرکانس  $\omega_0 = \omega$  است. دقت کنید پاسخ به دست آمده پاسخ در حالت دائم می‌باشد و با این روش نمی‌توان پاسخ گذراش سیستم را به دست آورد.

**مثال:** یک سیستم LTI گستته در زمان با پاسخ فرکانسی  $H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1-e^{-j\omega})(1-2e^{-j\omega})}$  را در نظر بگیرید. پاسخ حالت دائم این

سیستم به ورودی  $x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$  را بدست آورید.

## تمثیل و تبدیل سیستمها

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{\left(1 - e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)\left(1 - 2e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^2} = \frac{2}{(1+j)(1+j2)^2} = \frac{2}{(1+j)(-3+j4)} = \frac{2}{-7+j} = \frac{2}{7.07e^{j172^\circ}} = 0.28e^{-j172^\circ}$$

بنابراین داریم:

$$y[n] = 0.28 \sin\left(\frac{\pi}{2}n - 172^\circ\right)$$

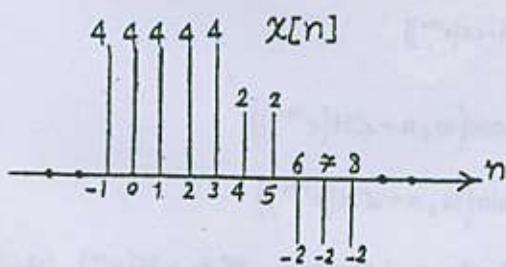
## ۱۳-۳- خواص تبدیل فوریه گستته در زمان

در این بخش به بررسی خواص تبدیل فوریه گستته در زمان می‌پردازیم. این خواص بینش زیادی نسبت به تبدیل فوریه گستته و رابطه بین سیگنال در حوزه زمان و تبدیل فوریه آن می‌دهند همچنین به کمک این خواص می‌توان پیچیدگی محاسبه تبدیل فوریه و معکوس آن را کاهش داد. خواص تبدیل فوریه گستته در زمان در جدول (۱۳-۲) آورده شده‌اند. با مقایسه جدول فوق و خواص تبدیل و سری فوریه پیوسته در زمان و سری فوریه گستته در زمان می‌توان به شباهت‌ها و تفاوت‌های این خواص بی‌برد فراگیری این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود و ابزار مناسبی برای تحلیل سیگنال‌های پیچیده‌تر فراهم می‌کند.

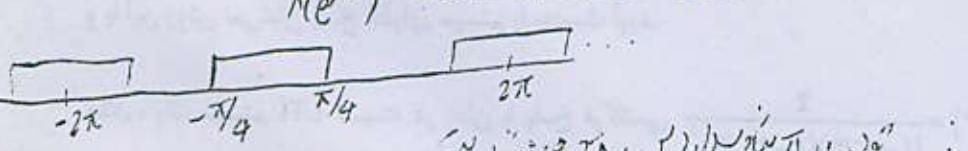
(۱) خطی بودن: به دلیل آن که برای محاسبه تبدیل فوریه گستته از اپراتور جمع استفاده می‌شود، بنابراین این تبدیل خاصیت خطی دارد.

(۲) جایجایی زمانی: اگر سیگنال روی محور زمان جایجا و به  $x[n - m] \times$  تبدیل گردد، آنگاه تبدیل فوریه آن در  $e^{-jwm}$  ضرب می‌شود بنابراین اگر پاسخ فرکانسی یک کانال  $e^{-jwm}$  باشد (یعنی دامنه ثابت و فاز خطی داشته باشد) آنگاه سیگنال خروجی تأخیر یافته سیگنال ورودی است و اعوجاج در آن ایجاد نمی‌شود.

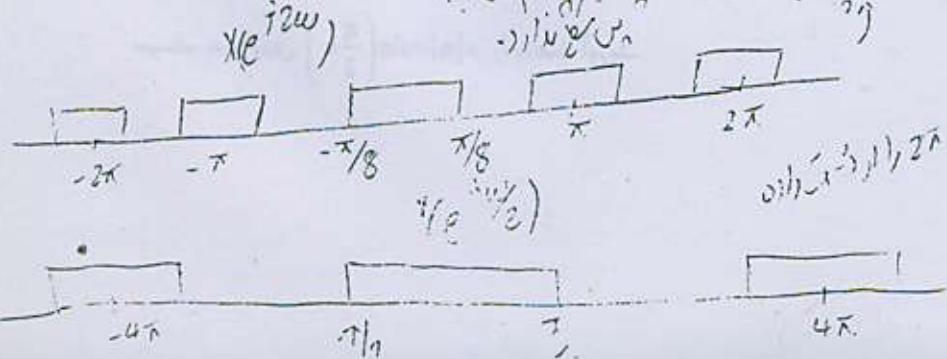
مثال: تبدیل فوریه گستته سیگنال شکل زیر را بدست آورید.



مثال راجع به خصیصات اصلی:



آن ب آنکه از این رسم راجح نمی‌شود.



اینها

لما

ب

۱

تمزیه و تملیل سیستم‌ها

نفس  $\lambda$   $\frac{1}{\tau}$  ارجوكم فاعل را رسما  $\frac{1}{1 - e^{-\lambda \tau}}$

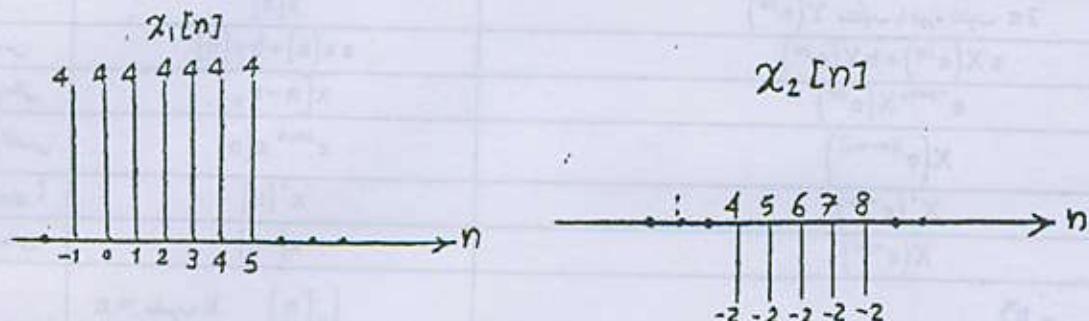
خاصیت	سیگنال نامتناوب	تبديل فوريه
خطي بودن	$x[n]$	$X(e^{j\omega})$ متناوب با دوره تناوب $2\pi$
جابجایی زمانی	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$ متناوب با دوره تناوب $2\pi$
جابجایی فرکانس	$a x[n] + b y[n]$	$a X(e^{j\omega}) + b Y(e^{j\omega})$
مزدوج گيري !	$x[n-n_0]$	$e^{-jn\omega} X(e^{j\omega})$
وارونگی زمانی	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
ابساط زمانی	$x[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
انتباخت زمانی	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
کاتولوشن در حوزه زمان	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{k}\right] & k \text{ مضرب } n \\ 0 & k \text{ مضرب } n \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
ضرب در حوزه زمان	$x[Mn]$	$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{\frac{j(\omega+2k\pi)}{M}}\right)$
ضرب گيري زمانی	$x[n]*y[n]$	$X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$
جمع اثارةهای	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
مشتق گيري فرکانس	$x[n]-x[n-1]$	$(1-e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$
تقارن سیگنال های حقیقی	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]$	$\frac{X(e^{j\omega})}{1-e^{-j\omega}} + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2k\pi)$
تقارن سیگنال های حقیقی و زوج	$n x[n]$	$j \frac{d X(e^{j\omega})}{d\omega}$
تقارن سیگنال های حقیقی و فرد	$x[n] = x^*[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] = x[-n]$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{X(e^{-j\omega})\} \quad  X(e^{j\omega})  =  X(e^{-j\omega}) $
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] = -x[-n]$	$\text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = -\text{Im}\{X(e^{-j\omega})\} \quad \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] = x[-n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \quad X(e^{j\omega}) \text{ حقیقی و زوج}$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] = -x[-n]$	$X(e^{j\omega}) = -X^*(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega}) \quad X(e^{j\omega}) \text{ موهموس و فرد}$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] + x_o[n]$	$X(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} + j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] + x_o[n]$	$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = X_e(e^{j\omega}) \quad \text{تبديل فوريه } (t) \text{ برابر است با:}$
تقریب فوریه	$x[n] = x^*[n] - x_o[n]$	$j \text{Im}\{X(e^{j\omega})\} = X_o(e^{j\omega}) \quad \text{تبديل فوريه } (t) \text{ برابر است با:}$
رايشه پارسال برای سیگنال های نامتناوب	جمع نمونه های يك سیگنال	مقدار تبدل فوريه در $\omega = \pi$
سطوح زير منحنی تبدل فوريه	$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n]$	$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]$
$x[0] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega$		$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}  x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi}  X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$

جدول ۲-۴ - فواید تبدیل همراه گستته در زمان

(ارزی) مدول ۱۱۳-۴- فواید تبدیل همراه گستته در زمان  $\left( e^{-\frac{t}{2}} \right)$

در میں ارجمند اور مسلمان صوبوں میں (ارجمند اشکانی) بھٹکیوں نے اپنے وطن (خواص خان) کا پھر لے کر اپنے دارالحکومت کے سامنے پہنچا دیا۔

هل؛ به روش‌های مختلفی می‌توان تبدیل فوریه سیگنال فوق را بدست آورد. عنوان مثال می‌توان  $[n] \times$  را به مجموع دو سیگنال  $x_1[n]$  و  $x_2[n]$  مطابق شکل‌های زیر تجزیه کرد:



حال با توجه به جدول (۱۳) و خواص خطی و جابجایی زمانی تبدیل فوریه می‌توان تبدیل فوریه دو سیگنال فوق را بدست آورده و با یکدیگر جمع کنیم.

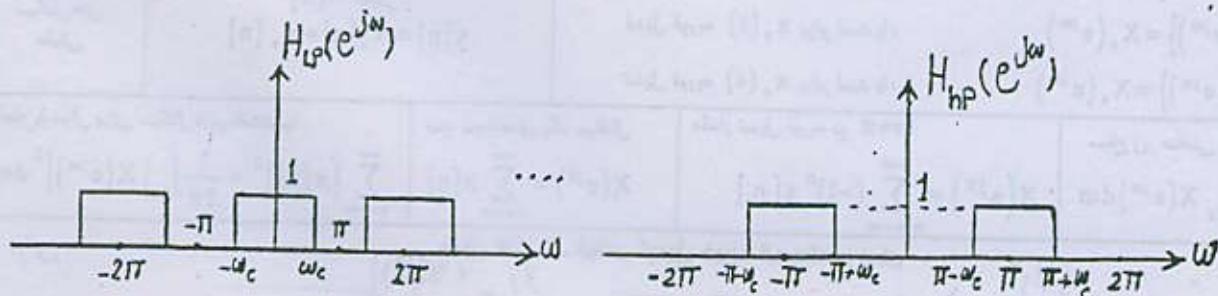
$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{4 \sin\left[\omega\left(3 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \times e^{-j2\omega} = \frac{4 \sin\left(\frac{7\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j2\omega}$$

$$X_2(e^{j\omega}) = \frac{-2 \sin\left[\omega\left(2 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \times e^{-j6\omega} = \frac{-2 \sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} e^{-j6\omega}$$

$$X(e^{j\omega}) = X_1(e^{j\omega}) + X_2(e^{j\omega}) = \frac{4 \sin\left(\frac{7\omega}{2}\right) e^{-j2\omega} - 2 \sin\left(\frac{5\omega}{2}\right) e^{-j6\omega}}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

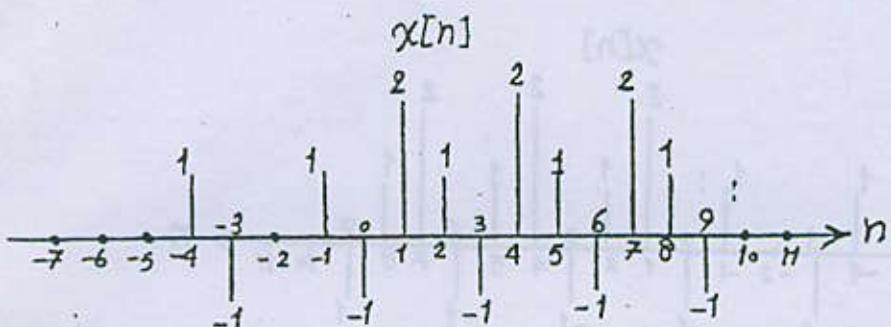
(۳) جابجایی فرکانسی: با ضرب  $e^{j\omega_0 n}$  در سیگنال زمانی، تبدیل فوریه گستته در زمان سیگنال در حوزه فرکانس جابجا شده و تبدیل  $X(e^{j\omega})$  می‌شود (یعنی سیگنال مدوله می‌شود). به

مثال؛ پاسخ فرکانسی فیلترهای پایین‌گذر و بالاگذر ایده‌آل گستته در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند. رابطه بین پاسخ ضربه‌های آن‌ها را بدست آورید.

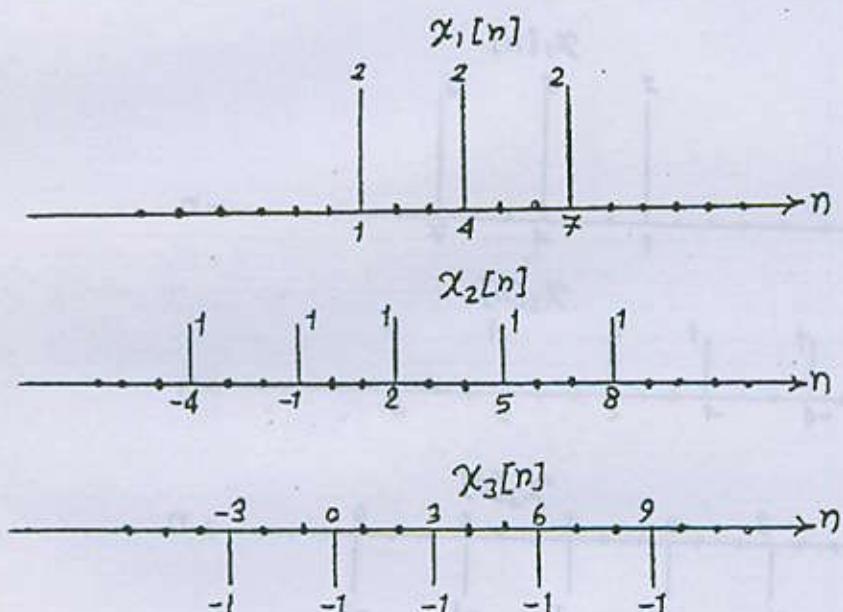


مثال: با استفاده از جدول (۱-۱۳) و خواص تبدیل فوریه گستته در زمان، تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  نشان داده شده در شکل زیر را بدست

آورید.



هل: سیگنال  $x[n]$  را می‌توان به مجموع سه سیگنال  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$  و  $x_3[n]$  نشان داده شده در شکل‌های زیر تجزیه کرد:



برای تعیین تبدیل فوریه  $X_1[n]$  از تبدیل فوریه سیگنال زیر و جدول (۱-۱۳) استفاده می‌کنیم:

$$y[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 1 \\ 0 & |n| > 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{زیر}} Y(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

رابطه بین  $x_1[n]$  و  $y[n]$  به صورت زیر است:

$$x_1[n] = 2y[n-4]$$

در نتیجه داریم:

$$X_1(e^{j\omega}) = 2Y(e^{j3\omega}) \times e^{-j4\omega}$$

برای تعیین تبدیل فوریه سیگنال‌های  $x_2[n]$  و  $x_3[n]$  از تبدیل فوریه سیگنال زیر و جدول (۱-۱۲) استفاده می‌کنیم:

$$r[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & n > 2 \end{cases} \quad \xrightarrow{\text{R}} \quad R(e^{j\omega}) = \frac{\sin\left(\frac{5\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

رابطه بین  $x_2[n]$  و  $x_3[n]$  با  $r[n]$  به صورت زیر است:

$$x_2[n] = r_{(3)}[n-2]$$

$$x_3[n] = -r_{(3)}[n-3]$$

در نتیجه داریم:

$$X_2(e^{j\omega}) = R(e^{j3\omega}) \times e^{-j2\omega}$$

$$X_3(e^{j\omega}) = -R(e^{j3\omega}) \times e^{-j3\omega}$$

بنابراین تبدیل فوریه سیگنال  $[n]$  برابر است با:

$$X(e^{j\omega}) = 2Y(e^{j3\omega}) \times e^{-j4\omega} + R(e^{j3\omega}) \times e^{-j2\omega} - R(e^{j3\omega}) \times e^{-j3\omega} = \frac{2\sin\left(\frac{9\omega}{2}\right)e^{-j4\omega} + \sin\left(\frac{15\omega}{2}\right)e^{-j2\omega} - \sin\left(\frac{15\omega}{2}\right)e^{-j3\omega}}{\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right)}$$

(۷) انقباض زمانی: اگر یک سیگنال گستته در زمان در حوزه زمان با ضریب  $M$  انقباض پیدا کند، آن‌گاه تبدیل فوریه آن ابتدا با ضریب  $M$  انسپاکس یافته و پس به اندازه  $2k\pi$  ( $k=0, 1, \dots, M-1$ ) شیفت یافته و با یکدیگر جمع می‌شوند. در این فرآیند احتمال تداخل طبیعی و تغییر شکل طیف نیز وجود دارد همچنین دامنه تبدیل فوریه با ضریب  $M$  کوچک می‌شود.

مثال: اگر تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  را  $X(e^{j\omega})$  بنامیم، تبدیل فوریه سیگنال‌های  $x_1[n] = x[2n]$  و  $x_2[n] = x[3n]$  را بدست آورید

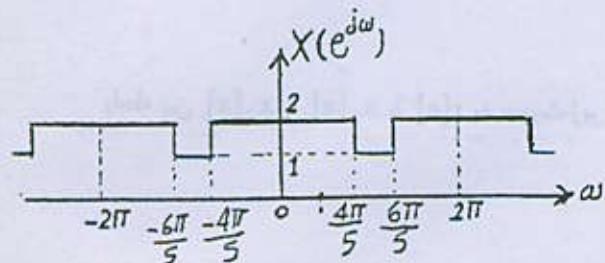
حل: با توجه به خاصیت انقباض در حوزه زمان داریم:

$$X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}\right) = \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)$$

$$\begin{aligned} X_2(e^{j\omega}) &= \frac{1}{3} X\left(e^{j\frac{\omega}{3}}\right) + \frac{1}{3} X\left(e^{j\frac{\omega+2\pi}{3}}\right) + \frac{1}{3} X\left(e^{j\frac{\omega+4\pi}{3}}\right) \\ &= \frac{1}{3} X\left(e^{j\frac{\omega}{3}}\right) + \frac{1}{3} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right) + \frac{1}{3} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}\right) \end{aligned}$$

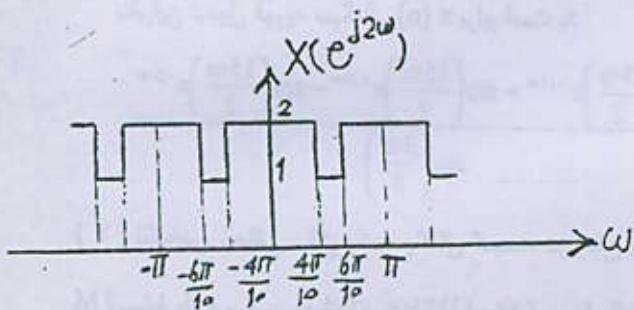
## تمزیه و تملیل سیستم‌ها

مثال: اگر تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  مطابق شکل زیر باشد، تبدیل فوریه سیگنال‌های  $x[2n]$ ،  $x[n+2n]$  را رسم کنید.

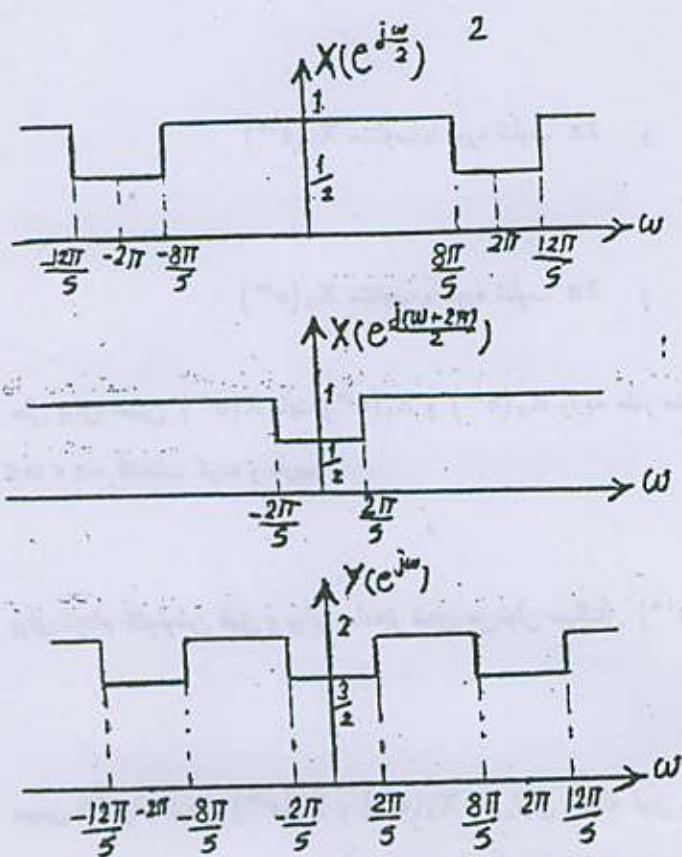


هل:

تبدیل فوریه  $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$  برابر است و در شکل زیر نشان داده شده است:



تبدیل فوریه  $x[2n] \leftrightarrow \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right) + \frac{1}{2} X\left(e^{j\frac{\omega+2\pi}{2}}\right)$  است و در شکل‌های صفحه بعد نشان داده شده است:



(۸) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال گستته در حوزه زمان با یکدیگر کانوالو شوند آنگاه تبدیل فوریه گستته آنها در حوزه فرکانس در یکدیگر ضرب خواهد شد. کاربرد مهم این خاصیت، بدست آوردن پاسخ یک سیستم LTI گستته در زمان می‌باشد.

(۹) ضرب در حوزه زمان: اگر دو سیگنال در حوزه زمان در یکدیگر ضرب گردند آنگاه تبدیل فوریه آنها در حوزه فرکانس به طور متنابض با یکدیگر کانوالو می‌شوند دلیل آن که در تبدیل فوریه گستته در زمان و در حوزه فرکانس از کانولوشن متنابض استفاده می‌شود متنابض بودن تبدیل فوریه‌ها می‌باشد.

مثال: از جدول (۱-۱۲) و خاصیت ضرب در حوزه زمان تبدیل فوریه گستته استفاده کرده و تبدیل فوریه گستته سیگنال

$$x[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{(\pi n)^2}$$

را بدست آورید.

حل: سیگنال  $x[n]$  را به حاصل ضرب دو سیگنال  $x_1[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n}$  و  $x_2[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n}$  تجزیه کرده و با استفاده از جدول

(۱-۱۳) تبدیل فوریه این دو سیگنال را بدست می‌آوریم:

## تمثیله و تحلیل سیستمها



$$x_1[n] = \frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)}{\pi n} \xrightarrow{F} X_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \frac{3\pi}{4} \\ 0 & \frac{3\pi}{4} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$X_1(e^{j\omega})$  متناوب با دوره تناب ۲π و

$$x_2[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)}{\pi n} \xrightarrow{F} X_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$X_2(e^{j\omega})$  متناوب با دوره تناب ۲π و

حال برای تعیین  $(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})$  و  $(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$  را به طور متناوب کانوالو کرد. بدین منظور یک بازه دلخواه به طول  $2\pi$  مثلاً  $\omega \in [-\pi, \pi]$  انتخاب کرده و داریم:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

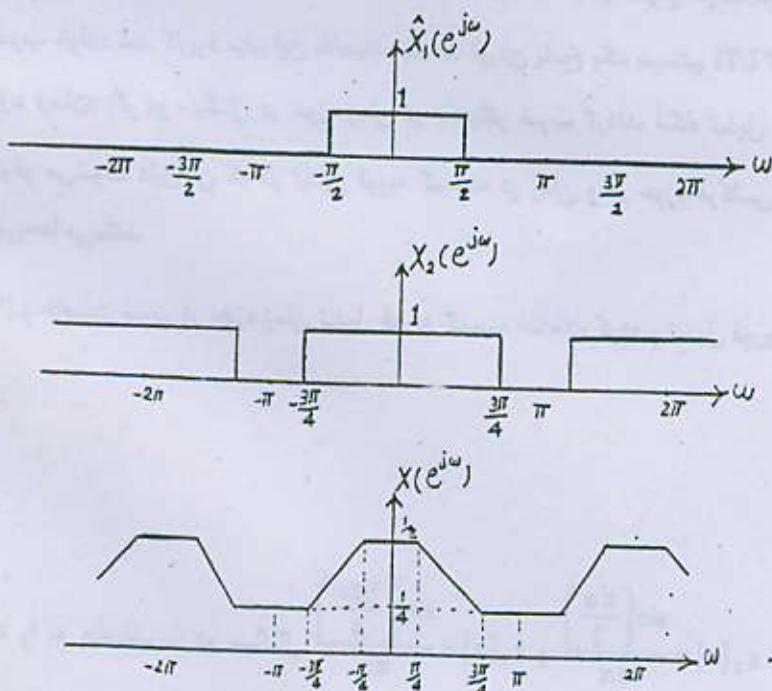
برای انجام کانولوشن فوق و برای ساده‌تر شدن می‌توان سیگنال  $(e^{j\omega})\hat{X}$  را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}) & -\pi < \omega \leq \pi \\ 0 & \text{در بقیه نقاط} \end{cases}$$

سپس با کانوالو کردن  $(e^{j\omega})X_1(e^{j\omega})$  و  $(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$ ، می‌توان معادله فوق را به یک کانولوشن معمولی تبدیل کرد:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta}) \hat{X}_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

و حاصل کانوالو آن‌ها یعنی  $(e^{j\omega})X$  در شکل‌های زیر نشان داده شده‌اند:



(۱۰) تفاضل‌گیری زمانی: این خاصیت متناظر با خاصیت مشتق در حوزه زمان تبدیل فوریه ییوسته در زمان می‌باشد. بدین شکل که اگر سیگنال گستمه‌ای در حوزه زمان تفاضل‌گیری مرتبه اول شود، آنگاه تبدیل فوریه آن در  $(e^{-j\omega}) - 1$  ضرب می‌شود.



(۱۱) جمع انبارهای: این خاصیت متناظر با خاصیت انتگرال در حوزه زمان تبدیل فوریه پیوسته در زمان است. بدین شکل که اگر جمع انبارهای یک سیگنال گستته در حوزه زمان محاسبه گردد آنگاه تبدیل فوریه گستته آن بر عبارت  $(1-e^{-j\omega})$  تقسیم می‌شود و به دلیل مقدار DC آن یک ضربه در فرکانس  $\omega = 0$  ایجاد می‌شود و ضربه فوق در فواصل  $\pi$  ۲ مرتبًا تکرار می‌شود.

(۱۲) مشتق گیری فرکانسی: هر بار ضرب  $\omega$  در یک سیگنال گستته در زمان، باعث می‌شود تا از تبدیل فوریه آن مشتق گرفته شده و در ز ضرب گردد.

مثلث: در جدول (۱-۱۲) تبدیل فوریه سیگنال  $x[n] = (n+1)\alpha^n u[n]$  به ازاء  $1 < |\alpha|$  با رابطه  $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} X$  داده شده است. با استفاده از تبدیل فوریه سیگنال  $x[n] = \alpha^n u[n]$  و خواص تبدیل فوریه گستته در زمان، قرمول داده شده برای  $(e^{j\omega})$  را اثبات کنید.

هل: از تبدیل فوریه  $[n]x$  و با توجه به جدول (۱-۱۲) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} x_1[n] &= \alpha^n u[n], \quad |\alpha| < 1 \xrightarrow{\text{---}} X_1(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} \\ x_2[n] &= n x_1[n] = n \alpha^n u[n] \xrightarrow{\text{---}} X_2(e^{j\omega}) = j \frac{d X_1(e^{j\omega})}{d \omega} = j \frac{-\alpha j e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \\ x[n] &= \frac{1}{\alpha} x_2[n+1] = \frac{1}{\alpha} (n+1) \alpha^{n+1} u[n+1] = (n+1) \alpha^n u[n+1] = (n+1) \alpha^n u[n] \\ &\xrightarrow{\text{---}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{\alpha} e^{j\omega} X_2(e^{j\omega}) = \frac{1}{\alpha} e^{j\omega} \frac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} = \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} \end{aligned}$$

(۱۳) تقارن سیگنال‌های حقیقی: اگر سیگنالی حقیقی باشد تبدیل فوریه گستته آن تقارن مزدوج (هرمتی) دارد در این تقارن  $X(e^{-j\omega}) = X^*(e^{j\omega})$  می‌باشد یعنی اگر فاز تبدیل فوریه را قرنیه کنیم با مزدوج تبدیل فوریه برابر می‌شود این تقارن باعث می‌شود دامنه و قسمت حقیقی تبدیل فوریه تقارن زوج و فاز و قسمت موهومی تبدیل فوریه تقارن فرد ییدا کنند.

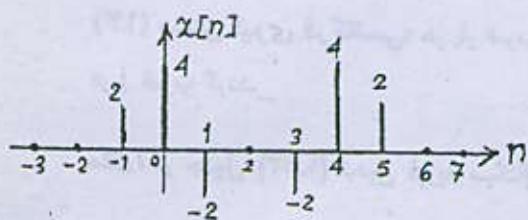
(۱۴) تقارن سیگنال‌های حقیقی و زوج: اگر سیگنال گستته‌ای حقیقی و زوج باشد آنگاه تبدیل فوریه گستته آن نیز حقیقی و زوج است.

(۱۵) تقارن سیگنال‌های حقیقی و فرد: اگر سیگنال گستته‌ای حقیقی و فرد باشد آنگاه تبدیل فوریه گستته آن موهومی و فرد است.

(۱۶) تجزیه زوج و فرد سیگنال‌های حقیقی: تبدیل فوریه قسمت زوج یک سیگنال حقیقی گسته، قسمت زوج تبدیل فوریه که برابر با قسمت حقیقی تبدیل فوریه است را نتیجه می‌دهد تبدیل فوریه قسمت فرد یک سیگنال حقیقی، قسمت فرد تبدیل فوریه که برابر با قسمت موهومی تبدیل فوریه آن ضربدر  $\omega$  است را نتیجه می‌دهد.

## تمزیه و تملیل سیستم‌ها

تست نمونه - (آزاد ۸۳) سیگنال  $x[n]$  نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



تابع فاز تبدیل فوریه آن کدام است؟

$$\text{۱) } -2\omega \quad \text{۲) } -2\omega \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{۳) } \frac{\pi}{2} \quad \text{۴) } 2\omega$$

هل:

$x[n+2]$  زوج است و بنابراین تبدیل فوریه آن حقیقی و زوج می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{aligned} \angle F\{x[n+2]\} &= 0 \Rightarrow \angle\{X(e^{j\omega})e^{j2\omega}\} = 0 \Rightarrow \angle X(e^{j\omega}) + 2\omega = 0 \\ \Rightarrow \angle X(e^{j\omega}) &= -2\omega \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

(۱۷) رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب گستته: این رابطه نشان می‌دهد که انرژی یک سیگنال گستته در زمان نامتناوب را می‌توان از روی تبدیل فوریه آن بدست آورد.

مثال: در مثال قبل تبدیل فوریه سیگنال  $x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\omega}$  را بدست آوریم. با استفاده از رابطه پارسوال برای سیگنال‌های نامتناوب گستته انرژی این سیگنال را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} E_s &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \times 2 \int_0^\pi |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4} d\omega + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left( \frac{5}{8} - \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 d\omega + \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} \frac{1}{16} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4} + \left( \frac{5}{8} - \frac{\omega}{2\pi} \right)^2 \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{1}{16} \left( \pi - \frac{3\pi}{4} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{16} + \frac{2\pi}{3} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{64} \right) + \frac{\pi}{64} \right] = \frac{1}{16} + \frac{7}{96} + \frac{1}{64} = \frac{29}{192} \approx 0.151 \end{aligned}$$

(۱۸) جمع نمونه‌های یک سیگنال گستته در زمان: اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گستته در زمان  $\omega = 0$  قرار دهیم، آنگاه ملاحظه می‌شود که جمع نمونه‌های این سیگنال برابر  $X(e^{j0}) = X(1)$  بدست می‌آید. بنابراین مقدار DC سیگنال گستته در زمان برایر مقدار تبدیل فوریه آن به ازاء  $\omega = 0$  است.

(۱۹) مقدار تبدیل فوریه در  $\omega = \pi$ : اگر در رابطه تبدیل فوریه یک سیگنال گستته  $\omega = \pi$  قرار دهیم، آن‌گاه ملاحظه می‌شود مقدار تبدیل فوریه در  $\omega = \pi$  برابر مجموع نمونه‌های قرار گرفته در محل روج منهای مجموع نمونه‌های قرار گرفته در محل فرد می‌باشد.

(۲۰) سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه: اگر در رابطه عکس تبدیل فوریه  $n = 0$  قرار داده شود آنگاه ملاحظه می‌شود که سطح زیرمنحنی تبدیل فوریه گستته روی یک دوره تناوب آن  $[0, 2\pi]$  است.

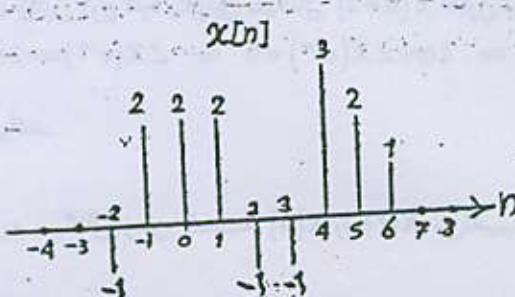
مثلث: سیگنال  $x[n]$  نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید اگر  $X(e^{j\omega})$  تبدیل فوریه این سیگنال باشد مطلوبست تعیین مقادیر:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) d\omega \quad (2)$$

$$X(e^{j\omega}) \quad (3)$$

$$X(e^{j0}) \quad (4)$$



هل:

$$X(e^{j0}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = \sum_{n=-2}^{6} x[n] = 9 \quad (1)$$

$$X(e^{j\pi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\pi} = \sum_{n=-2}^{6} (-1)^n x[n] = [(-1)^{-2} + 2 + (-1)^0 + 3 + 1] - [2 + 2 + (-1)^1 + 2] = -1 \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(e^{j\omega}) d\omega = 2\pi x[0] = 4\pi \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} (nx[n])^2 = 2\pi(4+4+0+4+4+9+144+100+36) = 610\pi \quad (4)$$

مثال: در مثال‌های قبل تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  را بدست آوریم با استفاده از تبدیل فوریه این سیگنال

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] \text{ و } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] = X(e^{j0}) = \frac{1}{2}$$

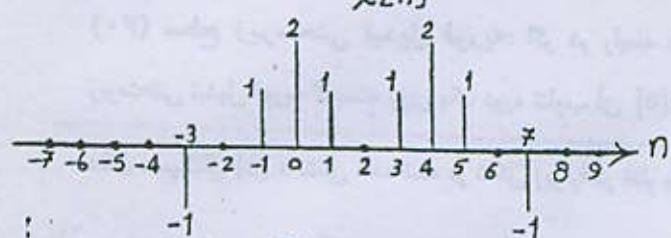
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-jn\pi} = X(e^{j\pi}) = \frac{1}{4}$$

## تمزیه و تمیل سیستم‌ها



تست نمونه (آزاد ۸۱) فرض کند  $X(e^{j\omega})$  مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  باشد که در شکل زیر نمایش داده شده است. در

این صورت مقادیر  $\omega$  کدام است؟



$$-2\omega, \quad 14 \quad (1)$$

$$2\omega, \quad 28\pi \quad (2)$$

$$-2\omega, \quad 28\pi \quad (3)$$

$$2\omega, \quad 14 \quad (4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = 2\pi(1+1+4+1+1+4+1+1) = 28\pi$$

$$\text{سیگنال فوق حول نقطه } n=2 \text{ تقارن زوج دارد بنابراین سیگنال } x[n+2] \text{ تقارن زوج دارد و داریم:}$$

$$\angle F\{x[n+2]\} = 0 \Rightarrow \underbrace{e^{j2\omega} X(e^{j\omega})}_{=0} = 0 \Rightarrow 2\omega + \angle X(e^{j\omega}) = 0 \Rightarrow \angle X(e^{j\omega}) = -2\omega$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

$$y[n] = \begin{cases} x[n] & \frac{n}{3} \notin \mathbb{Z} \\ 0 & \frac{n}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تست نمونه (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه سیگنال زمان گستته  $x(f)$  را  $y[n]$  نمایم. اگر  $y[n]$  را به صورت



تعریف کنیم، تبدیل فوریه آن چه خواهد بود؟

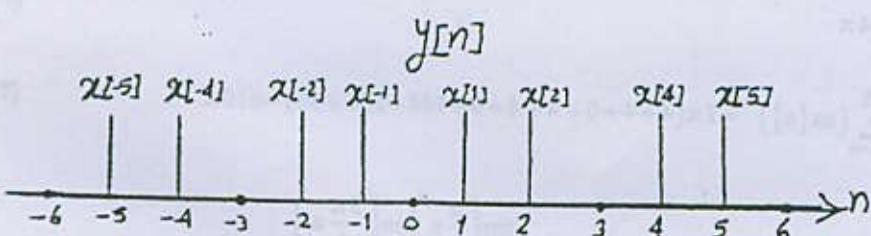
$$Y(f) = \frac{1}{3} X\left(\frac{f}{3}\right) + \frac{1}{3} X\left(\frac{f-1}{3}\right) + \frac{1}{3} X\left(\frac{f+1}{3}\right) \quad (2)$$

$$Y(f) = \frac{1}{3} X(f) + \frac{1}{3} X\left(f - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} X\left(f + \frac{1}{3}\right) \quad (1)$$

$$Y(f) = \frac{2}{3} X\left(\frac{f}{3}\right) - \frac{1}{3} X\left(\frac{f-1}{3}\right) - \frac{1}{3} X\left(\frac{f+1}{3}\right) \quad (4)$$

$$Y(f) = \frac{2}{3} X(f) - \frac{1}{3} X\left(f - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} X\left(f + \frac{1}{3}\right) \quad (3)$$

هل، اگر سیگنال  $[n] x$  را بر حسب نمونه‌های  $y[n]$  نمایش دهیم شکل زیر بدست می‌آید:



تابع  $[n] y$  را بر حسب  $x$  می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$y[n] = \left( x[n] - x[n] \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \right) \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} x[n] - \frac{1}{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi n}{3}} - \frac{1}{3} x[n] e^{j\frac{2\pi n}{3}}$$

بنابراین داریم:

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{2}{3} X(e^{j\omega}) - \frac{1}{3} X\left(e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{3}\right)}\right) - \frac{1}{3} X\left(e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{3}\right)}\right)$$

رابطه فوق اگر بر حسب فرکانس  $f$  نوشته شود داریم:

$$Y(f) = \frac{2}{3} X(f) - \frac{1}{3} X\left(f - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} X\left(f + \frac{1}{3}\right)$$

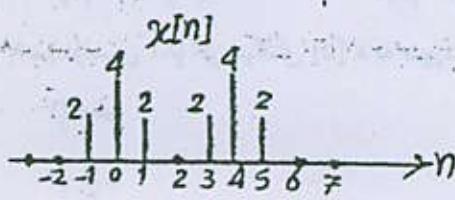
بنابراین گزینه (۳) صحیح می‌باشد.

## خودآزمانی هفتم

۱ - (سراسری ۸۱) تبدیل فوریه سیگنال  $x[n] = 4^{-n} u[n+2]$  کدام است؟

$$X(e^{j\omega}) = \frac{16e^{j\omega}}{4 - e^{-j\omega}} \quad (1) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{64e^{2j\omega}}{4 - e^{-j\omega}} \quad (2) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{16e^{-j\omega}}{4 - e^{-j\omega}} \quad (3) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{64e^{-2j\omega}}{4 - e^{-j\omega}} \quad (4)$$

۲ - (آزاد ۸۲) سیگنال  $x[n]$  نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید

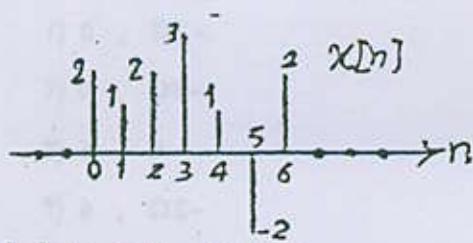


مقدار  $\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$  چقدر است؟

$$\frac{16}{7} \quad (1) \quad \text{سیگنال} \quad 16 \quad (2) \quad \frac{8}{7\pi} \quad (3) \quad \frac{8}{\pi} \quad (4)$$

۳ - (آزاد ۸۳) سیگنال گسته  $x[n]$  در شکل زیر نشان داده شده است. اگر  $X(e^{j\omega})$  تبدیل فوریه آن باشد مقدار زیر کدام است.

$$a = X(e^{j0}) \quad , \quad b = \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) d\omega \quad , \quad c = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$$



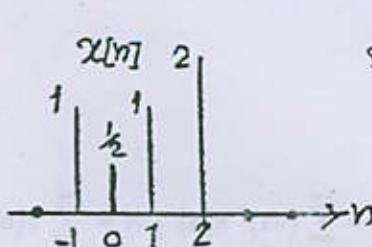
$$x[n] = 0 \quad n < 0, \quad n \geq 7$$

$$a = 5, \quad b = 4\pi, \quad c = 716\pi \quad (1)$$

$$a = 5, \quad b = 4\pi, \quad c = 540\pi \quad (2)$$

$$a = 9, \quad b = 4\pi, \quad c = 716\pi \quad (3)$$

$$a = 9, \quad b = 2\pi, \quad c = 540\pi \quad (4)$$



۴ - (سراسری ۸۴) اگر  $x[n]$  به صورت زیر باشد مقدار  $\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$  کدام است؟

$$18\pi \quad (2) \quad 12\pi \quad (1)$$

$$\frac{45\pi}{2} \quad (3) \quad 36\pi \quad (4)$$

۵ - پاسخ ضربه یک سیستم غیرعلی با پاسخ فرکانسی  $H(e^{j\omega}) = \sin(\omega) - \sin(2\omega)$  و با شرایط  $\text{Im}\{H(e^{j\omega})\} = \sin(\omega) - \sin(2\omega)$ ، پهنه DC مثبت و

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = 3$$

$$h[n] = -\frac{1}{2} \delta[n+1] + \frac{1}{2} \delta[n] \quad (1)$$

$$h[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1] - \delta[n] \quad (2)$$

$$h[n] = -\delta[n+2] + \delta[n+1] + \delta[n] \quad (3)$$

$$h[n] = \delta[n+2] - \delta[n+1] + \delta[n] \quad (4)$$

## تمثیله و تملیل سیستمها

۶ - (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه سیگنال زمان گستته  $x[n]$  به صورت  $X(f) = \cos^2(2\pi f)$  می باشد. مقدار  $A$  چقدر است؟

$$A = 2 \quad (2)$$

$$A = \frac{1}{2} \quad (1)$$

(۳) سری متقارب نمی شود و  $\infty \rightarrow A$  می گردد.

۷ - (آزاد ۸۱) اگر  $X(e^{j\omega})$  تبدیل  $x[n]$  باشد، تبدیل فوریه سیگنال گستته در زمان  $[1-n] + x[-1-n]$  کدام گزینه است؟

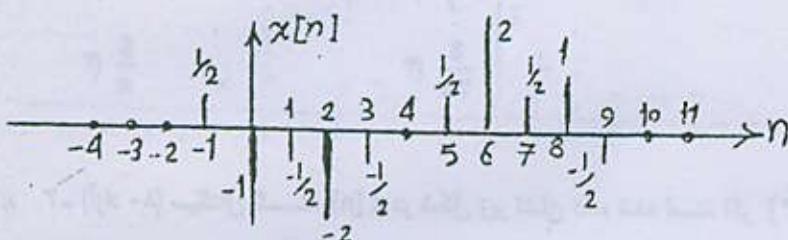
$$4\sin(\omega)X(e^{-j\omega}) \quad (4)$$

$$2\cos(\omega)X(e^{-j\omega}) \quad (3)$$

$$2\cos(\omega)X(e^{j\omega}) \quad (2)$$

$$\cos(\omega)X(e^{j\omega}) \quad (1)$$

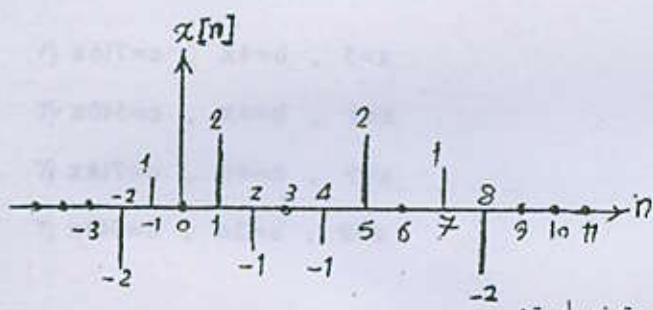
۸ - (سراسری ۸۱) اگر سیگنال  $x[n]$  به صورت زیر باشد، در این صورت فاز تبدیل فوریه این سیگنال کدام است؟



(۱) صفر

(۲)  $-\frac{\pi}{2}$ (۳)  $-4\omega$ (۴)  $-4\omega \pm \frac{\pi}{2}$ 

۹ - (سراسری ۸۲) فرض کنید  $X(j\Omega)$  مشخص کننده تبدیل فوریه سیگنال  $x[n]$  که در شکل نمایش داده شده است باشد، در این صورت مقدار (۰)  $X$  و فاز (۰)  $X$  به ترتیب برابر است با:

(۱)  $-2\Omega$ , ۰(۲)  $-3\Omega$ , ۰

(۳) ۰, ۶

(۴)  $-2\Omega$ , ۶

۱۰ - (آزاد ۷۹) تبدیل فوریه یک سیگنال زمان گستته  $x[n]$  به صورت زیر است:

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{4} & |f| \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1-|f|}{3} & \frac{1}{4} \leq |f| \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

مقادیر  $B = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x[n]$  و  $A = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]$  چقدر است؟

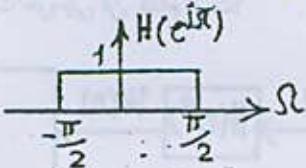
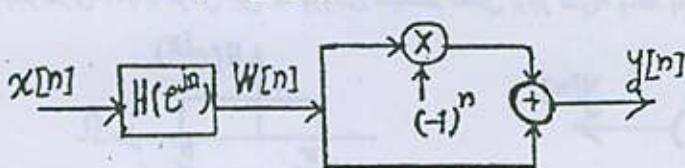
$$B = \frac{1}{4}, \quad A = 0 \quad (4)$$

$$B = 0, \quad A = \frac{1}{4} \quad (3)$$

$$B = \frac{1}{4}, \quad A = \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$B = \frac{1}{6}, \quad A = \frac{1}{4} \quad (1)$$

۱۱- (سراسری ۸۱) با فرض این که ورودی سیستم مقابله برابر ضربه واحد باشد در این صورت خروجی آن کدام است؟



$$[(-1)^n + 1] * h[n] \quad (۱)$$

$$[(-1)^n + 1] h[n] \quad (۲)$$

$$h[n] \quad (۳)$$

$$\delta[n] \quad (۴)$$

۱۲- (سراسری ۸۰) اگر بین سیگنال‌های زمان گسته  $x[n]$  و  $y[n]$  رابطه زیر برقرار باشد آن‌گاه چه رابطه‌ای بین تبدیل فوریه آن‌ها یعنی  $X(\omega)$  و  $Y(\omega)$  برقرار است؟

$$y[n] = \begin{cases} x[-n] & n \text{ زوج} \\ -x[-n] & n \text{ فرد} \end{cases}$$

$$Y(\omega) = X^*(\pi - \omega) \quad (۱)$$

$$Y(\omega) = X^*(\omega - \pi) \quad (۲)$$

$$Y(\omega) = X(\omega - \pi) \quad (۳)$$

$$Y(\omega) = X(\pi - \omega) \quad (۴)$$

۱۳- (سراسری ۸۳) در صورتی که رابطه بین تبدیل فوریه ورودی و خروجی یک سیستم زمان گسته به صورت

$$Y(\Omega) = \int_{\Omega - \frac{\pi}{4}}^{\Omega + \frac{\pi}{4}} X(\theta) d\theta \quad \text{باشد آن‌گاه رابطه بین ورودی و خروجی در حوزه زمان برابر است با:}$$

$$\left( \begin{array}{l} x[n] = \frac{\sin(Wn)}{\pi n} \\ 0 < W < \pi \end{array} \right) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \left( \begin{array}{ll} X(\Omega) = & \begin{cases} 1 & 0 \leq |\Omega| \leq W \\ 0 & W \leq |\Omega| \leq \pi \end{cases} \\ & \text{متاوب با تناوب } 2\pi \end{array} \right)$$

$$y[n] = x[n] \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}} \quad (۱)$$

$$y[n] = 2x[n] \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} \quad (۲)$$

$$y[n] = 2\pi x[n] \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{\frac{n\pi}{4}} \quad (۳)$$

$$y[n] = 2x[n] \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n\pi} \quad (۴)$$

## ۱۴ - فیلتر کردن سیگنال‌های گسته در زمان

در بخش‌های قبل به بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های گسته در زمان پرداختیم و سری و تبدیل فوریه گسته را معرفی کردیم. در این بخش به بررسی مختصر در مورد فیلترهای گسته در زمان می‌پردازیم و انواع مختلف این فیلترها را معرفی خواهیم کرد.

در سیگنال‌های گسته در زمان نیز مانند سیگنال‌های پیوسته در زمان اغلب تمایل داریم دامنه نسبی مؤلفه‌های فرکانسی (طیف) یک سیگنال گسته را تغییر دهیم و حتی برخی از آن‌ها را کاملاً حذف کنیم. این فرآیند فیلتر کردن نام دارد و سیستمی که در طیف یک سیگنال گسته تغییرات بوجود می‌آورد فیلتر نام دارد.

در مورد فیلترهای گسته در زمان نیز دو نوع فیلتر شکل دهنده فرکانس و فرکانس گزین داریم. فیلترهای شکل دهنده فرکانس برای شکل دادن طیف سیگنال بنا به هدف خاص به کار می‌روند. در حالی که فیلترهای فرکانس گزین برای عبور تقریباً بدون اعوجاج بعضی از فرکانس‌ها و تضعیف شدید و حذف بعضی دیگر از فرکانس‌ها به کار می‌روند در این درس تنها فیلترهای فرکانس گزین گسته ایده‌آل بررسی می‌گردند.

بطور کلی یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} ke^{-j\omega\omega_0} & \text{باند عبور} \\ 0 & \text{باند قطع} \end{cases}$$

در نتیجه یک فیلتر فرکانس گزین ایده‌آل در باند قطع اجازه عبور ورودی را نمی‌دهد در باند عبور دامنه ورودی را در  $|k|$  ضرب کرده و تأخیر  $\omega$  در آن ایجاد می‌کند (در باند عبور یک کانال ایده‌آل است).

با توجه به باند عبور و قطع انتخابی برای فیلترهای فرکانس گزین ایده‌آل می‌توان آن‌ها را به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱- فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل (LPF): پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱-۱۴-الف) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناسب با دوره تناوب  $2\pi$  است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{1,p}(e^{j\omega}) = \begin{cases} ke^{-j\omega\omega_0} & 0 \leq |\omega| \leq \omega_1, \\ 0 & \omega_1 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

و  $\omega_1$  را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

۲- فیلتر بالا گذر ایده‌آل (HPF): پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱-۱۴-ب) نشان داده شده است.

ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناسب با دوره تناوب  $2\pi$  است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{2,p}(e^{j\omega}) = \begin{cases} ke^{-j\omega\omega_0} & \omega_1 < |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| \leq \omega_1 \end{cases}$$

و  $\omega_1$  را فرکانس قطع فیلتر می‌نامند.

## تجزیه و تملیل سیستم‌ها



۳- فیلتر میان‌گذر ایده‌آل (BPF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱-ج) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} ke^{-j\omega\omega_0} & \omega_{bp_1} \leq |\omega| \leq \omega_{bp_2} \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_{bp_1}, \quad \omega_{bp_2} < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

$\omega_0$  را فرکانس قطع پایین و  $\omega_{bp_2}$  را فرکانس قطع بالای فیلتر می‌نامند.

۴- فیلتر میان نگذر ایده‌آل (BRF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱-د) نشان داده شده است. ملاحظه می‌کنید پاسخ فرکانسی این فیلتر متناوب با دوره تناوب  $2\pi$  است و روی یک دوره تناوب به صورت زیر تعریف می‌شود:

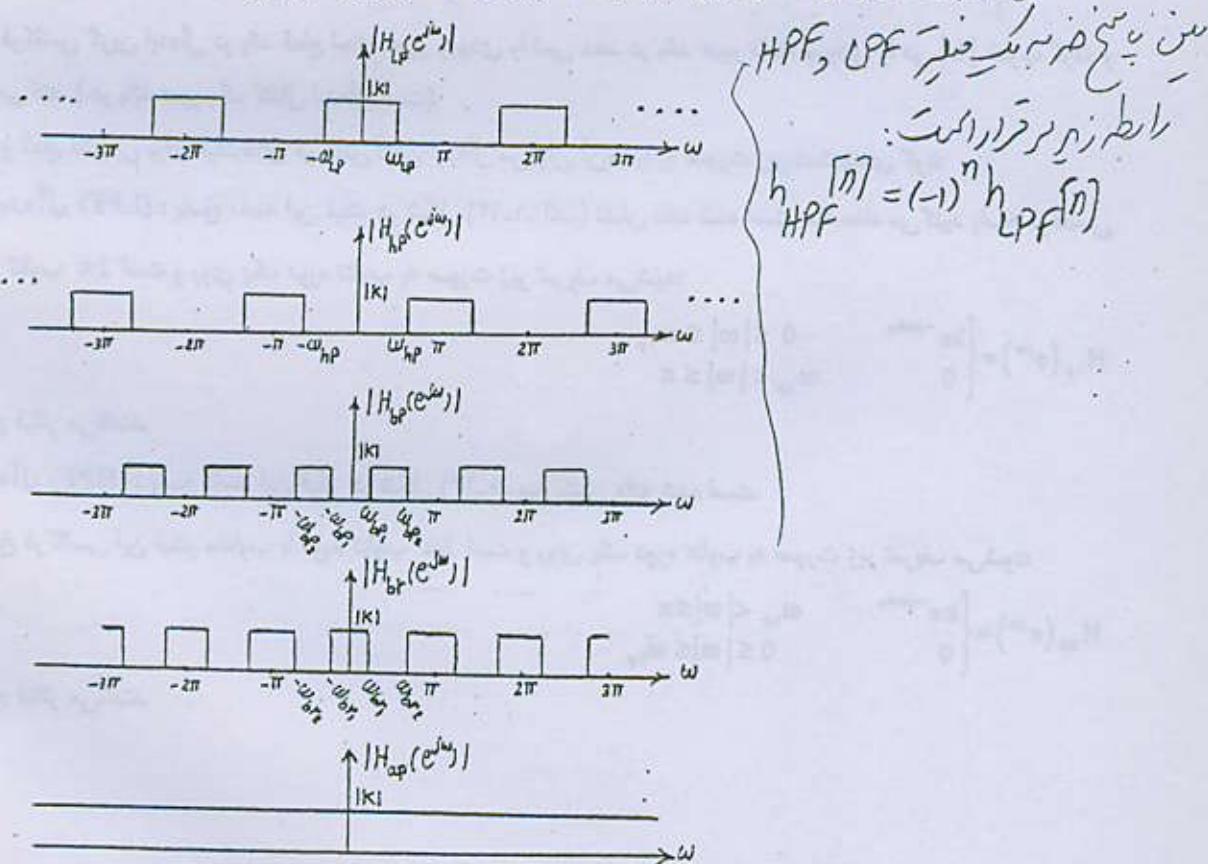
$$H_{br}(e^{j\omega}) = \begin{cases} ke^{-j\omega\omega_0} & 0 \leq |\omega| < \omega_{br_1}, \quad \omega_{br_1} < |\omega| \leq \pi \\ 0 & \omega_{br_1} \leq |\omega| \leq \omega_{br_2} \end{cases}$$

$\omega_0$  را فرکانس قطع پایین و  $\omega_{br_2}$  را فرکانس قطع بالای این فیلتر می‌نامند.

۵- فیلتر تمام گذر ایده‌آل (APF) : پاسخ دامنه این فیلتر در شکل (۱۴-۱-ه) نشان داده شده است. برای این فیلتر در تمام فرکانس‌ها داریم:

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = ke^{-j\omega\omega_0}$$

این فیلتر یک فیلتر فاز است و بدون تغییر در دامنه ورودی، فقط فاز آن را تغییر می‌دهد.



شکل ۱۴-۱-۱. پاسخ فرکانسی (الف) فیلتر پایین‌گذر ایده‌آل گسسته (ب) فیلتر بالا‌گذر ایده‌آل گسسته (ه) فیلتر

میان‌گذر ایده‌آل گسسته (د) فیلتر میان نگذر ایده‌آل گسسته (ه) فیلتر تمام گذر ایده‌آل

تکنیک همانطور که از شکل (۱-۱۴) ملاحظه می‌شود فیلترهای مختلف ایده‌آل گسته در واقع شیفت فرکانسی یکدیگر می‌باشند به عبارت دیگر با ایجاد یک شیفت فرکانس در پاسخ فرکانس یک نوع فیلتر، پاسخ فرکانسی فیلتر نوع دیگر بدست می‌آید.

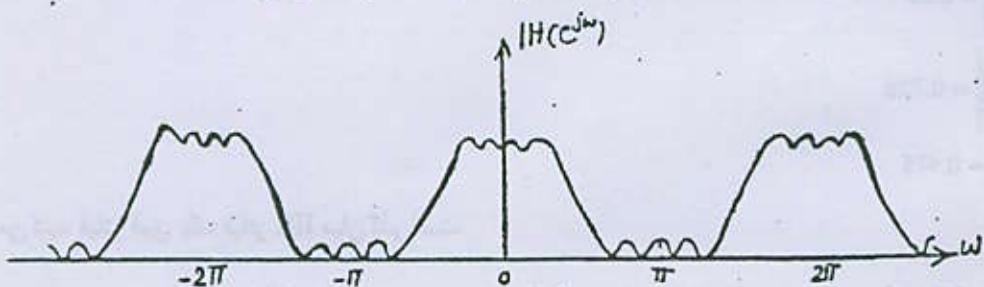
تکنیک با توجه به پاسخ فرکانسی فیلترهای بینیگذر و بالاگذر گسته در زمان ملاحظه می‌کنید که اگر پاسخ فرکانسی یک فیلتر بینیگذر با فرکانس قطع  $\omega_c$  به اندازه  $\pi$  شیفت پیدا کند آن‌گاه به یک فیلتر بالاگذر با فرکانس قطع  $\omega_c - \pi$  تبدیل می‌شود اما از خواص تبدیل فوریه گسته در زمان ملاحظه کردید که شیفت تبدیل فوریه به اندازه  $\pi$  معادل ضرب "(-1)" در سیکنال در حوزه زمان است. در نتیجه اگر پاسخ ضربه یک فیلتر بینیگذر با فرکانس قطع  $\omega_c$  در "(-1)" ضرب شود (یعنی نمونه‌های پاسخ ضربه یکی در میان قرینه شوند) آنگاه پاسخ ضربه جدید مربوط به یک فیلتر بالاگذر می‌باشد البته عکس این عمل (یعنی تبدیل HPF به LPF) نیز امکان‌پذیر است.

تکنیک همانند فیلترهای پیوسته در زمان با ترکیب سری دو فیلتر بینیگذر و بالاگذر می‌توان یک فیلتر میانگذر و با ترکیب موازی آن‌ها می‌توان یک فیلتر میانگذر بدست آورد.

تکنیک فیلترهای ایده‌آل گسته در زمان نیز مانند فیلترهای ایده‌آل پیوسته در زمان سیستم‌های LTI غیرعلی می‌باشند و در نتیجه ساخت آن‌ها از نظر فیزیکی امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای فیلتر بینیگذر ایده‌آل گسته داریم:

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} k e^{-j\omega n_0} & 0 \leq |\omega| \leq W \\ 0 & W < |\omega| \leq \pi \end{cases} \Rightarrow h[n] = \frac{kW}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{W(n-n_0)}{\pi}\right)$$

تکنیک با توجه به غیرعلی بودن فیلترهای ایده‌آل، فیلترهای واقعی (غیرایده‌آل) اهمیت زیادی پیدا می‌کنند در این فیلترها علاوه بر باند عبور و باند قطع، باند انتقال نیز بین آن‌ها وجود دارد همچنین پاسخ در باند قطع و عبور لزوماً هموار نبوده و ممکن است دارای تموج باشد. شکل (۲-۱۴) نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر بینیگذر غیر ایده‌آل گسته را نشان می‌دهد.



شکل ۲-۱۴ - نمونه‌ای از پاسخ فرکانسی یک فیلتر بینیگذر غیر ایده‌آل گسته در زمان

تکنیک دسته مهمی از فیلترهای گسته غیر ایده‌آل، فیلترهایی هستند که توسط معادله تفاضلی ورودی - خروجی خطی با خرابی ثابت مشخص شده‌اند این دسته از فیلترها با توجه به نوع سیستم به فیلترهای FIR یا IIR معروف می‌باشند در فیلترهای FIR خروجی در هر لحظه فقط به ورودی در همان لحظه و لحظات قبل بستگی دارد. در حالی که در فیلترهای IIR خروجی در هر لحظه علاوه بر ورودی، به لحظات قبل خروجی نیز بستگی دارد.

$$FIR: y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + \dots$$

$$IIR: y[n] = (a_0x[n] + a_1x[n-1] + \dots) + (b_0y[n-1] + \dots)$$

## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها

مثال: یک فیلتر گسته LTI با معادله تفاضلی  $y[n] - \frac{2}{13}y[n-1] + \frac{10}{9}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{13}x[n-1]$  را در نظر بگیرید. پاسخ فرکانسی

این فیلتر را بدست آورده و نوع فیلتر را تعیین کنید.

هل، از معادله تفاضلی داده شده تبدیل فوریه گرفته تا پاسخ فرکانسی فیلتر بدست آید:

$$Y(e^{j\omega}) \left( 1 - \frac{2}{13}e^{-j\omega} + \frac{10}{9}e^{-j2\omega} \right) = X(e^{j\omega}) \left( 1 - \frac{1}{13}e^{-j\omega} \right) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1 - \frac{1}{13}e^{-j\omega}}{1 - \frac{2}{13}e^{-j\omega} + \frac{10}{9}e^{-j2\omega}}$$

فیلتر فوق یک فیلتر IIR است. برای تعیین نوع آن پاسخ دامنه فیلتر را بدست می‌آوریم:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\left( 1 - \frac{1}{13}\cos(\omega) \right) + j \frac{1}{13}\sin(\omega)}{\left( 1 - \frac{2}{13}\cos(\omega) + \frac{10}{9}\cos(2\omega) \right) + j \left( \frac{2}{13}\sin(\omega) - \frac{10}{9}\sin(2\omega) \right)}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \sqrt{\left( 1 - \frac{1}{13}\cos(\omega) \right)^2 + \frac{1}{169}\sin^2(\omega)}$$

$$\left( 1 - \frac{2}{13}\cos(\omega) + \frac{10}{9}\cos(2\omega) \right)^2 + \left( \frac{2}{13}\sin(\omega) - \frac{10}{9}\sin(2\omega) \right)^2$$

اگر جند فرکانس مشخص را در فاصله  $\pi < \omega \leq 0$  در تابع فوق قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\omega = 0 \Rightarrow |H(e^{j0})| \approx 0.47$$

$$\omega = \frac{\pi}{4} \Rightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{4}})| = 0.706$$

$$\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = 5.28$$

$$\omega = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow |H(e^{j\frac{3\pi}{4}})| = 0.726$$

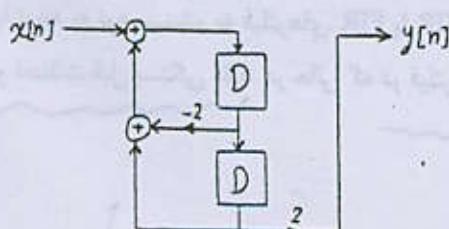
$$\omega = \pi \Rightarrow |H(e^{j\pi})| \approx 0.475$$

مالحظه می‌کنید فیلتر فوق یک فیلتر IIR میان‌گذر است.

مثال: شکل زیر فرم مستقیم II یک فیلتر را نشان می‌دهد. پاسخ فرکانسی این فیلتر را بدست آورید. اگر سیگنال ورودی این فیلتر یک

سیگنال متناسب با فرکانس پایه  $\frac{\pi}{4}$  باشد و فرض شود دامنه هارمونیک دوم این سیگنال  $\frac{1}{2}$  باشد، دامنه هارمونیک دوم سیگنال

خروجی را بدست آورید.





هل: اگر از روی فرم مستقیم داده شده مستقیماً یا پس از تبدیل به فرم مستقیم I، معادله تفاضلی فیلتر را بدست آوریم:

$$y[n] + 2y[n-1] - y[n-2] = 2x[n-2]$$

با تبدیل فوریه گرفتن از طریقین معادله داریم:

$$Y(e^{j\omega})(1+2e^{-j\omega}-e^{-j2\omega}) = 2e^{-j2\omega}X(e^{j\omega}) \Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{2e^{-j2\omega}}{1+2e^{-j\omega}-e^{-j2\omega}}$$

برای تعیین دامنه هارمونیک دوم خروجی داریم:

$$b_2 = a_2 \left| H(e^{j2\omega}) \right| = \frac{1}{2} \times \left| H\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2e^{-j\pi}}{1+2e^{-j\frac{\pi}{2}}-e^{-j\pi}} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{-2}{2+j2} \right| = \frac{1}{2} \times \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

بنابراین دامنه هارمونیک دوم در خروجی فیلتر  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  است.

تست نموده - (آزاد ۸۳) رابطه بین ورودی  $[n]x$  و خروجی  $[n]y$  یک سیستم زمان گستته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است:

$$y[n] = -0.8y[n-1] + 1.2x[n]$$

کدام از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صدق می‌کند؟

- ۱) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع IIR است.
- ۲) سیستم یک فیلتر بالاگذران از نوع FIR است.
- ۳) سیستم یک فیلتر پائین‌گذران از نوع FIR است.
- ۴) سیستم یک فیلتر پائین‌گذران از نوع IIR است.

هل:

با تبدیل فوریه گرفتن از طریقین معادله، پاسخ فرکانسی فیلتر را بدست می‌آوریم:

$$Y(e^{j\omega})(1+0.8e^{-j\omega}) = 1.2X(e^{j\omega}) \Rightarrow \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1.2}{1+0.8e^{-j\omega}}$$

برای تعیین نوع فیلتر از دو فرکانس  $\omega=0$ ،  $\omega=\pi$  استفاده می‌کنیم:

$$\omega=0 : H(e^{j0}) = \frac{1.2}{1.8}$$

$$\omega=\pi : H(e^{j\pi}) = \frac{1.2}{0.2}$$

بنابراین فیلتر بالاگذرنی باشد از طریقی IIR بودن فیلتر نیز مشخص است. در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

## ۱۵- دوگانی در تحلیل فوریه پیوسته و گسته زمانی

در بخش‌های قبل به معرفی و بررسی تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته و گسته در زمان پرداخته شد. این تحلیل‌ها که شامل سری و تبدیل فوریه می‌باشند شامل دو دسته فرمول در حوزه زمان و فرکانس می‌باشند. در برخی از این تحلیل‌ها نوعی تقارن یا دوگانی بین معادله حوزه زمان و معادله حوزه فرکانس وجود دارد که در بخش ۹ یکی از این خواص دوگانی بین سیگنال حوزه زمان پیوسته و گسته در زمان و تبدیل فوریه آن معرفی گردید. در جدول (۱-۱۵) خلاصه‌ای از معادلات سری و تبدیل فوریه پیوسته و گسته در زمان و چگونگی وجود یا عدم وجود دوگانی بین روابط مختلف آورده شده است.

گسته در زمان		پیوسته در زمان		
حوزه فرکانس	حوزه زمان	حوزه فرکانس	حوزه زمان	
$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{N}} x[n] e^{-jkn}$	$x[n] = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k e^{jkn}$	$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jkt} dt$	$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jkt}$	سری فوریه
گسته در فرکانس متناوب در فرکانس	گسته در زمان متناوب در زمان	گسته در فرکانس نماتناوب در فرکانس	پیوسته در زمان نماتناوب در زمان	
$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$	$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$	$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$	$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$	تبدیل فوریه
پیوسته در فرکانس نماتناوب در فرکانس	گسته در زمان نماتناوب در زمان	پیوسته در فرکانس نماتناوب در فرکانس	پیوسته در زمان نماتناوب در زمان	

جدول ۱۵- خلاصه معادلات سری و تبدیل فوریه پیوسته و گسته در زمان

با توجه به جدول (۱-۱۵) ملاحظه می‌کنید دوگانی بین معادلات فوق در سه دسته از معادلات برقرار است:

- (۱) دوگانی در تبدیل فوریه پیوسته در زمان بین رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس: همانطور که در بخش ۹ ملاحظه گردید بین سیگنال پیوسته در زمان نامتناوب و تبدیل فوریه آن که یک سیگنال پیوسته و نامتناوب در حوزه فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی عبارت است از:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه پیوسته}} \\ x(t) & \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه پیوسته}} X(\omega) \\ X(t) & \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه پیوسته}} 2\pi x(-\omega) \end{aligned}$$

- (۲) دوگانی در سری فوریه گسته در زمان بین رابطه حوزه زمان و حوزه فرکانس: بین سیگنال گسته در زمان متناوب و ضرایب سری فوریه آن که یک سیگنال گسته و متناوب در حوزه فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسته}} \\ x[n] & \xrightarrow{\text{ضرایب سری گسته}} a_k = y[k] \\ y[n] & \xrightarrow{\text{ضرایب سری گسته}} b_k = \frac{1}{N} x[-k] \end{aligned}$$

یادداشت

مثال: سیگنال متناوب  $x[n]$  با دوره تناوب  $N = 9$  را در نظر بگیرید:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & n \neq 0 \\ \frac{5}{9} & n = 0 \end{cases}$$

با استفاده از خاصیت دوگانی و ضرایب سری فوریه موج مریعی متناوب، ضرایب سری فوریه این سیگنال را بدست آوردید

هل: از جدول (۱-۱۲) و برای موج مریعی متناوب داریم:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N_1 \\ 0 & N_1 < |n| \leq \frac{N}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسته}} a_{k_1} = \begin{cases} \frac{\sin\left[2k\pi\left(N_1 + \frac{k}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{k\pi}{N}\right)} & k \neq 0, \pm N, \dots \\ \frac{2N_1 + 1}{N} & k = 0, \pm N, \dots \end{cases}$$

$x[n+N] = x[n]$

با فرض  $N = 9$  و  $N_1 = 2$  داریم:

$$x_1[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq 2 \\ 0 & 2 < |n| \leq 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسته}} a_{k_1} = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{5k\pi}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{k\pi}{9}\right)} & k \neq 0 \\ \frac{5}{9} & k = 0 \end{cases}$$

$x[n]$  متناوب با دوره تناوب ۹

با توجه به قضیه دوگانی داریم:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{5\pi n}{9}\right)}{9\sin\left(\frac{\pi n}{9}\right)} & n \neq 0 \\ \frac{5}{9} & n = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه گسته}} a_k = \begin{cases} \frac{1}{9} & |k| \leq 2 \\ 0 & 2 < |k| \leq 4 \end{cases}$$

$a_k$  متناوب با دوره تناوب ۹

(۳) دوگانی بین ضرایب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان و رابطه حوزه زمان تبدیل فوریه گستته در زمان: بین سیگنال گستته در زمان و نامتناوب و ضرایب سری فوریه یک سیگنال پیوسته در زمان که یک سیگنال گستته و نامتناوب در فرکانس است دوگانی وجود دارد. رابطه دوگانی به صورت زیر است:

$$x[n] \xrightarrow{\text{تبدیل فوریه گسته}} X(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) \xrightarrow{\text{ضرایب سری فوریه پیوسته}} a_k = x[-k]$$

مثال: از خاصیت دوگانگی و جدول (۱-۱۲) استفاده کرده و ضرایب سری فوریه سیگنال متناوب  $x(t) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jt}}$  را به ازاء  $|a| < 1$  بدست آورید.

از جدول (۱-۱۲) داریم:

$$x[n] = \alpha^n u[n] \xrightarrow[|\alpha| < 1]{\text{تبدیل فوریه گسته}} X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}$$

بنابراین با توجه به قضیه دوگانی داریم:

$$x(t) = \frac{1}{1-\alpha e^{-jt}} \xrightarrow[|\alpha| < 1]{\text{ضرایب سری فوریه پیوسته}} a_k = \alpha^{-k} u[-k]$$

## ۱۶- پردازش گسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان

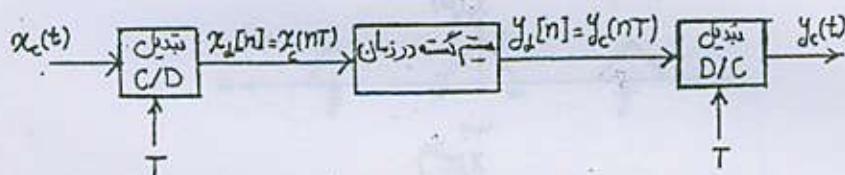
در بسیاری از کاربردها، پردازش سیگنال‌های پیوسته در زمان توسط یک سیستم گسته در زمان می‌شود. این سیستم گسته در زمان می‌تواند کامپیوتر، میکروپروسیسور، تراشه‌های پردازندۀ و ..... باشد. بدین منظور باید ابتدا سیگнал پیوسته در زمان را به سیگنال گسته در زمان تبدیل و پس از پردازش مجدداً به سیگنال پیوسته در زمان تغییر داد. در این بخش به اختصار به بررسی چگونگی پردازش گسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان می‌پردازیم.

بلوک دیاگرام پردازش گسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در شکل (۱۶-۱) نشان داده شده است. با توجه به شکل فوق ملاحظه می‌کنید این سیستم از سه جزء اساسی تشکیل شده است:

(۱) مبدل پیوسته در زمان به گسته در زمان (C/D)

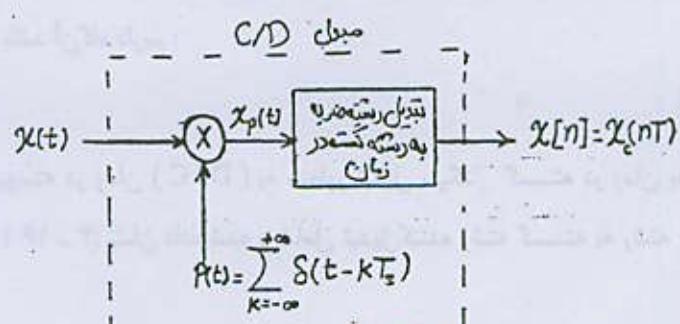
(۲) سیستم گسته در زمان پردازندۀ

(۳) مبدل گسته در زمان به پیوسته در زمان (D/C)



شکل ۱۶-۱ - بلوک دیاگرام پردازش گسته در زمان سیگنال‌های پیوسته در زمان

مبدل پیوسته در زمان به گسته در زمان (C/D) یه منظور تبدیل سیگنال پیوسته در زمان به گسته در زمان استفاده می‌شود. این واحد با جزئیات بیشتر در شکل (۱۶-۲) نشان داده شده و شامل نمونه بردار و تبدیل کننده رشته خربه به رشته گسته در زمان می‌باشد.



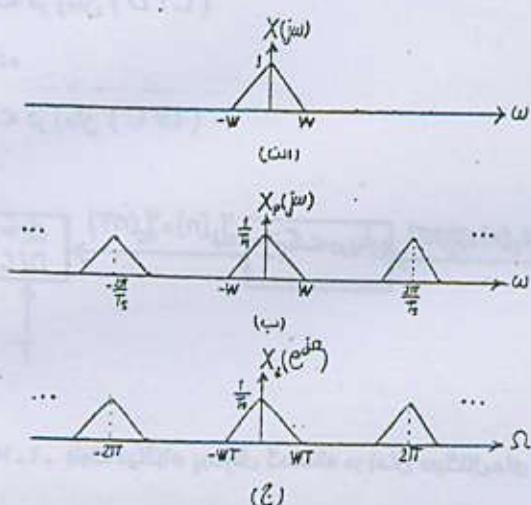
شکل ۱۶-۲ - مبدل C/D

## تمثیله و تبدیل سیستم‌ها

اگر فرکانس را در حالت پیوسته در زمان با  $\omega$  و در حالت گستته در زمان با  $\Omega$  نشان دهیم آن‌گاه روابط زیر را می‌توان به سادگی بین تبدیل فوریه سیگنال‌های نشان داده شده در شکل (۱۶ - ۲) بدست آورد:

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{j\Omega}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(\frac{j(\Omega - 2k\pi)}{T_s}\right)$$

با توجه به رابطه فوق ملاحظه می‌کنید تبدیل فوریه گستته در زمان  $[n]x$  مقایسه‌بندی شده (فسرده یا گسترده) تبدیل فوریه سیگنال  $(t)x_p$  است. تبدیل فوریه  $(t)x_p$  نیز طبق قضیه نمونه‌برداری با تبدیل فوریه  $(t)x$  ارتباط دارد. در شکل (۱۶ - ۳) این تبدیلات با فرض باند محدود بودن سیگنال ورودی نشان داده شده‌اند.

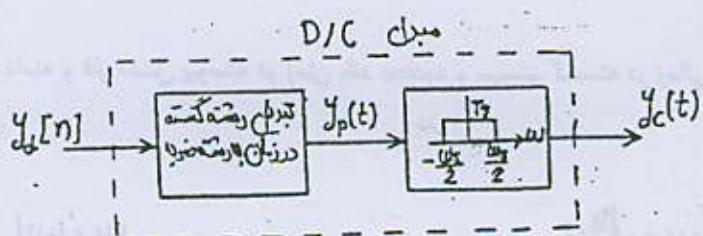


شکل ۱۶ - ۳ - طیف هارپی (الف)  $X_d(j\omega)$  (ب)  $X_p(j\omega)$  (ج)  $X_c(j\omega)$

وظیفه سیستم گستته در زمان شکل (۱۶ - ۱) پردازش سیگنال گستته  $[n]x$  و تبدیل آن به  $[n]y$  است. اگر این سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $H_d(e^{j\Omega})$  باشد آن‌گاه داریم:

$$Y_d(e^{j\Omega}) = H_d(e^{j\Omega})X_d(e^{j\Omega})$$

مبدل گستته در زمان به پیوسته در زمان (D/C) به منظور تبدیل سیگنال گستته در زمان به پیوسته در زمان استفاده می‌شود این واحد با جزئیات بیشتر در شکل (۱۶ - ۴) نشان داده شده و شامل تبدیل کننده رشته گستته به رشته ضربه و فیلتر بائین‌گذار بازیابی سیگنال پیوسته در زمان می‌باشد.



شکل ۱۶-۴-مبدل D/A

با توجه به مباحث مطرح شده در این بخش می‌توان تیجه گرفت اگر سیستم گسته در زمان یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $H_d(e^{j\omega})$  باشد آن‌گاه سیستم پیوسته در زمان کل با ورودی  $x(t)$  و خروجی  $y(t)$  نیز یک سیستم LTI با پاسخ فرکانسی  $H_c(j\omega)$  است و داریم: ( $\omega$  فرکانس نمونه‌برداری است)

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d\left(e^{j\omega T_s}\right) & |\omega| < \frac{\omega_s}{2} \\ 0 & |\omega| > \frac{\omega_s}{2} \end{cases}$$

بنابراین برای تعیین پاسخ فرکانسی سیستم پیوسته در زمان از روی پاسخ فرکانسی سیستم گسته در زمان باید در پاسخ فرکانسی سیستم گسته در زمان  $\Omega$  را به  $\omega T_s$  تبدیل کرده (فسرده یا گسترده کردن) و سپس در محدوده  $|\omega| < \frac{\omega_s}{2}$  (یا  $|\omega| < \Omega$ ) از یک پریود آن استفاده کرد.

**مثال:** می‌دانیم پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر پیوسته در زمان  $y(t) = j\omega H_c(j\omega)$  است. پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر گسته در زمان ( $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$ ) را تعیین کنید فرض کنید سیگنال ورودی باند محدود با حداقل فرکانس  $W$  است.

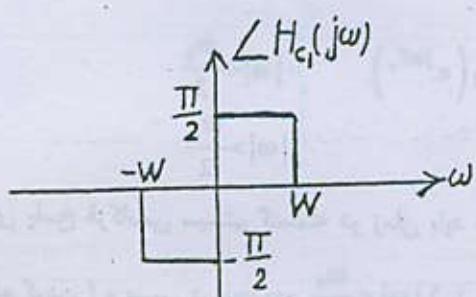
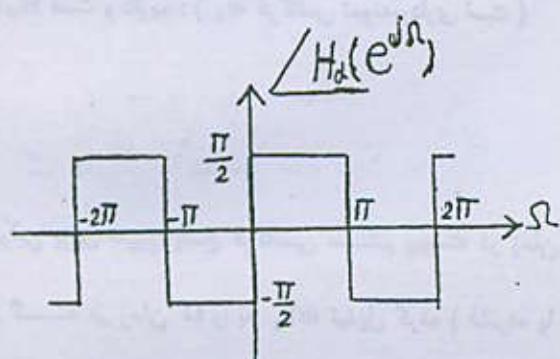
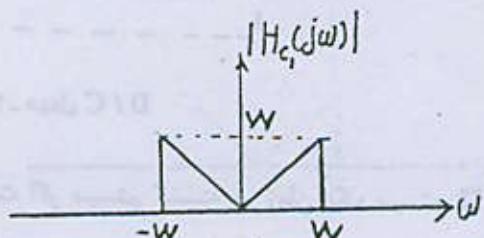
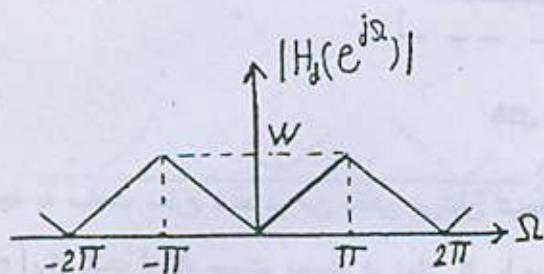
**حل:** ابتدا پاسخ فرکانسی مشتق‌گیر پیوسته در زمان را به باند فرکانسی سیگنال ورودی محدود می‌کنیم:

$$H_{c_1}(j\omega) = \begin{cases} j\omega & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

اگر فرکانس نمونه‌برداری را  $\omega = 2W$  انتخاب کنیم به دست می‌آوریم:

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = j\left(\frac{\Omega}{T_s}\right) \quad |\Omega| < \pi \quad \text{و} \quad H\left(e^{j\Omega}\right) \quad \text{متناوب با دوره متناوب } 2\pi$$

در شکل‌های زیر پاسخ دامنه و فاز مشتق بیوسته در زمان باند محدود و سیستم گسته در زمانی که برای تحقق مشتق‌گیر فوق استفاده می‌شود، نشان داده شده‌اند:



## خودآزمانی هشتم

- ۱ - (سراسری ۸۳) رابطه بین ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  برای یک سیستم LTI زمان گستته با معادله تفاضلی  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-2] + \frac{1}{16}y[n-4] = x[n] + x[n-1]$  داده شده است. خروجی سیستم در حالت دائمی به ورودی

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) + 3\cos(\pi n)$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] \quad (1) \quad \frac{9}{8}\cos(\pi n)$$

$$\frac{16\sqrt{2}}{25}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{9}{8}\cos(\pi n) \quad (2) \quad \frac{32}{23}\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\right]$$

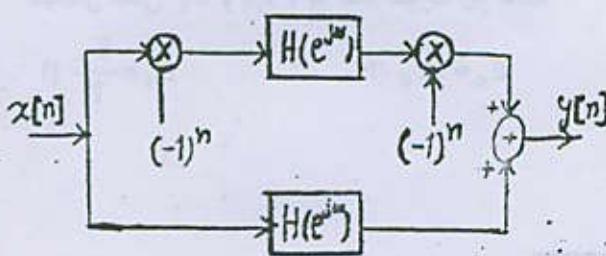
- ۲ - یک سیستم گستته در زمان با معادله تفاضلی  $y[n] + 2y[n-1] - y[n-2] = 2x[n] - 2$  را در نظر بگیرید. اگر به این سیستم یک ورودی متناوب با دوره تناوب  $N = 8$  اعمال کنیم، تسبیت دامنه هارمونیک دوم خروجی به دامنه هارمونیک دوم ورودی چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2) \quad \sqrt{2} \quad (3) \quad \text{هیچکدام}$$

- ۳ - (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۳) رابطه بین ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  یک سیستم زمان گستته LTI توسط معادله زیر توصیف شده است.
- $$y[n] = -0.75y[n-1] + 1.5x[n]$$

- (۱) سیستم یک فیلتر بالا گذران از نوع FIR است.  
(۲) سیستم یک فیلتر پائین گذران از نوع IIR است.  
(۳) سیستم یک فیلتر پائین گذران از نوع FIR است.

- ۴ - (آزاد ۸۰) یک فیلتر پائین گذرنده‌آل گستته در زمان با پاسخ فرکانسی  $H(e^{j\omega})$  دارای فرکانس قطع  $\frac{\pi}{4}$  و پیله ۱ در باند عبور می‌باشد سیستم مقابله چه نوع فیلتری می‌باشد؟



- ۵ - (سراسری ۷۹) دو سیستم زمان گستته LTI توسط معادلات تفاضلی زیر توصیف شده‌اند:

$$\text{سیستم ۱: } y_1[n] = 0.9y_1[n-1] + 0.1x_1[n]$$

$$\text{سیستم ۲: } y_2[n] = -0.9y_2[n-1] + 0.1x_2[n]$$

کدام گزینه در مورد این دو سیستم صحیح است؟

- (۱) هر دو سیستم فیلترهای پائین گذرنده‌اند.  
(۲) سیستم ۱ فیلتر بالا گذرنده و سیستم ۲ فیلتر پائین گذرنده‌اند.  
(۳) سیستم ۱ فیلتر پائین گذرنده و سیستم ۲ فیلتر بالا گذرنده‌اند.

## تمثیل سیستمها



۶ - (سراسری ۸۰)  $x[n]$  را یک سیگنال متناوب با بروید اصلی  $N$  و ضرایب سری فوریه  $a[k]$  در نظر می‌گیریم.  $a[n]$  نیز سیگنالی متناوب است. ضرایب سری فوریه آن کدام است؟

$$\frac{1}{N}x[-k] \quad (۴)$$

$$\frac{1}{N}x[k] \quad (۳)$$

$$x[-k] \quad (۲)$$

$$x[k] \quad (۱)$$

۷ - تبدیل فوریه سیگنال  $\frac{2}{(2-t^2)+j3t}x(t)$  کدام است؟

$$2(e^{j\omega}-e^{-2\omega})u(-\omega) \quad (۲)$$

$$2(e^{-\omega}-e^{-2\omega})u(\omega) \quad (۱)$$

$$4\pi(e^{\omega}-e^{-2\omega})u(-\omega) \quad (۴)$$

$$4\pi(e^{-\omega}-e^{-2\omega})u(\omega) \quad (۳)$$

۸ - اگر ضرایب سری فوریه سیگنال گستته در زمان و متناوب  $x[n]$  با دوره تناوب اصلی  $N$  را  $a_k = y[k]$  بنامیم، ضرایب سری فوریه سیگنال گستته و متناوب  $y^*[-n+1]$  کدام است؟

$$\frac{1}{N}e^{-j\frac{2k\pi}{N}}x^*[-k] \quad (۲)$$

$$\frac{1}{N}e^{j\frac{2k\pi}{N}}x^*[k] \quad (۱)$$

$$e^{j\frac{2k\pi}{N}}x^*[k] \quad (۴)$$

$$e^{-j\frac{2k\pi}{N}}x^*[-k] \quad (۳)$$

۹ - ضرایب سری فوریه سیگنال بیوسته در زمان و متناوب  $x(t) = \frac{1}{(2+e^{-jt})^2}$  کدام است؟

$$a_k = (1+k)\left(\frac{1}{2}\right)^k u[-k] \quad (۲)$$

$$a_k = k\left(\frac{-1}{2}\right)^k u[k] \quad (۱)$$

$$a_k = (1+k)\left(\frac{1}{2}\right)^k u[k] \quad (۴)$$

$$a_k = (1-k)\left(-\frac{1}{2}\right)^{2-k} u[-k] \quad (۳)$$

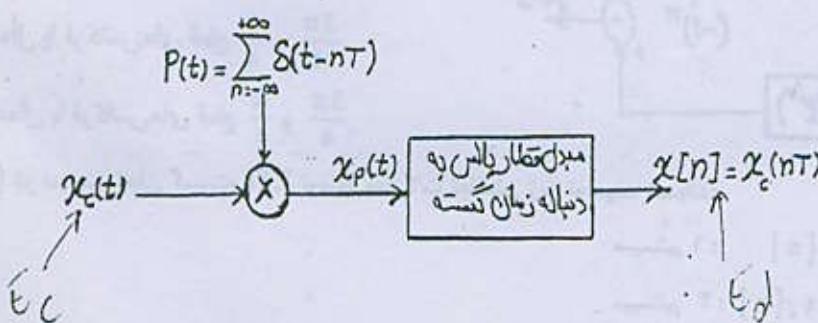
۱۰ - (سراسری ۷۹) سیگنال  $x(t)$  که از نظر پهنه‌ای باند محدود است با نرخ بیش از نرخ نایکوئیست نمونه برداری می‌شود. نمونه‌ها که به فاصله  $T$  ثانیه از یکدیگر فاصله دارند به یک دنباله  $x[n]$  مطابق شکل زیر تبدیل می‌شوند. رابطه بین انرژی دنباله  $E_d$  و انرژی سیگنال اصلی  $E_c$  و بازه  $T$  به کدام صورت زیر است:

$$E_c = \frac{E_d}{T^2} \quad (۴)$$

$$E_c = T^2 E_d \quad (۳)$$

$$E_c = TE_d \quad (۲)$$

$$E_c = \frac{E_d}{T} \quad (۱)$$



پادداشت



## ۱۲ - تبدیل لاپلاس

در این بخش ابتدا به معرفی تبدیل لاپلاس و مفاهیم اولیه از جمله نواحی همگرایی، صفر و قطب و... می‌پردازیم، سپس خواص تبدیل لاپلاس بررسی گردیده و کاربرد آن‌ها در تعیین تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پیچیده‌تر و تحلیل سیستم‌های LTI ارائه می‌گرددند در نهایت در بخش آخر تحلیل و توصیف کامل سیستم‌های LTI توسط تبدیل لاپلاس، جبر تابع سیستم و تماش سیستم‌ها بررسی می‌گرددند.

### ۱۷ - معرفی تبدیل لاپلاس و مفاهیم اولیه

در بخش‌های قبل ملاحظه کردید سیگنال  $x(t)$  یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI پیوسته در زمان است. اگر  $s$  یک عدد مختلط در نظر گرفته شود ( $s = \sigma + j\omega$ ) آنکه به تبدیل لاپلاس می‌رسیم. به طور کلی تبدیل لاپلاس دو طرفه یک سیگنال پیوسته در زمان مانند  $x(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

در رابطه فوق  $s$  یک عدد مختلط است و به صورت  $s = \sigma + j\omega$  نشان داده می‌شود

**لکن**: لفظ دو طرفه برای تبدیل لاپلاس به دلیل استفاده از حدود  $-\infty$  تا  $+\infty$  برای انتگرال است. در تبدیل لاپلاس یک طرفه حدود انتگرال از  $-0$  (یا  $0^+$ ) تا  $+\infty$  انتخاب می‌شود و داریم:

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

در این درس به دلیل آن که سیستم‌ها لزوماً علی نیستند تبدیل لاپلاس دو طرفه مفیدتر می‌باشد لذا هرگاه لفظ تبدیل لاپلاس استفاده گردید منظور تبدیل لاپلاس دو طرفه است و در هنگام استفاده از تبدیل لاپلاس یک طرفه، لفظ یک طرفه آورده می‌شود

**لکن**: ارتباط تبدیل لاپلاس با تبدیل فوریه عبارت است از:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-\sigma t} \cdot e^{-j\omega t} dt = F\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

بنابراین تبدیل لاپلاس  $(s)$  در واقع تبدیل فوریه  $e^{-\sigma t}x(t)e^{-j\omega t}$  است و در نتیجه اگر  $e^{-\sigma t}x(t)e^{-j\omega t}$  تبدیل فوریه داشته باشد، آنگاه  $(s)$  تبدیل لاپلاس دارد با توجه به آن که شرط اصلی برای همگرایی تبدیل فوریه مطلقاً انتگرال بذیر بودن  $(t)x(t)$  است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت شرط کافی برای وجود تبدیل لاپلاس مطلقاً انتگرال بذیر بودن  $e^{-\sigma t}x(t)$  است. به عبارت دیگر باید داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|e^{-\sigma t} dt < \infty$$

وجود عبارت  $e^{-\sigma t}$  باعث می‌شود یک درجه آزادی تحت عنوان  $\sigma$  جهت نزولی کردن عبارت زیر انتگرال و مطلقاً انتگرال بذیر کردن آن داشته باشیم. به عبارت دیگر ممکن است  $(t)x(t)$  مطلقاً انتگرال بذیر نباشد اما بتوان محدوده  $\sigma$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که  $e^{-\sigma t}x(t)$  مطلقاً انتگرال بذیر گردد. در نتیجه ممکن است سیگنالی تبدیل فوریه نداشته باشد اما بتوان محدوده‌ای از  $\sigma$  برای آن بدست آورد که در آن محدوده دارای تبدیل لاپلاس گردد. در نتیجه تعداد سیگنال‌هایی که تبدیل لاپلاس دارند بیشتر از تعداد سیگنال‌هایی است که تبدیل فوریه دارند. بحث فوق در مورد وجود یا عدم وجود تبدیل لاپلاس به ازای برخی از  $\sigma$ ‌ها به تعریف ناحیه همگرایی (ROC) منجر می‌شود

تعریف ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل لاپلاس: محدوده‌ای از صفحه مختلط که به ازاء آن تبدیل لاپلاس برای یک سیگنال بیوسته

در زمان وجود دارد را ناحیه همگرائی (ROC) تبدیل لاپلاس آن سیگنال می‌نامند. در ادامه خواص ROC بیشتر بررسی خواهند شد.

با توجه به تعریف ناحیه همگرائی (ROC) و این واقعیت که هنگام تبدیل فوریه گرفتن از یک سیگنال فقط محور  $\sigma$  برای گرفتن

تبدیل انتخاب می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:

«اگر سیگنالی تبدیل فوریه داشته باشد آنگاه لزوماً تبدیل لاپلاس نیز دارد (زیرا حداقل  $\sigma = 0$  جزء ROC آن است). اما اگر سیگنالی

تبدیل لاپلاس داشته باشد تنها در صورتی تبدیل فوریه دارد که ROC تبدیل لاپلاس آن شامل محور  $\sigma$  باشد.»

تعریف صفر و قطب و نمودار صفر و قطب: تبدیل لاپلاس یک سیگنال معمولاً یک تابع گویا از  $s$  است و آن را می‌توان به صورت

زیر نوشت:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

در رابطه فوق  $N(s)$  و  $D(s)$  به ترتیب چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج هستند. با به تعریف ریشه‌های چند جمله‌ای صورت تبدیل

لاپلاس را صفرهای  $(s)$   $X(s)$  می‌نامند و به ازاء این ریشه‌ها  $X(s) = 0$  می‌گردد. ریشه‌های چند جمله‌ای مخرج تبدیل لاپلاس را

قطبهای  $(s)$   $X(s)$  می‌نامند و به ازاء این ریشه‌ها  $X(s) = \infty$  می‌گردد. به عبارت دیگر داریم:

$X(s) = 0 \Rightarrow N(s) = 0 \Rightarrow s = z_1, z_2, \dots, z_M : \text{ صفرهای } X(s)$

$X(s) = \infty \Rightarrow D(s) = 0 \Rightarrow s = p_1, p_2, \dots, p_N : \text{ قطب‌های } X(s)$

صفرا و قطب‌های تبدیل لاپلاس یک سیگنال در حالت کلی اعداد مختلط می‌باشند و می‌توان آن‌ها را در صفحه مختلط نمایش داد

صفرا با علامت  $\circ$  و قطب‌ها با علامت  $\times$  در صفحه مختلط مشخص می‌گردند. نمایش صفرها و قطب‌ها در صفحه مختلط را نمودار صفر

و قطب تبدیل لاپلاس می‌نامند.

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t) = e^{-at} u(t)$  را بدست آورید.

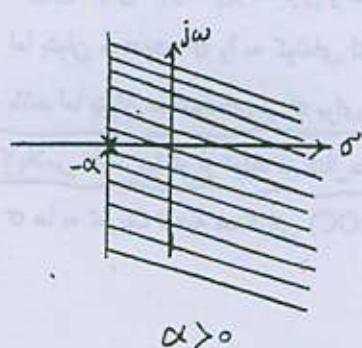
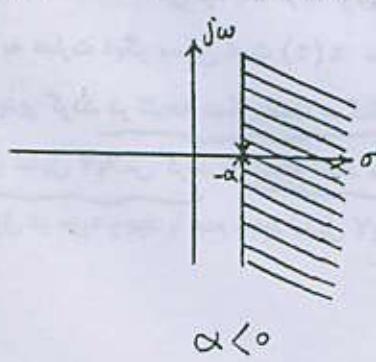
$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_0^{+\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right]_0^{+\infty}$$

هل :

حاصل انتگرال فوق ممکن است به ازاء  $t = +\infty$  واگرا شود. برای جلوگیری از این امر باید داشته باشیم:

$$\alpha + \operatorname{Re}\{s\} > 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$$

شرط بدست آمده در واقع ROC تبدیل لاپلاس را مشخص می‌کند و در شکل‌های زیر به ازاء  $\alpha < 0$  و  $\alpha > 0$  رسم شده‌اند:



با فرض  $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  خواهیم داشت:

$$X(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

دقت کنید به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  محور  $\sigma$  در ROC قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال  $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$  به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  تبدیل فوریه دارد همچنین توجه کنید که تبدیل لاپلاس فوق یک قطب در  $s = -\alpha$  دارد

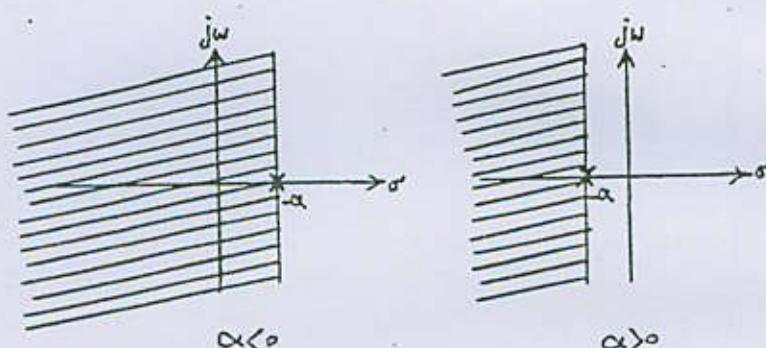
مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(-t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$  را بدست آورید

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 -e^{-\alpha t} \cdot e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-(\alpha+s)t}}{(\alpha+s)} \right|_{-\infty}^0$$

حاصل انتگرال فوق ممکن است به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  و اگرآ نشود برای جلوگیری از این امر باید داشته باشیم:

$$\alpha + \operatorname{Re}\{s\} < 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$$

شرط بدست آمده در واقع ROC تبدیل لاپلاس را مشخص می‌کند که در شکل‌های زیر به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  و  $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  رسم شده‌اند:



با فرض  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  خواهیم داشت:

$$X(s) = \frac{1}{s + \alpha}$$

دقت کنید که به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  محور  $\sigma$  در ROC قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال  $x(t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$  به ازاء  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  تبدیل فوریه

دارد همچنین توجه کنید تبدیل لاپلاس فوق یک قطب در  $s = -\alpha$  دارد

لذکه: دقت کنید تبدیل لاپلاس هر دو سیگنال  $x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$  و  $x(-t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$  یکسان و برابر  $\frac{1}{s + \alpha}$  است. تنها وجه تمایز تبدیل لاپلاس این

دو سیگنال نواحی همگرانی آن‌هاست که برای یکی  $\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$  و برای دیگری  $\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$  است. لذا ناجیه همگرانی تبدیل لاپلاس جهت محاسبه عکس تبدیل لاپلاس هر سیگنال لازم است. به عبارت دیگر در این مورد خاص داریم:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s + \alpha} \right\} = \begin{cases} e^{-\alpha t} u(t) & \operatorname{Re}\{s\} > -\alpha \\ -e^{-\alpha t} u(-t) & \operatorname{Re}\{s\} < -\alpha \end{cases}$$

تذکرہ: در تبدیل لاپلاس یک طرفه موضوعی تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود انتگرال در تبدیل لاپلاس یکطرفه است که از صفرتا  $\infty$  است. لذا در هنگام عکس تبدیل لاپلاس گرفتن هیچگونه ابهامی نداریم و سیگنال واقع در  $t > 0$  را انتخاب می‌کیم.

تذکرہ: با قرار دادن  $0 = \alpha$  در روابط بدست آمده می‌توان تبدیل لاپلاس  $(t)u$  و  $(-t)u$  را بدست آورد:

$$L\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 0$$

$$L\{-u(-t)\} = \frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

تذکرہ: برخی از سیگنال‌ها اهمیت زیادی در تعیین تبدیل لاپلاس یا عکس تبدیل لاپلاس سیگنال‌ها دارند. لذا دانستن تبدیل لاپلاس آن‌ها مفید می‌باشد. در جدول (۱۷ - ۱) برخی از این سیگنال‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود

ROC	تبدیل لاپلاس	سینکال
تمام صفحه	$X(s) = 1$	$x(t) = \delta(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > 0$	$X(s) = \frac{1}{s}$	$x(t) = u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} < 0$	$X(s) = \frac{1}{s}$	$x(t) = -u(-t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > 0$	$X(s) = \frac{1}{s^n}$	$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} < 0$	$X(s) = \frac{1}{s^n}$	$x(t) = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(-t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$	$X(s) = \frac{1}{s + \alpha}$	$x(t) = e^{-\alpha t} u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$	$X(s) = \frac{1}{s + \alpha}$	$x(t) = -e^{-\alpha t} u(-t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$	$X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$x(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} < -\alpha$	$X(s) = \frac{1}{(s + \alpha)^n}$	$x(t) = -\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t} u(-t)$
تمام صفحه	$X(s) = e^{-sT}$	$x(t) = \delta(t-T)$
$\operatorname{Re}\{s\} > 0$	$X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$x(t) = [\cos(\omega_0 t)] u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > 0$	$X(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$x(t) = [\sin(\omega_0 t)] u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$	$X(s) = \frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$x(t) = [e^{-\alpha t} \cos(\omega_0 t)] u(t)$
$\operatorname{Re}\{s\} > -\alpha$	$X(s) = \frac{\omega_0}{(s + \alpha)^2 + \omega_0^2}$	$x(t) = [e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t)] u(t)$
تمام صفحه	$X(s) = s^n$	$x(t) = \frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$
$\operatorname{Re}\{s\} > 0$	$X(s) = \frac{1}{s^n}$	$x(t) = u_{-n}(t) = \underbrace{u(t) * \dots * u(t)}_{n \text{ بار}}$

## تمثیل و تحلیل سیستمها

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t)$  را بدست آورید.

هل: از جدول (۱۷-۱) استفاده کرده و تبدیل لاپلاس هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آوریم:

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1 \quad -\infty < \operatorname{Re}\{s\} < +\infty$$

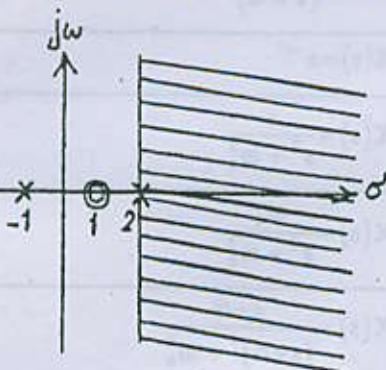
$$-\frac{4}{3}e^{-t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{4}{3} \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1$$

$$\frac{1}{3}e^{2t}u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{3} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$$

در صورتی که نواحی همگرایی جملات فوق با یکدیگر اشتراک داشته باشند، آنگاه طبق خاصیت خطی تبدیل لاپلاس، می‌توان تبدیل لاپلاس آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد. بنابراین داریم:

$$X(s) = 1 + \frac{-\frac{4}{3}}{s+1} + \frac{\frac{1}{3}}{s-2} = \frac{(s+1)(s-2) - \frac{4}{3}(s-2) + \frac{1}{3}(s+1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{s^2 - 2s + 1}{(s+1)(s-2)} = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 2$$

دقیق نباید ناحیه همگرایی اشتراک سه ناحیه همگرایی می‌باشد و در شکل زیر نشان داده شده است. همچنین صفرها و قطب‌های تبدیل نیز نشان داده شده‌اند. همچنین ملاحظه می‌کنید تبدیل فوریه است زیرا ROC تبدیل لاپلاس فاقد محور  $j\omega$  است.



مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t) = e^t u(t) + u(-t)$  را بدست آورید.

هل: از جدول (۱۷-۱) استفاده کرده و تبدیل لاپلاس هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آوریم:

$$e^t u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s-1} \quad \operatorname{Re}\{s\} > 1$$

$$u(-t) \xrightarrow{\mathcal{L}} -\frac{1}{s} \quad \operatorname{Re}\{s\} < 0$$

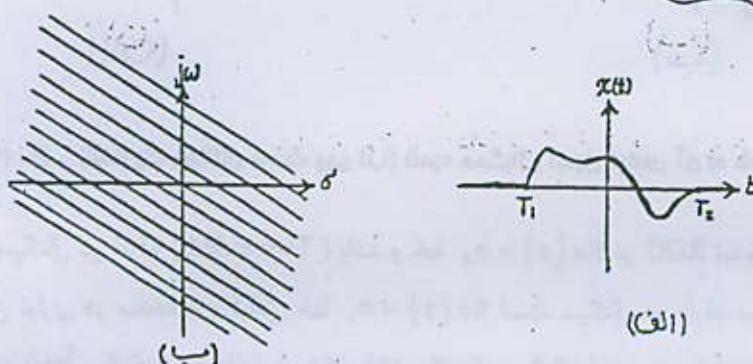
چون دو نواحی همگرایی هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند، بنابراین  $x(t) = e^t u(t) + u(-t)$  تبدیل لاپلاس ندارد. بدین معنی است این سیگنال فاقد تبدیل فوریه می‌باشد.

خواص ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل لاپلاس: در بخش قبل دیدیم برای مشخص کردن کامل تبدیل لاپلاس، هم عبارت جبری ( $s$ ) و هم ناحیه همگرایی آن لازم است. در این بخش برخی خواص ROC را بررسی کرده و خواهیم دید ROC سیگنال‌ها تا حدودی به شکل آن‌ها در حوزه زمان بستگی دارد.

(۱) ROC تبدیل لاپلاس در صفحه  $s$  از نواحی مجاز با محور  $\sigma$  تشکیل می‌شود.

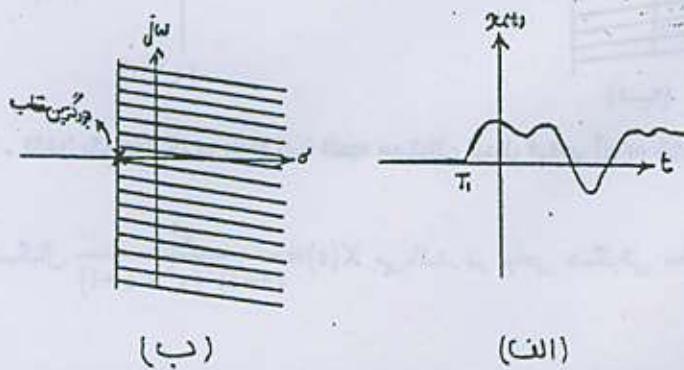
(۲) ROC تبدیل لاپلاس‌های گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شوند.

(۳) اگر  $x(t)$  یک سیگنال با عرض محدود (Finite Duration) و مطلقاً انتگرال‌پذیر باشد آنگاه ROC تبدیل لاپلاس آن کل صفحه  $s$  می‌باشد سیگنال با عرض محدود سیگنالی است که به ازاء  $T_1 < t < T_2$  برای صفر می‌باشد (مثال سیگنال  $\prod\left(\frac{t}{2T}\right)$ ) در شکل (۱۷ - ۱) یک سیگنال فرضی با عرض محدود و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند بديهي است با توجه به خاصيت (۲)، تبدیل لاپلاس سیگنال با عرض محدود فاقد قطب است.



شکل ۱۷ - ۱ - یک سیگنال با عرض محدود (ب) نامه همگرایی تبدیل لاپلاس آن که کل صفحه  $s$  است.

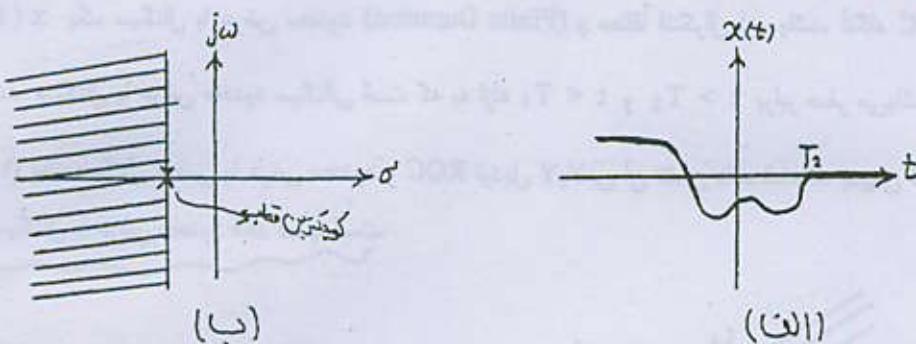
(۴) اگر  $x(t)$  یک سیگنال سمت راستی (Right sided) باشد و خط  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  در ROC تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد آنگاه تمام مقادیر  $s$  با  $\sigma > \sigma_0$  در  $\text{Re}\{s\} > \sigma_0$  تبدیل لاپلاس آن قرار دارند سیگنال سمت راستی سیگنالی است که به ازاء  $T_1 < t$  برای صفر باشد (مثال سیگنال (۱) (۲)). در شکل (۱۷ - ۲) یک سیگنال فرضی سمت راستی و ROC تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند بديهي است با توجه به خاصيت (۲)، ROC تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن بزرگترین است) تا  $t = \infty$  می‌باشد.



شکل ۱۷ - ۲ - (الف) یک سیگنال سمت راست (ب) نامه همگرایی تبدیل لاپلاس آن به شکل  $\sigma > \sigma_0$  است.

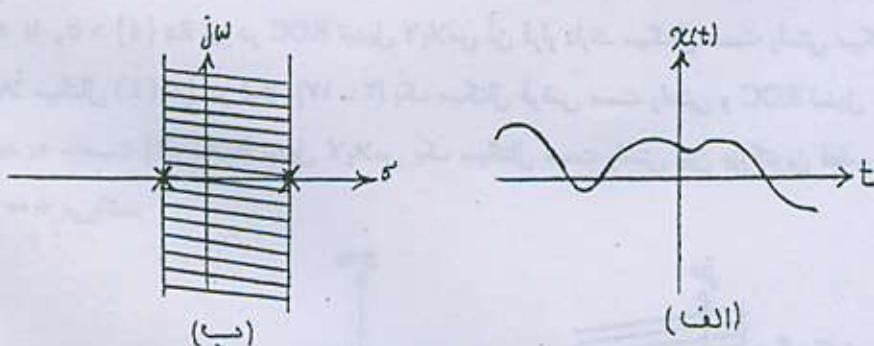
## تمثیله و تملیل سیستم‌ها

(۵) اگر  $x(t)$  یک سیگنال سمت چپی (Left sided) باشد و خط  $\sigma = \sigma_0$  در  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر  $s$  با  $\sigma < \sigma_0$  در  $\text{ROC}$  نیز تبدیل لاپلاس آن قرار دارند. سیگنال سمت چپی سیگنالی است که به ازای  $t > T_2$  برابر صفر باشد (مثال سیگنال  $(t - T_2)_+$ ). در شکل (۱۷-۳) یک سیگنال فرضی سمت چپی و  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدین‌پیش از با توجه به خاصیت (۲)،  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس یک سیگنال سمت چپی بین  $-\infty$  تا  $\infty$  کوچکترین قطب (قطبی که قسمت حقیقی آن کوچکترین است) می‌باشد.



شکل ۱۷-۳ - (الف) یک سیگنال سمت چپی (ب) نامیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن به شکل  $\sigma < \sigma_0$  به شکل

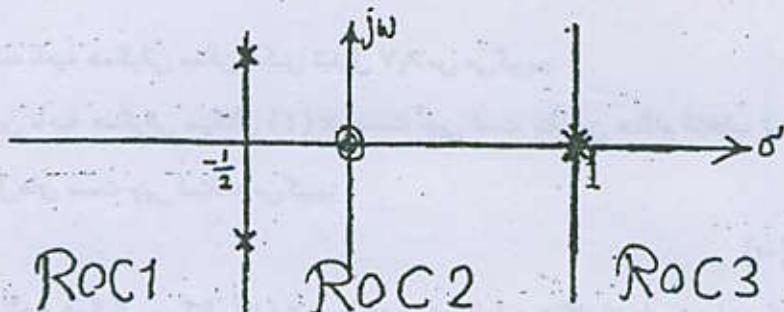
(۶) اگر  $x(t)$  یک سیگنال دو طرفه (Two sided) باشد و خط  $\sigma = \sigma_0$  در  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن قرار داشته باشد، آنگاه  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن نواحی در صفحه  $s$  و شامل خط  $\sigma = \sigma_0$  است. سیگنال دو طرفه سیگنالی است که گستره آن در محور زمان از  $-\infty$  تا  $+\infty$  باشد (مثال سیگنال  $\sin(t)$ ). در شکل (۱۷-۴) یک سیگنال فرضی دو طرفه و  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن نشان داده شده‌اند. بدین‌پیش از با توجه به خاصیت (۲)،  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس یک سیگنال دو طرفه بین دو قطب متوازی (دو قطبی که قسمت‌های حقیقی آن‌ها متوازی است) می‌باشد.



شکل ۱۷-۴ - (الف) یک سیگنال دو طرفه (ب) نامیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن به شکل  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$  به شکل

مثال: تبدیل لاپلاس یک سیگنال  $X(s) = \frac{s^2}{(s-1)^2(s^2+s+1)}$  می‌باشد. در نواحی همگرایی مختلف در مورد شکل این سیگنال بحث کنید.

هل:  $(s)$  دارای دو صفر در  $s = 0$  و چهار قطب که دو قطب در  $s = 1$  و دو قطب دیگر در  $s = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$  قرار دارند، می‌باشد  
نمودار صفر و قطب آن در شکل زیر نشان داده شده است:



با توجه به شکل فوق ملاحظه می‌کنیم برای تبدیل لاپلاس فوق سه ناحیه همگرایی به شرح زیر وجود دارند  
**ROC 1**: سیگنال  $(t) x$  یک سیگنال سمت چینی است و تبدیل فوریه ندارد

**ROC 2**: سیگنال  $(t) x$  یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه دارد

**ROC 3**: سیگنال  $(t) x$  یک سیگنال سمت راستی است و تبدیل فوریه ندارد

محاسبه عکس تبدیل لاپلاس: با انجام محاسبات ساده می‌توان معادله عکس تبدیل لاپلاس را به صورت زیر به دست آورد:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

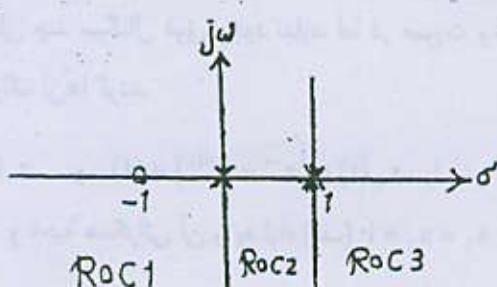
معادله عکس تبدیل لاپلاس :

معادله فوق نشان می‌دهد که می‌توان  $(t) x$  را با انتگرال‌گیری از حاصل ضرب  $(s) X$  در تابع نمایی مختلط به دست آورد. مسیر انتگرال‌گیری روی خط  $\text{Re}\{s\} = \sigma$  انتخاب می‌شود که در ناحیه همگرایی  $(s) X$  قرار دارد.

عملأ برای عکس تبدیل لاپلاس گرفتن می‌توان از بسط یک کسر به کسرهای جزئی استفاده کرد همچنین استفاده از خواص تبدیل لاپلاس جهت محاسبه عکس تبدیل لاپلاس مفید می‌باشد

مثال: عکس تبدیل لاپلاس سیگنال  $\frac{s+1}{s(s-1)} = (s) X$  را روی نواحی همگرایی مختلف آن به دست آورید

هل:  $(s) X$  یک صفر در  $s = -1$  و دو قطب در  $s = 0$  و یک قطب دیگر در  $s = 1$  دارد. نمودار صفر و قطب آن در شکل زیر نشان داده شده است.



اگر  $(s)$  را به کسرهای جزئی بسط دهیم، داریم:

$$X(s) = \frac{1}{s} + \frac{-1}{s-1} + \frac{2}{(s-1)^2}$$

حال روی هر سه ناحیه همگرانی ممکن عکس تبدیل لاپلاس می‌گیریم.

**ROC 1** : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $(t)$   $x$  سمت چپی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جملات جدول (۱ - ۱۷) از سیگنال‌های سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = -u(-t) + e^t u(-t) - 2te^t u(-t)$$

**ROC 2** : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $(t)$   $x$  دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جملات جدول (۱ - ۱۷) باید توانماً از سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی استفاده کنیم. با توجه به آن که ناحیه همگرانی 2 ROC برابر  $1 < s < 0$  است و این ناحیه همگرانی از اشتراک  $0 < s < 1$  بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب  $s = 0$  از سیگنال سمت راستی و برای قطب  $s = 1$  از سیگنال سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = u(t) + e^t u(-t) - 2te^t u(-t)$$

**ROC 3** : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $(t)$   $x$  سمت راستی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام جملات جدول (۱ - ۱۷) از سیگنال‌های سمت راستی استفاده می‌کنیم:

$$x(t) = u(t) - e^t u(t) + 2te^t u(t)$$

## ۱۷ - ۲ - خواص تبدیل لاپلاس

در این بخش به معرفی خواص تبدیل لاپلاس و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم. به کمک این خواص می‌توان تبدیل لاپلاس سیگنال‌های پیچیده‌تر را به دست آورد و در موارد دیگر از جمله تحلیل سیستم‌های LTI و سیستم‌های بیان شده توسط معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده کرد. این خواص در جدول (۱۷ - ۲) آورده شده‌اند. فرآگیری جدول فوق به دانشجویان توصیه می‌شود. دقت کنید در این جدول علاوه بر تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرانی تبدیل نیز اهمیت دارد.

(۱) خطی بودن: به دلیل استفاده از اپراتور انتگرال جهت محاسبه تبدیل لاپلاس، خاصیت خطی برای تبدیل لاپلاس وجود دارد. دقت کنید ناحیه همگرانی ترکیب خطی چند سیگنال، بزرگتر یا مساوی اشتراک نواحی همگرانی آن‌ها می‌باشد. اگر بین این نواحی اشتراک وجود نداشته باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس ترکیب خطی چند سیگنال فوق وجود ندارد. اما در صورت وجود اشتراک، ممکن است حذف صفرها و قطب‌ها باعث بزرگتر شدن ناحیه همگرانی اشتراک آن‌ها گردد.

مثال: دو سیگنال  $x_1(t) = e^{-t} u(t)$  و  $x_2(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$  را در نظر بگیرید. تبدیل لاپلاس ترکیب خطی  $y(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$  و ناحیه همگرانی آن را به ازاء (الف)  $a_1 = 1$  و (ب)  $a_2 = 1$  بدست آورید.

هل: تبدیل لاپلاس  $(t)$ ,  $x$  برابر  $\frac{1}{s+1}(s)$  با ناحیه همگرانی  $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$  و تبدیل لاپلاس  $(t)$ ,  $x$  برابر

$$X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

با ناحیه همگرانی  $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$  می‌باشد.

(الف) در این حالت داریم:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}$$

ناحیه همگرانی این تبدیل  $-1 < \text{Re}\{s\} < 1$  است.

(ب) در این حالت داریم:

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2}$$

ناحیه همگرانی این تبدیل  $-2 < \text{Re}\{s\} < 1$  است. ملاحظه می‌کنید به دلیل حذف صفر و قطب در تبدیل لاپلاس، ناحیه همگرانی بزرگتر از آشتراک نواحی همگرانی شده است.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان جابجا شود تبدیل لاپلاس آن در  $e^{-st}$  ضرب می‌شود. ناحیه همگرانی تغییر نمی‌کند زیرا  $e^{-st}$  هیچ قطبی اضافه یا حذف نمی‌کند

مثال: تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right)$  را بدست آورید

$$x(t) = \Pi\left(\frac{t}{2T}\right) = u(t+T) - u(t-T) \Rightarrow X(s) = \frac{e^{sT}}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} = \frac{e^{sT} - e^{-sT}}{s} \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

(۳) جابجایی فرکانسی: با ضرب  $e^{st}$  در یک سیگنال، تبدیل لاپلاس آن در حوزه  $s$  جابجا می‌شود این جابجایی در حوزه  $s$  باعث جابجایی صفرها و قطب‌های تبدیل لاپلاس و در نتیجه ناحیه همگرانی می‌شود

(۴) تغییر مقیاس زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان تغییر مقیاس پیدا کند آنگاه در حوزه  $s$  نیز تغییر مقیاس خواهد یافت. این تغییر مقیاس در حوزه  $s$  بر عکس حوزه زمان می‌باشد و باعث فشرده یا گستردۀ شدن ناحیه همگرانی می‌شود فشرده شدن سیگنال باعث گستردۀ شدن ROC و گستردۀ شدن سیگنال باعث فشرده شدن ROC می‌شود

تسویه نموده - فرض کنید  $g(t) = \beta e^{-\alpha t} u(t)$  و تبدیل لاپلاس  $(t)$ ,  $g$  برابر  $G(s) = \frac{s}{s^2 - 1}$  و  $\text{Re}\{s\} < 1$  است. مقنار ثابت‌های  $\alpha$  و  $\beta$  کدام می‌باشد؟

$$\beta = 1, \quad \alpha = 1 \quad (۱) \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \alpha = -1 \quad (۲) \quad \beta = 0, \quad \alpha = 1 \quad (۳)$$

حل:

$$g(t) = x(t) + \alpha x(-t) \Rightarrow G(s) = X(s) + \alpha X(-s)$$

$$\Rightarrow \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{\beta}{s+1} + \frac{\alpha\beta}{-s+1} \Rightarrow \frac{s}{s^2 - 1} = \frac{\beta(\alpha-1)s + \beta(\alpha+1)}{1-s^2}$$

$$\rightarrow \beta(\alpha+1)=0 \Rightarrow \alpha=-1$$

$$\rightarrow \beta(\alpha-1)=-1 \Rightarrow \beta=\frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

ROC	تبدیل لاپلاس	سیگنال	خاصیت
$R : \alpha < \operatorname{Re}\{s\} < \beta$	$X(s)$	$x(t)$	
$R_1$	$X_1(s)$	$x_1(t)$	
$R_2$	$X_2(s)$	$x_2(t)$	
حداقل $R_1 \cap R_2$	$aX_1(s) + bX_2(s)$	$ax_1(t) + bx_2(t)$	خطی بودن
$R$	$e^{-st_0} X(s)$	$x(t-t_0)$	جابجایی زمانی
$\alpha + \operatorname{Re}\{s_0\} < \operatorname{Re}\{s\} < \beta + \operatorname{Re}\{s_0\}$	$X(s-s_0)$	$e^{s_0 t} x(t)$	جابجایی در حوزه $s$
$\alpha a < \operatorname{Re}\{s\} < \beta a \quad a > 0$ $\beta a < \operatorname{Re}\{s\} < \alpha a \quad a < 0$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{s}{a}\right)$	$x(at)$	تغییر مقیاس زمانی
$R$	$X^*(s^*)$	$x^*(t)$	مزدوج گیری
حداقل $R_1 \cap R_2$	$X_1(s)X_2(s)$	$x_1(t)^*x_2(t)$	کانولوشن
حداقل $R$	$sX(s)$	$\frac{dx(t)}{dt}$	مشتق گیری زمانی
$R$	$\frac{dX(s)}{ds}$	$-tx(t)$	مشتق گیری در حوزه $s$
حداقل $R \cap (\operatorname{Re}\{s\} > 0)$	$\frac{X(s)}{s}$	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	انتگرال گیری زمانی

قضایای مقدار اولیه و مقدار نهایی: اگر در  $t=0$  داشته باشیم  $x(0) = x_0$  و  $x(t)$  در  $t=0$  ضربه و توابع تکین مرتبه بالاتر نداشته باشد، آنگاه:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s), \quad x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

## تمزیه و تحلیل سیستم‌ها

(۵) مزدوج گیری: اگر سیگنالی ذر حوزه زمان مزدوج گردد، آنگاه تبدیل لاپلاس آن مزدوج گردیده و علاوه بر آن  $s$  نیز مزدوج می‌شود.  
ناحیه همگرانی با مزدوج گیری تغییر نمی‌کند.

مثال: اگر تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t)$  را با  $X(s)$  نشان دهیم، آنگاه تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(2t+2)$  را بدست آورید.

حل:

$$\begin{aligned} x(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X(s) \\ 2x(3t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{2}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) \\ x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X'(s) \\ e^{2t}x'(t) &\xrightarrow{\mathcal{L}} X(s-2) \\ x(t+2) &\xrightarrow{\mathcal{L}} e^{2s}X(s) \\ 3x(-t+2) &\xrightarrow{\mathcal{L}} 3e^{-2s}X(-s) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$Y(s) = \frac{2}{3}X\left(\frac{s}{3}\right) + X(s-2) + 3e^{-2s}X(-s)$$

توجه داشته باشید  $(s)$  در صورتی وجود دارد که ROC آن تپی نباشد.

(۶) کانولوشن: تبدیل لاپلاس مانند سایر اپراتورهای بر مبنای توابع ویژه، کانولوشن دو سیگنال در حوزه زمان را به ضرب در حوزه  $s$  تبدیل می‌کند. از آنجاییکه هنگام ضرب تبدیل لاپلاس‌ها ممکن است حذف صفر و قطب اتفاق بیفتد، بنابراین ناحیه همگرانی حداقل اشتراک دو ناحیه همگرانی است. از این خاصیت در تحلیل سیستم‌های LTI استفاده می‌شود.

(۷) مشتق گیری زمانی: یکی از مهم‌ترین خواص تبدیل لاپلاس مشتق گیری زمانی است. اگر از سیگنالی در حوزه زمان مشتق گرفته شود، تبدیل لاپلاس آن در  $s$  ضرب می‌شود. چون ضرب  $s$  در تبدیل لاپلاس ممکن است باعث حذف قطب گردد، بنابراین ناحیه همگرانی حداقل  $R$  است. از این خاصیت برای تحلیل سیستم‌های بیان شده توسعه معادله دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت استفاده می‌شود.

مثال: یک سیستم LTI پیوسته در زمان با معادله دیفرانسیل ورودی - خروجی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = x(t)$$

تابع تبدیل  $(s)$  این سیستم را بدست آورده و پاسخ سمت راستی سیستم به ورودی  $x(t) = e^{-2t}$  را بدست آورید.

هل، از طرفین معادله دیفرانسیل تبدیل لاپلاس گرفته و به دست می‌آوریم:

$$(s^2 - s - 2)Y(s) = X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} = \frac{1}{(s+1)(s-2)}$$

$$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{1}{(s-2)(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s-2} + \frac{1}{s+2} + \frac{-1}{s+1}$$

با توجه به آن که  $y(t)$  سمت راست است داریم:

$$y(t) = \left( \frac{1}{12}e^{2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^{-t} \right) u(t)$$

(۸) مشتق‌گیری در حوزه  $s$ : با هر بار ضرب یک سیگنال در  $t$ ، از تبدیل لاپلاس آن مشتق گرفته می‌شود به دلیل آن که با مشتق

گرفتن از تبدیل لاپلاس قطب‌های آن کم نمی‌شود و قطب جدید نیز بوجود نمی‌آید، بنابراین ناحیه همگرانی تغییر نمی‌کند.

(۹) انتگرال‌گیری زمانی: اگر از سیگنال زمانی انتگرال گرفته شود، آنگاه تبدیل لاپلاس آن ضربدر  $\frac{1}{s}$  می‌شود. از آنجاییکه پاسخ ضربه

یک انتگرال‌گیر تابع پله واحد می‌باشد و ناحیه همگرانی آن  $0 > \text{Re}\{s\}$  است، بنابراین  $\text{ROC}$  تبدیل لاپلاس آن حداقل اشتراک  $R$  با  $\text{Re}\{s\} > 0$  است.

تذکرہ: از آنجاییکه پاسخ ضربه سیستم با رابطه خروجی - ورودی  $x(\tau)d\tau = \int_t^{+\infty} x(\tau)d\tau$  است و با توجه به تبدیل لاپلاس و ناحیه همگرانی  $(-t)u(-t)$  داریم:

$$L\left\{\int_t^{+\infty} x(\tau)d\tau\right\} = -\frac{X(s)}{s} \quad \text{ROC: } R \cap \text{Re}\{s\} < 0$$

(۱۰) قضایای مقدار اولیه و مقدار نهائی: این قضیه برای توابعی است که در  $t=0$  صفر باشند و در  $t=\infty$  فاقد ضربه و توابع تکین باشند. توسط این قضیه مقدار اولیه و نهائی سیگنال از روی تبدیل لاپلاس آن به دست می‌آیند.

مثال: سیگنال  $x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)u(t)$  را در نظر بگیرید. صحت قضیه مقدار اولیه را برای این سیگنال تحقیق کنید.

هل، مقدار این سیگنال در لحظه  $t=0$  برابر است با:

$$x(0^+) = 2$$

حال اگر از این سیگنال تبدیل لاپلاس گرفته شود، داریم:

$$X(s) = \frac{1}{s+2} + \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9}$$

اگر از قضیه مقدار اولیه استفاده کنیم، داریم:

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( \frac{s}{s+2} + \frac{s(s+1)}{s^2 + 2s + 10} \right) = 1 + 1 = 2$$

تذکرہ: در مورد تبدیل لاپلاس یک طرف، کلیه خواص ذکر شده غیر از خاصیت مشتق در حوزه زمان یکسان می‌باشند. این خاصیت به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{dt} \xrightarrow{t} sX(s) - x(0^-)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} \xrightarrow{t} s^2 X(s) - sx(0^-) - x'(0^-)$$

⋮

به کمک این خاصیت می‌توان معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت و با شرایط اولیه را حل کرد.

مثال: یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل ورودی - خروجی  $y'' + 3y' + 2y = u$  را در نظر بگیرید. با ساخت این سیستم به ورودی پنه وحدت با شرایط اولیه  $y(0^-) = 3$  و  $y'(0^-) = -5$  را بدست آورید.

دل: از طرفین معادله فوق تبدیل لاپلاس یکطرفه می‌گیریم:

$$(s^2 Y(s) - 3s + 5) + 3(sY(s) - 3) + 2Y(s) = \frac{2}{s} \Rightarrow Y(s)(s^2 + 3s + 2) = \frac{2}{s} + 3s + 4$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{3s^2 + 4s + 2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \Rightarrow y(t) = (1 - e^{-t} + 3e^{-2t})u(t)$$

### ۱۷-۳- تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI با تبدیل لاپلاس و اتصال آن‌ها

یکی از کاربردهای مهم تبدیل لاپلاس تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI است. اگر از خاصیت کانولوشن در حوزه زمان برای یک سیستم LTI استفاده کنیم، داریم:

$$y(t) = x(t) * h(t) \Rightarrow Y(s) = X(s)H(s)$$

به عبارت دیگر تبدیل لاپلاس خروجی برابر تبدیل لاپلاس ورودی در تبدیل لاپلاس پاسخ ضربه (تابع انتقال یا تابع سیستم یا تابع تبدیل) می‌باشد و با عکس تبدیل لاپلاس گرفتن از  $(s)Y$  می‌توان  $(t)y$  را بدست آورد. همچنین با توجه به آن که  $e^{st}$  یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI می‌باشد، اگر  $x(t) = e^{st}$  به سیستم اعمال شود، خروجی  $y(t) = H(s)e^{st}$  خواهد شد.

تذکرہ: رابطه  $(s)Y = H(s)X(s)$  فقط هنگامی صادق است که ناجیه همگرانی  $(s)Y$  که از اشتراک نواحی همگرانی  $(s)X$  و  $H(s)$  به دست می‌آید تپی نباشد. در غیر این صورت باید از قضیه کانولوشن برای به دست آوردن  $(t)y$  استفاده کرد.

تذکرہ: رابطه  $y(t) = H(s)e^{st}$  پاسخ حالت دائم سیستم را می‌دهد و برای تعیین پاسخ گذرای سیستم باید از قطب‌های  $(s)H$  (فرکانس‌های طبیعی سیستم) استفاده کرد.

## تجزیه و تحلیل سیستم‌ها



مثال: باسخ ضربه یک سیستم LTI در رابطه  $\frac{dh(t)}{dt} + 4h(t) = u(t) + 2\delta(t)$  صدق می‌کند. اگر خروجی سیستم به ازاء تمام زمان‌ها به

$$\text{ورودی } x(t) = e^t \text{ برابر } y(t) = ke^t \text{ باشد، مقدار } k \text{ چقدر است؟}$$

هل: از طرفین رابطه داده شده تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$sH(s) + 4H(s) = \frac{1}{s} + 2 \Rightarrow H(s) = \frac{2s+1}{s(s+4)}$$

اطلاعات دیگر در واقع مقدار  $H(s)$  را به ازاء  $s=1$  می‌دهد. پس داریم:

$$H(s=1) = k \Rightarrow k = \frac{3}{5}$$

معمولًا از روی تابع تبدیل یک سیستم LTI می‌توان بسیاری از خواص آن را به دست آورد. از جمله این خواص علی و پایدار بودن سیستم LTI است.

علی بودن یک سیستم LTI: اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه باسخ ضربه آن به ازاء  $t < 0$  برابر صفر است. در نتیجه باسخ ضربه یک سیگنال سمت راستی است و در نتیجه ROC تابع تبدیل آن به صورت  $\Re\{s\} > s_0$  است. عکس این گزاره لزوماً صادق نیست زیرا اگر ROC تابع تبدیل به صورت  $\Re\{s\} > s_0$  باشد، فقط نتیجه می‌گیریم  $h(t)$  سمت راستی است و صفر بودن آن به ازاء  $t < 0$  تضمین نمی‌شود. اما اگر تابع تبدیل گویا باشد می‌توان اثبات کرد عکس قضیه نیز صحیح است. بنابراین در حالت کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه ROC تابع تبدیل آن به صورت  $\Re\{s\} > s_0$  است و اگر تابع تبدیل یک تابع گویا از  $s$  باشد، عکس قضیه نیز صادق است.

تلکه: بر اساس تعریف انجام شده برای یک سیستم علی، در برخی مواقع اگر ROC تابع تبدیل سیستمی  $\Re\{s\} < s_0$  باشد، آن سیستم را ضدعالی می‌نامند.

مثال: تابع تبدیل غیرگویای  $H(s) = \frac{e^{-s}}{s+1}$  در نظر بگیرید. با تعیین باسخ ضربه آن، در علی بودن سیستم بحث نمائید.

هل: تبدیل لاپلاس معکوس  $\frac{1}{s+1}$  طبق جدول (۱۷-۱) برابر  $u(t) - u(t-1)$  است و با توجه به خاصیت جاچایی زمانی داریم:

$$h(t) = e^{-(t+1)} u(t+1)$$

مالحظه می‌کنید علی رغم آن که ناحیه همگرانی  $\Re\{s\} < -1$  است، اما این سیستم غیرعلی است و این به دلیل غیرگویای  $H(s)$  می‌باشد.

پایداری یک سیستم LTI: اگر یک سیستم LTI پایدار باشد، آنگاه باسخ ضربه آن مطلقاً انتگرال‌بذرگ است. در این صورت تبدیل فوریه باسخ ضربه همگراست. چون تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع تبدیل لاپلاس آن بر روی محور  $\Re\{s\}$  است در نتیجه می‌توان قضیه زیر را نتیجه گرفت:

قضیه، یک سیستم LTI بایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرانی تابع تبدیل  $(s) H(s)$  آن شامل محور  $\omega$  ز باشد.  
علی بودن و پایداری یک سیستم LTI: اگر یک سیستم LTI تواناً علی و پایدار باشد، آنگاه ناحیه همگرانی تابع تبدیل آن علاوه بر آن که به صورت  $\text{Re}\{s\} > 0$  است، شامل محور  $\omega$  ز نیز می‌باشد. این وضعیت فقط هنگامی پیش می‌آید که تمام قطب‌های  $(s) H(s)$  در نیم صفحه چپ (LHP) صفحه  $s$  باشند. بدینه است عکس قضیه هنگامی صحیح است که  $(s) H(s)$  یک تابع گویا از  $s$  باشد. بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه، اگر یک سیستم LTI علی و پایدار باشد، آنگاه تمام قطب‌های تابع تبدیل آن در نیم صفحه چپ (LHP) صفحه  $s$  قرار می‌گیرند.  
عکس قضیه هنگامی صادق است که  $(s) H(s)$  یک تابع گویا از  $s$  باشد.

مثال: یک سیستم LTI با تابع تبدیل  $H(s) = \frac{2s^3 - 9s^2 + 4s + 10}{s^2 - 3s - 4}$  را در نظر بگیرید. به ازاء نواحی همگرانی مختلف، در علی و پایدار بودن این سیستم بحث کرده و باسخ ضربه این سیستم را روی نواحی همگرانی مختلف آن بدست آورید.

$$H(s) = 2s - 3 + \frac{3s - 2}{(s+1)(s-4)} = 2s - 3 + \frac{1}{s+1} + \frac{2}{s-4}$$

هل:

با توجه به محل قطب‌ها سه ناحیه همگرایی می‌توان برای این تابع تبدیل در نظر گرفت:

$\text{Re}\{s\} < -1$ : ROC1

$$h(t) = 2\delta'(t) - 3\delta(t) - e^{-t} u(-t) - 2e^{4t} u(-t)$$

روی این ناحیه همگرایی سیستم غیرعلی و پایدار است و داریم:

$$h(t) = 2\delta'(t) - 3\delta(t) + e^{-t} u(t) - 2e^{4t} u(t)$$

روی این ناحیه همگرایی سیستم علی و ناپایدار است و داریم:

$$h(t) = 2\delta'(t) - 3\delta(t) + e^{-t} u(t) + 2e^{4t} u(t)$$

بدینه است در هیچ ناحیه همگرایی از تابع تبدیل فوق نصیحته توان سیستم تواناً علی و پایدار داشت و این به دلیل آن است که کلیه قطب‌های  $(s) H(s)$  در LHP نیستند.

تست نمونه - یک سیستم LTI بیوسته پایدار با معادله دیفرانسیل  $x = \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y$  را در نظر بگیرید. باسخ ضربه این سیستم کدام است؟

$$h(t) = \frac{1}{3} (e^{-2t} u(t) + e^{-t} u(-t)) \quad (2)$$

$$h(t) = -\frac{1}{3} (e^{-2t} u(-t) + e^{-t} u(t)) \quad (1)$$

$$h(t) = -\frac{1}{3} (e^{-2t} u(t) + e^{-t} u(-t)) \quad (4)$$

$$h(t) = \frac{1}{3} (e^{-2t} u(-t) - e^{-t} u(t)) \quad (3)$$

حل:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = x &\Rightarrow (s^2 - s - 2)Y(s) = X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 - s - 2} \\ &= \frac{1}{(s-2)(s+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{s-2} + \frac{-\frac{1}{3}}{s+1} \end{aligned}$$

با توجه به شرط پایداری سیستم، ناحیه همگرانی  $H(s)$  باید شامل محور  $\omega$  باشد بنابراین  $-1 < \operatorname{Re}(s) < 2$  - ناحیه همگرانی  $H(s)$  می‌باشد و روی این ناحیه همگرانی داریم:

$$h(t) = \frac{-1}{3} e^{2t} u(-t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t)$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

مثال: یک سیستم پایدار و علی با پاسخ ضربه  $h(t)$  و تابع سیستم  $H(s)$  را در نظر بگیرید. یک قطب در  $s = -2$  دارد و در مبدأ صفر ندارد. محل بقیه قطب‌ها و صفرها را نمی‌دانیم. تعیین کنید کدام یک از گزاره‌های زیر مطمناً درست، کدام یک حتماً نادرست و برای کدام یک اطلاعات کافی برای تعیین این موارد وجود ندارد.

(الف)  $F[h(t)e^{jt}]$  همگراست.

$$(ب) \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0$$

(ج)  $t \times h(t)$  پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است.

(د) تبدیل لاپلاس  $\frac{dh(t)}{dt}$  حداقل یک قطب دارد.

(ه)  $h(t)$  عرض محدود است.

$$(و) H(s) = H(-s)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 2 \quad (j)$$

حل: گزاره (الف) نادرست است. زیرا تبدیل لاپلاس  $h(t)$  در  $s = -3$  است. این تبدیل لاپلاس هنگامی وجود دارد که  $s = -3$  در ROC باشد. سیستم فوق چون علی و پایدار است، بنابراین ROC باید سمت راست تمام قطب‌ها قرار گیرد و چون دارای یک قطب در  $s = -2$  است بنابراین  $s = -3$  نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

گزاره (ب) نادرست است زیرا این گزاره معادل آن است که  $H(s=0) = 0$  باشد. معنی  $H(s=0) = 0$  در مبدأ صفر داشته باشد که طبق مفروضات داده شده صحیح نیست.

گزاره (ج) درست است. زیرا طبق جدول (۱۷ - ۲) ناحیه همگرانی  $H(s)$  و  $t \times h(t)$  یکسان می‌باشند. چون ROC سیگнал  $h(t)$  محدود می‌باشد، بنابراین ROC سیگнал  $t \times h(t)$  نیز محور  $\omega$  را شامل می‌شود. بنابراین سیستم متناظر با آن پایدار است. همچنین چون  $h(t) = 0$  برای  $t < 0$  پس  $t \times h(t) = 0$  برای  $t < 0$  و در نتیجه  $t \times h(t)$  پاسخ ضربه یک سیستم علی است.

گزاره (د) درست است. طبق جدول (۱۷ - ۲) تبدیل لاپلاس  $\frac{d h(t)}{dt}$  برابر  $sH(s)$  است. اما  $(s)H(s)$  یک قطب در  $s = -2$  دارد و با ضرب  $s$  در  $(s)H(s)$  این قطب حذف نمی‌شود.

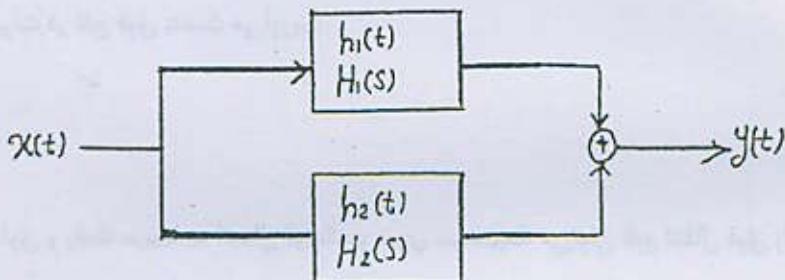
گزاره (ه) نادرست است. اگر  $(t)h(t)$  عرض محدود داشته باشد آنگاه  $(s)H(s)$  باید فاقد قطب باشد. اما  $(s)H(s)$  در  $s = -2$  قطب دارد.

گزاره (و) نادرست است. در صورت درست بودن این گزاره، چون  $(s)H(s)$  در  $s = -2$  قطب دارد، باید در  $s = -2$  نیز قطب داشته باشد. ولی وجود قطب در  $s = -2$  باعیل و پایدار بودن این سیستم تناقض دارد.

گزاره (ز) را نمی‌توان از اطلاعات داده شده نتیجه گرفت. برای درست بودن این گزاره باید صورت و مخرج  $(s)H(s)$  هم مرتبه باشند و اطلاعات کافی برای استخراج چنین نتیجه‌ای موجود نیست.

اتصال سیستم‌های LTI: با استفاده از تبدیل لاپلاس و خواص مربوطه می‌توان تابع شبکه ترکیب سیستم‌های مختلف را به دست آورد. بدین منظور دانستن تابع تبدیل اتصالات اولیه و ساده لازم می‌باشد. اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ - ۵) با یکدیگر موازی باشند آنگاه از آنجاییکه پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌گردد. به عبارت دیگر داریم:

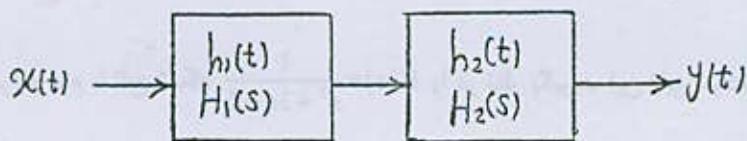
$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \Rightarrow H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$



شکل ۱۷ - ۵ - اتصال موازی دو سیستم

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ - ۶) با یکدیگر سری باشند آنگاه از آنجاییکه پاسخ ضربه آنها با یکدیگر کانوالو می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \Rightarrow H(s) = H_1(s)H_2(s)$$

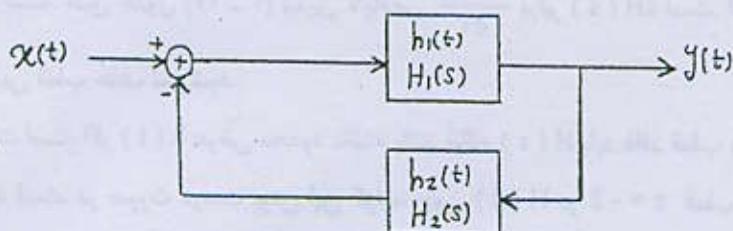


شکل ۱۷ - ۶ - اتصال سری دو سیستم

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۷ - ۷) با اتصال فیدبک به یکدیگر متصل گردند آنگاه می‌توان تابع تبدیل  $(s)H(s)$  را از رابطه زیر بدست آورد:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

## تمرین و تحلیل سیستم‌ها



شکل ۱۷-۷ - اتصال فیدبک دو سیستم LTI

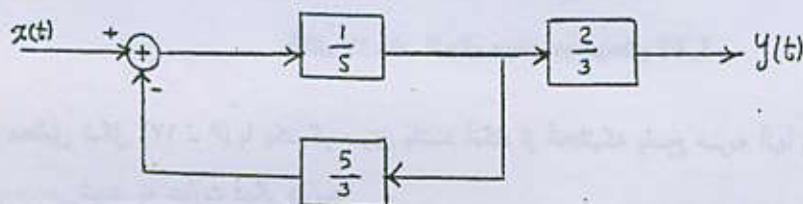
با در نظر گرفتن سه ساختار فوق و همچنین ساختارهای شکل مستقیم I و II که در بخش ۶ ارائه شدند و با استفاده از عناصر پایه ضرب کننده اسکالر، جمع کننده و انتگرال گیر می‌توان سیستم‌های مرتبه بالا را به صورت جعبه‌ای و در حوزه S نمایش داد.

مثال: یک سیستم LTI پیوسته در زمان با تابع شبکه  $H(s) = \frac{2}{3s+5}$  را در نظر بگیرید. توسط یکی از ساختارهای اصلی نمودار جعبه‌ای همانراز این تابع شبکه را تحقق دهید.

هل: با کمی تغییرات در تابع فوق بدست می‌آوریم:

$$H(s) = \frac{\frac{2}{3}}{s + \frac{5}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{3} \times \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{5}{3s}}$$

با مقایسه رابطه فوق و رابطه مربوط به اتصال فیدبک و سری سیستم‌ها، می‌توان تابع انتقال فوق را به صورت زیر تحقق داد:



دقت کنید تابع شبکه  $\frac{1}{s}$  مربوط به انتگرال گیر می‌باشد

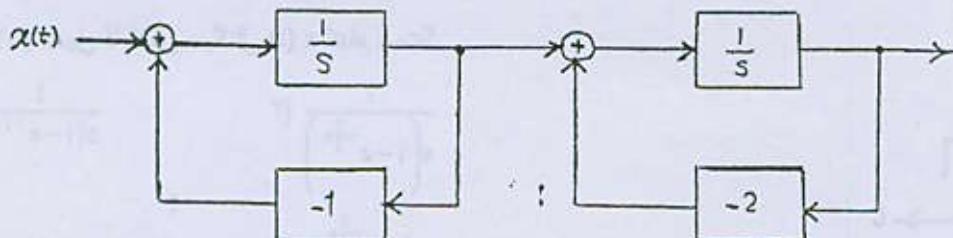
مثال: یک سیستم مرتبه دوم با تابع شبکه  $H(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$  را در نظر بگیرید. این تابع شبکه را به صورت ساختارهای سری، موازی و فرم مستقیم II و توسط عناصر پایه تحقق دهید.

هل: برای تحقق به ساختار سری کافی است صورت و مخرج کسر  $(s)$  H را تجزیه کرده و به صورت حاصلضرب عبارت‌های مرتبه اول بنویسیم.

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+2} \times \frac{1}{s+1} = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} \times \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}}$$

## تجزیه و تملیل سیستم‌ها

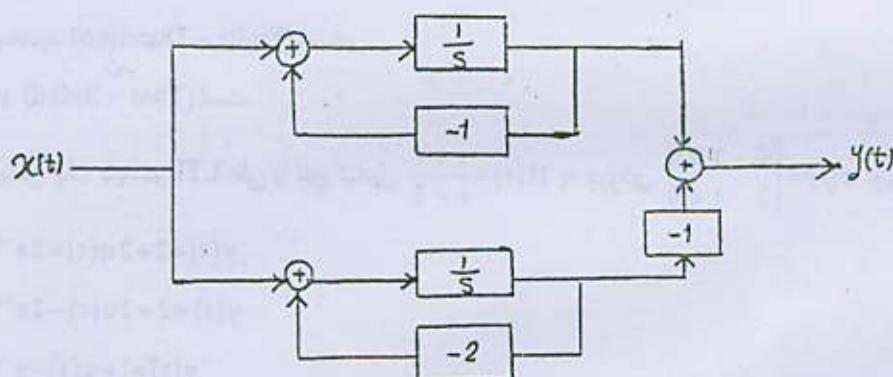
حال هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم، نمودار جعبه‌ای برای تحقق سری  $H(s)$  در شکل زیر نشان داده شده است:



برای تحقق به ساختار موازی کافی است مخرج کسر  $H(s)$  را تجزیه کرده و این کسر را به مجموع کسرهای جزئی بسط دهیم:

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{-1}{s+2} + \frac{1}{s+1} = -\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{2}{s}} + \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}}$$

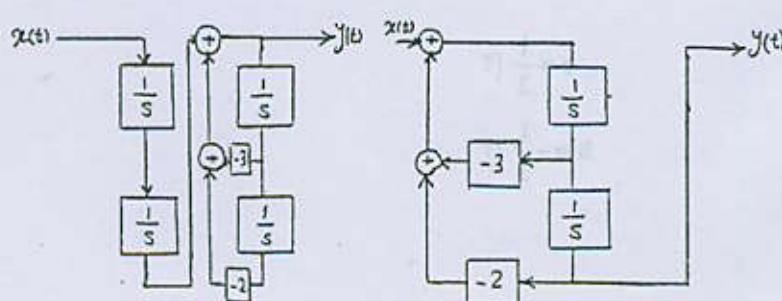
حال مجدداً هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم، نمودار جعبه‌ای برای تحقق موازی  $H(s)$  در شکل زیر نشان داده شده است:



برای تحقق به ساختار فرم مستقیم II سعی می‌کنیم معادله انتگرالی که از تابع  $H(s)$  بدست می‌آید را استخراج کنیم:

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} &\Rightarrow s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2 Y(s) = X(s) \Rightarrow Y(s) + \frac{3}{s} Y(s) + \frac{2}{s^2} Y(s) = \frac{1}{s^2} X(s) \\ &\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2} X(s) - \frac{3}{2} Y(s) - \frac{2}{s^2} Y(s) \end{aligned}$$

در شکل‌های زیر فرم‌های مستقیم I و II این تابع شبکه نشان داده شده‌اند:



**خودآزمائی نهم**۱ - (آزاد ۸۱) تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t)$  کدام است؟

$$\frac{1}{s \left( 1 - e^{-\frac{T}{2}} \right)} \quad (2)$$

$$\frac{1}{s \left( 1 - e^{-Ts} \right)} \quad (1)$$

$$\frac{1 - e^{-\frac{T}{2}}}{s \left( 1 + e^{-\frac{T}{2}} \right)} \quad (4)$$

$$\frac{1}{s \left( 1 + e^{-\frac{T}{2}} \right)} \quad (3)$$

۲ - (آزاد ۸۰) تبدیل لاپلاس سیگنال  $x(t)$  دارای یک قطب در  $s = -2$  می‌باشد سیگنال  $x_1(t) = e^{4t} x(t)$  مطلقاً انتگرال بذیر است.سیگنال  $x_2(t) = e^{4t} x(t)$  تبدیل فوریه ندارد. سیگنال  $x(t)$  یک سیگنال:

(۱) سمت راستی (Right - Sided) است.

(۲) سمت چپی (Left - Sided) است.

(۳) با دوره محدود (Finite - Duration) است.

(۴) دو طرفه (Two - Sided) است.

۳ - (آزاد ۷۹) پاسخ یک سیستم LTI علی با تابع تبدیل  $H(s) = \frac{s+1}{s+2}$  به ورودی  $x(t)$  چیست؟

$$y(t) = 2 + 2u(t) + 2e^{-2t} u(t) \quad (1)$$

$$y(t) = 2 + 2u(t) - 2e^{-2t} u(t) \quad (2)$$

$$y(t) = 1 + u(t) - e^{-2t} u(t) \quad (3)$$

$$y(t) = 1 + u(t) + e^{-2t} u(t) \quad (4)$$

۴ - (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه یک سیستم در معادله دیفرانسیل زیر صدق می‌کند:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 2h(t) = e^{-4t} u(t) + bu(t)$$

که در آن  $u(t)$  پله واحد و  $b$  یک ثابت نامعین می‌باشد. خروجی سیستم به ورودی  $x(t) = e^{2t}$  به ازای تمام زمان‌ها برابرمی‌باشد. مقدار  $b$  کدام است؟

$$b = \frac{1}{3} \quad (2)$$

$$b = \frac{1}{12} \quad (1)$$

$$b = -\frac{1}{3} \quad (4)$$

$$b = -\frac{1}{12} \quad (3)$$

## تمزیه و گملیل سیستم‌ها

۵- فرض کنید تبدیل لاپلاس ورودی یک سیستم LTI برابر  $X(s) = \frac{s+2}{s-2}$  و خروجی آن به صورت  $y(t) = -\frac{2}{3}e^{2t}u(-t) + \frac{1}{3}e^{-t}u(t)$  باشد. آنگاه پاسخ ضربه این سیستم برابر است با:

$$h(t) = (e^{-t} - 2e^{-2t})u(-t) \quad (1)$$

$$h(t) = e^{-t}u(-t) + 2e^{-2t}u(t) \quad (2)$$

$$h(t) = (2e^{-2t} - e^{-t})u(t) \quad (3)$$

$$h(t) = -2e^{-2t}u(-t) - e^{-t}u(t) \quad (4)$$

۶- (آزاد ۷۹) یک سیستم LTI علی و پایدار که پاسخ پله آن در  $\rightarrow \infty$  صفر می‌باشد را در نظر بگیرید. تابع تبدیل این سیستم به کدام یک از شکل‌های زیر می‌تواند باشد.

$$H(s) = \frac{s^2(s+3)}{(s+1)(s+2)} \quad (1)$$

$$H(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)} \quad (2)$$

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} \quad (3)$$

$$H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1)} \quad (4)$$

۷- (آزاد ۸۰) پاسخ یک سیستم پوسته LTI سبی با تابع تبدیل  $H(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+a)}$  به ورودی  $x(t) = 1$  برابر  $y(t) = \frac{a}{32}$  می‌باشد.

مقدار  $a$  کدام است؟

$$a = 4 \quad (2)$$

$$a = -4 \quad (1)$$

$$a = \pm 4 \quad (4)$$

$$a = 0 \quad (3)$$

۸- (سراسری ۸۱) اگر پاسخ پله یک سیستم LTI برابر  $s(t) = (1 - e^{-t} - te^{-t})u(t)$  باشد و پاسخ خروجی سیستم به ورودی  $x(t) = (2 - 3e^{-t} + e^{-3t})u(t)$  برابر

$$y(t) = (2 + 4e^{-t})u(t) \quad (1)$$

$$(2 + 4e^{-3t})u(t) \quad (2)$$

$$(1 + e^{-t} + 3te^{-t})u(t) \quad (3)$$

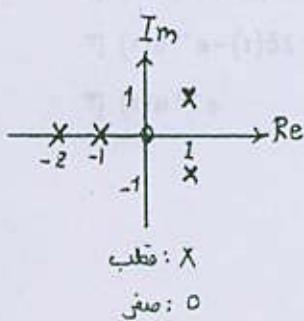
۹- (سراسری ۸۲) در سیستم با آرایش صفرها و قطب‌های نشان داده شده در شکل زیر، به ازای ناحیه همگرانی  $Re(s) < -1$  پاسخ ضربه سیستم برابر است با:

$$h(t) = [e^{-2t} - e^{-t} + e^t \sin(t)]u(t) \quad (1)$$

$$h(t) = [-e^{-2t} + e^{-t} - e^t \sin(t)]u(-t) \quad (2)$$

$$h(t) = e^{-2t}u(t) + [e^{-t} - e^t \sin(t)]u(-t) \quad (3)$$

$$h(t) = (e^{-2t} - e^{-t})u(t) - e^t \sin(t)u(-t) \quad (4)$$



## تمایه و تملیل سیستم‌ها

۱۰ - فرض کنید تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت  $H(s) = \frac{s^2 + as + b}{s^2 - as + b}$  می‌باشد که  $a$  و  $b$  اعداد ثابت حقیقی می‌باشند. کدام گزینه درمورد این سیستم درست است؟

- (۱) این سیستم یک فیلتر پائین‌گذر است.
- (۲) این سیستم یک فیلتر بالاگذر است.
- (۳) این سیستم یک فیلتر تمام‌گذر است.
- (۴) نوع این فیلتر به مقدار  $a$  و  $b$  بستگی دارد.

۱۱ - (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم LTI به صورت  $H(s) = \frac{s+2}{s^2 - 2s + 1 - a^2}$  مفروض است که در آن  $a$  یک عدد ثابت حقیقی است.

کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح است؟

- (۱) این سیستم نمی‌تواند تواناً علی و پایدار باشد (به ازای هیچ مقداری از  $a$ )
- (۲) این سیستم نمی‌تواند تواناً غیرعلی و ناپایدار باشد (به ازای هیچ مقداری از  $a$ )
- (۳) فقط گزاره (۱) صحیح است.
- (۴) فقط گزاره (۲) صحیح است.
- (۵) هر دو گزاره صحیح هستند.
- (۶) هیچ‌کدام از دو گزاره فوق صحیح نیستند.

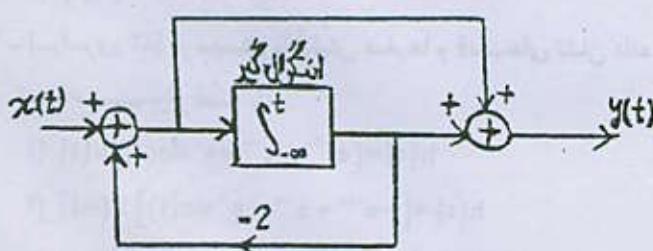
۱۲ - (آزاد ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم پیوسته LTI به صورت  $H(s) = \frac{6s}{s^2 + 2s - 8}$  می‌باشد و ناحیه همگرانی آن  $-4 < \text{Re}(s) < 2$  می‌باشد. در این سیستم کدام گزاره نادرست است؟

- (۱) سیستم پایدار است.
- (۲) سیستم غیرسیبی است.

(۳) پاسخ پله سیستم به صورت  $u(t) = -e^{-4t} u(t) + 4e^{2t} u(t)$  می‌باشد.

(۴) اگر  $\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt = 0$  باشد

۱۳ - (سراسری ۸۱) پاسخ ضربه سیستم LTI در شکل مقابل کدام است؟



$$\delta(t) - e^{-2t} u(t) \quad (1)$$

$$\delta(t) + 2\delta(t-1) \quad (2)$$

$$2\delta(t) - e^{-t} u(t) \quad (3)$$

$$e^{-2t} u(t) \quad (4)$$

۱۴ - (آزاد ۸۳) سیستم LTI توصیف شده با معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

پاسخ این سیستم به ورودی  $x(t) = e^{-t} u(t)$  عبارت است از:

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \right] u(t) \quad (۲)$$

$$y(t) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-3t} \right] u(t) \quad (۱)$$

$$y(t) = \left[ \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} + \frac{1}{3} e^{-3t} \right] u(t) \quad (۴)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2} e^{-t} + t e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-3t} \right] u(t) \quad (۳)$$

۱۵ - (آزاد ۸۴) یک سیستم LTI با معادله دیفرانسیل  $y''(t) - y'(t) - 2y(t) = x(t)$  توصیف می‌شود. پاسخ ضربه آن در صورتی که سیستم پایدار باشد، چگونه خواهد بود؟

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(-t) \quad (۲)$$

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۱)$$

$$h(t) = \frac{1}{3} e^{2t} u(t) + \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۴)$$

$$h(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} u(-t) - \frac{1}{3} e^{-t} u(t) \quad (۳)$$

۱۶ - (سراسری ۸۳) اگر محدوده  $\text{Real}\{s\} > -3$ ، منطقه همگرانی برای تبدیل لاپلاس سیگنال  $(t)x$  باشد، منطقه همگرانی برای تبدیل لاپلاس سیگنال  $(\alpha t)x$  که  $-1 < \alpha < 0$  باشد، عبارت است از:

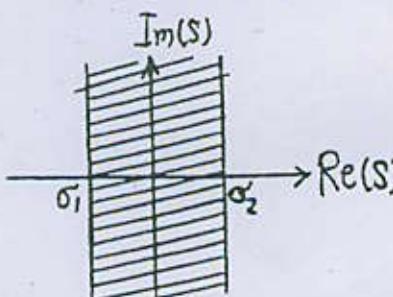
$$\frac{3}{\alpha} < \text{Real}\{s\} < -\frac{3}{\alpha} \quad (۴)$$

$$\text{Real}\{s\} < -3\alpha \quad (۳)$$

$$\text{Real}\{s\} < \frac{-3}{\alpha} \quad (۲)$$

$$\text{Real}\{s\} > -3\alpha \quad (۱)$$

۱۷ - (سراسری ۸۰) اگر ناحیه همگرانی تبدیل لاپلاس سیگنال  $(t)x$  به صورت زیر باشد، ناحیه همگرانی تبدیل لاپلاس سیگنال



کدام است؟  $y(t) = x(t)u(t)$

$$\text{Re}\{s\} > \sigma_1 \quad (۱)$$

$$\text{Re}\{s\} < \sigma_2 \quad (۲)$$

$$\text{Re}\{s\} > \sigma_2 \quad (۳)$$

$$\sigma_1 < \text{Re}\{s\} < \sigma_2 \quad (۴)$$

۱۸ - (سراسری ۸۳) پاسخ ضربه سیستم معکوس سیستم توصیف شده با رابطه  $y(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-\tau)} x(\tau) d\tau$  را به دست آورید.

$$\delta(t) + \delta'(t) \quad (۴)$$

$$\delta(t) \quad (۳)$$

$$u(t) \quad (۲)$$

$$\delta'(t) \quad (۱)$$

۱۹ - (سراسری ۸۴) یک سیستم LTI پایدار توسط معادله دیفرانسیل  $\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4y(t) = x(t)$  توصیف می‌شود. پاسخ سیستم به

کدام ورودی‌هایی  $x_1(t) = e^{-t}$  و  $x_2(t) = e^{6t}$  و  $x_3(t) = e^{-4t}$  کراندار است؟

(۴) هیچ‌کدام

(۳) هر سه

(۲)  $x_2(t), x_1(t)$

(۱) فقط  $x_1(t)$

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

۲۰- (سراسری ۸۳) سیستم بیوسته LTI با معادله دیفرانسیل  $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 6y(t) = \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} - 2x(t)$  را داریم، وارون این سیستم

می‌تواند:

- (۱) علی و ناپایدار باشد.
- (۲) علی و پایدار باشد.
- (۳) گزینه‌ها همگی ناصحیح هستند.

۲۱- (سراسری ۸۵) مقدار نهایی پاسخ زمانی سیستم LTI علی با تابع تبدیل  $H(s) = \frac{1}{s-2}$  به ورودی  $u(t) = 3u(t)$  چقدر است؟

- (۱) صفر
- (۲)  $-\frac{3}{2}$
- (۳) ۳
- (۴) بی‌نهایت

پادداشت

## ۱۸ - تبدیل z

تبدیل z همان نقشی را که تبدیل لاپلاس در مورد سیگنال‌های پیوسته در زمان دارد، در مورد سیگنال‌های گسته در زمان ایفا می‌کند. لذا به نظر می‌رسد این بخش با بخش قبل تا حدود زیادی مشابه باشد. در این بخش ابتدا به معرفی تبدیل z و مفاهیم اولیه مانند نواحی همگرانی، صفر و قطب و ... می‌پردازیم. سپس خواص تبدیل z و کاربرد آن‌ها بررسی می‌گردند. در نهایت تحلیل و توصیف کامل سیستم‌های گسته در زمان LTI توسط تبدیل z، جبر تابع سیستم و نمایش سیستم‌ها بررسی می‌گردند.

### ۱۸ - ۱ - معرفی تبدیل z و مفاهیم اولیه

در بخش ۱۱ ملاحظه کردید سیگنال  $z^n$  یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI گسته در زمان است. اگر z یک عدد مختلط به شکل  $re^{j\omega}$  در نظر گرفته شود، آنگاه به تبدیل z می‌رسیم. تبدیل z دو طرفه یک سیگنال گسته در زمان مانند  $x[n]$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X(z) = Z\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

در رابطه فوق z یک عدد مختلط و به صورت  $re^{j\omega}$  می‌باشد.

**تذکرہ:** لفظ دو طرفه برای تبدیل لاپلاس به دلیل استفاده از حدود  $-\infty$  تا  $+\infty$  برای سیگما است. در تبدیل z یک طرفه حدود سیگما از صفر تا  $+\infty$  انتخاب می‌شود و داریم:

$$X(z) = Z_1\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

در این درس به دلیل غیرعلی بودن سیستم‌ها در حالت کلی، تبدیل z دو طرفه مفیدتر می‌باشد. لذا هرگاه لفظ تبدیل z استفاده می‌گردد، منظور تبدیل z دو طرفه است و در هنگام استفاده از تبدیل z یک طرفه، لفظ یک طرفه آورده می‌شود. تبدیل z ارتباط نزدیکی با تبدیل فوریه گسته دارد:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} e^{-j\omega n} = F\{x[n]e^{-j\omega n}\}$$

بنابراین تبدیل z سیگنال گسته  $x[n]$  در واقع تبدیل فوریه گسته در زمان  $x[n]e^{-j\omega n}$  است و در نتیجه اگر  $x[n]e^{-j\omega n}$  تبدیل فوریه گسته در زمان داشته باشد، آنگاه  $x[n]e^{-j\omega n}$  تبدیل z دارد. در بخش‌های قبل ملاحظه کردید که شرط کافی برای همگرانی تبدیل فوریه گسته در زمان مطلقاً جمع بذیر بودن  $x[n]$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت شرط کافی برای وجود تبدیل z آن است که  $x[n]e^{-j\omega n}$  مطلقاً جمع بذیر باشد. به عبارت دیگر داشته باشیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|e^{-j\omega n} < \infty$$

## تمزیه و تمیل سیستم‌ها

فللینه ROC

وجود عبارت  $z^{-n}$  باعث شود که یک درجه آزادی  $\alpha$  جهت نزولی کردن عبارت زیر سیگما و مطلقاً جمع پذیر کردن آن داشته باشیم. به عبارت دیگر ممکن است  $[n] \times$  مطلقاً جمع پذیر نباشد اما بتوان محدوده‌ای از  $\alpha$  را به گونه‌ای انتخاب کرد که  $[n] \times$  مطلقاً جمع پذیر گردد. در نتیجه ممکن است سیگنال تبدیل فوریه گسته در زمان نداشته باشد اما بتوان محدوده‌ای از  $\alpha$  برای آن به دست آورد که در آن محدوده دارای تبدیل  $z$  گردد. بنابراین تعداد سیگنال‌هایی که تبدیل  $z$  دارند بیشتر از تعداد سیگنال‌هایی است که تبدیل فوریه گسته در زمان دارند. بحث فوق در مورد وجود یا عدم وجود تبدیل  $z$  به ازاء برخی از  $\alpha$  ها مانند تبدیل لاپلاس به تعریف ناحیه همگرانی (ROC) منجر می‌شود.

تعریف ناحیه همگرانی (ROC) تبدیل  $z$ : محدوده‌ای از صفحه مختلط که به ازاء آن تبدیل  $z$  برای یک سیگنال گسته در زمان وجود دارد را ناحیه همگرانی (ROC) تبدیل  $z$  آن سیگنال می‌نامند. در ادامه خواص ROC بیشتر بررسی خواهند شد و خواهد دید تبدیل  $z$  دارای خواص مشابهی با ROC تبدیل لاپلاس است. با توجه به تعریف ناحیه همگرانی (ROC) تبدیل  $z$  و این واقعیت که هنگام محاسبه تبدیل فوریه یک سیگنال گسته در زمان فقط دایره واحد (دایره‌ای با شعاع  $1 = z$ ) برای محاسبه تبدیل انتخاب می‌شود، می‌توان نتیجه گرفت:

«اگر سیگنال تبدیل فوریه گسته در زمان داشته باشد آن‌گاه لزوماً تبدیل  $z$  نیز دارد (زیرا حداقل  $1 = z$  جزء ROC آن است). اما اگر

سیگنال تبدیل  $z$  داشته باشد، تنها در صورتی تبدیل فوریه گسته در زمان دارد که ROC تبدیل  $z$  آن شامل دایره واحد باشد»

تعریف صفر و قطب و نمودار صفر و قطب: تبدیل  $z$  یک سیگنال معمولاً یک تابع گویا از  $z$  (یا  $z^{-1}$ ) است و آن را می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

در رابطه فوق  $N(z)$  و  $D(z)$  به ترتیب چند جمله‌ای‌های صورت و مخرج هستند. بنا به تعریف ریشه‌های چند جمله‌ای صورت تبدیل  $z$  را صفرهای  $(z)$   $X$  و ریشه‌های چندجمله‌ای مخرج تبدیل  $z$  را قطب‌های  $(z)$   $X$  می‌نامند. به عبارت دیگر داریم:

$$X(z) = 0 \Rightarrow N(z) = 0 \Rightarrow z = z_1, z_2, \dots, z_M : \text{ صفرهای } X(z)$$

$$X(z) = \infty \Rightarrow D(z) = 0 \Rightarrow z = p_1, p_2, \dots, p_N : \text{ قطب‌های } X(z)$$

صفره و قطب‌های تبدیل  $z$  در حالت کلی اعداد مختلط می‌باشند و می‌توان آن‌ها را در صفحه مختلط نمایش داد. صفرها با علامت  $\square$  و قطب‌ها با علامت  $\times$  در صفحه مختلط مشخص می‌گردند. نمایش صفرها و قطب‌ها در صفحه مختلط را نمودار صفر و قطب تبدیل  $z$  می‌نامند.

مثال: تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n] = \alpha^n u[n]$  را بدست آورید.

هل:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n$$

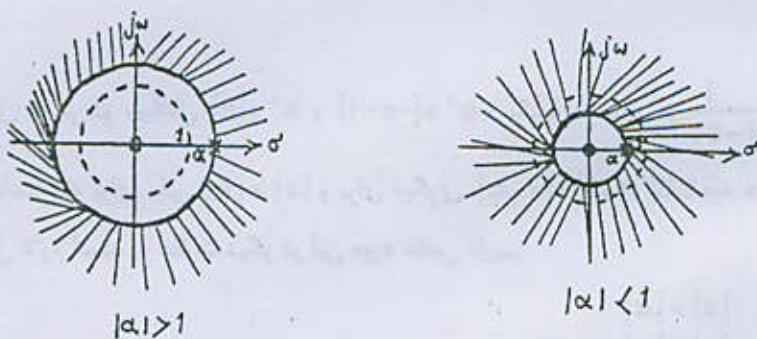
برای محاسبه حاصل جمع فوق از جمع جمله‌های یک تصاعد هندسی با جمله اول  $t_1 = 1$  و قدر نسبت  $q = \alpha z^{-1}$  استفاده می‌کنیم. در صورتی که  $|q| < 1$  باشد آنگاه سری فوق همگرا شده و داریم:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

شرط  $|q| < 1$  در واقع ROC تبدیل  $z$  سیگنال فوق را مشخص می‌کند:

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \Rightarrow \frac{|\alpha|}{|z|} < 1 \Rightarrow |z| > |\alpha|$$

ملاحظه می‌کنید ROC فوق خارج یک دایره به شعاع  $|\alpha|$  است و در شکل‌های زیر به ازاء  $|\alpha| < 1$  و  $|\alpha| > 1$  رسم شده‌اند.



دقت کنید به ازاء  $|\alpha| < 1$  دایره واحد که با نقطه چین روی شکل نشان داده شده است در ROC تبدیل  $z$  قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال به ازاء  $|\alpha| < 1$  تبدیل فوریه گستته در زمان دارد. همچنین ملاحظه می‌کنید تبدیل  $z$  این سیگنال یک قطب در  $z = \alpha$  و یک صفر در  $z = 0$  دارد.

مثال: تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$  را بدست آورید.

هل:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -\alpha^n z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} -(\alpha z^{-1})^n$$

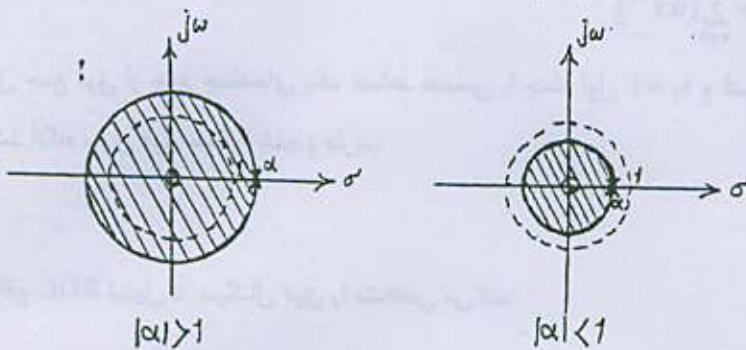
برای محاسبه حاصل جمع فوق از جمع جمله‌های یک تصاعد هندسی با جمله اول  $t_1 = -(\alpha z^{-1})^{-1} = -\alpha^{-1} z$  و قدر نسبت  $q = -(\alpha z^{-1})^{-1}$  استفاده می‌کنیم. در صورتی که  $|q| < 1$  باشد، آنگاه سری فوق همگرا شده و داریم:

$$X(z) = \frac{-(\alpha z^{-1})^{-1}}{1 - (-\alpha z^{-1})^{-1}} = \frac{-\alpha^{-1} z}{1 - \alpha^{-1} z} = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$

شرط  $|z| < |\alpha|$  در واقع ROC تبدیل  $z$  سیگنال فوق را مشخص می‌کند:

$$|\alpha^{-1}z| < 1 \Rightarrow \frac{|z|}{|\alpha|} < 1 \Rightarrow |z| < |\alpha|$$

ملاحظه می‌کنید ROC فوک داخل یک دایره به شعاع  $|\alpha|$  است و در شکل‌های زیر به ازاء  $1 > |\alpha| > 0$  رسم شده است.



دقت کنید به ازاء  $1 > |\alpha|$  دایره واحد که با نقطه چین روی شکل نشان داده شده است در ROC تبدیل  $z$  قرار می‌گیرد و در نتیجه سیگنال به ازاء  $1 > |\alpha|$  تبدیل فوریه گسته در زمان دارد. همچنین ملاحظه می‌کنید تبدیل  $z$  این سیگنال یک قطب در  $z = \alpha$  و یک صفر در  $z = 0$  دارد.

تلذیح، دقต کنید تبدیل  $z$  هر دو سیگنال  $\alpha^n u[n] - \alpha^n u[-n-1]$  یکسان و برابر  $\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$  است. تنها وجه تمایز این دو سیگنال نواحی همگرائی آنهاست که برای یکی  $|z| > |\alpha|$  و برای دیگری  $|z| < |\alpha|$  است. لذا ناحیه همگرائی تبدیل  $z$  جهت محاسبه عکس تبدیل  $z$  هر سیگنال لازم است. به عبارت دیگر در این مورد خاص داریم:

$$z^{-1} \left\{ \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \right\} = \begin{cases} \alpha^n u[n] & |z| > |\alpha| \\ -\alpha^n u[-n-1] & |z| < |\alpha| \end{cases}$$

تلذیح، همانند تبدیل لاپلاس یکطرفه، در تبدیل  $z$  یکطرفه نیز مبحث تحت عنوان ROC مطرح نیست. دلیل این امر حدود سیگما در تبدیل  $z$  یکطرفه می‌باشد که از صفر تا  $+\infty$  است. لذا در هنگام عکس تبدیل  $z$  گرفتن هیچگونه ابعامی نداریم و سیگنال واقع در  $n \geq 0$  را انتخاب می‌کنیم.

تلذیح، با قرار دادن  $\alpha = 1$  در روابط بدست آمده می‌توان تبدیل  $z$  سیگنال‌های  $u[n]$  و  $-u[-n-1]$  را بدست آورد:

$$Z\{u[n]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| > 1$$

$$Z\{-u[-n-1]\} = \frac{1}{1-z^{-1}} \quad |z| < 1$$

نکره دانستن تبدیل  $z$  برخی از سیگنال‌های مهم مفید می‌باشد و از آن‌ها در هنگام عکس تبدیل  $z$  گرفتن استفاده می‌شود. در جدول (۱۸) - (۱) برخی از این سیگنال‌ها و تبدیل  $z$  آن‌ها آورده شده‌اند. به خاطر سپردن این جدول به دانشجویان توصیه می‌شود.

ROC	تبدیل $z$	سیگنال
تمام صفحه مختلط	$X(z) = 1$	$x[n] = \delta[n]$
$ z  > 1$	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$x[n] = u[n]$
$ z  < 1$	$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$	$x[n] = -u[-n-1]$
تمام صفحه مختلط غیر از صفر (اگر $m > 0$ یا $(m < 0)$ اگر)	$X(z) = z^{-m}$	$x[n] = \delta[n-m]$
$ z  >  \alpha $	$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$x[n] = \alpha^n u[n]$
$ z  <  \alpha $	$X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$	$x[n] = -\alpha^n u[-n-1]$
$ z  >  \alpha $	$X(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$x[n] = n \alpha^n u[n]$
$ z  <  \alpha $	$X(z) = \frac{\alpha z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})^2}$	$x[n] = -n \alpha^n u[-n-1]$
$ z  > 1$	$X(z) = \frac{1 - [\cos(\omega_0)]z^{-1}}{1 - [2\cos(\omega_0)]z^{-1} + z^{-2}}$	$x[n] = [\cos(\omega_0 n)]u[n]$
$ z  > 1$	$X(z) = \frac{[\sin(\omega_0)]z^{-1}}{1 - [2\cos(\omega_0)]z^{-1} + z^{-2}}$	$x[n] = [\sin(\omega_0 n)]u[n]$
$ z  > r$	$X(z) = \frac{1 - [r\cos(\omega_0)]z^{-1}}{1 - [2r\cos(\omega_0)]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$x[n] = [r^n \cos(\omega_0 n)]u[n]$
$ z  > r$	$X(z) = \frac{[r\sin(\omega_0)]z^{-1}}{1 - [2r\cos(\omega_0)]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$	$x[n] = [r^n \sin(\omega_0 n)]u[n]$

 جدول ۱۸-۱- تبدیل  $z$  برخی سیگنال‌های مهم گسترش دار زمان

برای سیگنال‌های کمیتی سبک نیز طبقاتی از آنها برخواهد

## تمثیله و تبدیل سیستمها

مثال: تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n] = 2^n u[n] + 3^{n+1} u[-n-1]$  را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۸ - ۱) استفاده کرده و تبدیل  $z$  هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آورید:

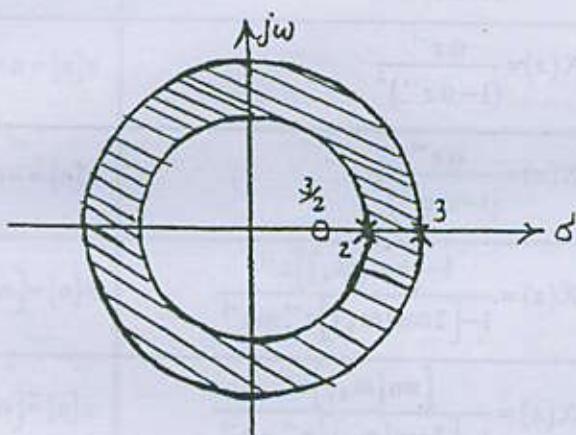
$$2^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

$$3^{n+1} u[-n-1] = 3 \times 3^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-3}{1-3z^{-1}} \quad |z| < 3$$

در صورتی که نواحی همگرانی جملات فوق با یکدیگر اشتراک داشته باشند، آنگاه طبق خاصیت خطی تبدیل  $z$ ، می‌توان تبدیل  $z$  آن‌ها را با یکدیگر جمع کرد. بنابراین داریم:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{-3}{1-3z^{-1}} = \frac{-2+3z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-3z^{-1})}$$

ناحیه همگرانی فوق در شکل زیر نشان داده شده است. این تبدیل دارای دو قطب در  $z=2$  و  $z=3$  و یک صفر در  $z=\frac{3}{2}$  است و در شکل مشخص شده‌اند. دقت کنید چون دایره واحد در ROC قرار نگرفته، پس سیگنال فاقد تبدیل فوریه است.



مثال: تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - 2^n u[n]$  را بدست آورید.

حل: از جدول (۱۸ - ۱) استفاده کرده و تبدیل  $z$  هر کدام از جمله‌ها را بدست می‌آورید:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] \xrightarrow{z} \frac{-1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| < \frac{1}{2}$$

$$2^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad |z| > 2$$

مالحظه می‌کنید دو ناحیه همگرانی هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند و در نتیجه  $[n] x[n]$  تبدیل  $z$  ندارد. بدیهی است این سیگنال فاقد تبدیل فوریه نیز می‌باشد.

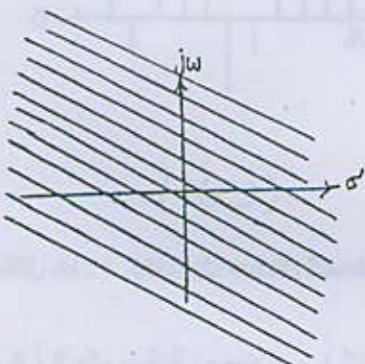


خواص ناحیه همگرایی (ROC) تبدیل  $z$ : ملاحظه کردید برای مشخص کردن کامل تبدیل  $z$ ، هم عبارت جبری  $X(z)$  و هم ناحیه همگرایی آن لازم است. در این بخش برخی خواص ROC را بررسی کرده و خواهیم دید ROC تبدیل  $z$  سیگنال‌ها تا حدودی به شکل آن‌ها در حوزه زمان بستگی دارد.

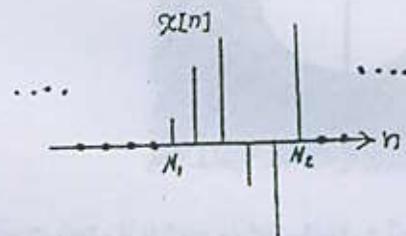
(۱) ROC تبدیل  $z$  در صفحه مختلط از دوایر و حلقه‌هایی به مرکز مبدأ مختصات تشکیل می‌شود.

(۲) ROC تبدیل  $z$  های گویا هیچ قطبی را شامل نمی‌شود.

(۳) اگر  $x[n]$  یک سیگنال با عرض محدود (Finite Duration) و مطلقاً جمع‌بندیر باشد، آنگاه ROC تبدیل  $z$  آن شامل تمام صفحه مختلط غیر از  $z = 0$  یا  $z = \infty$  یا  $z = 0$  و  $z = \infty$  است. یعنی با توجه به شکل سیگنال نقطه  $z = 0$  یا  $z = \infty$  یا هم  $z = 0$  و  $z = \infty$  از ناحیه همگرایی خارج می‌شوند. سیگنال با عرض محدود سیگنالی است که به ازاء  $N_1 < n < N_2$  برابر صفر باشد (مثلًا سیگنال  $x[n] = u[n] - u[n-5]$ ). در شکل (۱۸-۱) یک سیگنال فرضی با عرض محدود و ROC تبدیل  $z$  آن نشان داده شده‌اند. بدیهی است با توجه به خاصیت (۲)، تبدیل  $z$  سیگنال با عرض محدود فاقد قطب است.



(ب)



(الف)

شکل (۱۸-۱) (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی با عرض محدود (ب) تابعه همگرایی تبدیل  $z$  آن گل صفحه مختلط است.

فرض کنید  $x[n]$  یک سیگنال با عرض محدودگسته در بازه زمانی  $[N_1, N_2]$  باشد آنگاه تبدیل  $z$  این سیگنال را می‌توان به

صورت زیر نوشت:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=N_1}^{N_2} x[n] z^{-n} = x[N_1] z^{-N_1} + \dots + x[N_2] z^{-N_2}$$

در رابطه فوق سه وضعیت مختلف ممکن است اتفاق بیفتد:

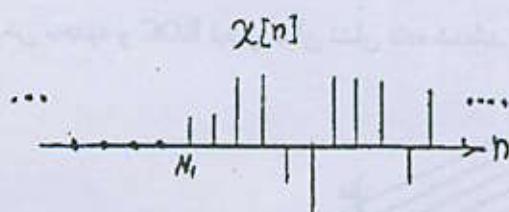
الف - اگر  $0 < N_1$  و  $0 < N_2$  باشند آنگاه چند جمله‌ای  $(z)$   $X$  شامل جمله‌های  $z$  به توان اعداد مثبت می‌باشد. بدیهی است در این حالت  $z=0$  در ROC می‌باشد اما  $z=\infty$  نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

ب - اگر  $0 < N_1$  و  $0 > N_2$  باشند آنگاه چند جمله‌ای  $(z)$   $X$  شامل جمله‌های  $z$  به توان هم عدد مثبت و هم عدد منفی می‌باشد. بدیهی است در این حالت  $z=0$  و  $z=\infty$  هیچکدام نمی‌توانند در ROC قرار گیرند.

## تمثیله و تحلیل سیستم‌ها

ج - اگر  $0 < N_1 < 0$  باشد آنگاه چند جمله‌ای ( $z$ )  $X$  شامل جمله‌های  $z$  به توان اعداد منفی می‌باشد بدینه است در این حالت  $z = \infty$  در ROC می‌باشد اما  $z = 0$  نمی‌تواند در ROC قرار گیرد.

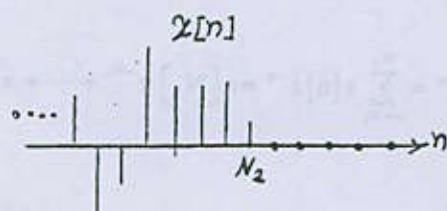
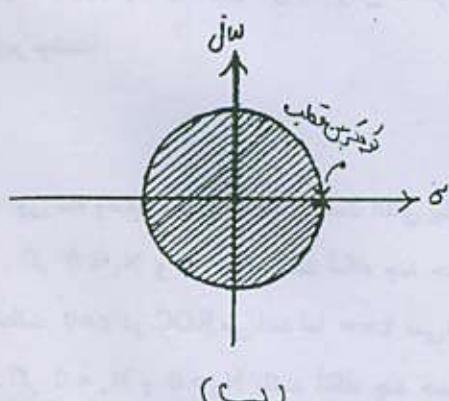
(۴) اگر  $x[n]$  یک سیگنال سمت راستی (Right Sided) باشد و دایره  $|z| = r_0$  در ROC تبدیل  $z$  آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر  $z$  با  $r_0 > |z| > 0$  غیر از احتماً  $z = \infty$  در ROC تبدیل  $z$  آن قرار دارند. سیگنال سمت راستی سیگنالی است که به ازاء  $n < N_1$  برابر صفر باشد (مثالاً سیگنال  $[n]u[n]$ ). با توجه به آنچه در بند (۳) آورده شد نتیجه می‌گیریم اگر  $0 < N_1 < 0$  باشد آنگاه  $z = \infty$  جزو ROC تبدیل  $z$  نیست. در شکل (۱۸ - ۲) یک سیگنال فرضی سمت راستی و ROC تبدیل  $z$  آن نشان داده شده‌اند. با توجه به خاصیت (۲) نتیجه می‌گیریم ROC تبدیل  $z$  یک سیگنال سمت راستی بین بزرگترین قطب (قطبی که دامنه آن بزرگترین است) تا بین نهایت می‌باشد.



(الف)

شکل ۱۸ - ۲ - (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی سمت راستی (ب) نامیه همگرایی تبدیل  $z$  آن  $r_0 > |z| > 0$  است

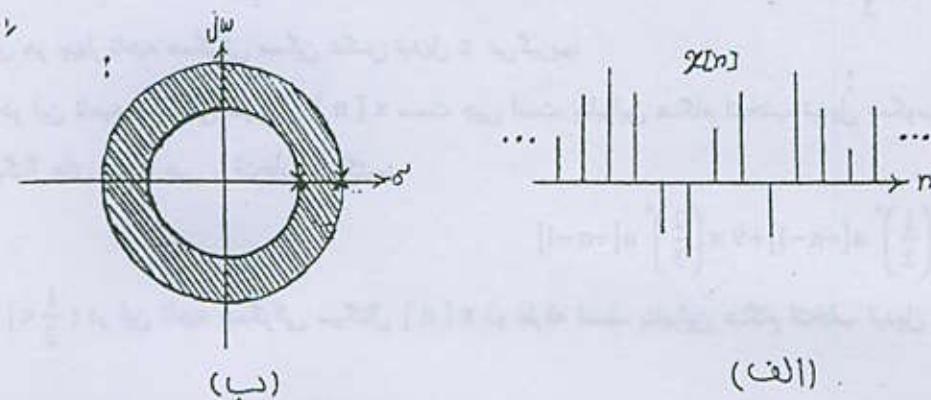
(۵) اگر  $x[n]$  یک سیگنال سمت چپی (Left Sided) باشد و دایره  $|z| = r_0$  در ROC تبدیل  $z$  آن قرار داشته باشد، آنگاه تمام مقادیر  $z$  با  $r_0 < |z| < 0$  غیر از احتماً  $z = 0$  در ROC تبدیل  $z$  آن قرار دارند. سیگنال سمت چپی سیگنالی است که به ازاء  $n > N_2$  برابر صفر باشد (مثالاً سیگنال  $[-n]u[n]$ ). با توجه به آنچه در بند (۳) آورده شده نتیجه می‌گیریم اگر  $0 > N_2 > 0$  باشد آنگاه  $z = 0$  جزو ROC تبدیل  $z$  نیست. در شکل (۱۸ - ۳) یک سیگنال فرضی سمت چپی و ROC تبدیل  $z$  آن نشان داده شده‌اند. با توجه به خاصیت (۲) نتیجه می‌گیریم ROC تبدیل  $z$  یک سیگنال سمت چپی بین مبدأ مختصات تا کوچکترین قطب (قطبی که دامنه آن کوچکترین است) می‌باشد.



(الف)

شکل ۱۸ - ۳ - (الف) یک سیگنال گسسته در زمان فرضی سمت چپی (ب) نامیه همگرایی تبدیل  $z$  آن  $r_0 < |z| < 0$  است.

(۶) اگر  $x[n]$  یک سیگنال دو طرفه (Two Sided) باشد و دایره  $|z| = r_0$  در ROC تبدیل  $z$  آن قرار داشته باشد، آنگاه  $ROC$  تبدیل  $z$  آن حلقه‌ای در صفحه مختلط شامل دایره  $|z| = r_0$  است. سیگنال دو طرفه سیگنالی است که گستره آن در محور زمان از  $-\infty$  تا  $+\infty$  باشد (متلاً سیگنال  $\cos(\omega_0 n)$ ). در شکل (۱۸ - ۴) یک سیگنال فرضی دو طرفه و ROC تبدیل  $z$  آن نشان داده شده‌اند. بدین‌پی است با توجه به خاصیت (۲)، ROC تبدیل  $z$  یک سیگنال دو طرفه بین دو قطب متواالی (دو قطبی که دامنه آن‌ها متواالی است) می‌باشد.



شکل ۱۸ - ۴ - (الف) یک سیگنال گستته در زمان هر دو طرفه (ب) نامیه همگرانی تبدیل  $z$  آن  $|z| < r_0$  است.

مثال: تبدیل  $z$  یک سیگنال گستته در زمان  $X(z) = \frac{2z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{2}{3}z^{-1})}$  می‌باشد. در نواحی همگرانی مختلف در مورد

شکل این سیگنال بحث کنید.

(۱)  $X(z)$  دارای سه قطب در  $z = \frac{1}{2}$ ،  $z = \frac{2}{3}$  و  $z = 2$  می‌باشد. بنابراین چهار ناحیه همگرانی می‌توان برای آن و به شرح زیر در

نظر گرفت:

$|z| < \frac{1}{2}$  : سیگنال  $x[n]$  یک سیگنال سمت چپی است و تبدیل فوریه ندارد.

$\frac{1}{2} < |z| < \frac{2}{3}$  : سیگنال  $x[n]$  یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه ندارد.

$\frac{2}{3} < |z| < 2$  : سیگنال  $x[n]$  یک سیگنال دو طرفه است و تبدیل فوریه دارد.

$|z| > 2$  : سیگنال  $x[n]$  یک سیگنال سمت راستی است و تبدیل فوریه ندارد.

محاسبه عکس تبدیل  $z$ : با انجام محاسبات ساده می‌توان معادله عکس تبدیل  $z$  را به صورت زیر بدست آورد:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

معادله فوق نشان می‌دهد که می‌توان  $[n] x$  را با انتگرال گیری روی مسیری دایروی به شعاع  $r$  و مرکز مبدأ در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت محاسبه کرد. مسیر  $r$  از ناحیه همگرانی  $(z)$  انتخاب می‌شود. عملاً از روش‌های دیگر برای محاسبه عکس تبدیل  $z$  استفاده می‌شود که متداولترین آن‌ها برای توابع گویا از  $z$  استفاده از روش بسط به کسرهای جزئی می‌باشد.

## تمثیله و تمدید سیستم‌ها

مثال: برای  $X(z)$  داده شده در مثال قبل، معکوس تبدیل  $z$  را محاسبه کنید.

حل: اگر  $X(z)$  را به کسرهای جزئی بسط دهیم، داریم:

$$X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} + \frac{8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-9}{1-\frac{2}{3}z^{-1}}$$

حال روی هر چهار ناحیه همگرانی ممکن عکس تبدیل  $z$  می‌گیریم:

$1 - 18)$  سیگنال‌های سمت چپی را انتخاب می‌کنیم: در این ناحیه همگرانی سیگنال  $x[n]$  سمت چپی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول

$z < |z| < \frac{1}{2}$ : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $x[n]$  دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول

$1 - 18)$  باید تواناً سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی را انتخاب کنیم. با توجه به این که ناحیه همگرانی فوق از اشتراک  $\frac{1}{2} < |z| < 2$  و  $z < |z| < \frac{2}{3}$  بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب  $\frac{1}{2} = z$  از سیگنال سمت راستی و برای قطب‌های  $\frac{2}{3} = z$  و

از سیگنال‌های سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = -2^n u[-n-1] + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n u[-n-1]$$

$z < |z| < 2$ : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $x[n]$  دو طرفه است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام از جمله‌ها از جدول

$1 - 18)$  باید تواناً سیگنال‌های سمت راستی و سمت چپی را انتخاب کنیم. با توجه به این که ناحیه همگرانی فوق از اشتراک  $\frac{1}{2} < |z| < 2$  و  $z < |z| < \frac{2}{3}$  بدست می‌آید، لذا در هنگام انتخاب سیگنال‌ها، برای قطب‌های  $\frac{1}{2} = z$  و  $\frac{2}{3} = z$  از سیگنال‌های سمت راستی و برای قطب  $2 = z$  از سیگنال سمت چپی استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = -2^n u[-n-1] + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$

$|z| > 2$ : در این ناحیه همگرانی سیگنال  $x[n]$  سمت راستی است. بنابراین هنگام انتخاب تبدیل معکوس هر کدام جملات از جدول  $1 - 18)$  از سیگنال‌های سمت راستی استفاده می‌کنیم:

$$x[n] = 2^n u[n] + 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 9 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n u[n]$$



تست نمونه - (ازاد ۸۴) سیگنال  $x[n]$  مطلقاً جمع‌بذری و دارای تبدیل  $z$  به صورت  $X(z) = \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}}$  است.  $x[n]$  به چه صورت خواهد بود؟

$$x[n] = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} + \left( -\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right] u[-n] \quad (2)$$

$$x[n] = \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} + \left( -\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right] u[n] \quad (1)$$

$$x[n] = \left[ 4 \left( \frac{1}{2} \right)^n + 4 \left( -\frac{1}{4} \right)^n \right] u[n] \quad (3)$$

$$x[n] = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] - \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} \right)^n u[n] \quad (3)$$

هل:

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{3}{z - \frac{1}{4} - \frac{1}{8}z^{-1}} = \frac{3z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{3z^{-1}}{\left( 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left( 1 + \frac{1}{4}z^{-1} \right)} \\ &= \frac{\frac{4}{z}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-4}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \end{aligned}$$

سیگنال  $x[n]$  مطلقاً جمع‌بذری است. بنابراین تبدیل فوریه دارد و در نتیجه ROC آن شامل دایره واحد است. از طرفی چون قطب‌های آن هر دو درون دایره واحد قرار گرفته‌اند بنابراین ROC آن  $\frac{1}{2} < |z| < \infty$  و در نتیجه سیگنال سمت راستی است. بنابراین:

$$x[n] = 4 \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] - 4 \left( -\frac{1}{4} \right)^n u[n] = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-2} u[n] + \left( -\frac{1}{4} \right)^{n-1} u[n]$$

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## ۱۸ - خواص تبدیل $z$

در این بخش به معرفی خواص تبدیل  $z$  و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم. به کمک این خواص می‌توان تبدیل  $z$  سیگنال‌های پیچیده‌تر را بدست آورد و در موارد دیگر از جمله تحلیل سیستم‌های LTI و سیستم‌های بیان شده توسط معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت استفاده کرد. این خواص در جدول (۱۸ - ۲) آورده شده‌اند و فراگیری آن به دانشجویان توصیه می‌شود. دقت کنید در این جدول علاوه بر تبدیل  $z$ ، ناحیه همگرائی تبدیل نیز اهمیت دارد.

(۱) خطی بودن: به دلیل استفاده از اپراتور سیگما جهت محاسبه تبدیل  $z$ ، خاصیت خطی برای تبدیل  $z$  وجود دارد. دقت کنید همانند تبدیل لاپلاس هنگام ایجاد یک ترکیب خطی از تبدیل  $z$  چند سیگنال، ممکن است حذف صفر و قطب داشته باشیم و در نتیجه ناحیه همگرائی بزرگتر از اشتراک نواحی همگرائی تبدیل  $z$  ها گردد.

(۲) جابجایی زمانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان جایجا شود، تبدیل  $z$  آن در  $z^{-n}$  ضرب می‌شود. تنها تغییری که در ناحیه همگرائی به وجود می‌آید اضافه یا حذف شدن  $z = 0$  یا  $z = \infty$  به یا از ناحیه همگرائی است. دلیل آن است که ضرب  $z^{-n}$  ممکن است وضعیت مثبت یا منفی بودن توان  $z$  ها را در بسط تبدیل  $z$  تغییر دهد. عنوان مثال اگر  $X(z) = 1 + 2z$  باشد، آنگاه  $z = \infty$  در ROC واقع نیست. اگر این تبدیل در  $z^{-2}$  ضرب شود آنگاه  $X(z) = z^{-2} + 2z^{-1}$  می‌شود. در نتیجه در این حالت  $z = 0$  در ROC نخواهد بود. این خاصیت از جمله خواص مهم می‌باشد و برای تحلیل سیستم‌های گسته بیان شده توسط معادله تفاضلی خطی با ضرایب ثابت مفید می‌باشد.

## تمثیل و تبدیل سیستم ها

ROC	تبدیل z	سیگنال گسته	خاصیت
$R_x : \alpha <  z  < \beta$	$X(z)$	$x[n]$	
$R_1$	$X_1(z)$	$x_1[n]$	
$R_2$	$X_2(z)$	$x_2[n]$	
$R_1 \cap R_2$ حاصل	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$ax_1[n] + bx_2[n]$	خطی بودن
$R_x \pm \{z=0\}$	$z^{-n_0} X(z)$	$x[n-n_0]$	جایجای زمانی
$R_x$	$X(e^{-j\omega_0} z)$	$(\text{پیوند خارجی}) e^{j\omega_0 n} x[n]$	
$z_0 R_x :  z_0  \alpha <  z  <  z_0  \beta$	$X\left(\frac{z}{z_0}\right)$	$\text{پیوند خارجی} + \text{پیوند خود} z_0^n x[n]$	تغییر مقیاس در حوزه z
$aR_x :  a  \alpha <  z  <  a  \beta$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$	$\text{پیوند خارجی} - \text{پیوند خود} a^n x[n]$	
$R_x^{-1} : \frac{1}{\beta} <  z  < \frac{1}{\alpha}$	$X(z^{-1})$	$x[-n]$	وارونگی زمانی
$R_x^{\frac{1}{k}} : \alpha <  z ^k < \beta$	$X(z^k)$	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[r] & n=rk \\ 0 & n \neq rk \end{cases}$	انبساط زمانی
$R_x^M : \alpha <  z ^M < \beta$	$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(z^{\frac{1}{M}} e^{-j\frac{2k\pi}{M}}\right)$ $X(e^{j\omega}) = 0 \quad \omega_c <  \omega  < \pi$	$x[Mn]$	انتباشت زمانی
$R_x$	$X^*(z^*)$	$x^*[n]$	مزدوج گیری
$R_1 \cap R_2$ حاصل	$X_1(z)X_2(z)$	$x_1[n]*x_2[n]$	کانولوشن در حوزه زمان
$R_x \cap \{ z  > 0\}$ حاصل	$(1-z^{-1})X(z)$	$x[n] - x[n-1]$	تفاضل اول
$R_x \cap \{ z  > 1\}$ حاصل	$\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$	$\sum_{k=-\infty}^0 x[k]$	جمع انتبارهای
$R_x$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	$n x[n]$	مشتق در حوزه z
قضایی مقدار اولیه: اگر $x[n] = 0$ برای $n < 0$ باشد، سیگنال $X(z)$ از این که کوربدهای خود را بررسی کند.			
$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$ , $x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z(X(z) - x[0])$ , $x[2] = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2(X(z) - x[0] - z^{-1}x[1])$ , ...			
$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n x[n] = X(-1), \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] = X(z) \Big _{z=1}$ مجموع نمونه های سیگنال:			

## جدول ۱۸ - ۲ - مفاهی تبدیل z

$$ROC_R = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{\beta} e^{-j\omega_0} + \frac{1}{\alpha} e^{j\omega_0} \right) \quad (Convolution)$$

$$ROC_z = \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{\beta} e^{-j\omega_0} - \frac{1}{\alpha} e^{j\omega_0} \right) \quad (\text{Convolution})$$

مثال: یک سیستم LTI گسته با معادله تفاضلی  $[n-1]y[n]-2y[n-1]+y[n-2]=2x[n]$  را در نظر بگیرید.تابع تبدیل و پاسخ ضربه سمت راستی این سیستم را تعیین کنید.

هل: از طرفین معادله فوق تبدیل  $z$  گرفته و داریم:

$$Y(z)(1-2z^{-1}+z^{-2})=zX(z) \Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{2z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \Rightarrow h[n]=2nu[n]$$

(۳) تغییر مقیاس در حوزه  $z$ : به سه طریق تبدیل  $z$  یک سیگنال تغییر مقیاس پیدا می‌کند:

(الف) با ضرب  $e^{j\omega n}$  در سیگنال زمانی،  $x[n]e^{-j\omega n}$  در  $z$  خرب شده و باعث می‌شود صفرها و قطب‌های تبدیل  $z$  در جهت دایره‌ای جابجا شوند (چرخش پیدا کنند). بدینه است ناحیه همگرایی تغییر نمی‌کند.

(ب) با ضرب  $z^n$  در سیگنال زمانی،  $x[n]z^n$  تبدیل شده و باعث می‌شود صفرها و قطب‌ها علاوه بر چرخش در مسیر شعاعی نیز حرکت کنند. بدینه است در این حالت ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

(ج) با ضرب  $z^a$  در سیگنال زمانی،  $x[n]z^a$  تبدیل شده ( $a$  عدد حقیقی است) و باعث می‌شود صفرها و قطب‌ها در مسیر شعاعی جابجا شوند. در این حالت نیز ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

(۴) وارونگی زمانی: اگر سیگنال در حوزه زمان نسبت به محور عمودی قرینه شود، آنگاه در تبدیل  $z$  آن  $z$  به  $\frac{1}{z}$  تبدیل می‌شود. بدینه است در این حالت ROC ممکن است کوچکتر یا بزرگتر گردد.

(۵) انبساط زمانی: اگر سیگنال در حوزه زمان با ضربی  $k$  گسترده شود آنگاه در تبدیل  $z$  آن  $z^k$  تبدیل می‌شود بدینه است با این تبدیل ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) تبدیل  $z$  سیگنال زمان گسته  $x[n]$  را  $X(z)$  می‌نامیم. تبدیل  $z$  سیگنال

$$Y(z)=z^2 X(z) \quad (۴) \qquad Y(z)=z^{-2} X(z) \quad (۳) \qquad Y(z)=z X(z^2) \quad (۲) \qquad Y(z)=z^{-1} X(z^2) \quad (۱)$$

هل:  $y[n]=x_{(2)}[n-1]$  است و بنابراین  $Y(z)=z^{-1} X(z^2)$  می‌باشد و در نتیجه گزینه (۱) صحیح است.

(۶) انقباض زمانی: اگر یک سیگنال گسته در زمان باند محدود باشد، آن‌گاه انقباض زمانی باعث تبدیل  $z$  به  $z^M$  توأم با چرخش صفرها و قطب‌ها می‌شود. بدینه است پس از این تبدیل ROC کوچکتر یا بزرگتر می‌شود.

مثال: فرض کنید  $x[n]$  یک سیگنال گسته با باند محدود با تبدیل  $z$   $X(z)$  است. تبدیل  $z$  سیگنال‌های  $x[2n]$  و  $x[3n]$  را به دست آورید.

$$x[n]=0, n < 0 \Rightarrow X(z)=x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\dots$$

(۱) یک سری‌ال‌ال

$$x[2n]=x[0]z^2+x[1]z^4+\dots$$

$$x[3n]=x[0]z^3+x[1]z^6+\dots$$

هل :

$$x[2n] \xrightarrow{z} \frac{1}{2} \left[ X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(z^{\frac{1}{2}} e^{-j\pi}\right) \right] = \frac{1}{2} \left[ X\left(z^{\frac{1}{2}}\right) + X\left(-z^{\frac{1}{2}}\right) \right]$$

$$x[3n] \xrightarrow{z} \frac{1}{3} \left[ X\left(z^{\frac{1}{3}}\right) + X\left(z^{\frac{1}{3}} e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right) + X\left(z^{\frac{1}{3}} e^{-j\frac{4\pi}{3}}\right) \right]$$

(7) مزدوج گیری: اگر سیگنال در حوزه زمان مزدوج گردد، آنگاه در تبدیل  $z$  آن علاوه بر مزدوج شدن تابع تبدیل،  $z$  نیز مزدوج می‌شود.

مثال: اگر تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n]$  را با  $X(z)$  نشان دهیم و ناحیه همگرانی آن  $4 < |z| < 1$  باشد، تبدیل  $z$  سیگنال  $y[n] = 2x[-n+3] + 4^n x_{(2)}[n-1]$  و ناحیه همگرانی آن را بدست آورید

هل : از جدول (۱۸ - ۲) استفاده کرده و داریم:

$2x^*[n] \xrightarrow{z} 2X^*(z^*)$	ROC: $1 <  z  < 4$
$2x^*[n+3] \xrightarrow{z} 2z^3 X^*(z^*)$	ROC: $1 <  z  < 4$
$2x^*[-n+3] \xrightarrow{z} 2z^{-3} X^*\left(\left(z^{-1}\right)^*\right)$	ROC: $\frac{1}{4} <  z  < 1$
$x_{(2)}[n] \xrightarrow{z} X(z^2)$	ROC: $1 <  z  < 2$
$x_{(2)}[n-1] \xrightarrow{z} z^{-1} X(z^2)$	ROC: $1 <  z  < 2$
$4^n x_{(2)}[n-1] \xrightarrow{z} \left(\frac{z}{4}\right)^{-1} X\left(\frac{z^2}{16}\right)$	ROC: $4 <  z  < 8$

مالحظه کنید تبدیل  $z$  دو جمله مربوط به  $y[n]$  نواحی همگرانی مشترک ندارند و بنابراین  $y[n]$  تبدیل  $z$  ندارد.

(8) کانولوشن در حوزه زمان: اگر دو سیگنال گستته در حوزه زمان با یکدیگر کانولو شوند آنگاه تبدیل  $z$  های آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. از این خاصیت چهت تحلیل سیستم‌های LTI گستته در زمان استفاده می‌شود. ناحیه همگرانی حداقل اشتراک نواحی همگرانی تبدیل  $z$  دو سیگنال است.

مثال: یک سیستم LTI گستته در زمان با معادله تفاضلی  $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n]$  را در نظر بگیرید. تابع تبدیل  $H(z)$

این سیستم را به دست آورده و پاسخ این سیستم به ورودی  $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  را تعیین کنید.

هل : از طرفین معادله تفاضلی تبدیل  $z$  گرفته و تابع تبدیل را بدست می‌آوریم:

$$Y(z) \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right) = X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}$$



برای تعیین خروجی این سیستم از قضیه کانولوشن در حوزه زمان استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} Y(z) = H(z)X(z) &= \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}\right)} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left[1 - \left(\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]\left[1 - \left(\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}\right]} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-j0.58}{1 - \left(\frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}} + \frac{j0.58}{1 - \left(\frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z^{-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \\ \Rightarrow y[n] &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)\right]u[n] \end{aligned}$$

(۹) تفاضل اول: اگر از یک سیگنال گستته در زمان تفاضل اول گرفته شود آنگاه تبدیل  $z$  آن در  $(1-z^{-1})$  ضرب می‌شود. ناحیه همگرانی تبدیل  $z$  حداقل اشتراک بین  $R$  و  $|z| > 0$  است.

(۱۰) جمع انبارهای: اگر جمع انبارهای یک سیگنال در حوزه زمان محاسبه گردد، آنگاه تبدیل  $z$  آن بر  $(1-z^{-1})$  تقسیم می‌شود. از آنجائیکه پاسخ ضربه جمع کننده انبارهای تابع پله واحد است، بنابراین ناحیه همگرانی تبدیل حداقل اشتراک بین  $R$  و  $|z| > 1$  می‌باشد.

تذکرہ: از آنجائیکه پاسخ ضربه سیستم گستته در زمان با رابطه خروجی - ورودی  $y[n] = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k]u[-n-k]$  است و با توجه به تبدیل  $z$  و ناحیه همگرانی  $|z| > 1$  داریم:

$$z \left\{ \sum_{k=n+1}^{+\infty} x[k] \right\} = -\frac{X(z)}{1-z^{-1}} \quad \text{ROC: } R \cap |z| < 1$$

(۱۱) مشتق در حوزه  $z$ : اگر یک سیگنال در حوزه زمان در  $n$  ضرب شود، آنگاه از تبدیل  $z$  آن بر حسب  $z$  مشتق گرفته شده و در  $z$  ضرب می‌شود. بدینهی است چون مشتق از یک تابع گویا باعث حذف قطب یا ایجاد قطب جدید نمی‌شود، بنابراین ناحیه همگرانی تغییر تخواهد کرد.

تست نمونه - اگر تبدیل  $z$  سیگنال  $x[n]$  را  $X(z)$  بنامیم و  $X(z) = \ln(1+z^{-1})$  روی ناحیه همگرانی  $|z| > 1$  باشد،  $x[n]$  کدام است؟

$$x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} u[n] \quad (1) \quad x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} u[n-1] \quad (2) \quad x[n] = \frac{(-1)^n}{n} u[n] \quad (3) \quad x[n] = \frac{(-1)^n}{n} u[n-1] \quad (4)$$

حل:

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z) = \ln(1+z^{-1})$$

$$nx[n] \xrightarrow{z} -z \frac{dx(z)}{dz} = (-z) \frac{-z^{-2}}{1+z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

با توجه به جدول (۱۸ - ۱) داریم:

$$nx[n] = (-1)^{n-1} u[n-1] \Rightarrow x[n] = \frac{(-1)^{n-1}}{n} u[n-1]$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

(۱۲) قضایای مقدار اولیه: اگر  $x[n]$  یک سیگنال گیبسته در زمان و در  $0 < n$  فاقد نمونه باشد، آنگاه نمونه صفرم، اول، دوم و ... آن را می‌توان از روابط داده شده در جدول (۱۸ - ۲) بدست آورد.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) فرض کنید یک سیستم LTI و علی توسط معادله تفاضلی زیر توصیف شده است:

$$y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] = -6x[n] + x[n-1]$$

در صورتی که ورودی به صورت  $x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$  باشد، کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم نادرست است؟

$$y[n] = -2(n+3)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \quad (۲)$$

$$y[n] = \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)u[n] \quad (۱)$$

$$y[n] = -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n-1] \quad (۴) \quad y[n] = -6(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u[n] \quad (۳)$$

هل: با روش‌های مختلف می‌توان این تست را حل کرد. یکی از این روش‌ها استفاده از قضیه مقدار اولیه و تعیین  $y[0]$  است.

$$y[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} H(z)X(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-6+z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} = -6$$

تنها گزینه (۱) است که در آن  $y[0] \neq 0$  است.

مثال: فرض کنید تبدیل  $z$  یک سیگنال برابر  $X(z) = \frac{z^3+2z^2-4z+1}{2z^3-z^2+z+2}$  باشد. نمونه صفرم و اول این سیگنال را بدست آورید. (فرض کنید سیگنال فوق هیچ نمونه‌ای در  $0 < n$  نداشته باشد.)

هل: از قضایای مقدار اولیه استفاده کرده و داریم:

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = \frac{1}{2}$$

$$x[1] = \lim_{z \rightarrow \infty} z \left( \frac{z^3+2z^2-4z+1}{2z^3-z^2+z+2} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{2}z^3 - \frac{9}{2}z^2}{2z^3 - z^2 + z + 2} = \frac{5}{4}$$

تذکرہ: تعیین مقادیر اولیه یک سیگنال گستته در زمان با تبدیل  $z$  گویا را می‌توان از روش‌های دیگر نیز به دست آورد. یکی از این روش‌ها تقسیم صورت بر مخرج است. به عنوان نمونه برای مثال اخیر داریم:

$$\begin{array}{r} z^3 + 2z^2 - 4z + 1 \\ z^3 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z + 1 \\ \hline - \quad + \quad - \quad - \\ \frac{5}{2}z^2 - \frac{9}{2}z \\ \hline \frac{5}{2}z^2 - \frac{5}{4}z + \frac{5}{4} + \frac{5}{2}z^{-1} \\ \hline - \quad + \quad - \quad - \\ \vdots \end{array}$$

با توجه به خارج قسمت به دست آمده ملاحظه می‌کنید  $\frac{5}{4}x[0] = \frac{1}{2}x[1]$  و  $x[1] = 0$  به دست می‌آیند.

(۱۳) مجموع نمونه‌های سیگنال: اگر در رابطه تبدیل  $z$  یا یک سیگنال  $z = 1$  قرار داده شود، آن گاه ملاحظه می‌شود مجموع نمونه‌های سیگنال برابر مقدار تبدیل  $z$  آن به ازای  $z = 1$  است.

### ۱۸ - ۳ - تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI با تبدیل $z$ و اتصال آن‌ها

از تبدیل  $z$  مانند تبدیل لاپلاس می‌توان در تحلیل و توصیف سیستم‌های LTI استفاده کرد. اگر از خاصیت کانولوشن در حوزه زمان برای یک سیستم LTI گستته در زمان استفاده کنیم، داریم:

$$y[n] = x[n] * h[n] \Rightarrow Y(z) = X(z)H(z)$$

به عبارت دیگر تبدیل  $z$  خروجی برابر تبدیل  $z$  ورودی در تبدیل  $z$  پاسخ ضربه (تابع انتقال یا تابع سیستم یا تابع تبدیل) می‌باشد و با عکس تبدیل  $z$  گرفتن از  $(z)Y$  می‌توان  $y[n]$  را بدست آورد.

همچنین با توجه به آن که  $z^n$  یک تابع ویژه برای هر سیستم LTI گستته می‌باشد، اگر  $x[n] = z^n$  به سیستم اعمال شود، خروجی  $y[n] = H(z)z^n$  خواهد شد.

تذکرہ: رابطه  $Y(z) = H(z)X(z)$  فقط هنگامی صادق است که ناحیه همگرانی  $(z)Y$  که از اشتراک نواحی همگرانی  $X(z)$  و  $H(z)$  به دست می‌آید تهی نباشد. در غیر این صورت باید از قضیه کانولوشن برای به دست آوردن  $y[n]$  استفاده کرد.

تذکرہ: رابطه  $y[n] = H(z)z^n$  پاسخ حالت دائم سیستم را می‌دهد و برای تعیین پاسخ‌گذرای سیستم باید از قطب‌های  $(z)H(z)$  (فرکانس‌های طبیعی سیستم) استفاده کرد.

## تمثیله و تحلیل سیستمها

مثال: تابع تبدیل یک سیستم LTI گستته در زمان به صورت  $H(z) = \frac{1-kz^{-1}}{k+2z^{-1}+z^{-2}}$  است و k یک مقدار حقیقی می‌باشد اگر به این

سیستم ورودی  $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  اعمال کنیم، پاسخ حالت دانم برابر می‌شود مقدار k چقدر است؟

هل: چون  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  یک تابع ویژه برای سیستم می‌باشد بنابراین با توجه به اطلاعات داده شده داریم:

$$H(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \frac{1-2k}{k+4+4} = 2 \Rightarrow 1-2k = 2k+16 \Rightarrow k = -\frac{15}{4}$$

معمولاً از روی تابع تبدیل یک سیستم LTI می‌توان بسیاری از خواص آن را بدست آورد. از جمله این خواص علی و پایدار بودن سیستم LTI است.

تست نموله - در مورد یک سیستم LTI گستته در زمان با ورودی  $x[n]$  و خروجی  $y[n]$  مطالب زیر را می‌دانیم:

$$y[n] = x[n] = (-2)^n \quad \text{اگر به ازای تمام مقادیر } n \quad (1)$$

$$a \cdot y[n] = \delta[n] + a \left( \frac{1}{4} \right)^n u[n] = x[n] = \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] \quad \text{اگر به ازای تمام مقادیر } n \quad (2)$$

کدام است؟

۴) هیچکدام

$$a = \frac{9}{40} \quad (3)$$

$$a = -\frac{9}{40} \quad (2)$$

$$a = \frac{3}{40} \quad (1)$$

هل:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1+a}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}}{\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}} \xrightarrow{H(z)|_{z=-2}=1} 1 = \frac{1+\frac{8a}{9}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 1 + \frac{8a}{9} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{8a}{9} = -\frac{1}{5} \Rightarrow a = -\frac{9}{40}$$

بنابراین گزینه (2) صحیح است.

تست نموله - (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گستته LTI به صورت  $H(z) = \frac{1-az^{-1}+z^{-2}}{7+az^{-1}}$  می‌باشد. ضمناً می‌دانیم پاسخ این

سیستم به ورودی  $x[n] = a^n$  به صورت  $y[n] = a^{n+1}$  می‌باشد. مقدار a چقدر است؟

$$a = 0.5 \quad (4)$$

$$a = 1 \quad (3)$$

$$a = 1.5 \quad (2)$$

$$a = 2 \quad (1)$$

هل:

$$H(z) \Big|_{z=a} = a \Rightarrow \frac{1-1+a^{-2}}{8} = a \Rightarrow a^{-3} = 8 \Rightarrow a = \frac{1}{2}.$$

بنابراین گزینه (4) صحیح است.

علی بودن یک سیستم LTI گستته در زمان: اگر یک سیستم LTI علی باشد آنگاه پاسخ ضربه آن به ازاء  $0 < n$  برابر صفر است. در نتیجه پاسخ ضربه یک سیگنال سمت راستی است و ROC تابع تبدیل آن به صورت  $|z| > r_0$  است. عکس این گزاره لزوماً صادق نیست زیرا اگر ROC تابع تبدیل به صورت  $|z| > r_0$  باشد، فقط نتیجه می‌گیریم  $[n] h[n]$  سمت راستی است و صفر بودن آن به ازاء  $0 < n$  تضمین نمی‌شود. اما اگر تابع تبدیل گویا باشد می‌توان اثبات کرد که عکس گزاره نیز صحیح است. همچنین دقت کنید برای آن که سیستم علی باشد باید حتماً  $r = \infty$  در ROC قرار داشته باشد. (زیرا اگر ROC فاقد  $\infty$  باشد، این بدان معناست که در تابع تبدیل سیستم فوق جمله  $z$  به توان یک عدد مثبت داریم و این جمله طبق خاصیت شیفت در حوزه زمان باعث غیرعلی شدن سیستم می‌شود.) نابراین در حالت کلی قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: یک سیستم LTI گستته در زمان با تابع تبدیل  $(z) H$  علی است اگر و تنها اگر:

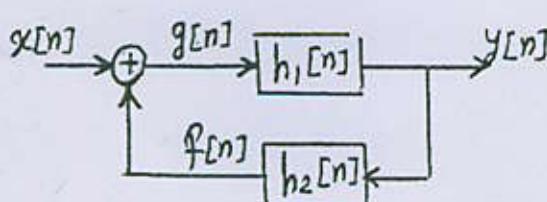
(الف) ROC خارج دایره‌ای بیرون از بیرونی‌ترین قطب باشد.

(ب) اگر  $(z) H$  به صورت نسبت دو چند جمله‌ای برحسب  $z$  بیان شود، درجه صورت نباید از درجه مخرج بزرگتر باشد.

پایداری یک سیستم LTI گستته: اگر یک سیستم LTI پایدار باشد، آنگاه پاسخ ضربه آن مطلقاً جمع‌پذیر است. در این صورت تبدیل فوریه پاسخ ضربه همگراست. چون تبدیل فوریه یک سیگنال در واقع تبدیل  $z$  آن بر روی دایره واحد است در نتیجه قضیه زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

قضیه: یک سیستم LTI پایدار است اگر و تنها اگر ناحیه همگرانی تابع تبدیل  $(z) H$  آن شامل دایره واحد باشد.

تست لمونه - (آزاد ۸۳) یک سیستم LTI در شکل زیر نمایش داده شده است:



چنانچه داشته باشیم:

$$y[n] = g[n] - \frac{3}{2}g[n-1] - g[n-2]$$

$$f[n] = \frac{3}{2}f[n-1] + f[n-2] + y[n-2] - \frac{3}{2}y[n-1]$$

سیستم فوق به ازاء کدام یک از نواحی همگرانی تابع تبدیل  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  زیرپایدار است؟

$$\frac{1}{2} < |z| < 2 \quad (۱)$$

$$|z| > \frac{1}{2} \quad (۲)$$

$$|z| < \frac{1}{2} \quad (۳)$$

$$|z| < 2 \quad (۴)$$

هل:

$$H_1(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = 1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

$$H_2(z) = \frac{F(z)}{Y(z)} = \frac{z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}$$

حال از فرمول فیدبک مثبت استفاده کنیم:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} = \frac{1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-2} + \frac{3}{2}z^{-1}}$$

در ادامه قطب‌های  $(z)$   $H(z)$  را به دست می‌آوریم:

$$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0 \Rightarrow (z+2)\left(z - \frac{1}{2}\right) = 0 \Rightarrow z = +\frac{1}{2}, z = -2$$

شرط پایداری آن است که ناحیه همگرانی  $(z)$   $H(z)$  شامل دایره واحد باشد و شرط هنگامی تحقق می‌یابد که  $|z| < 2$  باشد.  
بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

علی و پایدار بودن یک سیستم LTI: اگر یک سیستم LTI توأم‌علی و پایدار باشد آنگاه ناحیه همگرانی تابع تبدیل آن علاوه بر آن که به صورت  $z = \infty$  شامل  $z = \infty$  است، باید شامل دایره واحد نیز باشد. این وضعیت فقط هنگامی پیش می‌آید که تمام قطب‌های  $(z)$   $H(z)$  درون دایره واحد باشد. بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:

قضیه: یک سیستم LTI علی با تابع تبدیل گویا پایدار است اگر و تنها اگر تمام قطب‌های  $(z)$   $H(z)$  آن داخل دایره واحد باشد.

مثال: یک سیستم LTI گستته با تابع تبدیل  $H(z) = \frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)(1-2z^{-1})}$  را در نظر بگیرید. به ازاء نواحی همگرانی مختلف در علی و

پایدار بودن این سیستم بحث کرده و پاسخ ضربه آن را روی نواحی همگرانی مختلف بدست آورید

هل :

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1 - 2z^{-1}}$$

با توجه به محل قطب‌ها، سه ناحیه همگرانی می‌توان برای این تابع تبدیل در نظر گرفت:

$|z| < \frac{1}{2}$ : روی این ناحیه همگرانی سیستم غیرعلی و ناپایدار است و داریم:

$$h[n] = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1] - \frac{2}{3} \times (2)^n u[-n-1]$$

$\frac{1}{2} < |z| < 2$ : روی این ناحیه همگرانی سیستم غیرعلی و پایدار است و داریم:

$$h[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \frac{2}{3} \times (2)^n u[-n-1]$$

$|z| > 2$ : روی این ناحیه همگرانی سیستم علی و ناپایدار است و داریم:

$$h[n] = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \frac{2}{3} \times (2)^n u[n]$$

تست نمونه - (آزاد ۸۴) چهار سیستم LTI پایدار با توابع سیستم زیر داده شده است:

$$H_1(z) = \frac{(1-z^{-1})}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad , \quad H_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z-\frac{1}{2}}$$

$$H_3(z) = \frac{\left(\frac{z-1}{4}\right)^5}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^6} \quad , \quad H_4(z) = \frac{\left(\frac{z-1}{4}\right)^6}{\left(\frac{z-1}{2}\right)^5}$$

کدام یک از گزینه‌های زیر ناصحیح است؟

- (۱) سیستم  $H_1(z)$  علی است.  
 (۲) سیستم  $H_2(z)$  غیرعلی است.  
 (۳) سیستم  $H_3(z)$  علی است.

هل: قطب‌های هر چهار سیستم درون دایره واحد است. بنابراین با توجه به پایدار بودن آن‌ها، ROC هر چهار سیستم سمت راستی است. از طرفی درجه چند جمله‌ای صورت  $H_2(z)$  و  $H_4(z)$  از درجه چند جمله‌ای مخرج آن‌ها بیشتر است. لذا این دو سیستم غیرعلی می‌باشند. اما  $H_1(z)$  و  $H_3(z)$  مربوط به سیستم‌های علی می‌باشند. بنابراین تنها گزاره ناصحیح گزینه (۳) است.

تست نمونه - (آزاد ۸۲)تابع تبدیل یک سیستم زمان گستته به صورت  $H(z) = \frac{z^{-1}}{1+kz^{-1}+z^{-2}}$  است که در آن  $k$  یک عدد ثابت می‌باشد. کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد؟

- (۱) این سیستم نمی‌تواند توأمًا علی و پایدار باشد.  
 (۲) این سیستم نمی‌تواند توأمًا غیرعلی و ناپایدار باشد.  
 (۳) این سیستم نمی‌تواند توأمًا غیرعلی و پایدار باشد.

هل: قطب‌های  $H(z)$  را به دست آورده و با توجه به آن‌ها گزاره درست انتخاب می‌کنیم:

$$z^2 + kz + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} - 1} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 4}}{2}$$

با توجه به محدوده  $k$  می‌توان تقسیم‌بندی زیر را انجام داد:

$k < -2$ : سیستم دارای دو قطب حقیقی  $Z = -\frac{k}{2} \pm \frac{\sqrt{k^2 - 4}}{2}$  است و بدین معنی از این دو قطب در خارج از دایره واحد قرار می‌گیرد.

$-2 < k < 2$ : سیستم دارای دو قطب مزدوج  $Z = -\frac{k}{2} \pm j\frac{\sqrt{4-k^2}}{2}$  است که برای این دو قطب  $|z|=1$  است و در نتیجه هر دو روی دایره واحد می‌باشند.

بنابراین به ازاء هیچ مقدار از  $k$  هر دو قطب این سیستم درون دایره واحد قرار نمی‌گیرد و بنابراین سیستم نمی‌تواند توأمًا علی و پایدار باشد.

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

## تمیزه و تملیل سیستمها

تست نمونه - یک سیستم گستته در زمان LTI و علی با معادله تفاضلی  $y[n] + \frac{1}{2}y[n-1] + ky[n-2] = x[n-1] - 2x[n-2]$  را در

نظر بگیرید. محدوده  $k$  به گونه‌ای که اولاً این سیستم دارای دو قطب مزدوج با یکدیگر و ثانیاً پایدار باشد کدام است؟

$$\frac{1}{16} < k < 4 \quad (4)$$

$$k > \frac{1}{16} \quad (3)$$

$$\frac{1}{16} < k < 1 \quad (2)$$

$$k < 1 \quad (1)$$

هل؛ از طرفین معادله تبدیل  $z$  گرفته و  $H(z)$  را بدست می‌آوریم:

$$Y(z) \left( 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + kz^{-2} \right) = X(z) \left( z^{-1} - 2z^{-2} \right) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - 2z^{-2}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + kz^{-2}}$$

حال قطب‌های  $H(z)$  را بدست می‌آوریم:

$$z^2 + \frac{1}{2}z + k = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} - k}$$

اگر  $k > \frac{1}{16}$  آن‌گاه هر دو قطب مزدوج یکدیگرند و در این صورت داریم:

$$z = -\frac{1}{4} \pm j\sqrt{k - \frac{1}{16}}$$

برای پایداری سیستم داریم:

$$|z| < 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{16} + k - \frac{1}{16}} < 1 \Rightarrow k < 1$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

مثال: یک سیستم علی و پایدار با پاسخ ضربه  $[n] h$  و تابع سیستم گویای  $(z) H$  را در نظر بگیرید. می‌دانیم  $(z) H$  قطبی در  $\frac{1}{2}$  و صفری روی دایره واحد دارد. تعداد و محل بقیه قطب‌ها و صفرها معلوم نیست. می‌خواهیم تعیین کنیم کدام یک از گزاره‌های زیر مطمناً درست می‌باشند. کدام یک مطمئناً نادرست هستند و در درستی یا نادرستی کدام گزاره نمی‌توان اظهار نظر کرد

$$(الف) F \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^n h[n] \right\} \text{ همگرا است.}$$

$$(ب) \text{ به ازاء بعضی مقادیر } \omega \text{ داریم } H(e^{j\omega}) = 0$$

$$(ج) h[n] \text{ عرض محدودی دارد.}$$

$$(د) h[n] \text{ حقیقی است.}$$

$$(ه) g[n] = n \{ h[n] * h[n] \} \text{ پاسخ ضربه یک سیستم پایدار است.}$$

هل؛ گزاره (الف) درست است. زیرا  $F \left\{ \left( \frac{1}{2} \right)^n h[n] \right\}$  تبدیل  $z$  سیگنال  $h[n]$  در  $z = 2$  است. این همگرائی معادل این است که  $z = 2$

در ROC قرار دارد، این تبدیل فوریه همگرایست. چون سیستم پایدار و علی است، تمام قطب‌های  $(z) H$  داخل دایره واحد قرار دارند و تمام نقاط خارج از دایره واحد از جمله  $z = 2$  در ROC واقع‌اند.

## تجزیه و تملیل سیستم‌ها

گزاره (ب) درست است زیرا  $H(z)$  روی دایره واحد صفر دارد.

گزاره (ج) نادرست است زیرا ناحیه همگرایی سیگنال دارای عرض محدود باید تمام صفحه  $z$ ، غیر از احتمالاً  $z = \infty$  باشد.

این مطلب با وجود یک قطب در  $\frac{1}{2} z$  سازگار نیست.

برای درستی گزاره (د) باید داشته باشیم  $H(z) = H^*(z)$  یعنی اگر قطب یا صفری در  $z = z_0$  قرار داشته باشد، باید در  $z = z_0$  قطب یا صفری وجود داشته باشد. در این مورد اطلاعات کافی وجود ندارد.

گزاره (ه) درست است. زیرا سیستم علی است و در نتیجه  $h[n] < 0$  برای صفر است. پس  $h[n]^* h[n] < 0$  نیز در  $n < 0$  برای صفر است.  $(h[n]^* h[n]) = n g[n]$  نیز در  $n < 0$  برای صفر است. پس  $g[n]$  پاسخ ضربه یک سیستم علی است. طبق قضیه کانولوشن در حوزه زمان تابع تبدیل متناظر با  $h[n]^* h[n]$  برای  $H(z)$  است و طبق خاصیت مشتق در حوزه  $z$ ، تابع تبدیل متناظر با  $g[n]$  عبارت است از:

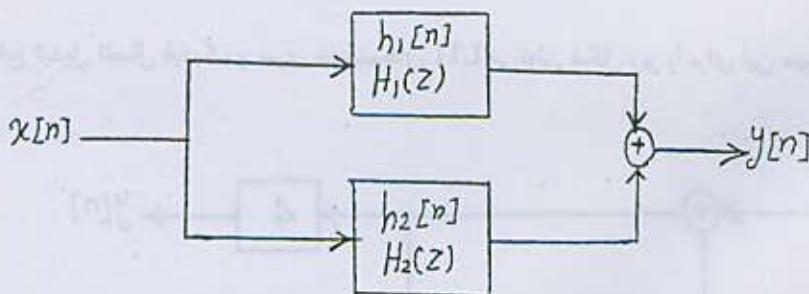
$$G(z) = -z \frac{d}{dz} (H^2(z)) = -2zH(z) \frac{dH(z)}{dz}$$

از رابطه اخیر می‌توان نتیجه گرفت قطب‌های  $G(z)$  غیر از احتمالاً مبدأ در همان محل‌های قطب‌های  $H(z)$  قرار دارند. چون قطب‌های  $H(z)$  داخل دایره واحد است بنابراین کلیه قطب‌های  $G(z)$  نیز درون دایره واحد قرار می‌گیرند و  $g[n]$  پاسخ ضربه یک سیستم علی و پایدار است.

اتصال سیستم‌های LTI: با استفاده از تبدیل  $z$  و خواص مریوطه می‌توان تابع شبکه ترکیب سیستم‌های مختلف را به دست آورد. بدین منظور دانستن تابع تبدیل اتصالات اولیه و ساده لازم می‌باشد.

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۸-۵) با یکدیگر موازی باشند آنگاه از آنجایی که پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر جمع می‌شوند تابع تبدیل آن‌ها نیز با یکدیگر جمع می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

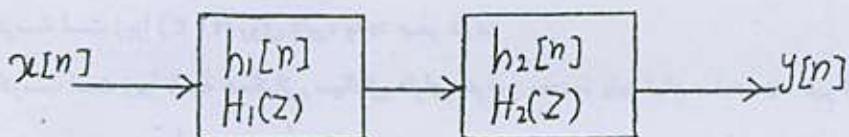
$$h[n] = h_1[n] + h_2[n] \Rightarrow H(z) = H_1(z) + H_2(z)$$



شکل ۱۸-۵ - اتصال موازی دو سیستم LTI

اگر دو سیستم مطابق شکل (۱۸-۶) با یکدیگر سری باشند آنگاه از آنجاییکه پاسخ ضربه آن‌ها با یکدیگر کاولو می‌شوند، تابع تبدیل آن‌ها در یکدیگر ضرب می‌شوند. به عبارت دیگر داریم:

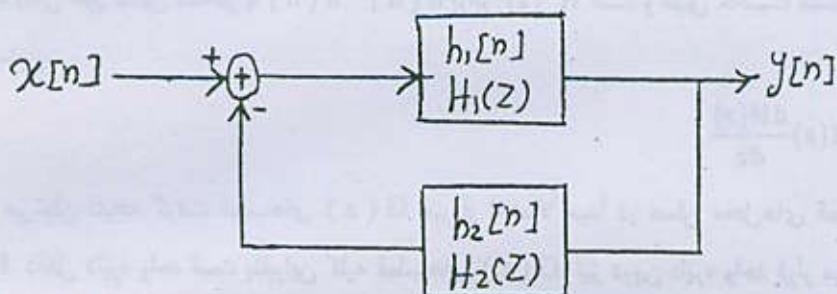
$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] \Rightarrow H(z) = H_1(z)H_2(z)$$



شکل ۱۸-۶- اتصال سری دو سیستم LTI گستته

اگر دو سیستم LTI گستته مطابق شکل (۱۸-۷) با اتصال فیدبک به یکدیگر متصل گردند، می‌توان تابع تبدیل  $(z)$   $H(z)$  را از رابطه زیر بدست آورده:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H_1(z)}{1 + H_1(z)H_2(z)}$$



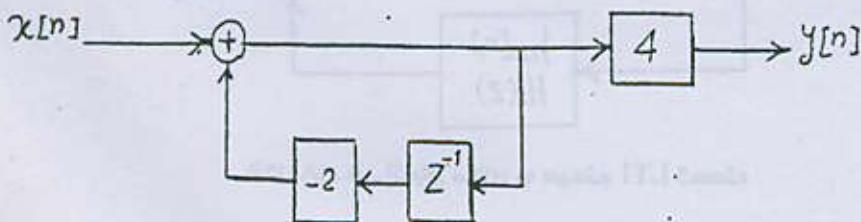
شکل ۱۸-۷- اتصال فیدبک دو سیستم LTI

با در نظر گرفتن سه ساختار فوق و همچنین ساختارهای شکل مستقیم I و II و با استفاده از عناصر پایه ضرب کننده اسکالار، جمع کننده و تأخیردهنده می‌توان سیستم‌های مرتبه بالا رابه صورت جعبه‌ای و در حوزه  $z$  نمایش داد.

مثال: یک سیستم LTI گستته در زمان با تابع تبدیل  $\frac{4}{1-2z^{-1}} = H(z)$  را در نظر بگیرید. توسط ساختارهای اصلی، نمودار جعبه‌ای هم ارز این تابع شبیه را تحقق دهد.

حل: با توجه به تابع تبدیل اتصال فیدبک و سری سیستم‌های LTI می‌توان شکل زیر را برای این سیستم در نظر گرفت:

$$H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}} \times 4$$



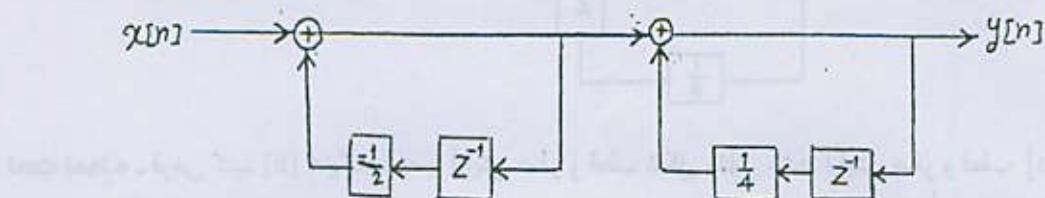
مثال: یک سیستم مرتبه دوم با تابع تبدیل  $H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)}$  را در نظر بگیرید. تابع تبدیل فوق را توسط ساختارهای سری، موازی و شکل مستقیم II و توسط عناصر پایه تحقق دهد.

## تمزیه و تمیلیل سیستم‌ها

هل؛ برای تحقق به ساختار سری کافی است صورت و مخرج کسر را تجزیه کرده و به صورت حاصلضرب عبارت‌های مرتبه اول بنویسیم:

$$H(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

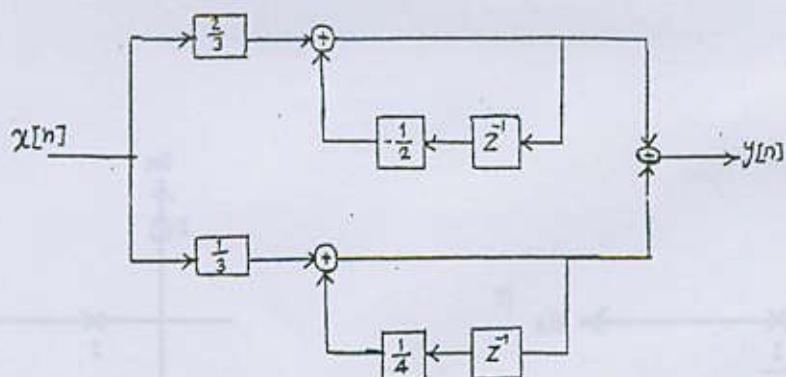
حال هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق سری  $H(z)$  در شکل زیر نشان داده شده است:



برای تحقق به ساختار موازی کافی است مخرج کسر  $H(z)$  را تجزیه کرده و این کسر را به مجموع کسرهای جزئی بسط دهید.

$$H(z) = \frac{\frac{2}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

حال مجدداً هر کدام از ساختارهای مرتبه اول را توسط اتصال فیدبک تحقق می‌دهیم. نمودار جعبه‌ای برای تحقق موازی  $H(z)$  در شکل صفحه بعد نشان داده شده است:

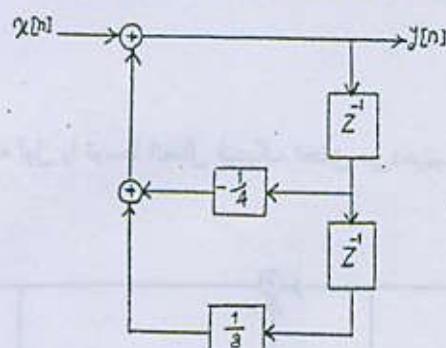


برای تحقق به ساختار شکل مستقیم II سعی می‌کنیم معادله تفاضلی را از  $H(z)$  بدست آورده و فرم مستقیم I و سپس II تحقق دهیم.

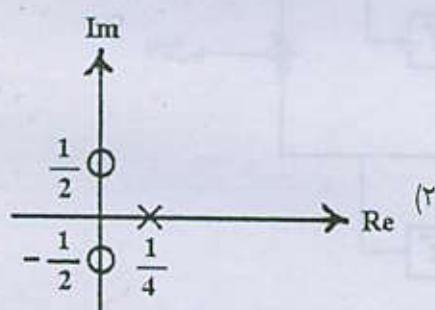
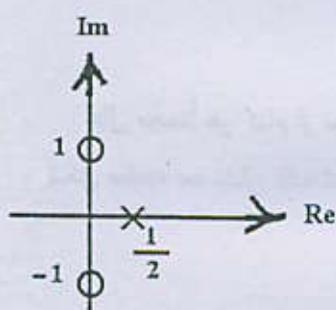
$$H(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} \Rightarrow Y(z) + \frac{1}{4}z^{-1}Y(z) - \frac{1}{8}z^{-2}Y(z) = X(z)$$

**تمهیه و تحلیل سیستم‌ها**

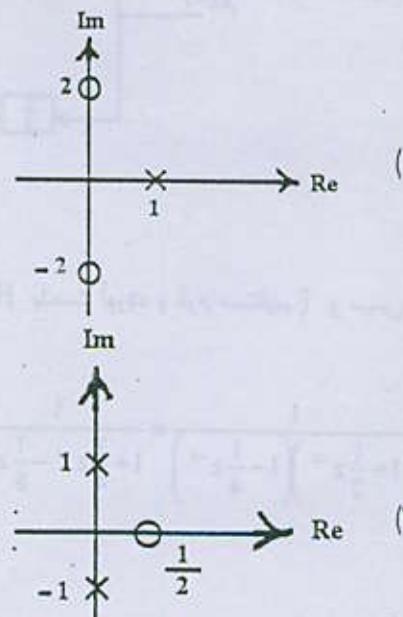
در شکل زیر شکل مستقیم II این تابع شبکه نشان داده شده است:



تست نمونه - فرض کنید  $x[n]$  یک رشته با آرایش صفر و قطب شکل مقابل باشد. آرایش صفر و قطب  $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$  کدام گزینه است؟



(۱) دیگر کدام



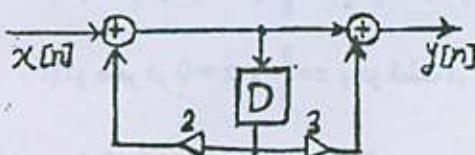
حل:

با توجه به جدول (۱۸ - ۲) داریم:

$$Y(z) = X(2z)$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۷۹) تابع تبدیل زمان گستته نشان داده شده در شکل روبرو که در آن D معرف یک واحد شیفت می‌باشد چیست؟



$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1+2z^{-1}} \quad (2)$$

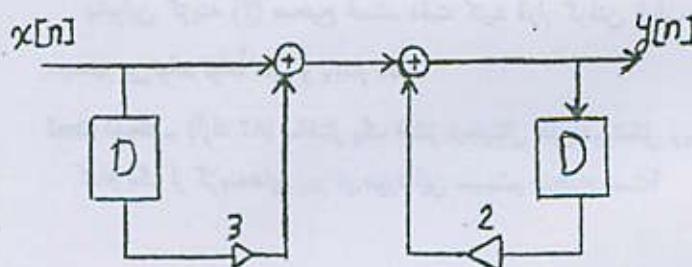
$$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1+2z^{-1}} \quad (1)$$

$$H(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad (4)$$

$$H(z) = \frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}} \quad (3)$$

حل:

راه حل مستقیم این گونه تست‌ها، تبدیل به شکل مستقیم I و تعیین معادله تفاضلی و در نتیجه تابع تبدیل است. شکل مستقیم I این سیستم در زیر نشان داده شده است:



با توجه به شکل فوق می‌توان معادله تفاضلی و تابع تبدیل سیستم را بدست آورد:

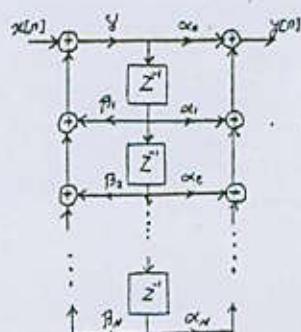
$$y[n] = x[n] + 3x[n-1] + 2y[n-1]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1+3z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

پس گزینه (۳) صحیح است.

لذکر، در تست فوق می‌توان تابع تبدیل (z) H(z) را به طور مستقیم و از روی شکل مستقیم II بدست آورد. با توجه به شکل زیر (Mason) برابر است با: (قضیه Mason)

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N \alpha_k z^{-k}}{1 - \sum_{i=1}^N \beta_i z^{-i}}$$



## تمایه و تمیل سیستم‌ها

تست نمونه - (آزاد ۸۲) شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI را نشان می‌دهد:

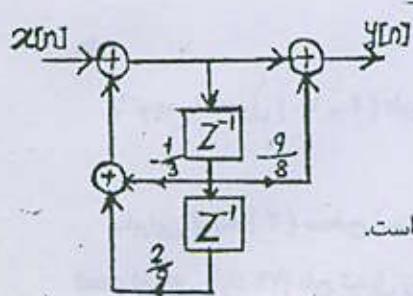
کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟

(۱) دو قطب در  $z = 0$  و  $z = \frac{9}{8}$  و دو صفر در  $z = -\frac{2}{3}$  و  $z = \frac{1}{3}$  دارد و ناپایدار است.

(۲) دو قطب در  $z = 0$  و  $z = \frac{9}{8}$  و دو صفر در  $z = -\frac{2}{3}$  و  $z = \frac{1}{3}$  دارد و اگر غیرعلی باشد پایدار است.

(۳) دو صفر در  $z = 0$  و  $z = \frac{9}{8}$  و دو قطب در  $z = -\frac{2}{3}$  و  $z = \frac{1}{3}$  دارد و پایدار است.

(۴) دو صفر در  $z = 0$  و  $z = \frac{9}{8}$  و دو قطب در  $z = -\frac{2}{3}$  و  $z = \frac{1}{3}$  دارد و اگر علی باشد پایدار است.



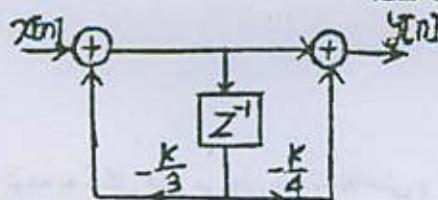
هل؛ از قضیه Mason به دست می‌آوریم:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{9}{8}z^{-1}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} - \frac{2}{9}z^{-2}} = \frac{z \left( z - \frac{9}{8} \right)}{z^2 + \frac{1}{3}z - \frac{2}{9}} = \frac{z \left( z - \frac{9}{8} \right)}{\left( z - \frac{1}{3} \right) \left( z + \frac{2}{3} \right)}$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است. دقت کنید قرار گرفتن قطب‌ها داخل دایره واحد باعث پایداری سیستم نمی‌گردد. اما در این وضعیت سیستم می‌تواند تواناً علی و پایدار باشد.

تست نمونه - (آزاد ۸۲) ساختار یک فیلتر دیجیتال علی در شکل زیر نشان داده شده است:

کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم صحیح است؟



(۱) این سیستم به ازای  $|k| > 4$  پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت  $[1 - (\frac{k}{4})^n]u[n]$  است.

(۲) این سیستم به ازای  $|k| < 4$  پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت  $[1 - (\frac{-k}{4})^n]u[n]$  است.

(۳) این سیستم به ازای  $|k| < 3$  پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت  $[1 - (\frac{k}{3})^n]u[n]$  است.

(۴) این سیستم به ازای  $|k| < 3$  پایدار و پاسخ ضربه آن به صورت  $[1 - (\frac{-k}{3})^n]u[n]$  است.

هل؛ از قضیه Mason استفاده می‌کنیم:

$$H(z) = \frac{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}$$

## تمزیه و تملیل سیستم‌ها

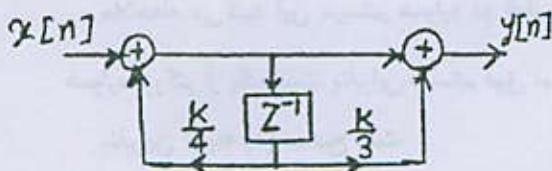
حال قطب سیستم را به دست آورده و با توجه به علی بودن سیستم، شرط قرار گرفتن این قطب در دایره واحد را به دست می‌آوریم:

$$z + \frac{k}{3} = 0 \rightarrow z = -\frac{k}{3}$$

$$|z| < 1 \Rightarrow \frac{|k|}{3} < 1 \Rightarrow |k| < 3$$

بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) ساختار یک فیلتر دیجیتال در شکل زیر نشان داده شده است:



$$k = \frac{1}{3} \quad (۱)$$

$$k = 3 \quad (۲)$$

$$k = 4 \quad (۳)$$

$$k = \frac{1}{4} \quad (۴)$$

در صورتی که برای ورودی  $x[n] = (3)^n$  خروجی این سیستم  $y[n] = 16(3)^{n-2}$  باشد، مقدار  $k$  چقدر باید باشد؟

هل: از قضیه Mason استفاده می‌کنیم:

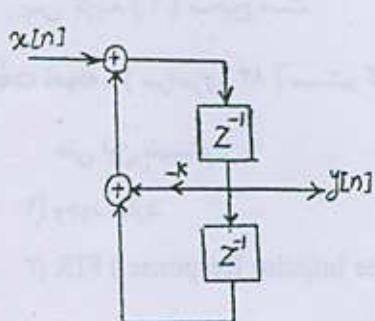
$$H(z) = \frac{1 + \frac{k}{3}z^{-1}}{1 - \frac{k}{4}z^{-1}}$$

حال از شرط داده شده به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} H(z) \Big|_{z=3} &= \frac{16}{9} \Rightarrow \frac{1 + \frac{k}{9}}{1 - \frac{k}{12}} = \frac{16}{9} \Rightarrow 9 + k = 16 - \frac{4}{3}k \\ &\Rightarrow \frac{7}{3}k = 7 \Rightarrow k = 3 \end{aligned}$$

بنابراین گزینه (۲) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۳) شکل زیر نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI است ( $k$  یک عدد ثابت است). کدام یک از گزاره‌های زیر می‌تواند صحیح باشد؟



(۱) این سیستم نمی‌تواند تواناً علی و پایدار باشد.

(۲) این سیستم نمی‌تواند تواناً علی و ناپایدار باشد.

(۳) این سیستم نمی‌تواند تواناً غیرعلی و ناپایدار باشد.

(۴) این سیستم نمی‌تواند تواناً غیرعلی و پایدار باشد.

هل، از قضیه Mason استفاده می‌کنیم و سپس قطب‌های سیستم را به دست می‌آوریم:

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{1 + kz^{-1} - z^{-2}}$$

$$z^2 + kz - 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{k}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2}{4} + 1} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

ملاحظه می‌کنید این سیستم همواره دو قطب حقیقی دارد که حداقل یکی از آن‌ها خارج از دایره واحد است. زیرا جمله  $\frac{\sqrt{k^2 + 4}}{2}$  همواره بزرگتر از یک است. بنابراین سیستم فوق نمی‌تواند توامًاً علی و پایدار باشد.

بنابراین گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - (آزاد ۸۲) ورودی یک سیستم زمان گستته LTI با پاسخ ضربه  $h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$  به صورت  $x[n] = \left(-\frac{7}{8}\right)^n$  است.

خروجی این سیستم در لحظه  $n=1$  برابر است با:

$$-\frac{7}{8} \quad (۳)$$

$$-\frac{7}{9} \quad (۳)$$

$$\frac{49}{72} \quad (۲)$$

$$-\frac{49}{72} \quad (۱)$$

هل،

$$h[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] \Rightarrow H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

از آنجائی که  $x[n] = \left(-\frac{7}{8}\right)^n$  یک تابع ویژه برای این سیستم است بنابراین:

$$y[n] = H(z) \Big|_{z=-\frac{7}{8}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \times \frac{8}{7}} \times \left(-\frac{7}{8}\right)^n = \frac{7}{9} \times \left(-\frac{7}{8}\right)^n$$

$$y[n] \Big|_{n=1} = \left(\frac{7}{9}\right) \left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{49}{72}$$

پس گزینه (۱) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۴) سیستم گستته زمان LTI با پاسخ ضربه  $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[-n+2]$  مفروض است. وارون

علی این سیستم:

۲) IIR و پایدار است.

۱) وجود ندارد.

۳) FIR (Infinite Impulse Response) است.

۴) Finite Impulse Response (FIR) است.

حل:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2] \Rightarrow H(z) = 1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

اگر تابع تبدیل سیستم وارون را با  $G(z)$  نشان دهیم داریم:

$$G(z) = \frac{1}{H(z)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}}$$

اگر  $X(z)$  و  $Y(z)$  به ترتیب ورودی و خروجی سیستم وارون باشند آنگاه:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}} \Rightarrow y[n] + \frac{3}{2}y[n-1] - y[n-2] = x[n]$$

برای انتخاب بین گزینه‌های (۲) و (۴) قطب‌های  $G(z)$  را بدست می‌آوریم:

$$1 + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2} = 0 \Rightarrow z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1}$$

مالحظه می‌کنید یک قطب در RHP قرار می‌گیرد. پس سیستم نمی‌تواند تواناً علی و پایدار باشد. بنابراین گزینه (۴) صحیح است.

تست نمونه - (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گستته LTI علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n] = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = 4, \quad h[0] = 1$$

محل صفر  $z_0$  و قطب  $p_0$  آن را مشخص کنید.

$$p_0 = \frac{1}{3}, \quad z_0 = 1 \quad (2)$$

$$p_0 = \frac{1}{2}, \quad z_0 = 1 \quad (1)$$

$$p_0 = \frac{1}{3}, \quad z_0 = -1 \quad (4)$$

$$p_0 = \frac{1}{2}, \quad z_0 = -1 \quad (3)$$

هل، با توجه به آن که سیستم فوق فقط یک صفر و یک قطب دارد بنابراین تابع تبدیل آن را به صورت  $H(z) = k \frac{z-z_0}{z-p_0}$  در نظر

می‌گیریم، حال از مفروضات تست استفاده می‌کنیم:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n] = 0 \Rightarrow H(z) \Big|_{z=-1} = 0 \Rightarrow z_0 = -1$$

$$h[0] = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1 \Rightarrow k = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = 4 \Rightarrow H(z) \Big|_{z=1} = 4 \Rightarrow \frac{1+(-1)}{1-p_0} = 4 \Rightarrow 1-p_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow p_0 = \frac{1}{2}$$

بنابراین گزینه (۳) صحیح است.

## خودآزمائی ۵۵

۱ - (آزاد ۸۳) سیگنال زیر را در نظر بگیرید:

$$x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1] + 2^n u[-n-1]$$

در مورد این سیگنال چه می‌توان گفت؟

(۱) تبدیل فوریه ندارد ولی تبدیل z دارد.

(۲) نه تبدیل فوریه دارد و نه تبدیل z

(۳) هم تبدیل فوریه دارد هم تبدیل z

$$x[n] = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$$

۲ - (آزاد ۸۱) کدام گزینه قطب‌ها و ناجیه همگرایی تبدیل z سیگنال  $x[n]$  را بیان می‌کند؟

$$|z| > \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (۱)$$

$$|z| < \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (۲)$$

$$|z| > \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (۳)$$

$$|z| < \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3} e^{\pm j\frac{\pi}{4}} \quad (۴)$$

$$۳ - (آزاد ۸۴) تبدیل z سیگنال  $x[n]$  به صورت  $X(z) = \log\left(1 + \frac{3}{2}z^{-1}\right)$  است.  $x[n]$  چگونه است؟$$

$$x[n] = \left(\frac{3}{2}\right)^n u[n] \quad (۱)$$

$$x[n] = \frac{1}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n u[n-1] \quad (۲)$$

$$x[n] = -\left(-\frac{3}{2}\right)^n u[n-1] \quad (۳)$$

$$x[n] = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n u[n-1] \quad (۴)$$

$$۴ - x[n] \text{ سیگنالی است که تبدیل z گویای آن قطبی در } z = \frac{1}{2} \text{ دارد, می‌دانیم که } |x[n]| \text{ مطلقاً جمع‌بازیر است و}$$

$$x[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n x[n] \text{ مطلقاً جمع‌بازیر نیست. تعیین کنید کدام گزینه در مورد } |x[n]| \text{ صحیح است؟}$$

(۱)  $x[n]$  یک سیگنال سمت چپی است.

(۲)  $x[n]$  یک سیگنال سمت راستی است.

(۳)  $x[n]$  با اطلاعات فوق نمی‌توان نوع  $|x[n]|$  را تعیین کرد.

$$۵ - (آزاد ۸۲ و آزاد ۸۴) گفته شده اگر ورودی یک سیستم LTI به صورت  $u[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n$  باشد، خروجی آن$$

$$y_1[n] = \frac{118}{9} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \quad x_2[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

$$y_2[n] = \left[b\left(\frac{1}{2}\right)^n + 10\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u[n]$$

مقدار b چقدر است؟

$$b = 4 \quad (۱)$$

$$b = 3 \quad (۲)$$

$$b = 2 \quad (۳)$$

$$b = 1 \quad (۴)$$

## تمدن و تعلیل سیستم‌ها

۶ - (آزاد ۸۰) پاسخ یک سیستم LTI گسته زمان به ورودی  $x[n] = \begin{cases} 1-4z^{-1} \\ 1-z^{-1} \end{cases}$  به صورت  $X(z)$  و  $y[n] = -\frac{1}{2}(-3)^n u[-n-1] + \frac{3}{2}u[n]$

می‌باشد. پاسخ ضربه این سیستم کدام است؟

$$h[n] = -\frac{10}{7}(-3)^n u[-n-1] - \frac{4}{7}(4)^n u[-n-1] \quad (1)$$

$$h[n] = -\frac{10}{7}(-3)^n u[-n-1] + \frac{4}{7}(4)^n u[n] \quad (2)$$

$$h[n] = \frac{10}{7}(-3)^n u[n] - \frac{4}{7}(4)^n u[-n-1] \quad (3)$$

$$h[n] = \frac{10}{7}(-3)^n u[n] + \frac{4}{7}(4)^n u[n] \quad (4)$$

۷ - (آزاد ۷۹) تابع تبدیل یک سیستم زمان گسته LTI علی به صورت  $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}}$  است. پاسخ پله این سیستم چیست؟

$$\frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(-0.5)^n u[n] \quad (2)$$

$$\frac{2}{3}u[n] + \frac{1}{3}(-0.5)^n u[n] \quad (1)$$

$$\frac{1}{3}u[n] + \frac{2}{3}(0.5)^n u[n] \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}u[n] + \frac{1}{3}(0.5)^n u[n] \quad (3)$$

۸ - (آزاد ۸۱) اولین سه مقدار از پاسخ ضربه سیستم علی با تابع تبدیل مقابله کدام است؟

$$H(z) = \frac{6z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3} + 3}{2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 2}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{2}, 3 \quad (4)$$

$$\frac{1}{4}, -\frac{7}{2}, 3 \quad (3)$$

$$\frac{11}{4}, 2, \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$\frac{11}{4}, -2, \frac{3}{2} \quad (1)$$

۹ - (آزاد ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم LTI گسته به صورت  $H(z) = \frac{1-2z^{-1}}{z^{-1}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$  می‌باشد. در مورد این سیستم کدام گزاره درست است؟

است؟

(۱) این تابع تبدیل می‌تواند به یک سیستم سبی مربوط باشد.

(۲) برای ناحیه همگرانی  $\left|z\right| < \frac{1}{2}$  پاسخ سیستم به ورودی  $x[n] = 2^n u[-n-2]$  به صورت  $y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[-n-1]$  می‌باشد.

(۳) برای ناحیه همگرانی  $\left|z\right| > \frac{1}{2}$  سیستم پایدار است.

(۴) پاسخ ضربه برای  $\left|z\right| > \frac{1}{2}$  به صورت  $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} u[n] - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  می‌باشد.

## تمثیله و تحلیل سیستمها

۱۰ - (آزاد ۸۱) اگر  $(z)$   $H$  تبدیل  $z$  باخ ضربه  $[n]$  مربوط به یک سیستم LTI باشد کدام گزینه صحیح است؟

$$H(z) = \frac{1 - \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{z^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left( 1 - \frac{1}{3}z^{-1} \right)}$$

- (۱) سیستم به شرط پایداری علی است.  
 (۲) سیستم به شرط پایداری غیر علی است.  
 (۳) سیستم همواره غیرعلی است.

۱۱ - یک سیستم LTI گسته در زمان را در نظر بگیرید. اطلاعات در مورد پاسخ ضربه  $[n]$   $h$  و تابع تبدیل  $(z)$   $H$  این سیستم به شرح زیر است:

(۱)  $h[n]$  سمت راستی است.

$$(2) H(z) \text{ دو صفر دارد.} \quad (3) \lim_{z \rightarrow \infty} H(z) = 1$$

(۴) یکی از قطب‌های غیرحقیقی  $(z)$   $H$  روی دایره  $|z| = \frac{3}{4}$  قرار دارد.

کدام گزینه در مورد این سیستم صحیح است؟

- (۱) سیستم فوق علی و پایدار است.  
 (۲) سیستم فوق غیرعلی و پایدار است.  
 (۳) سیستم فوق غیرعلی و ناپایدار است.

۱۲ - (آزاد ۷۹) یک سیستم زمان گسته LTI علی در نظر بگیرید و فرض کنید بین ورودی  $[n]$   $x$  و خروجی  $[n]$   $y$  آن معادله تفاضلی

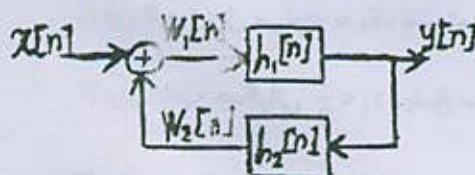
$$y[n] = 4ay[n-1] - \frac{25}{4}a^2y[n-2] + x[n]$$

$$|a| < \frac{2}{3} \quad (1) \quad |a| < \frac{2}{5} \quad (2) \quad |a| > \frac{2}{5} \quad (3) \quad |a| > \frac{2}{3} \quad (4)$$

۱۳ - (آزاد ۸۲) یک سیستم LTI در شکل زیر نمایش داده شده است:

گفته شده  $y[n] = 2w_1[n-1] - y[n-1]$  و  $w_1[n] = y[n-1] + \frac{20}{3}w_1[n]$  است. سیستم فوق به ازای کدام یک از نواحی همگرانی

$$\text{تابع تبدیل } H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \text{ زیر پایدار است.}$$

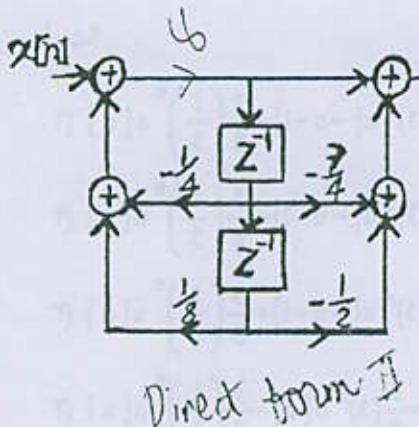


$$3 < |z| \quad (1) \quad \frac{2}{3} < |z| < 3 \quad (2) \quad \frac{2}{3} < |z| \quad (3) \quad |z| < 3 \quad (4)$$

۱۴ - (آزاد ۸۲) سیستم داده شده در سؤال قبل به ازای کدام یک از نواحی همگرانی تابع تبدیل  $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$  زیر علی است؟

$$3 < |z| \quad (1) \quad \frac{2}{3} < |z| < 3 \quad (2) \quad \frac{2}{3} < |z| \quad (3) \quad |z| < 3 \quad (4)$$

۱۵ - (آزاد ۸۲) شکل مقابل نمایش جبهه‌ای یک سیستم LTI را نمایش می‌دهد: کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم ناصحیح است؟



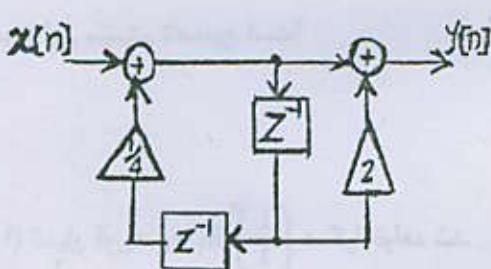
$$(1) \text{تابع تبدیل این سیستم به صورت } H(z) = \left( \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} \right) \left( \frac{1 - 2z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \right)$$

$$(2) \text{تابع تبدیل این سیستم به صورت } H(z) = 4 + \frac{\frac{5}{3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{\frac{14}{3}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$(3) \text{تابع تبدیل این سیستم به صورت } H(z) = \frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$(4) \text{تابع تبدیل این سیستم به صورت } H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

۱۶ - (سراسری ۸۲) پاسخ ضربه سیستم نشان داده شده در شکل زیر با فرض علی بودن سیستم کدام است؟ ([۱] معرف دنباله پله واحد می‌باشد)

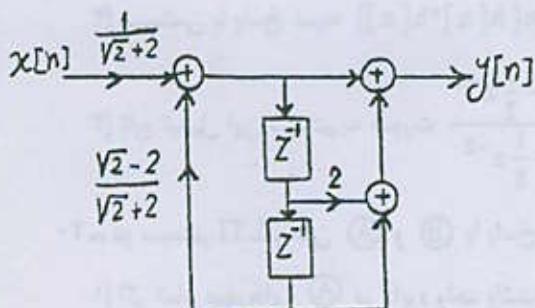


$$h[n] = \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n + \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (1)$$

$$h[n] = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (2)$$

$$h[n] = \left[ \frac{5}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{3}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (3)$$

$$h[n] = \left[ \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^n - \frac{5}{2} \left( -\frac{1}{2} \right)^n \right] u_{-1}[n] \quad (4)$$



۱۷ - (آزاد ۸۳) شکل مقابل یک شبکه دیجیتال برای بیاده‌سازی یک فیلتر با ترورث مرتبه دوم نمایش می‌دهد:

معادله تفاضلی توصیف‌کننده این شبکه کدام است؟

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} y[n] + (2-\sqrt{2}) y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (1)$$

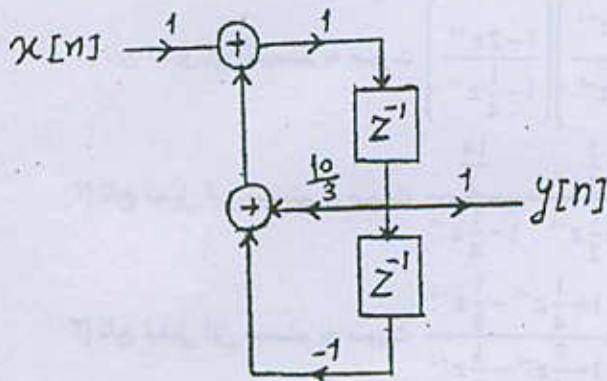
$$(2+\sqrt{2}) y[n] + (\sqrt{2}-2) y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (2)$$

$$(2+\sqrt{2}) y[n] + (2-\sqrt{2}) y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (3)$$

$$\frac{1}{2+\sqrt{2}} y[n] + (\sqrt{2}-2) y[n-2] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2] \quad (4)$$

## تمثیل و تحلیل سیستم‌ها

۱۸ - (آزاد ۸۴) نمودار بلوکی یک سیستم LTI در شکل زیر رسم شده است. در صورتی که این سیستم پایدار باشد، پاسخ ضربه آن کدام است؟

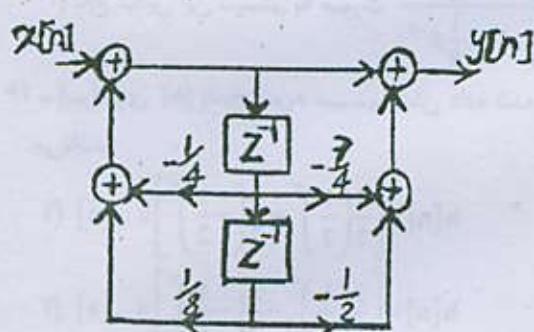


$$h[n] = \frac{3}{8}(3)^n u[-n-1] - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (1)$$

$$h[n] = -\frac{3}{8}(3)^n u[-n-1] - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (2)$$

$$h[n] = -\frac{3}{8}(3)^n u[-n-1] + \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (3)$$

$$h[n] = \frac{3}{8}(3)^n u[n] - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] \quad (4)$$



۱۹ - (آزاد ۸۳) شکل مقابل نمایش جعبه‌ای یک سیستم LTI و علی را نمایش می‌دهد. چنانچه پاسخ ضربه سیستم را  $h[n]$  و تابع تبدیل آن را  $H(z)$  بنامیم، کدام یک از گزینه‌های زیر در مورد این سیستم ناصحیح است؟

(۱) تبدیل فوریه  $\left(\frac{1}{3}\right)^n h[n]$  همگرا خواهد شد.

(۲) نقطه یا نقاطی روی دایره واحد (در صفحه  $z$ ) وجود دارد که  $H(e^{j\omega})=0$  خواهد شد.

(۳) سیستمی با پاسخ ضربه  $(h[n]*h[n]) = n(h[n]*h[n])$  پایدار است.

(۴) تابع تبدیل این سیستم به صورت  $H(z) = \frac{1 - \frac{7}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$  است.

۲۰ - دو سیستم LTI و علی (A) و (B) با پاسخ‌های ضربه  $h_A[n] = h_A[-n]$  و  $h_B[n] = h_B[-n]$  را در نظر بگیرید. کدام گزاره درست است؟

(۱) اگر تمام صفرهای (A) در دایره واحد باشد، آنگاه سیستم (B) لزوماً پایدار است.

(۲) اگر سیستم (A) ناپایدار باشد، آنگاه سیستم (B) لزوماً پایدار خواهد بود.

(۳) اگر یکی از صفرهای سیستم (A) در خلنج دایره واحد باشد، آنگاه سیستم (B) لزوماً ناپایدار خواهد بود.

(۴) اگر سیستم (A) پایدار باشد، آنگاه سیستم (B) لزوماً ناپایدار خواهد بود.

۲۱- یک سیستم LTI و FIR با پاسخ ضربه  $h[n]$  را در نظر بگیرید و فرض کنید  $h[n]$  حقیقی، زوج و در بازه محدود  $1 \leq n \leq N$  قرار دارد. اگر  $z_1 = re^{j\omega_0}$  یک صفر این سیستم باشد، آنگاه کدام گزاره صحیح است؟

$$(2) z_2 = re^{-j\omega_0} \quad (1)$$

$$(3) z_3 = \frac{1}{r} e^{-j\omega_0} \quad (2)$$

۲۲- (سراسری ۸۱) در صورتی که پاسخ ضربه سیستم LTI و علی  $y[n] = \frac{1}{3}x[n] - \frac{1}{4}y[n-1]$  از پاسخ پله سیستم LTI و علی

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] \quad (1)$$

$$\left[ 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (2)$$

$$\left[ \frac{8}{3} + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \right] u[n] \quad (3)$$

$$\left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n] \quad (1)$$

$$\left[ \frac{8}{3} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n \right] u[n] \quad (3)$$

۲۳- (سراسری ۸۰) تابع تبدیل یک سیستم گسته LTI به صورت  $H(z) = \frac{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}{z^{-1} \left( 1 - \frac{1}{2}z^{-1} \right) \left( 1 + 2z^{-1} \right)}$  و ناحیه همگرانی آن

$|z| > 2$  می باشد در مورد این سیستم کدام گزینه درست است؟

(۱) سیستم علی است.  
(۲) سیستم پایدار است.

(۳) اگر  $h[n]$  پاسخ ضربه سیستم باشد آنگاه  $h[-1] = 1$

$$h[-1] = 1$$

۲۴- (سراسری ۸۴) سیگنال زمان گسته  $x[n]$  را در نظر بگیرید. با فرض این که  $x[n] = 0$  برای  $n < 0$  باشد آنگاه:  $X(z)$  تبدیل سیگنال  $x[n]$  می باشد.

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 1} z X(z) \quad (2)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 1} X(z) \quad (4)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow 0} X(z) \quad (1)$$

$$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z) \quad (3)$$

۲۵- (سراسری ۸۳) فرض کنید  $X(z)$  تبدیل  $z$  سیگنال گسته  $x[n]$  است. صفرهای تابع  $X(z)$  در  $z = \pm 2$  و قطب‌های آن در  $z = 0$  می باشد. اگر  $y[n] = x^2[n]$  باشد صفرهای تابع  $(Y(z))$  (یعنی تبدیل  $z$  سیگنال  $y[n]$ ) در کجا قرار خواهد داشت؟

$$z = \pm j4 \quad (2)$$

$$z = \pm 4 \quad (1)$$

$$z = 4 \quad (3)$$

$$z = \pm 2 \quad (2)$$

۲۶- (سراسری ۸۰) اگر در یک سیستم زمان - گسته LTI و پایدار، معادله تفاضلی زیر بین ورودی سیستم  $x[n]$  و خروجی سیستم  $y[n]$  برقرار باشد:

$$y[n] - ay[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

می توان نتیجه گرفت که سیستم به ازای ..... است.

(۱) جمیع مقادیر  $a$  غیرعلی

(۲)  $a < -2$  علی و به ازای  $a \geq 0$  غیرعلی

۲۷- (سراسری ۸۴)  $h[n] \stackrel{\Delta}{=} h[n] \cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$  دنباله‌ای با  $H(z)$  دارای دو قطب در  $\sqrt{3} e^{\pm j\frac{\pi}{3}}$  است. اگر  $h[n]$  باشد، در حالت

کلی محل قطب‌های  $H_1(z)$  به فرم زیر است:

$$\sqrt{\frac{3}{2}} e^{\pm j\frac{3\pi}{8}} \quad (1)$$

$$\sqrt{3} e^{\pm j\frac{3\pi}{8}}, \sqrt{3} e^{\pm j\frac{\pi}{8}} \quad (2)$$

۲۸- (سراسری ۸۴) سیستم گستته زمان LTI با پاسخ ضربه  $h[n] = \delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[-n+2]$  مفروض است. وارون علی این

سیستم:

(۱) وجود ندارد  
(۲) و پایدار است.

(Infinite Impulse Response) IIR (۳) (Finite Impulse Response) FIR (۳) است.

۲۹- (سراسری ۸۵) پاسخ یک سیستم خطی تغییرناپذیر با زمان با پاسخ ضربه  $x[n] = 2^n$  در  $n=0$  به ورودی  $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$  در کدام مورد خواهد بود؟

$$\frac{2}{3} \quad (1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{1}{3} \quad (3)$$

۳۰- (سراسری ۸۵) یک سیستم زمان گستته LTI علی دارای فقط یک صفر و یک قطب می‌باشد و می‌دانیم پاسخ ضربه آن در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n h[n] = 0, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] = 4, \quad h[0] = 1$$

محل صفر  $z_0$  و قطب  $p_0$  آن را مشخص کنید.

$$p_0 = \frac{1}{3}, \quad z_0 = 1 \quad (1) \quad p_0 = \frac{1}{2}, \quad z_0 = 1 \quad (2)$$

$$p_0 = \frac{1}{3}, \quad z_0 = -1 \quad (3) \quad p_0 = \frac{1}{2}, \quad z_0 = -1 \quad (4)$$

## پاسخ خودآزمائی سوم

گزینه صحیح	شماره تست
۲	-۱
۴	-۲
۱	-۳
۱	-۴
۱	-۵
۴	-۶
۱	-۷
۳	-۸
۳	-۹
۲	-۱۰
۴	-۱۱
۴	-۱۲
۳	-۱۳

## پاسخ خودآزمائی دوم

گزینه صحیح	شماره تست
۲	-۱
۱	-۲
۳	-۳
۱	-۴
۲	-۵
۳	-۶
۲	-۷
۱	-۸
۱	-۹
۴	-۱۰
۳	-۱۱
۴	-۱۲
۲	-۱۳
۲	-۱۴
۳	-۱۵
۴	-۱۶
۳	-۱۷
۴	-۱۸
۳	-۱۹
۲	-۲۰
۲	-۲۱
۲	-۲۲
۲	-۲۳
۳	-۲۴
۴	-۲۵
۳	-۲۶
۲	-۲۷
۳	-۲۸

## پاسخ خودآزمائی اول

گزینه صحیح	شماره تست
۳	-۱
۱	-۲
۴	-۳
۲	-۴
۱	-۵
۴	-۶
۴	-۷
۱	-۸
۲	-۹
۴	-۱۰
۱	-۱۱
۴	-۱۲
۲	-۱۳
۱	-۱۴
۴	-۱۵
۳	-۱۶
۳	-۱۷
۲	-۱۸
۳	-۱۹
۱	-۲۰
۴	-۲۱
۲	-۲۲
۱	-۲۳
۲	-۲۴
۱	-۲۵
۱	-۲۶
۲	-۲۷
۲	-۲۸

## پاسخ خودآزمائی پنجم

## پاسخ خودآزمائی چهارم

گزینه صحیح	شماره تست
۱	-۱
۴	-۲
۳	-۳
۲	-۴
۴	-۵
۴	-۶
۱	-۷
۱	-۸
۴	-۹
۲	-۱۰

گزینه صحیح	شماره تست
۲	-۱
۳	-۲
۲	-۳
۳	-۴
۴	-۵
۲	-۶
۴	-۷
۲	-۸
۱	-۹
۲	-۱۰
۳	-۱۱
۱	-۱۲
۲	-۱۳
۱	-۱۴
۱	-۱۵
۳	-۱۶
۲	-۱۷
۲	-۱۸
۲	-۱۹
۴	-۲۰
۲	-۲۱
۳	-۲۲
۲	-۲۳
۲	-۲۴
۳	-۲۵

## پاسخ خودآزمائی هشتم

گزینه صحیح	شماره تست
۲	-۱۴
۲	-۱۵
۲	-۱۶
۴	-۱۷
۳	-۱۸
۴	-۱۹
۴	-۲۰
۲	-۲۱
۳	-۲۲
۲	-۲۳

## پاسخ خودآزمائی هفتم

گزینه صحیح	شماره تست
۳	-۲۹
۱	-۳۰
۱	-۳۱
۳	-۳۲
۱	-۳۳
۲	-۳۴
۳	-۳۵
۴	-۳۶
۲	-۳۷
۱	-۳۸
۳ و ۱	-۳۹
۱	-۴۰
۱	-۴۱
۲	-۴۲
۱	-۴۳

## پاسخ خودآزمائی ششم

گزینه صحیح	شماره تست
۳	-۲۴
۴	-۲۵
۱	-۲۶
۱	-۲۷
۲	-۲۸
۲	-۲۹
۳	-۳۰
۳	-۳۱
۱	-۳۲
۳	-۳۳

## پاسخ خودآزمائی دهم

## پاسخ خودآزمائی نهم

گزینه صحیح	شماره تست
۳	-۱۶
۲	-۱۷
۲	-۱۸
۲	-۱۹
۴	-۲۰
۴	-۲۱
۳	-۲۲
۳	-۲۳
۱	-۲۴
۲	-۲۵
۱	-۲۶
۴	-۲۷
۴	-۲۸
۲	-۲۹
۳	-۳۰

گزینه صحیح	شماره تست
۳	-۱
۱	-۲
۲	-۳
۲	-۴
۴	-۵
۱	-۶
۱	-۷
۱	-۸
۴	-۹
۲	-۱۰
۱	-۱۱
۲	-۱۲
۲	-۱۳
۴	-۱۴
۳	-۱۵

گزینه صحیح	شماره تست
۴	-۱
۴	-۲
۴	-۳
۲	-۴
۲	-۵
۴	-۶
۴	-۷
۴	-۸
۴	-۹
۲	-۱۰
۱	-۱۱
۲	-۱۲
۱	-۱۳
۲	-۱۴
۳	-۱۵
۳	-۱۶
۱	-۱۷
۴	-۱۸
۴	-۱۹
۲	-۲۰
۴	-۲۱

بادداشت