Odbiory prac statutowych 2024

Zakład Metod Stochastycznych

Barbara Żogała-Siudem

14 stycznia 2025

Prace opublikowane w 2024

1. Bertoli-Barsotti, L., Gagolewski, M., Siudem, G., **Żogała-Siudem, B.**, *Gini-stable Lorenz curves and their relation to the generalised Pareto distribution*, Journal of Informetrics, 18(2), 101499 (2024)
2. Bertoli-Barsotti, L., Gagolewski, M., Siudem, G., **Żogała-Siudem, B.**, *Equivalence of inequality indices in the three-dimensional model of informetric impact*, Journal of Informetrics, 18(4), 101566, (2024).

Gini index

Niech $\wp_+^{(N)}$ będzie zbiorem N-wymiarowych, uporządkowanych i unormowanych wektorów $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_N)$, czyli

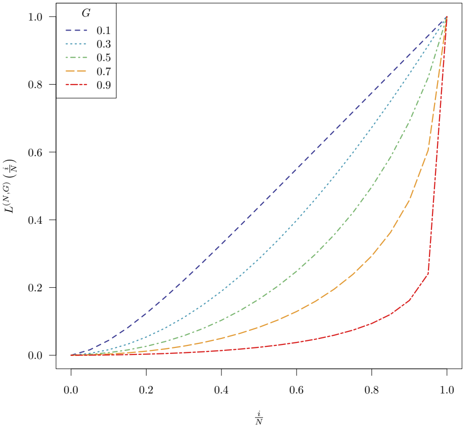
$$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_N > 0 \text{ oraz } \sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

Indeksem Giniego nazywamy

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} |p_i - p_j| \, .$$

Jest to popularna w ekonomii miara nierówności: im większa wartość, tym większe nierówności w rozkładzie.

Indeks Giniego, a krzywa Lorenza



$$L^{\boldsymbol{p}}\left(\frac{i}{N}\right) = 1 - \sum_{j=N-i}^{1} p_j$$

Odwzorowania Gini-stabilne

Zdefiniujmy odwzorowanie

$$(p_1, p_2, \ldots, p_N) \xrightarrow{h} (a + bp_1, a + bp_2, \ldots, a + bp_N, a)\,,$$

gdzie $a = \frac{1-b}{N+1}$.

Można znaleźć stałą $b = b(N)$, dla której zachodzi

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{p}) = G = \mathcal{G}\left(h\left(\boldsymbol{p}\right)\right), \qquad \boldsymbol{p} \in \wp_{+}^{(N)},\ h\left(\boldsymbol{p}\right) \in \wp_{+}^{(N+1)}.$$

Analityczne rozwiązanie

Powyższy model iteracyjny ma analityczne rozwiązanie:

$$p_i^{(N,G)} = \begin{cases} \frac{1-G}{2G-1}\frac{1}{N}\left(\frac{\Gamma(N+1)\,\Gamma(i-2+1/G)}{\Gamma(N-1+1/G)\,\Gamma(i)} - 1\right), & G \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{N}\left(H_N - H_{i-1}\right) = \frac{1}{N}\sum_{j=i}^{N}\frac{1}{j}, & G = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

gdzie $i = 1, 2, \ldots, N$, $H_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j}$, $H_0 = 0$.

- Jest to jedyny model afiniczny zachowujący stały indeks Giniego.
- Okazuje się, że jest on tożsamy z modelem 3DSI.

Inne indeksy

Pytanie: Jak w proponowanym formalizmie wyrażają się inne niż indeks Giniego miary nierówności?

- indeks Bonferroniego:

$$\mathcal{B}(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(1-\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{N-j+1}\right)p_i$$

- indeks Hoovera:

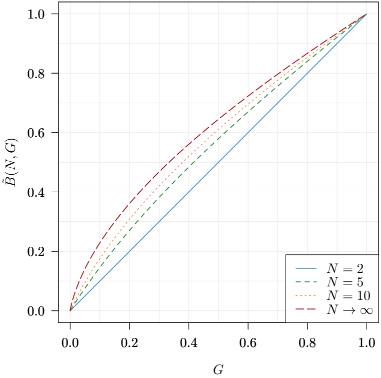
$$\mathcal{H}(\boldsymbol{p}) = \frac{N}{2(N-1)}\sum_{k=1}^{N}\left|p_k-\frac{1}{N}\right|$$

- indeks de Vergottiniego:

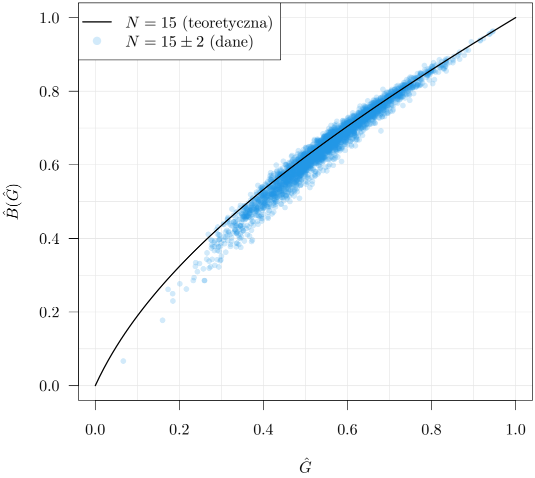
$$\mathcal{V}(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{\sum_{i=2}^{N}\frac{1}{i}}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i}^{N}\frac{p_i}{j}-1\right)$$

Bonferroni index

$$\tilde{B}(N,G) = \frac{N}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{k(k+1/G-2)}$$

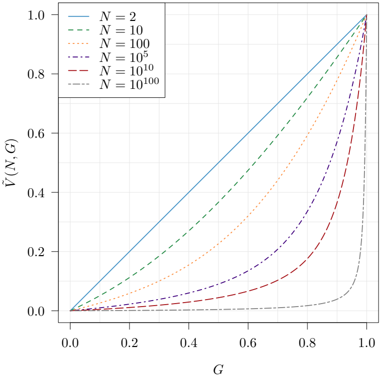


Dane z RePEc - Bonferroni index

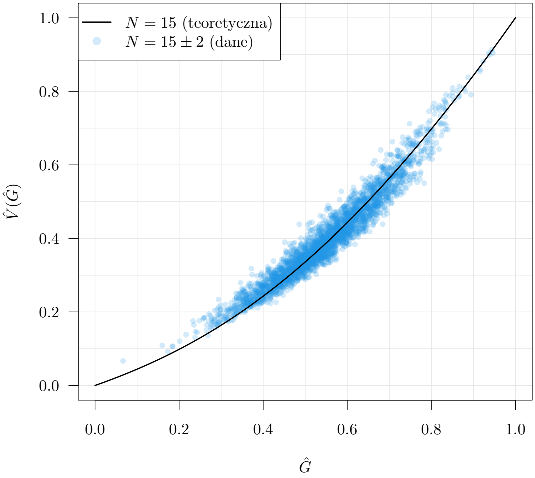


de Vergottini index

$$\tilde{V}(N,G) = \frac{1}{H_N - 1}\left(\frac{\Gamma(1/G-2)\Gamma(N)}{\Gamma(N-1+1/G)} + \frac{G}{(2G-1)N} - \frac{G}{G-1}\right)$$

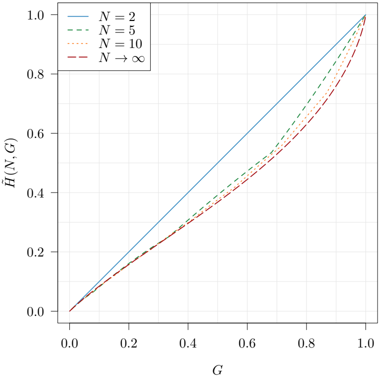


Dane z RePEc - de Vergottini index

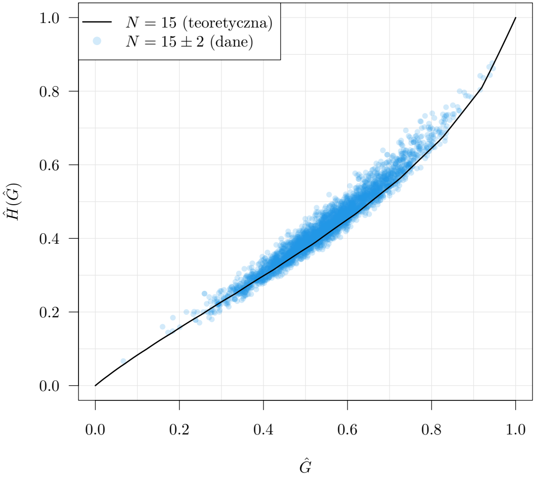


Hoover index

$$\tilde{H}(N,G) = \frac{N}{N-1}\left(\frac{G}{2G-1}\frac{\Gamma(N)}{\Gamma(N-1+1/G)}\frac{\Gamma(\nu-1+1/G)}{\Gamma(\nu)} - \frac{\nu}{N}\right),$$



Dane z RePEc - Hoover index



Podsumowanie

- Zaproponowaliśmy model posiadający **naturalną parametryzację w języku indeksu Giniego**.
- Wyprowadzone zostały wzory analityczne na zależności pomiędzy indeksem Giniego, a innymi miarami nierówności.
- Uzyskane wzory zgadzają się z empirią.
- W każdym przypadku obserwujemy monotoniczną zależność od G – równoważność miar.
- Dobór konkretnego indeksu może się odbywać w oparciu o analizę wypukłości uzyskanych krzywych.

Dziękuję!