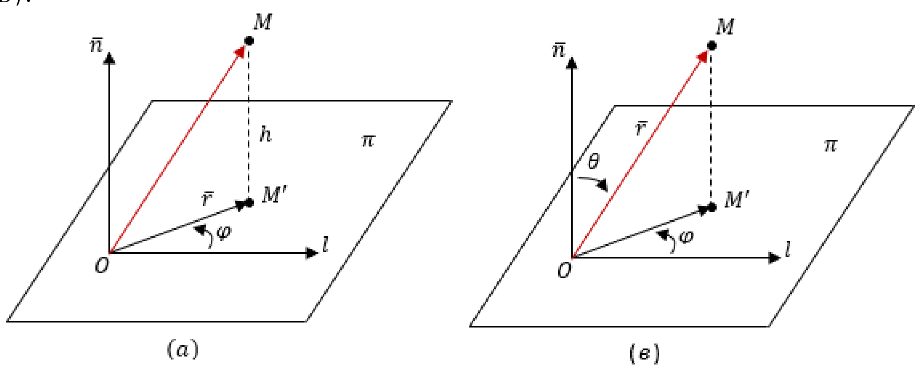
Формула $(**)$ выражает полярные координаты r, φ через декартовы координаты. Заметим, что для нахождения φ, вообще говоря, необходимо использовать два последних равенства в $(**)$ (подумайте почему!). В некоторых книжках из последних двух равенств делают вывод: $tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}$ – это ошибка.

В решении ряда задач использование полярной системы координат оказывается гораздо эффективней, чем применение декартовой системы. Такие задачи у вас будут, например, в курсе МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. Здесь мы на этом останавливаться не будем.

Цилиндрические и сферические координаты в пространстве

Рассмотрим в пространстве плоскость π и зададим на ней полярную систему координат. O – полюс, l – полярная ось. Пусть $\bar{n}$ некоторый вектор перпендикулярный к плоскости π (см. рис. а, в).



Цилиндрические координаты точки M это тройка чисел $(\bullet)M(r;\varphi;h)$, где $h = MM'$ и $MM' \perp \pi$ (см. рис. *а*).

Сферические координаты $(\bullet)M(r;\varphi;\theta)$ (см. рис. *в*).

2.2 Уравнение линии на плоскости. Уравнение прямой на плоскости

Пусть на (аффинной) плоскости задана декартова система координат OXY и некоторая линия l.

Определение 2.6. Говорим, что уравнение $F(x, y) = 0$ есть уравнение линии l и пишем

$$l\colon F(x, y) = 0, \qquad (*)$$

если координаты любой точки $M(x, y) \in l$ удовлетворяют данному уравнению и обратно: любое решение этого уравнения, интерпретирующееся как точка $M(x, y)$ на плоскости, лежит на l: $(\bullet)M(x, y) \in l$.

Если уравнение $(*)$ в какой-либо системе координат можно записать в виде
$l\colon a_{k_1t_1}x^{k_1}y^{t_1} + \ldots + a_{k_st_s}x^{k_s}y^{t_s} = 0$, где $k_1, \ldots, k_s$, $t_1, \ldots, t_s$ – неотрицательные целые числа, то l называют АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ линией. Определим число m: $m = \max\{k_1 + t_1, \ldots, k_s + t_s\}$.

Число m называют ПОРЯДКОМ (степенью) алгебраической линии.

Например

(1) $l\colon 5x^3y^2 - 8xy^4 + 7x^6 - y + 8 = 0 \Rightarrow l\colon 5x^3y^2 - 8x^1y^4 + 7x^6y^0 - x^0y^1 + 8x^0y^0 = 0$, $m = \max\{3+2, 1+4, 6+0, 0+1, 0+0\} = 6$, т.е. l – алгебраическая линия 6-го порядка.

(2) $l\colon x^2 + y^2 = 1$ (школа: уравнение окружности $R = 1$) $\Rightarrow l\colon x^2y^0 + x^0y^2 - x^0y^0 = 0$, т.е. окружность – алгебраическая линия 2-го порядка.

(3) Общим видом алгебраической линии l 1-го порядка будет:
$l\colon a_{10}x^1y^0 + a_{01}x^0y^1 + a_{00}x^0y^0 = 0$

или

$l\colon a_{10}x + a_{01}y + a_{00} = 0,$

где a_{10} и/или $a_{01} \neq 0$ (также пишем $a_{10}^2 + a_{01}^2 \neq 0$), т.к. в противном случае порядок линии l будет равен нулю или $l = \varnothing$.

Переобозначая коэффициенты это уравнение обычно записывают в виде:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ (A^2 + B^2 \neq 0) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Уравнение первой степени (1) также называют ЛИНЕЙНЫМ уравнением.

При изменении системы координат $OXY \to O'X'Y'$ координаты точки изменяются и закон изменения известен (см. стр. 35-36):

$$\left.\begin{array}{l} x = c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{array}\right\}$$

Если линия l в OXY имела уравнение $(*)$, то в другой системе координат уравнение изменится.

Например

$l\colon 2x^2 - 3y + 1 = 0$ в $OXY \qquad (\star)$

Пусть закон преобразования $OXY \to O'X'Y'$ есть

$$\left.\begin{array}{l} x = x' - 1 \\ y = 2x' + y' - 2 \end{array}\right\}$$

Тогда $2(x'-1)^2 - 3(2x' + y' - 2) + 1 = 2(x')^2 - 10x' - 3y' + 9 \Rightarrow$

$l\colon 2(x')^2 - 10x' - 3y' + 9 = 0$ в $O'X'Y' \qquad (\star\star)$

Отмечаем, что оба уравнения $(\star)$ и $(\star\star)$ есть алгебраические уравнения одного и того же порядка.

Определение 2.7. ИНВАРИАНТОМ (от франц. Invariant – неизменяемость) называем те характеристики объекта, которые не изменяются при определённых операциях, совершаемых над этим объектом.

Утверждение 2.1. Относительно изменения системы координат инвариантами будут: понятие алгебраичности линии и её порядок.

Доказательство. (1) Утверждение имеет место для алгебраических линий 1-го ($m = 1$) порядка:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ (A^2 + B^2 \neq 0) \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Действительно: $Ax + By + C = A(c_{11}x' + c_{12}y' + x_0) + B(c_{21}x' + c_{22}y' + y_0) + C = (Ac_{11} + Bc_{21})x' + (Ac_{12} + Bc_{22})y' + (Ax_0 + By_0 + C)$.

И после переобозначений $A' = Ac_{11} + Bc_{21}$, $B' = Ac_{12} + Bc_{22}$, $C' = Ax_0 + By_0 + C$ имеем

$l\colon A'x' + B'y' + C' = 0, \qquad (1)'$

Причём $(A')^2 + (B')^2 \neq 0$. Действительно, если $A' = B' = 0$, то получаем систему

$$\left.\begin{array}{l} Ac_{11} + Bc_{21} \\ Ac_{12} + Bc_{22} \end{array}\right\}$$

Определитель системы $\begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ т.к. матрица перехода невырожденная матрица (см. стр. 30). Поскольку система однородная, то она будет иметь только тривиальное решение: $A = B = 0$, что противоречит условию $A^2 + B^2 \neq 0$.

Вывод l – алгебраическая линия 1-го порядка.

(2) Доказательство для общего случая $m > 1$ по своей сути аналогично предыдущему ($m = 1$), однако формально довольно громоздкое. Приводить его здесь не будем. $\square$

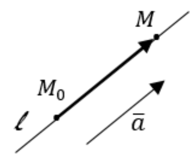
Следствие 2.1. Пусть уравнение линии l в системе OXY НЕ является алгебраическим уравнением. Тогда уравнение l не будет алгебраическим ни в какой другой системе координат из чего следует, что l не алгебраическая линия.

Пример

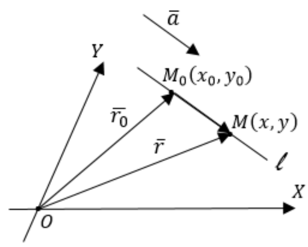
(1) $l\colon 7x^5 - 4\sqrt{x}y^2 + 15 = 0$ в системе $OXY \Rightarrow l\colon 7x^5y^0 - 4x^{\frac{1}{2}}y^2 + 15x^0y^0 = 0$. Это уравнение содержит степень $k_2 = \frac{1}{2}$ не целое число $\Rightarrow l$ НЕ алгебраическая линия.

(2) $l\colon \dfrac{1}{x}y^7 - 3x^2y + 18y = 0$ в $OXY \Rightarrow l\colon x^{-1}y^7 - 3x^2y^1 + 18x^0y^1 = 0$. Здесь степень $k_1 = -1$ отрицательное число $\Rightarrow l$ НЕ алгебраическая линия.

Положение прямой на плоскости вполне определено, если задана точка $M_0 \in l$ и ненулевой вектор $\bar{a} \parallel l$. Вектор $\bar{a}$ ($\bar{a} \neq \bar{0}$) называют направляющим вектором прямой l. Рассмотрим произвольную (говорим также текущую) точку $M \in l$. Тогда $\overline{M_0M} \parallel \bar{a} \Leftrightarrow$ когда векторы пропорциональны: $\overline{M_0M} = t\bar{a}$. Здесь t рассматриваем как параметр и при изменении $-\infty < t < +\infty$ точка M "пробегает" всю прямую l.



Зафиксируем на плоскости некоторую систему координат OXY и пусть координаты точки M_0 и направляющего вектора есть: $(\bullet)M_0(x_0, y_0)$, $\bar{a}\{p, q\}$. Тогда из рис. следует



$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a} \text{ – векторное уравнение } l$$

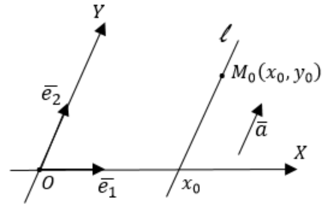
В векторном уравнении можно прийти к "координатной" записи. Так как $\overline{M_0M} = t\bar{a} = \{tp, tq\}$, $\bar{r} = \{x, y\}$, $\bar{r}_0 = \{x_0, y_0\}$, то $\{x, y\} = \{x_0, y_0\} + \{tp, tq\}$. Получили

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \end{array}\right\} \text{ – параметрическое уравнение } l$$

Далее, из параметрического уравнения имеем $\dfrac{x - x_0}{p} = t$ и $\dfrac{y - y_0}{q} = t$ из чего следует

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} \text{ – каноническое уравнение } l$$

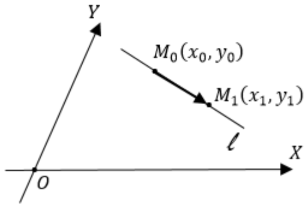
Замечание 2.3. По условию направляющий вектор $\bar{a} \neq \bar{0}$, т.е. p и/или $q \neq 0$ ($p^2 + q^2 \neq 0$). Если, например, $p = 0$, то $q \neq 0$. Тогда каноническое уравнение прямой есть: $\dfrac{x - x_0}{0} = \dfrac{y - y_0}{q}$ (?) Как понимать "деление" на 0 в правой дроби (?) Какой смысл имеет эта запись (?). Для ответа на эти вопросы вернёмся к параметрической форме уравнения прямой:



$$\begin{cases} x = x_0 + t \cdot 0 \ \Rightarrow \ l \text{ пересекает ось } X \text{ в точке } x_0 \\ y = y_0 + tq \end{cases}$$

$\bar{a} = \{0, q\} \Rightarrow \bar{a} = 0\bar{e}_1 + q\bar{e}_2 \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{e}_2$.

Таким образом, из условия $p = 0 \Rightarrow l \parallel \bar{e}_2$ и пересекает ось X в точке x_0 (см. рис.). Аналогично, если $q = 0$, то $l \parallel \bar{e}_1$ и пересекает ось Y в точке y_0.



Пусть прямая l проходит через две точки $(\bullet)M_0(x_0, y_0)$ и $(\bullet)M_1(x_1, y_1)$. Возьмём в качестве направляющего вектора $\bar{a}$: $\bar{a} = \overline{M_0M_1} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0\}$. В этом случае $p = x_1 - x_0$ и $q = y_1 - y_0$.

Тогда каноническое уравнение есть:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} \text{ – уравнение прямой “через две точки”}$$

Перепишем каноническое уравнение прямой в форме: $q(x - x_0) - p(y - y_0) = 0 \Rightarrow qx + (-p)y + (py_0 - qx_0) = 0$. Определим $A = q$, $B = -p$ и $C = py_0 - qx_0$. Тогда получим

$$Ax + By + C = 0 \text{ – общее уравнение прямой}$$

Так как направляющий вектор $\bar{a} = \{p, q\} \neq \bar{0}$, то $p^2 + q^2 \neq 0 \Rightarrow A^2 + B^2 \neq 0$ и в общем уравнении прямой

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ (A^2 + B^2 \neq 0) \end{array}\right\},$$

т.е. показали, что алгебраические линии 1-го порядка есть прямые и только они и тем самым дана исчерпывающая характеристика алгебраическим линиям 1-го порядка.

Подчеркнём, что в общем уравнении прямой $A = q$, $B = -p$ и т.к. $\bar{a} = \{p, q\}$ – направляющий вектор прямой, то для общего уравнения прямой направляющий вектор имеет вид: $\bar{a} = \{-B, A\}$.

Пусть в общем уравнении прямой $B \neq 0$. Тогда уравнение можно разрешить относительно y: $y = \left(-\dfrac{A}{B}\right)x + \left(-\dfrac{C}{B}\right)$ и уравнение прямой принимает вид:

$$y = kx + b \text{ – уравнение прямой с угловым коэффициентом}$$

Сформулируем список полученных уравнений для прямой l:

$$\left.\begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ (A^2 + B^2 \neq 0) \\ \text{Общее уравнение прямой} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a} \\ \text{Векторное уравнение прямой} \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + tp \\ y = y_0 + tq \\ \text{Параметрическое уравнение прямой} \end{array}\right\} \quad (3)$$

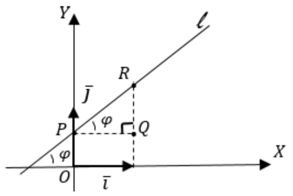
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q} \\ \text{Каноническое уравнение прямой} \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_0} \\ \text{Уравнение прямой “через две точки”} \end{array}\right\} \quad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} y = kx + b \\ \text{Уравнение прямой с угловым коэффициентом} \end{array}\right\} \quad (6)$$

Замечание 2.4. Общее уравнение (1) отвечает на вопрос об алгебраических линиях 1-го порядка: это прямые и только они. С этой точки зрения уравнение (1) будем считать основным уравнением. Последующие уравнения носят более “технический” характер, но они оказываются весьма эффективными в решении конкретных задач.

Замечание 2.5. Относится к "школьному" уравнению (6). Во первых, оно было получено из общего уравнения (1) в предположении $B \neq 0$. Если $B = 0$, то из условия $A^2 + B^2 \neq 0$ $\Rightarrow A \neq 0$ и, следовательно, направляющий вектор $\bar{a} = \{-B, A\} = \{0, A\}$ коллинеарен вектору $\bar{e}_2$ ($\bar{a} \parallel \bar{e}_2$) или прямая l параллельна оси OY ($l \parallel OY$). То есть не каждую прямую можно задать уравнением (6). Во вторых, угловой коэффициент k в произвольной системе координат OXY не равен тангенсу угла φ, где φ-угол наклона прямой l к оси OX. Однако, если $OXY = \{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ есть ПРЯМОУГОЛЬНАЯ система координат (как в школе), то $k = \mathrm{tg}\varphi$.



Действительно, пусть $l \nparallel OY$. Дополнительные построения (см. рис.) дают прямоугольный треугольник PQR. Один из катетов $PQ = 1$ (так как длина вектора $\bar{i}$ равна единице), а второй катет RQ есть разность значений функции $y(x) = kx + b$ в точках $y(1)$ и $y(0)$: $RQ = y(1) - y(0) = k + b - b = k$. Следовательно, $\mathrm{tg}\varphi = \dfrac{RQ}{PQ} = k$.

Взаиморасположение двух прямых на плоскости

Пусть две прямые на плоскости заданы общими уравнениями
$l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и направляющий вектор $\bar{a}_1 = \{-B_1, A_1\}$;
$l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0$ и направляющий вектор $\bar{a}_2 = \{-B_2, A_2\}$.

Теорема 2.1 (О взаиморасположении прямых)**.**

(1) Прямые совпадают: $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$;

(2) Прямые параллельны: $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$;

(3) Прямые пересекаются в одной точке $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$.

Доказательство. Прямые l_1 и l_2 будут совпадать или пересекаться тогда и только тогда, когда $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$. По критерию коллинеарности векторов в координатной форме это означает, что их соответствующие координаты пропорциональны:

$$\frac{-B_1}{-B_2} = \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = \lambda A_2 \\ B_1 = \lambda B_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Пусть $\bar{a}_1 \parallel \bar{a}_2$ и l_1, l_2 имеют общую точку $M_0(x_0, y_0) = l_1 \cap l_2$. Это будет означать, что $l_1 = l_2$. Координаты точки M_0 должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases} \qquad (**)$$

Из $(*)$ следует

$$\begin{cases} \lambda A_2x_0 + \lambda B_2y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \quad | \cdot \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda A_2x_0 + \lambda B_2y_0 + C_1 = 0 \\ \lambda A_2x_0 + \lambda B_2y_0 + \lambda C_2 = 0 \end{cases}$$

Если из первого уравнения вычесть второе, то мы получим $C_1 - \lambda C_2 = 0 \Rightarrow \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda$, т.е. $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Если $\dfrac{C_1}{C_2} \neq \lambda$ то система $(**)$ несовместна, т.е. не имеет решений $l_1 \cap l_2 = \varnothing$. Следовательно, $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$.

Прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда $l_1 \nparallel l_2$ и $l_1 \neq l_2 \Leftrightarrow$ $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$. $\square$

Следствие 2.2. Из условия совпадения прямых: $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda \neq 0$ следует, что общее уравнение прямой определено с точностью до константы: $l\colon Ax + By + C = 0$ и $l\colon \lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ $(\lambda \neq 0)$.

НЕПОЛНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Определение 2.8. Общее уравнение прямой $l\colon Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ называем НЕПОЛНЫМ если хотя бы один из коэффициентов A, B, C равен нулю.

Из-за условия $A^2 + B^2 \neq 0$ может быть пять случаев НЕПОЛНЫХ уравнений:
(a) $A = 0,\ B, C \neq 0$;
(b) $B = 0,\ A, C \neq 0$;
(c) $C = 0,\ A, B \neq 0$;
(d) $A, C = 0,\ B \neq 0$;
(e) $B, C = 0,\ A \neq 0$.

Рассмотрим вопрос о взаиморасположении прямой l относительно системы координат OXY в каждом отдельном случае.

(a) $A = 0$ и $B, C \neq 0 \Rightarrow$ направляющий вектор $\bar{a} = \{-B, 0\} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{e}_1 \Rightarrow l \parallel OX$;
(b) $B = 0$ и $A, C \neq 0 \Rightarrow$ направляющий вектор $\bar{a} = \{0, A\} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{e}_2 \Rightarrow l \parallel OY$;
(c) $C = 0$ и $A, B \neq 0 \Rightarrow l\colon Ax + By = 0 \Rightarrow (\bullet)O(0,0) \in l \Rightarrow l$ проходит через начало координат;
(d) $A, C = 0$ и $B \neq 0$. Из (a) и (c) $\Rightarrow l$ совпадает с осью OX;
(e) $B, C = 0$ и $A \neq 0$. Из (b) и (c) $\Rightarrow l$ совпадает с осью OY.