

Отчет по лабораторной работе № 116

«Определение вязкости воздуха»

Цель работы: определить экспериментально коэффициент вязкости воздуха

Оборудование: стеклянный сосуд с мерной шкалой, пробка с плотно вставленным капилляром, секундомер

Теоретическая часть

Между слоями жидкости или газа, движущимися друг относительно друга с разными скоростями, возникают силы вязкого трения:

$$F = \eta S \left| \frac{dv_x}{dy} \right| \quad (1)$$

где η - коэффициент вязкости жидкости (газа), S - площадь взаимодействующих слоев, а скорость потока направлена вдоль оси x и зависит от координаты y .

Коэффициент вязкости можно измерить, исследуя течение газа (жидкости) через цилиндрическую трубку малого сечения (капилляр). Для ламинарных течений связь между разностью давлений Δp на концах капилляра и объемом Q жидкости (газа), протекающим через поперечное сечение в единицу времени (расходом жидкости), определяется формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta p \quad (2)$$

где R - радиус капилляра, L — его длина.

Экспериментальная установка

Экспериментальная установка для определения вязкости воздуха (см. рис.1) представляет собой большой сосуд, который закрывается сверху пробкой с плотно вставленным в нее капилляром. Сосуд заполняется водой, которая вытекает через отверстие в дне сосуда. Объем воздуха, втекающего через капилляр в сосуд, равен объему воды, вытекающей из сосуда. При достаточно медленном вытекании воды (медленность истечения обеспечивается понижением давления воздуха над поверхностью воды) перепад давлений на концах капилляра равен статическому давлению столба воды высотой $h(t)$, $\Delta p = \rho g h$, где ρ - плотность воды, g - ускорение свободного падения.

Объем втекающего воздуха Q , или вытекающей воды равен скорости понижения уровня воды, умноженной на площадь сечения сосуда:

$$Q = -S \frac{dh}{dt} \quad (3)$$

где знак “–” учитывает отрицательность производной $\frac{dh}{dt}$.

$$\text{Тогда получим } S \frac{dh}{dt} = -\frac{\pi R^4}{8\eta L} \rho g h \quad (4)$$

Отсюда следует, что понижение уровня воды происходит по экспоненциальному закону:

$$h(t) = h_0 e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (5)$$

где $\tau = \frac{8\eta LS}{\pi R^4 \rho g}$ – характерное время вытекания воды, h_0 – начальная высота уровня воды.

Теоретическая справка

Число Рейнольдса — критерий подобия течения вязкости жидкости. При $\Re < \Re_{кр.}$ - ламинарное течение, $\Re > \Re_{кр.}$ - турбулентное, а при $\Re > 10^4$ - устойчивое турбулентное. Определяется следующими соотношениями:

$$\Re = \frac{\rho v R}{\eta}$$

где η - вязкость, R — радиус капилляра, ρ - плотность среды.

Закон (уравнение) Бернулли:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = const$$

где ρ - плотность жидкости, v - скорость потока, h — высота, p — давление.

Адиабата Пуассона:

Для идеальных газов, чью теплоёмкость можно считать постоянной, в случае квазистатического процесса:

$$pV^\gamma = const$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ - показатель адиабаты.

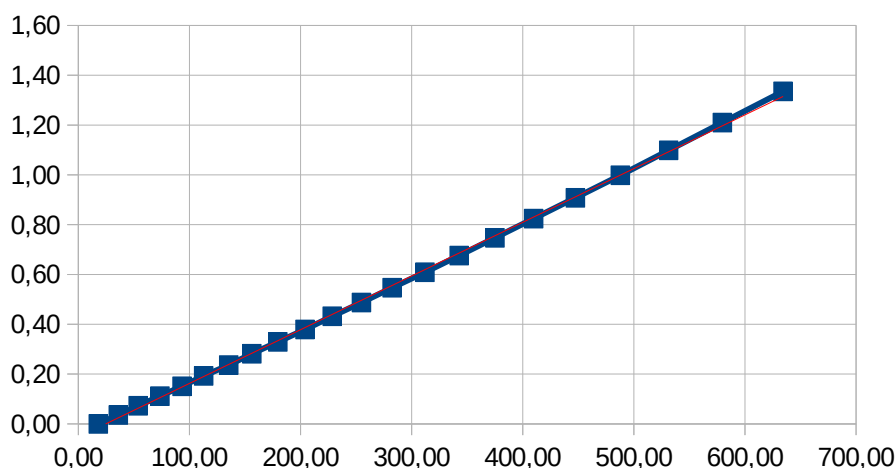
Практическая часть

1. Вынем пробку с капилляром и, закрыв нижнее отверстие, нальем в сосуд воду, плотно вставим пробку, откроем нижнее отверстие, скорость истечения воды из сосуда станет малой при $h_0 = 57 \text{ см}$, начнем отсчет, соответствующие уровни воды h занесем в таблицу.

$h, \text{ см}$	$t_1, \text{ с}$	$t_2, \text{ с}$	$t_3, \text{ с}$	$t_{ср.}, \text{ с}$	$\ln \frac{h_0}{h}$
-----------------	------------------	------------------	------------------	----------------------	---------------------

57	20,5	16,44	17,19	18,04	0,00
55	38,38	34,66	34,89	35,98	0,04
53	55,91	52,6	53,21	53,91	0,07
51	75,75	72,31	72,25	73,44	0,11
49	95,48	92,12	92,45	93,35	0,15
47	115,12	110,73	112,5	112,78	0,19
45	139,89	132,3	133,99	135,39	0,24
43	158,27	154,33	155,74	156,11	0,28
41	181,92	177,57	179,29	179,59	0,33
39	206,35	202,02	203,84	204,07	0,38
37	230,74	226,48	228,27	228,50	0,43
35	256,93	252,67	254,9	254,83	0,49
33	284,68	280,22	282,28	282,39	0,55
31	314,28	309,97	311,72	311,99	0,61
29	345,16	340,83	342,46	342,82	0,68
27	377,32	373,12	374,44	374,96	0,75
25	411,69	408,36	409,3	409,78	0,82
23	449,78	445,45	446,93	447,39	0,91
21	490,31	486,18	487,06	487,85	1,00
19	533,59	529,38	531,07	531,35	1,10
17	582,26	577,7	579,16	579,71	1,21
15	636,4	632,46	633,99	634,28	1,34

2. Используя таблицу из задания 1, построим график зависимости $\ln \frac{h}{h_0}(t)$.



Коэффициент прямой тренда $a=0,00215$ и его погрешность

$\Delta a=8,36 \cdot 10^{-8}$ рассчитаны с помощью метода наименьших квадратов по формулам.

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, \quad \Delta a = 2 \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - a^2 \right)^2}$$

где $n = 22$ — количество пар $x_i y_i$, $x_i = t$, $y_i = \ln \frac{h_0}{h}$,

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2, \quad S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2.$$

Заметим, что зависимость получилась линейная, а значит, коэффициент τ можно рассчитать с помощью a (исходя из преобразований формулы (5) и уравнения получившейся прямой).

3. Определим коэффициент по наклону прямой на графике и рассчитаем коэффициент вязкости по формуле

$$\eta = \frac{\pi R^4 \rho g \tau}{8 L S}, \quad R = 1,62 \cdot 10^{-2} \text{ см}, L = 3,4 \text{ см}, S = 18,5 \text{ см}^2, \rho = 1 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}, \tau = 462,96 \text{ с}.$$

$$\eta = 19,17 \cdot 10^{-5} \pm 7,49 \cdot 10^{-6} [\text{г/см} \cdot \text{с}]$$

При 293К табличное значение вязкости воздуха $1,8 \cdot 10^{-5} [\text{Па} \cdot \text{с}]$, но эксперимент проводился при 299К, поэтому полученное значение коэффициента вязкости воздуха (с учетом погрешности) чуть выше. С повышением температуры вязкость воздуха увеличивается, это объясняется увеличением средней скорости молекул.

4. Оценим число Рейнольдса для условий эксперимента.

$$\Re = \frac{\rho' v R}{\eta}$$

где ρ' и η — плотность и коэффициент вязкости воздуха, R — радиус капилляра, v — характерная скорость течения воздуха в

капилляре.

Тогда, исходя из формул (2), (3), имеем:

$$v = \frac{Q}{S} = \frac{\frac{\Delta P}{8\eta L} \pi R^4}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} = \frac{\rho g h}{8\eta L} R^2$$

Подставим:

$$\Re = \frac{\rho g h}{8\eta L} R^2 \frac{\rho' R}{\eta} = \frac{\rho' \rho g h R^3}{8 L \eta^2}$$

Исходя из условий эксперимента, число Рейнольдса равно

$\Re \approx 28,16 \ll 1100$, а значит, течение в капилляре было ламинарным.

Контрольные вопросы

1. Оценим величину ошибки, допускаемой при определении давления.

Воспользуемся уравнением Бернулли $\rho g h + \rho \frac{v^2}{2} + p = \text{const}$, и рассмотрим давление в точках 1 (на поверхности) и 2 (на дне капилляра). Мы предполагали, что при достаточно медленном вытекании воды перепад давлений на концах капилляра равен статическому давлению столба воды высотой h : $\Delta p = \rho g h$, т. е. давление над жидкостью $p' = p_0 - \rho g h$, где p_0 - атмосферное давление. Тогда получим:

$$\rho g h + \rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho g h + \rho \frac{v_2^2}{2} + p' \text{ или } \rho g h + \rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = p_0 + \rho \frac{v_2^2}{2}$$

А значит, $p_1 = p_0 + \rho \frac{v_2^2}{2} - \rho g h - \rho \frac{v_1^2}{2}$, что отличается от результата,

полученного в нашем предположении, на величину $\Delta = \rho \frac{v_2^2}{2} - \rho \frac{v_1^2}{2}$;

исходя из таблицы, максимальное значение скорости

$$v_2 = \frac{2}{17,4} \frac{\text{см}}{\text{с}} \approx 0,11 \frac{\text{см}}{\text{с}}, \text{ тогда } \rho \frac{v_2^2}{2} \approx 0,00605, \text{ вычитаемое } \rho \frac{v_1^2}{2} \text{ еще более}$$

малого порядка, т.к. скорость $v_1 < v_2$. Получается, что отношение

$$\frac{\Delta}{p'} < 6,4 * 10^{-9}, \text{ т. е. данной поправкой можно пренебречь.}$$

2. Оценим длину свободного пробега и диаметр молекул воздуха. Вязкость воздуха так же можно рассчитать по следующей формуле:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho' v \lambda$$

где $v = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$ — средняя скорость теплового движения молекул, а λ — длина свободного пробега. Оценим её:

$$\lambda = \frac{3\eta}{\rho' \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}}$$

(табличное значение при нормальных условиях 10^{-5} см).

С помощью длины свободного пробега можно определить диаметр молекул воздуха:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2} \pi d^2 n} = \frac{kT}{\sqrt{2} \pi d^2 p_0}$$

$$\text{Откуда } d = \sqrt{\frac{kT}{\lambda \sqrt{2} \pi p_0}} = \sqrt{\frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 299}{9,56 \cdot 10^{-8} \cdot \sqrt{2} \pi \cdot 10^5}} \approx 3,05 \cdot 10^{-8} \text{ см (табличное}$$

значение при нормальных условиях $3,05 \cdot 10^{-8}$ см).

3. Оценим, на сколько должен опуститься уровень воды после открытия нижнего отверстия, чтобы в свободной от воды части сосуда установилось давление воздуха на ρgh ниже атмосферного.

В идеальных условиях тепло в систему не подводится, другими словами, процесс можно назвать адиабатическим. Тогда имеет место адиабата Пуассона

$$p V^\gamma = \text{const}$$

Запишем для нашего случая $p_0 V_0^\gamma = (p_0 - \rho gh)(V_0 + \Delta V)^\gamma$ и преобразуем:

$$\frac{p_0}{p_0 - \rho gh} = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0}\right)^\gamma$$

Т.к. $p_0 \ll \rho gh$ и $\Delta V \ll V_0$, можем воспользоваться разложением Тейлора и ограничиться первыми двумя его членами:

$$1 + \gamma \frac{\Delta V}{V_0} = 1 + \frac{\rho gh}{p_0} \quad \text{или} \quad \gamma \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\rho gh}{p_0}$$

Здесь $\Delta V = S(h_1 - h)$ – изменение объема воздуха в сосуде за время Δt , $V_0 = S(h_0 - h_1)$ – начальный объем воздуха в сосуде. Тогда получим следующее соотношение:

$$\frac{h_1}{h} = 1 + \frac{\rho g(h_0 - h_1)}{\gamma p_0}$$

Найдем отношение $\frac{h}{h_1}$ и вновь воспользуемся разложением:

$$\frac{h}{h_1} = \left(1 + \frac{\rho g(h_0 - h_1)}{\gamma p_0}\right) = 1 - \frac{\rho g(h_0 - h_1)}{\gamma p_0}$$

С учетом данных эксперимента получим:

$$\frac{h}{h_1} = 1 - \frac{1 \cdot 981 \cdot (75 - 59)}{1,4 \cdot 10^6} \approx 0,99, \text{ а значит, уровень воды после открытия}$$

нижнего отверстия для установления нужного давления понизится на $h_1 - h \approx 0,59 \text{ см}$, что происходит достаточно быстро.

Выводы

В ходе проведения эксперимента установлен коэффициент вязкости воздуха ($19,17 \cdot 10^{-5} \pm 7,49 \cdot 10^{-6} \text{ П}$), который незначительно отличается от табличного значения из-за разных температур в данных таблицы и в условиях эксперимента.

С помощью данного коэффициента рассчитаны теоретические значения для свободной длины пробега и диаметр молекул воздуха, что практически соответствует табличным значениям при нормальных условиях.

Также установлено, что после открытия нижнего отверстия в экспериментальной установке давление воздуха на ρgh ниже атмосферного, величина ошибки при таком определении давления довольно мала.