$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$ по определению $(*)$ можем "свернуть" скобки: $= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Полученная формула:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называется ФОРМУЛОЙ РАЗЛОЖЕНИЯ определителя третьего порядка $|A|$ по <u>первой</u> строке.

Замечание 1.17. Несмотря на пугающе-грозный вид этой формулы, запомнить её очень просто: (1) В исходном определителе $|A|$ выделим 1-ую строку и над ней поставим последовательность знаков $+ - +$, соединяющих три слагаемых в правой части формулы:

$$\begin{array}{c} \quad\;\; + \quad - \quad + \\ |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

(2) Первый, второй и третий определители второго порядка получаются из $|A|$ вычёркиваем 1-й строки и 1,2,3-го столбцов, соответственно.

Например, разложим определитель (см. стр. 24) по 1-й строке:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 11 - 24 = -4.$$

1.8 Векторное и смешанное произведения векторов в координатной форме. Двойное векторное произведение

Пусть $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – некоторый базис в V^3. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ и координаты этих векторов в базисе E есть:

$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \Rightarrow \bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$,

$\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \Rightarrow \bar{b} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3$.

Тогда $[\bar{a}, \bar{b}] = [\alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3, \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3] =$ по св-ву $(IV.3)$ ВП (стр. 20) $= \alpha_1\beta_1[\bar{e}_1, \bar{e}_1] + \alpha_1\beta_2[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \alpha_1\beta_3[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \alpha_2\beta_1[\bar{e}_2, \bar{e}_1] + \alpha_2\beta_2[\bar{e}_2, \bar{e}_2] + \alpha_2\beta_3[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + \alpha_3\beta_1[\bar{e}_3, \bar{e}_1] + \alpha_3\beta_2[\bar{e}_3, \bar{e}_2] + \alpha_3\beta_3[\bar{e}_3, \bar{e}_3] = \left\{ \begin{array}{l} \text{из определения векторного произведения } \Rightarrow [\bar{e}_i, \bar{e}_i] = \bar{0} \\ \text{из свойства } (IV.2) \text{ векторного произведения } \Rightarrow [\bar{e}_i, \bar{e}_j] = -[\bar{e}_j, \bar{e}_i] \end{array} \right\} =$
$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\bar{e}_2, \bar{e}_3]$.

Из определения $(*)$ определителя второго порядка (стр. 24) получаем:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}[\bar{e}_2, \bar{e}_3] \qquad (1)$$

Обсудим полученную формулу. Она представляет собой разложение вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ по системе векторов $E' = \{[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]\}$. Будет ли система E' БАЗИСОМ в V^3? Ответом на этот вопрос является утверждение:

Утверждение 1.5. Система $E' = \{[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]\}$ есть базис в V^3.

Доказательство. (от противного) По "Геометрическому" определению базиса в V^3 (см. стр. 9) это три НЕ КОМПЛАНАРНЫХ вектора. Предположим противное: $[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]$ есть три КОМПЛАНАРНЫХ вектора. Следовательно, один из них, например $[\bar{e}_1, \bar{e}_2]$, можно разложить по остальным: $[\bar{e}_1, \bar{e}_2] = \lambda_1[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \lambda_2[\bar{e}_2, \bar{e}_3] \Rightarrow [\bar{e}_1, \bar{e}_2] - \lambda_1[\bar{e}_1, \bar{e}_3] - \lambda_2[\bar{e}_2, \bar{e}_3] = \bar{0}$.

Обе части последнего равенства умножаем скалярно на $\bar{e}_3$:
$([\bar{e}_1, \bar{e}_2] - \lambda_1[\bar{e}_1, \bar{e}_3] - \lambda_2[\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{e}_3) = (\bar{0}, \bar{e}_3) = 0$.

Используем дистрибутивность скалярного произведения:
$([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}_3) - \lambda_1([\bar{e}_1, \bar{e}_3], \bar{e}_3) - \lambda_2([\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{e}_3) = 0$.

Из определения смешанного произведения и свойства $(V.4)$ следует
$(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) - \lambda_1(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_3) - \lambda_2(\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_3) = 0$.

Из критерия компланарности векторов (см. стр. 21) следует $(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_3) = (\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_3) = 0$. Таким образом, мы получаем, что $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) = 0$, т.е. тройка $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ есть три компланарных вектора. Противоречие с тем, что $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – базис в V^3. □

Из доказанного утверждения: $E' = \{[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]\}$ – базис в V^3 и определения координат вектора в базисе делаем вывод:
$$\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \right\} \qquad (1)'$$
есть координаты $[\bar{a}, \bar{b}]$ в базисе E'. Поскольку векторы $\bar{a}, \bar{b}$ заданы своими координатами в базисе E, то естественно ставить задачу: получить координаты искомого вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ в ТОМ ЖЕ базисе E. Но базисы E и E' РАЗЛИЧНЫ и поэтому формула $(1)'$ НЕ дает ожидаемого результата.

Используем формулу (1) для вывода формулы смешанного произведения в координатной форме. Наряду с векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ введем вектор $\bar{c} \in V^3$ с координатами $\bar{c} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$ в базисе $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. То есть $\bar{c} = \gamma_1\bar{e}_1 + \gamma_2\bar{e}_2 + \gamma_3\bar{e}_3$.

Умножим обе части формулы (1) скалярно на $\bar{c}$:
$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} [\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{c} \right) =$$
из дистрибутивности скалярного произведения по первому множителю
$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} ([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{c}) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} ([\bar{e}_1, \bar{e}_3], \bar{c}) + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} ([\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{c}) \qquad (*)$$

Рассмотрим отдельно скалярное произведение: $([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{c}) = ([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \gamma_1\bar{e}_1 + \gamma_2\bar{e}_2 + \gamma_3\bar{e}_3) =$ по дистрибутивности скалярного произведения по 2-му множителю $= \gamma_1([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}_1) + \gamma_2([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}_2) + \gamma_3([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{e}_3) =$ по свойству $(V.4)$ смешанного произведения и определению смешанного произведения $= \gamma_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_1) + \gamma_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_2) + \gamma_3(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Тройки векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_1$ и $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_2$ очевидно компланарны и, согласно критерию компланарности векторов (см. стр 21), $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_1) = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_2) = 0$.

Следовательно: $([\bar{e}_1, \bar{e}_2], \bar{c}) = \gamma_3(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Аналогично: $([\bar{e}_1, \bar{e}_3], \bar{c}) = \gamma_2(\bar{e}_1, \bar{e}_3, \bar{e}_2) =$ по свойству $(V.3)$ $= -\gamma_2(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

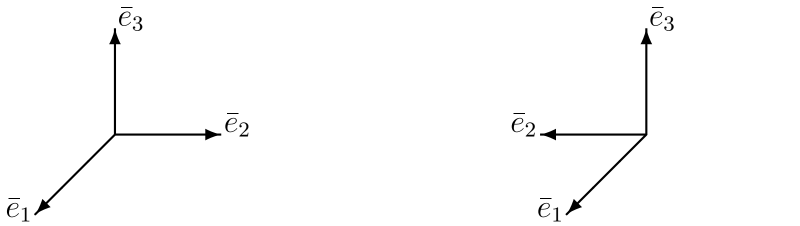
Так же: $([\bar{e}_2, \bar{e}_3], \bar{c}) = \gamma_1(\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_1) =$ по свойству $(V.3)$ $= \gamma_1(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

Поэтому формулу $(*)$ можно записать в виде:
$$([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \gamma_3 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_2 + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \gamma_1 \right) (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3).$$

Т.к. $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ (см. стр 22) и, учитывая формулу разложения определителя третьего порядка по 1-й строке (стр. 25), получаем:
$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \qquad (2)$$

Ранее (стр. 17) было получено выражение скалярного произведения векторов $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ в произвольном базисе $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ пространства V^3. Также было отмечено, что полученное выражение упрощается, если в качестве $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ рассматривать ортонормированный базис $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$ и скалярное произведение в ортонормированном базисе есть: $(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$ – сумма произведений одноименных координат. Покажем сейчас, что формулу (1) для векторного произведения можно также упростить и записать векторное произведение в ТОМ ЖЕ базисе, в котором заданы векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Рассмотрим ортонормированный базис $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ в V^3. Таких базисов в V^3 можно изобразить два. Один будет образовывать ПРАВУЮ, а второй ЛЕВУЮ тройку (см. рис. 18):



ПРАВЫЙ ОНБ *ЛЕВЫЙ ОНБ*

рис. 18

Мы будем фиксировать ПРАВЫЙ базис. Для него введем специальные обозначения $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (здесь $\bar{i} = \bar{e}_1$, $\bar{j} = \bar{e}_2$, $\bar{k} = \bar{e}_3$). Из определения векторного произведения и условия ортонормированности базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ следует

$$\left.\begin{array}{l} [\bar{i}, \bar{j}] = \bar{k} \\ [\bar{i}, \bar{k}] = -\bar{j} \\ [\bar{j}, \bar{k}] = \bar{i} \end{array}\right\} \qquad (!)$$

Запишем в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ формулу (1):

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} [\bar{i}, \bar{j}] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} [\bar{i}, \bar{k}] + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} [\bar{j}, \bar{k}] = \text{с учетом } (!) =$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \bar{k} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \bar{i} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Тем самым доказано, что координаты вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ есть:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Эта формула формально совпадает с формулой $(1)'$, НО здесь координаты векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $[\bar{a}, \bar{b}]$ записаны в одном и том же базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (!!!).

По формуле разложения определителя по 1-й строке (стр. 25) векторному произведению $[\bar{a}, \bar{b}]$ можно придать другой, легко запоминающийся вид:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \quad \text{(однодетерминантная форма записи)}$$

Отметим далее, что поскольку $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ правая тройка и $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ есть ортонормированный базис, то из свойства $(V.1)$ смешанного произведения векторов (стр. 21) следует $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = 1$ и в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ выражение смешанного произведения есть:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

Выпишем все «координатные» формулы в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ в виде списка:

Скалярное произведение: $(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$
Векторное произведение: $\begin{cases} [\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \right\} \\ \text{или однодетерминантная форма:} \\ [\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \end{cases}$
Смешанное произведение: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$

Для решения задач мы, как правило, будем использовать ортонормированный базис $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, что дает нам право пользоваться формулами из списка.

Одна маленькая, но практически важная задача:

Задача

Пусть $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ – два вектора, заданных своими координатами в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$. Найти площадь S параллелограмма, построенного на этих векторах.

Решение

На основании свойства $(IV.1)$ векторного произведения искомая площадь есть: $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$.

Согласно формулам для скалярного произведения и векторного произведения из списка

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2}$$

Полученная формула использует векторное произведение и, следовательно, обоснована только для векторов из пространства V^3 (стереометрия). Если сейчас рассмотреть «плоский вариант» этой задачи: $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2\}$, то здесь векторное произведение НЕ ОПРЕДЕЛЕНО. Однако, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ можно рассматривать в пространстве, считая $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, 0\}$ и $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, 0\}$. Теперь имеем право использовать полученную выше формулу:

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_2 & 0 \\ \beta_2 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \beta_1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)^2} = |\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1|.$$

Последняя операция, которую мы введем в этой главе, есть:

ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Двойное векторное произведение трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V^3$ есть векторное произведение вектора $\bar{a}$ на вектор $[\bar{b}, \bar{c}]$: $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]]$.

Как в случае смешанного произведения, эта операция не является принципиально новой операцией: мы дважды используем известную операцию векторного произведения. Однако, эта конструкция очень активно используется во многих вопросах механики, теории поля и т.д. Ввиду значимости этой операции мы здесь выделяем ее как самостоятельную операцию. По нашей нумерации это операция (VI). Отмечаем два свойства этой операции.

$(VI.1)$ Двойное векторное произведение можно выразить через линейные операции (I), (II) и операцию скалярного произведения (III) по формуле:

$$[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}).$$

(студенческая проекция формулы: АБЦ = БАЦ − ЦАБ)

Доказательство. Пусть даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Выберем базис $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ так, чтобы $\bar{i} \parallel \bar{b}$, $\bar{j}$ находится в плоскости векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ (рис. 19). Тогда:

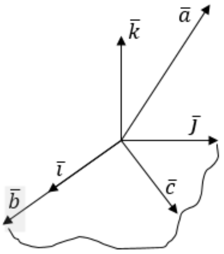


рис. 19

$$\left.\begin{aligned} \bar{b} &= \beta_1 \bar{i} \\ \bar{c} &= \gamma_1 \bar{i} + \gamma_2 \bar{j} \\ \bar{a} &= \alpha_1 \bar{i} + \alpha_2 \bar{j} + \alpha_3 \bar{k} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \bar{a} &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ \bar{b} &= \{\beta_1, 0, 0\} \\ \bar{c} &= \{\gamma_1, \gamma_2, 0\} \end{aligned}$$

Для последующих вычислений будем использовать формулы скалярного произведения и однодетерминантную формулу векторного произведения в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (из списка на стр. 28). Тогда:

$$[\bar{b}, \bar{c}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} = \beta_1 \gamma_2 \bar{k} \Rightarrow [\bar{b}, \bar{c}] = \{0, 0, \beta_1 \gamma_2\}.$$

Тогда: $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \beta_1 \gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 \beta_1 \gamma_2 \bar{i} - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \bar{j} \Rightarrow [\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] = \{\alpha_2 \beta_1 \gamma_2; -\alpha_1 \beta_1 \gamma_2; 0\} \quad (*)$.

С другой стороны:

$(\bar{a}, \bar{c}) = \alpha_1 \gamma_1 + \alpha_2 \gamma_2 \Rightarrow \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) =$ из координатной записи операции (II) $= \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 + \alpha_2 \beta_1 \gamma_2; 0; 0\}$

$(\bar{a}, \bar{b}) = \alpha_1 \beta_1 \Rightarrow \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) =$ из координатной записи операции (II) $= \{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1; \alpha_1 \beta_1 \gamma_2; 0\}$

Вычитаем из предпоследнего равенства последнее:

$\bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) = \{\alpha_2 \beta_1 \gamma_2; -\alpha_1 \beta_1 \gamma_2; 0\} \quad (**)$.

Сравнивая $(*)$ и $(**)$, получаем доказательство свойства. □

$(VI.2)$ Тождество Якоби: $[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]] + [\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]] + [\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]] = \bar{0}$.

Доказательство. Согласно предыдущему свойству:

$$\left.\begin{aligned} \big[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]\big] &= \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b}) \\ \big[\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]\big] &= \bar{c}(\bar{b}, \bar{a}) - \bar{a}(\bar{b}, \bar{c}) \quad + \\ \big[\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]\big] &= \bar{a}(\bar{c}, \bar{b}) - \bar{b}(\bar{c}, \bar{a}) \end{aligned}\right\} \quad \text{складываем все три слагаемых}$$

$$\big[\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]\big] + \big[\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]\big] + \big[\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]\big] = \bar{0}$$

□