

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, теория упругости.
2. Фейнмановские лекции по физике, т.7.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды.
5. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред.
6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. I и II ч.

### Лекция 1

#### 1.1. Определение сплошной среды. Особенность МСС. Основные определения

Введем понятие сплошной среды. Все тела состоят из отдельных дискретных частиц ( атомов, молекул и т.д.). Однако в любом интересующем нас объеме их число настолько велико, что любое тело можно рассматривать как среду, заполняющую пространство непрерывным образом. При этом среда называется **сплошной**, если распределение вещества в ней непрерывно в любом, сколь угодно малом объеме  $V$ . Следует понимать, что это понятие- непрерывное распределение вещества - является идеализацией. Фактически среду можно считать сплошной, если характерные масштабы  $L$  рассматриваемых процессов велики по сравнению с характерным расстоянием между молекулами  $l$ .

На первый взгляд кажется, что введение гипотезы «сплошности»— это усложнение, поскольку мы переходим от рассмотрения системы, состоящей из конечного, пусть большого, числа  $N$  частиц, к рассмотрению непрерывного континуума. И это действительно было бы усложнением, если бы мы рассматривали динамику этого континуума вместо динамики  $N$  дискретных частиц. Но механика сплошной среды (МСС) использует совершенно другие методы. Гипотеза о сплошной среде позволяет описывать движение среды с помощью непрерывных функций пространственных координат и времени, которые удовлетворяют системе уравнений в частных производных. Такое описание возможно потому, что гипотеза о сплошной среде позволяет определить дифференциалы по координатам и времени. Это так называемый феноменологический подход, очень распространенный в современной науке.

Механика сплошных сред (МСС) возникла более 200 лет назад как обобщение механики Ньютона для описания сред, непрерывно заполняющих пространство. Казалось бы в МСС не должно остаться нерешенных задач. Но, как мы увидим в дальнейшем, уравнения МСС - это нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Их решения можно найти только в очень ограниченном числе случаев. Причем, сильная нелинейность проявляется уже при обычных условиях. В связи с этим много практически важных задач МСС остаются нерешенными.

Итак, будем полагать, что сплошная среда — это непрерывная совокупность материальных точек. Что будет являться материальной точкой сплошной среды? Очевидно, это не молекула. Как мы говорили выше, гипотеза сплошной среды может быть введена только при рассмотрении таких движений, масштаб которых  $L \gg l$  - расстояния между частицами. Выберем малый объем сплошной среды, линейный размер которого  $\lambda$  удовлетворяет условию  $l \ll \lambda \ll L$ . Будем рассматривать характеристики

среды, усредненные по этому малому объему. Используя гипотезу сплошной среды мы можем формально стягивать этот объем в точку. Но в нем остается все равно большое число молекул сплошной среды. Материальными точками сплошной среды в таком случае называются бесконечно малые объемы с линейным размером порядка  $\lambda$ . Иногда эти объемы называют жидкими частицами. Поэтому исследование движения сплошной среды будет означать исследование движения ее материальных точек.

## 1.2. Кинематика сплошной среды.

**Описания движения жидкости с помощью Эйлеровых и Лагранжевых переменных.**

Для описания движения сплошной среды необходимо ввести правило индивидуализации отдельных одинаковых с геометрической точки зрения точек континуума.

### 1.2.1. Лагранжево описание

Будем следить за движением отдельных жидких частиц определяя при этом, как в них меняются величины, характеризующие состояние сплошной среды, например, температура, скорость, плотность и т.д. Для того, чтобы это сделать формально, каждой частице будем ставить в соответствие 3 числа  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  - обычно это координаты жидких частиц в начальный момент времени. Они называются лагранжевыми координатами. Если динамические величины задаются в виде функций лагранжевых координат, то описание называется лагранжевым. При лагранжевом описании основная кинематическая характеристика - это закон движения всех частиц среды, т.е. радиус-векторы всех материальных точек (жидких частиц) в любой момент времени  $t$ , т.е.  $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ . Таким образом, при описании состояния сплошной среды мы будем отслеживать значения физических величин: поля температуры  $T$ , поля скорости  $\vec{v}$  и т.д. как функций от переменных  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, t$ . При этом скорость данной частицы определяется выражением:

$$\vec{v}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} \equiv \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|, \quad (1.1)$$

а ускорение:

$$\vec{a} = \left. \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right|_{\vec{\xi}} = \left. \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} \right|_{\vec{\xi}} \equiv \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

Производные по времени в лагранжевых координатах называются материальными или полными производными. В дальнейшем для их обозначения мы будем использовать знак полной производной.

### 1.2.2. Эйлерово описание.

Предположим, что нас интересует не история движения индивидуальных точек сплошной среды, а то, что происходит в разные моменты времени в данной геометрической точке пространства, связанного с системой отсчета наблюдателя. Пусть наше внимание концентрируется на данной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. При таком подходе (эйлерово описание) характеристики движения сплошной среды и происходящие в ней процессы рассматриваются как функции координат  $(x_1, x_2, x_3)$  и времени  $t$ . Действительно, скорость  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  - это скорость, которую имеет частица, которая находится в точке с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$  в момент  $t$ . Таким образом, при эйлеровом описании мы наблюдаем физические величины в заданных точках пространства. Движение с точки зрения Эйлера считается известным, если скорость, ускорение, температура и другие характеристики заданы как функ-

ции координат и времени Основной кинематической характеристикой сплошной среды в этом случае является поле скорости  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ .

### 1.2.3. Переход от эйлерова к лагранжеву описанию и наоборот.

Понятно, что с математической точки зрения описание Эйлера отличается от описания Лагранжа только тем, что в первом случае переменными являются координаты точек пространства и время, а во втором – параметры отдельных жидких частиц и время. Обычно используют то описание, которое удобнее в данной задаче. При этом всегда можно перейти от одного описания к другому.

#### Переход от лагранжева описания к эйлерову.

Пусть мы знаем для любой частицы ее радиус-вектор в момент  $t$ , т.е. известен  $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ . Пусть также известны гидродинамические поля физических величин  $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ . Требуется найти все физические величины как функции  $x_1, x_2, x_3$ . Для этого из системы трансцендентных уравнений, определяющих компоненты радиуса вектора  $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \\ x_2 &= x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \\ x_3 &= x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) \end{aligned} \quad (1.2)$$

можно выразить  $\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t)$ ,  $\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t)$ . Тогда все гидродинамические величины – поля скорости, температуры, плотности и т.д. можно выразить как функции переменных Эйлера. Следовательно, переход от движения, заданного по Лагранжу, к описанию движения по Эйлеру сводится только к разрешению алгебраических уравнений для неявных функций (1.2).

#### Переход от эйлерова описания к лагранжеву.

Пусть известно поле скорости  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  и все другие физические величины как функции  $x_1, x_2, x_3$  и времени  $t$ . Перейдем к лагранжеву описанию, т.е. найдем радиус-вектор всех лагранжевых частиц. При этом поле скорости  $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$  характеризует скорость частицы, которая в момент времени  $t$  находится в точке с координатами  $x_1, x_2, x_3$ , т.е.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(\vec{r}, t) \quad (1.3)$$

с начальными условиями

$$\vec{r}|_{t=0} = \vec{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

Решая эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить радиус-векторы лагранжевых частиц

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{\xi})$$

т.е. основную кинематическую характеристику сплошной среды при лагранжевом описании. При этом все характеристики гидродинамических полей  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  будут являться функциями лагранжевых переменных, т.е.  $\vec{A}(\vec{r}(t, \vec{\xi}), t)$ . Отсюда ясно, почему производная по времени в лагранжевых переменных называется полной.

Действительно, с формальной точки зрения переход от эйлерова описания к лагранжеву — это замена переменных. Выразим лагранжеву производную по времени в эйлеровых переменных. Пусть поле  $A$  выражено в эйлеровых переменных  $A(x_1, x_2, x_3, t)$ .

$$\left. \frac{dA}{dt} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial}{\partial t} A(x_1, x_2, x_3, t) \right|_{\xi}$$

Но можно представить  $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ , где  $i=1,2,3$ , тогда

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} A \right|_{\xi} = \left. \frac{\partial}{\partial t} A \right|_x + \frac{\partial A}{\partial x_i} \left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\xi}$$

Но 
$$\left. \frac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\xi} = v_i(\vec{x}_1, x_2, x_3, t)$$

— по определению скорость частицы, т.е.

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\xi} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) A \quad (1.4)$$

Выражение для ускорения частицы

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left. \frac{\partial}{\partial t} \vec{v} \right|_{\xi}$$

Если  $A = v_i$  — компоненты скорости, то из (1.4) сразу имеем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}$$

#### 1.2.4. Траектории и линии тока.

При эйлеровом описании для наглядности вводят линии тока. Линия тока — кривая, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору скорости. Уравнения для линий тока получаются из их определения

$$\begin{aligned} & \frac{dx_i}{v_i(x_1, x_2, x_3, t)} = dS \\ \text{или} & \frac{dx_i}{dS} = v_i(\vec{x}, t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

При лагранжевом описании для наглядности вводят траектории жидких частиц — геометрическое место их положений. Формула  $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$  представляет собой параметрическое задание траекторий. Уравнение траектории можно найти, если известно поле скорости при эйлеровом описании. Для этого надо решить систему:

$$\begin{cases} \left. \frac{dx_i}{dt} \right|_{\xi} = v_i(\vec{x}, t) \\ x_i|_{t=0} = \xi_i \end{cases} \quad (1.6)$$

Если  $\vec{v}$  не зависит от  $t$  (стационарное поле скорости), то линии тока и траектории удовлетворяют одним и тем же уравнениям, т.е. линии тока и траектории частиц совпадают.

### 1.3 Основные законы движения сплошной среды в интегральной форме.

Мы постулируем основные законы движения сплошной среды в интегральной форме для индивидуального объема. Назовем индивидуальным объем сплошной среды, состоящий из одних и тех же частиц. В процессе движения этот объем искажается, но масса его должна сохраняться.

### 1.3.1. Закон сохранения массы

$$m = \text{const}; \quad \text{или} \quad (d/dt)m = 0$$

Для того, чтобы записать закон сохранения массы в интегральной форме, введем понятие плотности.

#### Плотность

Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды  $V$ , состоящий из малых индивидуальных объемов  $\Delta V$ . Пусть их масса равна  $\Delta m$ . Используя гипотезу сплошной среды, можно перейти к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$ , т.е. стянуть этот объем в точку. Плотностью называется предел отношения:

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V},$$

Тогда масса конечного индивидуального объема  $m = \int_V \rho dv$ . А закон сохранения массы для конечного индивидуального объема имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0 \quad (1.7)$$

### 1.3.2. Закон сохранения импульса.

Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды  $V$ , состоящий из малых индивидуальных объемов  $\Delta V$  с массой  $\Delta m$ . Пусть этот объем  $\Delta V$  движется со скоростью  $\vec{v}$ . Тогда его импульс можно определить как  $\Delta \vec{Q} = \Delta m \vec{v}$ , а плотность импульса — как предел отношения:

$$\vec{q} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \vec{v} = \rho \vec{v}$$

Импульс конечного индивидуального объема будет определяться как интеграл  $\vec{Q} = \int_V \rho \vec{v} dv$ .

Введя импульс конечного индивидуального объема  $Q$ , постулируем 2-й закон Ньютона для индивидуального объема.

Скорость изменения импульса индивидуального объема равна сумме всех действующих на него внешних сил:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{F} dV + \iint_{\Sigma} \vec{\sigma}_n dS \quad (1.8)$$

Здесь 1-е слагаемое в правой части (1.8) — объемная сила, действующая на конечный индивидуальный объем,  $\vec{F}$  — плотность объемных сил. Она вводится следующим образом. Пусть имеется малый объем  $\Delta V$ . На него действует сила  $\Delta \vec{f}$ . Если существует предел

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta V}, \quad (1.9)$$

то он называется плотностью объемных сил.

А сила, действующая на конечный индивидуальный объем сплошной среды

$$\vec{f} = \int_V \vec{F} dV$$

Пример объемной силы — сила тяжести:

На объем  $\Delta V$  массой  $\Delta m$  действует сила тяжести  $\Delta \vec{f} = \Delta m \vec{g}$ .

Ее плотность, согласно (1.9) определяется соотношением:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \vec{g} = \rho \vec{g}$$

Сила тяжести, действующая на конечный индивидуальный объем, равна

$$\vec{f} = \int_V \rho \vec{g} dV = m \vec{g}.$$

2-е слагаемое в (1.8) — поверхностные силы, а  $\vec{\sigma}_n$  — вектор поверхностных напряжений. Он вводится следующим образом. Рассмотрим элемент поверхности  $\Sigma$ , окружающей индивидуальный объем  $dV$ , имеющий площадь  $\Delta S$ , вектор нормали к которому  $\vec{n}$ . На этот элемент поверхности действуют сила  $\Delta \vec{\sigma}$ . Если существует предел

$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta S}$ , то он называется вектором поверхностных напряжений. Тогда поверх-

ностная сила, действующая на всю поверхность, равна  $\oint \vec{\sigma}_n ds$ . Пример поверхностной силы — сила давления.

### 1.3.3. Уравнение для момента импульса

Это уравнение в механике сплошных сред не выводится, а постулируется по аналогии с уравнением для момента импульса системы материальных точек. Для материальной точки уравнение для момента импульса следует из II закона Ньютона:  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$ . Мо-

мент импульса материальной точки равен  $\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$ , так что его изменение, определяемое соотношением:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right] + \left[ \vec{r} \times \frac{m d\vec{v}}{dt} \right] = \vec{v} \times m\vec{v} + \left[ \vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} \right] = [\vec{r} \times \vec{f}] \quad (1.10)$$

равно моменту сил, действующих на материальную точку.

Для системы  $N$  материальных точек изменение момента импульса равно сумме моментов импульсов внешних сил  $\vec{F}_i^{(e)}$ , действующих на материальные точки; при этом моменты внутренних сил, действующих между точками внутри системы  $\vec{F}_i^{(i)}$ , взаимно компенсируются. Таким образом для системы материальных точек

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] \\ \frac{d}{dt} [\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i] &= [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}] + [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}] \\ \frac{d\vec{M}}{dt} &= \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}] \end{aligned} \quad (1.11)$$

По аналогии вводится уравнение моментов импульса для объема сплошной среды. Пусть индивидуальный объем  $V$  состоит из малых индивидуальных объемов  $\Delta V$ , и движется со скоростью  $\vec{v}$ . Момент количества движения конечного индивидуального объема равен сумме моментов количества движения малых объемов. Переходя к пределу, имеем

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i [\vec{r}_i \times \rho_i \Delta V_i \vec{v}_i] = \int_V [\vec{r} \times \rho \vec{v}] dV$$

Уравнение для момента количества движения постулируется по аналогии с уравнением для системы материальных точек, т.е.:

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{r} \times \rho \vec{v}] dV = \int_V [\vec{r} \times \vec{F}] dV + \oiint_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{\sigma}_n] dS$$

Изменение момента импульса индивидуального объема сплошной среды равно сумме моментов внешних объемных и поверхностных сил, действующих на этот индивидуальный объем.

Заметим, что в механике сплошной среды в отличие от механики материальной точки это уравнение постулируется, а не выводится. Здесь мы его записали в простейшей постановке, не учитывающей, например, возможные внутренние вращения и др. степени свободы у среды. Эти более сложные случаи мы рассматривать не будем.

#### 1.4. Основные уравнения механики сплошной среды в дифференциальной форме в эйлеровых координатах.

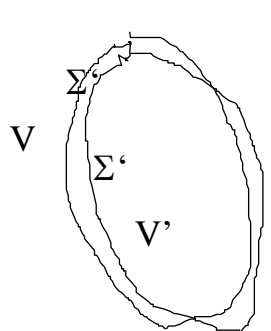
Для того, чтобы записать уравнения механики сплошной среды в дифференциальной форме, нам потребуется доказать несколько математических соотношений.

##### 1.4.1. Вспомогательная формула

Найдем  $(d/dt) \int_V A dV$ , где  $V$  — произвольный индивидуальный объем. По определению производной имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V A(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V A(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \int_V A(\vec{r}, t) dV}{\Delta t} = \quad (1.12)$$

Прибавим и вычтем под знаком первого интеграла в (1.12)  $A(\vec{r}, t)$ , тогда получим:



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_V [A(\vec{r}, t + \Delta t) - A(\vec{r}, t)] dV + \int_V A(\vec{r}, t) dV - \int_V A(\vec{r}, t) dV}{\Delta t} =$$

Внося в первом слагаемом  $\lim$  под знак интеграла и вычисляя предел, получим вместо (1.12):

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r}, t) dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V-V'} A(\vec{r}, t) dV}{\Delta t}$$

По определению определенного интеграла как предела частичных сумм имеем

$$\int_{V-V'} A(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_i A(\vec{r}_i, t) \Delta V_i =$$

Очевидно, что  $\Delta V_i = \Delta S_i v_n(\vec{r}_i, t) \Delta t$ , где  $\Delta S_i$  - это  $i$ -й элемент поверхности, а  $v_n(\vec{r}_i, t)$  - нормальная проекция вектора скорости. Тогда имеем:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_i A(\vec{r}_i, t) \Delta V_i = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \sum_i A(\vec{r}_i, t + \Delta t) v_{ni} \Delta S_i \Delta t \quad (1.13)$$

А этот последний предел в (1.13) равен (по определению):

$$= \oiint_{\Sigma} A v_n dS \Delta t$$

Окончательно имеем из (1.12)

$$\frac{d}{dt} \int_V A(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r}, t) dV + \oint_{\Sigma} A v_n dS \quad (1.14)$$

Формула(1.14) в таком виде понадобится нам в дальнейшем, когда мы будем рассматривать разрывы сплошной среды, т.е. области, в которых параметры среды изменяются на масштабах порядка расстояния между молекулами. Если же  $A(\vec{r}, t)$  - непрерывная функция координат, то можно применить формулу Остроградского-Гаусса в (1.14), тогда имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V A(\vec{r}, t) dV = \int_V \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \text{div} A \vec{v} \right) dV \quad (1.15)$$

Этой формулой мы воспользуемся при выводе дифференциальной формы основных уравнений МСС.

#### 1.4.2. Закон сохранения массы

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

Эта формула справедлива для любого индивидуального объема. Воспользуемся вспомогательной формулой в виде (1.15), тогда интегральный закон сохранения массы примет вид:

$$\int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0$$

Поскольку выбран произвольный индивидуальный объем, то имеем закон сохранения массы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (1.16)$$

#### 1.4.3. Вторая вспомогательная формула

Докажем еще одну вспомогательную формулу.

Вычислим производную  $\frac{d}{dt} \int_V \rho A(\vec{r}, t) dV$ , где  $A(\vec{r}, t)$  - произвольное скалярное поле, а

$\rho$  - плотность среды.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho A dV = \int_V \left[ \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \text{div}(\rho A \vec{v}) \right] dV = \int_V \left[ \rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + A \text{div}(\rho \vec{v}) + \rho(\vec{v} \nabla) A \right] dV =$$

Второе и третье слагаемые в сумме дают нуль с учетом закона сохранения массы. Принимая во внимание выражение для материальной производной, имеем

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho A(\vec{r}, t) dV = \int_V \rho \frac{dA}{dt} dV. \quad (1.17)$$

#### 1.4.4. Закон сохранения импульса

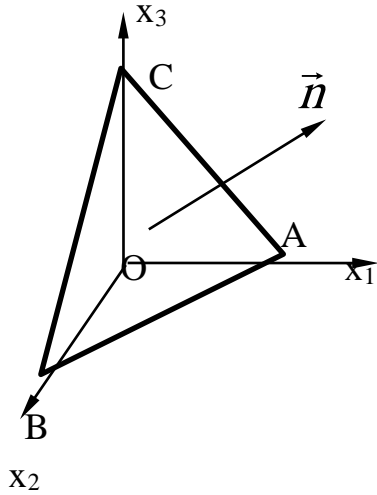
Исходная формула - закон сохранения импульса в интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \vec{F} dV + \oint_S \vec{\sigma}_n dS$$

Основное свойство поверхностных напряжений. Тензор напряжений.



Прежде, чем выводить закон сохранения импульса в дифференциальной форме рассмотрим основное свойство поверхностных напряжений. Поверхностное напряжение  $\vec{\sigma}_n$  зависит от ориентации площадки, к которой приложена поверхностная сила, определяемой вектором нормали к ней  $\vec{n}$ . Покажем, что в самом общем случае  $\vec{\sigma}_n$  - это линейная функция от компонент вектора  $\vec{n}$ . Применим закон сохранения импульса к индивидуальному объему  $\Delta V$  в виде малого тетраэдра, стороны которого совпадают с осями прямоугольной системы координат.



Сначала запишем выражение для поверхностной силы  $\iint_S \vec{\sigma}_n dS$ , считая тетраэдр малым, так что интегрирование по поверхности можно заменить произведением:

$$\iint_S \vec{\sigma}_n dS = \vec{\sigma}_{BOC}^{(-1)} S_{BOC} + \vec{\sigma}_{AOC}^{(-2)} S_{AOC} + \vec{\sigma}_{AOB}^{(-3)} S_{AOB} + \vec{\sigma}_n S_{ABC} \quad (1.18)$$

Индексы  $(-1, -2, -3)$  в (1.18) означают, что внешняя нормаль, например, к площадке BOC направлена по  $-\vec{x}_{01}$  и т.д. По III закону Ньютона сила, действующая на поверхность, нормаль к которой направлена по  $\vec{x}_{01}$ , равна  $-\vec{\sigma}_{BOC} S_{BOC} = -\vec{\sigma}_1 S_1$  и т.д. Из геометрических соображений ясно, что площади граней соответственно равны  $S_i = n_i S_{ABC}$ , где  $n_i$  —  $i$ -я проекция нормали к площадке ABC. Итак, имеем:

$$\iint_S \vec{\sigma}_n dS = S_{ABC} [\vec{\sigma}_n - (\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3)] \quad (1.19)$$

Объемная сила

$$\int_V \vec{F} dV = \vec{F} \Delta V = \frac{1}{3} S_{ABC} h \vec{F}$$

Применим вторую вспомогательную формулу к закону сохранения импульса в интегральной форме. Пусть скалярное поле  $A = v_i$ , т.е.  $i$ -й проекции скорости. Тогда согласно (1.17) получим, что скорость изменения  $i$ -й проекции импульса индивидуального объема равна:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{v} dV = \int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV$$

Но, учитывая малость индивидуального объема, имеем:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \Delta V = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} h$$

Итак, из закона сохранения импульса следует:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} \frac{1}{3} h S_{ABC} = \vec{F} \frac{1}{3} S_{ABC} h + S_{ABC} [\vec{\sigma}_n - (\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3)]_i \quad (1.20)$$

Сокращаем обе части в (1.20) на  $S_{ABC}$ , устремляем  $h \rightarrow 0$ . Тогда из (1.20) имеем:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3 = \vec{\sigma}_i n_i \quad (1.21)$$

Таким образом, напряжение, приложенное к произвольной площадке с нормалью  $\vec{n}$ , можно представить в виде линейной комбинации напряжений, приложенных к площадкам с нормальными, ориентированными по ортам выбранной системы координат, а

коэффициентами в этом разложении являются направляющие косинусы вектора нормали в этой системе координат. Разложим вектор  $\vec{\sigma}_i$  по ортам выбранной системы координат, т.е.  $\vec{\sigma}_i = \sigma_{ji} \vec{x}_{0j}$ , тогда  $\vec{\sigma}_n = \sigma_{ji} n_i \vec{x}_{0j}$ .

Ясно, что компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ji}$  — это поверхностная плотность силы, действующей в направлении  $\vec{x}_{0j}$  на площадку, ориентированную так, что нормаль к ней направлена по вектору  $\vec{x}_{0i}$ , т.е. 1-й индекс  $j$  задает направление силы; 2-й индекс  $i$  направление нормали к площадке. По существу, тензор напряжений  $\sigma_{ji}$  задает линейное преобразование от вектора нормали к вектору напряжений. Действительно,  $j$ -я проекция вектора  $\vec{\sigma}_n$   $[\vec{\sigma}_n]_j = \sigma_{ji} n_i$ .

Теперь можно записать закон сохранения импульса в дифференциальной форме. Итак, для произвольного индивидуального объема имеем:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \vec{F} dV + \oint_{\Sigma} \vec{\sigma}_n dS, \quad (1.21)$$

где поверхностный интеграл в правой части можно представить

$$\oint_{\Sigma} \vec{\sigma}_n dS = \oint_{\Sigma} \sigma_{ji} n_i \vec{x}_{0j} dS.$$

Рассмотрим проекцию этого уравнения (1.21) на направление  $k$ :

$$\int_V \rho \frac{dv_k}{dt} dV = \int_V F_k dV + \oint_{\Sigma} \sigma_{ki} n_i dS$$

Введем вспомогательный вектор  $\vec{\Sigma}_k = \sigma_{ki} \vec{x}_{0i}$ , тогда,  $\sigma_{ki} n_i = (\vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n})$ , а поверхностный интеграл по теореме Остроградского-Гаусса можно заменить интегралом по объему  $\oint_{\Sigma} \sigma_{ki} n_i dS = \oint_{\Sigma} \vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n} dS = \int_V (\text{div} \vec{\Sigma}_k) dV$ . Учитывая определение дивергенции вектора

$$\text{div} \vec{\Sigma}_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i},$$

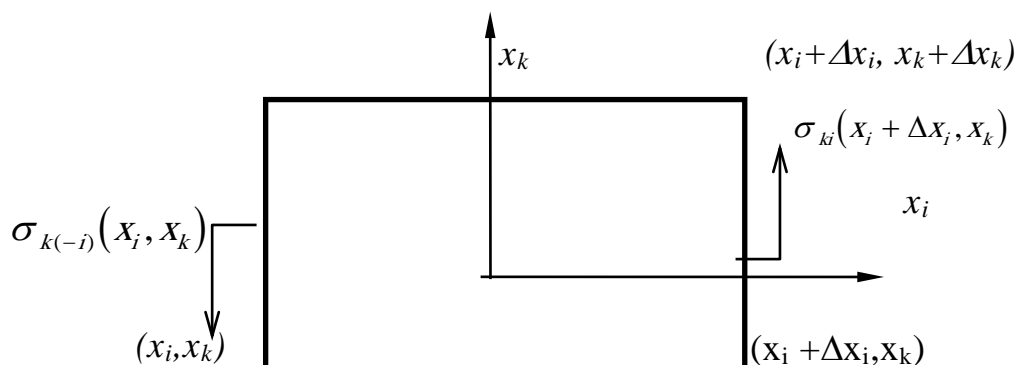
а также произвольность индивидуального объема  $V$ , имеем из (1.21) закон сохранения импульса в дифференциальной форме в эйлеровых координатах:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = F_k + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$$

С учетом выражения лагранжевой производной в эйлеровых координатах, имеем

$$\rho \left( \frac{\partial v_k}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_k \right) = F_k + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \quad (1.22)$$

Для того, чтобы понять физический смысл слагаемого, определяющего силу поверхностных напряжений, рассмотрим поверхностную силу, действующую в  $k$ -м направлении на малый объем в виде прямоугольника:



$$\Delta F_k = (\sigma_{ki}(x_i + \Delta x_i) - \sigma_{ki}(x_i)) \Delta x_k \Delta x_j = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \Delta V \quad (1.23)$$

Если просуммировать по всем  $i$  надо и учесть объемную силу, то второй закон Ньютона для малого индивидуального объема  $\Delta V$  можно записать в виде

$$\Delta m \frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \Delta V + F_k \Delta V \quad (1.24)$$

Делим обе части (1.24) на  $\Delta V$ , переходя к пределу при  $\Delta V \rightarrow 0$ , получаем снова закон сохранения импульса в форме (1.23)

#### 1.4.5. Закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме

Запишем сначала этот закон в интегральной форме для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int_V [\vec{r} \times \rho \vec{v}] dV = \int_V [\vec{r} \times \vec{F}] dV + \oint_{\Sigma} [\vec{r} \times \vec{\sigma}_n] dS \quad (1.25)$$

$k$ -ая компонента векторного произведения:  $[\vec{r} \times \rho \vec{v}]_k = \varepsilon_{ijk} \rho r_i v_j$

$$\text{где } \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{если } i, j, k \text{ образуют четную перестановку чисел } 1, 2, 3 \\ -1 & \text{если } i, j, k \text{ образуют нечетную перестановку чисел } 1, 2, 3 \\ 0 & \text{если есть совпадающие индексы} \end{cases},$$

Рассмотрим  $k$ -ую проекцию закона сохранения момента импульса, т.е.

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int_V \varepsilon_{ijk} x_i F_j dV + \oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} x_i [\vec{\sigma}_n]_j dS \quad (1.26)$$

По основному свойству поверхностных напряжений

$$[\vec{\sigma}_n]_j = \sigma_{jm} n_m = (\sigma_{jm} \vec{x}_{0m} \vec{n})$$

Тогда из (1.26) имеем:

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} x_i \sigma_{nj} dS &= \oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} (x_i \sigma_{jm} (\vec{x}_{0m} \vec{n})) dS = \int_V \varepsilon_{ijk} \operatorname{div} (x_i \sigma_{jm} \vec{x}_{0m}) dV = \\ &= \int_V \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_m} (x_i \sigma_{jm}) dV = \int_V \varepsilon_{ijk} \left[ \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_m} + \sigma_{jm} \delta_{im} \right] dV \end{aligned}$$

С использованием второй вспомогательной формулы имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ijk} x_i v_j) dV = \int_V \rho \left( \varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt} + \varepsilon_{ijk} v_j \frac{dx_i}{dt} \right) dV = \int_V \rho \left( \varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt} \right) dV \quad (1.27)$$

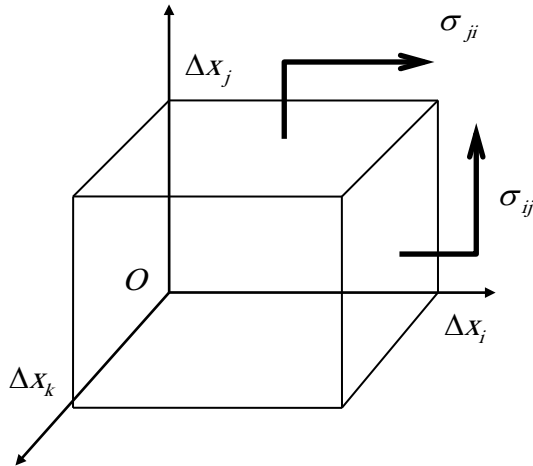
Итак, (1.26) дает:

$$\int_V \varepsilon_{ijk} \left[ x_i \left( \rho \frac{dv_j}{dt} - F_j - \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_m} \right) + \sigma_{ji} \right] dV = 0 \quad (1.28)$$

Первое слагаемое в круглых скобках равно 0 в силу закона сохранения импульса. Тогда из (1.28) следует, что  $\int_V \varepsilon_{ijk} \sigma_{ji} dV = 0$ . Поскольку объем  $V$  произвольный, то  $\varepsilon_{ijk} \sigma_{ji} = 0$ . Следовательно  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ . Это и есть закон сохранения момента импульса в диф-

ференциальной форме для классических сред. Его обычно не используют отдельно, считая, что тензор напряжений симметричен.

Получим это выражение из простых физических соображений. Рассмотрим малый индивидуальный объем в форме параллелепипеда и рассмотрим закон сохранения момента импульса для него относительно одной из вершин (точки O). Запишем уравнение



для момента импульса в интегральной форме.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Delta V} [\vec{r} \times \rho \vec{v}] dV = \int_{\Delta V} [\vec{r} \times \vec{F}] dV + \oint_{\Delta \Sigma} [\vec{r} \times \vec{\sigma}_n] dS$$

Будем считать, что параллелепипед настолько мал, что интегрирование можно заменить умножением. Рассмотрим k-ю проекцию уравнения для импульса и оценим слагаемые:

$$\left[ \int_{\Delta V} \left[ \vec{r} \times \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \right] dV \right]_k = o \left( \rho \frac{dv_k}{dt} \right) (\Delta V)^{4/3}$$

$$\left[ \int_{\Delta V} [\vec{r} \times \vec{F}] dV \right]_k = o(F_k) (\Delta V)^{4/3}$$

Из рисунка видно,

$$\oint_{\Delta \Sigma} [\vec{r} \times \vec{\sigma}_n]_k dS = -\sigma_{ij} \Delta x_j \Delta x_i \Delta x_k + \sigma_{ji} \Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k = (-\sigma_{ij} + \sigma_{ji}) \Delta V$$

Подставляем эти выражения в уравнение для момента импульса, делим на  $\Delta V$  и стягиваем параллелепипед в точку, получаем  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  для любых  $i \neq j$ . Итак, симметричность тензора поверхностных напряжений нулю при отсутствии внутренних вращательных степеней свободы означает, что момент сил, создаваемых поверхностными напряжениями в бесконечно-малом объеме равен.

## 1.5. Уравнения гидродинамики в лагранжевых координатах

### Закон сохранения массы

Рассмотрим элемент жидкости, который в начальный момент времени имеет форму параллелепипеда с центром в точке  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ . Его объем  $dV_0$ , а масса  $dm = \rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV_0$ .

В момент времени  $t$  точки сместятся. Их новые координаты будут связаны со старыми законами движения  $x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$  ( $i=1,2,3$ ), которые, по существу представляют собой преобразование координат. Но тогда в момент  $t$  объем элемента жидкости  $dV =$

$J dV_0$ , где  $J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$  — якобиан преобразования координат от эйлеровых к ла-

гранжевым. Масса в момент  $t$ :  $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) dV = dm$ . Отсюда:

$$\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV_0 = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) J dV_0$$

Окончательно имеем закон сохранения массы в лагранжевых координатах

$$\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{J},$$

### Закон сохранения импульса

Чтобы найти уравнения движения частиц, надо знать законы их движения. Запишем их в лагранжевой форме. В эйлеровых координатах  $x_1, x_2, x_3, t$  — независимые переменные. Поле скорости  $\vec{v}$  — неизвестная. В лагранжевых координатах  $x_1, x_2, x_3$  — неизвестные, а независимые переменные —  $\xi_1, \xi_2, \xi_3, t$ . Будем исходить из уравнения для импульса в эйлеровых координатах

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

В лагранжевых координатах  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\xi}$ ; а  $v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_{\xi}$ , т.е. уравнение движения примет

вид:

$$\rho \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} \Big|_{\xi} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

В лагранжевых уравнениях не должно быть производных по неизвестным функциям ( $x_j$  — неизвестна). Надо совершить преобразование координат к переменным Лагранжа. Надо воспользоваться правилом дифференциальных сложных функций. При этом очень удобно использовать операции с якобианами, например

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J}$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1, f, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J} \quad : \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial(x_1, x_2, f)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J}$$

Эти уравнения описывают механику индивидуального объема сплошной среды. Но он может обмениваться теплом, из-за этого могут возникать движения, т.е. требуется знание термодинамики сплошной среды.

## 2. Основные законы термодинамики. Понятие идеальной сплошной среды ( жидкости, газа).

Итак, в предыдущем разделе мы получили уравнения, описывающие механику индивидуального объема сплошной среды. Этот объем может обмениваться теплом с окружающей его жидкостью, газом, что в свою очередь также может вызывать движения сплошной среды. Это означает, что для полного описания движения сплошной среды требуется знание ее термодинамики.

Кратко изложим ее основные положения.

### 2.1. Первое начало термодинамики или закон сохранения энергии

Первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, постулирует невозможность вечного двигателя 1-го рода, т.е. тепловой машины, которая совершает полезную работу в цикле без затрат энергии. Следствием этого постулата является то, что можно определить энергию как функцию состояния термодинамической системы и ввести дифференциал полной энергии  $d\varepsilon = d(E + U)$ , где  $E$  — механическая энергия,  $U$  — внутренняя энергия.

Сформулируем теперь 1-й закон термодинамики.

Изменение полной энергии  $d\varepsilon$  термодинамической системы при малом изменении ее состояния равно сумме:

- 1) механической работы внешних сил над системой  $dA^{(e)}$
- 2) количества тепла, передаваемого системе извне  $dQ^{(e)}$
- 3) количества немеханической и нетепловой энергии, передаваемой системе  $dQ^{**}$

$$d\varepsilon = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}$$

$dA^{(e)}$ ,  $dQ^{(e)}$ ,  $dQ^{**}$  не являются полными дифференциалами,  $d\varepsilon$  — полный дифференциал.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем сплошной среды  $V$ . Выделим внутри этого объема малый объем  $\Delta V$ , полная энергия которого равна  $\Delta\varepsilon$ . Тогда плотность энергии можно определить как

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta E + \Delta U}{\Delta V} = \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right),$$

где  $\Delta E = \Delta m(v^2/2)$  — механическая энергия,  $\Delta U = \Delta mu$  — внутренняя энергия,  $u$  — массовая плотность внутренней энергии. Полная энергия всего объема будет при этом равна:

$$\varepsilon = \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV \quad (2.1)$$

Пусть за время  $dt$  энергия индивидуального объема изменяется на  $d \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV$ .

Рассмотрим возможные источники изменения энергии индивидуального объема.

**Во-первых, энергия может меняться за счет механической работы объемных и поверхностных сил.**

Работа объемных сил. Выделим внутри индивидуального объема малый объем  $\Delta V$ . Предположим, что на него действует массовая внешняя сила с плотностью  $\vec{F}$ . Пусть объем  $\Delta V$  за время  $dt$  переместился на расстояние  $d\vec{r} = \vec{v}dt$ , тогда работа этой силы  $d(\Delta A_1^{(e)}) = \vec{F} \vec{v} dt \Delta V$ , а работа, совершаемая над всем объемом

$$dA_1^{(e)} = \left( \int_V \vec{F} \vec{v} dV \right) dt \quad (2.2)$$

Работа поверхностных сил. На объем  $V$ , действует поверхностная сила, плотность которой  $\vec{\sigma}_n$ . Рассмотрим элемент поверхности  $\Delta S$ , на него действует сила  $\vec{\sigma}_n \Delta S$ . Работа, совершаемая этой силой при перемещении элемента поверхности на расстояние  $d\vec{r}$

за время  $dt$  равна  $d\Delta A_2^{(e)} = (\vec{\sigma}_n \vec{v}) dt \Delta S$ . Работа, совершаемая на всей поверхности этой поверхностной силой, равна:

$$dA_2^{(e)} = \left[ \oiint_{\Sigma} \vec{\sigma}_n \vec{v} dS \right] dt \quad (2.3)$$

**Замечание.** Внутри индивидуального объема мы можем выделить свои внутренние индивидуальные объемы, каждый из которых окружен своей поверхностью, на каждой из поверхностей действуют поверхностные силы, которые совершают работу. Вклада этих работ в изменение полной энергии нет. Это постулат. Однако они могут вносить (и, конечно, вносят) вклад в изменение механической и внутренней энергии по отдельности.

**Во-вторых, энергия индивидуального объема может меняться за счет процессов обмена.**

Количество тепла и нетепловой энергии, передаваемые индивидуальному объему

Пусть в единицу времени в объеме  $\Delta V$  выделяется количество тепла  $\Delta q$ . Можно ввести плотность количества тепла, выделяемого в единицу времени в единице объема:

$$q^{(e)} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$$

Тогда во всем объеме  $V$  за время  $dt$  выделяется

$$dQ_1^{(e)} = \int_V q^{(e)} dV dt \quad (2.4)$$

Также может происходить передача тепла через границу индивидуального объема. Пусть через участок поверхности площадью  $\Delta S$ , ориентированный  $\perp$  нормали  $\vec{n}$  передается в единицу времени количество тепла  $\Delta Q$ . Тогда плотность потока тепла определится соотношением:

$$Q_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta S}$$

А количество тепла, передаваемого системе за время  $dt$

$$dQ_2^{(e)} = \left[ \oiint_{\Sigma} Q_n dS \right] dt \quad (2.5)$$

Аналогично можно ввести количество нетепловой энергии, передаваемой системе:

$$dQ^{**} = dt \left[ \int_V q^{**} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{**} dS \right] \quad (2.6)$$

Итак, закон сохранения энергии для индивидуального объема принимает вид:

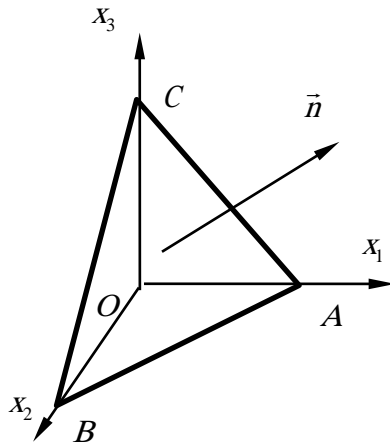
$$d \int_V \rho \left( \frac{v_2}{2} + u \right) dV = dt \left[ \int_V (\vec{F} \vec{v}) dV + \oiint_{\Sigma} (\vec{\varepsilon}_n \vec{v}) dS + \int_V q^{(e)} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS + \int_V q^{**} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{**} dS \right] \quad (2.7)$$

Если обе части этого уравнения разделить на  $dt$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{v_2}{2} + u \right) dV = \int_V (\vec{F} \vec{v}) dV + \oiint_{\Sigma} (\vec{\varepsilon}_n \vec{v}) dS + \int_V q^{(e)} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS + \int_V q^{**} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{**} dS \quad (2.8)$$

### 2.1.1. Закон сохранения энергии в дифференциальной форме

Начнем с того, что определим вектор потока тепла. Как и ранее при определении вектора поверхностных напряжений  $\sigma_{ij}$  рассмотрим индивидуальный объем в виде малого тетраэдра с гранями, ориентированными вдоль осей некоторой декартовой системы координат (Рис.5).



Пусть тепло поступает в этот объем только через боковые грани, тогда передаваемое количество тепла:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS &= Q_n^{(e)} S_{ABC} + q_1 S_{BOC} + q_2 S_{AOC} + q_3 S_{AOB} = \\ &= S_{ABC} (Q_n^{(e)} + q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3) \end{aligned}$$

Количество тепла, поступающего в этот объем, должно иметь порядок этого объема  $1/3 S_{ABC} h$ , т.е.  $S_{ABC} (Q_n^{(e)} + q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3) = 1/3 S_{ABC} h$ . Устремляя  $h \rightarrow 0$ , имеем  $Q_n^{(e)} = -(q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3)$ , т.е. поток тепла можно представить в виде скалярного произведения вектора нормали к площадке  $\vec{n}$  на вектор  $\vec{Q}^{(e)}$  с проекциями  $(-q_1; -q_2; -q_3)$ , т.е.

$$Q_n^{(e)} = (\vec{Q}^{(e)} \vec{n})$$

Рис.5

При этом проекция  $[\vec{Q}_i^{(e)}]$  имеет смысл плотности потока тепла через площадку, вектор нормали к которой — это вектор  $\vec{x}_{0i}$ .

Аналогичные рассуждения можно провести для потока энергии нетепловой природы  $Q^{**}_n$ . Преобразуем слагаемые, входящие в закон сохранения энергии (2.7), которые выражаются поверхностными интегралами:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS &= \iint_{\Sigma} (\vec{Q}_n^{(e)} \vec{n}) dS = \int_V \text{div} \vec{Q}_n^{(e)} dV \\ \iint_{\Sigma} (\vec{v} \vec{\sigma}_n) dS &= \iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j v_i dS = \iint_{\Sigma} (\sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j} \vec{n}) dS = \int_V \text{div} (\sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j}) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) dV \end{aligned}$$

Используя вторую вспомогательную формулу (1.17), преобразуем левую часть формулы (2.7):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV$$

Окончательно закон сохранения энергии (2.7) можно записать в виде:

$$\int_V dV \left( \rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) - (\vec{F} \vec{v}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) - q^{(e)} - \text{div} (\vec{Q}^{(e)}) - q^{**} - \text{div} \vec{Q}^{**} \right) = 0$$

Поскольку индивидуальный объем  $V$  произвольный, то подынтегральное выражение равно нулю, что и дает закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = (\vec{F} \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (v_i \sigma_{ij}) + q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \text{div} \vec{Q}^{**} \quad (2.8)$$

Это закон сохранения полной энергии, который мы постулировали из термодинамических предположений.

### 2.1.2. Законы сохранения механической энергии и внутренней энергии

Из уравнения для импульса



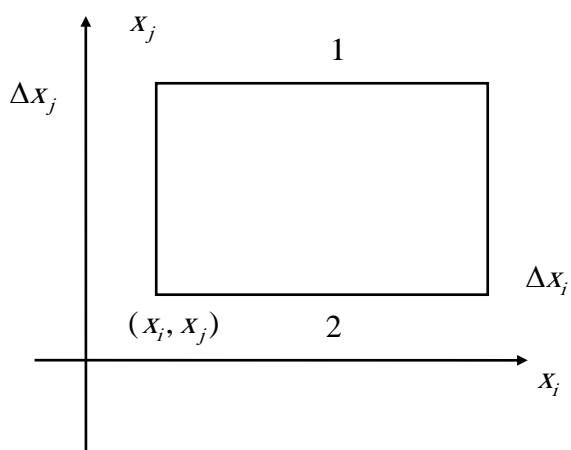
$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

можно получить закон сохранения механической энергии.

Домножим обе части (2.9) на  $v_i$  и сложим по  $i$ , получим:

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} \right) = (F_i v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.10)$$

Сравним (2.8.) и (2.10). Видно, что 1-е и 2-е слагаемые в правой части (2.8) входят в уравнение для закона сохранения полной энергии (2.7) и имеют смысл плотности мощности внешних массовых и поверхностных сил. Последнее слагаемое в (2.8) называется работой внутренних поверхностных напряжений.



Чтобы разобраться с физическим смыслом этого слагаемого, рассмотрим малый объем  $\Delta V$  в форме параллелепипеда. Мы уже вычисляли силу, действующую на этот объем за счет поверхностных напряжений. Она равна (см. лекцию 1 (1.23))

$$- \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \Delta V$$

При этом по всем направлениям  $j$  предполагается суммирование. Это верно для любого  $i$ . Если скорость этого объема  $\Delta V$  равна  $\vec{v}$ , то за время  $dt$  эта сила совершает работу

$$dA_v = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dt \Delta V \quad (2.11)$$

Рис.6

Рассмотрим теперь поверхность, ограничивающую объем  $\Delta V$ . На поверхности (2) (см. рис.6) действует сила  $\sigma_{ij}(x_j + \Delta x_j, \dots) \Delta S$ , скорость перемещения этой поверхности равна  $v_i(x_j + \Delta x_j, \dots)$ . За время  $dt$  эта сила совершит работу  $\sigma_{ij} v_i(x_j + \Delta x_j, \dots) \Delta S dt$ . На поверхности (1) аналогичная сила —  $\sigma_{ij}(x_j, \dots)$ . Совершенная работа —  $\sigma_{ij} v_i(x_j, \dots) \Delta S dt$ . Работа совершаемая над частицами, находящимися на поверхностях (1) и (2)

$$dA_s = (\sigma_{ij} v_i(x_j + \Delta x_j, \dots) - \sigma_{ij} v_i(x_j, \dots)) dt \Delta S \cong \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) \Delta V dt \quad (2.12)$$

Чтобы найти полную работу, совершаемую на поверхности, ограничивающей объем  $\Delta V$ , надо просуммировать по всем  $i$  и  $j$ . Из сравнения выражений (2.11) и (2.12) для  $dA_s$  и  $dA_v$  ясно, что

$$dA_v = dA_s - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta V dt \quad (2.12)$$

Строго говоря, поверхностные силы действуют на поверхности, и непосредственно над ними совершают работу. В этом смысле  $dA_v$  — величина формальная и ее разумно представить как сумму работ, совершаемых на поверхностях внутри объема  $\Delta V$ . В связи с этим

величину —  $\sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$  называют работой внутренних поверхностных напряжений (или

напряжений на внутренних поверхностях).

Если из уравнения (2.7) для полной энергии вычесть уравнение (2.8) для механической энергии, то получится уравнение для внутренней энергии

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \operatorname{div}(\vec{Q}^e + \vec{Q}^{**}) + q^e + q^{**} \quad (2.13)$$

Работа внутренних поверхностных напряжений обеспечивает изменение внутренней энергии сплошной среды. Это уравнение называют общим уравнением теплопередачи. Оно эквивалентно закону сохранения энергии (2.2), т.к. закон сохранения механической энергии есть следствие уже известного уравнения — закона сохранения импульса.

## 2.2. 2-е начало термодинамики.

2-е начало термодинамики утверждает, что невозможно существование вечного двигателя 2-го рода, т.е. тепловой машины, в которой полезная работа совершается за счет передачи тепла от тела с более низкой температурой к телу с более высокой температурой. Следствием этого является введение функции состояния — энтропии.

Обратимся к математической формулировке 2-го начала термодинамики:

Пусть система переходит из состояния 1 в близкое состояние 2. Тогда можно ввести изменение энтропии по формуле:

$$dS = \frac{dQ^{(e)} + dQ'}{T}, \quad (2.14)$$

где  $dQ^{(e)}$  — количество тепла, переданное системе извне, а  $dQ'$  — некомпенсированное тепло; причем  $dQ' \geq 0$ . Для обратимых процессов полагают, что  $dQ' = 0$ .

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем  $V$  с энтропией  $S$ . Выделим внутри этого объема малый объем  $\Delta V$ . Энтропия этого объема  $\Delta S$ . Поскольку энтропия непрерывная функция координат, то можно ввести массовую плотность энтропии:

$$S = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\rho \Delta V}$$

Так что полная энтропия объема  $V$  равна  $\int_V S \rho dV$

Пусть сплошная среда внутри малого объема  $\Delta V$  переходит из состояния (1) в близкое состояние (2) за время  $dt$ . При этом изменение энтропии равно

$$dS = d(\rho S \Delta V) \quad (2.15)$$

Пусть при этом этот объем получает извне количество тепла:

$$d\Delta Q^{(e)} = q^{(e)} \Delta V dt + \left[ \oint_{\Delta \Sigma} Q_n^{(e)} dS \right] dt \quad (2.16)$$

1-е слагаемое описывает объемное тепло выделения, а 2-е — количество тепла, поступающего через поверхность  $\Delta \Sigma$ . Применяя теорему Остроградского-Гаусса ко второму слагаемому в (2.16) и учитывая малость объема  $V$ , по которому проводится интегрирование в (2.16), имеем:

$$d\Delta Q^{(e)} = (q^{(e)} + \operatorname{div} \vec{Q}^e) \Delta V dt \quad (2.17)$$

Некомпенсированное тепло, выделяемое в объеме  $\Delta V$ , запишем в виде:

$$d\Delta Q' = q' \Delta V dt \quad (2.18)$$

где  $q'$  — плотность некомпенсированного тепла, выделяемого в единицу времени. С учетом этого 2-й закон термодинамики (2.14) для малого объема  $\Delta V$  можно записать в виде:

$$d(\rho S \Delta V) = \frac{[q^{(e)} + \operatorname{div} \vec{Q}^{(e)}] \Delta V dt + q' \Delta V dt}{T} \quad (2.19)$$

Если мы теперь проинтегрируем это уравнение по индивидуальному объему  $V$ , то получим математическую формулировку 2-го начала термодинамики для конечного индивидуального объема. В силу аддитивности энтропии имеем:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int_V \frac{q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q}{T} dV \quad (2.20)$$

Из (2.20) можно сразу получить 2-е начало термодинамики в дифференциальной форме. Примем во внимание, что при изменении состояния объема  $\Delta V$  его масса  $\rho \Delta V$  сохраняется, т.е.

$$d(\rho S \Delta V) = \rho \Delta V dS$$

Подставим это выражение в (2.20), сократим на  $\Delta V$  и разделим на  $dt$ , тогда получим 2-е начало термодинамики в дифференциальной форме

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q'}{T} \quad (2.21)$$

### 2.3. Основные уравнения механики и термодинамики сплошной среды в дифференциальной форме:

Выпишем теперь в дифференциальной форме все полученные уравнения.

(1) Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0 \quad (2.22)$$

(2) Закон сохранения импульса:

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_i \right) = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.23)$$

(3) Закон сохранения момента импульса:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (2.24)$$

(4) Закон сохранения полной энергии

$$\rho \frac{d}{dt} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) = (\vec{F}, \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon \sigma_{ij} v_i) + q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \text{div} \vec{Q}^{**} \quad (2.25)$$

Уравнение теплопередачи

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \text{div} \vec{Q}^{**} \quad (2.26)$$

(5) Второе начало термодинамики

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{q^{(e)} + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q'}{T} \quad (2.27)$$

Система уравнения (2.22-2.27) МСС незамкнута, т.к. в ней не определены  $\sigma_{ij}$ , потоки тепла  $\vec{Q}^{(e)}$  некомпенсированное тепло  $q'$  и т.д. Все эти величины определяются на основании опыта, т.е. строятся феноменологические модели механики сплошных сред. В разных средах будут свои уравнения для этих величин. Первой моделью сплошной среды является модель идеальной жидкости или идеального газа.

### 2.4. Идеальная жидкость или идеальный газ

Рассмотрим модель идеальной жидкости или газа. Идеальной жидкостью (или газом) называют сплошную среду, в которой:

1. Тензор поверхностных напряжений шаровой, т.е.

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

Выясним смысл скалярной функции  $p$ . Найдем в этом случае  $[\vec{\sigma}_n]_i = -pn_i$ , т.е.  $\vec{\sigma}_n = -p\vec{n}$ . Таким образом, сила, действующая на площадку противоположно направлению нормали. -это давление.

2. Среда является двухпараметрической, т.е. такой, в которой уравнение состояния определяется двумя термодинамическими функциями. Например, плотность внутренней энергии  $u = u(\rho, S)$ , т.е. плотность внутренней энергии является функцией плотности и энтропии или плотности и давления, т.е.  $u = u(p, \rho)$

3. Все термодинамические процессы являются обратимыми, т.е. если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, при этом не скомпенсированное тепло  $q' = 0$  (Заметим, что могут быть необратимые процессы с  $q' = 0$ , но не наоборот).

Для такой среды система уравнений МСС(2.22-2.27) примет вид:

**Уравнение неразрывности:** 
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0 \quad (2.28)$$

**Уравнение Эйлера :** 
$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) v_i \right) = F_i - \frac{\partial p_i}{\partial x_i} \quad (2.29)$$

или в векторной форме 
$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} \right) = \vec{F} - \nabla p$$

**Уравнение притока тепла:** 
$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) u \right] = -p \text{div } \vec{v} + q^{(e)} + \text{div } \vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \text{div } \vec{Q}^{**} \quad (2.30)$$

**Уравнение состояния:-** 
$$u = u(\rho, S) \quad (2.31)$$

**Уравнение энтропии:** 
$$\rho \left( \frac{\partial S}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) S \right) = \frac{q}{T} \quad \text{где} \quad q = q^{(e)} + \text{div } \vec{Q}^{(e)} \quad (2.32)$$

Из этой системы уравнений можно получить основное термодинамическое соотношение, которое является следствием 1-го и 2-го начал термодинамики для идеального газа. Допустим, что источники немеханической и нетепловой энергии отсутствуют, тогда уравнение притока тепла(2.27) можно записать в виде:

$$\rho \frac{du}{dt} = -p \text{div } \vec{v} + q, \quad (2.33)$$

где  $q = q^{(e)} + \text{div } \vec{Q}^{(e)}$

Из уравнения непрерывности имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

т.е.(2.33) примет вид:

$$\rho \frac{du}{dt} = + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + q \quad (2.34)$$

Из уравнения (2.32) следует, что

$$\rho \frac{dS}{dt} = \frac{q}{T} \quad (2.35)$$

Исключая  $q$  из (2.35) получим :

$$\rho \frac{du}{dt} = + \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + T\rho \frac{dS}{dt} \quad (2.36.)$$

Или, поделив обе части на  $\rho$ , имеем:

$$\frac{du}{dt} = T \frac{dS}{dt} - p \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.37)$$

Как мы видели раньше,  $d / dt$  — это производная по времени от заданной лагранжевой частицы. Для фиксированной частицы можно в (2.37) перейти к дифференциалам и получить основное термодинамическое соотношение в виде:

$$du = TdS - pd \left( \frac{1}{\rho} \right) \quad (2.37)$$

Эти приращения, связывающие приращение внутренней энергии с приращением энтропии и плотности, определяются для термодинамического процесса, происходящего в заданной лагранжевой частице.

### 3. Приближение гидростатики. Стационарное течение идеальной жидкости(газа).

Изучение механики идеальной жидкости или газа начнем с так называемого приближения гидростатики. Пусть течение жидкости (газа) отсутствует, т.е.  $\vec{v} = 0$  (жидкость неподвижна). Тогда из уравнения сохранения массы следует, что  $\partial \rho / \partial t = 0$ , а значит  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Уравнения Эйлера при этом сводятся к виду:

$$\nabla p = \vec{F} \quad (3.1)$$

, называемому уравнением гидростатики, из которого следует, что в отсутствии внешних объемных сил ( $\vec{F} = 0$ ) внутри покоящейся жидкости давление  $p = \text{const}$ . Это закон Паскаля, который известен из школьного курса физики.

Таким образом, в отсутствии внешних массовых сил плотность жидкости  $\rho$  является произвольной функцией координат, а давление  $p$  - постоянно и не зависит, например, от формы сосуда, в который налита жидкость. Каким же условиям должны удовлетворять внешние объемные силы, чтобы идеальная жидкость могла находиться в условиях гидростатического равновесия.

#### 3.1. Общие условия равновесия жидкости в поле массовых сил.

Пусть  $\vec{F} = \rho \vec{f}$ , где  $\vec{f}$  - массовая плотность объемных сил. Вычислим  $\text{rot}$  от этого выражения. Поскольку согласно (3.1)  $\nabla p = \rho \vec{f}$ , то

$$\text{rot } \rho \vec{f} = \rho \text{rot } \vec{f} + [\nabla \rho, \vec{f}] = 0 \quad (3.2)$$

Умножим (3.2) на  $\vec{f}$  скалярно, тогда получим условие, которому должны удовлетворять плотность объемных сил, чтобы идеальная жидкость находилась в состоянии гидростатического равновесия:

$$\vec{f} \text{ rot } \vec{f} = 0.$$

Важным является случай, когда внешние силы имеют потенциал, т.е.  $\vec{F} = \rho \nabla \phi$ . Пример такой силы — сила тяжести. Оказывается, что потенциальный характер массовых сил накладывает дополнительные ограничения на пространственное распределение плотности. Действительно, если  $\vec{F} = \rho \nabla \phi$ , то  $\text{rot } \vec{F} = 0$ , а из (3.2) следует, что  $[\nabla \rho \times \nabla \phi] = 0$ . Это означает, что векторы  $\nabla \rho$  и  $\nabla \phi$  должны быть коллинеарны. Но тогда  $\rho = \rho(\phi)$ , и из уравнения гидростатики (3.1) следует, что  $p = p(\phi)$ . Таким образом, при гидростатическом равновесии поверхности равных значений потенциала ( $\phi = \text{const}$ ) являются поверхностями равного давления и плотности.

Рассмотрим в качестве примера покоящуюся жидкость (газ), плотность которой является функцией только давления, т.е.  $\rho(p)$ , находящуюся в поле силы тяжести.

**Такая жидкость называется баротропной, а равновесие баротропным.** В этом случае  $\vec{F} = \rho \vec{g}$ , а  $\phi = gz$ ; тогда  $p = p(z)$  и  $\rho = \rho(z)$ . Рассмотрим основные случаи баротропного равновесия в поле тяжести.

1. Если  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  - жидкость (газ) несжимаема, то  $p = p_0 - \rho_0 g (z - z_0)$
2. **Газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях, так называемый совершенный газ.** Примером совершенного газа может являться газ атмосферы. В совершенном газе давление, плотность, температура связаны уравнением Клапейрона:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT(z), \quad (3.3)$$

где  $R = 8,3144 \cdot 10^7 \text{ эрг} \setminus \text{молград}$  - универсальная газовая постоянная,  $\mu$  - молекулярная масса газа. Заметим также, что внутренняя энергия совершенного газа пропорциональна его абсолютной температуре, т.е.  $u = c_v T$ . Подставляя уравнение состояния (3.3) в (3.1) находим равновесное распределение давления

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT(z)}$$

Отсюда  $p = p_0 e^{-\int_{z_0}^z \frac{g}{RT(z')} dz'}$ , где  $p_0$  - давление при  $z=0$ .

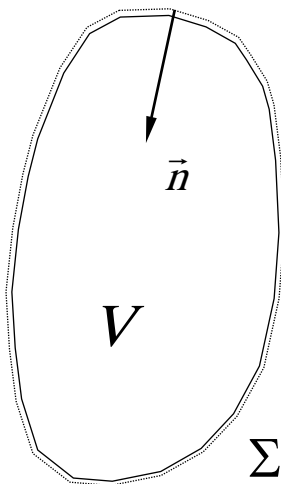
Таким образом, мы получили так называемую барометрическую формулу, описывающую изменение плотности (давления) с высотой. При  $T=\text{const}$  (изотермический термодинамический процесс) мы получаем известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы. Аналогичная формула описывает изменение давления (плотности) газа с высотой в атмосфере, если известно распределение  $T(z)$ .

В следующем разделе остановимся еще на одном, известном из курса средней школы явлении, следующем из закона гидростатики - на силе Архимеда.

### 3.2. Закон Архимеда

Найдем силу, действующую на тело объема  $V$ , погруженное в жидкость, находящуюся в равновесии и имеющую плотность  $\rho(z)$ . Проведем в жидкости поверхность, расположенную близко к телу. (Рис). Вычислим силу, действующую на жидкость на этой поверхности. Заметим, что вектор внешней нормали к поверхности для жидкости является вектором внутренней нормали для тела. Для  $i$ -й проекции силы, действующей на жидкость на этой поверхности, имеем:

$$F_{fi} = \iint_{\Sigma} [\vec{\sigma}_n]_i dS = \iint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS = \iint_{\Sigma} (-p) \delta_{ij} n_j dS \quad (3.4)$$



Уберем тело и заполним образовавшуюся полость жидкостью с тем же распределением плотности. Применим теорему Остроградского-Гаусса. Поскольку нормаль по отношению к этому объему - внутренняя, то из (3.4):

$$\iint_{\Sigma} p n_i dS = - \int_V \text{div} p \vec{x}_{0i} dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV.$$

В векторном виде сила, действующая на жидкость в объеме  $V$  через поверхность  $\Sigma$  определяется выражением:

$$\vec{F}_f = \int_V \nabla p dV \quad (3.5)$$

С учетом уравнения гидростатики (3.1) преобразуем выражение (3.5):

$$\vec{F}_f = \vec{g} \int_V \rho(z) dV = m_f \vec{g}.$$

Таким образом сила, действующая на тело объема  $V$ , по третьему закону Ньютона, равна по величине силе (3.5) и противоположна ей по направлению, т.е.

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_f = -m_f \vec{g},$$

где  $m_f = \int_V \rho(Z) dV$  — масса жидкости в объеме тела.

### 3.3. Устойчивость распределения плотности в поле силы тяжести

Рассмотрим условие устойчивости равновесного распределения плотности жидкости в поле тяжести. Распределение плотности будет устойчиво, если при отклонении жидкой частицы от положения равновесия на нее действует возвращающая сила, стремящаяся вернуть частицу к положению равновесия.

Пусть жидкость с профилем плотности  $\rho(z)$  находится в равновесии в поле сил тяжести. Направим ось  $z$  вверх, тогда в покоящейся жидкости распределение давления  $p(z)$  удовлетворяет общей барометрической формуле:

$$p = p_0 - \int_{z_0}^z \rho(Z') g dZ'$$

А в соответствии с уравнением состояния идеального газа,  $p = p(\rho, S)$ , давление и энтропия также являются функциями вертикальной координаты  $z$ .

Рассмотрим малый индивидуальный объем  $\Delta V$ , находящийся в равновесии на уровне  $z$ . Пусть его плотность на этом уровне равна  $\rho(z)$ , а масса  $\Delta m = \rho(z)\Delta V$ . Предположим, что этот жидкий объем сместился вверх на высоту  $z + \Delta z$ . Там другое давление, поэтому жидкость в объеме  $\Delta V$  изменила плотность в силу сжимаемости. Обозначим *плотность в этом индивидуальном объеме*  $\rho'$ , а сам перемещенный индивидуальный объем —  $\Delta V'$ , но масса этого объема  $\Delta m = \rho' \Delta V'$  остается той же. На перемещенный индивидуальный объем действует сила тяжести  $\rho' \Delta V' g$ , направленная вниз, и выталкивающая сила  $\rho(z + \Delta z) \Delta V' g$ , направленная вверх, где  $\rho(z + \Delta z)$  — равновесная плотность на новом уровне  $z + \Delta z$ . Чтобы индивидуальный объем вернулся назад, надо, чтобы сила тяжести была больше, чем выталкивающая сила, т.е.  $\rho' \Delta V' g > \rho(z + \Delta z) \Delta V' g$ , а следовательно  $\rho' > \rho(z + \Delta z)$  (3.6)

Будем считать, что смещение индивидуального объема происходит при отсутствии притока внешнего тепла и теплообмена между соседними частицами. **Такие процессы называются адиабатическими.** Подчеркнем, что при этом сохраняется энтропия.

Тогда с учетом уравнения состояния из (3.6) имеем

$$\rho(p(z + \Delta z); S(z)) > \rho(p(z + \Delta z); S(z + \Delta z))$$

Разложим это выражение по  $z$ , полагая  $\Delta z / z \ll 1$ , имеем:

$$\rho(z) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S \frac{dp}{dz} \Delta z > \rho(z) + \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_S \frac{dp}{dz} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} \right) \Delta z \quad (3.7)$$

Т.е.

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} \Delta z < 0$$

Учитывая, что  $\Delta z > 0$ , условие устойчивости примет вид:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} < 0 \quad (3.8)$$

Это одна из форм записи условия устойчивости распределения плотности в поле силы тяжести, т.е. устойчивость определяется градиентом энтропии.

Более наглядным является условие устойчивости, выраженной через градиент распределения плотности. Действительно, вернемся снова к условию (3.6), переписав его с учетом уравнения состояния в виде:

$$\rho(p(z + \Delta z); S(z)) > \rho(z + \Delta z) \quad (3.9)$$

Разложив (3.9) в ряд по  $\Delta z$



$$\rho(z) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{dp}{dz} \Delta z > \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \Delta z,$$

С учетом уравнения гидростатики в поле тяжести имеем:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g,$$

имеем:

$$\left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \rho g + \frac{d\rho}{dz} \right) \Delta z < 0 \quad (3.10)$$

Учитывая, что  $\Delta z > 0$ ,  $\left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s = \frac{1}{\left( \left. \partial p / \partial \rho \right|_s \right)}$ ,

запишем условие устойчивости (3.10) в виде:

$$\frac{d\rho}{dz} + \frac{g\rho(z)}{\left. \partial p / \partial \rho \right|_s} < 0.$$

Как мы увидим дальше,  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = C^2$  имеет смысл скорости звука. Во всех известных случаях  $C^2$  — большая величина, поэтому условие устойчивости можно записать в виде:

$$\frac{d\rho}{dz} < 0 \quad (3.11)$$

Таким образом, устойчивым является распределение плотности, соответствующее ее убыванию с высотой. Заметим, что переходя к условию (3.11), мы, по существу,

положили  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \infty$ , т.е. предположили, что жидкость несжимаема. Ниже мы

остановимся подробнее на введенном выше понятии скорости звука.

### 3.4. Скорость звука

Определим физический смысл величины  $\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$ . Рассмотрим уравнение для малых

возмущений состояния идеального газа (жидкости). Эти уравнения мы в дальнейшем будем называть линейными. Пусть жидкость (газ) находится в состоянии равновесия с постоянным давлением  $p_0$ , плотностью  $\rho_0$ , энтропией  $S_0$ , причем  $p_0$  связано с  $\rho_0$  и  $S_0$  уравнением состояния  $p_0 = p_0(\rho_0, S_0)$ .

Предположим, что возникли малые возмущения, зависящие только от одной пространственной координаты  $x$  и от времени  $t$ . Запишем уравнения движения идеальной жидкости в одномерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0 \quad \text{— закон сохранения массы,}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{g}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad \text{— уравнение Эйлера, (3.12)}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad \text{— второе начало термодинамики,}$$

$$p = p(\rho, S) \quad \text{— уравнение состояния.}$$

Представим термодинамические и гидродинамические величины в виде сумм средних и возмущений, полагая, что средние по времени от возмущений равны нулю:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0 + \rho_1(x, t) \\ v &= v_1(x, t) \\ S &= S_0 + S_1(x, t) \\ p &= p_0 + p_1(x, t)\end{aligned}$$

Будем считать, что отклонение величин от равновесных значений мало. Представим все слагаемые, входящие в уравнения (3.12) в виде рядов по малым переменным и отбросим все слагаемые выше 1-го порядка малости. Тогда из (3.12) получим линейную систему уравнений гидро(газо)динамики идеальной жидкости(газа):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} &= 0 \\ \rho_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial S_1}{\partial t} &= 0 \\ p_1 &= \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \rho_1 + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho S_1\end{aligned}\tag{3.13}$$

Отсюда видно, что возмущение равновесной энтропии можно положить равной нулю ( $S_1 = 0$ ). Подставим в уравнение Эйлера  $p_1$ , выраженное из линеаризованного уравнения состояния, получим вместо (3.13) два уравнения:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right] &= 0\end{aligned}\tag{3.14}$$

Исключая  $v_1$ , имеем из (3.14) волновое уравнение для возмущения давления:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0\tag{3.15}$$

Известно, что его решение можно представить в виде суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\rho = R_1(x - ct) + R_2(x + ct)\tag{3.15}$$

где  $c = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$ ,  $R_1$  — это плоская волна, бегущая в положительном направлении оси  $x$ ,  $R_2$  — в отрицательном направлении оси  $x$ . Это так называемые волны сжатия и разрежения, т.е. звуковые волны, а  $c$  — это скорость звука.

Итак, параметр  $C = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$ , входящий в условие равновесия жидкости(газа) в поле

тяжести, имеет смысл скорости звука, т.е. скорости распространения звуковых волн малой амплитуды. Пусть  $\rho = \text{const}$ , т.е. независимо от давления плотность не меняется. Это соответствует пределу несжимаемой жидкости. Тогда скорость звука  $c = \infty$ , т.е. в

несжимаемой жидкости скорость распространения малых возмущений бесконечна. На самом деле скорость звука конечна, но в этом пределе достаточно велика. Отсюда ясно, что любую среду можно считать несжимаемой, если рассматриваемые в ней процессы много медленнее, чем процесс, связанный с распространением звука. Сформулируем это условие более точно. Пусть характерный пространственный масштаб процесса  $L$ , а характерный временной масштаб -  $T$ . Тогда жидкость или газ можно считать несжимаемыми, если

$$\frac{L}{T} \ll C \quad (3.16)$$

Чем определяется скорость звука ?. Из определения скорости звука следует, что она определяется сжимаемостью среды.: если сжимаемость плохая (плотность меняется слабо, например, при адиабатическом изменении давления), то скорость звука велика. Приведем выражение для скорости звука совершенного газа. Для совершенного газа уравнение состояния имеет вид [ ]:

$$\frac{p}{\rho} = (R/\mu)T$$

При адиабатическом процессе изменения термодинамического состояния газа давление  $p$  и плотность  $\rho$  связаны формулой так называемой политропной формулой [ ]:

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — показатель адиабаты., равный отношению теплоемкостей при постоянном

давлению к теплоемкости при постоянном объеме.

Поэтому скорость звука для совершенного идеального газа при адиабатическом процессе сжатия определяется следующим соотношением:

$$C = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \quad (3.17)$$

Видно, что скорость звука в идеальном газе зависит только от абсолютной температуры.

### 3.5. Стационарное течение идеальной жидкости. Интеграл Бернулли.

Перейдем теперь к описанию движения в жидкости или газе. Начнем с так называемых стационарных движений. **Течение называют стационарным**, если в эйлеровых переменных  $\partial/\partial t = 0$ , т.е. скорость жидкости в каждой точке не зависит от времени. Запишем уравнения движения идеальной жидкости (газа) в случае стационарного течения (ср. ). Из системы ( 2.18) нетрудно получить:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (\text{а})$$

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \vec{F} \quad (3.18) \quad (\text{б})$$

$$\rho (\vec{v}, \nabla) u = q - p \operatorname{div} \vec{v} \quad (\text{с})$$

$$\rho (\vec{v}, \nabla) S = \frac{q}{T} \quad (\text{д})$$

Следует отметить, что два последних уравнения(с,д), вытекающие из уравнений теплопередачи и из второго закона термодинамики, иногда заменяются уравнениями состояния.

Уравнение Эйлера(3.18 (б) в случае установившихся движений идеальной жидкости (газа) имеет первый интеграл. Предположим, что  $\vec{F} = -\rho \nabla \varphi$  — т.е. массовые силы имеют потенциал. Воспользуемся формулой из векторного анализа

$$(\vec{v}, \nabla \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 + [\text{rot} \vec{v}, \vec{v}]$$

Тогда уравнение Эйлера (3.18а) примет вид Громеки-Лэмба[ ]:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + [\text{rot} \vec{v} \times \vec{v}] + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \varphi \quad (3.19)$$

Проведем в жидкости семейство линий. Обозначим координату вдоль линии-  $l$ , а различные линии будем определять параметром  $L$ . Эти линии, вообще говоря, не являются линиями тока. Найдем проекцию уравнения Эйлера (3.19) на произвольную линию из этого семейства:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{v^2}{2} + \varphi \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -[\text{rot} \vec{v}, \vec{v}]_l \quad (3.20)$$

На каждой линии  $p = p(l, L)$ , а  $\rho = \rho(l, L)$ , . А значит на данной линии (при фиксированном  $L$ )

$$\rho = \rho(p, L) \text{ или наоборот}$$

Но тогда

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)}$$

Функция

$$P(p, L) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} \quad (3.21)$$

называется функцией давления. Она различна, вообще говоря, на разных линиях  $L$ . С учетом функции давления уравнения Эйлера(3.20) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{v^2}{2} + \varphi + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} \right] = -[\text{rot} \vec{v}, \vec{v}]_l$$

Допустим, что в качестве семейства линий мы выбрали семейство линий тока. Очевидно, что вектор  $[\text{rot} \vec{v}, \vec{v}]_e$  направлен перпендикулярно вектору  $\vec{v}$ . Значит его проекция на линию тока равна 0. Отсюда следует, что на линии тока сохраняется величина

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} + \varphi = C(L) \quad (3.22)$$

Этот интеграл и называется формулой Бернулли.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы Бернулли.

1. Допустим, что движение жидкости представляет собой баротропный процесс, т.е. плотность есть функция только от давления

$$\rho = \rho(p),$$

а поле скорости безвихревое, т.е.  $\text{rot} \vec{v} = 0$ . Тогда независимо от линии тока из (3.22) имеем:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} + \varphi = \text{const}$$

Частным случаем баротропного процесса является процесс, происходящий в несжимаемой жидкости, плотность которой во всех точках одинакова. В этом случае  $\rho$

$= \rho_0 = \text{const}$ . Интеграл Бернулли (3.22) для безвихревого течения в несжимаемой жидкости принимает вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const}$$

Если же движение произвольно, т.е.  $\text{rot} \vec{v} \neq 0$ , то интеграл Бернулли принимает вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const} (L)$$

Рассмотрим еще ряд интегралов движения стационарного течения идеальной жидкости.

## Лекция 3

### Гидростатика

Изучение механики идеальной жидкости (или газа) начнем с гидростатики. Пусть течение жидкости отсутствует, т.е.  $\vec{v} = 0$  (жидкость неподвижна). Тогда из уравнения сохранения массы следует, что  $\partial \rho / \partial t = 0$ , а значит  $\rho = \rho(x, y, z)$ . Уравнения Эйлера при этом сводятся к виду

$$\nabla p = \vec{F} \quad (3.1)$$

Это уравнение гидростатики, из которого следует, что в отсутствии внешних объемных сил ( $\vec{F} = 0$ ) внутри покоящейся жидкости давление  $p = \text{const}$ . Это закон Паскаля, который известен из школьного курса физики []. Итак, в отсутствии внешних массовых сил плотность жидкости  $\rho$  - произвольная функция координат, а давление  $p$  - постоянно и не зависит от формы сосуда, в который налита жидкость. Каким же условиям должны удовлетворять внешние объемные силы, чтобы идеальная жидкость могла находиться в условиях гидростатического равновесия.

#### 3.1. Общие условия равновесия жидкости в поле массовых сил.

Пусть  $\vec{F} = \rho \vec{f}$ , где  $\vec{f}$  - массовая плотность объемных сил. Вычислим  $\text{rot}$  от этого выражения. Поскольку из уравнения гидростатики следует, что  $\nabla p = \rho \vec{f}$ , то

$$\text{rot } \rho \vec{f} = \rho \text{rot } \vec{f} + [\nabla \rho, \vec{f}] = 0 \quad (3.1)$$

Умножим (3.1.) на  $\vec{f}$  скалярно, тогда получим условие, которому должны удовлетворять плотность объемных сил, чтобы идеальная жидкость находилась в состоянии гидростатического равновесия :

$$\vec{f} \text{ rot } \vec{f} = 0. \quad (3.2)$$

Важным является случай, когда внешние силы имеют потенциал, т.е.  $\vec{F} = \rho \nabla \varphi$ . Пример такой силы — сила тяжести. Оказывается, что потенциальный характер массовых сил накладывает дополнительные ограничения на пространственное распределение плотности. Действительно, если  $\vec{F} = \rho \nabla \varphi$ , то  $\text{rot } \vec{F} \equiv 0$ , а из (3.1.) следует, что  $[\nabla \rho \times \nabla \varphi] = 0$ . Это означает, что векторы  $\nabla \rho$  и  $\nabla \varphi$  должны быть коллинеарны. Но тогда  $\rho = \rho(\varphi)$ , и из уравнения гидростатики (3.1) следует, что  $p = p(\varphi)$ . Таким образом, при гидростатическом равновесии поверхности равных значений потенциала ( $\varphi = \text{const}$ ) являются поверхностями равного давления и плотности.

Рассмотрим в качестве примера баротропную жидкость (газ) (плотность такой жидкости (газа) может быть функцией только давления, т.е.  $\rho(p)$ ) в поле силы тяжести. В этом случае  $\vec{F} = \rho \vec{g}$ , а  $\varphi = gz$ ; тогда  $p = p(z)$  и  $\rho = \rho(z)$ . Рассмотрим основные случаи баротропного равновесия в поле тяжести.

1. Если  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  - жидкость (газ) несжимаема, то  $p = p_0 - \rho_0 g (z - z_0)$
2. Совершенный газ. Уравнение состояния (считаем газ идеальным) совершенного газа имеет вид [ ]:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT(z), \quad (3.3)$$

где  $R$  - универсальная газовая постоянная,  $\mu$  - молекулярная масса газа. Подставляя (3.3) в (3.1) находим

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{\rho g}{RT(z)}$$

Отсюда

$$p = p_0 e^{-\int_{z_0}^z \frac{g}{RT(z')} dz'} \quad (3.4),$$

где  $p_0$  - давление при  $z=0$ .

Таким образом, мы получили барометрическую формулу, описывающую изменение плотности (давления) с высотой. Аналогичная формула описывает изменение давления (плотности) газа с высотой в атмосфере, если известно распределение  $T(z)$ .

Для определения  $T(z)$  можно воспользоваться уравнением притока тепла ( ) в гидростатическом приближении  $\vec{v} = 0, d/dt = 0$ :

$$q^{(e)} + \text{div } \vec{Q}^{(e)} + q^{**} = 0,$$

где  $\text{div } \vec{Q}^{(e)}$  — характеризует теплопроводность среды,  $q^{**}$  — приток нетепловой энергии (поглощение излучения и т.п.). В следующем разделе остановимся еще на одном, известном из курса средней школы явлении, следующем из закона гидростатики-на силе Архимеда.

### 3.2. Закон Архимеда

Найдем силу, действующую на тело, погруженное в жидкость, находящуюся в равновесии и имеющую распределение плотности  $\rho(z)$ . Проведем в жидкости поверхность, расположенную близко к телу. Вычислим силу, действующую на жидкость на этой поверхности. Заметим, что вектор внешней нормали к поверхности для жидкости является вектором внутренней нормалью для тела. Для  $i$ -й проекции силы, действующей на жидкость на этой поверхности имеем:

$$F_{fi} = \oint_{\Sigma} [\vec{\sigma}_n]_i dS = \oint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS = \oint_{\Sigma} (-p) \delta_{ij} n_j dS$$

Уберем тело и заполним образовавшуюся полость жидкостью с тем же распределением плотности. Применим теорему Остроградского-Гаусса. Поскольку нормаль по отношению к этому объему- внутренняя

$$\oint_{\Sigma} p n_i dS = - \int_V \text{div } p \vec{x}_{0i} dV = - \int_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV.$$

В векторном виде сила, действующая на жидкость на поверхности  $\Sigma$ , определяется выражением:

$$\vec{F}_f = \int_V \nabla p dV \quad (3.5)$$

С учетом уравнения гидростатики (3.1) из (3.5) имеем:

$$\vec{F}_f = \vec{g} \int_V \rho(z) dV = m_f \vec{g}. \quad (3.6)$$

Следовательно сила, действующая на тело, по третьему закону Ньютона, равна по величине силе (3.6) и противоположна ей по направлению, т.е.

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_f = -m_f \vec{g},$$

где  $m_f = \int_V \rho(z) dV$  — масса жидкости в объеме тела.

### 3.3. Устойчивость распределения плотности в поле силы тяжести

Рассмотрим условие устойчивости равновесного распределения плотности жидкости в поле тяжести.

Распределение плотности будет устойчиво, если при отклонении жидкой частицы от положения равновесия на нее действует возвращающая сила, стремящаяся вернуть ее к этому положению равновесия.

Пусть жидкость с профилем плотности  $\rho(z)$  находится в поле силы тяжести. Направим ось  $z$  вверх, тогда в покоящейся жидкости распределение давления  $p(z)$  удовлетворяет барометрической формуле

$$p = p_0 - \int_{z_0}^z \rho(Z') g dZ'$$

А в соответствии с уравнением состояния идеального газа,  $p = p(\rho, S)$ , давление и энтропия также являются функциями вертикальной координаты  $z$ .

Рассмотрим малый индивидуальный объем  $\Delta V$ , находящийся в равновесии на уровне  $z$ . Пусть его плотность  $\rho(z)$ , а масса  $\Delta m = \rho(z)\Delta V$ . Пусть этот жидкий объем сместился вверх на высоту  $z + \Delta z$ . Там другое давление, поэтому жидкость в объеме  $\Delta V$  изменила плотность в силу сжимаемости, т.е. теперь *плотность в этом индивидуальном объеме обозначим  $\rho'$* , а сам объем-  $\Delta V'$ , но масса этого объема  $\Delta m = \rho'\Delta V'$  остается той же. На объем действует сила тяжести  $\rho'\Delta V'g$ , направленная вниз, и выталкивающая сила  $\rho(z + \Delta z) \Delta V'g$ , направленная вверх, где  $\rho(z + \Delta z)$  — плотность на новом уровне. Чтобы объем вернулся назад, надо, чтобы сила тяжести была больше, чем выталкивающая сила, т.е.  $\rho'\Delta V'g > \rho(z + \Delta z) \Delta V'g$ , а следовательно

$$\rho' > \rho(z + \Delta z) \quad (5)$$

Будем считать, что смещение частицы происходит адиабатически, при этом сохраняется энтропия. Тогда с учетом уравнения состояния из (5) имеем

$$\rho(p(z + \Delta z); S(z)) > \rho(p(z + \Delta z); S(z + \Delta z))$$

Разложим это выражение по  $z$ , полагая  $\Delta z \ll 1z$ , имеем

$$\rho(z) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{dp}{dz} \Delta z > \rho(z) + \left( \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{dp}{dz} + \left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} \right) \Delta z$$

Т.е.

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} \Delta z < 0$$

Учитывая, что  $\Delta z > 0$ , условие устойчивости примет вид:

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial S} \right|_p \frac{dS}{dz} < 0 \quad (7)$$

Это одна из форм записи условия устойчивости распределения плотности в поле силы тяжести, т.е. устойчивость определяется градиентом энтропии.

Более наглядным является условие устойчивости, выраженной через градиент распределения плотности. Действительно, вернемся снова к условию (5), переписав его с учетом уравнения состояния в виде:

$$\rho(p(z + \Delta z); S(z)) > \rho(z + \Delta z) \quad (8)$$

Разложив (8) в ряд по  $\Delta z$

$$\rho(z) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial p} \right|_s \frac{dp}{dz} \Delta z > \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \Delta z,$$

с учетом уравнения гидростатики в поле тяжести



$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g,$$

имеем:

$$\left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_s \rho g + \frac{dp}{dz} \right) \Delta z < 0 \quad (9)$$

Учитывая, что  $\Delta z > 0$ ,  $\frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_s = \frac{1}{\left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s \right)}$ ,

запишем условие устойчивости(9) в виде:

$$\frac{dp}{dz} + \frac{g\rho(z)}{\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s} < 0.$$

Как мы увидим дальше  $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s = C^2$ , имеет смысл скорости звука. Во всех известных случаях  $C^2$  — большая величина, поэтому условие устойчивости можно записать в виде:

$$\frac{dp}{dz} < 0 \quad (3.10)$$

Таким образом, устойчивым является распределение плотности, соответствующее ее убыванию с высотой. Заметим, что переходя к условию (10), мы, по существу, положили

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s = \infty, \text{ т.е. предположили, что жидкость несжимаема.}$$

### 3.4. Скорость звука

Определим физический смысл величины  $\frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_s$ . Рассмотрим уравнение для малых

возмущений состояния идеального газа (жидкости). Пусть он находится в состоянии равновесия в покое, с давлением  $p_0$ , плотностью  $\rho_0$ , энтропией  $S_0$ , причем  $p_0$  связано с  $\rho_0$  и  $S_0$  уравнением состояния идеального газа  $p_0 = p_0(\rho_0, S_0)$ . Предположим также, что все источники внешнего тепла отсутствуют ( $q = 0, \text{div} \vec{Q} = 0$ )

Пусть возникли малые возмущения равновесного состояния, зависящие только от одной пространственной координаты  $x$  и от времени  $t$ . Запишем уравнения одномерные уравнения движения идеальной жидкости в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \rho v = 0 \text{ — закон сохранения массы, (3.11)}$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ — уравнение Эйлера} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \text{ — второе начало термодинамики (3.13)}$$

$$p = p(\rho, S) \text{ — уравнение состояния.}$$

Представим термодинамические и гидродинамические величины в виде сумм средних(равновесных) величин и возмущений:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t)$$

$$v = v_1(x, t)$$

$$S = S_0 + S_1(x, t)$$

$$p = p_0 + p_1(x, t)$$

Будем считать, что отклонение величин от равновесных значений мало. Представим все слагаемые, входящие в уравнение для возмущений в виде рядов по малым величинам и отбрасывая все слагаемые выше 1-го порядка малости, получим:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

$$\rho_0 \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad (3.15)$$

$$p_1 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \rho_1 + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho S_1 \quad (3.16)$$

Отсюда видно, что  $S_1 = 0$ . При этом из уравнения (3.13) (3.14) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] &= 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} \left[ \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Исключая  $v_1$  из 3.17), получим волновое уравнение для возмущений плотности

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0$$

. Его решение можно представить в виде суммы двух функций

$$\rho = R_1(x - ct) + R_2(x + ct)$$

где  $C = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$ ,  $R_1$  — соответствует плоской волне, бегущей в положительном

направлении оси  $x$ ,  $R_2$  — волне, бегущей в отрицательном направлении оси  $x$ . Это волны

описывают сжатие и разрежение т.е. представляют собой звуковые волны, а  $C = \sqrt{\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s}$

это скорость распространения звуковых волн малой амплитуды.

Предположим, что  $\rho = \text{const}$ , т.е. независимо от давления плотность не меняется. Это

соответствует несжимаемой жидкости. В этом случае скорость звука  $c \rightarrow \infty$ , т.е. в

несжимаемой жидкости скорость распространения малых возмущений бесконечна.

Конечно, в реальных условиях скорость звука в этом случае просто бесконечно велика.

Отсюда ясно, что любую среду можно считать несжимаемой, если рассматриваемые в ней процессы много медленнее, чем процесс, связанный с распространением звука.

Сформулируем это условие более точно. Пусть характерный пространственный масштаб

процесса  $L$ , а характерный временной период -  $T$ . Жидкость или газ можно считать

несжимаемыми, если

$$\frac{L}{T} \ll C \quad (3.18)$$

Чем определяется скорость звука? Это определяется уравнением состояния. Так для совершенного газа уравнение состояния имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = \mu RT$$

При адиабатическом же процессе  $p$  и  $\rho$  связаны формулой

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma,$$

где  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  — показатель адиабаты.

Поскольку адиабатический процесс в идеальном газе является изэнтропическим (это следует из обратимости процессов в идеальном газе), то определяется соотношением:

$$C = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \gamma \cdot \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}$$

Ясно, что для совершенного газа скорость звука зависит только от абсолютной температуры. В общем случае скорость звука определяется сжимаемостью среды: если сжимаемость плохая (плотность меняется слабо при адиабатическом изменении давления), то скорость звука велика.

### 3.5. Стационарное течение идеальной жидкости. Интеграл Бернулли.

Следующим приближением (после гидростатики) является стационарное течение идеальной жидкости. Течение называют стационарным, если в эйлеровых переменных производные  $\partial / \partial t = 0$ . Запишем уравнения движения идеальной жидкости в случае стационарного течения. Из уравнений (3.10) при наличии объемных сил следует:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = \vec{F}$$

$$\rho (\vec{v}, \nabla) u = q - p \operatorname{div} \vec{v}$$

$$\rho (\vec{v}, \nabla) S = \frac{q}{T}$$

Уравнение Эйлера в случае установившихся движений идеальной жидкости (газа) имеет первый интеграл. Предположим, что  $\vec{F} = -\rho \nabla \varphi$  — т.е. массовые силы имеют потенциал. Воспользуемся формулой из векторного анализа

$$(\vec{v}, \nabla \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla v^2 + [\operatorname{rot} \vec{v}, \vec{v}]$$

Тогда уравнение Эйлера можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \nabla v^2 + [\operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v}] + \frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \varphi \quad (3.20)$$

Проведем в жидкости семейство линий. Обозначим координату вдоль линии-  $l$ , при этом различные линии отличаются параметром  $L$ . Эти линии, вообще говоря, не являются линиями тока.

Найдем проекцию уравнения Эйлера на произвольную линию из этого семейства

$$\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{v^2}{2} + \varphi \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = -[\operatorname{rot} \vec{v}, \vec{v}]_l$$

На каждой линии давление является функцией  $p = p(l, L)$ , а  $\rho = \rho(l, L)$ , а значит на данной линии (при фиксированном  $L$ ) плотность будет являться функцией давления нетрудно

$$\rho = \rho(p, L)$$

Но тогда видеть, что

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l} \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} \quad (3.21)$$

Функция  $P(p, L) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)}$  называется функцией давления. Эта функция различна,

вообще говоря, на разных линиях  $L$ . С учетом (3.21) уравнения Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial l} \left[ \frac{v^2}{2} + \varphi + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} \right] = -[\text{rot } \vec{v}, \vec{v}]_l$$

Допустим, что в качестве семейства линий мы выбрали семейство линий тока. Очевидно, что вектор  $[\text{rot } \vec{v}, \vec{v}]_e$  направлен перпендикулярно вектору  $\vec{v}$ . Значит его проекция на линию тока равна 0. Отсюда следует, что на линии тока сохраняется величина

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} + \varphi = C(L)$$

Этот интеграл и называется формулой Бернулли.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы Бернулли.

1. Допустим, что движение жидкости представляет собой баротропный процесс, т.е. плотность есть функция давления

$$\rho = \rho(p),$$

а поле скорости безвихревое, т.е.  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Тогда независимо от линии тока

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p')} + \varphi = \text{const}$$

Частным случаем баротропного процесса является процесс, происходящий в несжимаемой жидкости, плотность которой во всех точках одинакова. В этом случае  $\rho = \rho_0 = \text{const}$ . Интеграл Бернулли для безвихревого течения принимает вид:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const}$$

Если же движение произвольно, т.е.  $\text{rot } \vec{v} \neq 0$ , то интеграл

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const}(L)$$

сохраняется на линии тока.

## 4. Законы сохранения в стационарном потоке идеальной жидкости. Метод контрольных поверхностей.

В механике сплошных сред часто не нужно знать детали течений, а только некоторые интегральные характеристики. При этом часто используется метод нахождения характеристик стационарных течений, основанный на использовании интегралов уравнений динамики и термодинамики сплошной среды по некоторым объемам, называемым контрольными объемами. Эти объемы не являются индивидуальными, их выбирают из соображений удобства. Проинтегрируем уравнения механики сплошных сред (3.18) по такому объему, и посмотрим, какие при этом получатся следствия для стационарных течений.

### 4.1. Закон сохранения массы.

Начнем с уравнений неразрывности

Проинтегрируем дифференциальное уравнения сохранения массы по некоторому произвольному стационарному объему:

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right] dV = 0 \quad (4.1)$$

и используя вторую вспомогательную формулу (1.18), преобразуем первое слагаемое в

$$(4.1) \quad \text{к виду} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} dV.$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса к правой части предыдущего соотношения, имеем из закона сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \iint_{\Sigma} \rho v_n dS \quad (4.2)$$

Где  $\Sigma$  — поверхность, ограничивающая объем  $V$ . Обсудим смысл уравнения (4.2): в левой части (4.2) — изменение массы внутри некоторого объема; в правой части — интеграл от потока некоторого вектора через границу этого объема. **Этот вектор  $\vec{q} = \rho \vec{v}$  будем называть вектором плотности потока массы.** Действительно, рассмотрим площадку малой площади  $\Delta S$  на поверхности  $\Sigma$  с вектором нормали  $\vec{n}$ . Пусть жидкость (газ) пересекает эту поверхность со скоростью  $\vec{v}$ . Масса жидкости, протекающая через эту площадку за время  $\Delta t$  в направлении нормали, равна:

$$\Delta m = \Delta S v_n \Delta t \cdot \rho$$

В единицу времени через единицу площадки протекает масса:

$$m_n = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t} = \rho v_n$$

Таким образом, введенный выше вектор  $\vec{q} = \rho \vec{v}$ , действительно имеет смысл плотности потока массы

В стационарном потоке из (4.2) следует:

$$\iint_{\Sigma} \rho v_n dS = 0 \quad (4.3)$$

Следовательно, поток массы через замкнутую поверхность  $\Sigma$  в этом случае равен 0.

Рассмотрим трубку тока. Для этого рассмотрим в жидкости произвольный контур  $S$  и проведем через него линии тока. Полученная поверхность называется трубкой тока. Вектор скорости направлен по касательной к боковой поверхности трубки тока. Пусть течение стационарно. Тогда трубка тока — стационарная поверхность. Применим к ней закон сохранения массы (4.3). Интеграл по боковой поверхности равен 0, т.к.  $v_n = 0$ ,  $(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$ ,  $\vec{v} \perp \vec{n}$ .

Тогда (4.3) можно переписать в виде суммы интегралов по сечениям  $S_1, S_2$

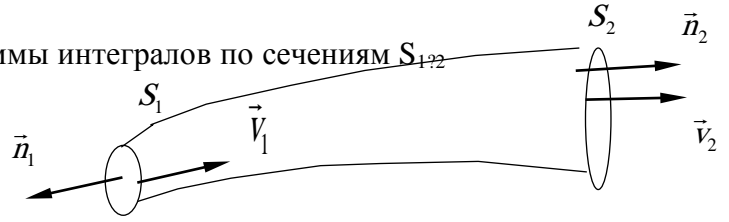
$$\int_{S_1} \rho_1 (\vec{v}_1; \vec{n}_1) dS + \int_{S_2} \rho_2 (\vec{v}_2; \vec{n}_2) dS = 0 \quad (4.4)$$


Рис.

Пусть трубка тока очень тонкая, так что интегрирование по соответствующим сечениям можно заменить произведением. Полагая также, что площадки  $S_1$  и  $S_2$  перпендикулярны векторам скорости, из (4.4) нетрудно получить, что  $-\rho_1 S_1 v_1 + \rho_2 S_2 v_2 = 0$ , т.е. вдоль тонкой трубки тока сохраняется величина:

$$\rho S v = \text{const.} \quad (4.5)$$

**Это закон сохранения потока массы для тонкой трубки тока.**

#### 4.2. Закон сохранения импульса. Тензор потока импульса.

Теперь обратимся к закону сохранения импульса для ее  $i$ -й проекции (ср. 2.23):

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.6)$$

Прибавим к этому уравнению (4.6) комбинацию  $v_i \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right)$ , равную нулю по закону сохранения массы. Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) = F_i$$

**Введем вектор**  $\vec{\Pi}_i = (\rho v_i v_j - \sigma_{ij}) \vec{x}_{0j} = \rho v_i \vec{v} - \sigma_{ij} \vec{x}_{0j}$ . Тогда очевидно, что мы получили закон сохранения  $i$ -й компоненты импульса в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v_i) + \text{div}(\vec{\Pi}_i) = F_i \quad (4.7)$$

Если мы теперь проинтегрируем это уравнение по некоторому объему  $V$  и применим теорему Остроградского-Гаусса, то получим из (4.7):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \iint_{\Sigma} [\vec{\Pi}_i]_n dS + \int_V F_i dV \quad (4.8)$$

При  $F_i = 0$  изменение  $i$ -й компоненты импульса в объеме  $V$  равно потоку вектора  $\vec{\Pi}_i$  через площадку, ограничивающую этот объем. В связи с этим вектор  $\vec{\Pi}_i$  называется **вектором плотности потока  $i$ -й компоненты импульса**. Таких векторов будет 3, так как есть три проекции вектора скорости. Из интегральной формулы видно, что  $[\vec{\Pi}_i]_n$  - поток

импульса через площадку, ориентированную перпендикулярно вектору  $\vec{n}$ . Тогда проекция вектора  $\vec{\Pi}_i$  на направление  $\vec{x}_{0j}$  показывает поток  $i$ -й компоненты импульса через площадку, вектор нормали к которой направлен по  $\vec{x}_{0j}$ . Поэтому выражение для проекции  $\Pi_{ij}$  является тензором:

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij} \quad (4.9)$$

Девять величин  $\Pi_{ij}$  образуют тензор (симметричный), который называется тензором потока импульса. Запишем разные выражения для вектора потока импульса и разные выражения для закона сохранения импульса

#### 1. Поток импульса

$$[\vec{\Pi}_i]_n = (\vec{\Pi}_i \cdot \vec{n}) = \rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j \quad (4.10)$$

Для идеальной жидкости, где  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} &= \rho v_i v_j + p\delta_{ij} \\ [\vec{\Pi}_i]_n &= \rho v_i v_n + pn_i \end{aligned}$$

#### 2. Закон сохранения импульса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho v_i dV = - \iint_{\Sigma} (\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j) dS + \int_V F_i dV \quad (4.11)$$

В векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \vec{v} dV \right) = - \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} v_n - \sigma_{ij} n_j \vec{x}_{0i}) dS + \int_V \vec{F} dV$$

с учетом определения  $\sigma_{ij} n_j \vec{x}_{0i} = \vec{\sigma}_n$  имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \vec{v} dV \right) = - \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n) dS + \int_V \vec{F} dV \quad (4.12)$$

Для идеальной жидкости в векторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_V \rho \vec{v} dV \right) = - \iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}) dS + \int_V \vec{F} dV \quad (4.13)$$

Для стационарного течения жидкости в отсутствие внешних сил имеем:

$$\iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n) dS = 0 \quad (4.14)$$

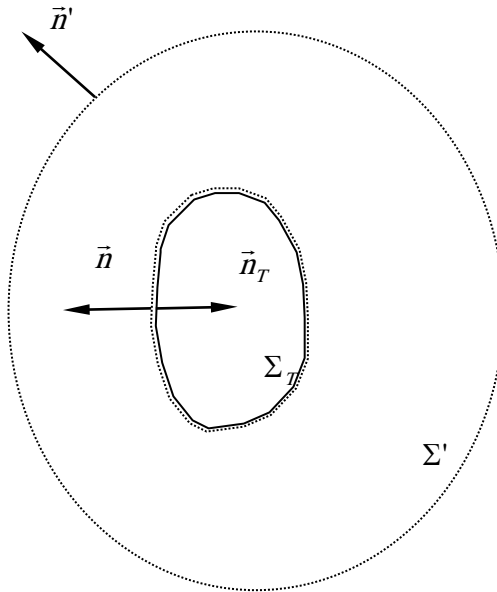
Или для идеальной жидкости:

$$\iint_{\Sigma} (\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}) dS = 0 \quad (4.15)$$

Эти интегралы используются для вычисления сил, действующих на поверхности твердых тел. Соответствующий метод называется методом контрольных поверхностей

#### 4.3 Метод контрольных поверхностей.

Пусть в жидкости имеется покоящееся твердое тело. Нужно найти силу, действующую на тело, если известно, что поток жидкости стационарный. Прежде всего выбирают так называемую контрольную поверхность, одна из частей которой прилегает к поверхности тела, а другие части выбираются из соображений удобства. Тогда запишем закон сохранения импульса для замкнутой поверхности  $\Sigma_T + \Sigma'$



$$\oint_{\Sigma_T + \Sigma'} (\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n) dS = 0.$$

На поверхности твердого тела  $v_n = 0$ , т.е. имеем:

$$\iint_{\Sigma_T} (-\vec{\sigma}_n) dS + \iint_{\Sigma'} (\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n) dS = 0; \quad (4.16)$$

Но сила, действующая на тело со стороны жидкости, по определению  $\vec{\sigma}_n$  и по третьему закону Ньютона  $\vec{F} = \iint_{\Sigma} (-\vec{\sigma}_n) dS$ , тогда из (4.16) следу-

ет:

$$\vec{F} = - \iint_{\Sigma'} (\rho v_n \vec{v} - \vec{\sigma}_n) dS. \quad (4.17)$$

Рис.

### 3. Закон сохранения энергии.

Запишем закон сохранения полной энергии (ср.2.25):

$$\rho \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) \right] = F_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} v_i) + q + \text{div} \vec{Q}^{(e)} + q^{**} \quad (4.18)$$

Прибавляя к левой части (4.18) равную нулю комбинацию

$$\left( \frac{v^2}{2} + u \right) \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_j) \right) = 0,$$

имеем закон сохранения энергии в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) \right) + \text{div} \left( \rho \vec{v} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) - \sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j} - \vec{Q}^{(e)} \right) = (F_i v_i + q + q^{**}) \quad (4.19)$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему  $V$  окруженному поверхностью  $\Sigma$ , имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV = & - \oint_{\Sigma} \left( \rho v_n \left( \frac{v^2}{2} + u \right) - \sigma_{ij} n_j v_i \right) dS + \int_V F_i v_i dV + \\ & + \int_V (q^e + \text{div} \vec{Q}^{(e)}) dV + \int_V q^{**} dV \quad (4.20) \end{aligned}$$

Если нет внешних объемных сил ( $\vec{F}_i = 0$ ) и отсутствует приток тепла, также других видов энергии ( $q^e = \vec{Q}^e = q^{**} = 0$ ), то из (4.20) следует, что:



$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV = - \oint_{\Sigma} \left( \rho v_n \left( \frac{v^2}{2} + u \right) - [\vec{\sigma}_n]_i v_i \right) dS \quad (4.21)$$

Таким образом, изменение энергии сплошной среды в объеме  $V$  равно потоку вектора

$$\vec{W} = \rho \vec{v} \left( \frac{v^2}{2} + u \right) - \sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j} \quad (4.22)$$

Этот вектор называется вектором потока энергии. Для идеальной жидкости, где  $\sigma_{ij} = -p \delta_{ij}$

$$\vec{W} = \vec{v} \left( \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + p \right)$$

Видно, что приток энергии в объем происходит не только за счет переноса энергии с потоком сплошной среды как “примеси”, но и за счет работы поверхностных сил (в идеальной жидкости — за счет работы сил давления).

#### 4.4. Закон сохранения энергии в стационарном потоке идеальной жидкости.

Будем рассматривать потенциальные объемные силы, т.е.  $\vec{F} = -\rho \nabla \varphi$

тогда  $F_i v_i = (-\rho \vec{v} \nabla \varphi) = -\text{div} \rho \vec{v} \varphi + \varphi \text{div}(\rho \vec{v})$ .

Для стационарного потока  $\text{div} \rho \vec{v} = 0$ , т.е.  $(\vec{F} \cdot \vec{v}) = -\text{div}(\rho \vec{v} \varphi)$

Тогда закон сохранения энергии (4.20) примет вид:

$$\oint_{\Sigma} v_n \left[ \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + p + \rho \varphi \right] dS = \int_V (q + q^{**}) dV \quad (4.23)$$

Применим эту формулу к трубке тока малой толщины, имеем:

$$-S_1 V_1 \left[ \rho_1 \left( \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) + p_1 + \rho_1 \varphi_1 \right] + S_2 V_2 \left[ \rho_1 \left( \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) + p_2 + \rho_2 \varphi_2 \right] = Q \quad (4.24)$$

Учитывая, что в тонкой трубке  $dV = S(l)dl$  (где  $S(l)$  - площадь поперечного сечения трубки тока), получим для объемных источников энергии  $Q$ :

$$Q = \int_{l_1}^{l_2} (q + q^{**}) S(l) dl;$$

Примем во внимание закон сохранения потока массы для узкой трубки тока:  $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S$ , имеем из (4.24):

$$\left( \left( \frac{v_2^2}{2} + u_2 \right) + \frac{p_2}{\rho_2} + \varphi_2 \right) - \left( \left( \frac{v_1^2}{2} + u_1 \right) + \frac{p_1}{\rho_1} + \varphi_1 \right) = \frac{Q}{\rho v S} \quad (4.25)$$

Для адиабатического процесса  $Q = 0$  и закон сохранения энергии (4.25) принимает вид:

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const} \quad (4.26)$$

Устремляя толщину трубки к 0, имеем, что на линии тока для адиабатического процесса сохраняется эта величина.

Сравним (4.26) с формулой Бернулли: закон Бернулли утверждает, что на линии тока сохраняется величина:

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} + \varphi = \text{Const}(L) \quad (4.27)$$

где  $P(p, L) = \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)}$  — функция давления.

Следует подчеркнуть, что этот интеграл отличается от (4.26), соответствующего закону сохранения энергии. Сравнивая интегралы (4.26) и (4.27), можно видеть, что при адиабатическом процессе, когда функция давления выражается через внутреннюю энергию и давление в виде [ ]:

$$P(p, L) = u + p / \rho$$

из закона сохранения потока энергии следует выражение для функции давления. Но еще раз подчеркнем, что формула Бернулли и закон сохранения потока энергии — это два разных интеграла движения сплошной среды.

#### 4.5. Одномерное течение идеального газа

Одномерным называется такое течение газа, при котором скорость имеет единственную компоненту  $v_x$ , а все гидродинамические и термодинамические поля зависят от единственной координаты  $x$ . Мы увидим, что довольно много задач могут быть рассмотрено в этом приближении. Для приближенных расчетов газовых потоков по трубам во многих случаях можно воспользоваться следующей упрощенной одномерной стационарной схемой

Прежде всего запишем законы сохранения для тонких трубок. Пусть  $x$  — координата вдоль линии тока в центре этой трубки.

1. Закон сохранения потока массы ( $\rho v S$ ) вдоль трубки тока. Продифференцируем по  $x$  соответствующий закон (4.5):

$$\frac{d}{dx}(\rho v S) = 0 \quad (4.29)$$

2. Поскольку вдоль линии тока справедлива формула Бернулли:  $\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp'}{\rho(p', L)} + \varphi = C(L)$

, то после ее дифференцирования по  $x$  имеем:

$$v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad (4.30)$$

3. Из закона сохранения потока энергии вдоль трубки тока

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi \Big|_{x_0}^x = \frac{1}{\rho S v} \int_{x_0}^x q S(l) dl \quad \text{после дифференцирования по } x \text{ имеем}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = \frac{q + q^{**}}{\rho v} \quad (4.31)$$

Добавляя сюда уравнение состояния  $u = u(p, \rho)$ , можно решать задачи о течении газа по тонким трубкам при заданных источника тепла и потенциалах. Эти законы можно применять при решении задач о течении газа и жидкости по трубам переменного сечения, при

расчете сопел и т.п. Выясним, когда можно применять законы, сформулированные для тонких трубок тока к изучению течения жидкости и газа по трубам конечного диаметра.

#### 4.4.1 Одномерное течение сжимаемого газа по трубам конечной толщины.

Пусть характерный масштаб изменения всех полей и диаметра трубы в продольном направлении равен  $L_{||}$ , а характерный поперечный масштаб трубы -  $L_{\perp}$  (это будет и поперечный масштаб всех полей). Пусть  $L_{||} \gg L_{\perp}$ . Из уравнения сохранения массы для стационарного течения следует, что,

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0;$$

Из этого уравнения нетрудно получить оценку

$$\frac{\rho v_{||}}{L_{||}} \sim \frac{\rho v_{\perp}}{L_{\perp}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{v_{||}}{v_{\perp}} = \frac{L_{||}}{L_{\perp}} \gg 1.$$

Запишем уравнение Эйлера для стационарного течения

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{F}.$$

Пусть  $\vec{F} = 0$ . Проекция уравнения на продольное направление:

$$v_{||} \frac{\partial v_{||}}{\partial x_{||}} + v_{\perp} \frac{\partial v_{||}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{||}} \frac{1}{\rho} = 0. \quad (4.32)$$

На поперечное направление

$$v_{||} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{||}} + v_{\perp} \frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{\perp}} \frac{1}{\rho} = 0. \quad (4.33)$$

Покажем, что существует такое решение, которое можно представить в виде

$p = p(x_{||}) + p_1(x_{||}, x_{\perp})$ , где  $p_1 \ll p$ .

Подставим  $p$  в уравнение (4.32), получим оценку:

$$\frac{v_{||} v_{\perp}}{L_{||}} + \frac{v_{\perp}^2}{L_{\perp}} \sim \frac{p_1}{L_{\perp}} \rho, \quad \text{которая с учетом уравнения непрерывности} \quad v_{||} \sim V_{\perp} \frac{L_{||}}{L_{\perp}}, \quad \text{примет}$$

$$\text{вид} \quad \frac{p_1}{\rho L_{\perp}} \sim \frac{v_{\perp}^2}{L_{\perp}}, \quad \text{т.е.} \quad p_1 \sim \rho v_{\perp}^2.$$

Подставим в уравнение оценочное значение давления (4.32)

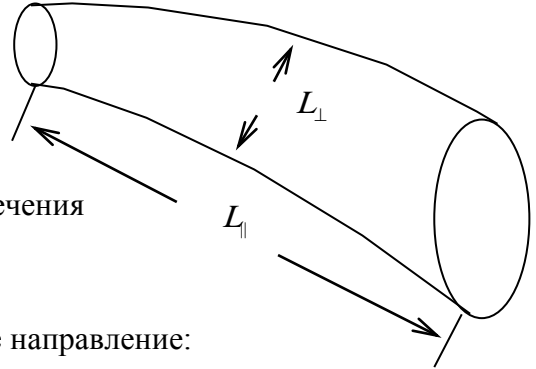
$$\frac{v_{||}^2}{L_{||}} + v_{\perp} \frac{v_{||}}{L_{\perp}} + \frac{p}{\rho L_{||}} = 0, \quad \text{т.е.} \quad p \sim \rho v_{||}^2, \quad \text{поскольку} \quad v_{\perp} \ll v_{||}, \quad \text{то} \quad p_1 \ll p,$$

$$\frac{p_1}{p} \sim \left( \frac{L_{\perp}}{L_{||}} \right)^2. \quad \text{Значит, с точностью до малых величин} \sim \left( \frac{L_{\perp}}{L_{||}} \right)^2 \quad \text{можно считать, что } p \text{ зави-}$$

сит только от продольной координаты  $x$ . Но если  $p$  зависит только от  $x$ , т.е. сила зависит только от  $x$ , то можно считать, что  $v_{||}$  зависит только от  $x$ , с точностью до малых  $\sim (L/L_{||})^2$ . Во всяком случае такое решение существует. Получается, что по сечению трубки  $v$  постоянно,  $p$  — постоянно. Значит из закона сохранения массы следует, что и  $\rho$  постоянно. Т.е. мы получаем, что для трубки конечной толщины применимо уравнение сохранения потока массы, полученное для тонкой трубки:

$$d/dx (\rho v S) = 0 \quad (4.33)$$

а также на любой линии тока (а они все одинаковы) справедливо соотношение, вытекающее из закона Бернулли и закона сохранения энергии для одномерного движения



$$v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad (4.34)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi \right) = q \quad (4.35)$$

Чтобы система была замкнута, необходимо включить сюда еще уравнение состояния в виде, соответствующем, например, двухпараметрическим средам, которым относится идеальная жидкость или газ:

$$u = u(p, \rho)$$

### Задача об истечении газа из сосуда

Рассмотрим задачу об истечении газа из сосуда, в котором поддерживается давление  $p_0$ , а плотность газа  $\rho_0$ . Истечение газа происходит по трубке (соплу) переменного сечения  $S(x)$ . Пусть  $S(x)$  монотонно убывает. Задача состоит в том, чтобы найти скорость истечения газа из трубки и распределение параметров газа (давления, плотности, скорости) по ее длине.

Выберем линию тока, проходящую из глубины сосуда, где  $p = p_0$ ,  $v = 0$  через сопло. Применим систему уравнений для течения жидкости вдоль линии тока. Поскольку внешние массовые силы и источники тепла отсутствуют ( $\varphi = 0$ ,  $q = 0$ ), то законы течения газа по тонкой трубке примут вид:

Сохранение потока импульса

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

Сохранение потока энергии

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) = 0$$

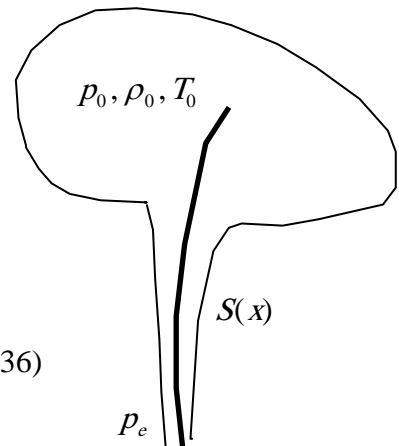
Считаем, газ совершенный, тогда уравнение состояния

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT; \text{ При этом } \frac{c_v}{\mu} T = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho} \quad (4.36)$$

Эти уравнения справедливы на линии тока.

Начиная с некоторого  $x$  на выбранной линии тока, которая находится внутри трубки, течение газа можно считать одномерным и добавить закон сохранения потока массы в виде

$$d/dx (\rho v S(x)) = 0 \quad (4.37)$$



Чтобы решить задачу, надо совместно решать систему (4.34-4.37). Исключая из уравнений (4.34) и (4.35)  $v^2$ , с учетом уравнения состояния мы получим уравнение адиабаты для совершенного газа. При постоянной удельной теплоемкости  $c_v = \text{const}$  имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( - \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + \left( \frac{c_v}{R} + 1 \right) \frac{p}{\rho} \right) &= 0 \\ - \frac{dp}{\rho} + \left( \frac{c_v}{R} + 1 \right) \frac{dp}{\rho} - \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho^2} d\rho &= 0 \end{aligned}$$

Отсюда  $\frac{c_v dp}{p} = \frac{c_p}{\rho} d\rho$ ;  $p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$ , где  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ .

Получили уравнение адиабаты.

Подставляем полученную связь в (4.34) или в (4.36), получим связь скорости с давлением

$$\frac{v^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma}} = const$$

Интегрирование дает

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} = const$$

Константу находим из условия, что в глубине сосуда на линии тока  $p = p_0$ ,  $\rho = \rho_0$ ,  $v = 0$  т.е.

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)} \quad (4.38(a))$$

Подставляя сюда  $\rho$  как функцию  $p$ , получим зависимость скорости течения газа от давления

$$v = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (4.38)$$

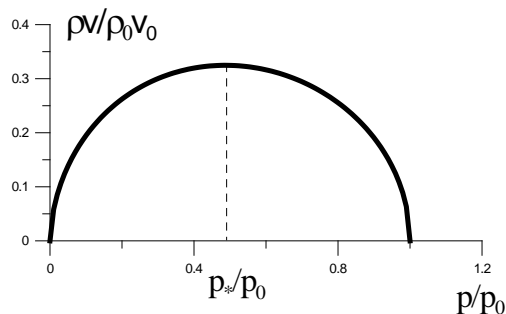
Заметим, что в силу стационарности течения  $p_0$ ,  $\rho_0$  в (4.37) и в уравнении адиабаты одни и те же. Чтобы получить значение скорости на выходе из сопла, приравняем значение  $p$  в (4.37), равным  $p = p_e$ , а при произвольном  $p_e < p < p_0$  получим значения скорости вдоль трубки. Казалось бы, задача почти решена. Надо найти только распределение всех величин по трубке при заданной зависимости  $S(x)$  — зависимости сечения сопла от  $x$ . Для этого проинтегрируем уравнение (4.37), так что

$$\rho v S(x) = Q \quad (4.39)$$

,где  $Q$ -определяется граничными условиями,  $S(x)$  — заданная убывающая функция по условию задачи,  $\rho v = \frac{Q}{S(x)}$  — растущая функция. Найдем зависимость  $\rho v$  от  $p$ ;  $v$  определяется из (4.38);  $\rho = \rho_0 (p/p_0)^{1/\gamma}$  — уравнением адиабаты. Тогда

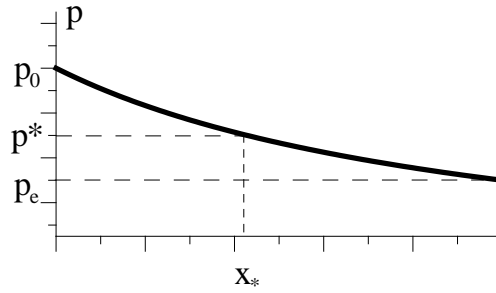
$$\rho v = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \quad (4.40)$$

Построим график функции  $\rho v(p)/\rho_0 v_0$ , где  $v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma - 1)}}$



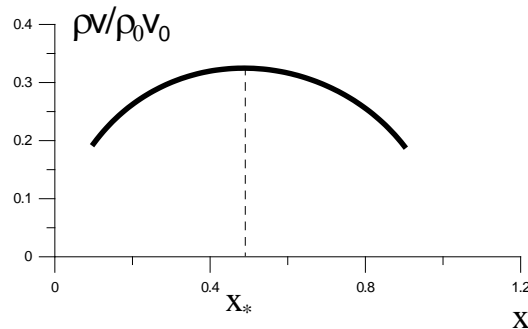
**Рис.**

Обсудим возможность реализации этой зависимости. Давление вдоль трубки должно монотонно падает от  $p_0$  до  $p_e$



**Рис.**

Но тогда  $\rho v(x)$  имеет немонотонный характер:



**Рис.**

Значит, при монотонной зависимости  $S(x)$  условие  $\rho v S(x) = Q = \text{const.}$  не может быть выполнено, если  $p_e < p^*$ , где  $p^*$  — точка максимума функции  $\rho v(p)$ . Это давление называется критическим.

Определим эту точку максимума:

$$d / dp [\rho v(p)] = 0$$

Обозначим  $y = p / p_0$

Тогда надо найти максимум функции:

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{\gamma} y_*^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma} y_*^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \quad (4.41),$$

где  $f(y) = y^{2/\gamma} (1 - y^{(\gamma-1)/\gamma})$ ,

Отсюда для координаты имеем  $y_*^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma+1}$ , при этом давление и плотность равны:

$$p_* = p_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_0 \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.42)$$

Скорость потока в точке максимума  $\rho v$  найдем из уравнения Бернулли:

$$\frac{v_*^2}{2} + \frac{\gamma p_*}{(\gamma-1)\rho_*} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)} \quad (4.43)$$

Подставляя  $p^*$  и  $\rho^*$ , из (4.42) получим:

$$v_*^2 = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)} \left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right) = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(1+\gamma)} \quad (4.44)$$

Заметим, что при  $p = p^*$ ,  $\rho = \rho^*$  скорость звука принимает значение:

$$c_*^2 = \frac{\gamma p_*}{\rho_*} = v_*^2 \quad (4.45)$$

т.е. в критической точке скорость потока равна скорости звука.

Заметим, что параметры потока в критической точке  $p^*$ ,  $\rho^*$ ,  $c^*$  однозначно связаны с параметрами газа на линии тока в точке, где газ покоится:  $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $c_0$  — параметры торможения. Действительно,

$$\sqrt{\frac{p_*}{\rho_*}} = c_* = c_0 \sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \quad (4.46)$$

Итак, соблюдение условия  $\rho v S(x) = \text{const}$  возможно при монотонной зависимости  $S(x)$ , только если давление на выходе трубки  $p_e \geq p^*$  (критическое давление). Когда  $p_e = p^*$ , то скорость газа в выходном сечении равна скорости звука  $c^*$ . Т.е. ,если мы снижаем выходное давление от значения  $p_0$  до  $p^*$ , то скорость газа в выходном сечении трубки монотонно растет от 0 до  $c^*$ . Что будет, если мы теперь будем дальше понижать давление на выходе из трубки? Будем рассуждать. Газ выходит из трубки со скоростью звука. Уменьшим давление, т.е. создадим возмущение давления. Чтобы газ внутри трубки “узнал”, что давление снаружи понизилось, необходимо, чтобы возмущения давления распространились вверх по потоку. Но они распространяются со скоростью звука  $c^*$ , т.е. возмущения не смогут подняться вверх по потоку, и газ “не узнает”, что давление снаружи изменилось. На выходе внутри трубки давление так и останется  $p^*$ , а скорость  $v = c^*$ , а плотность  $\rho^*$ . Таким образом, зависимость плотности потока газа от давления вне сосуда  $p_e$  будет выглядеть следующим образом:

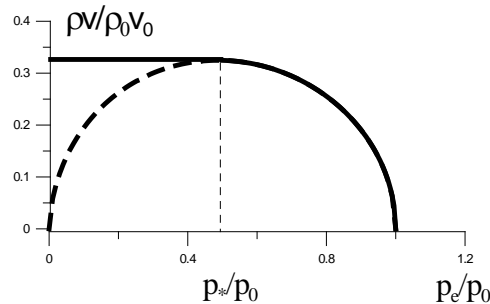


Рис.

## Лекция 5

### 5.1. Сопло Лавала

Как все-таки добиться того, чтобы газ в сосуде двигался со сверхзвуковой скоростью? и выжимал из сосуда со сверхзвуковой скоростью? Из формулы для  $v(p)$  ясно, что надо, чтобы  $p_e$  было меньше  $p^*$ . Но этого мало, надо добиться сохранения  $\rho v S(x)$  вдоль трубы. Поскольку зависимость  $\rho v(p)$  немонотонная, то ясно, что этого можно добиться, только если зависимость  $S(x)$  также будет немонотонной. Такое сопло с немонотонной зависимостью  $S(x)$  называют соплом Лавала. В нем действительно удастся получить сверхзвуковой поток.

Рассмотрим задачу о течении сжимаемого газа по трубе переменного сечения более подробно. Итак, пусть задано  $S(x)$ . Внешние силы и источники тепла отсутствуют. Уравнение движения жидкости по трубе (они же на трубке тока):

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho v S(x)) = 0 \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} \frac{1}{\rho} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) = 0 \\ p = p(\rho, \bar{s}) \end{cases} \quad (5.1)$$

Здесь  $x$  – координата вдоль трубы в направлении потока.

Из последнего уравнения, с использованием основного термодинамического тождества

$$\frac{du}{dx} = T \frac{d\bar{s}}{dx} + \frac{p}{\rho^2} \frac{dp}{dx}; \quad (5.2)$$

имеем:

$$v \frac{dv}{dx} + T \frac{d\bar{s}}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0; \quad (5.3)$$

Отсюда с учетом второго уравнения в системе (5.1) получим  $\frac{d\bar{s}}{dx} = 0$ .

Но тогда:  $\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial \rho} \Big|_{\bar{s}} \frac{d\rho}{dx} + \frac{\partial p}{\partial \bar{s}} \Big|_{\rho} \frac{d\bar{s}}{dx} = c^2 \frac{d\rho}{dx}$

Тогда 1-е и 2-е уравнения системы (5.1) принимают вид:

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dx} \frac{1}{\rho} + \frac{dv}{dx} \frac{1}{v} + \frac{dS}{dx} \frac{1}{S} = 0 \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{c^2}{\rho} \frac{d\rho}{dx} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

Исключая отсюда  $d\rho/dx$ , получим соотношение, связывающее изменение сечения сопла с изменением скорости вдоль него:

$$\frac{1}{S} \frac{dS}{dx} = \frac{v^2 - c^2}{c^2 v} \frac{dv}{dx} \quad (5.4)$$

Определим, при каких условиях поток ускоряется, т.е.  $dv/dx > 0$ .



При  $v < c$  (в дозвуковом потоке)  $\frac{dv}{dx} > 0$  при  $dS/dx < 0$ , т.е. сопло должно сужаться. При  $v > c$  (сверхзвуковой поток)  $\frac{dv}{dx} > 0$   $dS/dx > 0$ , т.е. сопло должно расширяться.

Какой это имеет физический смысл? Из уравнения Эйлера следует, что

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho v} \frac{dp}{dx}$$

т.е. для ускорения потока ( $dv/dx > 0$ ) нужен отрицательный градиент давления  $dp/dx < 0$ . В очень медленных потоках, когда  $v \ll c$ , и газ можно считать несжимаемым, скорость газа при уменьшении толщины трубки увеличивается (это следует из сохранения массы), а давление падает (по формуле Бернулли). При большой скорости потока ( $v$  порядка  $c$ ) надо учитывать сжимаемость газа. Газ с большой скоростью поступает в узкую трубку, при этом необходимо учитывать эффект адиабатического сжатия, при котором давление растет. Возникает конкуренция эффектов гидродинамического понижения давления и адиабатического повышения. При  $v = c$  эти эффекты компенсируют друг друга. При  $v > c$  более сильным становится эффект адиабатического сжатия, поэтому при сужении трубки сверхзвуковой поток замедляется. Чтобы он ускорился, надо расширить трубку, тогда за счет понижения давления при адиабатическом расширении поток будет ускоряться.

Из этих рассуждений ясно, что для того, чтобы получить из дозвукового потока сверхзвуковой надо, чтобы газ двигался по трубке, которая сначала сужается и разгоняет его до скорости звука, а затем расширяется и разгоняет его дальше. При этом все величины: сечение трубки, давление и т.п. должны быть согласованы. Тогда течение газа будет стационарным.

Итак, качественно мы выяснили, как должно выглядеть сопло Лаваля. Рассмотрим как количественно можно рассчитать такое сопло. Пусть имеется резервуар, в котором поддерживается давление  $p_0$ , плотность  $\rho_0$  при температуре  $T_0$ , давление на выходе  $p_e$ . Из сосуда выходит трубка, площадь сечения которой  $S(x)$ . Рассмотрим, каким должен быть профиль сечения трубки  $S(x)$ , чтобы поток на выходе из него имел заданную сверхзвуковую скорость. Удобной характеристикой потока газа является число Маха

$$M = v/c$$

В дозвуковом потоке  $M < 1$ ; в сверхзвуковом  $M > 1$ . В теории сопла Лаваля принято выражать все величины как функции числа Маха. Эти формулы называются изэнтропическими. Получим их для совершенного газа. Запишем формулу Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)} \quad ;(5.5)$$

с учетом  $c^2 = \gamma p / \rho$  имеем из (5.5);

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{c_0^2}{\gamma-1} \quad (5.6)$$

Но  $v = Mc$ , отсюда имеем:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{M^2}{2}(\gamma-1)}}, \quad \text{а} \quad v = \frac{c_0 M}{\sqrt{1 + \frac{M^2}{2}(\gamma-1)}};$$

Воспользуемся тем, что

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{p/p_0}{\rho/\rho_0}$$

Тогда

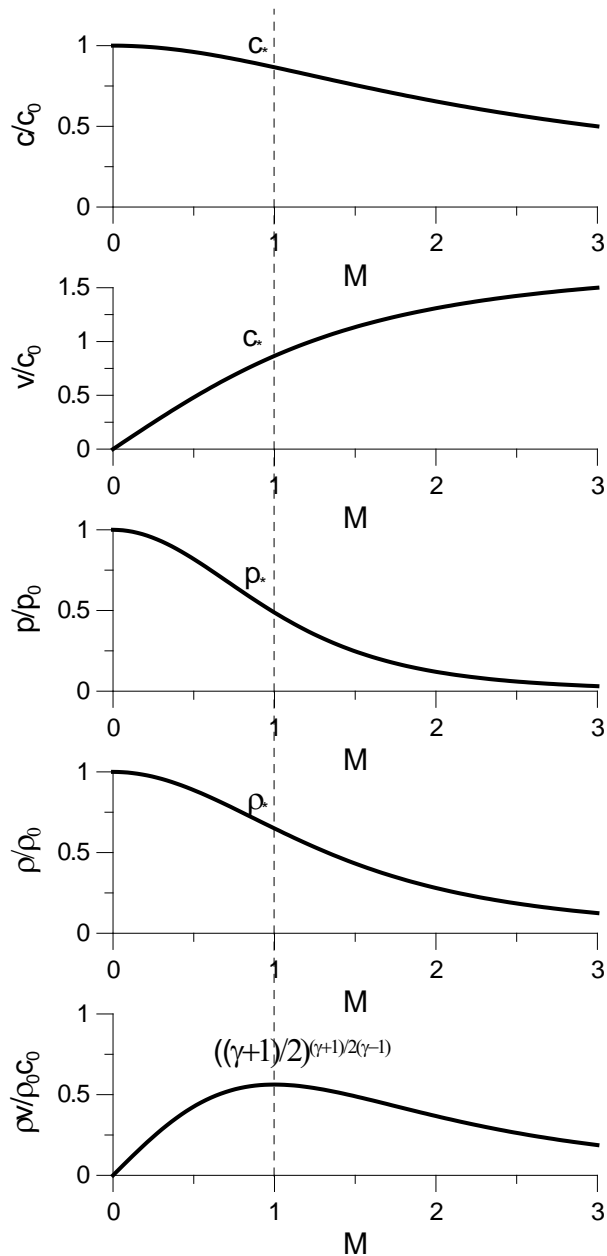
$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{1}{\left(1 + \frac{M^2}{2}(\gamma - 1)\right)} \quad (5.7)$$

С учетом уравнения адиабаты  $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$  имеем из (5.7):

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}, \quad p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}} \quad (5.8)$$

Плотность потока газа  $\rho v = \frac{\rho_0 c_0 M}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}} \quad (5.9)$

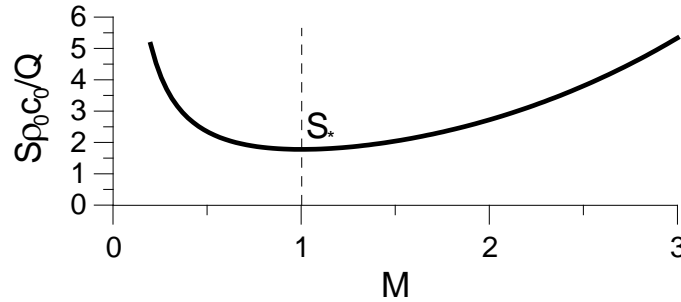
Построим эти зависимости.  $c^*$ ,  $v^*$ ,  $\rho^*$ ,  $p^*$  получаются из изэнтропических формул при  $M=1$ .



Зависимости представляют собой параметрические формулы, где параметром является число Маха  $M$ . Чтобы выполнялось условие  $\rho v S = Q$ , надо, чтобы зависимость  $S(M)$  была следующей:

$$S(M) = \frac{Q}{\rho_0 c_0 M} \left( 1 + \frac{M^2(\gamma-1)}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.10)$$

Эта зависимость немонотонная. Она имеет минимум при  $M = 1$ .



Минимальное сечение сопла Лавалья называется критическим

$$S(1) = S_* = \frac{Q}{\rho_0 c_0} \left( \frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.11)$$

Отсюда можно получить, что произвольное сечение зависит от  $M$  следующим образом:

$$S(M) = \frac{S_*}{M} \left( \frac{2}{\gamma+1} \left( 1 + \frac{M^2(\gamma-1)}{2} \right) \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (5.12)$$

Теперь ясно, как получить поток газа с заданными свойствами.

Пусть мы хотим получить  $M(x)$  — заданную зависимость и значение  $M_e$  на выходе.

Тогда по формуле  $S(M)$  мы находим  $S(x)$ , а также все характеристики потока  $p$ ,  $v$ ,  $c$ ,  $\rho$  как функции  $x$ . Они все согласованы (см. выше). Если  $S_* / S_e$  задано, то задано  $p_* / p_e$ , а поскольку  $p_*$  однозначно связано с  $p_0$ , то, значит, задано отношение  $p_e / p_0$ . Такой режим работы сопла над расчетным.

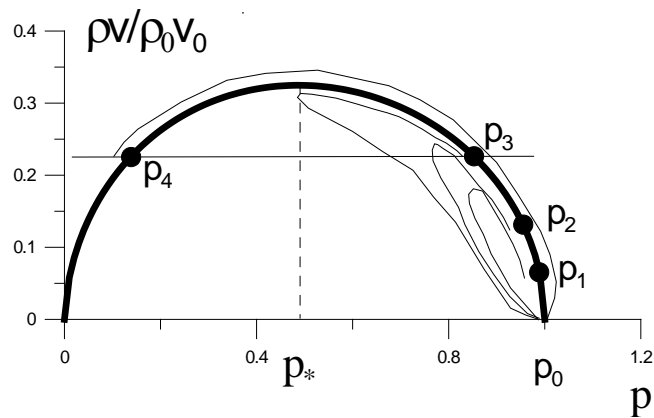
А что будет, если для заданной конфигурации сопла  $p_e$  будет другим. Подойдем к этой задаче с другой стороны. Пусть имеется сопло Лавалья с заданной формой поверхности  $S(x)$ . При этом задано давление  $p_0$  в сосуде и давление  $p_e$  на выходе из сосуда. Найдём скорость потока внутри сопла, распределение давления, плотности и т.д. Будем обозначать площадь критического сечения  $S_*$ , а площадь выходного —  $S_e$ .

Для рассмотрения удобно воспользоваться зависимостью  $\rho v(p)$ .

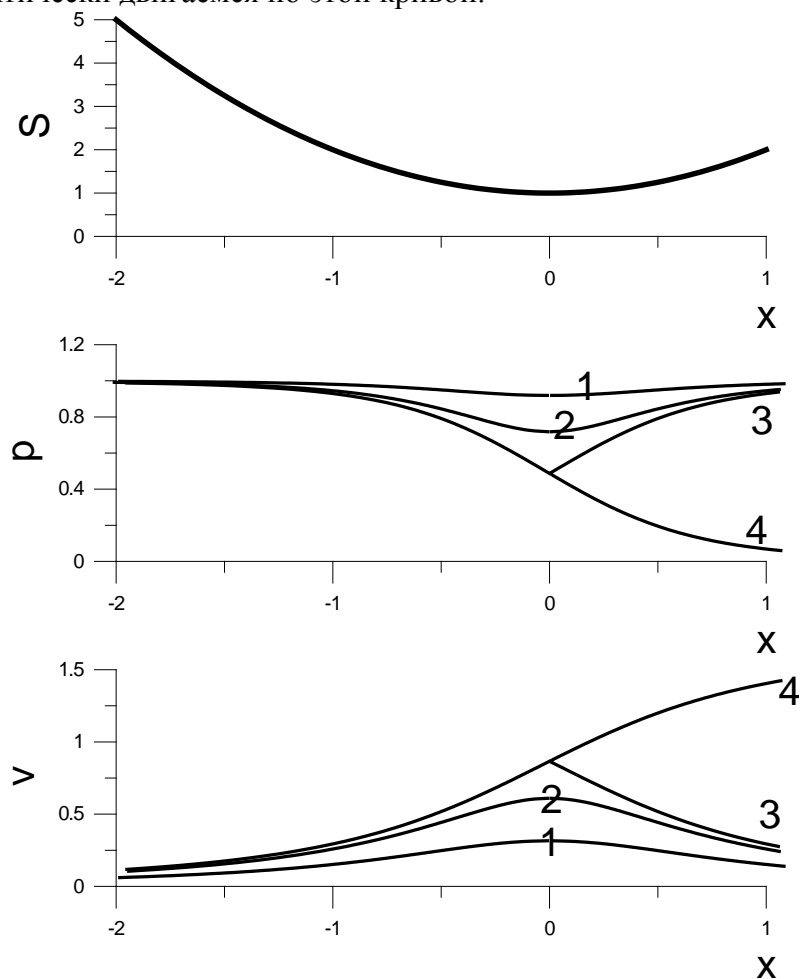
Из закона сохранения массы следует, что  $\rho v S = \text{const}$ . Поскольку  $S$  зависит от  $x$ , то  $\rho v$  также зависит от  $x$ . Мы уже получали формулу зависимости плотности потока  $\rho v$  от давления:

$$\rho v = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \left( 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/\gamma} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}}$$

Зависимость  $\rho v(p)$  имеет вид, показанный на рисунке. Максимум зависимости имеет место при  $p = p^*$ , где  $v = c^*$ .



Когда мы перемещаемся по оси сопла, то  $\rho v$  меняется пропорционально  $1/S(x)$  и  $p$  меняется, т.е. мы фактически двигаемся по этой кривой.



Рассмотрим с использованием этого течения внутри сопла качественно. Нас будут интересовать распределение давления и скорости по оси сопла и характер изменения расхода через сопло  $Q = \rho v S$  при изменении отношения  $p_e / p_0$ .

Если  $p_e = p_0$ , то  $\rho v = 0$ , газ не течет через сопло.

Если  $p_e = p_1$  (немного меньше  $p_0$ ), то начнется истечение газа. Вдоль сечения  $S$  сначала падает, потом растет,  $\rho v$  растет, потом падает. Зависимость  $v(p)$  монотонно падающая, поэтому  $v(x)$  ведет себя как показано на рис.

Если давление на выходе еще уменьшить ( $p_e = p_2$ ), то распределение давления будет аналогичным, но более резким, а скорость истечения возрастет. При этом зависимость  $v(x)$  будет качественно такой же.

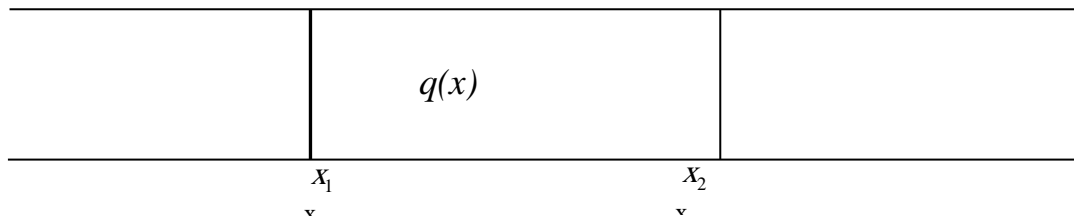
Наибольшая скорость и наименьшее давление достигаются в минимальном сечении. При этом расходе  $(\rho v)_{\max} S^*$  увеличивается при переходе от зависимости 1 к 2, т.е. при уменьшении давления на выходе.

Наконец, при некотором еще меньшем значении  $p_e$  давление в самом узком сечении станет равным критическому, и поток будет равен критическому  $\rho^* c^*(\max)$ . При этом расход будет максимальным  $\rho^* c^* S^*$ . Этого можно достичь двумя способами. Стартуя с точки 3 или с точки 4 на кривой  $p v(\rho)$ . При этом при  $p_e = p_4$  и  $p_e = p_3$   $(\rho v)_3 = (\rho v)_4$ , т.к. это поток через выходное сопло (одно и то же) при одном и том же потоке в критическом сечении. В первом случае получим дозвуковой, а во втором — сверхзвуковой режим. При  $x < x^*$  кривые  $v(x)$  и  $p(x)$  совпадают, поскольку двигаются по одной и той же ветке кривой  $p v(p)$ .

Что будет, если мы понизим выходное давление ниже  $p_3$  (но выше  $p_4$ )? В сужающейся части трубы давление упадет от  $p_0$  до  $p^*$ , а скорость потока вырастет до  $c^*$ . Далее в расширяющейся части трубы давление может расти, тогда поток тормозится. Но он должен тормозиться строго определенным образом, чтобы сохранялось  $\rho v S$ . Но тогда не выполняются изэнтропические соотношения. Т.е. должны нарушаться предположения о непрерывности, стационарности, изэнтропичности и т.п., т.е. стационарное течение газа становится невозможным. Также эти предположения становятся несправедливыми при  $p_e < p_4$ , т.е. когда давление ниже, чем расчетное сверхзвуковое. При этом в сечении могут возникать скачки давления (ударные волны), течение может стать неоднородным, нестационарным. Такие режимы называют нерасчетными. Таким образом, у сопла Лаваля имеется бесконечное множество расчетных дозвуковых режимов, один расчетный сверхзвуковой режим и бесчисленное множество нерасчетных режимов, соответствующих различным значениям входного и выходного давления.

## ЭТО можно убрать совсем

### 5.2. Тепловое сопло Лаваля



Рассмотрим течение газа к трубе постоянного сечения. Пусть на некотором участке действует источник тепла; причем мощность тепловыделения зависит от  $x$ . Как в этом случае разогнать поток до сверхзвуковых скоростей?

Запишем уравнение одномерного движения газа. Теперь  $q \neq 0$ , а  $\varphi = 0$ ,  $S = \text{const}$ .

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho v) = 0 \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) = q(x) \end{cases}$$

Рассматриваемый процесс не является изэнтропическим, поэтому

$$\frac{dp}{dx} = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s \frac{d\rho}{dx} + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho \frac{dS}{dx} = c^2 \frac{d\rho}{dx} + \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_\rho \frac{dS}{dx}$$

где  $s$  — энтропия.

С учетом основного термодинамического тождества

$$du = Tds - pdv = Tds + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

можно получить, что  $\frac{ds}{dx} = \frac{q(x)}{T}$

Заметим, что это выражение для 2-го начала термодинамики. Но тогда

$$\frac{dp}{dx} = c^2 \frac{d\rho}{dx} + \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\rho} \frac{q(x)}{T}$$

Из 1-го уравнения  $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$

Подставляя все это во 2-е уравнение, имеем

$$v \frac{dv}{dx} - \frac{c^2}{v} \frac{dv}{dx} = - \left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\rho} \frac{q(x)}{T\rho}$$

Определим знак  $\left. \frac{\partial p}{\partial s} \right|_{\rho}$

Из основного т/д тождества

$$du = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

Отсюда следует, что

$$T = \left. \frac{\partial u}{\partial S} \right|_{\rho}, \quad \text{а} \quad p = \rho^2 \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_S$$

С учетом этих тождеств, дифференцируя  $p$  по  $s$ , имеем

$$\left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{\rho} = \rho^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial S} = \rho^2 \left. \frac{\partial T}{\partial \rho} \right|_S$$

Известно, что при адиабатическом расширении газы остывают, т.е. если  $\Delta \rho < 0$  (расширяются), то  $\Delta T < 0$ , т.е.  $\left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{\rho} > 0$ . Итак,  $\frac{dv}{dx} \left( \frac{c^2 - v^2}{v} \right) = \frac{q(x)}{T\rho} \left. \frac{\partial p}{\partial S} \right|_{\rho}$

Видно, что дозвуковой поток  $v < c$  при  $q(x) > 0$  (поток ускоряется, если ему сообщать тепло и замедляется, если тепло отбирать). В сверхзвуковом потоке  $v > c$  наоборот: при  $q > 0$ ;  $dv/dx < 0$ .

Сверхзвуковой поток ускоряется, если тепло от него отбирать, и замедляется, если тепло ему сообщать.

Таким образом, можно предположить, что аналогично соплу Лавала, чтобы разогнать поток от дозвуковой скорости до сверхзвуковой, ему надо сначала тепло сообщить и разогнать его до скорости звука, а затем надо тепло отбирать. В результате поток разгонится до скорости выше скорости звука.

### Рассмотрим пример.

Рассмотрим течение совершенного газа по трубке постоянного сечения. Пусть между сечениями 1 и 2 действует источник тепла  $q(x)$ . При  $x < x_1$  параметры газа  $\rho_1, p_1, T_1, v_1$ . При  $x > x_2$  — . При  $x < x_1$  эти параметры зависят от  $\rho_2, p_2, T_2, v_2$ .

Определим, при каких условиях поток можно разогнать до сверхзвуковых скоростей. Запишем уравнения

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho v) = 0 & (1) \\ v \frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = 0 & (2) \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} \right) = q(x) & (3) \\ u = u(p, \rho) \end{cases}$$

Умножим уравнение (2) на  $\rho$ .

$$\rho v \frac{dv}{dx} + \frac{dp}{dx} = 0$$

Поскольку  $\frac{d(\rho v)}{dx} = 0$ , то это уравнение принимает вид закона сохранения потока импульса

$$\frac{d}{dx}(\rho v^2 + p) = 0$$

В совершенном газе уравнение состояния

$$u = \frac{c_v}{\mu} T = \frac{c_v}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$$

С учетом этого получим: (3) в виде

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right) = q(x)$$

Проинтегрируем эти уравнения от  $x_1$  до текущей координаты  $x_1 < x_2$ . Тогда имеем

$$\begin{cases} \rho v = \rho_1 v_1 \\ \rho v^2 + p = \rho_1 v_1^2 + p_1 \\ \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} - \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_1}{\rho_1} \right) = Q(x) \end{cases}$$

где  $Q(x) = \int_{x_1}^x q(x^2) dx$

Надо найти условие, когда поток станет сверхзвуковым, т.е.  $M > 1$ , т.е. фактически надо найти функцию  $Q(m)$ , аналогично тому, как в теории сопла Лавалю мы нашли  $S(M)$ . для этого найдем решение системы. Разделим (2) на (1)

$$v + \frac{p}{\rho v} = v_1 + \frac{p}{\rho v_1}$$

Учтем, что  $p / \rho = c^2 / \gamma$ , тогда имеем:

$$\begin{cases} v + \frac{c^2}{\gamma v} = v_1 + \frac{c_1^2}{\gamma v_1} \\ \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} - \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{c_1^2}{\gamma - 1} \right) = Q(x) \end{cases}$$

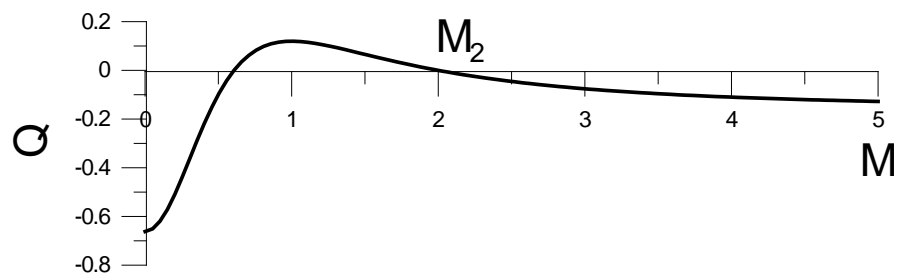
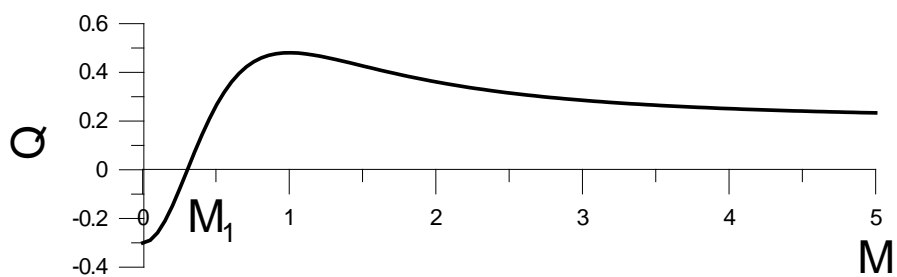
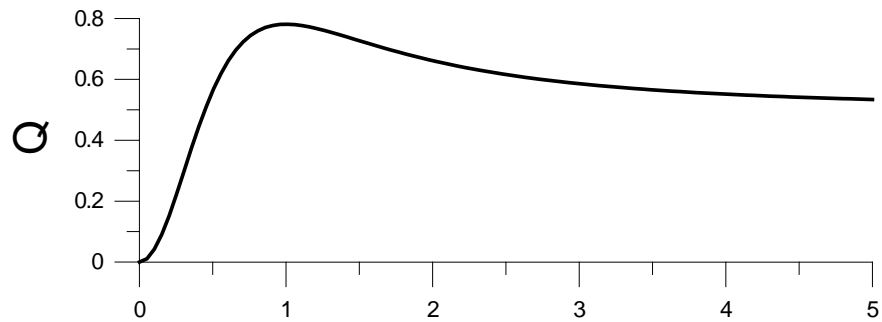
Введем число Маха  $M = v / c$ . Тогда  $v = Mc$ .

$$\begin{cases} c \left( M + \frac{1}{\gamma M} \right) = c_1 \left( M_1 + \frac{1}{\gamma M_1} \right) \\ c^2 \left( \frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma M} \right) - c_1^2 \left( \frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\gamma M_1} \right) = Q(x) \end{cases}$$

Исключая неизвестную величину  $c$ , получим уравнение, связывающее  $Q$  и  $M$ .

$$\frac{c_1^2 \left( M_1 + \frac{1}{\gamma M_1} \right)^2}{\left( M + \frac{1}{\gamma M} \right)^2} - c_1^2 \left( \frac{M_1^2}{2} + \frac{1}{\gamma M_1} \right) = Q$$

$$Q = c_1^2 \left( M_1 + \frac{1}{\gamma M_1} \right) \left( f(M) - f(M_1) \right) \quad \text{где} \quad f(M) = \frac{\frac{M^2}{2} + \frac{1}{\gamma - 1}}{\left( M + \frac{1}{\gamma M} \right)^2}$$





Функция  $f(M)$  имеет максимум при  $M = 1$ .

Чтобы получить зависимость  $Q(M)$  при заданном  $M_I$  надо из  $f(M)$  отнять  $f(M_I)$ . Проанализируем зависимость  $Q(M)$ .

1. Если  $M_I < 1$

При  $Q > 0$ , то  $M > M_I$  поток ускоряется, а при  $Q < 0$  — то  $M < M_I$  поток замедляется.

2. Если  $M_I > 1$ . При  $Q > 0$  поток замедляется, при  $Q < 0$  — ускоряется.

3. Пусть сначала  $M_I < 1$ . Пусть потоку передается некоторое количество тепла  $Q$ . Причем в некоторой точке  $x = x^*$  количество тепла, переданное потоку, достигает максимума. Больше передать потоку тепло нельзя. Нарушается применимость приближения. Если теперь тепло начать отводить, то поток будет ускоряться, и  $M$  станет больше 1.

Отметим одну необычную особенность этого потока.

Рассмотрим зависимость местной скорости звука  $c$  от числа Маха  $M$ .

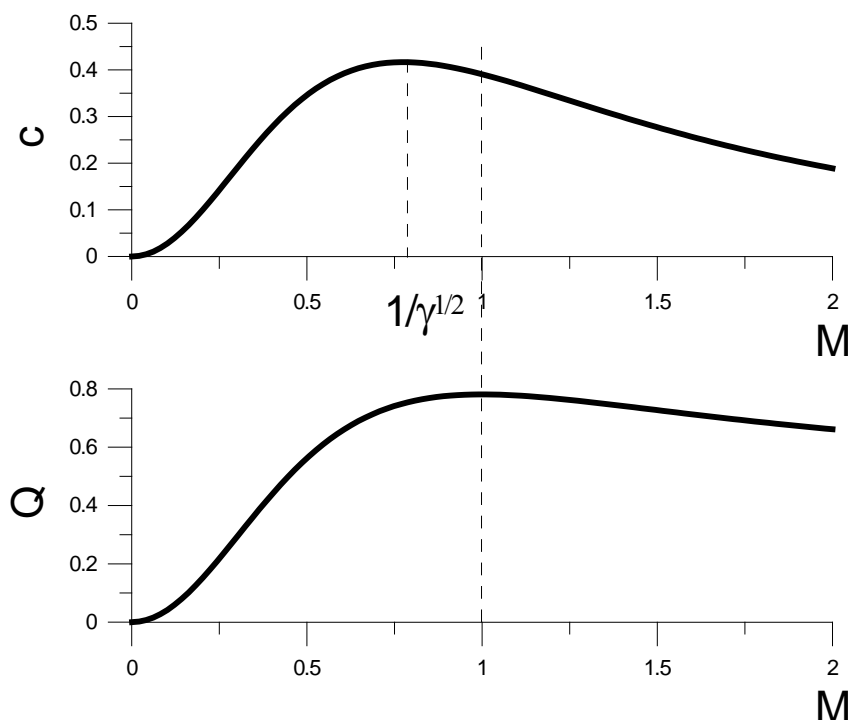
$$c = \frac{c_1 \left( M_1 + \frac{1}{\gamma M_1} \right)}{\left( M + \frac{1}{\gamma M} \right)}$$

Эта функция имеет максимум при  $M = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ .

Рассмотрим 2 зависимости  $Q(M)$  и  $c(M)$ .

Видно, что если скорость потока такова, что  $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} < M < 1$ , т.е. поток дозвуковой, то  $Q$

растет, т.е. тепло передается газу, а  $c$  падает. Но  $c \sim \sqrt{T}$ , т.е. потоку передается тепло, а его температура падает.

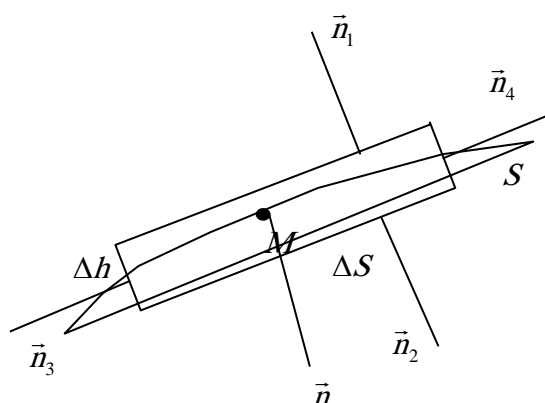


## 6. Поверхности разрыва

До сих пор при введении основных понятий и при установлении систем уравнений, связанных с моделями сплошной среды, предполагалось, что сами уравнения и определяемые ими функции непрерывны вместе со своими производными. Однако эти предположения являются довольно сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных практических задач. Действительно очень часто приходится рассматривать сплошные среды с резко различающимися свойствами (например, граница жидкость-твердое тело). Наиболее типичной является граница раздела жидкость-твердое тело: в жидкости могут существовать различные типы движений, однако на границе с твердым телом нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в ноль – жидкость не протекает сквозь твердое тело. Кроме того, в идеальных жидкостях и газах возможно существование таких движений, при которых физические величины терпят разрыв внутри одного вещества. Такие решения допускают уравнения идеальной гидродинамики. Скачки гидродинамических величин наблюдаются на некоторых поверхностях, которые называются поверхностями разрыва. Эти поверхности не привязаны к определенным частицам жидкости или газа. Они движутся с некоторыми скоростями, которые называются скоростями движения поверхности разрыва. Частицы могут, вообще говоря, переходить с одной стороны поверхности разрыва на другую. Строго говоря, поверхности разрыва имеют конечную, но очень малую толщину по сравнению со всеми характерными масштабами задачи, но эта толщина определяется уже в рамках так называемой вязкой задачи. Для описания поверхностей разрыва на них формулируют граничные условия: соотношения, связывающие гидродинамические величины по разные стороны от поверхности разрыва, где движения предполагаются непрерывными.

### 6.1. Граничные условия на разрыве

Получим выражения для этих граничных условий из уравнений гидродинамики. Пусть  $S$  — поверхность разрыва. Выберем на поверхности  $S$  точку  $M$ . Предположим, что скорость точки  $M$  в момент  $t$  была равна  $\vec{u}$ . Перейдем в инерциальную систему отсчета, которая движется со скоростью  $\vec{u}$ . Выберем индивидуальный объем  $\Delta V$  в виде параллелепипеда со сторонами  $\Delta h$  и  $\Delta l$  (см. рис. 6.1), который в момент времени  $t$  содержит внутри себя поверхность разрыва. Найдём



$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V A dV, \quad (6.1)$$

где  $\Delta S = \Delta l^2$ .

Воспользуемся 1-й вспомогательной формулой, которая имеет вид:

$$\frac{d}{dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \oint_{\Sigma} A(\vec{v}\vec{n}) dS, \quad (6.2)$$

где  $A$  — произвольная скалярная величина. Применим эту формулу к индивидуальному объему  $\Delta V$ , содержащему внутри себя поверхность разрыва

Рис. 6.1

ва, тогда имеем для первого слагаемого правой части (6.2) приближенное соотношение:

$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV \approx \Delta h \Delta S \frac{\partial A}{\partial t} \quad (6.3 \text{ a))}$$

А для второго:

$$\oiint_{\Sigma} A(\vec{v}\vec{n})dS = (A_3(\vec{v}_3\vec{n}_3) + A_4(\vec{v}_4\vec{n}_4))\Delta h\sqrt{\Delta S} + (A_1(\vec{v}_1\vec{n}_1) + A_2(\vec{v}_2\vec{n}_2))\Delta S \quad (6.3.(6))$$

Далее примем во внимание, что  $(A_3 v_{n3} + A_4 v_{n4}) \cong \frac{\partial}{\partial S}(Av)\sqrt{\Delta S}$  с учетом того, что

$(\vec{v}_1\vec{n}_1) = -(\vec{v}_1\vec{n}) = v_{1n}$ , поскольку  $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ , а  $(\vec{v}_2\vec{n}_2) = (\vec{v}_2\vec{n}) = v_{2n}$ , поскольку  $\vec{n}_2 = \vec{n}$ . Тогда получим 3-ю вспомогательную формулу, соответствующую случаю, когда интегрирование в (6.1) происходит по индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V A dV = A_2 v_{2n} - A_1 v_{1n} \quad (6.4)$$

Применим эту формулу к законам динамики сплошной среды, записанным в интегральной форме, для того чтобы получить соотношения между физическими характеристиками сплошной среды на поверхностях разрыва.

### 6/2/Непрерывность потока массы

Запишем закон сохранения массы для индивидуального объема

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0.$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Используя 3-ю вспомогательную формулу в виде (6.4), сразу имеем:

$$\rho_2 v_{n2} = \rho_1 v_{n1} \quad (6.5)$$

Это выражение представляет собой условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока массы.

### 6.3. Непрерывность потока импульса

Запишем закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS + \int F_i dV$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Применим 3-ю вспомогательную формулу (6.4). Тогда правая часть дает:

$$\rho_2 v_{2i} v_{2n} - \rho_1 v_{1i} v_{1n}.$$

Вычислим теперь  $\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS$  где  $\Sigma$  поверхность, содержащая внутри себя поверхность разрыва, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta h \rightarrow 0}} \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij2} n_{j2} + \sigma_{ij1} n_{j1} = \sigma_{ij2} n_j - \sigma_{ij2} n_j$$

Поскольку  $n_{2j} = n$ ;  $n_{1j} = -n_{1j}$  (нормаль к  $\Sigma$  со стороны 1 направлена противоположно направлению нормали к поверхности разрыва).

Примем во внимание, что  $\lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \Delta h \rightarrow 0}} \int_V F_i dV = 0$

Окончательно, граничные условия, следующие из закона сохранения импульса примут вид:

$$(\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j) \Big|_2 = (\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j) \Big|_1 \quad (6.6)$$

Примем во внимание, что  $v_n = v_j n_j$

Тогда граничное условие для импульса (6.6) примет вид:

$$(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) n_j \big|_1 = (\sigma_{ij} - \rho v_i v_j) n_j \big|_2 \quad (6.7)$$

Или вспомнив понятие тензора потока импульса, перепишем (6.7) в виде:

$$\Pi_{ij} n_j \big|_1 = \Pi_{ij} n_j \big|_2 \quad (6.8)$$

где  $\Pi_{ij}$  — тензор потока импульса.

Выберем систему координат так, что  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ , т.е.  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 0$ ;  $n_3 = 0$ . Тогда выражение для граничного условия (6.8) примет вид:

$$[\sigma_{ix} - \rho v_i v_x]_1 = [\sigma_{ix} - \rho v_i v_x]_2 \quad (6.9)$$

Индекс х( или индекс 1) обозначает нормальную компоненту.

В идеальной жидкости или газе тензор поверхностных напряжений шаровой, т.е.  $\sigma_{il} = -p \delta_{il}$ .

С учетом этого. граничные условия (6.9) можно записать в виде двух соотношений, в первое из которых входит только нормальная компонента скорости:

$$[p + \rho v_1^2]_1 = [p + \rho v_1^2]_2 \quad \text{или} \quad [p + \rho v_n^2]_1 = [p + \rho v_n^2]_2, \quad (6.10)$$

где  $v_1 \equiv v_n$  — нормальная компонента скорости, а во второе -тангенциальные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} [\rho v_1 v_2]_1 &= [\rho v_1 v_2]_2 \\ [\rho v_1 v_3]_1 &= [\rho v_1 v_3]_2 \end{aligned} \right\} \quad \text{или} \quad [\rho v_n \vec{v}_\tau]_1 = [\rho v_n \vec{v}_\tau]_2 \quad (6.11)$$

где  $\vec{v}_\tau = (v_2, v_3)$  — тангенциальная компонента скорости.

#### 6.4. Непрерывность потока энергии

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV = \int_V \rho F_i v_i dV + \oint_{\Sigma} \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_V q^{(e)} dV + \oint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Тогда, согласно третьей вспомогательной формуле:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) dV = \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) v_n \big|_1^2 = \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) v_j n_j \big|_1^2$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Sigma} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \sigma_{ij} v_i n_j \big|_1^2$$

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS = Q_n^{(e)} \big|_1^2 = Q_j^{(e)} n_j \big|_1^2$$

Таким образом, закон сохранения потока энергии принимает вид:

$$\left[ \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) v_j - \sigma_{ij} v_i - Q_j^{(e)} \right] n_j \big|_1^2 = 0 \quad (6.12)$$

Если опять выбрать систему координат так, что  $\vec{n} = (1, 0, 0)$ , то выражение для закона сохранения потока энергии примет вид:

$$\left[ \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) v_x - \varepsilon_{ix} v_i - Q_x^{(e)} \right]_1^2 = 0 \quad (6.13)$$

Предположим, что по обе стороны от поверхности разрыва находится идеальная жидкость или идеальный газ, тогда  $\varepsilon_{ix} = -p \delta_{ix}$ . Будем также предполагать, что к поверхности раздела тепло не подводится ( $Q_x^{(e)} = 0$ ), тогда получим условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока энергии в виде:

$$\left[ v_n \left( \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + p \right) \right]_1^2 = 0 \quad (6.14)$$

Здесь  $v_n \equiv v_I$  — нормальная скорость к поверхности раздела.

Итак, на разрыве должны выполняться следующие законы сохранения:

1. **Сохранение потока массы:**  $\rho v_n|_1^2 = 0$

2. **Сохранение потока импульса:**  $[\rho v_n^2 + p]_1^2 = 0$

$$\rho v_n v_{\tau 1}|_1^2 = 0$$

$$\rho v_n v_{\tau 2}|_1^2 = 0$$

3. **Сохранение потока энергии:**  $v_n \left( \rho \left( \frac{v^2}{2} + u \right) + p \right)|_1^2 = 0$

Определим граничные условия на разрыве для энтропии. Запишем второе начало термодинамики для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int \frac{q^e + q^1}{T} dV$$

Заметим, что внутри разрыва может нарушаться предположение об идеальности газа, т.е. равенстве нулю некомпенсированного терпла, т.е.  $q' \neq 0$ . Но тогда будет возникать скачок энтропии при переходе через разрыв. Как мы скоро увидим, это действительно может иметь место на поверхности разрыва. Закон сохранения энтропии лишний, достаточно уравнения состояния.

## 6.2. Типы разрывов

1. Пусть частицы не пересекают поверхность разрыва, т.е. нормальная скорость  $v_{n1} = 0$  и  $v_{n2} = 0$ ; при этом возможно  $\rho_1 \neq \rho_2$ . Тогда из непрерывности потока импульса следует  $p_1 = p_2$ , а тангенциальные компоненты скорости  $v_{\tau 12}$  произвольные и могут терпеть произвольные разрывы. Такой разрыв называется тангенциальным.

2. Пусть  $v_n \neq 0$ . Тогда закон сохранения потока массы дает  $\rho v_n|_1^2 = 0$ . Из закона сохранения потока импульса следует, что

$$\rho v_n^2 + p|_1^2 = 0 \quad (6.15)$$

а обе тангенциальные компоненты скорости непрерывны

$$v_{\tau 1}|_1^2 = 0; \quad v_{\tau 2}|_1^2 = 0 \quad (6.16)$$

Из непрерывности потока энергии

$$\rho v_n \left[ \left( \frac{v_n^2 + v_{\tau 1}^2 + v_{\tau 2}^2}{2} \right) + u \right] + \frac{p}{\rho} \Big|_1 = 0$$

следует:

$$u + \frac{v_n^2}{2} + \frac{p}{\rho} \Big|_1 = 0 \quad (6.17)$$

Такие разрывы называются ударными волнами.

Заметим, что условия на поверхности разрыва записаны в неподвижной для разрыва системе отсчета (СО). Если мы перейдем в СО, в которой поверхность разрыва движется с некоторой скоростью  $-w$ , то мы должны заменить во всех граничных условиях  $v_n$  на  $\bar{v}_n - w$ , где  $\bar{v}_n$  - нормальная скорость разрыва в новой СО.

### 6.3. Ударная адиабата

Будем рассматривать разрывы типа ударных волн. Поскольку в условия на разрыве не входит никакой скорости кроме  $v_n$ , то ее будем обозначать  $v$ , тогда получим условия на разрыве в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$$

$$\begin{aligned} \rho_1 v_1^2 + p_1 &= \rho_2 v_2^2 + p_2 \\ \frac{v_1^2}{2} + u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} &= \frac{v_2^2}{2} + u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

Уравнения (6.18), связывающие между собой параметры сжимаемого газа (жидкости) до разрыва и после его, представляют систему уравнений относительно шести величин. Зная термодинамические параметры перед разрывом (например, плотность, давление) и задаваясь какой-нибудь величиной, характеризующей ударную волну, например, давлением за фронтом волны  $p_2$ , можно вычислить все остальные величины.

Введем обозначения  $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$  — плотность потока массы и  $V_{1,2} = 1/\rho_{1,2}$  — удельные объемы. Тогда из (6.18) следует:

$$\frac{j^2}{\rho_1} + p_1 = \frac{j^2}{\rho_2} + p_2 \quad \rightarrow \quad j^2(V_1 - V_2) = p_2 - p_1$$

$$\frac{j^2}{2\rho_1^2} + \frac{p_1}{\rho_1} + u_1 = \frac{j^2}{2\rho_2^2} + \frac{p_2}{\rho_2} + u_2 \quad \rightarrow \quad j^2(V_1^2 - V_2^2) = 2[p_2 V_2 - p_1 V_1 + u_2 - u_1] \quad (6.19)$$

Откуда с учетом введенного выше обозначения плотности потока массы, имеем:

$$(V_1 + V_2)(p_2 - p_1) = 2(p_2 V_2 - p_1 V_1 + u_2 - u_1)$$

$$p_2 V_2 + p_2 V_1 - p_1 V_1 - p_1 V_2 = 2p_2 V_2 - 2p_1 V_1 + 2(u_2 - u_1)$$

$$p_2(V_1 - V_2) + p_1(V_1 - V_2) = 2(u_2 - u_1) \quad (6.20)$$

Или

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) \quad (6.21)$$

Таким образом, получено соотношение, связывающее внутреннюю энергию газа (жидкости) с соответствующими значениями давлений и объемов до и после разрыва, откуда нетрудно получить связь между значениями давлений и объемов на ударной волне. Действительно, поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость или газ, то внутренняя энергия определяется двумя параметрами, например, давлением и удельным объемом, т.е.  $u = (p, V)$ . Таким образом, мы имеем двухпараметрическое семейство кривых:

$$u(p_2, V_2) - u(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2), \quad (6.22)$$

которые называются ударными адиабатами или адиабатами Гюгонио, в отличие от адиабаты Пуассона (изоэнтропы), справедливой для адиабатического процесса в идеальном газе при непрерывном его движении. Соотношение (6.22) действительно соответствует адиабатам, поскольку не происходит передачи тепла ( $q^e = 0$ ) при переходе газа (жидкости) из состояния 1 в состояние 2. Но эти кривые отличаются от изоэнтроп, которые описывают состояние газа при непрерывном движении. Это двухпараметрическое семейство кривых: действительно, если задано  $p_1, V_1$ , то определяется кривая  $(p, V)$ , проходящая через эту точку, согласно соотношению (6.22):

$$u(p, V) - u(p_1, V_1) = \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V)$$

Эта кривая и кривая

$$u(p, V) - u(p_2, V_2) = \frac{1}{2}(p + p_2)(V_2 - V)$$

различны, но в силу равенства (6.22) пересекаются в двух точках  $(p_1, V_1)$  и  $(p_2, V_2)$ .

#### 6.4. Скорость движения разрыва

Эта скорость зависит от СО. Мы выберем СО, в которой газ до прохождения ударной волны покоится, т.е.  $\bar{v}_1$ . Если скорость разрыва  $w > 0$ , то граничные условия (6.18) примут вид:

$$\begin{aligned} -\rho_1 w &= \rho_2 (\bar{v}_2 - w) \rightarrow w(\rho_2 - \rho_1) = \rho_2 \bar{v}_2, \\ \rho_1 w^2 + p_1 &= \rho_2 (\bar{v}_2 - w)^2 + p_2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что  $w = V_1 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}$ , а  $\bar{v}_2 = w \left( 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)$

Смысл величин, входящих в формулы, следующий.

$w$  — скорость разрыва относительно невозмущенного газа;  $v_2$  — скорость газа за разрывом;  $w - v_2$  — скорость газа за разрывом относительно разрыва

$$w - w_2 = w \frac{V_2}{V_1} = V_2 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} \quad (6.22)$$

Из этих формул следует, что, если  $p_2 > p_1$ , то  $V_1 > V_2$ , или  $\rho_2 > \rho_1$ , т.е. после прохождения ударной волны растет плотность и давление. Такие ударные волны называются скачками уплотнения.

Если  $p_2 < p_1$ , то  $\rho_2 < \rho_1$ , т.е. после прохождения ударной волны плотность и давление падают. Такие ударные волны называют скачками разрежения.

Рассмотрим ударную адиабату. Исходя из только что сказанного, это убывающая функция  $p(V)$ . Рассмотрим две точки на адиабате Гюгонио  $(V_1, p_1)$  и  $(V_2, p_2)$ . Проведем секущую через эти две точки

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \quad \text{тогда} \quad w = V_1 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \quad (6.23)$$

Если знаем параметры газа до скачка, находим ударную адиабату по ее уравнению. Если задана скорость ударной волны  $w$ , по ней можно найти параметры после скачка.

### 6.5. Изменение энтропии при переходе через разрыв

Вычислим изменение энтропии газа при прохождении через разрыв. Пусть  $(V_1, p_1)$  начальное соотношение газа до прохождения ударной волны;  $(V_2, p_2)$  — после прохождения. Будем рассматривать волну сжатия, т.е.  $V_2 < V_1$ . Рассмотрим обратимый процесс, переводящий газ из состояния 1 в 2 по адиабате Гюгонио. Тогда для этого процесса можно записать основное термодинамическое тождество

$$TdS = du + pdV$$

Проинтегрируем это тождество от состояния 1 до 2

$$\int_1^2 du = u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) \quad (6.24)$$

Это можно записывать так, поскольку вн. энергия — это функция состояния. Графически  $u_2 - u_1$  — площадь трапеции  $ABCD$ .

$$\int_1^2 pdV = -S_{ABCD}$$

— площадь под кривой, задаваемой формулой адиабаты Гюгонио с обратным знаком, т.к.  $pdV$  величина отрицательная. Но тогда

$$\int_1^2 TdS = S_{TPA} - S_{ABCD}$$

Если кривая вогнутая, то если  $V_1 > V_2$  (волна сжатия), то энтропия возрастает при переходе через скачок, если  $V_1 < V_2$  (волна разрежения), то энтропия убывает. Из второго закона термодинамики ясно, что при вогнутой форме адиабаты Гюгонио (как во всех нормальных веществах) могут существовать только ударные волны сжатия.

Нужно сделать одно замечание. Когда мы получали все эти формулы, то предполагали, что никаких источников энергии, кроме теплопередачи и механической энергии нет. Если же есть другие источники, например, внешняя энергия, то возможны и ударные волны разрежения. Пример — фронт горения.

### 6.6. Адиабата Гюгонио и адиабата Пуассона

Сравним адиабату Гюгонио и адиабату Пуассона. Пусть адиабата Гюгонио определяется начальными параметрами  $(V_1, p_1)$ , адиабата Пуассона проходит через эту же точку. Уравнение адиабаты Гюгонио:

$$u(p, V) = u_1 + \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V) \quad (6.24)$$

Уравнение адиабаты Пуассона

$$S(p, V) = \text{const}, \quad (6.25)$$

где  $S$  — энтропия.



Найдем значения первых производных для адиабат Пуассона  $\left. \frac{dp}{dV} \right|_s (V_1)$  и Гюгонио  $\left. \frac{dp}{dV} \right|_G (V_1)$ .

1. Адиабата Гюгонио. Формула (6.24)) представляет собой неявное задание функции  $p(V)$ . Дифференцируя по  $V$ , имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{(V_1, p_1)} \left. \frac{dp}{dV} \right|_G + \left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_{(V_1, p_1)} = -p_1$$

отсюда

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_G (V_1) = - \frac{\rho_1 + \left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_{(p_1, V_1)}}{\left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{(p_1, V_1)}} \quad (6.25)$$

2. Адиабата Пуассона. Заметим, что в двухпараметрической среде можно представить внутреннюю энергию как

$$u = u(p, V)$$

Найдем  $\left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_s (V_1, p_1)$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_s = \left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{(V_1, p_1)} \left. \frac{dp}{dV} \right|_s (V_1) + \left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_{(V_1, p_1)}$$

Из второго закона термодинамики имеем

$$du = Tds - pdV$$

Из него следует

$$\left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_s = -p_1$$

т.е. для адиабаты Пуассона имеем

$$\left. \frac{dp}{dV} \right|_s (V_1) = \frac{-p_1 - \left. \frac{\partial u}{\partial V} \right|_{(V_1, p_1)}}{\left. \frac{\partial u}{\partial p} \right|_{(V_1, p_1)}} \quad (6.27)$$

Т.е. адиабаты Пуассона и Гюгонио, проведенные через точку  $V_1, p_1$  имеют общую касательную. Отсюда можно получить ряд следствий:

1. По определению квадрат скорости звука

$$C^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$$

Но

$$\left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s = \frac{\partial p}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial \rho} = - \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial V} = -V^2 \left. \frac{\partial p}{\partial V} \right|_s \quad (6.28)$$

Таким образом, на адиабате Пуассона

$$C_1^2 = V_1^2 \left. \frac{dp}{dV} \right|_s (V_1)$$

Следовательно, наклон касательной к адиабате Гюгонио в точке  $(V_1, p_1)$  определяет скорость звука в среде 1 (до скачка).

2. В то же время мы видели, что скорость скачка относительно среды (1) (перед скачком) равна:

$$w^2 = V^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}$$

Из рисунка видно, что  $c_1 < w$ , т.е. скачок движется со сверхзвуковой скоростью. Именно поэтому можно считать, что среда перед скачком не возмущена. Возмущения движутся со скоростью  $c$ , а скачок — со скоростью  $w > c$ .

Определим теперь скорость газа за скачком. Пусть адиабата 1 — это адиабата Гюгонио с начальной точкой  $(p_1 V_1)$ ;  $(p_2 V_2)$  — это параметры газа после скачка. Проведем адиабату 2 с начальным состоянием в точке  $(p_2 V_2)$  и продлим ее формально в нефизическую область  $V > V_2$ . Тогда она обязательно пересечет адиабату (1) в точке  $(p_1 V_1)$ . (Это следует из уравнения адиабаты Гюгонио). Но тогда скорость потока газа за разрывом относительно разрыва

$$w - \bar{v}_2 = V_2 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} = V_2 \sqrt{\tan \alpha}$$

а скорость звука за разрывом

$$C_2 = V_2 \sqrt{\tan \beta}$$

Из вогнутости адиабаты Гюгонио ясно, что  $\tan \alpha < \tan \beta$ , т.е. скорость газа относительно разрыва меньше скорости звука в среде 2.

### **Слабые разрывы**

Если перепад параметров при переходе через разрыв мал, то

$$\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \cong - \left. \frac{dp}{dV} \right|_{V_1}$$

т.е.  $w^2 = C_1^2$ , т.е. слабый разрыв движется со скоростью звука.

### **6.7. Адиабата Гюгонио совершенного газа**

В совершенном газе внутренняя энергия

$$u = \frac{C_v}{\mu} T = \frac{C_v}{R} pV = \frac{pV}{\gamma - 1}$$

Формула для адиабаты Гюгонио:

$$\frac{pV}{\gamma - 1} - \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} (p_1 + p) (V_1 - V)$$

Разделим обе части на  $p_1 V_1$

$$\left( \frac{p}{p_1} \right) \left( \frac{V}{V_1} \right) = \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{p}{p_1} + 1 \right) \left( 1 - \frac{V}{V_1} \right) + 1$$

Выразим  $p/p_1$  через  $V/V_1$ , получим

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) - \frac{V}{V_1}(\gamma - 1)}{\frac{V}{V_1}(\gamma + 1) - (\gamma - 1)}$$

## 7. Простые волны

При рассмотрении малых возмущений идеального газа мы показали, что возмущения всех гидродинамических величин удовлетворяют волновому уравнению, например, для возмущения скорости имеем так называемое волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \quad (7.1)$$

Решением этого уравнения являются так называемые бегущие волны:

$$u_1 = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t),$$

где  $f_{1,2}$  - произвольные функции

Пусть имеется решение в виде одной бегущей волны  $u_1 = f_1(x - c_0 t)$ . Но тогда все гидродинамические величины также должны быть функциями  $(x - c_0 t)$ , а это, в свою очередь, значит, что все гидродинамические величины являются функциями друг друга, т.е.  $\rho_1 = \rho(u_1)$ ;  $p_1 = p(u_1)$  и т.д. Если мы будем рассматривать возмущения конечной амплитуды, то они не будут удовлетворять такому простому уравнению (7.1), но можно попробовать поискать решение одномерных уравнений гидродинамики, удовлетворяющие условию, что все величины могут быть выражены в виде функций друг друга, т.е.  $\rho = \rho(u)$ ;  $p = p(u)$  и т.д.

Система уравнений динамики жидкости для одномерных течений имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

(7.2)

Пусть все величины являются функциями скорости  $u$ . Тогда система примет вид:

$$\frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du} \frac{d\rho}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

(7.3)

Эта система совместна, если детерминант:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\rho}{du} & \rho + u \frac{d\rho}{du} \\ 1 & u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{du} \frac{d\rho}{du} \end{vmatrix} = 0$$

т.е.

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 \frac{1}{\rho^2} \frac{dp}{d\rho} = 1 \quad (7.34)$$

$\frac{dp}{du}$  - это уравнение для  $\frac{dp}{du}$ . Оно дает возможность связать различные величины в волне. Кроме того, оно входит в уравнение для  $u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{du} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.5)$$

Или, подставляя (7.4) в (7.5), получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( u \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (7.6)$$

Поскольку все гидродинамические величины являются функциями друг друга, то уравнение (7.6) имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c(u)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (7.7)$$

где  $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$  - местная скорость звука, которая является функцией  $u$ .

Эту функцию можно легко найти. Действительно, из (7.3) следует, что:

$$\frac{du}{d\rho} = \pm \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad u = \pm \int \frac{d\rho}{\rho} \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad (7.4)$$

Отсюда можно найти  $u = u(\rho)$ ,  $p = p(\rho)$ , а, следовательно,  $c(u)$

Проделаем эту процедуру для идеального газа с постоянной теплоемкостью для которого  $p = A\rho^\gamma$ , где  $A$  – некоторая константа. Тогда из (7.4) имеем:

$$u = \pm \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{A\gamma} \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} + C_1 \quad (7.5)$$

Константу можно найти из условия отсутствия возмущений при  $\rho = \rho_0$ . Тогда из (7.5) имеем:

$$u = \pm \frac{2}{\gamma - 1} \sqrt{A\gamma} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \quad (7.6)$$

При этом скорость звука равна

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{A\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (7.7)$$

Сравнивая эти две формулы, легко видеть, что

$$C = C_0 \pm \frac{\gamma-1}{2} u \quad (7.9)$$

Итак, уравнение для  $u$  в идеальном газе принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left( \frac{\gamma+1}{2} u \pm C_0 \right) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.10)$$

Найдем теперь решение уравнения для  $u$ .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \pm c(u)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (7.11)$$

Заметим, что поскольку  $u = u(x, t)$ , нетрудно найти скорость  $\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_u$ , с которой перемещается  $u = \text{const}$ . Действительно,

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} \left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_u + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (7.12)$$

Сравнивая эти два уравнения, легко видеть, что

$$\left. \frac{\partial x}{\partial t} \right|_u = u \pm c(u) \quad (7.13)$$

Это уравнение характеристик для  $u$ . На характеристиках (7.13) значения  $u$  сохраняются. Это значит, что решение можно легко записать

$$x = x_0(u) + (u \pm cu) t \quad (7.14)$$

$x_0(u)$  определяется начальными и граничными условиями.

Полученное решение (7.14) называется простой волной. Это точное решение одномерных уравнений идеальной гидродинамики. Оно описывает изэнтропическое течение газа без потерь. Поскольку все величины являются функциями друг друга, то все гидродинамические величины сохраняются на характеристиках.

Рассмотрим качественно, как ведет себя решение (7.14). Рассмотрим волну, бегущую вправо: Для идеального газа уравнение простой волны имеет вид:

$$x = x_0(u) + \left( \frac{\gamma+1}{2} u + c_0 \right) t$$

$$u = \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1} \left( \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} \right) \rightarrow \rho = \left( \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{(\gamma-1)u}{2\sqrt{A\gamma}} \right)^{2/(\gamma-1)} \quad (7.15)$$

$\rho$  - растущая функция  $u$ .

Таким образом, с ростом колебательной скорости возмущения, возрастает и скорость распространения возмущения. В системе отсчета, распространяющейся со скоростью  $c_0$ , фронт сжатия укручается а, фронт разрежения растягивается.

При этом на фронте сжатия образуется "перехлест" (неоднозначность). Это предельное решение не имеет физического смысла, поскольку в одной точке в один момент времени не может быть 3 значения скорости. Эта неоднозначность означает, что решение в виде простой волны перестает существовать, а на фронте сжатия образуется разрыв.

Точка, в которой нарушается однозначность функции  $u(x)$  определяется из соотношения:

$$\left. \frac{\partial x}{\partial u} \right|_t = 0 \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_t = \infty \quad (7.16)$$

Для идеального газа имеем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \dot{x}_0(u) + \frac{\gamma+1}{2} t = 0 \quad t = -\frac{2\dot{x}_0(u)}{\gamma+1} \quad , \text{т.е.}$$

Надо определить, когда  $\frac{\partial u}{\partial x}$  обращается в 0 впервые, т.е. когда  $\dot{x}_0(u)$  минимально. Надо найти точку экстремума  $\ddot{x}_0(u) = 0$ , отсюда определяется  $u$ , а далее и  $t$ .

Если  $u(x)$  задано в виде импульса, то  $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_t$  максимально, а  $\frac{\partial x}{\partial u}$  минимально на краю, т.е. в точке, где  $u = 0$ . Таким образом, время образования разрыва

$$t = -\frac{2\dot{x}_0(0)}{\gamma+1} \quad .$$

### Инварианты Римана и характеристики

Сделаем ряд преобразований с уравнениями гидродинамики:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ p = p(\rho) \end{cases}$$

Подставим  $p = p(\rho)$ , с учетом  $c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_s$  имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Последнее уравнение умножим на  $\frac{c}{\rho}$  для уравнивания размерностей. Получим

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{c}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

Сложим эти уравнения и вычтем. Получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) = 0 \end{cases}$$

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{cd\rho}{\rho}$$

Введем две новые функции . В них не входят явно  $x$  и  $t$ , а только  $u$  и  $\rho$ . Тогда

$$\text{из 1-го уравнения } \frac{\partial J_+}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial J_+}{\partial x} = 0, \quad \text{а из второго } \frac{\partial J_-}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial J_-}{\partial x} = 0$$

Отсюда видно, что величина  $J_+$  сохраняется на характеристике  $\frac{dx}{dt}$ , а  $J_-$  - на характеристике  $\frac{dx}{dt} = u - c$  (они называются  $c+$  и  $c-$ ).  $J_+$  и  $J_-$  называются инвариантами Римана. Введение этих величин, по-существу, означает введение новых переменных вместо  $u$ ,  $\rho$ , например, очевидно

Для идеального газа:  $p = A\rho^\gamma$ ;  $c = \sqrt{A\gamma} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}}$

$$\int \frac{dp}{\rho c} = \int \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1} d\rho}{\sqrt{\gamma A} \rho^{\frac{\gamma+1}{2}}} = \sqrt{\gamma A} \int \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} d\rho = \sqrt{\gamma A} \frac{2}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{2c}{\gamma-1}$$

$$\gamma - 1 - \frac{\gamma + 1}{2} = \frac{2\gamma - 2 - \gamma - 1}{2}$$

$$\frac{2c}{\gamma-1} = \frac{J_+ - J_-}{2}; \quad c = \frac{J_+ - J_-}{4}(\gamma-1)$$

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2}; \quad c = \frac{J_+ - J_-}{4}(\gamma-1)$$

$$\begin{cases} u + c = \frac{\gamma+1}{4} J_+ + \frac{3-\gamma}{4} J_- \\ u - c = \frac{3-\gamma}{4} J_- + \frac{\gamma+1}{4} J_+ \end{cases}$$

Характеристики:

$$C_+ : \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma+1}{4} J_+ + \frac{3-\gamma}{4} J_-$$

$$C_- : \frac{dx}{dt} = \frac{3-\gamma}{4} J_- + \frac{\gamma+1}{4} J_+$$



(характеристики зависят только от  $J^+$  и  $J^-$  и не зависят независимо от  $x$  и  $t$ , поскольку  $u$ ,  $p$ ,  $\rho$  - функции  $J^+$  и  $J^-$ ).

Предположим, что  $J^-$  постоянно. Но тогда все гидродинамические величины являются функциями  $J^+$ , или выражаются друг через друга. Т.е. мы имеем простую волну, характеристики которой  $c^+$  - прямые линии.

Рассмотрим, как можно реализовать простую волну.

Пусть имеется поршень в трубе цилиндрического сечения, закрывает ее слева. Справа труба настолько длинная, что ее можно считать бесконечной.

При  $t = 0$  координата поршня  $x = 0$ .

Пусть в начальный момент времени поршень начинает двигаться в отрицательном направлении оси  $x$ , ускоряясь.

Рассмотрим, какое при этом возникнет движение газа. Его удобно описывать с помощью характеристик. Изобразим характеристики на плоскости  $(x, t)$ .

При  $t < 0$  (до начала движения поршня)  $u = 0$ , и характеристики представляют собой прямые  $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$ , где  $c_0$  - скорость звука в невозмущенном газе.

ОА - это характеристика  $x = c_0 t$ . Она описывает движение "головы" возмущения газа. При  $t > 0$  при движении поршня возникают возмущения в газе, которые двигаются по характеристикам, которые пересекают траекторию поршня, т.е. в момент  $\tau$  проходят через точку  $(x(\tau), \tau)$ . Т.е. пересекают траекторию поршня на плоскости  $(x, t)$ . Эти характеристики

задаются уравнениями  $\frac{dx}{dt} = u \pm c$ , где вблизи поршня  $u$  - скорость газа, которая равна скорости поршня, а  $c$  - местная скорость звука.

Из этих двух характеристик в физическом пространстве при  $t > \tau$  лежит только  $\frac{dx}{dt} = u + c$  ( $u < 0$ )  $\frac{dx}{dt} = u - c$

На поршень могут приходить возмущения по характеристикам (при  $t < \tau$ ). При этом на этих характеристиках сохраняется инвариант Римана  $J^-$ . Однако все эти характеристики начинаются на полупрямой  $x, t = 0$ . Но в начальный момент времени возмущение отсутствовало. Значит,  $J^-$  - это постоянная величина, соответствующая  $u = 0$ . Но, как мы видели, в этом случае возмущение, распространяющееся по характеристикам

$\frac{dx}{dt} = u + c$  от поршня представляет собой простую волну.

Итак, из рис. видно, что при  $x > c_0 t$  возмущений нет, а при  $x(t) < x < c_0 t$  с характеристикой  $(u + c) = dx/dt$  возмущение описывается простой волной. Эту функцию можно найти. Итак,

$\frac{dx}{dt} = u + c$ ; отсюда уравнение простой волны:

$$x = (u + c)t + x_0(u)$$

$x_0(u)$  - производная функция, определяемая движением поршня. Найдем ее:

На поршне в любой момент  $t = \tau$

$$\begin{aligned} x &= x(t) \Big|_{t=\tau} & u &= \dot{x}(t) \Big|_{t=\tau} \\ \begin{cases} x(\tau) = (u + c)\tau + x_0(u) \\ u = \dot{x}(\tau) \end{cases} \end{aligned}$$

$x(\tau)$  - известная функция,  $\dot{x}(\tau)$  - тоже.

Эта запись представляет собой задание неизвестной произвольной функции  $x_0(u)$  в параметрическом виде ( $\tau$  - параметр), т.е.

$$\begin{cases} x_0(u) = x(\tau) - (\dot{x}(\tau) + c)\tau \\ u = \dot{x}(\tau) \end{cases}$$

Пример:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -U \left( 1 - e^{-\frac{t}{T}} \right) \\ x &= -Ut - UT \left( e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) \end{aligned} \right\} \text{Закон движения поршня.}$$

$$\begin{aligned} x_0(u) &= -UT \left( e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) - U\tau - (u + c)\tau \\ u &= U \left( e^{-\frac{t}{T}} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U / U + 1 &= e^{-\frac{\tau}{T}}; & \tau &= -T \ln \left( \frac{u}{U} + 1 \right) \\ x_0(u) &= -UT + UT \ln \left( \frac{u}{U} + 1 \right) + (u + c)T \ln \left( \frac{u}{U} + 1 \right) \\ x &= (u + c)t - uT + (U + u + c)T \ln \left( \frac{u}{U} + 1 \right) \end{aligned} \quad (**)$$

Итак, при  $x > c0 \ t \ u = 0$ , при  $xn(t) < x < c0 \ t$  задается неявной формулой (\*\*)

Посмотрим, как качественно выглядит это решение. Траектория поршня при достаточно больших временах выходит на прямую  $x = UT - Ut$ . Т.е. скорость на поршне  $u = -U$ . Но тогда все характеристики, выходящие от траектории поршня, имеют одинаковый наклон

$$x = (c - U) t + x_0$$

Будем считать, что такой вид имеют характеристики, начиная от точки В (на рис.). А между точками О и В характеристики “расходятся”. Вид решения при достаточно большом  $t$ .

Переходная область растягивания.

Допустим, что закон движения поршня  $x = Ut$  при  $t > 0$ , т.е. его скорость скачком меняется от 0 до  $-U$ .

Удобно анализировать решение с помощью плоскости характеристик  $(x, t)$  (рис.)

При фиксированном  $t > 0$

$$u = \begin{cases} 0 & I; \quad x > c_0 t \\ x = x_0(u) + (c + u)t; & II \\ \end{cases} \quad \text{то есть } c_0 t < x < x_n(t)$$

Для центрированной волны (рис.)

При  $t > 0$

$$u = \begin{cases} 0 & I; \quad x > c_0 t \\ x = (c(u) + u)t; & II \quad c_0 t < x < (c(-U) - U)t \\ U & III \quad x < (c(-U) - U)t \end{cases}$$

Рассмотрим движение газа в этом случае. (рис.)

Эта картина может быть получена из предыдущей, если переходную область стянуть в точку. В переходной области лежат характеристики:

$$x = (c(u) + u)t$$

у которых  $c(-U) - U < c(u) + u < c0$ .

Поскольку характеристика проходит через начало координат, то она называется центрированной волной. В этом случае  $u$  является функцией только  $x/t$ . Это решение является автомодельным. Это частный случай простой волны.

Мы рассматривали волны разрежения, т.е. поршень выдвигался из трубы. Что будет, если поршень вдвигается в трубу.

Изобразим характеристики на плоскости  $(x, t)$ . (рис.)

Пусть скорость поршня  $u < c0$ . Поршень ускоряется, и его скорость выходит на постоянное значение  $U < c0$ . Характеристики, отходящие от траектории поршня в физическом пространстве  $dx/dt = (u + c)$ . Они имеют наклон больше, чем  $c0$ , поскольку  $c(u) > c0$  (газ сжат) и  $u > 0$ .

Это значит, что характеристики в некоторой точке пересекутся. Но в этом случае решение в виде простой волны не существует, а вместо этого образуется разрыв и ударная волна. Если скорость поршня выходит на константу, то образуется ударная волна, как мы видели ранее.

Эволюция поля скорости (рис.)

при постоянном ускорении  $x = \frac{at^2}{2}$   $u = at$   $u = \sqrt{2ax}$   
 передний край  $x = c\theta t$   
 Решение в виде простой волны существует до тех пор, пока не образуется разрыв.

Как найти инвариант Римана в гиперболической системе 2-го порядка в общем виде?  
 Гиперболическая система 2-го порядка имеет вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0; \quad i, j = 1, 2; \quad a_{ij} = a_{ij}(u_1, u_2)$$

Инварианты Римана - это функции, которые сохраняются на характеристиках. Т.е. надо найти замену переменных, и ввести также функции  $u_1, u_2$ , которые бы сохранялись на характеристиках. Для системы 2-го порядка задача всегда имеет решение. Покажем это. Прежде всего найдем уравнение характеристик. Мы знаем, что переменные в простой волне распространяются по характеристикам. Найдем решение типа простой волны. Т.е.  $u_2 = u_2(u_1)$ ; тогда имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial u_i}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \\ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{22} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{отсюда} \quad \left| \begin{array}{l} 1 \\ \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \end{array} \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \\ a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial u_1} + a_{21} \end{array} \right| = 0$$

$$a_{12} \left( \frac{\partial u_2}{\partial u_1} \right)^2 + \frac{\partial u_2}{\partial u_1} (a_{11} - a_{22}) - a_{21} = 0;$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{a_{22} - a_{11} \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2a_{12}}$$

Отсюда находится

Решение существует, если  $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}a_{21} \geq 0$  - это условие того, что система гиперболическая.

### Характерстическая скорость

Найдем характеристическую скорость. Для простых волн имеем:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \left( a_{11} + a_{12} \frac{du_2}{du_1} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} + \left( a_{22} + \frac{a_{21}}{\frac{du_2}{du_1}} \right) \frac{\partial u_1}{\partial x} = 0$$

$$C = a_{11} + a_{12} \frac{du_2}{du_1} = a_{22} + \frac{a_{21}}{\frac{du_2}{du_1}} \quad (**)$$

Отсюда

По определению инвариант Римана - это функция, которая сохраняется на характеристиках, т.е.

$$\frac{\partial J}{\partial t} + C \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad \text{где} \quad J = J(u_1, u_2)$$

Значит

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} + C \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \frac{\partial J}{\partial u_2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} + C \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0$$

Но  $u_1, u_2$  удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{то есть}$$

Тогда

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} \left( (C - a_{11}) \frac{\partial u_1}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial J}{\partial u_2} \left( (C - a_{22}) \frac{\partial u_2}{\partial x} - a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = 0$$

С учетом выражения для  $c^{**}$  имеем:

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} \left( a_{12} \frac{du_2}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} - a_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \frac{\partial J}{\partial u_2} \left( \frac{\frac{a_{21}}{du_2}}{du_1} \frac{\partial u_2}{\partial x} - a_{21} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) = 0$$

Разложим на множители:

$$\left( \frac{\partial J}{\partial u_1} a_{12} - \frac{\partial J}{\partial u_2} \frac{\frac{a_{21}}{du_2}}{du_1} \right) \left( \frac{du_2}{du_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) = 0$$

Для произвольного решений (не простая волна) второе слагаемое отлично от 0, тогда получаем уравнение для определения  $J$ .

$$\frac{\partial J}{\partial u_1} a_{12} - \frac{\partial J}{\partial u_2} \frac{\frac{a_{21}}{du_2}}{du_1} = 0$$

Для уравнений газовой динамики

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} u_1 = \rho \\ a_{12} = \rho \end{array} \quad \begin{array}{l} u_2 = u \\ a_{11} = a_{12} = u \quad a_{21} = \frac{c^2}{\rho} \end{array}$$

$$\frac{du_1}{du_2} = \frac{d\rho}{du} = \pm \frac{\rho}{c}$$

Инвариант Римана:

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} \rho - \frac{\partial J}{\partial u} \frac{c^2}{\rho \left( \pm \frac{c}{\rho} \right)} = 0$$

$$\frac{\partial J}{\partial \rho} \frac{\rho}{c} \pm \frac{\partial J}{\partial u} = 0 \quad \frac{d\rho}{\rho / c} = \mp du$$

Отсюда  $J = u \pm \int \frac{cd\rho}{\rho}$  , т.е. получили выражение, совпадающее с выведенным выше.

### 8. Гидродинамика несжимаемой жидкости

Изучение неоднородных течений идеальной жидкости или газа представляет значительные трудности. Основным допущением, сыгравшим важную роль при описании практически важных задач, явилось два предположения [ ]. Во – первых , предположение о несжимаемости и , во- вторых, - об отсутствии в движущейся идеальной несжимаемой жидкости завихренности, т.е.

$\vec{\Omega} = \text{rot} \vec{v} = 0$ . Обсудим каждое из этих предположений.

По определению жидкость называется несжимаемой, если при движении сохраняется индивидуальный объем, т.е.:

$$\frac{d}{dt} \int_V dv = 0 \quad (8.1)$$

Применим первую вспомогательную формулу к (8.1):

$$\frac{d}{dt} \int_V A dv = \int_V \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \text{div} A \vec{v} \right) dv$$

В нашем случае  $A = 1$ , т.е.  $\int_V \text{div} \vec{v} = 0$ . Отсюда условие несжимаемости

принимает вид:

$$\text{div} \vec{v} = 0. \quad (8.2)$$

Из уравнения сохранения массы :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho + \rho \text{div} \vec{v} = 0;$$

с учетом (8.2) имеем:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

(8.3)

что означает, что плотность жидкой частицы сохраняется.

Система уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости примет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho = 0 \\ \text{div} \vec{v} = 0 \end{cases} \quad (8.4)$$

Условие (8.2) ( $\text{div} \vec{v} = 0$ ) играет роль уравнения состояния. Действительно, как мы только что видели, следствием этого условия является сохранение плотности индивидуальной частицы. А это означает, что  $dp/d\rho = \infty$ , т.е. скорость звука в несжимаемой жидкости бесконечна велика, а, следовательно, в этом приближении рассматриваются процессы, имеющие такие характерные масштабы по пространству  $L$ , времени  $T$  и скорости  $v$ , что  $L/T, v \ll C$ .

Теперь обратимся к системе уравнений (8.4). Для решения этой системы необходимо задать граничные и начальные условия. Рассмотрим две возможных ситуации, соответствующие двум типам граничных условий: граничные условия на разрыве между двумя несжимаемыми жидкостями и граничные условия на поверхности твердого тела.

1. Граничные условия на разрыве. В несжимаемой жидкости реализоваться только тангенциальный разрыв. Ударные волны невозможны, так как они имеют скорость больше скорости звука, а в несжимаемой жидкости эта скорость бесконечно велика. Запишем граничные условия на тангенциальном разрыве при условии, что форма границы раздела  $S(\vec{r}, t)$ , вообще говоря, неизвестна.

Граничные условия включают в себя:

1.1. кинематическое граничное условие или граничное условие непротекания:  $v_{1n}|_S = U_n|_S$ , при этом с другой стороны от разрыва выполняется соотношение  $v_{2n}|_S = U_n|_S$ , где  $U_n$  — это скорость движения границы раздела.

1.2. динамическое граничное условие:  $p_1|_S = p_2|_S$

2. Предположим теперь, что граница известна и соответствует поверхности твердого тела  $S$ , т.е.  $v_n|_S = U_n|_S$ , где  $U_n$  — нормальная проекция скорости движения твердого тела. Этого граничного условия оказывается достаточно для решения системы (8.4)

Сделаем еще одно отступление и покажем, что в несжимаемой жидкости условие потенциальности (отсутствия завихренности) может быть выполнено только в однородной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ). Запишем уравнение Эйлера:

$$\vec{v}_t + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g},$$

и предположим, что  $\text{rot } \vec{v} = 0$ . Тогда нетрудно показать, что

$$[\nabla p, \nabla \rho] = 0, \quad (8.5)$$

а следовательно  $\rho = \rho(p)$ , т.е. процесс баротропный. Но для каждой жидкой частицы  $\rho = \text{const}$ , поскольку жидкость несжимаема, т.е.

$\frac{d\rho}{dp} = 0$ , что означает  $\rho = \text{const}$  везде и, следовательно, жидкость однородна.

Теперь вновь обратимся к системе (8.4). В силу того, что для потенциального течения скорость  $\vec{v} = \nabla \varphi$ , уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (|\nabla \varphi|^2) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g} \quad (8.6)$$

Учитывая, что плотность в этом приближении постоянна, перепишем (8.6) в

виде:  $\nabla \left( \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0$ , если ось  $Z$  направлено вверх.

Но отсюда имеем:  $\varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = F(t)$ . (8.7)

Функция  $F(t)$  может быть положена равной нулю без ограничения общности, поскольку можно сделать замену переменных  $\varphi = \varphi' + \int F(t) dt$ ,



которая не влияет на поле скорости, поскольку  $\vec{v} = \nabla \varphi = \nabla \varphi'$ .

Отметим, что из (8.7) сразу можно найти давление на поверхности твердого тела.

Итак, мы получили 1-й интеграл уравнения Эйлера для потенциального движения — интеграл Коши-Лагранжа для нестационарного потенциального движения несжимаемой жидкости (см.(8.7)).

При  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  из (8.7) следует формула Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const$$

Поскольку условие несжимаемости содержит только  $\vec{v}$ , то оно дает полную кинематическую характеристику движения сплошной среды в эйлеровом описании. Отсюда ясно, что условия несжимаемости часто достаточно, чтобы определить, как происходит движение жидкости. Из уравнения сохранения массы можно найти плотности, а из уравнения Эйлера — давление.

## 8.2. Потенциальное течение несжимаемой жидкости.

Пусть движение жидкости таково, что везде  $rot \vec{v} = 0$ . Найдем решение для такого случая. Вопрос о реализации этого условия в любой другой момент времени обсудим позже.

Если  $\Omega = rot \vec{v} = 0$ , то можно ввести потенциал скорости  $\varphi$ , так что  $\vec{v} = \nabla \varphi$ .

Но тогда уравнение несжимаемости (8.3) дает :

$$\Delta \varphi = 0. \quad (8.8)$$

Таким образом, потенциал скорости есть гармоническая функция. Методы решения уравнения Лапласа хорошо известны, но надо еще задать граничные условия. Как мы уже показали, на поверхности твердого тела эти условия имеют вид :

$$v_n|_S = U_n \text{ или } \left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_S = U_n \quad (8.9)$$

При этом распределение давления по поверхности  $S$  можно найти из уравнения Эйлера. Аналогично можно задать граничные условия на границе раздела двух жидкостей, в которых движение потенциально. Эти условия примут вид:

$$\left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} \right|_S = U_n \quad p_1 = p_2 \quad (8.10)$$

$$\left. \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} \right|_S = U_n, \text{ где } p_1 \text{ и } p_2 \text{ определяются из формулы Коши-Лагранжа}$$

а  $U_n$  выражается через уравнение поверхности  $S$ .

Рассмотрим задачу об обтекании твердого тела. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скорости в жидкости, когда в ней движется твердое тело. Поскольку движение жидкости потенциально и потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (8.8) с граничным условием непротекания на

границе твердого тела  $\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = U_n$  - и условием спадания возмущений при

удалении от тела, т.е.  $\varphi=0$  при  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор системы координат, проходящей через центр тела, можно считать, что задача полностью сформулирована в некоторой лабораторной системе отсчета.

Эта задача может быть сформулирована и в системе отсчета, в которой тело покоится. В этом случае на поверхности тела должно выполняться условие

$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = 0$ , а при  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , скорость жидкости должна быть противоположна

скорости набегающего потока, т.е.  $\vec{v} + \vec{U} = \vec{v}' = 0$ .

В силу линейности уравнения Лапласа (8.7) его решение, убывающее при  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , можно искать в виде разложения по мультиполям [ ]:

$$\varphi = \frac{a}{r} + (\vec{A}, \nabla) \frac{1}{r} + \dots = -\frac{a}{r} - \frac{(\vec{A} \vec{r}_0)}{r^2} + \dots \quad (8.8)$$

где  $\vec{r}_0$  — единичный вектор в направлении  $\vec{r}$ .

Отсюда можно найти поле скорости в виде

$$\vec{v} = \nabla \varphi = +\frac{a \vec{r}_0}{r^2} - \nabla \frac{(\vec{A} \vec{r})}{r^3} + \dots = -\frac{a \vec{r}_0}{r^2} + \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} \quad (8.9)$$

где 1-е слагаемое описывает монопольное распределение [ ], 2-е — дипольное распределение поля скорости [ ].

**Монополь:** Рассмотрим физический смысл первого слагаемого в (8.9). Скорость течения, определяемого первым слагаемым в формуле (8.9), направлена по радиусу. Проведем большую сферу радиуса  $R$  и вычислим поток массы через нее:

$$\iint_S \rho v_n dS = 4\pi R^2 \left( -\frac{a}{R^2} \right) = -4\pi a$$

Таким образом, монопольный член в (8.9) описывает источник массы. В обычных условиях потенциального обтекания твердого тела источник массы отсутствует, т.е.  $a = 0$ . Следовательно, поле скорости на больших расстояниях от тела описывается дипольным источником:

$$\vec{v} = \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} \quad (8.10)$$

В системе отсчета (СО), где тело покоится, имеем для скорости потенциального обтекания:

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{U} = \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U}$$

Дипольный момент  $A$ , а также коэффициенты при высших мультиполях, определяются из граничных условий.

### **Сила, действующая на тело при потенциальном обтекании.**

Все рассматриваем в СО, где тело покоится. Окружим тело сферической поверхностью, расположенной достаточно далеко от тела, имеющей радиус  $R$ . Применим метод контрольных поверхностей к 2 связной области, ограниченной поверхностью тела  $S$  и  $\Sigma_R$ .

Закон сохранения импульса

$$\iint_{\Sigma_R} (p\vec{n} + \rho v_n \vec{v}) dS + \iint_{\Sigma_T} p\vec{n} dS = 0 \quad (8.11)$$

(в этой системе отсчета)  $v_n|_S = 0$ .

Сила, действующая на жидкость со стороны тела на поверхности  $S$ , равна

$$\vec{F}_{\partial u \leftarrow m} = - \iint_{\Sigma} p\vec{n} dS \text{ и по 3-ему закону Ньютона равна силе (с}$$

противоположным знаком), действующей на тело со стороны жидкости.

Таким образом, сила, действующая на тело со стороны жидкости, определяется соотношением:

$$\vec{F}_{T \leftarrow \partial u} = - \iint_{\Sigma_R} (p\vec{r}_0 + \rho v_r \vec{v}) dS, \quad (8.12)$$

Достаточно далеко поле обтекания — это поле диполя, поэтому входящая в (8.12) скорость определяется формулой:

$$\vec{v}' = \frac{3(\vec{A}\vec{r}_0)\vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U} = \vec{v} - \vec{U}$$

При этом давление можно найти по формуле Бернулли, справедливой при стационарном обтекании,

$$p + \frac{\rho |\vec{v} - \vec{U}|^2}{2} = p_{\infty} \frac{\rho U^2}{2}$$

Тогда из (8.12) имеем:

$$\vec{F}_{T+ju} = - \iint_{\Sigma_R} \left[ \left( p_{\infty} + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} \right) \vec{r}_0 - \rho (\vec{U}\vec{v}) \vec{r}_0 + (v_r - U_r)(\vec{v} - \vec{U}) \right] dS = (8.13)$$

Интегралы от постоянных векторов в (8.13) равны нулю:

$$\iint p_{\infty} \vec{r}_0 dS = 0.$$

$$\iint \vec{U} \vec{r}_0 dS = 0$$

Остаются ненулевые слагаемые:

$$\vec{F}_{m \leftarrow x} = - \iint_{\Sigma_R} \left[ - \frac{\rho v^2}{2} \vec{r}_0 - \rho (\vec{U}\vec{v}) \vec{r}_0 + \rho v_r \vec{v} - U_r \vec{v} - \vec{U} v_r \right] dS \quad (8.14)$$

Для дипольного обтекания  $v \sim \frac{1}{R^3}$ , а  $dS \sim R^2 dv$ . Поскольку поверхность  $\Sigma_R$  выбрана произвольно, то можно  $R$  устремить к  $\infty$ . Но тогда

$$\vec{F}_{m \leftarrow \partial H} = 0$$

т.е. **при стационарном потенциальном обтекании на тело в идеальной несжимаемой жидкости сила не действует. Это так называемый парадокс Даламбера.** От имеет ясный физический смысл. В идеальной жидкости должна сохраняться энергия. Если бы на тело со стороны жидкости действовала сила, то над телом бы совершалась работа. Куда бы тогда девалась энергия? Парадокс Даламбера следствие принятой нами идеализации: 1. идеальная, несжимаемая, безграничная жидкость и потенциальное обтекание.

Рассмотрим теперь случай, когда тело в жидкости движется с ускорением. Тогда парадокс Даламбера не работает, тело увлекает за собой жидкость, она ускоряется, а на тело со стороны жидкости действует сила.

### Присоединенная масса

Итак, пусть на тело массы  $m$  действует сила  $\vec{f}$ . Тело погружено в идеальную безграничную несжимаемую жидкость. Найти ускорение тела:

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{n \rightarrow m} \quad (8.15)$$

На жидкость со стороны тела действует сила

$$\vec{f}_{m \rightarrow n} = -\vec{f}_{n \rightarrow m} \quad (8.16)$$

Сила, действующая на жидкость  $\vec{f}_{T \rightarrow n} = \frac{d\vec{p}_n}{dt}$  — равна изменению импульса жидкости. Казалось бы дальше задача решается просто.

1. Находим поле скорости в жидкости. Для этого решаем уравнение Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

$$\varphi_n|_S = U_n(t)$$

$U_n(t)$  — нормальная проекция скорости на поверхность тела. Решение будет точно таким же, как в случае равномерного прямолинейного движения. Далее находим импульс жидкости

$$\vec{p}_n = \int_{V_\infty} \rho \nabla \varphi dv$$

Но  $\nabla \varphi \sim \frac{1}{r^3}$ , а  $dv \sim r^2 dr$ . Такой интеграл расходится, т.е. таким способом вычислить импульс жидкости не удается.

Будем тогда рассуждать. Импульс жидкости — это количество движения, которое нужно сообщить жидкости, чтобы создать из состояния покоя рассматриваемое движение. Предположим, что это движение мы создаем за счет движения того же самого тела, которое действует на жидкость силой  $G(t)$ .

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{G}(t); \quad \vec{p}_n = \int_0^t \vec{G}(\tau) d\tau.$$

При этом тело совершает над жидкостью работу

$$A = \int_0^t \vec{U}(\tau) \vec{G}(\tau) d\tau$$

где  $\vec{U}(\tau)$  — скорость тела. При этом, поскольку в начальный момент времени жидкость покоилась, то ее кинетическая энергия была равна 0, т.е. кинетическая энергия жидкости в момент времени  $t$  равна  $A(t)$ , т.е.

$$E = \int_0^t \vec{G}(\tau) \vec{U}(\tau) d\tau$$

или

$$\frac{dE}{dt} = \vec{U}(t) \vec{G}(t) = \vec{U}(t) \frac{d\vec{p}_n}{dt}$$

Таким образом, изменение импульса жидкости выражается через изменение ее кинетической энергии. При этом кинетическую энергию жидкости вычислить можно

$$E = \int_{V_\infty} \frac{\rho v^2}{2} dV$$

Этот интеграл сходится.

Заметим, что поле скорости получается из решения линейного уравнения ( $\Delta\varphi = 0$ ), значение скорости входит в граничные условия, т.е. поле скорости жидкости — линейная функция скорости тела. Но при этом кинетическая энергия жидкости будет представлять собой квадратичную форму от скорости тела, т.е.

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}$$

из симметрии ясно, что  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_{ij}}{2} \left( \frac{dv_i}{dt} U_j + \frac{dv_j}{dt} U_i \right) = U_i m_{ij} \frac{dU_i}{dt} = U_i \frac{dp_{ni}}{dt}$$

Таким образом

$$\frac{dp_{ni}}{dt} = m_{ij} \frac{dv_j}{dt}, \text{ а } p_{jci} = U_j m_{ij}.$$

Эти рассуждения недостаточно строгие. Надо, строго говоря, доказать, что сила, действующая на тело  $\oint_{\Sigma_T} p n dS$ , так связана с изменением кинетической энергии жидкости.

Вернемся к задаче, сформулированной вначале. Найдем ускорение погруженного тела, на которое действует сила  $\vec{f}$ . Проекция на ось  $i$ .

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i + m_{ij} \frac{dv_j}{dt}$$

Итак

$$(m \delta_{ij} + m_{ij}) \frac{dv_j}{dt} = f_i$$

Итак, в силу того, что тело ускоряет увлекаемую за ним жидкость, то это эквивалентно увеличению массы и даже возникновению других составляющих ускорения, отличных от направления силы. Эти эффекты описываются величиной  $m_{ij}$ , которая называется тензором присоединенной массы.

Рассмотрим пример.

## Лекция 9

### Движение шара в жидкости. Потенциальное обтекание.

Пусть шар радиуса  $a$  движется в жидкости со скоростью  $U$ . Найдем

- 1) поле скорости
- 2) распределение давления по поверхности шара
- 3) присоединенную массу.

Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = U \cos \Theta \\ \varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Лапласиан в сферических переменных

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) = 0$$

Решение ищем методом разделения переменных

$$\varphi = Q(\Theta)R(r)$$

$$\frac{\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{\frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right)}{\sin \Theta Q} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2R = 0 \\ \frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right) + 2Q \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

$$Q = \cos \Theta; \quad -2 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos \Theta \sin \Theta = 0; \quad \pi = 2$$

$$R = r^m; \quad m(m+1) - 2 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$m = -2; \quad m = 1.$$

При  $r \rightarrow \infty$ ; этому условию соответствует  $m = -2$ , т.е.  $\varphi = \frac{A \cos \Theta}{r^2}$

Из граничного условия на поверхности сферы имеем

$$\frac{-2A}{a^3} \cos \Theta = U \cos \Theta; \quad A = -\frac{Ua^3}{2}; \quad \varphi = -\frac{Ua^3 \cos \Theta}{2r^2}$$

Поле скорости

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3 \cos \Theta}{r^3}; \quad v_\psi = \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0 \quad v_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{Ua^3}{2r^3} \sin \Theta$$

### Распределение давления по поверхности сферы

Перейдем в СО, в которой тело покоится. Тогда скорость

$$\vec{v} = v_r \vec{r}_0 + v_\Theta \vec{\Theta}_0 - \vec{U}$$

$$U_r = U \cos \Theta; \quad U_\Theta = -U \sin \Theta$$

$$v_r = \left( \frac{Ua^3}{r^3} - U \right) \cos \Theta; \quad v_\Theta = \left( \frac{Ua^3}{2r^3} + U \right) \sin \Theta$$

Распределение давления на поверхности сферы найдем по теореме Бернулли

$$p|_{r=a} + \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} \Big|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}$$

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} \sin^2 \Theta \frac{9}{4} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \Theta \right)$$

### Присоединенная масса

1. Сначала находим кинетическую энергию движения жидкости.

$$E = \int \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} dV = 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \left[ \frac{\rho U^2 a^6}{2 r^6} \left( \cos^2 \Theta + \frac{\sin^2 \Theta}{4} \right) \right] =$$

$$= 2\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \frac{3 \cos^2 \Theta + 1}{4} \frac{\rho U^2 a^6}{2} =$$

$$= \rho U^2 a^6 \pi \frac{a^{-3}}{3} \left[ -\frac{\cos^3 \Theta + \cos \Theta}{4} \right]_0^\pi = \frac{\rho U^2 a^3 \pi}{3}$$

По определению присоединенной массы

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}$$

Сравнивая эти два выражения, имеем:

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi}{3} \rho a^3$$

Присоединенная масса равна 1/2 массы жидкости в объеме тела.

Вычислим импульс жидкости непосредственно

$$\begin{aligned} p_x &= 2\pi\rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi v_x \sin \Theta d\Theta \\ v_x &= (\vec{v} \vec{x}_0) = v_r (\vec{v}_0 \vec{x}_0) + v_\Theta (\vec{\Theta}_0 \vec{x}_0) = v_r \cos \Theta - v_\Theta \sin \Theta \\ p_x &= 2\pi\rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left( \frac{Ua^3}{r^3} \cos^2 \Theta - \frac{Ua^3}{2r^3} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta d\Theta = \\ &= 2\pi\rho Ua^3 \int_a^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi \frac{3\cos^2 \Theta - 1}{2} \sin \Theta d\Theta = \\ &= 2\pi\rho a^3 \ln r \Big|_a^\infty \frac{\cos \Theta - \cos^3 \Theta}{2} \Big|_0^\pi = \infty. \quad 0 \text{ —} \end{aligned}$$

неопределенность.

Таким способом нельзя находить импульс жидкости и присоединенную массу.

А надо ее находить из кинетической энергии жидкости.



## Гидродинамика несжимаемой жидкости

По определению жидкость называется несжимаемой, если при движении сохраняется индивидуальный объем:

$$\frac{d}{dt} \int_V dv = 0$$

Применим формулу

$$\frac{d}{dt} \int_V A dv = \int_V \left( \frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div} A \vec{v} \right) dv$$

В нашем случае  $A = 1$ , т.е.  $\int_V \operatorname{div} \vec{v} = 0$ . Отсюда условие несжимаемости

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Из уравнения сохранения массы тогда следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad \frac{d\rho}{dt} = 0$$

Т.е. плотность жидкой частицы сохраняется.

Система уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \rho = 0 \\ \operatorname{div} \vec{v} = 0 \end{cases}$$

$\operatorname{div} \vec{v} = 0$  — условие несжимаемости играет роль уравнения состояния.

Действительно, как мы только что видели, следствием  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  является сохранение плотности индивидуальной частицы. Как мы видели ранее, это означает, что  $d\rho/d\rho = \infty$ , т.е. скорость звука в несжимаемой жидкости бесконечна. Другими словами, это означает, что рассматриваются процессы, имеющие такие характерные масштабы по пространству  $L$ , времени  $T$  и скорости  $v$ , что  $L/T, v \ll C$ .

Чтобы поставить полностью задачу, надо еще задать граничные условия и начальные условия. Можно представить себе 2 типа граничных условий: 1.- граничные условия на разрыве между двумя несжимаемыми жидкостями и 2.- граничные условия на поверхности твердого тела.

1. Граничные условия на разрыве. В несжимаемой жидкости может быть только тангенциальный разрыв. Ударные волны невозможны, так как они имеют скорость больше скорости звука, а в несжимаемой жидкости она  $\infty$ . Пусть  $S(\vec{r}, t)$  — граница раздела, вообще говоря, неизвестна.

Граничные условия

$$1. v_{ln}|_S = U_n|_S$$

т.е. есть дополнительно неизвестная функция  $v_{2n}|_S = U_n|_S$ , где  $U_n$  — это скорость движения границы раздела. Это кинематическое граничное условие или граничное условие непротекания.

$$2. p_1|_S = p_2|_S \text{ — динамическое граничное условие}$$

2. На поверхности твердого тела  $S$   $v_n|_S = U_n|_S$ , где  $U_n$  — нормальная проекция скорости движения твердого тела.

Больше граничные условия не нужны, так как поверхность  $S$  определена.

Покажем, что в несжимаемой жидкости условие потенциальности может быть выполнено только в однородной жидкости ( $\rho = \text{const}$ ). Запишем уравнение Эйлера:

$$\vec{v}_t + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g},$$

Вычислим  $\text{rot } 0$  л.г. и п.ч. с учетом того, что

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = [\text{rot } \vec{v}, \vec{v}] + \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2, \text{ где } \text{rot } \vec{v} = 0 \quad \text{rot} \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0, \text{ т.е. } [\nabla p, \nabla \rho] = 0,$$

Но отсюда следует, что  $\rho = \rho(p)$ , т.е. процесс баротропный. Но для каждой жидкой частицы ( $\rho = \text{const}$ ). (несжим.), т.е.

$$\frac{d\rho}{dp} = 0, \text{ т.е. } \rho = \text{const}$$

В силу того, что  $\vec{v} = \nabla \varphi$ , уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial \nabla \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla (|\nabla \varphi|^2) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \vec{g}$$

$$\text{Отсюда } \nabla \left( \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz \right) = 0, \text{ если } Z \text{ направлено вверх.}$$

$$\text{Но отсюда имеем: } \varphi_t + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = F(t).$$

Функция  $F(t)$  может быть положена равной 0 без ограничения общности, поскольку можно сделать замену переменных

$$\varphi = \varphi' + \int F(t) dt$$

которая не влияет на поле скорости  $\vec{v} = \nabla \varphi$

Отсюда сразу можно найти давление на поверхности твердого тела.

Итак, мы получили 1-й интеграл уравнения Эйлера для потенциального движения — интеграл Коши-Лагранжа для нестационарного потенциального движения несжимаемой жидкости.

При  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  из него следует формула Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const}$$

Поскольку условие несжимаемости содержит только  $\vec{v}$ , то оно дает полную кинематическую характеристику движения сплошной среды в эйлеровом описании. Отсюда ясно, что условия несжимаемости часто достаточно, чтобы определить, как происходит движение жидкости, т.е. чтобы определить поле скоростей. А потом из уравнения сохранения массы можно найти плотности, а из уравнения Эйлера — давление.

### Простейший пример.

Течение жидкости по трубе. Если  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ , то  $US = \text{const}$ , т.е.  $v = \frac{v_0 S_0}{S}$ .

Плотность  $v \frac{d\rho}{dx} = 0$ ,  $\rho = \rho_0$ . А из формулы Бернулли находим давление:

$$p = p_0 - \rho_0 \frac{v_0^2 S_0^2}{2S^2};$$

### Рассмотрим более универсальный пример.

#### **Потенциальное течение несжимаемой жидкости.**

Пусть движение жидкости таково, что везде  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ . Найдем решение для такого случая.

Отметим здесь вопросы. Если в начальный момент времени  $t = 0$ ,  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , то что будет с этой величиной потом? Ответ. При этом  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$  в любой момент. почему, ответим позже.

Если  $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$ , то можно ввести потенциал скорости  $\varphi$ , так что  $\vec{v} = \nabla \varphi$ .

Но тогда уравнение несжимаемости дает  $\Delta \varphi = 0$ .

Таким образом, потенциал скорости есть гармоническая формула. Методы решения уравнения Лапласа хорошо известны, но надо еще задать граничные условия для уравнения Лапласа.

Нужно еще задать граничные условия для уравнения Лапласа.

1. На поверхности твердого тела :  $v_n|_S = U_n$  или  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = U_n$ .

Распределение давления по поверхности  $S$  можно найти из уравнения Эйлера.

2. Аналогично можно задать граничные условия на границе раздела двух жидкостей, в которых движение потенциально.

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_S = U_n \quad p_1 = p_2$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_S = U_n, \text{ где } p_1 \text{ и } p_2 \text{ определяются из формулы Коши-Лагранжа}$$

а  $U_n$  выражается через уравнение поверхности  $S$ .

Вторая задача более сложная. Она у нас еще будет. Сейчас рассмотрим задачу о потенциальном обтекании твердого тела.

## Потенциальное обтекание твердых тел

Задача состоит в том, чтобы найти распределение скорости в жидкости, когда в ней движется твердое тело. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0$$

Граничные условия непротекания на границе тела

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = U_n$$

Спадание возмущений при удалении от тела, т.е.  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , где  $\vec{r}$  — радиус-вектор системы координат, проходящей через центр тела.

Эта задача может быть сформулирована и в другой системе отсчета, в которой тело покоится. Тогда на поверхности тела

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right|_s = 0$$

А при  $\vec{r} \rightarrow \infty$ ,  $\vec{v} = -\vec{U}$ ,  $\vec{v}$  — скорость движения тела в 1-й задаче.

В силу линейности уравнения Лапласа решение уравнения Лапласа, убывающее при  $\vec{r} \rightarrow \infty$ , можно искать в виде разложения по мультиполям

$$\varphi = \frac{a}{r} + (\vec{A}, \nabla) \frac{1}{r} + \dots = -\frac{a}{r} - \frac{(\vec{A} \vec{r}_0)}{r^2} + \dots$$

где  $\vec{r}_0$  — единичный вектор в направлении  $\vec{r}$ .

Отсюда можно найти поле скорости

$$\vec{v} = \nabla \varphi = +\frac{a \vec{r}_0}{r^2} - \nabla \frac{(\vec{A} \vec{r})}{r^3} + \dots = -\frac{a \vec{r}_0}{r^2} + \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3}$$

1-е слагаемое описывает монопольное распределение, 2-е — дипольное распределение поля скорости.

**Монополь:** Скорость направлена по радиусу.

Проведем большую сферу радиуса  $R$  и вычислим поток массы через нее

$$\iint_S \rho v_n dS = 4\pi R^2 \left( -\frac{a}{R^2} \right) = -4\pi a$$

Монопольный член описывает источник массы. В обычных условиях потенциального обтекания твердого тела источник массы отсутствует, и  $a = 0$ , таким образом поле скорости на больших расстояниях от тела описывается дипольным источником:

$$\vec{v} = \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3}$$

В СО, где тело покоится,

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{U} = \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U}$$

Дипольный момент, а также коэффициенты при высших мультиполях, определяются из граничных условий.

**Сила, действующая на тело при потенциальном обтекании.**

Все рассматриваем в СО, где тело покоится. Окружим тело сферической поверхностью, расположенной достаточно далеко от тела, имеющей радиус  $R$ . Применим метод контрольных поверхностей к 2 связной области, ограниченной поверхностью тела  $S$  и  $\Sigma_R$ .

Закон сохранения импульса

$$\iint_{\Sigma_R} (p \vec{n} + \rho v_n \vec{v}) dS + \iint_{\Sigma_T} p \vec{n} dS = 0$$

в этой системе отсчета  $v_n|_S = 0$ .

Сила, действующая на жидкость со стороны тела на поверхности  $S$ .

$$\vec{F}_{\vec{a}u \leftarrow m} = - \iint_{\Sigma} p \vec{n} dS = - \vec{F}_{m \leftarrow \vec{a}u} \text{ — по 3-ему закону Ньютона.}$$

Таким образом, сила, действующая на тело,

$$\vec{F}_{T \leftarrow \vec{a}u} = - \iint_{\Sigma_R} (p \vec{r}_0 + \rho u_r \vec{v}) dS,$$

Достаточно далеко поле обтекания — это поле диполя, поэтому

$$\vec{u} = \frac{3(\vec{A} \vec{r}_0) \vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U} = \vec{v} - \vec{U}$$

Давление можно найти по формуле Бернулли

$$p + \frac{\rho |\vec{v} - \vec{U}|^2}{2} = p_\infty \frac{\rho U^2}{2}$$

Тогда

$$\vec{F}_{T+ju} = - \iint_{\Sigma_R} \left[ \left( p_\infty + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2} \right) \vec{r}_0 - \rho (\vec{U} \vec{v}) \vec{r}_0 + (v_r - U_r) (\vec{v} - \vec{U}) \right] dS =$$

Интегралы от постоянных векторов

$$\iint p_\infty \vec{r}_0 dS = 0.$$

$$\vec{U} \iint \vec{U} \vec{r}_0 dS = 0$$

Остаются ненулевые слагаемые:

$$\vec{F}_{m \leftarrow x} = - \iint_{\Sigma_R} \left[ - \frac{\rho v^2}{2} \vec{r}_0 - \rho (\vec{U} \vec{v}) \vec{r}_0 + \rho v_r \vec{v} - U_r \vec{v} - \vec{U} v_r \right] dS$$

Для дипольного обтекания  $v \sim \frac{1}{R^3}$ , а  $dS \sim R^2 dv$ . Поскольку поверхность  $\Sigma_R$  выбрана произвольно, то можно  $R$  устремить к  $\infty$ . Но тогда

$$\vec{F}_{m \leftarrow \partial H} = 0$$

т.е. при стационарном потенциальном обтекании на тело в идеальной несжимаемой жидкости сила не действует. Это так называемый парадокс Даламбера. От имеет ясный физический смысл. В идеальной жидкости должна сохраняться энергия. Если бы на тело со стороны жидкости действовала сила, то над телом бы совершалась работа. Куда бы тогда девалась энергия? Парадокс Даламбера следствие идеализации 1) идеальная, 2) несжимаемая, 3) безграничная.

Рассмотрим теперь случай, когда тело в жидкости движется с ускорением. Тогда парадокс Даламбера не работает, тело увлекает за собой жидкость, она ускоряется, а на тело со стороны жидкости действует сила.

### Присоединенная масса

Итак, пусть на тело массы  $m$  действует сила  $\vec{f}$ . Тело погружено в идеальный безграничную несжимаемую жидкость. Найти ускорение тела:

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{ж \rightarrow m}$$

На жидкость со стороны тела действует сила

$$\vec{f}_{m \rightarrow ж} = -\vec{f}_{ж \rightarrow m}$$

Сила, действующая на жидкость  $\vec{f}_{T \rightarrow ж} = \frac{d\vec{p}_{ж}}{dt}$  — равна изменению импульса жидкости. Казалось бы дальше задача решается просто.

1. Находим поле скорости в жидкости. Для этого решаем уравнение Лапласа  $\Delta\varphi = 0$

$$\varphi_n|_S = U_n(t)$$

$U_n(t)$  — нормальная проекция скорости на поверхность тела. Решение будет точно таким же, как в случае равномерного прямолинейного движения. Далее находим импульс жидкости

$$\vec{p}_n = \int_{V_\infty} \rho \nabla \varphi dv$$

Но  $\nabla \varphi \sim \frac{1}{r^3}$ , а  $dv \sim r^2 dr$ . Такой интеграл расходится, т.е. таким способом вычислить импульс жидкости не удастся.

Будем тогда рассуждать. Импульс жидкости — это количество движения, которое нужно сообщить жидкости, чтобы создать из состояния покоя рассматриваемое движение. Предположим, что это движение мы создаем за счет движения того же самого тела, которое действует на жидкость силой  $G(t)$ .

$$\frac{d\vec{p}_{ж}}{dt} = \vec{G}(t); \vec{p}_{ж} = \int_0^t \vec{G}(\tau) d\tau.$$

При этом тело совершает над жидкостью работу

$$A = \int_0^t \vec{U}(\tau) \vec{G}(\tau) d\tau$$

где  $\vec{U}(\tau)$  — скорость тела. При этом, поскольку в начальный момент времени жидкость покоилась, то ее кинетическая энергия была равна 0, т.е. кинетическая энергия жидкости в момент времени  $t$  равна  $A(t)$ , т.е.

$$E = \int_0^t \vec{G}(\tau) \vec{U}(\tau) d\tau$$

или

$$\frac{dE}{dt} = \vec{U}(t) \vec{G}(t) = \vec{U}(t) \frac{d\vec{p}_n}{dt}$$

Таким образом, изменение импульса жидкости выражается через изменение ее кинетической энергии. При этом кинетическую энергию жидкости вычислить можно

$$E = \int_{V_\infty} \frac{\rho v^2}{2} dV$$

Этот интеграл сходится.

Заметим, что поле скорости получается из решения линейного уравнения ( $\Delta\varphi = 0$ ), значение скорости входит в граничные условия, т.е. поле скорости жидкости — линейная функция скорости тела. Но при этом кинетическая энергия жидкости будет представлять собой квадратичную форму от скорости тела, т.е.

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}$$

из симметрии ясно, что  $m_{ij} = m_{ji}$ .

Тогда

$$\frac{dE}{dt} = \frac{m_{ij}}{2} \left( \frac{dv_i}{dt} U_j + \frac{dv_j}{dt} U_i \right) = U_i m_{ij} \frac{dU_j}{dt} = U_i \frac{dp_{jci}}{dt}$$

Таким образом

$$\frac{dp_{jci}}{dt} = m_{ij} \frac{dv_j}{dt}, \text{ а } p_{jci} = U_j m_{ij}.$$

Эти рассуждения недостаточно строгие. Надо, строго говоря, доказать, что сила, действующая на тело  $\oiint_{\Sigma_T} p n dS$ , так связана с изменением кинетической энергии жидкости.

Вернемся к задаче, сформулированной вначале. Найдем ускорение погруженного тела, на которое действует сила  $\vec{f}$ . Проекция на ось  $i$ .

$$m \frac{dv_i}{dt} = F_i + m_{ij} \frac{dv_j}{dt}$$

Итак

$$(m\delta_{ij} + m_{ij}) \frac{dv_j}{dt} = f_i$$

Итак, в силу того, что тело ускоряет увлекаемую за ним жидкость, то это эквивалентно увеличению массы и даже возникновению других составляющих

ускорения, отличных от направления силы. Эти эффекты описываются величиной  $m_{ij}$ , которая называется тензором присоединенной массы.

Рассмотрим пример.

Лекция 9

### Движение шара в жидкости. Потенциальное обтекание.

Пусть шар радиуса  $a$  движется в жидкости со скоростью  $U$ . Найдем

- 1) поле скорости
- 2) распределение давления по поверхности шара
- 3) присоединенную массу.

Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = U \cos \Theta \\ \varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Лапласиан в сферических переменных

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) = 0$$

Решение ищем методом разделения переменных

$$\varphi = Q(\Theta)R(r)$$

$$\frac{\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{\frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right)}{\sin \Theta Q} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2R = 0 \\ \frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right) + 2Q \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

$$Q = \cos \Theta; \quad -2 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos \Theta \sin \Theta = 0; \quad \pi = 2$$

$$R = r^m; \quad m(m+1) - 2 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$m = -2; \quad m = 1.$$

При  $r \rightarrow \infty$ ; этому условию соответствует  $m = -2$ , т.е.  $\varphi = \frac{A \cos \Theta}{r^2}$

Из граничного условия на поверхности сферы имеем

$$\frac{-2A}{a^3} \cos \Theta = U \cos \Theta; \quad A = -\frac{Ua^3}{2}; \quad \varphi = -\frac{Ua^3 \cos \Theta}{2r^2}$$

Поле скорости



$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3 \cos \Theta}{r^3}; \quad v_\psi = \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0 \quad v_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{Ua^3}{2r^3} \sin \Theta$$

### Распределение давления по поверхности сферы

Перейдем в СО, в которой тело покоится. Тогда скорость

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v_r \vec{r}_0 + v_\Theta \vec{\Theta}_0 - \vec{U} \\ U_r &= U \cos \Theta; \quad U_\Theta = -U \sin \Theta \\ v_r &= \left( \frac{Ua^3}{r^3} - U \right) \cos \Theta; \quad v_\Theta = \left( \frac{Ua^3}{2r^3} + U \right) \sin \Theta \end{aligned}$$

Распределение давления на поверхности сферы найдем по теореме Бернулли

$$\begin{aligned} p|_{r=a} + \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} \Big|_{r=a} &= p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \\ p &= p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} \sin^2 \Theta \frac{9}{4} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \Theta \right) \end{aligned}$$

### Присоединенная масса

1. Сначала находим кинетическую энергию движения жидкости.

$$\begin{aligned} E &= \int \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} dV = 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \left[ \frac{\rho U^2 a^6}{2 r^6} \left( \cos^2 \Theta + \frac{\sin^2 \Theta}{4} \right) \right] = \\ &= 2\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \frac{3 \cos^2 \Theta + 1}{4} \frac{\rho U^2 a^6}{2} = \\ &= \rho U^2 a^6 \pi \frac{a^{-3}}{3} \left[ -\frac{\cos^3 \Theta + \cos \Theta}{4} \right]_0^\pi = \frac{\rho U^2 a^3 \pi}{3} \end{aligned}$$

По определению присоединенной массы

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}$$

Сравнивая эти два выражения, имеем:

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi}{3} \rho a^3$$

Присоединенная масса равна 1/2 массы жидкости в объеме тела.

Вычислим импульс жидкости непосредственно

$$\begin{aligned} p_x &= 2\pi \rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi v_x \sin \Theta d\Theta \\ v_x &= (\vec{v} \vec{x}_0) = v_r (\vec{v}_0 \vec{x}_0) + v_\Theta (\vec{\Theta}_0 \vec{x}_0) = v_r \cos \Theta - v_\Theta \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_x &= 2\pi\rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left( \frac{Ua^3}{r^3} \cos^2 \Theta - \frac{Ua^3}{2r^3} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta d\Theta = \\
&= 2\pi\rho Ua^3 \int_a^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi \frac{3\cos^2 \Theta - 1}{2} \sin \Theta d\Theta = \\
&= 2\pi\rho a^3 \ln r \Big|_a^\infty \frac{\cos \Theta - \cos^3 \Theta}{2} \Big|_0^\pi = \infty. \quad 0 \text{ —}
\end{aligned}$$

неопределенность.

Таким способом нельзя находить импульс жидкости и присоединенную массу.

А надо ее находить из кинетической энергии жидкости.

## Плоское безвихревое течение несжимаемой жидкости

Мы будем рассматривать плоское течение жидкости. При этом имеется 2 компоненты скорости  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , которые зависят от двух координат. Условие несжимаемости жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Отсюда ясно, что можно ввести такую функцию  $\Psi$ , что  $v_x = \partial \Psi / \partial y$ ;  $v_y = -(\partial \Psi / \partial x)$ , тогда  $\text{div } \vec{v} = 0$  удовлетворяется тождественно.

Функция  $\Psi$  называется функцией тока. Чтобы выяснить почему, найдем уравнение линий тока:

отсюда ясно, что на линии тока функция  $\Psi = \text{const}$ . На разных линиях тока значение функции  $\Psi$  свое. Уравнение линии тока:

$$\Psi(x, y) = c.$$

Функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока определена в любом 2-мерном течении. Предположим теперь, что течение потенциально, т.е.

$$\vec{v} = \nabla \varphi; \quad \text{т.е. } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

С использованием выражений для компонент скорости через функцию тока получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Найдем уравнение для функции тока потенциального течения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

отсюда  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$ , т.е. функция тока тоже гармоническая функция.

Если ввести комплексную функцию  $W = \varphi + i\Psi = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$ , то эти условия представляют собой известные условия того, что  $W$  есть аналитическая функция от одной переменной  $Z = x + iy$ , (условия Коши-Римана), т.е.

$$W = W(Z) = \varphi + i\Psi$$

Итак, если мы возьмем любую аналитическую функцию  $W(Z)$ , то она является комплексным потенциалом; она определяет течение, потенциал которого  $\varphi = \text{Re } W(Z)$ , а функция тока  $\Psi = \text{Im } W(Z)$ . При этом линии тока  $\Psi(x, y) = c_1$ , линии равного потенциала  $\varphi(x, y) = c_2$ .

1. Линии тока и линии равного потенциала взаимно перпендикулярны. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что  $\nabla \varphi$  и  $\nabla \Psi$  взаимно ортогональны

$$\nabla \varphi \nabla \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x = 0$$

2. Пусть имеется потенциальное течение с потенциалом  $\varphi$  и функцией тока  $\Psi$ . Тогда течение с функцией тока  $\varphi$  также будет потенциальным и будет иметь потенциал  $-\Psi$ . Действительно, 1-е течение имеет комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\Psi$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$-iW = \Psi - i\varphi$$

Сразу видно, что потенциал этого течения  $\Psi$ , а функция тока  $-\varphi$ .

Тогда линии тока 1-го течения совпадают с линиями равного потенциала 2-го и наоборот. Такие течения называются сопряженными. Свойство сопряженности часто применяется при построении плоских потенциальных течений.

Зная комплексный потенциал  $W(Z)$ , можно определить проекции вектора скорости  $v_x$  и  $v_y$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - i v_y$$

3. Пусть имеется кривая в плоскости  $(x, y)$ , соединяющая две точки (1 и 2). Найдем .....

1) Объемный расход жидкости через эту кривую  $N$

2) Циркуляцию поля скорости по этой кривой  $\Gamma$

$$1) N = \int_1^2 v_n de = \int_1^2 (v_x n_x + v_y n_y) de =$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y) \text{ — вектор нормали; } \vec{\tau} = (-n_y, n_x) \text{ — касательный вектор}$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_y \right) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tau_y + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tau_x \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial e} de = \Psi_2 - \Psi_1$$

$$2) \Gamma = \int_1^2 v_e de = \int_1^2 (v_x \tau_x + v_y \tau_y) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_y \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial e} de = \varphi_1 - \varphi_2$$

Поскольку  $W = \varphi - i\varphi$  то  $W_2 - W_1 = \Gamma + iN$ .

### Примеры комплексных потенциалов и соответствующих им плоских безвихревых потоков идеальной несжимаемой жидкости.

1.  $W(Z) = aZ$ , где  $a$  — комплексная постоянная

компоненты скорости

$$dW/dZ = a = v_x - i v_y$$

$$v_x = \operatorname{Re} a; \quad v_y = -\operatorname{Im} a$$

Компоненты скорости постоянны. Вектор скорости имеет наклон  $\operatorname{tg} \Theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a}$ ;

если  $a = |a| e^{i\Theta_a}$ , то  $\Theta = -\Theta_a$ .

Потенциал:  $\varphi = \operatorname{Re} W = X \operatorname{Re} a - y \operatorname{Im} a = v_x x + v_y y$ .

Функция тока:  $\Psi = +\operatorname{Im} W = X \operatorname{Im} a + y \operatorname{Re} a = -X v_y + y v_x$ .

Линии тока:  $y v_x - x v_y = \text{const}$ ;  $y = x(v_y / v_x) + c$ .

(прямые, с наклоном  $\operatorname{tg} \Theta$  к оси  $x$ , т.е.  $\parallel \vec{v}$ )

Линии равного потенциала  $y = -(v_y / v_x)x + c_1$  — ортогональные к линиям тока.

Сопряженное течение:

$$\varphi = -x v_y + y v_x; \quad \Psi = -v_x x - v_y y$$

2. Логарифмическая функция:

$$W = A \ln Z$$

а) пусть  $A$  — действительная величина. Перейдем к цилиндрическим координатам

$$Z = r e^{i\theta}$$

$$\text{тогда } W = A (\ln r + i\theta)$$

$$\text{потенциал } \varphi = A \ln r$$

функция тока  $\Psi = A \theta$

Линии тока  $\theta = \text{const}$  — прямые линии, проходящие через начало координат.

Линии равного потенциала  $r = \text{const}$  — окружности.

Течение соответствует источнику или стоку.

Вычислим количество жидкости, выходящей из источника (расход).

$$Q = \int_0^{2\pi} v_n r d\varphi; v_n = v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$Q = 2\pi A$ ;  $A = \frac{Q}{2\pi}$  — смысл действительного коэффициента  $A$  комплексного

потенциального источника в начале координат  $W = \frac{Q}{2\pi} \ln Z$ .

б) Пусть  $A$  — чисто мнимая величина  $A = iB$

Тогда  $W = iB \ln Z = -B\theta + iB \ln r$

потенциал  $\varphi = -B\theta$

функция тока  $\Psi = B \ln r$

Линии тока  $r = \text{const}$  — окружности

линии равного потенциала  $\theta = \text{const}$  — прямые, проходящие через начало координат.

Сопряженное к 1-му течению.

Скорость  $v_r = 0$ ;  $v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{B}{r}$

Течение представляет собой круговое движение вокруг начала координат. Найдем циркуляцию поля скорости в таком течении.

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = -B \cdot 2\pi; \rightarrow b = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Комплексный потенциал циркуляционного течения:

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

в) Комплексное  $A$ . В силу линейности уравнений, которым удовлетворяют комплексные потенциалы, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Пусть

$$W = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Течение представляет собой суперпозицию источника и циркуляционного течения. Вектора скорости складываются.

Потенциал  $\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma Q}{2\pi}$

Функция тока  $\psi = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma \ln r}{2\pi}$

Линии тока  $\theta = \frac{\Gamma}{Q} \ln r$  — спираль.

$$3. \quad W = \frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

Потенциал  $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Функция тока  $\psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

$$\text{Линии тока } -\frac{y}{x^2 + y^2} = c; \quad x^2 + y^2 = -\frac{y}{c}; \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$

Окружности с центром, смещенным относительно оси  $Y$ .

Линии равного потенциала

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{c_1}; \quad y^2 + \left(-\frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{4c_1^2}$$

Чтобы выяснить смысл такого течения, рассмотрим сумму комплексных потенциалов источников, один из которых расположен левее оси  $Y$ , а второй — правее. Знаки расходов  $Q$  будем считать различными. Тогда суммарный потенциал

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - h) - \frac{Q}{2\pi} \ln(Z + h)$$

Теперь устремим  $h \rightarrow 0$ , изменяя величину  $Q$  так, что  $Q2h = \text{const} = -m$ , т.е.  $Q = -\frac{m}{2h}$ . При этом

$$W = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m}{2h} \frac{[\ln(Z - h) - \ln(Z + h)]}{2\pi} = \frac{+m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Z} \ln Z = \frac{+m}{2\pi Z}$$

Таким образом, получается комплексный потенциал диполя. Если  $Q > 0$  — источник расположен правее оси  $Y$ , а сток — левее оси  $Y$ , при  $Q < 0$  — наоборот.

#### 4. Суперпозиция поля диполя и однородного потока

$$W = W_1 + W_2$$

Воспользуемся принципом суперпозиции и рассмотрим, какое получится поле. Комплексный потенциал:

$$W = VZ + \frac{m}{2\pi Z}; \quad V \text{ и } m \text{ — действительны.}$$

Функция тока

$$\psi = \text{Im} W = Vy - \frac{my}{2\pi(y^2 + x^2)}$$

$$\text{Линии тока: } y \left( V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} \right) = \text{const}$$

$$\text{Линия тока } c = 0: y = 0; \quad y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V} \text{ — это 2 линии:}$$

$$\text{окружность радиусом } a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V}} \text{ и ось } x: y = 0.$$

Остальные линии получаются при  $c \neq 0$

Поля скорости:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} + \frac{my^2}{2\pi(y^2 + x^2)^2}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{mx_y}{2\pi(y^2 + x^2)^2}$$

(Точки, в которых скорость равна 0, называются критическими:  $v_x = 0$ , и  $v_y = 0$  при  $x = \pm a$  (точки  $A$  и  $B$ ).

Чтобы качественно изобразить картину линий тока, надо определить эту картину на окружности, а затем продолжить внутри и вне окружности непрерывно.

На окружности  $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V} = a^2$  нормальная составляющая скорости равна 0. Это

означает, что поле скорости вне окружности соответствует обтеканию цилиндра радиуса  $a$  потоком, скорость которого на  $\infty$  равна  $V$ . Тогда дипольный момент  $m$  должен быть выбран  $a^2 \cdot 2\pi V$ , т.е. поле обтекания кругового цилиндра имеет комплексный потенциал

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad \text{при} \quad |Z| \geq a$$

Внутри круга радиуса  $a$  имеем поле диполя внутри цилиндра. Оно соответствует полю обтекания очень малого цилиндра, движущегося внутри цилиндра много большего радиуса в момент, когда малый цилиндр находится в центре большого.

5. Рассмотрим теперь суперпозицию поля обтекания кругового цилиндра и кругового движения вокруг начала координат, т.е.

$$W_1 = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad W = W_1 + W_2$$

$$W_2 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Качественная картина обтекания

(рисунок)

Определим положение критических точек, в которых скорость равна 0. Если равна 0

скорость, значит равна 0 и сопряженная скорость, т.е.  $\frac{dW}{dZ} = 0$

$$V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z} = 0$$

$$Z^2 - \frac{i\Gamma Z}{2\pi V} - a^2 = 0$$

$$Z = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$$

1) Если  $a^2 > \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$ , то  $x_{1,2} = \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$ ;  $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V}$

В этом случае имеется 2 критические точки. Поскольку  $x^2 + y^2 = a^2$ , то они лежат на поверхности цилиндра (рис. а)

2) Если  $a^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$ , то критические точки сливаются (рис. б)

3) Если  $\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} > 0$ , то  $x = 0$ ;  $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm i\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} - a^2}$ .

Одна из точек лежит внутри цилиндра (вне физического пространства), другая — вне цилиндра (рис. в)

Вычислим силу, действующую на цилиндр.

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} p \vec{r}_0 a d\Theta$$

Давление можно определить по формуле Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{|\vec{v}_\infty|^2}{2}$$

$$|\vec{v}|^2 = |v|^2, \text{ где } v = \frac{dW}{dZ} = V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

$$|\vec{v}_\infty|^2 = |v|^2 \Big|_\infty$$

При  $Z \rightarrow \infty$ ;  $v_\infty = V$ .

Найдем  $V$  на круге  $Z = re^{i\Theta}$ ;  $r = a$ , тогда

$$v = V - Ve^{-2i\Theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta}$$

$$v = e^{-2i\Theta} V (e^{2i\Theta} - e^{-2i\Theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta} = ie^{2i\Theta} \left[ 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right]$$

$$|v|^2 = \left( 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 = 4V^2 \sin^2 \Theta - \frac{2V\Gamma}{2\pi a} \sin \Theta + \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2}$$

Отсюда

$$p = p_\infty + \frac{\rho V^2}{2} - 2V^2 \rho \sin^2 \Theta + \frac{V\Gamma}{2\pi a} \sin \Theta - \frac{\Gamma^2}{32\pi^2 a^2}$$

Найдем проекции силы

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \Theta a d\Theta = 0$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \Theta a d\Theta = \rho \frac{V\Gamma}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta = -\rho V\Gamma$$

Эта сила действует в направлении, перпендикулярном направлению скорости. Она работы не совершает, поэтому может быть отлична от 0. Ее появление очевидно из физических соображений

(рисунок)

скорость больше  
давление меньше

скорость меньше  
давление больше



## Плоское безвихревое течение несжимаемой жидкости

Мы будем рассматривать плоское течение жидкости. При этом имеется 2 компоненты скорости  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , которые зависят от двух координат. Условие несжимаемости жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Отсюда ясно, что можно ввести такую функцию  $\Psi$ , что  $v_x = \partial \Psi / \partial y$ ;  $v_y = -(\partial \Psi / \partial x)$ , тогда  $\text{div } \vec{v} = 0$  удовлетворяется тождественно.

Функция  $\Psi$  называется функцией тока. Чтобы выяснить почему, найдем уравнение линий тока:



отсюда ясно, что на линии тока функция  $\Psi = \text{const}$ . На разных линиях тока значение функции  $\Psi$  свое. Уравнение линии тока:

$$\Psi(x, y) = c.$$

Функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока определена в любом 2-мерном течении. Предположим теперь, что течение потенциально, т.е.

$$\vec{v} = \nabla \varphi; \quad \text{т.е. } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

С использованием выражений для компонент скорости через функцию тока получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Найдем уравнение для функции тока потенциального течения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

отсюда  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$ , т.е. функция тока тоже гармоническая функция.

Если ввести комплексную функцию  $W = \varphi + i\Psi = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$ , то эти условия представляют собой известные условия того, что  $W$  есть аналитическая функция от одной переменной  $Z = x + iy$ , (условия Коши-Римана), т.е.

$$W = W(Z) = \varphi + i\Psi$$

Итак, если мы возьмем любую аналитическую функцию  $W(Z)$ , то она является комплексным потенциалом; она определяет течение, потенциал которого  $\varphi = \text{Re } W(Z)$ , а функция тока  $\Psi = \text{Im } W(Z)$ . При этом линии тока  $\Psi(x, y) = c_1$ , линии равного потенциала  $\varphi(x, y) = c_2$ .

1. Линии тока и линии равного потенциала взаимно перпендикулярны. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что  $\nabla \varphi$  и  $\nabla \Psi$  взаимно ортогональны

$$\nabla \varphi \nabla \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x = 0$$

2. Пусть имеется потенциальное течение с потенциалом  $\varphi$  и функцией тока  $\Psi$ . Тогда течение с функцией тока  $\varphi$  также будет потенциальным и будет иметь потенциал  $-\Psi$ . Действительно, 1-е течение имеет комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\Psi$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$-iW = \Psi - i\varphi$$

Сразу видно, что потенциал этого течения  $\Psi$ , а функция тока  $-\varphi$ .

Тогда линии тока 1-го течения совпадают с линиями равного потенциала 2-го и наоборот. Такие течения называются сопряженными. Свойство сопряженности часто применяется при построении плоских потенциальных течений.

Зная комплексный потенциал  $W(Z)$ , можно определить проекции вектора скорости  $v_x$  и  $v_y$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - i v_y$$

3. Пусть имеется кривая в плоскости  $(x, y)$ , соединяющая две точки (1 и 2). Найдем .....

1) Объемный расход жидкости через эту кривую  $N$

2) Циркуляцию поля скорости по этой кривой  $\Gamma$

$$1) N = \int_1^2 v_n de = \int_1^2 (v_x n_x + v_y n_y) de =$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y) \text{ — вектор нормали; } \vec{\tau} = (-n_y, n_x) \text{ — касательный вектор}$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_y \right) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tau_y + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tau_x \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial e} de = \Psi_2 - \Psi_1$$

$$2) \Gamma = \int_1^2 v_e de = \int_1^2 (v_x \tau_x + v_y \tau_y) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_y \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial e} de = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\text{Поскольку } W = \varphi - i\varphi \text{ то } W_2 - W_1 = \Gamma + iN.$$

### Примеры комплексных потенциалов и соответствующих им плоских безвихревых потоков идеальной несжимаемой жидкости.

1.  $W(Z) = aZ$ , где  $a$  — комплексная постоянная

компоненты скорости

$$dW/dZ = a = v_x - i v_y$$

$$v_x = \operatorname{Re} a; \quad v_y = -\operatorname{Im} a$$

$$\text{Компоненты скорости постоянны. Вектор скорости имеет наклон } \operatorname{tg} \Theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\operatorname{Im} a}{\operatorname{Re} a};$$

$$\text{если } a = |a| e^{i\Theta_a}, \text{ то } \Theta = -\Theta_a.$$

$$\text{Потенциал: } \varphi = \operatorname{Re} W = X \operatorname{Re} a - y \operatorname{Im} a = v_x x + v_y y.$$

$$\text{Функция тока: } \Psi = + \operatorname{Im} W = X \operatorname{Im} a + y \operatorname{Re} a = -X v_y + y v_x.$$

$$\text{Линии тока: } y v_x - x v_y = \text{const}; \quad y = x(v_y / v_x) + c.$$

(прямые, с наклоном  $\operatorname{tg} \Theta$  к оси  $x$ , т.е.  $\parallel \vec{v}$ )

Линии равного потенциала  $y = -(v_y / v_x)x + c_1$  — ортогональные к линиям тока.

Сопряженное течение:

$$\varphi = -x v_y + y v_x; \quad \Psi = -v_x x - v_y y$$

2. Логарифмическая функция:

$$W = A \ln Z$$

а) пусть  $A$  — действительная величина. Перейдем к цилиндрическим координатам

$$Z = re^{i\theta}$$

$$\text{тогда } W = A (\ln r + i\theta)$$

$$\text{потенциал } \varphi = A \ln r$$

$$\text{функция тока } \Psi = A \theta$$

Линии тока  $\theta = \text{const}$  — прямые линии, проходящие через начало координат.

Линии равного потенциала  $r = \text{const}$  — окружности.

Течение соответствует источнику или стоку.

Вычислим количество жидкости, выходящей из источника (расход).

$$Q = \int_0^{2\pi} v_n r d\varphi; v_n = v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$Q = 2\pi A; \quad A = \frac{Q}{2\pi} \text{ — смысл действительного коэффициента } A \text{ комплексного потенци-}$$

$$\text{ального источника в начале координат } W = \frac{Q}{2\pi} \ln Z.$$

б) Пусть  $A$  — чисто мнимая величина  $A = iB$

$$\text{Тогда } W = iB \ln Z = -B\theta + iB \ln r$$

$$\text{потенциал } \varphi = -B\theta$$

$$\text{функция тока } \Psi = B \ln r$$

Линии тока  $r = \text{const}$  — окружности

линии равного потенциала  $\theta = \text{const}$  — прямые, проходящие через начало координат.

Сопряженное к 1-му течению.

$$\text{Скорость } v_r = 0; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{B}{r}$$

Течение представляет собой круговое движение вокруг начала координат. Найдем циркуляцию поля скорости в таком течении.

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = -B \cdot 2\pi; \quad \rightarrow \quad b = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Комплексный потенциал циркуляционного течения:

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

в) Комплексное  $A$ . В силу линейности уравнений, которым удовлетворяют комплексные потенциалы, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Пусть

$$W = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Течение представляет собой суперпозицию источника и циркуляционного течения. Вектора скорости складываются.

$$\text{Потенциал } \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma Q}{2\pi}$$

$$\text{Функция тока } \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta - \frac{\Gamma \ln r}{2\pi}$$

$$\text{Линии тока } \theta = \frac{\Gamma}{Q} \ln r \text{ — спираль.}$$

$$3. \quad W = \frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

Потенциал  $\varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Функция тока  $\psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$

Линии тока  $-\frac{y}{x^2 + y^2} = c; \quad x^2 + y^2 = -\frac{y}{c}; \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$

Окружности с центром, смещенным относительно оси  $Y$ .

Линии равного потенциала

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{c_1}; \quad y^2 + \left(-\frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{4c_1^2}$$

Чтобы выяснить смысл такого течения, рассмотрим сумму комплексных потенциалов источников, один из которых расположен левее оси  $Y$ , а второй — правее. Знаки расходов  $Q$  будем считать различными. Тогда суммарный потенциал

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - h) - \frac{Q}{2\pi} \ln(Z + h)$$

Теперь устремим  $h$  к 0, изменяя величину  $Q$  так, что  $Q2h = \text{const} = -m$ , т.е.  $Q = -\frac{m}{2h}$ . При этом

$$W = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m}{2h} \left[ \frac{\ln(Z - h) - \ln(Z + h)}{2\pi} \right] = \frac{+m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Z} \ln Z = \frac{+m}{2\pi Z}$$

Таким образом, получается комплексный потенциал диполя. Если  $Q > 0$  — источник расположен правее оси  $Y$ , а сток — левее оси  $Y$ , при  $Q < 0$  — наоборот.

#### 4. Суперпозиция поля диполя и однородного потока

$$W = W_1 + W_2$$

Воспользуемся принципом суперпозиции и рассмотрим, какое получится поле. Комплексный потенциал:

$$W = VZ + \frac{m}{2\pi Z}; \quad V \text{ и } m \text{ — действительны.}$$

Функция тока

$$\psi = \text{Im} W = Vy - \frac{my}{2\pi(y^2 + x^2)}$$

Линии тока :  $y \left( V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} \right) = \text{const}$

Линия тока  $c = 0; y = 0; y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V}$  — это 2 линии:

окружность радиусом  $a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V}}$  и ось  $x : y = 0$ .

Остальные линии получаются при  $c \neq 0$

Поля скорости:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} + \frac{my^2}{2\pi(y^2 + x^2)^2}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{mx_y}{2\pi (y^2 + x^2)^2}$$

(Точки, в которых скорость равна 0, называются критическими:  $v_x = 0$ , и  $v_y = 0$  при  $x = \pm a$  (точки  $A$  и  $B$ ).

Чтобы качественно изобразить картину линий тока, надо определить эту картину на окружности, а затем продолжить внутри и вне окружности непрерывно.

На окружности  $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V} = a^2$  нормальная составляющая скорости равна 0.

Это означает, что поле скорости вне окружности соответствует обтеканию цилиндра радиуса  $a$  потоком, скорость которого на  $\infty$  равна  $V$ . Тогда дипольный момент  $m$  должен быть выбран  $a^2 \cdot 2\pi V$ , т.е. поле обтекания кругового цилиндра имеет комплексный потенциал

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad \text{при} \quad |Z| \geq a$$

Внутри круга радиуса  $a$  имеем поле диполя внутри цилиндра. Оно соответствует полю обтекания очень малого цилиндра, движущегося внутри цилиндра много большего радиуса в момент, когда малый цилиндр находится в центре большого.

5. Рассмотрим теперь суперпозицию поля обтекания кругового цилиндра и кругового движения вокруг начала координат, т.е.

$$W_1 = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad W = W_1 + W_2$$

$$W_2 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Качественная картина обтекания  
(рисунок)

Определим положение критических точек, в которых скорость равна 0. Если равна 0 скорость, значит равна 0 и сопряженная скорость, т.е.  $\frac{dW}{dZ} = 0$

$$V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z} = 0$$

$$Z^2 - \frac{i\Gamma Z}{2\pi V} - a^2 = 0$$

$$Z = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$$

1) Если  $a^2 > \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$ , то  $x_{1,2} = \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$ ;  $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V}$

В этом случае имеется 2 критические точки. Поскольку  $x^2 + y^2 = a^2$ , то они лежат на поверхности цилиндра (рис. а)

2) Если  $a^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}$ , то критические точки сливаются (рис. б)

3) Если  $\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} > 0$ , то  $x = 0$ ;  $y = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm i\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} - a^2}$ .

Одна из точек лежит внутри цилиндра (вне физического пространства), другая — вне цилиндра (рис. в)

Вычислим силу, действующую на цилиндр.

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} p \vec{r}_0 a d\Theta$$

Давление можно определить по формуле Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{|\vec{v}_\infty|^2}{2}$$

$$|\vec{v}|^2 = |v|^2, \text{ где } v = \frac{dW}{dZ} = V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

$$|\vec{v}_\infty|^2 = |v|^2 \Big|_\infty$$

При  $Z \rightarrow \infty$ ;  $v_\infty = V$ .

Найдем  $V$  на круге  $Z = re^{i\Theta}$ ;  $r = a$ , тогда

$$v = V - Ve^{-2i\Theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta}$$

$$v = e^{-2i\Theta} V (e^{2i\Theta} - e^{-2i\Theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta} = ie^{2i\Theta} \left[ 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right]$$

$$|v|^2 = \left( 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 = 4V^2 \sin^2 \Theta - \frac{2V\Gamma}{\pi a} \sin \Theta + \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2}$$

Отсюда

$$p = p_\infty + \frac{\rho V^2}{2} - 2V^2 \rho \sin^2 \Theta + \frac{V\Gamma}{2\pi a} \sin \Theta - \frac{\Gamma^2}{32\pi^2 a^2}$$

Найдем проекции силы

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \Theta a d\Theta = 0$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \Theta a d\Theta = \rho \frac{V\Gamma}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta = -\rho V\Gamma$$

Эта сила действует в направлении, перпендикулярном направлению скорости. Она работы не совершает, поэтому может быть отлична от 0. Ее появление очевидно из физических соображений

(рисунок)

скорость больше

давление меньше

скорость меньше

давление больше



## Лекция 9

### Движение шара в жидкости. Потенциальное обтекание.

Пусть шар радиуса  $a$  движется в жидкости со скоростью  $U$ . Найдем

- 1) поле скорости
- 2) распределение давления по поверхности шара
- 3) присоединенную массу.

Постановка задачи

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=a} = U \cos \Theta \\ \varphi|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \end{cases}$$

Лапласиан в сферических переменных

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left( \sin \Theta \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} \right) = 0$$

Решение ищем методом разделения переменных

$$\varphi = Q(\Theta)R(r)$$

$$\frac{\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right)}{R} + \frac{\frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right)}{\sin \Theta Q} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) - 2R = 0 \\ \frac{d}{d\Theta} \left( \sin \Theta \frac{dQ}{d\Theta} \right) + 2Q \sin \Theta = 0 \end{cases}$$

$$Q = \cos \Theta; \quad -2 \sin \Theta \cos \Theta + 2 \cos \Theta \sin \Theta = 0; \quad \pi = 2$$

$$R = r^m; \quad m(m+1) - 2 = 0$$

$$m^2 + m - 2 = 0; \quad m = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$m = -2; \quad m = 1.$$

При  $r \rightarrow \infty$ , этому условию соответствует  $m = -2$ , т.е.  $\varphi = \frac{A \cos \Theta}{r^2}$

Из граничного условия на поверхности сферы имеем

$$\frac{-2A}{a^3} \cos \Theta = U \cos \Theta; \quad A = -\frac{Ua^3}{2}; \quad \varphi = -\frac{Ua^3 \cos \Theta}{2r^2}$$

Поле скорости

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3 \cos \Theta}{r^3}; \quad v_\psi = \frac{1}{r \sin \Theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = 0 \quad v_\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \Theta} = \frac{Ua^3}{2r^3} \sin \Theta$$



## Распределение давления по поверхности сферы

Перейдем в СО, в которой тело покоится. Тогда скорость

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_r \vec{r}_0 + v_\Theta \vec{\Theta}_0 - \vec{U} \\ U_r &= U \cos \Theta; \quad U_\Theta = -U \sin \Theta \\ v_r &= \left( \frac{Ua^3}{r^3} - U \right) \cos \Theta; \quad v_\Theta = \left( \frac{Ua^3}{2r^3} + U \right) \sin \Theta\end{aligned}$$

Распределение давления на поверхности сферы найдем по теореме Бернулли

$$\begin{aligned}p|_{r=a} + \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} \Big|_{r=a} &= p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \\ p &= p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} \sin^2 \Theta \frac{9}{4} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \left( 1 - \frac{9}{4} \sin^2 \Theta \right)\end{aligned}$$

## Присоединенная масса

1. Сначала находим кинетическую энергию движения жидкости.

$$\begin{aligned}E &= \int \frac{\rho(v_r^2 + v_\Theta^2)}{2} dV = 2\pi \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \left[ \frac{\rho U^2 a^6}{2} \left( \cos^2 \Theta + \frac{\sin^2 \Theta}{4} \right) \right] = \\ &= 2\pi \int_a^\infty \frac{dr}{r^4} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta \frac{3 \cos^2 \Theta + 1}{4} \frac{\rho U^2 a^6}{2} = \\ &= \rho U^2 a^6 \pi \frac{a^{-3}}{3} \left[ -\frac{\cos^3 \Theta + \cos \Theta}{4} \right]_0^\pi = \frac{\rho U^2 a^3 \pi}{3}\end{aligned}$$

По определению присоединенной массы

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2}$$

Сравнивая эти два выражения, имеем:

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi}{3} \rho a^3$$

Присоединенная масса равна 1/2 массы жидкости в объеме тела.

Вычислим импульс жидкости непосредственно

$$\begin{aligned}p_x &= 2\pi \rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi v_x \sin \Theta d\Theta \\ v_x &= (\vec{v} \vec{x}_0) = v_r (\vec{v}_0 \vec{x}_0) + v_\Theta (\vec{\Theta}_0 \vec{x}_0) = v_r \cos \Theta - v_\Theta \sin \Theta \\ p_x &= 2\pi \rho \int_a^\infty r^2 dr \int_0^\pi \left( \frac{Ua^3}{r^3} \cos^2 \Theta - \frac{Ua^3}{2r^3} \sin^2 \Theta \right) \sin \Theta d\Theta =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi\rho Ua^3 \int_a^\infty \frac{dr}{r} \int_0^\pi \frac{3\cos^2\Theta - 1}{2} \sin\Theta \, d\Theta = \\
&= 2\pi\rho a^3 \ln r \Big|_a^\infty \frac{\cos\Theta - \cos^3\Theta}{2} \Big|_0^\pi = \infty. \quad 0 \text{ — неопределенность.}
\end{aligned}$$

Таким способом нельзя находить импульс жидкости и присоединенную массу. А надо ее находить из кинетической энергии жидкости.

## Плоское безвихревое течение несжимаемой жидкости

Мы будем рассматривать плоское течение жидкости. При этом имеется 2 компоненты скорости  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , которые зависят от двух координат. Условие несжимаемости жидкости имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$$

Отсюда ясно, что можно ввести такую функцию  $\Psi$ , что  $v_x = \partial\Psi / \partial y$ ;  $v_y = -(\partial\Psi / \partial x)$ , тогда  $\text{div } \vec{v} = 0$  удовлетворяется тождественно.

Функция  $\Psi$  называется функцией тока. Чтобы выяснить почему, найдем уравнение линий тока:



отсюда ясно, что на линии тока функция  $\Psi = \text{const}$ . На разных линиях тока значение функции  $\Psi$  свое. Уравнение линии тока:

$$\Psi(x, y) = c.$$

Функция тока определяется с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока определена в любом 2-мерном течении. Предположим теперь, что течение потенциально, т.е.

$$\vec{v} = \nabla \varphi; \quad \text{т.е. } v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

С использованием выражений для компонент скорости через функцию тока получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

Найдем уравнение для функции тока потенциального течения

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$$

отсюда  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$ , т.е. функция тока тоже гармоническая функция.

Если ввести комплексную функцию  $W = \varphi + i\Psi = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y)$ , то эти условия представляют собой известные условия того, что  $W$  есть аналитическая функция от одной переменной  $Z = x + iy$ , (условия Коши-Римана), т.е.

$$W = W(Z) = \varphi + i\Psi$$

Итак, если мы возьмем любую аналитическую функцию  $W(Z)$ , то она является комплексным потенциалом; она определяет течение, потенциал которого  $\varphi = \text{Re } W(Z)$ , а

функция тока  $\Psi = \text{Im } W(Z)$ . При этом линии тока  $\Psi(x, y) = c_1$ , линии равного потенциала  $\varphi(x, y) = c_2$ .

1. Линии тока и линии равного потенциала взаимно перпендикулярны. Для того, чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что  $\nabla \varphi$  и  $\nabla \Psi$  взаимно ортогональны

$$\nabla \varphi \nabla \Psi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -v_x v_y + v_y v_x = 0$$

2. Пусть имеется потенциальное течение с потенциалом  $\varphi$  и функцией тока  $\Psi$ . Тогда течение с функцией тока  $\varphi$  также будет потенциальным и будет иметь потенциал  $-\Psi$ . Действительно, 1-е течение имеет комплексный потенциал

$$W = \varphi + i\Psi$$

Рассмотрим аналитическую функцию

$$-iW = \Psi - i\varphi$$

Сразу видно, что потенциал этого течения  $\Psi$ , а функция тока  $-\varphi$ .

Тогда линии тока 1-го течения совпадают с линиями равного потенциала 2-го и наоборот. Такие течения называются сопряженными. Свойство сопряженности часто применяется при построении плоских потенциальных течений.

Зная комплексный потенциал  $W(Z)$ , можно определить проекции вектора скорости  $v_x$  и  $v_y$

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi}{\partial x} = v_x - iv_y$$

3. Пусть имеется кривая в плоскости  $(x, y)$ , соединяющая две точки (1 и 2). Найдем .....

1) Объемный расход жидкости через эту кривую  $N$

2) Циркуляцию поля скорости по этой кривой  $\Gamma$

$$1) N = \int_1^2 v_n de = \int_1^2 (v_x n_x + v_y n_y) de =$$

$$\vec{n} = (n_x, n_y) \text{ — вектор нормали; } \vec{\tau} = (-n_y, n_x) \text{ — касательный вектор}$$

$$= \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \Psi}{\partial x} n_y \right) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial y} \tau_y + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \tau_x \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \Psi}{\partial e} de = \Psi_2 - \Psi_1$$

$$2) \Gamma = \int_1^2 v_e de = \int_1^2 (v_x \tau_x + v_y \tau_y) de = \int_1^2 \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \tau_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \tau_y \right) de = \int_1^2 \frac{\partial \varphi}{\partial e} de = \varphi_1 - \varphi_2$$

Поскольку  $W = \varphi - i\varphi$  то  $W_2 - W_1 = \Gamma + iN$ .

### Примеры комплексных потенциалов и соответствующих им плоских безвихревых потоков идеальной несжимаемой жидкости.

1.  $W(Z) = aZ$ , где  $a$  — комплексная постоянная

компоненты скорости

$$dW/dZ = a = v_x - iv_y$$

$$v_x = \text{Re } a; \quad v_y = -\text{Im } a$$

Компоненты скорости постоянны. Вектор скорости имеет наклон  $\text{tg} \Theta = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\text{Im } a}{\text{Re } a}$ ;

если  $a = |a| e^{i\Theta_a}$ , то  $\Theta = -\Theta_a$ .

Потенциал:  $\varphi = \operatorname{Re} W = X \operatorname{Re} a - y \operatorname{Im} a = v_x x + v_y y$ .

Функция тока:  $\Psi = + \operatorname{Im} W = X \operatorname{Im} a + y \operatorname{Re} a = -X v_y + y v_x$ .

Линии тока:  $y v_x - x v_y = \text{const}$ ;  $y = x(v_y / v_x) + c$ .

(прямые, с наклоном  $\operatorname{tg} \Theta$  к оси  $x$ , т.е.  $\parallel \vec{v}$ )

Линии равного потенциала  $y = -(v_y / v_x)x + c_1$  — ортогональные к линиям тока.

Сопряженное течение:

$$\varphi = -x v_y + y v_x; \quad \Psi = -v_x x - v_y y$$

## 2. Логарифмическая функция:

$$W = A \ln Z$$

а) пусть  $A$  — действительная величина. Перейдем к цилиндрическим координатам  $Z = r e^{i\theta}$

тогда  $W = A (\ln r + i\theta)$

потенциал  $\varphi = A \ln r$

функция тока  $\Psi = A \theta$

Линии тока  $\theta = \text{const}$  — прямые линии, проходящие через начало координат.

Линии равного потенциала  $r = \text{const}$  — окружности.

Течение соответствует источнику или стоку.

Вычислим количество жидкости, выходящей из источника (расход).

$$Q = \int_0^{2\pi} v_n r d\varphi; \quad v_n = v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r}$$

$$Q = 2\pi A; \quad A = \frac{Q}{2\pi} \quad \text{— смысл действительного коэффициента } A \text{ комплексного потенци-$$

$$\text{ального источника в начале координат } W = \frac{Q}{2\pi} \ln Z.$$

б) Пусть  $A$  — чисто мнимая величина  $A = iB$

Тогда  $W = iB \ln Z = -B\theta + iB \ln r$

потенциал  $\varphi = -B\theta$

функция тока  $\Psi = B \ln r$

Линии тока  $r = \text{const}$  — окружности

линии равного потенциала  $\theta = \text{const}$  — прямые, проходящие через начало координат.

Сопряженное к 1-му течению.

$$\text{Скорость } v_r = 0; \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{B}{r}$$

Течение представляет собой круговое движение вокруг начала координат. Найдем циркуляцию поля скорости в таком течении.

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} v_\theta r d\theta = -B \cdot 2\pi; \quad \rightarrow \quad b = -\frac{\Gamma}{2\pi}$$

Комплексный потенциал циркуляционного течения:

$$W = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

в) Комплексное  $A$ . В силу линейности уравнений, которым удовлетворяют комплексные потенциалы, можно воспользоваться принципом суперпозиции. Пусть

$$W = \frac{Q - i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Течение представляет собой суперпозицию источника и циркуляционного течения. Вектора скорости складываются.

$$\text{Потенциал } \varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln r + \frac{\Gamma Q}{2\pi}$$

$$\text{Функция тока } \psi = \frac{Q}{2\pi} \Theta - \frac{\Gamma \ln r}{2\pi}$$

Линии тока  $\Theta = \frac{\Gamma}{Q} \ln r$  — спираль.

$$3. \quad W = \frac{1}{Z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2};$$

$$\text{Потенциал } \varphi = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Функция тока } \psi = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{Линии тока } -\frac{y}{x^2 + y^2} = c; \quad x^2 + y^2 = -\frac{y}{c}; \quad x^2 + \left(y + \frac{1}{2c}\right)^2 = \frac{1}{4c^2}$$

Окружности с центром, смещенным относительно оси  $Y$ .

Линии равного потенциала

$$x^2 + y^2 = \frac{x}{c_1}; \quad y^2 + \left(-\frac{1}{2c_1}\right)^2 = \frac{1}{4c_1^2}$$

Чтобы выяснить смысл такого течения, рассмотрим сумму комплексных потенциалов источников, один из которых расположен левее оси  $Y$ , а второй — правее. Знаки расходов  $Q$  будем считать различными. Тогда суммарный потенциал

$$W = \frac{Q}{2\pi} \ln(Z - h) - \frac{Q}{2\pi} \ln(Z + h)$$

Теперь устремим  $h$  к 0, изменяя величину  $Q$  так, что  $Q2h = \text{const} = -m$ , т.е.  $Q = -\frac{m}{2h}$ . При этом

$$W = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-m}{2h} \frac{[\ln(Z - h) - \ln(Z + h)]}{2\pi} = \frac{+m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Z} \ln Z = \frac{+m}{2\pi Z}$$

Таким образом, получается комплексный потенциал диполя. Если  $Q > 0$  — источник расположен правее оси  $Y$ , а сток — левее оси  $Y$ , при  $Q < 0$  — наоборот.

#### 4. Суперпозиция поля диполя и однородного потока

$$W = W_1 + W_2$$

Воспользуемся принципом суперпозиции и рассмотрим, какое получится поле. Комплексный потенциал:

$$W = VZ + \frac{m}{2\pi Z}; \quad V \text{ и } m \text{ — действительны.}$$

Функция тока

$$\psi = \text{Im} W = Vy - \frac{my}{2\pi(y^2 + x^2)}$$

$$\text{Линии тока : } y \left( V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} \right) = \text{const}$$

Линия тока  $c = 0$ :  $y = 0$ ;  $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V}$  — это 2 линии:

окружность радиусом  $a = \sqrt{\frac{m}{2\pi V}}$  и ось  $x$ :  $y = 0$ .

Остальные линии получаются при  $c \neq 0$

Поля скорости:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V - \frac{m}{2\pi(y^2 + x^2)} + \frac{my^2}{2\pi(y^2 + x^2)^2}$$

$$v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{mx_y}{2\pi(y^2 + x^2)^2}$$

(Точки, в которых скорость равна 0, называются критическими:  $v_x = 0$ , и  $v_y = 0$  при  $x = \pm a$  (точки  $A$  и  $B$ ).

Чтобы качественно изобразить картину линий тока, надо определить эту картину на окружности, а затем продолжить внутри и вне окружности непрерывно.

На окружности  $y^2 + x^2 = \frac{m}{2\pi V} = a^2$  нормальная составляющая скорости равна 0.

Это означает, что поле скорости вне окружности соответствует обтеканию цилиндра радиуса  $a$  потоком, скорость которого на  $\infty$  равна  $V$ . Тогда дипольный момент  $m$  должен быть выбран  $a^2 \cdot 2\pi V$ , т.е. поле обтекания кругового цилиндра имеет комплексный потенциал

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad \text{при} \quad |Z| \geq a$$

Внутри круга радиуса  $a$  имеем поле диполя внутри цилиндра. Оно соответствует полю обтекания очень малого цилиндра, движущегося внутри цилиндра много большего радиуса в момент, когда малый цилиндр находится в центре большого.

5. Рассмотрим теперь суперпозицию поля обтекания кругового цилиндра и кругового движения вокруг начала координат, т.е.

$$W_1 = VZ + \frac{Va^2}{Z} \quad W = W_1 + W_2$$

$$W_2 = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln Z$$

Качественная картина обтекания  
(рисунок)

Определим положение критических точек, в которых скорость равна 0. Если равна 0 скорость, значит равна 0 и сопряженная скорость, т.е.  $\frac{dW}{dZ} = 0$

$$V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z} = 0$$

$$Z^2 - \frac{i\Gamma Z}{2\pi V} - a^2 = 0$$

$$Z = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}$$

$$1) \text{ Если } a^2 > \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}, \text{ то } x_{1,2} = \sqrt{a^2 - \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}}; y = \frac{i\Gamma}{4\pi V}$$

В этом случае имеется 2 критические точки. Поскольку  $x^2 + y^2 = a^2$ , то они лежат на поверхности цилиндра (рис. а)

$$2) \text{ Если } a^2 = \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2}, \text{ то критические точки сливаются (рис. б)}$$

$$3) \text{ Если } \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} > 0, \text{ то } x = 0; y = \frac{i\Gamma}{4\pi V} \pm i\sqrt{\frac{\Gamma^2}{16\pi^2 V^2} - a^2}.$$

Одна из точек лежит внутри цилиндра (вне физического пространства), другая — вне цилиндра (рис. в)

Вычислим силу, действующую на цилиндр.

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} p \vec{r}_0 a d\Theta$$

Давление можно определить по формуле Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{v}|^2}{2} = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{|\vec{v}_\infty|^2}{2}$$

$$|\vec{v}|^2 = |v|^2, \text{ где } v = \frac{dW}{dZ} = V - \frac{Va^2}{Z^2} - \frac{i\Gamma}{2\pi Z}$$

$$|\vec{v}_\infty|^2 = |v|^2 \Big|_\infty$$

При  $Z \rightarrow \infty$ ;  $v_\infty = V$ .

Найдем  $V$  на круге  $Z = re^{i\Theta}$ ;  $r = a$ , тогда

$$v = V - Ve^{-2i\Theta} - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta}$$

$$v = e^{-2i\Theta} V (e^{2i\Theta} - e^{-2i\Theta}) - \frac{i\Gamma}{2\pi a} e^{-i\Theta} = ie^{2i\Theta} \left[ 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right]$$

$$|v|^2 = \left( 2V \sin \Theta - \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 = 4V^2 \sin^2 \Theta - \frac{2V\Gamma}{2\pi a} \sin \Theta + \frac{\Gamma^2}{16\pi^2 a^2}$$

Отсюда

$$p = p_\infty + \frac{\rho V^2}{2} - 2V^2 \rho \sin^2 \Theta + \frac{V\Gamma}{2\pi a} \sin \Theta - \frac{\Gamma^2}{32\pi^2 a^2}$$

Найдем проекции силы

$$F_x = - \int_0^{2\pi} p \cos \Theta a d\Theta = 0$$

$$F_y = - \int_0^{2\pi} p \sin \Theta a d\Theta = \rho \frac{V\Gamma}{\pi a} \int_0^{2\pi} \sin \Theta d\Theta = -\rho V\Gamma$$

Эта сила действует в направлении, перпендикулярном направлению скорости. Она работы не совершает, поэтому может быть отлична от 0. Ее появление очевидно из физических соображений

(рисунок)

скорость больше

давление меньше

скорость меньше

давление больше

эффект Магнуса

боковая сила



## Применение метода конформных отображений для решения задачи обтекания цилиндрических тел

Итак, мы построили решение эталонных задач.

1. Безграничный поток. От этого решения легко перейти к ограниченному потоку, например, в верхней полуплоскости.

$$W(Z) = V_0 Z, \text{ где } V_0 \text{ — действительная величина при } y \geq 0. \quad (10.1)$$

2. Обтекание кругового цилиндра с циркуляцией.

$$W = VZ + \frac{Va^2}{Z} - \frac{i\Gamma}{2\pi} nZ; \quad |Z| \geq a \quad (10.2)$$

Пусть мы произвели конформное преобразование — переход от комплексной переменной  $Z$  к комплексной переменной  $\eta$  с помощью аналитической функции  $f$ , т.е.

$$Z = f(\eta)$$

Тогда от комплексного потенциала  $W(Z)$  мы перейдем к комплексному потенциалу

$$W_1(\eta) = W(f(\eta)), \text{ где } \eta = \zeta + i\eta$$

Аналитическая функция  $Z = x(\zeta, \eta) + iy(\zeta, \eta)$  задает преобразование координат от  $(x, y)$  к  $(\zeta, \eta)$  со свойствами Коши-Римана. При этом, если  $W(Z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$ , то  $W_1(\eta) = \Phi(\zeta, \eta) + \Psi(\zeta, \eta) = \Phi(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta)) + i\Psi(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta))$

Линии тока в плоскости  $Z$  соответствовали  $\psi(x, y) = \text{const}$ . Они переходят в линии тока  $\Psi(\zeta, \eta) = \Psi(x(\zeta, \eta), y(\zeta, \eta))$ . Т.е. линии тока переходят в линии тока. Поверхность твердого тела является линией тока (поверхность цилиндра или поверхность плоскости). При конформном преобразовании эта поверхность переходит также в линию тока, которую можно считать поверхностью нового тела: при этом картину линий тока получаем автоматически. Здесь возможны 2 постановки задачи.

1. Прямые задачи. Известно выражение для векторного потенциала эталонной задачи, например, в задаче обтекания цилиндра или полуплоскости. Произведем конформное преобразование. При этом можно решить задачи обтекания каких то новых тел.

2. Обратная задача (более сложная). Пусть имеется цилиндрическое тело заданной формы (ограниченное), например, в форме крыла. Надо найти преобразование координат, переводящее круг в форму заданного контура, а внешнюю область круга — в область течения вокруг тела. После того, как эта задача решена, решение задачи обтекания крыла находится сразу, поскольку комплексный потенциал течения вокруг цилиндра известен.

Мы приведем здесь простейший пример решения 1-й задачи.

Пусть задан комплексный потенциал обтекания полуплоскости

$$W = VZ; \quad y \geq 0. \text{ Рассмотрим}$$

$$\text{конформное преобразование вида } Z = \left(\frac{\zeta}{R}\right)^n \cdot R \quad (10.3)$$

$$\text{Комплексный потенциал } W \text{ перейдет в } W_1 = RV \left(\frac{\zeta}{R}\right)^n \quad (10.4)$$

В этом случае

Полупрямая  $y = 0$ ;  $x > 0$ , т.е.  $Z = re^{i\Theta}$  перейдет в  $\zeta = R\left(\frac{Z}{R}\right)^{1/n} = R\left(\frac{r}{R}\right)^{1/n} \Big|_{\Theta=0}$

Полупрямая  $y = 0$ ;  $x < 0$ , т.е.  $Z = re^{i\pi}$  переходит в  $\zeta = R\left(\frac{r}{R}\right)^{1/n} e^{i\frac{\pi}{n}}$

Таким образом, с помощью указанного преобразования от задачи об обтекании полуплоскости перешли к задаче об обтекании угла ( $n > 1$ ) или (клина  $n < 1$ ). Рассмотрим линии тока, соответствующие данному комплексному потенциалу.

Рассмотрим комплексный потенциал  $W_1 = V\left(\frac{\rho}{R}\right)^n Re^{i\Theta n} = R\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\cos n\Theta + i \sin n\Theta)$  (10.4)

Соответствующие ему линии тока имеют вид:  $\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sin n\Theta = \text{const}$  Э

а потенциал скорости-  $\phi = VR\left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos n\Theta$ . Радиальная и азимутальная компоненты скорости имеют вид:

$$\begin{aligned} v_\rho &= \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = nVR\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-1} \cos n\Theta \\ v_\theta &= -\frac{\partial \phi}{\rho \partial \Theta} = nVR\left(\frac{\rho}{R}\right)^{n-1} \sin n\Theta \end{aligned} \quad (10.4)$$

При  $n > 1$   $v_\rho; v_\theta \Big|_{\rho=0} = 0$

При  $n < 1$   $v_\rho; v_\theta \Big|_{\rho=0} = \infty$

Найдем распределение давления вдоль угла по формуле Бернулли

$$\frac{p_\infty}{\rho} + \frac{V_\infty^2}{2} = \frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}$$

$$1. \theta = 0; \quad p = C - \frac{(nVR)^2}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{2(n-1)}$$

При  $n > 1$   $p$  растет при приближении к вершине угла (1)

При  $n < 1$   $p$  падает при приближении к углу клина.

Как мы увидим ниже, в случае уменьшения скорости вдоль поверхности (или роста давления) в реальной жидкости потенциальное течение перестает описывать реальное течение жидкости. При этом происходит отрыв линии тока и образуется область не потенциального течения.

### Потенциальные волны на поверхности тяжелой жидкости

Имеется слой жидкости глубины  $H$ . На поверхности распространяется волна, т.е. свободная поверхность искривлена. Определить, как будет происходить течение жидкости: 1) как будет меняться во времени свободная поверхность; 2) какие будут поля скорости, давления и т.д.

Движение считаем потенциальным, т.е.  $\vec{v} = \nabla \phi$

$$\Delta \phi = 0.$$

Это новый тип задач — задачи со св

свободной поверхностью. Надо поставить граничные условия на свободной поверхности. Свободная поверхность — это тангенциальный разрыв. На тангенциальном разрыве выполняются следующие граничные условия:

1.  $[v_n - U_n]_S = 0$ , где  $U_n$  — нормальная компонента скорости разрыва, и
2.  $p_1|_S = p_2|_S$ .

Выразим условие (1) на разрыве через форму поверхности разрыва. Пусть она задается уравнением  $f(x, z, t) = 0$ . Условие (1) означает, что нормальная компонента скорости частицы среды относительно поверхности разрыва равна 0, т.е. если частица находилась на поверхности разрыва, то она на ней и остается. Иными словами, если частицы с координатами  $(\zeta, \eta)$  в начальный момент времени находились на поверхности  $f_A(\zeta, \eta) = 0$ , то они на ней и остаются, т.е. в лагранжевых переменных  $f_A$  не зависит от времени,

т.е.  $\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} = 0$ . Выразим  $x, z$  через  $\zeta, \eta$ , тогда уравнение поверхности

$$f_A(\zeta, \eta) \equiv f(x(\zeta, \eta, t); z(\zeta, \eta, t); t), \text{ т.е.}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\zeta, \eta} = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad \text{но} \quad \frac{\partial x}{\partial t} = v_x; \quad \frac{\partial z}{\partial t} = v_z,$$

т.е. (1)-е граничное условие принимает вид:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} v_x + \frac{\partial f}{\partial z} v_z \right|_{f(x, z, t)=0} = 0$$

Допустим, что  $f$  задана в явном виде:

$$Z - \zeta(x, t) = 0$$

тогда 1-ое граничное условие примет вид:

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_{Z=\zeta(x, t)} = v_z$$

Кроме того, следует поставить граничное условие на дне — это условие непротекания на

дне  $\left. \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right|_{Z=-H} = 0$ . Это, так называемые кинематические Г.У. В принципе, мы полностью

поставили кинематическую задачу:

$$\begin{cases} \Delta \varphi = 0 \\ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right|_{Z=\zeta(x, t)} = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right|_{Z=-H} = 0 \end{cases}$$

Если известна форма свободной поверхности  $Z = \zeta(x, t)$ , то задачу можно решить. Но форма свободной поверхности заранее неизвестна. Ее также надо определить. Для этого и требуется условие (2) — динамическое условие на свободной поверхности:

$$p_1|_{Z=\zeta(x, t)} = p_2|_{Z=\zeta(x, t)}$$

$p_2 = p_a$  — это обычно давление атмосферного воздуха;  $p_1$  — давление жидкости. Оно может быть найдено из обобщения интеграла Бернулли для потенциальных течений (интеграл Коши-Лагранжа).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 + \frac{p_1}{\rho} + gZ = 0$$

При  $Z = \zeta(x, t)$  имеем:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{Z=\zeta(x,t)} + \frac{p_a}{\rho} \Big|_{Z=\zeta(x,t)} + g\zeta = 0$$

Если пренебречь вариациями атмосферного давления и считать  $p_a = \text{const}$ , то без ограничения общности эту константу можно опустить, тогда динамическое граничное условие (2) примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{Z=\zeta(x,t)} + g\zeta = 0$$

Теперь мы имеем полностью поставленную задачу для определения  $\zeta$  и  $\psi$ . Но она очень сложная, нелинейная. До настоящего времени она не решена. Мы будем рассматривать

более простую задачу. Предположим, что мала “крутизна” волны, т.е. величина  $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \ll 1$ .

В этом случае можно искать решение уравнений для возмущений на поверхности воды в виде разложения в ряд по этому малому параметру. Разложим в начале кинематическое граничное условие. Предварительно сделаем оценки: из уравнения Лапласа для потенциала следует, что  $\psi_{zz} = -\psi_{xx}$ , т.е. масштабы по  $x$  и  $z$  сравнимы и  $L_x \sim L_z \sim L$ .

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Z=0} + \frac{\partial \varphi}{\partial t \partial Z} \Big|_{Z=0} + \dots$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}$  — пренебрежимо мало

$$\frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=\zeta} = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=0} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} \Big|_{Z=0} \zeta + \dots$$

Итак, кинематическое граничное условие принимает вид:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0$$

Динамическое граничное условие примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Z=0} + g\zeta = 0$$

Итак имеем постановку задачи:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = 0 \\ \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right|_{Z=0} = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right|_{Z=0} + g\zeta = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \right|_{Z=-H} = 0 \end{array} \right.$$

Решение линейной задачи можно искать в виде:

$$\varphi = \operatorname{Re} \left[ \varphi_1(z) e^{-i(\omega t - kx)} \right],$$

тогда имеем уравнения для комплексной амплитуды:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi_1}{dz^2} - k^2 \varphi_1 = 0 \\ -i\omega \zeta_1 - \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_0 = 0 \\ -i\omega \varphi_1|_0 + g\zeta_1 = 0 \\ \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{Z=-H} = 0 \end{array} \right.$$

Решение уравнения Лапласа

$$\varphi = Ae^{kz} + Be^{-kz}$$

Исключая  $\zeta$ , имеем

$$\omega^2 \varphi_1 - g \left. \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right|_{Z=0} = 0$$

Граничное условие на дне дает

$$-Ae^{-kH} + Be^{kH} = 0 \quad B = +Ae^{-2kH} \quad \varphi = 2Ae^{-kH} \left( Chk(Z + H) \right)$$

$$\omega^2 Chk(H) - gksh(H)k = 0$$

Отсюда получаем, что частота и волновое число гармонической волны связаны следующим образом:

$$\omega^2 = gkth(kH)$$

Это соотношение получено в предположении, что давление на поверхности равно 0. Но фактически оно может быть отлично от 0.

Рассмотрим, какие здесь могут быть возможности.

#### 1. Ветер над водной поверхностью.

В этом случае  $p_a \neq 0$ , т.е. динамическое граничное условие примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{z=\zeta} + g\zeta = -\frac{p_a}{\rho}$$

В линейном приближении для гармонической функции  $\frac{p_a}{\rho} = (d + i\beta)\zeta$

$$-i\varphi_1 + g\zeta = -(\alpha + i\beta)\zeta$$

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  — составляющие колебаний давления воздуха над взволнованной поверхностью в фазе и в квадратуре со смещением.  $\alpha$  и  $\beta$  являются функциями  $\omega$ . В силу того, что это давление воздуха  $p_a$  имеет порядок  $\rho_a v^2$ , где  $v^2$  — скорость в воздухе, таким образом  $\alpha$  и  $\beta \sim S = \frac{\rho_a}{\rho_w} \sim 10^{-3}$

разом  $\alpha$  и  $\beta \sim S = \frac{\rho_a}{\rho_w} \sim 10^{-3}$

С учетом колебаний давления воздуха можно получить:

$$\omega^2 = [g + S(\alpha + i\beta)] k \operatorname{ctg} K$$

Величины  $\alpha$  и  $\beta$ , как правило, дают малые поправки в силу малости параметра  $S$ , но если величиной  $\alpha$  можно легко пренебречь, то величина  $\beta$  дает новый эффект. В ее присутствии частота волны становится комплексной, что соответствует нарастанию или затуханию волн  $e^{-i\omega t}$   $\operatorname{Im} \omega > 0$ , соответствующее нарастанию волны на воде получается при  $\beta > 0$ . Существуют теории генерации волн на воде ветром, в которых величины  $\beta$  вычисляются на основе решения динамических уравнений. Мы их рассмотрим позже.

### Линии тока и траектории

Потенциал:  $\varphi = \Phi_0 \operatorname{ch} k(Z - H) \cos(kx - \omega t)$

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\Phi_0 k \operatorname{ch} k(Z - H) \sin(k(x - \omega t)) = \frac{\partial \psi}{\partial Z}$$

$$v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial Z} = +\Phi_0 k \operatorname{sh} k(Z - H) \cos(kx - \omega t) = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Функция тока  $\Psi = -\Phi_0 \operatorname{sh} k(Z - H) \sin(kx - \omega t)$

Линии тока  $\Phi_0 \operatorname{sh} k(Z - H) \sin(kx - \omega t) = \operatorname{const}$

Траектории:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v_x & x|_{t=0} &= x_0 \\ \frac{dZ}{dt} &= v_z & Z|_{t=0} &= Z_0 \end{aligned} \quad \text{лагранжевы координаты}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\Phi_0 k \operatorname{ch} k(Z - H) \sin(k(x - \omega t)) \\ \frac{dZ}{dt} = +\Phi_0 k \operatorname{sh} k(Z - h) \cos(kx - \omega t) \end{cases}$$

Предположим, что  $ka \ll 1$ , где  $a$  — амплитуда возвышенной поверхности. Из кинематического граничного условия  $\omega a \sim \Phi_0 k \operatorname{ch} kH$ , т.е.

$$\Phi_0 \sim \frac{\omega a}{\operatorname{ch} kH}$$

Будем искать решение системы в виде разложения по малому  $a$ .

$$a^0: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 & x = x_0 \\ \frac{dZ}{dt} = 0 & Z = Z_0 \end{cases} \quad a^{(1)}: \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\Phi_0 k chk(Z_0 - H) \sin(kx_0 - \omega t) \\ \frac{dZ}{dt} = +\Phi_0 k shk(Z_0 - H) \cos(kx_0 - \omega t) \end{cases}$$

$$x = x_0 + \frac{\Phi_0 k}{\omega} chk(Z_0 - H) \cos(kx_0 - \omega t)$$

$$Z = Z_0 - \frac{\Phi_0 k}{\omega} shk(Z_0 - H) \sin(kx_0 - \omega t)$$

Отсюда траектории (на об.стр.)

$$\frac{(x - x_0)^2}{(shk(Z_0 - H))^2} + \frac{(Z - Z_0)^2}{(chk(Z_0 - H))^2} = \frac{\Phi_0^2 k^2}{\omega^2}$$

Из кинематического граничного условия имеем:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial Z}$$

Если  $\zeta = Re a e^{-i(\omega t - kx)}$ , то  $-i\omega a = \Phi_0 k ch kH$ , отсюда  $|a| = \left| \frac{\Phi_0 k}{\omega} \right| ch kH$

Окончательно получаем траектории — эллипсы

$$\frac{(x - x_0)^2}{sh^2 k(Z_0 - H)} + \frac{(Z - Z_0)^2}{ch^2 k(Z_0 - H)} = \frac{a^2}{ch^2 kH}$$

Предельные случаи:

1) Если  $kH \gg 1$ , а  $Z_0 < H$ , тогда траектории окружности

$$(x - x_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = a^2 e^{-2kZ_0}$$

2. Учтем эффект поверхностного натяжения на поверхности воды. В этом случае давление на поверхности воды будет равно  $p$ , такое, что  $p - p_a = \frac{\varepsilon}{R}$ , где  $R$  — радиус кривизны поверхности, а  $\varepsilon$  — коэффициент поверхностного натяжения.

Динамическое граничное условие примет вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{Z=\zeta} + g\zeta + \frac{p}{\rho} = 0$$

$$p = p_a + \frac{\varepsilon}{R}$$

Если теперь мы не будем учитывать вариации давления воздуха на поверхности воды, то получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{Z=\zeta} + g\zeta + \frac{\varepsilon}{R} = 0$$

Радиус кривизны поверхности  $Z = \zeta(x, t)$  выражается следующим образом:

$$\frac{1}{R} = \frac{-\zeta_{xx}}{\sqrt{(1 + \zeta_x^2)^3}}$$

Тогда имеем динамическое граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} |\nabla \varphi|^2 \Big|_{Z=\zeta} + g\zeta - \frac{\varepsilon \zeta_{xx}}{\rho \sqrt{(1 + (\zeta_x^2)^2)^3}} = 0$$

Линеаризованная система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Z^2} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{Z=0} + g\zeta = \frac{\varepsilon}{\rho} \zeta_{xx} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=0} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Z} \Big|_{Z=-1} = 0 \end{cases}$$

Решая аналогично, получим дисперсионное уравнение в виде:

$$\omega^2 = \left( kg + k^3 \frac{\varepsilon}{\rho} \right) thkH$$

Рассмотрим разные предельные случаи.

1. Приближение глубокой воды:  $kH \gg 1$ . В этом случае  $thkH \Rightarrow 1$  и дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = kg + k^3 \frac{\varepsilon}{\rho}$$

Решение уравнения Лапласа:  $\varphi = Ae^{kZ}$  (при  $\begin{matrix} Z \rightarrow -\infty \\ \varphi \rightarrow 0 \end{matrix}$ )

1.1. Если  $\frac{k^2 \varepsilon}{\rho} \ll g$ ;  $k \gg \sqrt{\frac{\rho g}{\varepsilon}}$ , то  $\omega^2 = kg$ ; — это волны, для которых несущественен капиллярный эффект, так называемые гравитационные волны. Для воды это волны с длиной более нескольких сантиметров.

Фазовая скорость гравитационных волн  $c_\phi = \sqrt{\frac{g}{k}}$

Групповая скорость гравитационных волн  $c_{gp} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2} c_\phi$

1.2. Если  $k \gg \sqrt{\frac{\rho g'}{\varepsilon}}$ , то  $\omega^2 = k^3 \frac{\varepsilon}{\rho}$

Это короткие капиллярные волны.

Фазовая скорость  $c_\phi = \sqrt{\frac{k\varepsilon}{\rho}}$

Групповая скорость  $c_{gp} = \frac{3}{2} c_\phi$



## 2. Приближение мелкой воды $kH \ll 1$

В этом случае капиллярность, как правило, можно не учитывать, тогда  $\omega^2 \approx kH$   $\omega^2 = k^2 Hg$ ;  $\omega = k\sqrt{gH}$  — уравнение длинных волн без дисперсии

$$c_{gp} = \sqrt{gH}$$

$$c_{gp} = \sqrt{gH} = c_{gf}$$

Дисперсионное уравнение для волн на воде:  
(рис.)

### Откуда берется сила поверхностного натяжения

На свободной поверхности жидкости действуют дополнительные силы, связанные с неравноправностью положения молекул, находящихся на поверхности жидкости. Силы межмолекулярного притяжения приводят к “втягиванию” молекул на поверхности вглубь жидкости. Этот эффект эквивалентен тому, что поверхность жидкости оказывается как бы натянутой, как растянутая резиновая пленка. Если ее искривить, у нее возникнет дополнительная сила, действующая на поверхности, которая называется силой поверхностного натяжения. Это приведет к изменению граничных условий на поверхности. Вычислим силу, действующую на поверхности. Пусть поверхность задана уравнением  $Z = \zeta(x, y, t)$ . Выберем элемент поверхности от  $(x, x + \Delta x)(y, y + \Delta y)$ . Пусть на единицу длины элемента поверхности действует сила натяжения  $\varepsilon$ , направленная по касательной к поверхности. В силу изотропии  $\varepsilon$  по всем направлениям одинаково. Результирующая сила будет действовать по нормали. Она будет равна

$$\Delta F = \varepsilon \Delta l_2 \alpha + \varepsilon \Delta l_1 \beta,$$

где  $\Delta l_1, \Delta l_2$  — длины элементов дуги в направлениях  $x$  и  $y$ . Но  $\alpha = \frac{\Delta l_1}{R_1}$ ,  $\beta = \frac{\Delta l_2}{R_2}$ , где

$R_1, R_2$  — радиусы кривизны поверхности в двух выбранных направлениях. Тогда

$$\Delta F = \varepsilon \Delta l_1 \Delta l_2 \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Но  $\Delta l_1 \Delta l_2 = \Delta S$  — площадь выделенного участка. Таким образом на поверхности будет действовать дополнительное поверхностное напряжение, направленное по нормали к поверхности

$$\varepsilon_{nm} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \varepsilon \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

С учетом этого можно написать граничное условие на поверхности раздела воздуха и воды в виде:

$$p_a + \varepsilon \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Big|_s = p_w \Big|_s$$

## Приближение мелкой воды

Это приближение можно рассмотреть отдельно, а не как предельный случай для потенциальных волн. Рассмотрим течение жидкости средней глубины  $H$ . Пусть на ее поверхности распространяется волна с длиной  $L \gg H$ .

Запишем проекции уравнения Эйлера

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \\ u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

$u, w$  — компоненты скорости.

Сделаем оценки. Пусть  $w \sim W$ ;  $u \sim U$ . Тогда из уравнения неразрывности

$$\frac{U}{L} \sim \frac{W}{H}; \quad W \sim U \frac{H}{L}$$

Если масштаб по времени  $T$ , то из 1-го уравнения

$$\frac{U}{T} \sim \frac{1}{\rho} \frac{p}{L}; \quad \text{т.е. } p \sim \frac{\rho UL}{T}$$

Сравним слагаемые во 2-ом уравнении:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

$$\frac{W}{T}; \quad \frac{UW}{L}; \quad \frac{W^2}{H}; \quad \frac{p}{\rho H}; \quad g$$

$$\frac{U}{T} \frac{H}{L}; \quad \frac{U^2}{L} \frac{H}{L}; \quad \frac{U^2}{L} \frac{H}{L}; \quad \frac{UL}{H}; \quad g.$$

Отсюда видно, что  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \gg$  всех остальных слагаемых, и ими можно пренебречь. В этом

случае получается гидростатическое приближение

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0$$

Если плотность постоянна, но

$$p = p_0(x, t) - \rho gZ$$

На поверхности  $Z = h(x, t)$  давление  $p = p_a$ , т.е.

$$p_a = p_0 - \rho gh(x, t); \quad p_0 = p_a + \rho gh(x, t)$$

$$p = p_a + \rho g(Z - h(x, t)).$$

Горизонтальное лагранжево ускорение

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{du}{dt} = +g \frac{\partial h}{\partial x}$$

Отсюда видно, что если в начальный момент времени горизонтальная скорость не зависела от  $Z$ , то она и не будет зависеть от  $Z$ , и горизонтальная проекция уравнения Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Чтобы найти уравнение для  $h$ , проинтегрируем по  $Z$  от дна до поверхности уравнение неразрывности

$$\int_{h(x,t)}^{h(x,t)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) dZ = 0$$

Поскольку  $u$  не зависит от  $Z$ , а  $w(0) = 0$

$$h \frac{\partial u}{\partial x} + w(h) = 0;$$

Учтем кинематические граничные условия на поверхности

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u(h) \frac{\partial h}{\partial x} = w(h),$$

тогда имеем:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(h) = 0$$

Получили систему уравнений мелкой воды:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} u(h) = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Эта система гиперболического типа. В ней возможны решения типа простых волн. В этом случае ищем решение в виде  $u = u(h)$ .

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{du}{dh} = 0 \\ \left( \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{du}{dh} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Уравнение для  $du / dh$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & h \frac{du}{dh} \\ \frac{du}{dh} & g \end{vmatrix} = 0; \quad h \left( \frac{du}{dh} \right)^2 = g; \quad \frac{du}{dh} = \pm \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$$u = u_0 \pm 2\sqrt{gh}$$

Константа  $u_0$  определяется из условия  $u = 0$  при  $h = H$ .

$$u_0 = \mp 2\sqrt{gH}; \quad u = \pm 2\left(\sqrt{gh} - \sqrt{gH}\right)$$

$$h \frac{du}{dh} = \pm \sqrt{gh}; \quad \frac{\partial h}{\partial t} \pm 2(\sqrt{gh} - \sqrt{gH}) \frac{\partial h}{\partial x} \pm \sqrt{gh} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \pm (u \pm \sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Рассмотрим волну, бегущую вправо:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH}) \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \left( \sqrt{gH} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{H} h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Скорость волны — растущая функция  $h$  (выразить скорость волны через скорость жидкости)

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_h = 3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH}$$

$$x = x_0(h) + (3\sqrt{gh} - 2\sqrt{gH})t$$

Из этого уравнения легко получить дисперсионное соотношение для длинных волн малой амплитуды. Пусть  $h = H + \eta$ , где  $|\eta| \ll H$ , тогда линеаризация уравнения для бегущей волны дает:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Для гармонической волны  $\eta = \eta_0 e^{-i(\omega t - kx)}$  имеем дисперсионное соотношение

$$\omega = \sqrt{gH} k.$$

Это дисперсионное соотношение для волны без дисперсии. Все гармоники бегут с одной скоростью. Начальный импульс малой амплитуды сохраняет свою форму.

Для малой, но конечной амплитуды из уравнения для  $h$  с помощью разложения в ряд по малому параметру  $h/H$  можно получить нелинейное уравнение. Оно имеет вид:

$$\sqrt{g(H + \eta)} \approx \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{\eta}{2H} \right) + \dots$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \sqrt{gH} \left( 1 + \frac{3}{2} \eta / H \right) \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Дополнительное слагаемое описывает эффект укручения начального импульса при распространении. Из уравнения сразу видно, что чем больше  $\eta$ , тем больше характеристическая скорость.

Посмотрим на дисперсионное соотношение для волн на мелкой воде с другой стороны. Это волны без дисперсии. Если мы теперь учтем конечность глубины жидкости, то появится дисперсия. Дисперсионное уравнение для гравитационных волн на воде конечной глубины для волн, бегущих в одну сторону,

$$\omega = \sqrt{gk \tanh kH}$$

Пусть  $kH \ll 1$ , найдем разложение в ряд:

$$th\ kH \cong kH - \frac{1}{3}(kH)^3 + \dots$$

$$\text{т.е.} \quad \omega = \left[ gk^2 H \left( 1 - \frac{1}{3}(kH)^2 \right) \right]^{1/2} \cong \sqrt{gH} k \left( 1 - \frac{1}{6}(kH)^2 \right)$$

$$\omega = k\sqrt{gH} \left( 1 - \frac{1}{6}(kH)^2 \right)$$

Зная разложение в ряд дисперсионного соотношения, легко найти соответствующее ему дифференциальное уравнение. Для этого необходимо принять во внимание, что для гармонических волн

$$\eta = \eta_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = -i\omega \eta, \quad \text{а} \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = ik\eta, \quad \text{тогда из дисперсионного соотношения}$$

$$-i\omega = -ik \left( 1 - \frac{1}{6}(kH)^2 \right) \sqrt{gH}$$

следует, что  $\eta$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta + \frac{H^2}{6} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \sqrt{gH} = 0;$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gH} \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0;$$

Учет дисперсии приведет к тому, что разные гармоники будут иметь разные фазовые скорости, и начальный импульс будет расплываться.

Итак, мы получили, что без учета конечности амплитуды и дисперсии волн импульс для волн на глубокой водне сохраняет форму. Если учесть конечность амплитуды, то импульс укучается, если учесть дисперсию, то импульс расплывается.

Существует эвристический подход получения уравнений, описывающих эволюцию слабонелинейных слабо диспергирующих волн. Он состоит в том, что считается, что слабые нелинейность и дисперсия независимо влияют на поведение волн. При этом в уравнение для  $\eta$  включают нелинейные и дисперсионные добавки аддитивно. В результате получается такое уравнение:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \sqrt{gH} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \sqrt{gH} \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} + \sqrt{gH} \frac{3}{2} \frac{\eta}{H} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0;$$

Введем безразмерную переменную  $\zeta = \eta/H$ , тогда

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + C_0 \left( 1 + \frac{3}{2} \zeta \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + C_0 \frac{H^2}{6} \frac{\partial^3 \eta}{\partial x^3} = 0.$$

Это уравнение называется уравнением Кортевега-де-Вриза. Оно имеет знаменитое решение — уединенную волну или солитон. Получим это решение. Это решение ищется в классе стационарных волн, т.е. волн, у которых форма не меняется в некоторой системе отсчета. Такое может получиться, поскольку в системе действуют два конкурирующих эффекта — нелинейность, укучающая фронт волны, и дисперсия, приводящая к расплыванию импульсов. Ищем решение в виде:

$$\zeta = \zeta(x - Ut), \quad \text{где } U = \text{const}, \quad \text{т.е. } \zeta = \zeta(X), \quad \text{тогда} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial X}; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U \frac{\partial \zeta}{\partial X}.$$

Уравнение КдВ принимает вид:

$$\frac{H^2}{6} \frac{d^3 \eta}{dX^3} + \left(1 - \frac{U}{C_0} + \frac{3}{2} \eta\right) \frac{d\eta}{dX} = 0.$$

Это уравнение можно проинтегрировать:

$$\frac{H^2}{6} \frac{d^2 \eta}{dX^2} + \eta \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{3}{4} \eta^2 = 0.$$

Поле солитона убывает при  $X \rightarrow \infty$ , т.е.  $\text{const} = 0$ . Полученное уравнение можно проинтегрировать еще раз. Для этого домножим на  $d\zeta/dx$

$$\frac{H^2}{6} \frac{d\eta}{dx} \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \eta \frac{d\eta}{dx} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{3}{4} \eta^2 \frac{d\eta}{dx} = 0;$$

$$\frac{H^2}{12} \frac{d}{dx} \left(\dot{\eta}\right)^2 + \frac{d}{dx} \frac{\eta^2}{2} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{d}{dx} \frac{\eta^3}{4} = 0.$$

С учетом граничных условий на  $\infty$  интегрирование дает

$$\frac{H^2}{12} \dot{\eta}^2 + \frac{\eta^2}{2} \left(1 - \frac{U}{C_0}\right) + \frac{\eta^3}{4} = 0$$

$$\frac{h^2}{3} \left(\frac{d\zeta}{dX}\right)^2 = \eta^2 \left(2 \left(\frac{U}{C_0} - 1\right) - \eta\right)$$

Это уравнение интегрируется в элементарных функциях. Его точное решение:  $\zeta > 0$

$$\eta = \frac{\eta_0}{ch^2 \left( \sqrt{\frac{3\eta_0}{H}} \frac{X}{H} \right)}; \quad \text{при этом} \quad \frac{\eta_0}{H} = 2 \left( \frac{U}{C_0} - 1 \right);$$

Отсюда

$$U = C_0 \left( 1 + \frac{\eta_0}{2H} \right);$$

Ясно, что скорость уединенной волны больше, чем скорость линейных волн на поверхности воды. Параметром в солитонном решении является амплитуда уединенной волны  $\zeta_0$ . Она определяет ширину солитона  $\delta = H \sqrt{H / 3\eta_0}$  и его скорость  $C$ .

Чем ближе амплитуда солитона, тем он уже, и тем быстрее распространяется.

### Задача о гидравлическом прыжке.

Система уравнений для мелкой воды — это гиперболическая система. Можно допустить, что могут существовать решения уравнений для мелкой воды типа ударных волн. Попробуем их найти. Будем искать решение в виде гидравлического скачка — резкого перепада уровней жидкости. Рассмотрение будем вести в СО, где скачок покоится. Скорости жидкости в слоях предполагаем постоянными по глубине (как всегда в теории мелкой воды) равными  $v_1$  и  $v_2$ .

Рассмотрим поверхность (см. рис.) и найдем для нее законы сохранения импульса и массы. Считаем, что течение стационарно:

$$\int_0^{h_1} \rho v_1 dZ = \int_0^{h_2} \rho v_2 dZ$$

$$\int_0^{h_1} (p_1(Z) + \rho v_1^2) dZ = \int_0^{h_2} (p_2(Z) + \rho v_2^2) dZ$$

Рассмотрим вертикальную проекцию уравнения Эйлера:

$$\frac{dp}{dZ} = -g\rho; \quad p_{1,2} = p_a - \rho g(Z - h_{1,2})$$

$p_a = \text{const}$  при интегрировании по замкнутой поверхности даст 0.

$$\frac{dp}{dZ} = -g\rho; \quad p_{1,2} = p_a - \rho g(Z - h_{1,2})$$

$$\int_0^{h_1} p dZ = \int_0^{h_1} -\rho g(Z - h_1) dZ = \left. \frac{-\rho g(Z - h_1)^2}{2} \right|_0^{h_1} = \frac{\rho g h_1^2}{2},$$

Законы сохранения массы и импульса примут вид:

$$\begin{cases} v_1 h_1 = v_2 h_2 \\ v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2} \end{cases}$$

Эти уравнения дают связь  $v_2$ ,  $h_2$  при заданных  $h_1$ ,  $v_1$ , как в ударной волне. Если перейти в СО, где жидкость до прохождения скачка покоится, то скачок будет двигаться со скоростью  $v_1$ . Таким образом, если мы зададим  $h_1$  и  $h_2$ , то мы найдем скорость скачка. Исключим  $v_2$ .

$$v_2 = \frac{v_1 h_1}{h_2};$$

$$v_1^2 \left( h_1 - \frac{h_1^2}{h_2} \right) = \frac{g(h_2^2 - h_1^2)}{2} \quad \frac{v_1^2 h_1}{h_2} (h_2 - h_1) = \frac{g(h_2^2 - h_1^2)}{2}$$

$$v_1^2 = \frac{g h_2 (h_1 + h_2)}{2 h_1}$$

Найдем разность потоков энергии при переходе через скачок

$$\begin{aligned} q_1 &= \int_0^{h_1} \rho v_1 \left( \frac{v_1^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) dZ = \int_0^{h_1} \rho v_1 \left( \frac{v_1^2}{2} - g(Z - h_1) \right) dZ = \\ &= \frac{\rho v_1^3 h_1}{2} + \frac{\rho v_1 g h_1^2}{2} = \frac{\rho v_1 h_1}{2} (v_1^2 + g h_1) \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} q_2 &= \frac{\rho v_2 h_2}{2} (v_2^2 + g h_2) = \frac{\rho v_1 h_1}{2} (v_2^2 + g h_2^2) \\ q_2 - q_1 &= \frac{\rho v_1 h_1}{2} (v_2^2 - v_1^2 + g(h_2 - h_1)) = \frac{\rho v_1 h_1}{2} \left( v_1^2 \left( \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_2^2} \right) + g(h_2 - h_1) \right) = \\ &= \frac{\rho v_1 h_1 (h_2 - h_1)}{2} \left[ g - \frac{v_1^2 (h_1 + h_2)}{h_2^2} \right] = \frac{\rho v_1 h_1 (h_2 - h_1)}{2} \left[ g - \frac{v_1 h_1 (h_2 - h_1)}{2 h_1 h_2} \right] = \\ &= \frac{\rho v_1 h_1 (h_2 - h_1) g}{4 h_1 h_2} \left( - (h_1^2 + h_2^2) \right) = \frac{\rho v_1 g (h_1 - h_2) (h_1^2 + h_2^2)}{4 h_2} \end{aligned}$$

В направлении движения жидкости поток энергии должен уменьшаться, так как внутри скачка энергия может поглощаться. Если  $h_1 < h_2$ , то  $g_2 < g_1$ , т.е. в СО, где скачок покоит-

ся, жидкость движется из мелкой стороны в глубокую. Если перейти в СО, где покоится жидкость в области  $h_1$ , то скачок движется из глубокой воды в мелкую. Это явление наблюдается в реках и называется “бора”.

В СО, где покоится жидкость 1, а скачок движется

1. Если скачок движется со скоростью  $v_1$ .

Закон сохранения массы

$$(v_2 - v_1)h_2 = -v_1 h_1; \quad v_2 = v_1(h_2 - h_1) > 0$$

Поток энергии, втекающей в скачок

$$W_2 = \int_0^{h_2} v_2 \left( \frac{\rho v_2^2}{2} + p \right) dZ = v_2 \left( \frac{\rho v_2 h_2}{2} + \frac{\rho g h_2^2}{2} \right) > 0$$

Втекает больше, чем вытекает

2. Если скачок движется со скоростью  $-v_1$ .

Закон сохранения массы

$$(v_2 + v_1)h_2 = v_1 h_1; \quad v_2 = v_1(h_1 - h_2) < 0$$

Поток энергии в 2

$$W_2 = v_2 \left( \frac{\rho v_2 h_2}{2} + \frac{\rho g h_2^2}{2} \right) < 0$$

Втекает 0, вытекает отлично от 0.

Это невозможно. Скачок движется из глубокой воды в мелкую.

$$\oint (p \vec{n} + \rho v_n \vec{v}) dS = 0$$

$$\int_0^{h_2} \rho v_2 dZ = \int_0^{h_1} \rho v_1 dZ$$

$$\int_0^{h_2} (\rho v_2^2 + p_2) dZ = \int_0^{h_1} (\rho v_1^2 + p_1) dZ$$

$$p_i = p_{0i} - \rho gZ \quad p_2 = p_a + \rho g(h_2 - Z)$$

$$p_a = p_{02} - \rho g h_2$$

$$\int_0^{h_2} (\rho v_2^2 + \rho g(h_2 - Z)) dZ = \int_0^{h_1} (\rho v_1^2 + \rho g(h_1 - Z)) dZ$$

$$\begin{cases} v_1 h_1 = v_2 h_2 & v_2 = \frac{v_1 h_1}{h_2} \\ v_1^2 h_1 + \frac{g h_1^2}{2} = v_2^2 h_2 + \frac{g h_2^2}{2} \end{cases}$$

$$h_1 v_1^2 + \frac{g h_1^2}{2} = \frac{v_1^2 h_1^2}{h_2} + \frac{g h_2^2}{2}$$



$$\frac{v_1^2 h_1}{h_2} (h_2 - h_1) = \frac{g(h_2^2 - h_1^2)}{2}$$

$$\frac{v_1^2 h_1}{h_2} = \frac{g(h_1 + h_2)}{2}; \qquad v_1 = \pm \sqrt{\frac{gh_2(h_1 + h_2)}{2h_1}}$$

$$\vec{q}=\rho\,\vec{v}\left(\rho\,\frac{v_1^2}{2}+p\right)$$

$$q_1=\rho\,v_{1x}\left(\frac{v_1^2h_1}{2}+\frac{gh_1^2}{2}\right)=\frac{\rho\,v_{1x}h_1}{2}\left(v_1^2+gh_1\right)$$

$$q_2=\rho\,v_{2x}\left(\frac{v_2^2h_2}{2}+\frac{gh_2^2}{2}\right)=\frac{\rho\,v_{2x}h_2}{2}\left(v_2^2+gh_2\right)$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^3\eta}{dx^3}+\left(1-\frac{U_0}{C}+\frac{3}{2}\eta\right)\frac{d\varsigma}{dx}=0$$

$$\frac{\partial \varsigma}{\partial \tau}+\left(1+\frac{3}{2}\eta\right)\frac{\partial \varsigma}{\partial x}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 \varsigma}{\partial x^3}=0$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^2\varsigma}{dx^2}+\left(1-\frac{U_0}{C}\right)\varsigma+\frac{3}{4}\eta^2=0$$

$$\frac{1}{12}(\varsigma_x)^2+\frac{\eta^2}{2}(1-U_0)+\frac{1}{4}\eta^3=0$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2=\eta^2\big(2(1-U_0)-\eta\big)$$

$$\eta=\frac{\eta_0}{ch\big(\sqrt{3\eta_0}\,X\big)};\qquad \eta_0=2(U_0-1);\qquad U_0=C_0\bigg(1+\frac{\eta_0}{2}\bigg)$$

$$L_x\quad \frac{\eta_0}{L_x^2} >> \frac{\eta_0^2}{L_x} \qquad \frac{\eta_0}{H} << \left(\frac{H}{L}\right)^2$$

## Вихревое движение

Определение.

1) Вихрем или завихренностью называется вектор  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$ . Очевидно,  $\vec{\omega}$  — соленоидальный вектор, т.к.  $\text{div } \vec{\omega} = \text{div } \text{rot } \vec{v} = 0$ .

2) Вихревой линией называется линия, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору  $\vec{\omega}$ .

3) Вихревой трубкой называется поверхность, которая получается следующим образом. Проводим в жидкости произвольный контур, через него проводим вихревые линии, получается трубка тока.

4) Циркуляция вектора скорости по контуру  $C$

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{v} d\vec{S} = \iint_S \vec{\omega}_n dS \quad \text{— по теореме Стокса.}$$

$S$  — поверхность, опирающаяся на контур.

Докажем вспомогательную теорему.

Найдем производную по времени от потока соленоидального вектора  $\vec{A}$  через жидкую поверхность  $\Sigma$ , т.е. поверхность, составленную из одних и тех же частиц. Поверхность ограничена жидким контуром  $C$  (он также, как и поверхность, составлен из одних и тех же частиц).

В момент времени  $t$  — поверхность  $\Sigma$ , контур  $C$ ;

В момент  $t + \Delta t$  — поверхность  $\Sigma_1$ , контур  $C_1$ .

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \lim_{\Delta t} \frac{\iint_{\Sigma_1} \vec{A}(t + \Delta t) \vec{n} dS - \iint_{\Sigma} \vec{A}(t) \vec{n} dS}{\Delta t} = \rightarrow \text{на стр. 2.}$$

Найдем интеграл по замкнутой поверхности  $\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_\delta$ , от  $\vec{A}$  ( $\Sigma_\delta$  — боковая поверхность).

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{S} &= \iiint_V \text{div } \vec{A}(t) dV = 0 \\ 0 &= \oint_{\Sigma + \Sigma_1 + \Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{A}(t) \vec{n} dS - \iint_{\Sigma} \vec{A}(t) \vec{n} dS + \iint_{\Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{\varepsilon} \end{aligned}$$

откуда

$$-\iint_{\Sigma} \vec{A}(t) d\vec{S} = -\iint_{\Sigma_1} \vec{A}(t) \vec{n} dS - \iint_{\Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{\varepsilon}$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_1} \vec{A}(t + \Delta t) \vec{n} dS - \iint_{\Sigma} \vec{A}(t) \vec{n} dS}{\Delta t} = \iint_{\Sigma} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \vec{n} dS - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{S}}{\Delta t}$$

Рассмотрим боковую поверхность  $\vec{n} \Delta S = \vec{n} \Delta l |v| \sin \alpha \Delta t$ .

Высота  $\Delta h = v_1 \Delta t$ , где  $v_1$  — проекция вектора мм на нормаль к контуру  $C$ , т.е.

$\vec{n} \Delta h = [\vec{l}_0 x \vec{v}] \Delta t$ , таким образом  $\vec{n} \Delta S = [\Delta \vec{l} x \vec{v}] \Delta t$ , т.е.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{S} &= \oint_C \vec{A}(t) d\vec{l} \cdot [\vec{v} \times \vec{A}] \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Sigma_\delta} \vec{A}(t) d\vec{S}}{\Delta t} &= \oint_C \vec{A} (d\vec{l} \times \vec{v}) = \oint_C d\vec{l} \cdot [\vec{v} \times \vec{A}] \end{aligned} \quad \text{— по теореме Стокса имеем:}$$

$$\iint_{\Sigma} \text{rot} [\vec{v} \times \vec{A}] d\vec{S}$$

Таким образом имеем:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{A} d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{v} \times \vec{A}] \right\} \vec{n} dS$$

Применим эту формулу для определения изменения во времени потока вектора завихренности через жидкую поверхность. Эту теорему применять можно, поскольку  $\vec{\omega}$  — вектор соленоидальный.

Запишем уравнение Эйлера в форме Гронеки-Лемба

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2 + [\text{rot} \vec{v}, \vec{v}] + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{g}$$

Возьмем от этого выражения  $\text{rot}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} - \text{rot}[\vec{v} \times \vec{\omega}] - \frac{[\nabla p \times \nabla \rho]}{\rho^2} = 0$$

Найдем поток вектора, стоящего в левой части через жидкую поверхность

$$\iint_{\Sigma} \left( \frac{\partial}{\partial t} \vec{\omega} - \text{rot}[\vec{v} \times \vec{\omega}] \right) d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \frac{[\nabla p \times \nabla \rho]}{\rho^2} d\vec{S}$$

Используя полученную формулу, имеем:

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \frac{[\nabla p \times \nabla \rho]}{\rho^2} d\vec{S}$$

Если жидкость баротропна, т.е.  $\rho = \rho(p)$ , либо  $\rho = \text{const}$ , то для произвольного жидкого контура

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{S} = 0$$

Или по теореме Стокса  $\oint \vec{v} d\vec{l} = \text{const}$ . Циркуляция скорости по замкнутому контуру сохраняется. Это теорема Томсона. Заметим, что тогда  $\iint_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{S} = \text{const}$  для любой поверхности  $\Sigma$ , опирающейся на жидкий контур.

### Теоремы Гельмгольца

Они являются следствием теоремы Томсона.

#### Теорема 1.

В идеальной баротропной жидкости завихренность не появляется и не исчезает.

#### Доказательство.

Очевидно, что если завихренность равна 0, то

$$\iint_{\Sigma} \vec{\omega} d\vec{S} = 0$$

для любой  $\Sigma$ . Сколь угодно малой. Завихренность возникнуть не может. Значит, если течение идеальной баротропной жидкости было вначале потнециально ( $\text{rot} \vec{v} = 0$ ), то оно всегда остается потенциальным.

#### Теорема 2.

Вихревые трубки являются жидкими поверхностями, а вихревые линии — жидкими линиями.

Рассмотрим вихревую трубку. Выберем на ее поверхности контур  $C$ , он состоит из жидких частиц. Будем за ним следить. Циркуляция поля скорости по этому контуру  $\Gamma = \oint_C \vec{v} d\vec{l} = \iint_S \vec{\omega} d\vec{S}$ .  $S$  — поверхность, на которую опирается контур  $C$ .

Можно в качестве такой поверхности выбрать кусок поверхности вихревой трубки  $S$ . Тогда по определению  $\vec{\omega} \perp \vec{n}$  и  $\iint_S \vec{\omega} d\vec{S} = 0$ , где  $\vec{n}$  — вектор нормали к вихревой трубке. То есть

циркуляция вектора скорости по этому контуру равна 0. Тогда по теореме Томсона эта циркуляция равна 0 в любой момент времени. Но это, в свою очередь, означает, что всегда можно выбрать поверхность, опирающуюся на контур  $C$ , на которой вектор нормали  $\vec{n} \perp$  вектору  $\vec{\omega}$ , а это, в свою очередь означает, что эта поверхность представляет собой кусок поверхности вихревой трубки. Но тогда контур  $C$  всегда остается на поверхности вихревой трубки. Мы можем выбрать любой контур, в том числе и бесконечно малый. Стягивая контур  $C$  в точку, мы получим жидкую частицу. И из рассуждений следует, что эта жидкая частица все время находится на поверхности вихревой трубки. Или, что вихревые трубки состоят из жидких частиц. Если толщину вихревой трубки устремить к 0, то получится вихревая нить. И вихревые нити, как частный случай вихревых трубок, также будут состоять из жидких частиц. Это свойство называется вмерзнутостью вихревых линий. Т.е. вихревые линии переносятся жидкими частицами. Это, однако, не означает, что завихренность жидкой частицы сохраняется. Напротив, она может меняться.

### **Вторая теорема Гельмгольца.**

Вихревые трубки состоят из жидких частиц.

Рассмотрим вихревую трубку. В начальный момент времени она состоит из некоторых жидких частиц. Покажем, что жидкие частицы, находящиеся на вихревой трубке, на ней и останутся. Выберем жидкий контур  $C$ , лежащий при  $t = 0$  на поверхности вихревой трубки, тогда, поскольку  $\vec{\omega} \perp \vec{n}$ , то  $\oint_C v_e d\vec{l} = \iint_S \vec{\omega} d\vec{S}$ , где  $S$  — поверхность, опирающаяся на контур

$C$ , лежащая на вихревой трубке. По теореме Томпсона  $\oint_{C(t)} v_e d\vec{l} = 0$ , где  $C(t)$  — этот жидкий

контур в другие моменты времени. Это верно для любого контура, в том числе и малого, тогда  $\oint_C v_e d\vec{l} \cong (\vec{\omega} \cdot \vec{n}) \Delta S$ , где  $\Delta S$  — площадь сечения контура. Но тогда  $(\vec{\omega} \cdot \vec{n}) = 0$ , т.е.

плоскость жидкого контура лежит на поверхности вихревой трубки, т.е. жидкие частицы остаются на поверхности вихревых трубок, что и требовалось доказать.

### **Теорема 3**

Поток завихренности через сечение вихревой трубки сохраняется вдоль вихревой трубки.

Рассмотрим замкнутую поверхность, состоящую из боковой поверхности вихревой трубки  $\Sigma_\delta$ , и 2-х сечений.  $\oiint_\Sigma \vec{\omega} d\vec{S} = 0$ , поскольку по теореме Остр. -Гаусса

$$\oiint_\Sigma \vec{\omega} d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{\omega} dV = 0$$

Но  $\iint_{\Sigma_\delta} \vec{\omega} d\vec{S} = 0$ , тогда  $\iint_{\Sigma_1} \vec{\omega} d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \vec{\omega} d\vec{S}$ .

Следствие этого: вихревые трубки не могут начинаться или кончаться в жидкости. Они могут быть:

- 1) замкнуты;
- 2) начинаться и кончаться на мелях;
- 3) начинаться и кончаться на  $\infty$ .

### Плоские вихревые течения

Пусть имеются 2 компоненты скорости  $u$  и  $v$ , которые зависят от  $x$  и  $y$ . Тогда вектор  $\text{rot } \vec{v}$  имеет 1 компоненту

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u & v & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \vec{k} \omega$$

Как мы видели ранее, в 2-мерном течении можно ввести функцию тока  $\psi$ , так что

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u; \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v. \quad \text{Тогда } \Delta \psi = -\omega$$

Рассмотрим уравнение Эйлера в форме Громеки-Лемба:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - [\vec{v}, \times \text{rot } \vec{v}] + \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2 + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{g}$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то, вычисляя  $\text{rot}$  от обеих частей, получим:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}[\vec{v} \times \vec{\omega}] = 0$$

В 2-мерном случае  $\text{rot}[\vec{\omega} \times \vec{v}] = -(\vec{v}, \nabla) \vec{\omega}$ , тогда

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \vec{\omega} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0.$$

Отсюда ясно, что завихренность сохраняется на жидкой частице.

Это можно получить и из теоремы Томпсона. Выберем жидкий контур в плоскости, и поверхность, опирающаяся на контур, тоже будет плоской. Тогда из условия несжимаемости жидкости следует, что площадь контура сохраняется. Пусть контур очень мал, тогда циркуляция скорости по этому контуру

$$C = \oint_{\Delta S} v_\epsilon dl = \iint_{\Delta S} \omega dS = \text{const}, \quad \text{но} \quad \iint_{\Delta S} \omega dS \cong \omega \Delta S \quad \text{т.е.} \quad \omega \Delta S = \text{const}.$$

Стягивая контур в точку, но  $\Delta S = \text{const}$ , т.е.  $\omega = \text{const}$  мы получим жидкую частицу, и в ней завихренность сохраняется. Такой результат получится только в плоском случае, в объемном случае площадь сечения контура меняется, поэтому  $\omega$  не сохраняется (меняется вдоль вихревой трубки).

Рассмотрим примеры плоских завихренных течений

Пусть  $\omega = \text{const}$ . Очевидно — это решение уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \omega = 0$$

Найдем по завихренности поле скорости. Это кинематическая задача. Уравнения для функции тока

$$\Delta \psi = -\omega$$

1. Если  $\psi$  зависит только от  $y$

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = -\omega, \quad \psi = -\frac{\omega y^2}{2}, \quad U_k = \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\omega y + v_0$$

Это плоскопараллельное сдвиговое течение с линейным профилем скорости.

2. Пусть  $\psi$  зависит только от  $r$ .

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d\psi}{dr} = -\omega, \quad r \frac{d\psi}{dr} = -\frac{\omega r^2}{2} + \frac{A}{r}$$

$$\psi = -\frac{\omega r^2}{4} + A \ln r + B$$

Компоненты скорости  $\psi$  –  $z$  компонента векторного потенциала

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = 0, \quad v_\varphi = -\frac{d\psi}{dr} = \frac{\omega r}{2} + \frac{A}{r}$$

Чтобы не было особенности  $A = 0$ ,

$$\psi = -\frac{\omega r^2}{4} + B, \quad v_\varphi = \frac{\omega r}{2}, \quad v_r = 0.$$

3. Пусть  $\omega \neq \text{const}$ . Рассмотрим произвольное стационарное завихренное течение:

$$(\vec{v}, \nabla)\omega = 0, \quad u \frac{\partial\omega}{\partial x} + v \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0.$$

Вводя функцию тока, получим

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\omega}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0 \\ \psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega \end{cases}$$

Или, если мы используем произвольные координаты

$$\begin{cases} \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = 0 \\ \Delta\psi = -\omega \end{cases}$$

Отсюда следует, что общее решение —  $\omega = \omega(\psi)$ . Это условие просто выражает условие сохранения завихренности на жидких частицах. Отсюда видно, что в общем случае уравнение для функции тока принимает вид

$$\Delta\psi = \omega(\psi)$$

3а. Если  $\psi$  — функция от  $y$ , то  $\omega$  тоже функция от  $y$ .

Это нелинейное уравнение. Принцип суперпозиции не работает

Тогда  $\frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)} = 0$ . Причем это может быть произвольная функция:  $\omega = \omega(y)$ .

Тогда

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} = -\omega(y), \quad v_x = \frac{d\psi}{dy} = v_{x0} - \int_{y_0}^y \omega(y') dy'$$

Плоскопараллельное сдвиговое течение может иметь любой профиль.

Особое место занимает тангенциальный разрыв скорости

$$v_x(y) = \begin{cases} U_1 & y < 0 \\ U_2 & y > 0 \end{cases}$$

В этом случае  $\omega = (U_1 - U_2) \delta(y)$ .

3б. Если  $\psi$  — функция  $r$ , то  $\omega$  также функция  $r$ . Тогда  $\Theta(\psi, \omega) = 0$ . Причем функция произвольная. Тогда

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\psi}{dr} \right) = -\omega(r)$$

Отсюда можно найти  $\psi(r)$ .

Рассмотрим специальное цилиндрически симметричное распределение завихренности

$$\omega(r) = \begin{cases} \Omega & r < r_0 \\ 0 & r > r_0 \end{cases}$$

Найдем распределение скорости, пользуясь определением

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{\omega}$$

Воспользуемся теоремой о циркуляции

$$\oint_l v_e dl = \iint_S \vec{\omega} \vec{n} dS$$

Выберем контур в виде окружности радиуса  $r$ . Тогда, поскольку  $\text{rot } \vec{v}$  зависит только от  $r$   $v_\phi \neq 0$ ;  $v_r = 0$ . То есть

$$\oint_C v_e dl = 2\pi r v_\phi; \quad \iint_S \omega dS = \begin{cases} \Omega \pi r^2 & r < r_0 \\ \Omega \pi r_0^2 & r > r_0 \end{cases}$$

Значит

$$v_\phi = \begin{cases} \frac{\Omega}{2} r & r < r_0 \\ \frac{\Omega r_0^2}{2r} & r > r_0 \end{cases}$$

Если обозначить циркуляцию от  $v_\phi$  по контуру  $C \Gamma$ , то

$$\Gamma = 2\pi r v_\phi$$

При  $r > r_0$   $\Gamma = \pi \Omega r_0^2$  циркуляцию по контуру вне цилиндра не зависит от контура и равна произведению завихренности на площадь сечения цилиндра. Эта задача очень похожа на задачу о магнитном поле цилиндра с током. Но есть важное отличие. В электродинамике: есть поле тока — находим магнитное поле. В гидродинамике: есть поле завихренности, находим поле скорости, но оно должно с этим полем завихренности согласоваться, т.е. должно выполняться уравнение Эйлера, или его следствие  $\partial(\psi, \omega) = 0$ . Т.е. возможно не любое распределение завихренности, а только  $\omega = \omega(\psi)$ , где  $\Delta\psi = -\omega(\psi)$ . Если при сохранении циркуляции  $\Gamma$  мы уменьшаем площадь сечения цилиндра, то получаем вихревую нить. Это хорошая идеализация для тонкого цилиндра с завихренностью. Рассмотрим ее отдельно.

### Динамика вихревых нитей

При изучении динамики вихревых нитей пользуются двумя обстоятельствами.

- 1) В плоской задаче завихренность сохраняется в жидкой частице.
- 2) Вне вихревой нити течение потенциально, а потенциальное течение удовлетворяет линейному уравнению Лапласа.

Это означает, что если вихревая нить находится в поле внешних потенциальных течений, то частица, в которой она находится, будет переноситься тем потенциальным полем, которое имеется в этой точке. В частности, это поле может создаваться другой вихревой нитью, или несколькими вихревыми нитями. Если их несколько, то будет происходить сложение полей, создаваемых вихревыми нитями по принципу суперпозиции.

Пусть имеется  $N$  вихревых нитей. Тогда уравнение движения  $i$ -й нити имеет вид:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{k \neq i} \vec{v}_k(\vec{r}_i),$$

$\vec{v}_k(\vec{r}_i)$  — скорость, создаваемая  $k$ -й нитью в месте расположения  $i$ -й нити.

Качественные закономерности движения нитей.

1) 2 нити

1.1. знаки завихренности противоположны.

1.2. Знаки завихренности одинаковы.

2) Вихрь у твердой стенки

индуцированный вихрь

3) Вихрь в угле



## Пограничный слой

Пусть  $Re \gg 1$ . Тогда, если течение имеет достаточно большой масштаб, то можно пренебрегать вязкостью, т.е. использовать приближение идеальной жидкости. Очевидно, что это приближение нарушается вблизи твердых границ, поскольку в идеальной жидкости действует только граничное условие непротекания, а тангенциальная составляющая скорости может быть любой, и она отлична от тангенциальной составляющей скорости движения тела. В вязкой жидкости выполняется граничное условие прилипания. Как согласовать выполнение граничных условий и пренебрежение вязкостью. Для этого Прандтлем была выдвинута гипотеза пограничного слоя. Она состоит в следующем: для достаточно широкого диапазона условий вязкость необходимо учитывать лишь в узких слоях, прилегающих к твердым границам (и в некоторых других слоях). При  $Re \rightarrow \infty$  толщина этих слоев стремится к 0. Эти слои называются пограничными слоями. Внутри пограничного слоя происходит переход от условий прилипания на поверхности к невозмущенному течению. Это предположение из разряда того: предположим, что решение имеет такой вид. Попробуем его найти. В гидродинамике такой метод применяется довольно часто ввиду сложности ее уравнений. По существу, это некоторая правдоподобная физическая модель. Найти такое решение — это большая удача. Практически может оказаться, что оно реализуется не при любых условиях; в опыте получается совершенно другое. Применимость решения ограничена. Тогда надо определить, когда это решение не применимо и почему, т.е. надо учитывать дополнительные факторы и строить дополнительные модели. Построим решение в виде пограничного слоя, а затем посмотрим, что же наблюдается в действительности.

### Пограничный слой на тонкой полубесконечной пластинке.

Рассмотрим тонкую пластинку в потоке. Пусть вначале пластинки не было, тогда

$$\vec{u} = U(x)\vec{x}_0 + \vec{v}\vec{y}_0$$

Причем предположим, что  $v \ll U_p$ , где  $U_0$  — масштаб скорости  $U$ . Будем считать, что масштаб изменения потока  $L$  таков, что  $Re = (U_p L / \nu) \gg 1$ . Поместим в этот поток пластинку (это сразу дает привязку к СО). В соответствии с гипотезой Прандтля далеко от пластинки влиянием вязкости можно пренебрегать, т.е. поле скорости удовлетворяет уравнению Эйлера. Будем считать, что поле скорости далеко от пластинки потенциально. Тогда во всем потоке

$$\frac{U^2(x)}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{p(x)}{\rho} = const \quad (\text{по теореме Бернулли})$$

И при  $v \ll U$  имеем

$$\frac{U^2(x)}{2} = \frac{P_0}{\rho} - \frac{p(x)}{\rho}$$

Если задан  $\nabla p$  вдоль пластинки, то известно  $U(x)$ . Если бы вязкости не было, то бесконечно-тонкая пластинка не вносила бы возмущений в поток. Но на ней

выполняется условие прилипания. Найдем течение, которое получается в результате.

Вблизи пластинки надо учитывать вязкость. Течение описывается системой уравнений н/с и усл. прилипания:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right| u|_{y=0} = 0 \quad v|_{y=0} = 0 \quad u|_{y \rightarrow \pm \infty} = U(x)$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$(u, v) = (u', v') U_0; \quad (x, y) = (x', y') L; \quad p = \rho p' U^2$$

Система уравнений примет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} u' \frac{\partial u'}{\partial x'} + v' \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial x'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) \\ u' \frac{\partial v'}{\partial x'} + v' \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial y'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$u'|_{y'=0} = 0 \quad v'|_{y'=0} = 0 \quad u'|_{y' \rightarrow \infty} = \frac{U(x)}{U_0},$$

$\text{Re} = \frac{U_0 \nu}{L}$  — число Рейнольдса течения на пластинке. Введем функцию тока  $\psi'$ ,

такую, что  $u' = \frac{\partial \psi'}{\partial y'}$ ;  $v' = -\frac{\partial \psi'}{\partial x'}$ . Уравнения в терминах функции тока имеют

вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y'^2} + \frac{\partial p'}{\partial x'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x'^2 \partial y'} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial y'^3} \right) \\ \frac{\partial \psi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x' \partial y'} - \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial p'}{\partial y'} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x'^3} + \frac{\partial^3 \psi'}{\partial x' \partial y'^2} \right) \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\left. \frac{\partial \psi'}{\partial x'} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \right|_{y=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \psi'}{\partial y'} \right|_{y \rightarrow \infty} = \frac{U(x)}{U_0}$$

Мы рассматриваем движение в пограничном слое, где масштаб по  $y'(\delta')$  много меньше масштаба по  $x'(1)$ , т.е.  $\delta' \ll 1$ . Тогда нужно ввести другую нормировку переменной  $y$ , т.е. переменную  $\eta = y'/\delta'$ .

Определим  $\delta'$  из условия, что слагаемые, входящие в уравнение н/с и описывающие движение с масштабом  $\delta' \ll 1$ , должны быть одного порядка. Сделаем оценки:  $u' \sim 1$  (т.к.  $y'|_{y=0} = 0$  и  $u'|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow U/U_0 \sim 1$ ).

$$\psi' = \int u' dy'$$

Поскольку масштаб  $u' \sim 1$  по  $y$  порядка  $\delta'$  (такое ищем решение), то  $\psi' \sim \delta'$ . Масштабы по  $x' \sim 1$ .

Итак первое уравнение дает:

$$\frac{\delta'}{\delta'} \frac{\delta'}{\delta'} \sim \frac{1}{\text{Re}} \frac{\delta'}{\delta'^3} \quad \text{отсюда ясно, что } \delta' \sim \text{Re}^{-1/2} \ll 1.$$

То есть такое решение можно искать.

Введем новые переменные

$$\eta = \frac{y'}{\delta'} = y' \sqrt{\text{Re}}$$

$$\phi = \frac{\psi'}{\delta'} = \psi' \sqrt{\text{Re}}$$

Тогда в переменных  $\eta, \phi$  система для функции тока примет вид:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\text{Re}^{3/2}}{R^{1/2}} \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta \partial x'^2} \right)$$

$$\frac{\text{Re}^{1/2}}{\text{Re}} \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} = - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x'^3} + \sqrt{\text{Re}} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x \partial \eta^2} \right]$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} \right) = - \frac{1}{\text{Re}} \left[ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^3 \phi}{\partial x'^3} + \frac{\partial^3 \phi}{\partial x' \partial \eta^2} \right]$$

Отсюда ясно, что  $\frac{\partial p}{\partial \eta}$  величина имеет порядок  $\text{Re}^{-1} \ll 1$ . Т.е. вертикальный

градиент давления величина  $\sim \text{Re}^{-1}$ , т.е. можно предполагать, что  $p = p(x)$ , причем  $p(x)$  определяется полем скорости далеко от поверхности, где справедлива

формула Бернулли, т.е.  $\frac{\partial p}{\partial x'} = - \frac{U U_{x'}}{U_0^2}$ .

Пренебрегая в первом уравнении слагаемыми  $\sim \text{Re}^{-1/2}$ , имеем:

$$\text{С г.у.} \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} - \frac{\partial \phi}{\partial x'} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial p}{\partial x'} = \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} \\ \left. \frac{\partial \phi}{\partial x'} \right|_{\eta=0} = 0 \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{U(x)}{U_0} \end{cases}$$

Это так называемые уравнения пограничного слоя. Найдем решение этих уравнений при условии, что  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ , тогда  $U(x)$  постоянно:  $U(x) = U_0$ , а

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1. \quad \text{Найдем в этом случае сначала качественный вид решения. Горизонтальная скорость } U(\eta) = \frac{\partial \phi}{\partial \eta}. \text{ При } y \rightarrow \infty, U(\eta) \rightarrow 1; \text{ при } y = 0 \quad U(\eta) = 0.$$

Характерный вид профиля скорости показан на рис.

Из общих соображений ясно, что толщина перехода скорости может, вообще говоря, зависеть от  $x'$ . Найдем эту зависимость сначала из качественных физических соображений. Как мы видели, граница является источником завихренности. Она от границы диффундирует за счет вязкости. За время  $t$  завихренность диффундирует на расстояние  $\sqrt{\nu t}$ . В то же время она сносится потоком (снос начинается от края пластинки). За время  $t$  частица сносится на расстояние  $x \sim Ut$  откуда  $t \sim X/U$ . Т.е. расстояние, на которое проникает завихренность,

можно оценить как  $\delta = \sqrt{\frac{\nu X}{U}}$ . Если перейти к безразмерным координатам

$$x' = x/4; \quad y' = y/L,$$

тогда

$$\eta|_{y=\delta} = y'\sqrt{\text{Re}} = \frac{y}{L} \sqrt{\frac{UL}{\nu}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{UL}{\nu} \frac{\nu x}{U}} = \sqrt{x'}$$

Итак, масштаб в безразмерных переменных по  $\eta = \sqrt{x'}$ .

Будем искать так называемое автомодельное решение уравнений пограничного слоя. Т.е. такие решение, форма которых не меняется от сечения к сечению, а меняется лишь масштаб, т.е.

$$\phi = x'^m f\left(\frac{\eta}{\sqrt{x'}}\right)$$

Такое решение, в принципе, может и не существовать, но можно попробовать его поискать.

$$\text{Из граничных условий } \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_{\eta \rightarrow \infty} = 1 \text{ имеем } x'^{m-1/2} \dot{f} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 1. \text{ Отсюда } m = 1/2.$$

$$\text{Т.е. } \phi = (x')^{1/2} f\left(\frac{\eta}{\sqrt{x'}}\right) = x'^{1/2} f(h), \text{ где } h = \frac{\eta}{\sqrt{x'}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \eta} = \dot{f}; \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \eta^2} = (x')^{-1/2} f''; \quad \frac{\partial^3 \phi}{\partial \eta^3} = (x')^{-1} f'''$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x'} = \frac{1}{2(x')^{1/2}} (f - h\dot{f}); \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x' \partial \eta} = \frac{1}{2x'} [\dot{f} - h\ddot{f} - \dot{f}] = -\frac{h\ddot{f}}{2x'}$$

Тогда уравнение для  $f$  примет вид

$$-\dot{f} \frac{h f''}{2x'} - \frac{1}{2(x')^{1/2}} (f - h\dot{f}) \frac{1}{(x')^{1/2}} f'' = \frac{1}{x'} f'''$$

$$\begin{cases} f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \\ \dot{f}|_{h \rightarrow \infty} = 1 \\ \dot{f}|_{h=0} = 0 \\ f|_{h=0} = 0 \end{cases}$$

Это уравнение решается численно. Профиль скорости

$$U = U_0 f \left( \frac{y}{\sqrt{\frac{x}{U} \nu}} \right) \quad (\text{см. график})$$

Далеко от пластинки  $U = U_0$ . Форма кривой  $U(y)$  сохраняется. Толщина переходной области (погранслоя) растет  $\sim \sqrt{x}$ .

### Пограничный слой на телах, обтекаемых неоднородным потоком

Если  $p(x)$  падает, то  $U(x)$  растет. Это значит, что снос частиц происходит быстрее, чем в однородном потоке, а диффузия завихренности от твердой поверхности — с прежней скоростью. Это значит, что толщина пограничного слоя растет медленнее, чем в случае  $U = \text{const}$  (погранслоем тоньше).

Если  $p(x)$  растет, то  $U(x)$  падает. В результате снос завихренности замедляется, а диффузия происходит с прежней скоростью. Это значит, что толщина пограничного слоя растет быстрее, чем в случае  $U = \text{const}$ .

В этих случаях, казалось бы, можно найти решение уравнений пограничного слоя, где  $U$  зависит от  $x$ . В случае ускоряющегося течения это действительно можно сделать, но в случае замедляющего течения, если падение  $U(x)$  происходит достаточно быстро, решение типа пограничного слоя перестает присутствовать (т.е. в решении уравнений пограничного слоя возникают особенности). Иными словами, решение, соответствующее невязкому потенциальному течению далеко от твердой поверхности с узким переходным слоем вблизи поверхности, перестает существовать. Сильно изменяется течение и вне области, прилегающей к поверхности твердого тела. Линии тока, прилегающие к границе, отклоняются от поверхности. Это явление называется явлением отрыва пограничного слоя. Полного теоретического описания этого явления не существует до настоящего времени. В частности, не умеют находить точку отрыва погранслоя.

Рассмотрим пример обтекания сферы при  $Re \gg 1$ . Казалось бы, при  $Re \gg 1$  далеко от сферы течение должно представлять собой потенциальное течение, а вблизи сферы должен образовываться погран.слой. Однако, как мы видели ранее, до точки 0 давление на поверхности сферы падает, а скорость растет, т.е. решение типа п/с существует. После точки 0 давление на поверхности сферы растет, а скорость падает. Причем падение скорости происходит достаточно быстро, так что возникает явление отрыва пограничного слоя. Вопрос состоит

в том, в какой точке происходит отрыв. Это задача сложная и не решается до сих пор.

### Ламинарный след

Рассмотрим обтекание тела цилиндрической формы однородным потоком. На границе тела с потоком происходит генерация завихренности (образуется погранслоем, он может отрываться и т.д.). Далее эта завихренность сносится потоком и диффундирует за счет вязкости. Какое течение будет далеко за телом? Выберем координату  $x$  вдоль оси движения тела, а координату  $y$  — поперек.

Течение формируется за счет переноса завихренности и ее диффузии. За время  $t$  потоком завихренность переносится на расстояние  $L_k = Ut$ , а за счет диффузии — на расстояние  $L_g = \sqrt{\nu t}$ ,  $L_k$  — это масштаб по  $x$ ;  $L_g$  — масштаб по  $y$ ;

$$L_g = \sqrt{\frac{\nu x}{U}}; L_k = x; \frac{L_g}{L_k} = \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} \quad \text{при достаточно большом } x \quad L_g \ll L_k, \text{ т.е. течение}$$

имеет малый масштаб по  $y$ . Такое течение называется ламинарным следом. Для его описания можно применять уравнение пограничного слоя, поскольку  $L_y \ll L_x$ . Запишем их в размерных переменных

...

Здесь  $p$  определяется свойствами течения при больших  $y$ . Поскольку мы рассматриваем обтекание тела однородным потоком, то  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  (из уравнения

Бернулли).

За счет диффузии течение "расплывается", в результате возмущения скорости малы по сравнению со скоростью основного потока, т.е.

$$u = U + u'(x, y), \quad v = v'(x, y) \quad \text{и} \quad U \gg u'v'$$

Тогда уравнение погранслоя можно линеаризовать. Тогда получим

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}$$

граничные условия  $u'|_{y \rightarrow \pm\infty} = 0$ .

Решения уравнения диффузии, убывающее при  $y \rightarrow \pm\infty$ , имеет вид:

$$u' = Q \left( \frac{U}{2\nu x} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{y^2 U}{2\nu x} \right\}.$$

Область возмущенного течения расширяется  $\sim x^{1/2}$ , т.е. ширина ламинарного следа растет

$$\sim x^{1/2}$$

Смысл постоянной  $Q$ .

Построим качественно график профиля в скорости  $U(x, y)$ .

Ясно, что скорость внутри следа должна быть меньше  $U$ , т.к. тело экранирует поток.

Если перейти в СО, в которой тело движется, то профиль скорости в следе будет такой.

Тело увлекает за собой жидкость, т.е. есть поток массы к телу внутри следа, поскольку есть поток массы к телу, то должен быть и поток массы от тела, чтобы полный поток был равен 0. Это значит, что на большом расстоянии от тела картина течения будет такая:

Суперпозиция источника массы и течения в следе. Вычислим поток массы в следе:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho a' dy = \rho Q,$$

т.е. константа  $Q$  имеет смысл объемного потока в следе жидкости к телу.

## Сила, действующая на тело

Для вычисления силы воспользуемся методом контрольных поверхностей. Расчет проводим в СО, где тело покоится. Выберем контрольную поверхность в виде прямоугольника ABCD.

$$\oint_{ABCD} \Pi_{ij} \vec{x}_{0j} \vec{n} ds + \oint_S \Pi_{ij} \vec{x}_{0j} \vec{n}$$

$\Pi_{ij}$  — тензор потока импульса

$\Pi_{ij} = \rho u_i u_j + p \delta_{ij} - \varepsilon_{ij}$ ; С учетом того, что  $v_n|_S = 0$ ,  $\varepsilon_{ij}$  — тензор вязких напряжений

$$\oint_{ABCD} (\rho u_i u_n + p n_i - \varepsilon'_{ij} n_j) + \oint_S (p n_i - \varepsilon_{ij} n_j) dS = 0$$

По определению

$$\oint_S (p n_i - \varepsilon_{ij} n_j) dS = -F_i$$

Найдем  $x$ -компоненту силы

$$F_x = \oint_{ABCD} (\rho u_x u_n + p n_x - \varepsilon'_{ij} n_j) dS$$

Далеко от тела вязкими силами можно пренебречь везде, в том числе и внутри следа. Действительно

$$u = U + u'$$

Самое большое значение принимает

$$\varepsilon_{12} = \nu \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial u'}{\partial y} = Q \left( \frac{U}{2\pi \nu x} \right)^{3/2} 2y\pi e^{Uy^2/2\nu x}$$

Сила  $\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{12} dy = 0$ ;  $\int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_{11} dy \sim \frac{1}{x^{3/2}}$  убывает при удалении от тела.

т.е. вязкую силу можно не учитывать

$$F_x = \oint_{ABCD} (\rho u_x u_n + p n_x) dS; \quad \vec{u} = \vec{U}x_0 + \vec{u}'; \quad u_x = U + u'$$

$$\oint_{ABCD} [\rho (U + u')(U_n + u'_n) + p n_x] dS = \oint_{ABCD} \rho U (U_n + u'_n) dS + \oint_{ABCD} (\rho U_n + p n_x) dS$$

Заметим, что если поверхность ABCD находится достаточно далеко от тела, то возмущения скорости  $u'$  достаточно малы. Поэтому будем учитывать только линейные по  $u'$  слагаемые.

Первое слагаемое  $\oint_{ABCD} \rho U (\vec{u}' + \vec{U}) \vec{n} dS = 0$  из условия несжимаемости

$$\text{div}(\vec{U} + \vec{u}) = 0.$$

Тогда имеем

$$F_x = \oint_{ABCD} (\rho U_n u' + p n_x) dS$$



На поверхностях АВ и CD  $\iint$  равен 0, тогда

$$F_x = \int_{AD} -(\rho Uu' + p)dy + \int_{BC} (\rho Uu' + p)dy =$$

Устремим поверхности AD и BC на  $\infty$  от тела, тогда

$$F_x = \int_{-\infty}^{\infty} [p_{BC} + \rho Uu'_{BC} - (p_{AD} + \rho Uu'_{AD})]dy$$

Справедливы 2 утверждения.

1) Вне области следа справедлива формула Бернулли. Внутри — нет.

2) Давление внутри следа такое же, как снаружи (это следствие уравнений пограничного слоя)

Уравнение Бернулли

$$\frac{p}{\rho} + \frac{(U + u')^2 + w'^2}{2} = const$$

С точностью до линейных по скорости членов имеем вне следа

$$p_{AD} + \rho Uu'_{AD} = p_{BC} + \rho Uu'_{BC}$$

$$u'_{BC} = u'_{1BC} + u'_{2BC}$$

где  $u'_{1BC} \neq 0$  только внутри следа, оно  $\sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ , а  $u'_{2BC}$  — это поле источника, убывающее при удалении от тела (оно  $\sim 1/x$ ).

## Теория упругости

Мы будем рассматривать твердое тело. Твердое тело отличается от жидкости и газа тем, что в нем могут действовать касательные напряжения даже в состоянии покоя. (В жидкости и газе в состоянии покоя действуют только нормальные напряжения — силы давления).

## Кинематика деформируемого твердого тела.

Исторически сложилось так, что для описания деформируемого твердого тела пользуются лагранжевым описанием. Напомню, что при лагранжевом описании каждой точек сплошной среды ставится в соответствие 3 ее координаты в начальный момент времени. Задать движение сплошной среды в лагранжевых координатах означает задать координаты всех точек в любой момент времени.

Итак, пусть в начальный момент времени (до деформации) радиус-вектор некоторой точки твердого тела был  $\vec{r}$ . После деформации точка сместится, и ее радиус-вектор станет  $\vec{r}'$ . Вектор  $\vec{u} = \vec{r}' - \vec{r}$  называется вектором смещения.  $\vec{u}$  является функцией  $\vec{r}$ . Функция  $\vec{u} = \vec{u}(\vec{r}, t)$  задает движение деформируемого тела в лагранжевых координатах. Если  $\vec{u}$  не зависит от  $\vec{r}$ , т.е. все точки смещаются одинаково, то деформации тела не происходит.

## Тензор деформаций

$$(dx_1)^2 +$$

Предположим, что  $\vec{u}$  зависит от  $\vec{r}$ . Рассмотрим 2 точки: с лагранжевыми координатами  $\vec{r}$  и  $\vec{r} + d\vec{r}$ . Расстояние между этими двумя точками

$|\vec{dr}| = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$ . После деформирования обе точки сместятся: их координаты будут  $\vec{r}'$  и  $\vec{r}' + d\vec{r}'$ , причем

$$|\vec{dr}'| = \sqrt{(dx_1')^2 + (dx_2')^2 + (dx_3')^2}$$

причем

$$dx_i' = dx_i + du_i = dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

Тогда

$$|\vec{dr}'|^2 = \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \right) \left( dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_l \right) = dx_i dx_i + 2 dx_i dx_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k dx_l =$$

$$|\vec{dr}|^2 + dx_i dx_k \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_i dx_k =$$

$$\text{Тензор } u_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \right) \text{ называется тензором деформации.}$$

### Некоторые свойства тензора деформаций.

Рассмотрим тензор деформаций в некоторой точке. Тогда можно найти такую СК, в которой тензор деформаций будет диагональным. Рассмотрим тогда 2 точки на оси  $x_i$  и  $x_i + dx_i$ ; после деформации эти точки примут координаты  $x_i'$  и  $x_i' + dx_i'$ . Эти точки останутся на оси  $x_i$ , т.к. вектор смещений имеет ед. компоненту

$$du_i = dx_i' - dx_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_i$$

При этом

$$dx_i'^2 = dx_i^2 \left( 1 + 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 \right) = dx_i^2 (1 + 2u_{ii})$$

Длина произвольного отрезка

$$|\vec{dr}'|^2 = |\vec{dr}|^2 + \sum_{i=1}^3 u_{ii} dx_i^2 = \sum_{i=1}^3 (dx_i)^2 (1 + 2u_{ii})$$

Видно, что сумма распадается на 3 независимых слагаемых, показывающих удлинение отрезка относительной осей.  $2u_{ij}$  — показывает относительное удлинение.

Во всех практически случаях деформации малы, т.е. малы относительные удлинения отрезков, т.е.  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$ . Это приводит к тому, что практически во

всех случаях в выражении для тензора деформаций можно пренебречь квадратичным членом, т.е.

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

При этом относительные удлинения элементов длины вдоль главных осей:

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} = u_{ii}$$

### Изменение объема

Пусть объем до деформации был  $dV$ , после деформации  $dV'$ . Деформация эквивалентна преобразованию координат от  $x_1, x_2, x_3$  к  $x'_1, x'_2, x'_3$  при этом

$$dV' = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dV,$$

где  $J = \frac{\partial(x'_1, x'_2, x'_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)}$  – якобиан преобразования координат.

Поскольку  $x'_i = u_i + x_i$ , то с точностью до членов  $\sim u_i$ .

$$J = \begin{vmatrix} 1 + u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & 1 + u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & 1 + u_{33} \end{vmatrix} \cong 1 + u_{11} + u_{22} + u_{33} + O(u_{ij} u_{kl}).$$

Таким образом относительное изменение объема равно сумме значений членов тензора деформаций

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u_{11} + u_{22} + u_{33}$$

Движение твердого тела описывается движениями механики сплошной среды. Причем, как мы видели, при описании деформации твердого тела мы пользовались лагранжевыми координатами. Однако в случае твердых тел смещения частиц очень малы, поэтому практически эйлеровы и лагранжевы координаты совпадают. Это важно, когда мы записываем уравнения движения. В них входят производные по эйлеровым координатам.

Пусть  $x, y, z$  – лагранжевы координаты, отмечающие положение точек твердого тела до деформации, а  $x', y', z'$  – эйлеровы координаты, которые при  $t = 0$  совпадают с лагранжевыми. В уравнение движения в эйлеровой форме входят производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x', y', z')} = \frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x, y, z)} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')}$$

Но как мы видели выше  $x'_i = x_i + u_i$ , где  $u_i$  – компонента вектора смещения. Выпишем якобианы с точностью до линейных членов по смещениям:

$$\frac{\partial(f, y', z')}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} & 1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial u_2}{\partial z} & 1 + \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x} \left( 1 + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial u_3}{\partial y}$$

$$\frac{\partial(x', y', Z')}{\partial(x, y, Z)} = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

Отсюда

$$\frac{\partial f}{\partial x'_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x'_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$$

Как мы увидим ниже, все входящие в уравнения движения производные берутся от величин, пропорциональных компонентам вектора смещения. Это значит, что в принятом приближении мы должны заменить производную  $\frac{\partial}{\partial x'_i}$

на  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

Запишем уравнение движения:

1. Уравнение непрерывности в лагранжевых переменных

$$\rho = \frac{\rho_0}{J}, \text{ где } J = 1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \text{ т.е. } \rho = \rho_0 \left( 1 - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

2. Уравнение движения

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = f_i + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

Заметим, что  $v_i = \frac{du_i}{dt}$ ; значит  $\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho_0 \frac{d^2 u_i}{dt^2} + 0(u_i^2)$ . В принятом приближении изменениями плотности при деформации надо пренебрегать.

Производную  $\frac{d^2}{dt^2}$  заменим на частную  $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ , т.к. мы работаем в лагранжевых

координатах.  $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x'_j} \cong \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}$ , поскольку, как мы увидим ниже,  $\varepsilon_{ij} \sim \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Итак,

уравнение движения

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = f_i + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j}$$

3. Уравнение теплопередачи (следствие закона сохранения энергии)

$$\rho \frac{d\alpha}{dt} = q + \operatorname{div} \bar{Q} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x'_j} + q^{**}$$

где  $q^{**}$  – нетепловые источники энергии, связанные с электризацией, намагниченностью и т.д. В дальнейшем  $q^{**}$  полагается равным 0.

Учтем, что  $r$  не зависит от времени, а  $v_i = \frac{du_i}{dt}$ , и, значит, производную  $\frac{\partial}{\partial x'_j}$

надо заменить на  $\frac{\partial}{\partial x_j}$ , тогда

$$\frac{\partial(\varepsilon \rho)}{\partial t} = q + \operatorname{div} \bar{Q} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Заметим, что  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ . Тогда это уравнение можно записать в виде:

В уравнении для энтропии можно также  $r$  внести под  $d/dt$ , тогда

$$\frac{d(S\rho)}{dt} = \frac{q + \operatorname{div} Q + q'}{T}$$

Если мы рассматриваем обратимые процессы, в которых  $q' = 0$ , то получим основное термодинамическое тождество в виде:

$$d(\varepsilon \rho) = Td(\rho S) + \varepsilon_{ij} d(u_{ij})$$

В случае  $\varepsilon_{ij} = -p\delta_{ij}$  оно переходит в

$$d\varepsilon = TdS - \frac{p}{\rho} d(u_{ii})$$

Но из уравнения неразрывности

$$\rho = \rho_0(1 - u_{ii}),$$

т.е.

$$d\rho = -\rho_0 du_{ii} \cong -\rho du_{ii}, \text{ т.е. } du_{ii} = -\frac{d\rho}{\rho}$$

т.е.

$$d\varepsilon = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

или  $d\varepsilon = TdS - pdV$  – основное термодинамическое тождество для 2-х параметрической системы.

Таким образом, мы можем рассматривать твердое тело как термодинамическую систему, которая характеризуется не двумя параметрами (как идеальный газ или жидкость), а 10:

Например: температура и 9 компонент тензора деформаций, или температура и 9 компонент тензора напряжений.

Если вместо внутренней энергии  $\varepsilon_\rho$  ввести свободную энергию,

$$F = \varepsilon_\rho - \rho TS, \text{ то } dF = -\rho SdT + \varepsilon_{ij} d(u_{ij})$$

Отсюда ясно, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial(p\varepsilon)}{\partial u_{ij}} \Big|_S = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \Big|_T$$

## Термодинамика упругих деформаций. Закон Гука

Получим выражение для свободной энергии  $F$  через тензор деформаций для изотропного твердого тела, исходя из общих соображений.

Предположим вначале, что температура тела постоянна. Тогда из общих соображений ясно, что если тело не деформировано ( $u_{ij} = 0$ ), то отсутствуют и

внутренние напряжения  $\varepsilon_{ij} = 0$ . Но поскольку  $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \Big|_T$ , то значит в

выражении для  $F$  отсутствуют линейные члены. Свободная энергия должна быть скаляром. Можно составить 2 независимых скаляра из компонент тензора

$u_{ij}$ : квадрат суммы диагональных компонент  $(u_{ij})^2$  и сумма квадратов всех компонент тензора  $u_{ij}^2$ . Разлагая  $F$  в ряд по  $u_{ij}$ , получим в низшем порядке

$$F = F_0 + \frac{\lambda}{2}(u_{ii})^2 + \mu u_{ij}^2$$

$\lambda$  и  $\mu$  называются коэффициентами Лямэ.

Найдем отсюда тензор напряжений

$$\eta_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right|_T = \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}.$$

Мы видели, что если тензор деформаций приведен к главным осям, отличны от нуля только диагональные его компоненты, и они показывают удлинение по осям:

$$dx'_i = dx_i \left( \frac{\partial x'_i}{\partial x_i} \right) = (1 + u_{ii}) dx_i$$

Если по всем осям деформации одинаковы (т.е.  $u_{ij}$  все равны), то при этом не изменяется форма тела, а только его размер. Поэтому такая деформация называется чистым сжатием.

Если сумма диагональных элементов тензора напряжений равна 0, то объем твердого тела не меняется. Такая деформация называется чистым сдвигом.

Любую деформацию можно представить в виде суммы деформаций чистого сжатия и чистого сдвига. Действительно, можно записать тождество:

$$u_{ij} = \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii}.$$

Тогда в 1-м слагаемом сумма диагональных членов равна 0, т.е. это чистый сдвиг, а во 2-м слагаемом  $u_{ii}$  все одинаковы, т.е. это чистое сжатие.

С учетом этого выражения

$$\varepsilon_{ij} = \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left[ \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right) + \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right]$$

$$\varepsilon_{ij} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = K u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right)$$

$k = \lambda + \frac{2}{3} \mu$  называется модулем всестороннего сжатия, а  $\mu$  – модулем сдвига.

Исходя из этой формулы, можно найти обратную связь: выразить тензор деформаций через тензор напряжений.

1. Сначала найдем сумму всех диагональных компонент тензора напряжений

$$\varepsilon_{ii} = 3K u_{ii}, \text{ т.е. } u_{ii} = \frac{\varepsilon_{ii}}{3K}$$

Тогда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ii} \delta_{ij} \right)$$

Отсюда

$$u_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{9} \varepsilon_{ll} \delta_{ij}$$

Т.е. тензор упругих деформаций есть линейная комбинация тензора напряжений. Это закон Гука в обобщенном виде. С учетом выражения  $K$  через коэффициенты Лямэ  $K = \lambda + \frac{2}{3} \mu$

$$u_{ij} = \frac{1}{9\lambda + 6\mu} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} \left( \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{ll} \delta_{ij} \right)$$

Итак, мы нашли выражение, связывающее тензоры напряжений и деформаций при постоянной температуре. Температура, однако, может быть и непостоянна, при этом возникают деформации за счет эффекта теплового расширения. причем возможно, что деформации вызываются внешним изменением температуры или, наоборот, изменения температуры вызываются деформациями. Эти деформации называются термоупругими. Рассмотрим, как изменится свободная энергия при наличии изменений температуры.

Мы видели, что  $\varepsilon_{ij} = \frac{\partial F}{\partial u_{ij}}$ ; при постоянной температуре  $T_0$  при  $\varepsilon_{ij} = 0, u_{ij} = 0$

(нет напряжений, нет деформаций), поэтому в разложении  $F_{ij}$  по  $u_{ij}$  отсутствовали линейные члены. Если происходит изменение температуры, то  $u_{ij} \sim 0$  даже если  $\varepsilon_{ij} = 0$ , т.к. есть тепловое расширение тел. В связи с этим в разложении  $F$  появляется линейный член по  $u_{ij}$ . Но коэффициент при нем должен обращаться в 0 при  $T = T_0$ . Отсюда ясно, что разложение  $F$  в ряд по малым вариациям температуры должно иметь вид:

$$F(T) = F_0(T) - \beta (T - T_0) u_{ll} + \frac{\lambda}{2} (u_{ll})^2 + \mu u_{ij}^2$$

Чтобы получить скаляр, мы должны выбрать линейную скалярную комбинацию компонент тензора  $u_{ij}$  – это сумма его диагональных компонент.

Тензор напряжений

$$\varepsilon_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ij}} \right|_T = -\beta (T - T_0) \delta_{ij} + \lambda u_{ll} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

При отсутствии напряжений  $\varepsilon_{ij} = 0$ , тогда

$$u_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \\ -\beta (T - T_0) + \lambda u_{ll} + 2\mu u_{ii} = 0 \quad i = 1, 2, 3$$

Отсюда следует, что

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = \frac{\beta (T - T_0)}{3 \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right)} = \frac{\beta (T - T_0)}{3K},$$

где  $K$  – модуль всестороннего сжатия.

Итак, линейное относительное удлинение

$$u_{ii} = \frac{\beta}{3K} (T - T_0).$$

Изменение объема

$$u_{ll} = \frac{\beta}{K} (T - T_0).$$

т.е.  $d = b/K$  – коэффициент объемного расширения.

Итак, при деформациях, сопровождающихся изменением температуры, свободная энергия

$$F = F_0(T) - K\alpha (T - T_0)u_{||} + \frac{\lambda}{2}u_{||}^2 + \mu u_{ij}^2$$

### Адиабатические и изотермические деформации

1. Если деформации изотермические, то  $T = T_0$ . В этом случае мы приходим к формулам, которые были рассмотрены выше.
2. Адиабатические деформации. Основное термодинамическое тождество для упругого твердого тела

$$F = -SdT + \varepsilon_{ij}du_{ij}$$

Отсюда  $S = -\frac{\partial F}{\partial T}$

Дифференцируя выражение для  $F$ , имеем

$$S = S_0(T) + K\alpha u_{||}$$

Если энтропия постоянна, а изменение температуры невелико, то его отсюда можно найти

$$S(T_0) = S(T_0) + \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0} (T - T_0) + K\alpha u_{||}$$

отсюда

$$(T - T_0) = -\frac{K\alpha u_{||}}{\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0}}$$

Т.е. при адиабатических деформациях

$$(T - T_0) \sim u_{||}, \quad \text{т.е.} \quad F = F_0(T) + \frac{K^2\alpha^2}{\left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_{T_0}} u_{||}^2 + \frac{\lambda}{2} u_{||}^2 + \mu u_{ij}^2 = F_0 + \frac{\lambda_{ag}^2}{2} u_{||}^2 + \mu u_{ij}^2$$

Таким образом, при адиабатических деформациях получаются такие же выражения для закона Гука, но с другими (адиабатическими) коэффициентами.

### Динамика упругих деформаций

Начнем со статики. Выпишем условия равновесия для упругого деформированного твердого тела. Уравнение для импульса при  $\vec{v} = 0$  дает:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

а для  $\varepsilon_{ij}$  имеется обобщенный закон Гука, т.е. мы можем определить деформации.

Часто источником деформации являются внешние силы, приложенные к поверхности тела. Если  $i$ -я компонента внешней силы, приложенная к



поверхности  $S$  тела  $P_i$ , а нормаль к его поверхности  $\vec{n}$ , то г.у. равновесия поверхности имеет вид:

$$\varepsilon_{ij} n_j \Big|_S P_i$$

Уравнение равновесия вместе с г.у. дает полную систему для определения деформаций упругого твердого тела.

## Однородные деформации

Допустим, что  $\varepsilon_{ij}$  не зависит от координат, а силой тяжести можно пренебречь.

Тогда

$$\varepsilon_{ij} n_j = p_i$$

Напряжения определяются г.у. на поверхности твердого тела.

### 1. Деформация растяжения стержня.

Пусть стержень расположен вдоль оси  $Z$  и к его концам приложены силы, растягивающие его в противоположные стороны

$$\varepsilon_{33} = p \quad \varepsilon_{ij} = 0 \text{ при всех остальных } i \text{ и } j.$$

Деформации

$$u_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + \frac{1}{2\mu} \left( \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{ll}}{3} \right)$$

$$u_{11} = \frac{1}{9K} P + \frac{1}{3\mu} (-P) = \frac{P}{3} \left( \frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right)$$

$$u_{22} = \frac{P}{3} \left( \frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right)$$

$$u_{33} = \frac{1}{9K} P + \frac{1}{2\mu} \left( P - \frac{P}{3} \right) = \frac{P}{3} \left( \frac{1}{3K} + \frac{1}{2\mu} \right)$$

Величину  $E$  такую, что  $p = E u_{33}$  называются модулем растяжения или модулем Юнга. Он показывает связь относительного продольного растяжения и продольного напряжения. Итак:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3} \frac{\mu + 3K}{3K\mu}; \quad E = \frac{9K\mu}{\mu + 3K}$$

$$\text{Поскольку } K = \lambda + \frac{2}{3}\mu, \text{ то } E = \frac{3(3\lambda + 2\mu)\mu}{\mu + 3\lambda + 2\mu} = \frac{3(3\lambda + 2\mu)\mu}{\lambda + 3\mu}$$

Отношение  $\frac{u_{11}}{u_{33}} = -\varepsilon$  – коэффициент Пуассона, он показывает относительное

сжатие вдоль поперечной координаты при предельной нагрузке

$$u_{11} = P \frac{2\mu - 3K}{18K\mu} = \frac{P[2\mu - 3\lambda - 2\mu]}{18K\mu} = \frac{-P\lambda}{6K\mu}$$

$$\varepsilon = -\frac{u_{11}}{u_{33}} = \frac{\frac{p\lambda}{6K\mu}}{\frac{P(\mu+3K)}{9K\mu}} = \frac{3\lambda}{2(\mu+3K)} = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\text{Итак } E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}; \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

Отсюда можно найти выражение для коэффициентов Лямэ через модуль Юнга и коэффициент Пуассона:

$$\mu = \frac{E}{2(\varepsilon+1)}; \quad \lambda = \frac{\varepsilon E}{(1-2\sigma)(1+\sigma)};$$

тогда

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$$

## 2. Деформация сдвига

Пусть напряжения приложены к верхней и боковым граням. Брусок закреплен.

Тогда  $\varepsilon_{12} = p$ ;  $\varepsilon_{21} = p$ .

Деформация

$$u_{12} = \frac{1}{2\mu}P; \quad u_{21} = \frac{1}{2\mu}P$$

По определению

$$u_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

Пусть

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 0,$$

$$\text{то есть } u_{12} = \frac{1}{2} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$dx'_1 = dx_1 + dx_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$dx'_2 = dx_2$$

Пусть в начальный момент отрезок был вертикальный, т.е.  $dx_1 = 0$ , тогда

$$\frac{dx'_1}{dx'_2} = \tan \Theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

$$\text{поскольку } \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \ll 1, \text{ то } \Theta \approx \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2u_{12} = \frac{P}{\mu}$$

## 3. Прямоугольный стержень в жидкости под действием гидростатического давления

На поверхностях

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = p$$

$$\sigma_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j$$

Деформации

$$u_{ij} = \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{ii} + \frac{1}{2\mu} \left( \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\varepsilon_{ii}}{3} \right)$$

$$\varepsilon_{ii} = 3p; \quad u_{ij} = \frac{p}{3K} \delta_{ij} + \frac{1}{2\mu} (\varepsilon_{ij} - p \delta_{ij})$$

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = \frac{p}{3K}; \quad u_{ij} = 0$$

### Произвольные деформации

Общее уравнение равновесия имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$$

Выражение для тензора напряжений через тензор деформаций

$$\varepsilon_{ij} = K u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu \left( u_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} u_{ii} \right) = \lambda u_{ii} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

Выражение через модуль Юнга

$$K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}; \quad \mu = \frac{E}{2(\varepsilon+1)}; \quad \lambda = \frac{\varepsilon E}{(1-2\sigma)(1+\varepsilon)};$$

Тогда

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} u_{ii} + 2\mu \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j}$$

С учетом того, что  $u_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ , имеем:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{u} \right) = (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{u}) + \mu \Delta u_i;$$

$$\lambda + \mu = \frac{\sigma E}{(1-2\sigma)(1-2\varepsilon)} + \frac{E}{2(\varepsilon+1)} = \frac{2\sigma+1-2\varepsilon}{2(\varepsilon+1)(1-2\varepsilon)} E = \frac{E}{2(\sigma+1)(1-2\sigma)}$$

Подставляя в уравнение и записывая его в векторном виде, имеем:

$$\frac{E}{2(\sigma+1)(1-2\sigma)} \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + \frac{E}{2(\sigma+1)} \Delta \vec{u} = \rho \vec{g}$$

Это уравнение равновесия твердого тела.

Заметим, что  $\Delta \vec{u} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}$ , тогда

$$(\lambda + \mu) \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + \mu (\nabla \operatorname{div} \vec{u} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u}) = -\rho \vec{g}$$

$$(\lambda + 2\mu)\nabla \operatorname{div} \vec{u} - \mu \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = -\rho \vec{g}$$

$$\lambda + 2\mu = \frac{\varepsilon E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} + \frac{E}{\sigma+1} = \frac{E(\varepsilon+1-2\sigma)}{(\sigma+1)(1-2\sigma)} = \frac{E(1-\sigma)}{(1-2\sigma)(1+\sigma)}$$

Т.е. имеем

$$\nabla \operatorname{div} \vec{u} \frac{E(1-\sigma)}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} - \frac{E}{2(\varepsilon+1)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = -\rho \vec{g}$$

Если объемные силы отсутствуют, то уравнение равновесия имеет вид:

$$\nabla(\operatorname{div} \vec{u}) + (1-2\sigma)\Delta \vec{u} = 0$$

С граничными условиями:  $P_i|_S = \varepsilon_{ij} n_j$ , где  $\vec{n}_j$  – нормаль к  $S$ , а

$$\varepsilon_{ij} = \lambda u_{||} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij}$$

### Учет неравномерного нагрева

Если температура тела неоднородна по пр-ву, то

$$\varepsilon_{ij} = \lambda u_{||} \delta_{ij} + 2\mu u_{ij} - K\alpha(T - T_0)$$

где  $K = \frac{E}{3(1-2\sigma)}$

Но тогда условие равновесия примет вид:

$$\nabla \operatorname{div} \vec{u} \frac{E(1-\sigma)}{(1-2\sigma)(1+\sigma)} - \frac{E}{2(\sigma+1)} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} - \frac{E}{3(1-2\sigma)} \alpha \nabla T = -\rho \vec{g}.$$

### Некоторые свойства

Возьмем  $\operatorname{div}$  от обеих частей уравнения равновесия, получим

$$\operatorname{div} \nabla(\operatorname{div} \vec{u}) = 0, \text{ (т.к. } \operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{u} = 0) \quad \operatorname{div} \vec{g} = 0$$

Поскольку  $\operatorname{div} \nabla A = \Delta A$ , то

$$\Delta(\operatorname{div} \vec{u}) = 0.$$

$\operatorname{div} \vec{u}$  – гармоническая функция.