ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ЛУКЬЯНЕНКО
ДМИТРИЙ ВИТАЛЬЕВИЧ

ФИЗФАК МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ
**НЕКРАСОВА АЛЕКСЕЯ ДМИТРИЕВИЧА**

# Содержание

# Лекция 1. Основные понятия

## Значение дифференциальных уравнений

Практически все задачи в современной науке так или иначе сводятся к решению дифференциальных или интегральных уравнений. Данный курс посвящен обыкновенным дифференциальным уравнениям, то есть таким уравнениям, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, причем функция и ее производные задаются при каждом значении переменной однозначно. Такие уравнения в задачах физики встречаются очень часто.

## Предметная и математическая постановки задачи

При решении любой задачи физики сначала выполняется *предметная постановка* задачи. Под предметной постановкой задачи подразумевается выбор области мироздания, в которой лежит данная задача и выбор законов, которые будут учитываться при решении задачи, а которые — пренебрегаться. Далее в соответствие каждому закону ставится дифференциальное уравнение. Это *математическая постановка* задачи.

**Пример:** классическая задача о броске тела под углом к горизонту. Данная задача принадлежит физической области мироздания, конкретно — к разделу физики — механике, подразделу — кинематике. В школьной программе физики постановка этой задачи учитывает только всемирный закон тяготения. Таким образом, предметная постановка задачи завершена. Данной предметной постановке сопоставляется математическая постановка: либо уравнение, описывающее второй закон Ньютона, либо (в продвинутых школах) дифференциальное уравнение для второго закона Ньютона. Математическая постановка завершена. Далее можно получать решение задачи.

По мере развития науки и техники данная предметная постановка задачи становится неудовлетворительной — необходимо учитывать действующие на тело эффекты других сил. Например — силу трения воздуха. В школе эффект силы трения не удается учесть, т. к. методы школьной математики не позволяют решать такую математическую задачу. В рамках теоретической механики решение задачи о броске тела уже может учитывать трение воздуха.

По мере дальнейшего развития техники при решении данной задачи приходится учитывать все более и более тонкие эффекты (плотность воздуха, сила Кориолиса и так далее). Математическая постановка задачи тоже усложняется. По мере усложнения задачи становится все более сложным получение аналитического решения, возникает необходимость в использовании численных методов для решения дифференциальных уравнений.

Данный курс предполагает также умение адекватно ставить предметную модель, так как при неверной постановке предметной модели решение математической модели (дифференциального уравнения) лишено практического смысла.

**Пример:** задача о тепловыделении в простейшей химической реакции:

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases} \tag{1.1}$$

Очевидное аналитическое решение:

$$x(t) = \frac{1}{1-t}. \tag{1.2}$$

Из аналитического решения можно сделать вывод о бесконечном тепловыделении в момент времени $t = 1$ ($x \to \infty$ при $t \to 1$). Можно это видеть на картинке 1.1, где представлены аналитическое решение задачи (1.1) и численные решения, полученные с помощью разных численных схем. Однако, этот вывод неверный — не может выделиться бесконечная энергия в результате химической реакции с конечным количеством вещества.

Вывод: постановка задачи (1.1) не учитывает законы сохранения, и потому модель не является корректной, решению задачи нельзя доверять для любых значений аргумента $t$. Для задачи (1.1) можно получить корректную постановку, если рассматривать ее решение на некотором конечном интервале времени $t \in [0, 1)$. Этот вывод можно сделать и из иллюстрации 1.1, так как разные численные решения точно воспроизводят аналитическое решение (1.2) только до момента $t = 1$.

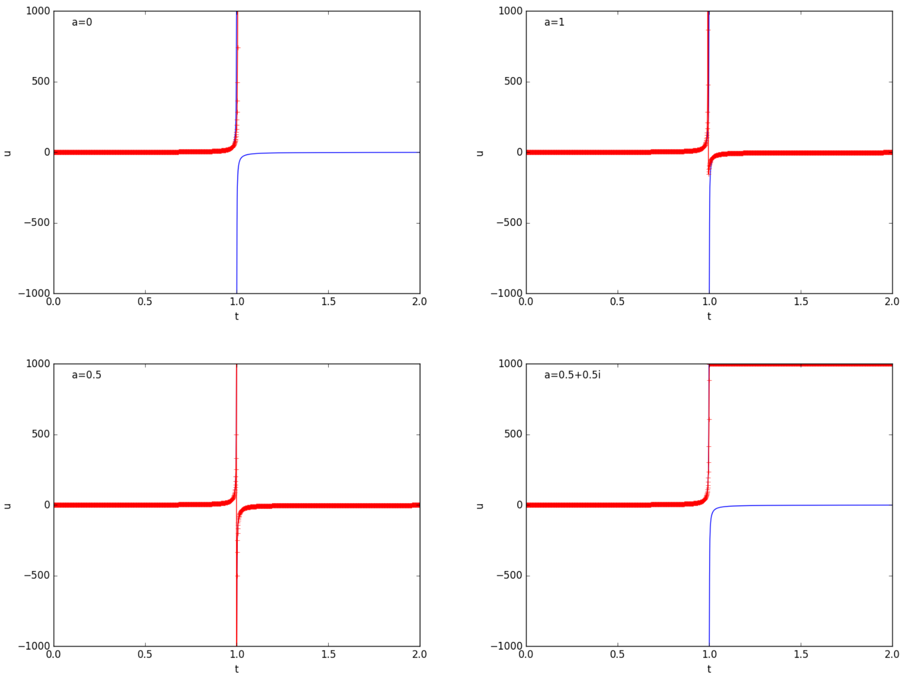


Рис. 1.1. Аналитическое решение задачи о тепловыделении (1.1) (синяя линия) и численные решения (красные кресты), полученные разными методами. Данная иллюстрация аналогична иллюстрации, сделанной преподавателем на доске, но для наглядности разделена на четыре рисунка.

Реальные задачи не предполагают априорного знания результата, поэтому необходимо иначе учитывать корректность постановки задачи. Действенным методом проверки корректности предметной задачи является решение математической модели численными методами с последующим сравнением полученного решения с предсказываемым.

Теоретическая часть курса «Дифференциальные уравнения» в том числе позволяет сделать выводы о том, какой части численного решения исследуемой задачи можно доверять.

## Определение дифференциального уравнения

Введем формальное определение дифференциального уравнения.

**Определение 1.1.** *Уравнение называется дифференциальным, если неизвестная функция входит в него под знаком производной или дифференциала.*

**Определение 1.2.** *Уравнение называется обыкновенным дифференциальным уравнением, если неизвестная функция входит в него под знаком производной или дифференциала и зависит только от одной переменной.*

## Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Начнем рассмотрение обыкновенных дифференциальных уравнений с простейшего случая — линейного дифференциального уравнения первого порядка.

**Определение 1.3.** *Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, которая входит в данное уравнение.*

**Определение 1.4.** *Дифференциальное уравнение называется линейным, если функция и ее производные входят в уравнение линейно.*

**Определение 1.5.** *Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида:*

$$y' + p\,(x)\,y = f\,(x). \tag{1.3}$$

Форма записи (1.3) подразумевает, что функции $p\,(x)$, $f\,(x)$ не зависят от $y$, а сама функция $y = y\,(x)$ зависит только от аргумента $x$.

**Определение 1.6.** *Функция $f\,(x)$, которая не зависит ни от искомой функции $y$, ни от ее производных, называется неоднородностью.*

## Линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка

Рассмотрим сначала уравнение вида (1.3), в котором $f\,(x) = 0$:

**Определение 1.7.** *Линейное дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если оно записывается в форме:*

$$y' + p\,(x)\,y = 0. \tag{1.4}$$

## Общее решение однородного дифференциального уравнения

Получим решение однородного уравнения в общем виде.

Перепишем уравнение (1.4) в виде:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)\,y, \tag{1.5}$$

разделим переменные, то есть все множители, содержащие $y$, перенесем в одну часть, все множители, содержащие аргумент $x$, — в другую:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)\,dx. \tag{1.6}$$

Заметим: переход между двумя последними равенствами (1.9) и (1.6) неэквивалентен, он подразумевает, что $y(x) \neq 0$. Для того, чтобы не потерять возможное решение, надо рассматривать этот случай отдельно. Можно подставить $y(x) = 0$ в исходное уравнение (1.4) и убедиться, что это равенство является решением однородного уравнения.

Теперь проинтегрируем уравнение с разделенными переменными (1.6):

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx,$$

$$\ln|y| = -\int p(x)\,dx + C, \quad C \in \mathbb{R}^1.$$

Эквивалентное преобразование:

$$|y| = e^{-\int p(x)dx + C} = e^C e^{-\int p(x)dx},$$

переобозначим константу:

$$C = e^C, \quad C \in \mathbb{R}^{1+} = (0, +\infty),$$

$$y = \pm C e^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^{1+},$$

снова переобозначим константу:

$$C = \pm C, \quad C \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\},$$

$$y(x) = C e^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1 \backslash \{0\}. \tag{1.7}$$

Осталось вспомнить про замечание, что $y(x) = 0$ тоже является решением, что можно естественным образом учесть, добавив в область значений константы в выражении (1.7) значение $C = 0$.

Таким образом, решение изначального однородного уравнения (1.4):

$$y(x) = C e^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1. \tag{1.8}$$

**Определение 1.8.** *В курсах дифференциальных уравнений процесс решения дифференциального уравнения принято называть интегрированием.*

То есть термин «интегрирование» эквивалентен термину «решение». Поэтому, чтобы не происходило неточностей в терминологии, приняты следующие определения:

**Определение 1.9.** *Знак интеграла принято называть квадратурой, а процесс поиска определенного или неопределенного интеграла принято называть квадрированием.*

**Определение 1.10.** *Решением дифференциального уравнения в квадратурах называется выражение неизвестной функции через элементарные функции и интегралы от элементарных функций.*

В зависимости от вида функции $p(x)$ можно либо аналитически получить выражение для функции $y(x)$ из формулы (1.8), либо, для сложного вида $p(x)$, с помощью численного интегрирования получать значения функции $y(x)$ для используемых в задаче значений аргумента $x$.

**Определение 1.11.** *Общим решением дифференциального уравнения называется совокупность всех его решений.*

## Теорема о единственности представления решения

Теперь докажем теорему о единственности представления решения линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка.

**Теорема 1.1.** *Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка представимо в таком виде:*

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^1. \tag{1.9}$$

**Доказательство:**

Пусть $\varphi(x)$ — любое решение. То есть:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} + p(x)\varphi(x) = 0.$$

Теперь рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\Phi(x) = \varphi(x)e^{+\int p(x)dx}.$$

Вычислим производную:

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx}e^{+\int p(x)dx} + p(x)\varphi(x)e^{+\int p(x)dx} = \left(\frac{d\varphi(x)}{dx} + p(x)\varphi(x)\right)e^{+\int p(x)dx} = 0,$$

$$\frac{d\Phi(x)}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(x) = C.$$

Значит, любое решение дифференциального линейного однородного уравнения первого порядка представимо в виде, аналогичном (1.9):

$$\varphi(x) = Ce^{-\int p(x)dx}.$$

■

**Замечание:** с математической точки зрения рассмотренная нами задача (1.4) имеет бесконечно много решений. В прикладных задачах бесконечное множество решений невозможно, поэтому с практической точки зрения задача (1.4) не является корректно поставленной. Введем определение корректно поставленной задачи.

## Корректно поставленная задача по Адамару

**Определение 1.12.** *Задача называется корректно поставленной по Адамару, если ее решение:*

1) *существует;*

2) *единственно;*

3) *устойчиво по отношению ко входным данным.*

Невыполнение любого из этих условий означает некорректную постановку задачи.

## Задача Коши

Для выделения единственного решения задачи (1.4) необходимо поставить дополнительные условия. Обычно дополнительное условие ставится в виде известного значения функции при некотором значении аргумента — так называемая задача Коши:

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = 0, \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Дополнительное условие выделяет из множества интегральных кривых (при любых значениях $C$) одну определенную кривую, например, как показано на рис. 1.2.

Задачу Коши также называют *начальной* задачей, так как на практике часто аргументом искомой функции является время.

Решение задачи Коши (1.10) с учетом выкладок, проведенных ранее, получится:

$$y(x) = y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi) d\xi}, \tag{1.11}$$

можно убедиться в этом прямой подстановкой в систему (1.10).

**Замечание:** если рассматривать линейное однородное уравнение с дополнительным условием, также равным нулю ($y^0 = 0$), то решением задачи (1.10) будет функция, тождественно равная нулю $y(x) = 0$.

## Линейное неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка

Вернемся к рассмотрению неоднородного уравнения (1.3):

$$y' + p(x)\, y = f(x)\,.$$

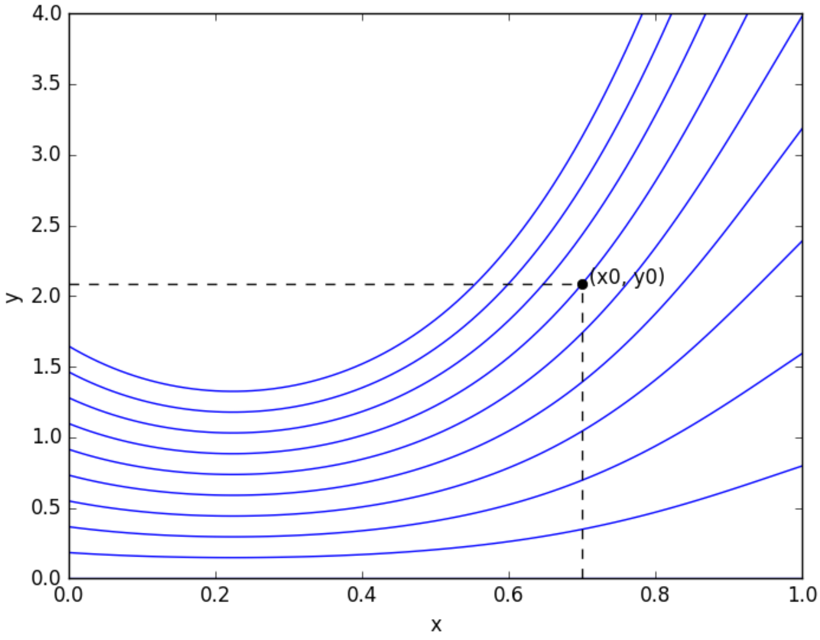


Рис. 1.2. Множество интегральных кривых $y(x)$ — синие линии и выделение из них одной кривой с помощью начального условия в задаче (1.10).

Решение уравнения (1.3) можно искать разными способами. Одним из самых распространенных способов поиска решения является *метод вариации постоянной или метод Лагранжа*. Данный метод заключается в следующем:

1) Находится общее решение однородного уравнения (1.4):
$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx};$$

2) Решение неоднородного уравнения (1.3) находится в виде:
$$y(x) = C(x)\, e^{-\int p(x)dx}, \tag{1.12}$$
то есть константа варьируется по переменной $x$.

## Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

В соответствии с методом вариации постоянной при подстановке (1.12) в производную $y'$ получим:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx},$$
подставим в неоднородное уравнение (1.3):
$$\frac{dC}{dx}e^{-\int p(x)dx} - p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} + p(x)\, C(x)\, e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

два слагаемых сокращаются, после чего разделяем переменные:

$$dC(x) = f(x)\, e^{+\int p(x)dx} dx,$$

интегрируем:

$$\int dC(x) = \int f(x)\, e^{+\int p(x)dx} dx,$$

$$C(x) = \int f(x)\, e^{+\int p(x)dx} dx + \tilde{C},$$

подставим результат в решение (1.12):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \int f(x)\, e^{+\int p(x)dx} dx + \tilde{C} e^{-\int p(x)dx}. \tag{1.13}$$

Таким образом, методом вариации постоянной получено решение неоднородного линейного дифференциального уравнения первого порядка (1.3) для произвольных функций $p(x)$, $f(x)$ в квадратурах. То есть функция $y(x)$ выражена явно. Для конкретных функций $p(x)$, $f(x)$ можно вычислять интегралы в формуле (1.13) либо аналитически, либо численно.

Обратим внимание на структуру общего решения: второй член в формуле (1.13) совпадает с общим решением однородного уравнения (1.8), первый член является некоторым частным решением неоднородного уравнения (1.3). Поэтому получается утверждение, аналогичное утверждению, справедливому для алгебраических уравнений: *общее решение неоднородного уравнения является суммой общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.*

Снова заметим, что задача (1.3) поставлена некорректно. Добавим дополнительное условие для выделения единственного решения:

$$\begin{cases} y' + p(x)\, y = f(x), \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Тогда решение (1.13) преобразуется:

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi} \int\limits_{x^0}^{x} f(\eta)\, e^{\int\limits_{x^0}^{\eta} p(\xi)d\xi} d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

преобразуем далее:

$$y(x) = \int\limits_{x^0}^{x} f(\eta)\, e^{-\left(\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi + \int\limits_{\eta}^{x^0} p(\xi)d\xi\right)} d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi},$$

$$y(x) = \int\limits_{x^0}^{x} e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi} f(\eta)\, d\eta + y^0 e^{-\int\limits_{x^0}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

Введем обозначение:

$$K(x, \eta) = e^{-\int\limits_{\eta}^{x} p(\xi)d\xi}.$$

**Определение 1.13.** *Функция $K(x,\eta)$ называется функцией Коши или импульсной функцией.*

С ее помощью решение задачи Коши (1.14) можно записать в виде:

$$y(x) = \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\eta) f(\eta)\, d\eta + y^0 K\left(x, x^0\right). \tag{1.15}$$

Смысл рассмотрения функции Коши заключается в том, что для определенного класса задач с одной функцией $p(x)$ можно один раз получить функцию Коши и применять ее для различных начальных условий и неоднородностей. Это позволяет существенно сократить время расчетов, так как можно не решать для каждой задачи вида (1.14) дифференциальное уравнение, а просто вычислять интеграл (1.15), используя найденную функцию Коши.

# Лекция 2. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши

## Постановка задачи Коши

Тема данной лекции — теорема существования и единственности решения задачи Коши для скалярного обыкновенного дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение общего вида:

$$y' = f\left(x, y\right). \tag{2.1}$$

Уравнение (2.1) — первого порядка, разрешенное относительно старшей производной. Но уравнение (2.1) написано в общем случае и может быть нелинейным. Для выделения единственного решения (при условии существования решения) добавим дополнительное условие, получим задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f\left(x, y\right), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Выбор конечного интервала $(x^0, a]$ в задаче (2.2) для поиска решения связан с тем, что в практически значимых задачах моделирование выполняется в ограниченных пределах по временной координате, если координата $x$ выполняет роль времени.

## Дополнительные условия на неоднородность

Для доказательства последующих утверждений наложим дополнительные условия на функцию $f\left(x, y\right)$. Будем предполагать, что $f\left(x, y\right)$ — непрерывна на множестве (см. рис. 2.1):

$$D = \left[x^0, a\right] \times \left[y^0 - b, y^0 + b\right]. \tag{2.3}$$

Выбор ограниченной области по координате $y$ связан с тем, что при таком выборе область (2.3) оказывается ограниченной и замкнутой, в отличие от возможного выбора области-полосы $[x^0, a] \times (-\infty, +\infty)$, которая не является ограниченной. Это позволяет применить для области (2.3) теорему Вейерштрасса.

Далее будем предполагать условия:

1) Функция $f\left(x, y\right)$ является определенной и непрерывной на множестве $D$.

   Из условия ограниченности области $D$ и теоремы Вейерштрасса можно утверждать:

$$\left|f\left(x, y\right)\right| \leqslant M \quad \forall\left(x, y\right) \in D.$$

2) $f\left(x, y\right)$ — удовлетворяет условию Липшица по переменной $y$ на множестве $D$.

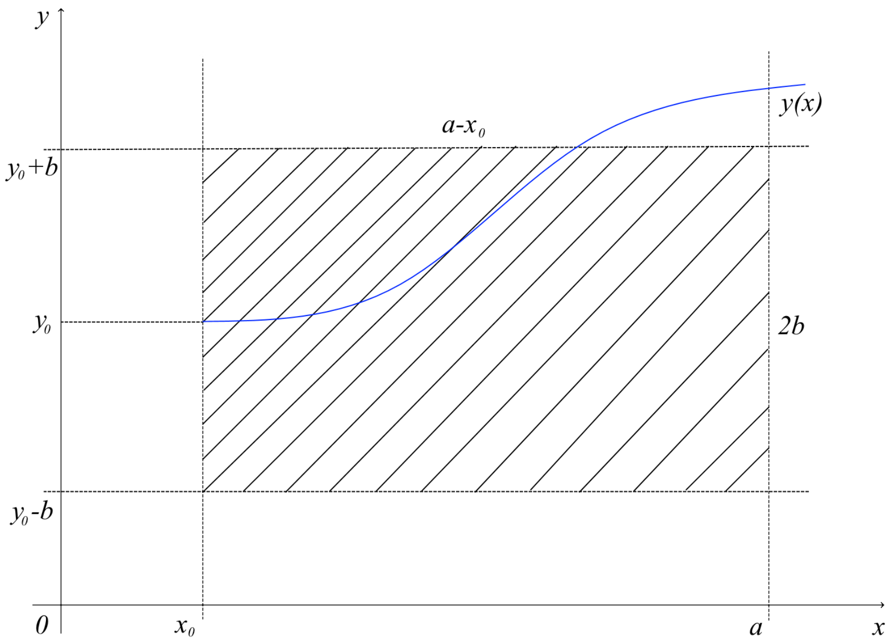


Рис. 2.1. Область $D$, задаваемая формулой (2.3).

**Определение 2.1.** *Функция $f(x,y)$ называется удовлетворяющей условию Липшица по переменной $y$, если:*

$$\exists L: \quad \left(x,y^1\right), \left(x,y^2\right) \in D \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \left|f\left(x,y^1\right) - f\left(x,y^2\right)\right| \leqslant L\left|y^1 - y^2\right|. \tag{2.4}$$

**Замечание:** при стремлении $y^2 \to y^1$ неравенство (2.4) переходит в условие ограниченности частной производной $\frac{\partial f}{\partial y}$. Однако, условие (2.4) получается более общим, так как частная производная может не существовать, а условие Липшица будет оставаться справедливым.

## Ограничения на область существования решения

Для области (2.3) определенные интегральные кривые $y(x)$ могут выходить за пределы этой области. Сделаем оценку множества, в котором заключены кривые. Для этого рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) = \pm M, \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Задача (2.5) дает ограничения на все интегральные кривые для задачи Коши (2.2) в области $D$. Решим задачу (2.5):

$$dy = \pm M dx,$$

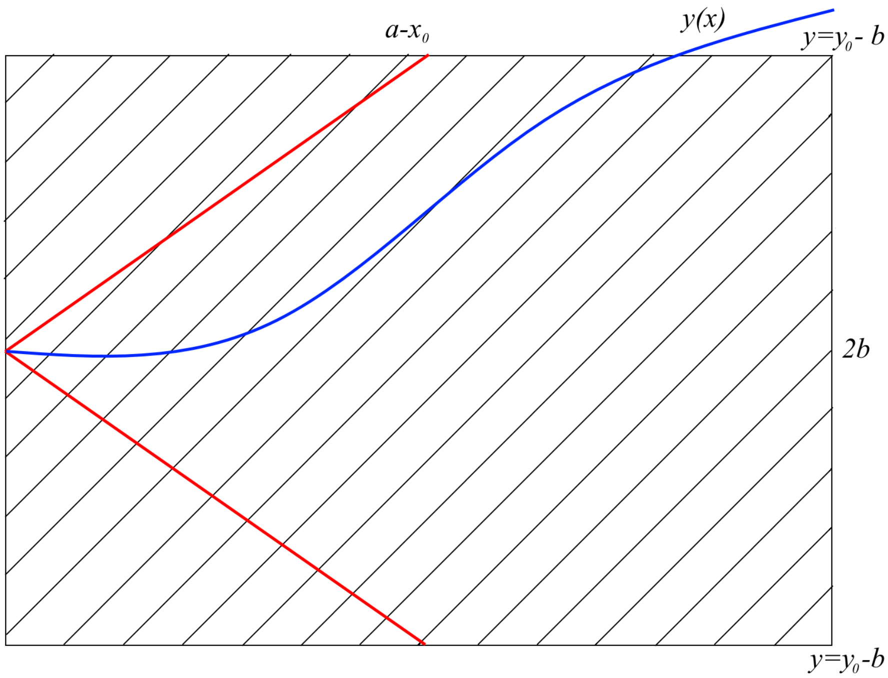


Рис. 2.2. Красные линии — ограничивающие кривые, полученные из задачи (2.5) для всех интегральных кривых в области $D$ для задачи (2.2).

$$y = \pm Mx + C,$$
$$y^0 = \pm Mx^0 + C \quad \Rightarrow \quad C = y^0 \mp Mx^0,$$
$$y = \pm Mx + y^0 \mp x^0 = y^0 \pm M\left(x - x^0\right). \tag{2.6}$$

Теперь получим результат пересечения кривых (2.6) с верхней и нижней границами области $D$, эти границы задаются уравнениями $y = y^0 \pm b$ (см. рис. 2.2).

$$\begin{cases} y = y^0 \pm M\left(x - x^0\right), \\ y = y^0 \pm b. \end{cases} \tag{2.7}$$

Приравняем правые части уравнений (2.7):

$$y^0 \pm b = y^0 \pm M\left(x - x^0\right),$$

$$x = x^0 + \frac{b}{M}.$$

То есть на отрезке $x \in \left[x^0, x^0 + \frac{b}{M}\right]$ мы можем быть уверены, что интегральная кривая не покинет прямоугольник $D$. Обозначим:

$$H = \min\left(\frac{b}{M}, a - x^0\right). \tag{2.8}$$

Добавление в равенство (2.8) величины $a - x^0$ связано с тем, что при достаточно малом $M$ ограничивающие кривые не пересекутся с верхней и нижней границами прямоугольника $D$, то есть все интегральные кривые заведомо принадлежат области $D$.

## Теорема существования и единственности решения задачи Коши в локальной формулировке

**Теорема 2.1.** *Пусть функция $f(x,y)$ удовлетворяет условиям 1 и 2, то есть $f(x,y)$ — определена и непрерывна в $D$, а также удовлетворяет условию Липшица (2.4) по переменной $y$ в области $D$. Тогда решение задачи Коши (2.2):*

$$\begin{cases} y' = f(x,y), & x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \tag{2.9}$$

*существует и единственно на отрезке $x \in [x^0, x^0 + H]$.*

Теорема 2.1 — теорема существования и единственности решения задачи Коши в *локальной* формулировке, потому как данная теорема утверждает существование и единственность решения задачи Коши только на локальном подмножестве интервала $[x^0, a]$.

**Доказательство:**

Сначала докажем существование решения задачи при $x \in (x^0, x^0 + H]$.

Заметим, что задача Коши (2.2) эквивалентна интегральному уравнению:

$$y(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi. \tag{2.10}$$

Будем использовать метод последовательных приближений — так называемый метод Пикара. Для этого возьмем произвольную непрерывную на $[x^0, x^0 + H]$ функцию $y_0(x)$ и составим последовательность задач для $n \geqslant 1$:

$$\begin{cases} y_n' = f(x, y_{n-1}(x)), & x \in \left(x^0, x^0 + H\right], \\ y_n\left(x^0\right) = y^0, \end{cases}$$

каждая из которых эквивалентна уравнению вида (2.10):

$$y_n(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi. \tag{2.11}$$

Уравнение вида (2.11) уже не является интегральным, так как на каждой следующей итерации мы подставляем в интеграл известную функцию, полученную на предыдущей итерации, причем на каждой итерации получается непрерывная функция. Поэтому получаем бесконечную последовательность функций:

$$\{y_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}.$$

Исследуем данную функциональную последовательность на равномерную сходимость с помощью мажорантного признака Вейерштрасса. Для этого построим мажорирующую функцию:

$$S(x) = y_1(x) + (y_2(x) - y_1(x)) + \ldots + (y_n(x) - y_{n-1}(x)). \tag{2.12}$$

Очевидно, что:

$$S_n(x) = y_n(x).$$

Рассмотрим модуль разности двух итераций (2.11):

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi - \left( y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_0(\xi))\, d\xi \right) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{x^0}^{x} \left[ f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0(\xi)) \right] d\xi \right| \leqslant \int\limits_{x^0}^{x} \left| f(\xi, y_1(\xi)) - f(\xi, y_0(\xi)) \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x^0}^{x} |y_1(\xi) - y_0(\xi)|\, d\xi \leqslant L \max_{\xi \in D} |y_1(\xi) - y_0(\xi)| \left( x - x^0 \right) \leqslant$$

$$\leqslant L2b \left( x - x^0 \right) \leqslant 2bLH.$$

Теперь аналогично получим для следующих двух итераций:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \leqslant L \int\limits_{x^0}^{x} |y_2(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi \leqslant$$

$$\leqslant L \int\limits_{x^0}^{x} L2b \left( \xi - x^0 \right) d\xi = 2bL^2 \left. \frac{\left( \xi - x^0 \right)^2}{2} \right|_{x^0}^{x} = 2bL^2 \frac{\left( x - x^0 \right)^2}{2} \leqslant 2b \frac{(LH)^2}{2}.$$

Используя метод математической индукции, можно показать, что:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant 2b \frac{(LH)^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{2.13}$$

Поэтому для оценки модуля функции (2.12) получаем числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2b \frac{(LH)^{n-1}}{(n-1)!}, \tag{2.14}$$

который сходится. Сходимость ряда можно доказать, например, с помощью признака Даламбера.

Тем самым мы доказали, используя мажорантный признак Вейерштрасса для функциональных рядов, что функциональный ряд (2.12) равномерно сходится и мажорируется числовым рядом (2.14). Из равномерной сходимости следует сходимость, поэтому существует непрерывная функция, к которой сходятся частичные суммы ряда (2.12):

$$\exists y(x): \quad y_n(x) \Longrightarrow y(x), \quad n \to +\infty.$$

Теперь вернемся к интегральному уравнению (2.11) и возьмем предел от обеих частей:

$$\lim_{n \to \infty} y_n(x) = \lim_{n \to \infty} \left( y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_{n-1}(\xi))\, d\xi \right),$$

$$y(x) = y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y(\xi))\, d\xi,$$

что совпадает с (2.10).

Таким образом, мы показали, что существует функция, которая удовлетворяет интегральному уравнению (2.10). Из эквивалентности интегрального уравнения (2.10) задаче Коши (2.2) следует тот факт, что существует решение задачи Коши. Теперь докажем единственность решения задачи (2.2).

Допустим, что существует два решения задачи Коши $y_1(x)$, $y_2(x)$, которые одновременно удовлетворяют задаче (2.2), или, что эквивалентно, удовлетворяют соответствующему интегральному уравнению (2.10).

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$u(x) = y_2(x) - y_1(x).$$

Проведем оценки:

$$|u(x)| = |y_2(x) - y_1(x)| = \left| y^0 + \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_2(\xi))\, d\xi - y^0 - \int\limits_{x^0}^{x} f(\xi, y_1(\xi))\, d\xi \right| =$$
$$= \left| \int\limits_{x^0}^{x} \left( f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi)) \right) d\xi \right| \leqslant \int\limits_{x^0}^{x} |f(\xi, y_2(\xi)) - f(\xi, y_1(\xi))|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant L \int\limits_{x^0}^{x} |y_2(\xi) - y_1(\xi)|\, d\xi = L \int\limits_{x^0}^{x} |u(\xi)|\, d\xi \leqslant$$
$$\leqslant L\left(x - x^0\right) \max_{[x^0, x^0+H]} |u(x)| \leqslant LH \max_{[x^0, x^0+H]} |u(x)|. \quad (2.15)$$

Вспомогательное утверждение:

$$\text{Если } LH < 1, \text{ то: } u(x) \equiv 0. \quad (2.16)$$

Утверждение (2.16) справедливо, так как для ненулевой функции на некотором отрезке всегда выполняется $|u(x)| \leqslant C \max |u(x)|$, где $C \geqslant 1$.

Если же для рассматриваемой задачи (2.2) получилось, что $LH \geqslant 1$, то рассмотрим такое значение $h$, чтобы выполнялось $Lh < 1$, и тогда на рассматриваемом новом отрезке получим $u(x) = 0$.

На оставшейся части отрезка $[x^0 + h, x^0 + H]$ проведем оценки, аналогичные оценке (2.15), с заменой константы $H$ на константу $H - h$.

Снова сравниваем $L(H - h)$ с единицей и повторяем процедуру до тех пор, пока не покроем весь отрезок $[x^0, x^0 + H]$.

Таким образом, $u(x) \equiv 0$ на $[x^0, x^0 + H]$.

Следовательно, $y_1(x) \equiv y_2(x)$, что доказывает единственность решения скалярной задачи Коши (2.2).

■

# Лекция 3. Теорема сравнения и метод дифференциальных неравенств

## Теорема существования и единственности решения задачи Коши в глобальной формулировке

Теперь мы будем обобщать утверждение теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в локальной формулировке 2.1 (для ограниченной области) на более общий случай решения в полосе $D = [x^0, a] \times \mathbb{R}^1$ и получим таким образом глобальную формулировку теоремы. Она формулируется и доказывается аналогично локальной формулировке, поэтому доказательство опускается.

С практической точки зрения глобальная формулировка является более удобной. Однако данная формулировка теоремы не всегда применима, например:

$$\begin{cases} y' = y^2, \quad x \in (0, 2], \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3.1}$$

Можно проверить, что для задачи (3.1) не выполняется условие Липшица, если рассматривать область-полосу (то есть если пользоваться глобальной формулировкой). В случае задачи (3.1), как уже было рассмотрено в первой лекции, известно аналитическое решение:

$$y(x) = \frac{1}{1-x}, \tag{3.2}$$

которое, применительно к практическим задачам, задает решение, которому можно доверять лишь на интервале $x \in [0, 1)$. Теорема в локальной формулировке 2.1 позволяет доказать, что решение задачи Коши (3.1) существует лишь на данном интервале $[0, 1)$. Аналогично, теорему 2.1 можно применять и для других задач, для которых неизвестно аналитическое решение, если использовать численные методы решения.

Таким образом, теорема в глобальной формулировке более удобна для применения в практических задачах, а теорема в локальной формулировке применима для более широкого класса задач.

## Пример применения локальной формулировки теоремы

Воспользуемся локальной формулировкой 2.1 для определения области существования решения рассматриваемой задачи (3.1).

Предположим, что решение задачи (3.1) существует и возрастает на искомом отрезке существования решения $[x^0, x^0 + H]$.

Имеем:

$$H = \frac{b}{M}, \quad M = \max_D |f(x, y)| = \max y^2.$$

Если мы допускаем, что функция только возрастает, то она достигает своего набольшего значения на правой границе:

$$M = \max_D y^2 = (1+b)^2, \quad H(b) = \frac{b}{M} = \frac{b}{(1+b)^2}.$$

Если мы хотим найти наибольшую область существования решения, то надо найти экстремум функции $H(b)$:

$$H'(b) = 0,$$

$$\frac{1 \cdot (1+b)^2 - b \cdot 2(1+b)}{(1+b)^4} = 0,$$

$$(1+b)(1+b-2b) = 0,$$

$$b - 1 = 0, \quad b = 1 \quad \Rightarrow \quad H(1) = \frac{1}{4}.$$

То есть решение точно существует на отрезке $\left[x^0, x^0 + \frac{1}{4}\right]$. Так как мы знаем аналитическое решение (3.2), то мы можем заметить, что оценка отрезка существования решения получилась заниженной. Это связано с тем, что мы делали довольно грубые допущения. Можно добиться более точной оценки, если делать более точные допущения о поведении функции.

## Расширение множества, на котором решение существует и единственно

Далее можно попробовать расширить найденную гарантированную область существования решения. Для этого нужно рассмотреть следующую задачу:

$$\begin{cases} y' = y^2, \quad x \in \left(\dfrac{1}{4}, 2\right], \\ y\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{4}{3}, \end{cases} \tag{3.3}$$

где начальное значение функции вычислено из известного аналитического решения (3.2). Для задачи (3.3) можно повторить рассуждения из предыдущего подраздела. Тогда получим:

$$H(b) = \frac{b}{\left(\frac{4}{3} + b\right)^2},$$

экстремум достигается в точке $b = \frac{3}{16}$. Получаем область существования решения:

$$\left[0, \frac{1}{4} + \frac{3}{16}\right], \tag{3.4}$$

далее можно аналогично ставить вспомогательные задачи на новых отрезках (аналогично (3.3)) и в итоге получить область существования решения $[0, 1)$.

Однако, данный метод неприменим в практических задачах, так как он предполагает использование известного аналитического решения для получения нового начального условия (3.3), (3.2). В реальной задаче этим воспользоваться нельзя.

Снова рассмотрим задачу Коши в общем виде:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Имеем следующую проблему: глобальная формулировка теоремы применима для ограниченного класса функций $f(x, y)$. Локальная формулировка неудобна для практических целей, она дает гарантированные оценки лишь на ограниченных подмножествах.

## Теорема Чаплыгина о дифференциальных неравенствах

Сначала сформулируем вспомогательные утверждения.

**Теорема 3.1.** *Пусть существует $y(x)$ — решение задачи Коши (3.5), и пусть также существует функция $z(x) \in C([x^0, a]) \cap C^1((x^0, a])$, удовлетворяющая условиям:*

$$\begin{cases} z'(x) < f(x, z(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ z\left(x^0\right) < y^0. \end{cases}$$

*Тогда:*

$$z(x) < y(x) \quad \forall x \in \left[x^0, a\right].$$

**Доказательство:**

Будем доказывать от противного.

Заметим:

$$z\left(x^0\right) < y\left(x^0\right) = y^0.$$

Допустим, что данное неравенство первый раз нарушится в точке $x^1 \in (x^0, a]$, то есть:

$$z\left(x^1\right) = y\left(x^1\right), \quad z'\left(x^1\right) \geqslant y'\left(x^1\right) = f\left(x^1, y\left(x^1\right)\right) = f\left(x^1, z\left(x^1\right)\right).$$

То есть мы только что получили, что:

$$z' \geqslant f\left(x^1, z\left(x^1\right)\right),$$

и это противоречит условию теоремы. Значит, утверждение теоремы верно. ■

**Определение 3.1.** *Функция $\alpha(x) \in C([x^0, a]) \cap C^1((x^0, a])$ называется нижним решением, если для нее справедливы условия (см. рис. 3.1):*

$$\begin{cases} \alpha'(x) < f(x, \alpha(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \alpha\left(x^0\right) < y^0. \end{cases} \tag{3.6}$$

**Определение 3.2.** *Функция $\beta(x) \in C([x^0, a]) \cap C^1((x^0, a])$ называется верхним решением, если для нее справедливы условия (см. рис. 3.1):*

$$\begin{cases} \beta'(x) > f(x, \alpha(x)), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \beta\left(x^0\right) > y^0. \end{cases} \tag{3.7}$$

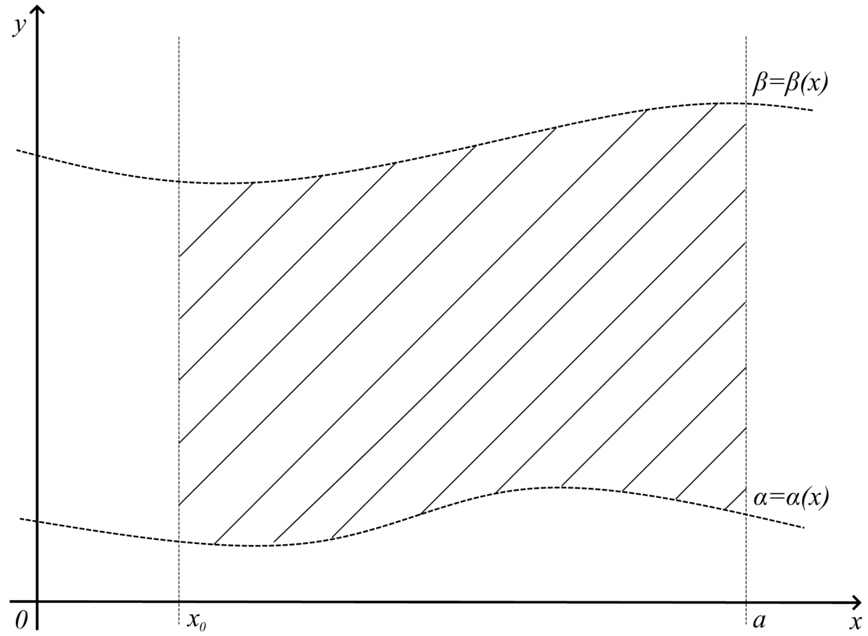


Рис. 3.1. Верхнее и нижнее решения $\alpha$, $\beta$ ограничивают область $D$.

## Теорема существования и единственности решения задачи Коши в формулировке Чаплыгина

**Теорема 3.2** (Чаплыгина)**.** *Пусть существуют верхнее* (3.7) *и нижнее* (3.6) *решения задачи Коши* (3.5) $\beta(x)$, $\alpha(x)$ *и пусть функция* $f(x,y)$ *— определена, непрерывна и удовлететворяет условию Липшица по переменной* $y$ *в области* $D = [x^0, a] \times [\alpha(x), \beta(x)]$.

*Тогда функция-решение задачи Коши* (3.5) $y(x)$ *существует и единственна на* $[x^0, a]$ *и лежит между верхним и нижним решениями.*

**Доказательство:**

Построим вспомогательную функцию:

$$h(x,y) = \begin{cases} f(x, \beta(x)) + (y - \beta(x)), & y > \beta(x), \\ f(x,y), & y \in [\alpha(x), \beta(x)], \\ f(x, \alpha(x)) + (y - \alpha(x)), & y < \alpha(x). \end{cases} \tag{3.8}$$

В результате мы получаем функцию, определенную и непрерывную в полосе $[x^0, a] \times [-\infty, +\infty] = D^{\text{п}}$. Определим, удовлетворяет ли данная функция (3.8) условию Липшица. То есть нам надо доказать, что:

$$\exists N\colon \quad \forall \left(x, y^1\right), \left(x, y^2\right) \in D^{\text{п}} \quad \Rightarrow \quad \left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| \leqslant N \left|y^1 - y^2\right|.$$

На данный момент нам известно, что:

$$\exists L\colon \quad \forall \left(x, y^1\right), \left(x, y^2\right) \in D \quad \Rightarrow \quad \left|f\left(x, y^1\right) - f\left(x, y^2\right)\right| \leqslant L \left|y^1 - y^2\right|.$$

Рассмотрим разные случаи, при которых функция (3.8) определяется разными способами (согласно определению).

В случае, когда точки $(x, y_1), (x, y_2)$ расположены в области между верхним и нижним решениями, $h(x,y) = f(x,y)$, доказательство тривиально.

В случае, например, когда $y_1 \geqslant \beta(x)$, $y_2 < \alpha(x)$, получаем:

$$\begin{aligned}\left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| &= \left|f\left(x, \beta(x)\right) + y^1 - \beta(x) - f\left(x, \alpha(x)\right) - y^2 + \alpha(x)\right| = \\ &= \left|f\left(x, \beta(x)\right) - f\left(x, \alpha(x)\right) + y^1 - y^2 + \alpha(x) - \beta(x)\right| \leqslant \\ &\leqslant \left|f\left(x, \beta(x)\right) - f\left(x, \alpha(x)\right)\right| + \left|y^1 - y^2\right| + \left|\alpha(x) - \beta(x)\right| \leqslant \\ &\leqslant L\left|\beta(x) - \alpha(x)\right| + \left|y^1 - y^2\right| + \left|y^1 - y^2\right| \leqslant (L+2)\left|y^1 - y^2\right|,\end{aligned} \tag{3.9}$$

то есть:

$$\left|h\left(x, y^1\right) - h\left(x, y^2\right)\right| \leqslant (L+2)\left|y^1 - y^2\right| = N\left|y^1 - y^2\right|. \tag{3.10}$$

Во всех других случаях, проводя аналогичные оценки (3.9), получим выражения, аналогичные (3.10). Таким образом, для любых произвольных $y^1, y^2$ из полосы $D^{\text{п}}$ выполнено условие Липшица с конечной константой $N$.

Значит, для вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} y' = h(x,y), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y^0, \end{cases} \tag{3.11}$$

выполнены условия теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши в глобальной формулировке.

Вспомогательная задача (3.11) совпадает с рассматриваемой задачей (3.5) в интересующей нас области-полосе между верхним и нижним решениями. Таким образом, теорема доказана. ■

Теорема Чаплыгина 3.2 полезна с практической точки зрения: она применима для широкого круга задач, как и теорема в локальной формулировке, и она доказывает существование и единственность решения на всем рассматриваемом отрезке $[x^0, a]$. Нахождение верхнего и нижнего решений на практике зачастую не составляет больших трудностей.

# Лекция 4. Теорема о существовании и единственности решения для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

## Нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений

**Определение 4.1.** *Система уравнений вида:*

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\,(t, \vec{x})\,, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

*где*

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^m \end{pmatrix}, \quad \vec{f}\,(t, \vec{x}) = \begin{pmatrix} f^1\,(t, x^1, \ldots, x^m) \\ \vdots \\ f^m\,(t, x^1, \ldots, x^m) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} f^1\,(t, \vec{x}) \\ \vdots \\ f^m\,(t, \vec{x}) \end{pmatrix},$$

*называется нормальной системой обыкновенных дифференциальных уравнений.*

Термин «нормальная система» в данном случае означает, что уравнения разрешены относительно старшей производной.

## Понятие нормы вектора

Для того, чтобы сравнивать между собой вектора, введем понятие нормы вектора:

$$\|\vec{y}\| := \max_{i=1,\ldots,m} \left|y^i\right|.$$

Норма вводится в таком виде как наиболее удобная для упрощения выкладок в последующей части курса.

Теперь введем понятие нормы вектор-функции:

$$\|\vec{x}\,(t)\| := \max_{i=1,\ldots,m} \max_{t\in[t_0,T]} \left|x^i\,(t)\right|.$$

## Условия для выполнения теоремы

Перед формулировкой теоремы сформулируем условия:

1) $\vec{f}\,(t, \vec{x})$ — определена и непрерывна в $m+1$-мерном параллелепипеде:

$$\overline{D} = \left\{t \in [t_0, T]\,, \quad x^i \in \left[x_0^i - b^i, x_0^i + b^i\right]\right\}.$$

2) $\vec{f}\,(t, \vec{x})$ — удовлетворяет условию Липшица по переменной $\vec{x}$ в $\overline{D}$:

$$\exists L > 0\colon \quad \forall\,(t, \vec{x}_1)\,, (t, \vec{x}_2) \in \overline{D} \quad \forall i = 1, \ldots, m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \left|f^i\,(t, \vec{x}_1) - f^i\,(t, \vec{x}_2)\right| \leqslant L \sum_{j=1}^{m} \left|x_1^i - x_2^i\right|.$$

**Утверждение:** рассматриваемая задача Коши (4.1):

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\,(t, \vec{x})\,, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{x}\,(t_0) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

эквивалентна системе интегральных уравнений:

$$\vec{x}\,(t) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}\,(\xi, \vec{x}\,(\xi))\, d\xi. \tag{4.2}$$

В справедливости данного утверждения можно убедиться прямой подстановкой (4.2) в (4.1).

## Локальная формулировка теоремы

**Теорема 4.1.** *Если $\vec{f}\,(t, \vec{x})$ — определена, непрерывна и удовлетворяет условию Липшица в области $\overline{D}$, то решение задачи Коши* (4.1) *существует и единственно на множестве $[t_0, t_0 + H]$, где:*

$$H = \min\left(T - t_0, \frac{\min\limits_i b^i}{M}\right), \quad M \geqslant \left\|\vec{f}\,(t, \vec{x})\right\|.$$

Доказательство теоремы 4.1 можно проводить аналогично способу доказательства теоремы 2.1. Мы проведем доказательство другим способом — с помощью сведений из курса интегральных уравнений. Для этого сначала введем несколько определений.

## Банаховы пространства

**Определение 4.2.** *Полное нормированное пространство называется банаховым.*

Зачем нужны банаховы пространства на практике?

Одним из свойств нормированного пространства является наличие нулевого элемента:

$$\|y\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \theta.$$

Это свойство позволяет сравнивать элементы пространства. Чем ближе норма разности двух элементов к нулю, тем ближе между собой два элемента.

Полнота пространства означает, что любая фундаментальная последовательность в нем сходится. Большинство численных методов решения задач — итерационные. На каждой итерации вычисляется очередной элемент пространства. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока разность элементов не станет меньше заданной точности вычислений. Из того, что последовательность элементов фундаментальная, следует сходимость последовательности. Поэтому можно остановить итерационный процесс при достижении нужной точности и считать, что полученное приближенное решение достаточно близко к точному.

## Понятие неподвижной точки

Пусть $\Phi$ — оператор, определенный на заданном подмножестве $D$ банахова пространства $B$.

**Определение 4.3.** *Точка $y \in D \subset B$ называется неподвижной точкой банахова пространства $B$, если:*

$$\Phi(y) = y.$$

## Сжимающий оператор

**Определение 4.4.** *Оператор $\Phi$ называется сжимающим, если $\forall y_1, y_2 \in D \subset B$ выполняется:*

$$\exists q \in (0,1]: \quad \|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\| \leqslant q\,\|y_1 - y_2\|.$$

Наша цель в доказательстве теоремы — показать, что у интегрального уравнения (4.2):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}(\xi))\, d\xi,$$

существует решение. Приступаем к доказательству.
**Доказательство:**
Определим оператор:

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}(\xi))\, d\xi. \tag{4.3}$$

Покажем, что оператор (4.3) является сжимающим. Рассмотрим два произвольных вектора:

$$\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \overline{D}_H = \left\{ t \in [t_0, t_0 + H], \quad x^i \in \left[x_0^i - b^i, x_0^i + b^i\right] \right\}.$$

Теперь рассмотрим разность значений оператора (4.3) для этих векторов:

$$\|\Phi(\vec{x}_1) - \Phi(\vec{x}_2)\| = \left\| \vec{x}_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi))\, d\xi - \vec{x}_0 - \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi))\, d\xi \right\| =$$

$$= \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi))\, d\xi - \int\limits_{t_0}^{t} \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi))\, d\xi \right\| = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \left[ \vec{f}(\xi, \vec{x}_1(\xi)) - \vec{f}(\xi, \vec{x}_2(\xi)) \right] d\xi \right\| \leqslant$$

$$\leqslant H \left\| \max_{t \in [t_0, t_0 + H]} \left| \vec{f}(t, \vec{x}_1(t)) - \vec{f}(t, \vec{x}_2(t)) \right| \right\| = H \max_{t \in [t_0, t_0 + H]} \left\| \vec{f}(t, \vec{x}_1(t)) - \vec{f}(t, \vec{x}_2(t)) \right\| =$$

$$= H \max_{i = 1, \ldots, m} \max_{t \in [t_0, t_0 + H]} \left| f^i(t, \vec{x}_1(t)) - f^i(t, \vec{x}_2(t)) \right| \leqslant H \max_{i = 1, \ldots, m} \max_{t \in [t_0, t_0 + H]} L \sum_{j=1}^{m} \left| x_1^j - x_2^j \right| \leqslant$$

$$\leqslant HL \max_{t \in [t_0, t_0 + H]} \max_{j = 1, \ldots, m} \left| x_1^j - x_2^j \right| \cdot m = HLm\, \|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\|.$$

То есть:

$$\left\|\Phi\left(\vec{x}_1\right)-\Phi\left(\vec{x}_2\right)\right\| \leqslant HLm\left\|\vec{x}_1-\vec{x}_2\right\|.$$

Таким образом, оператор $\Phi$ — сжимающий, если:

$$HLm \leqslant 1.$$

Данная сравнительно грубая оценка определяет область, в которой гарантированно существует решение задачи Коши. Теперь воспользуемся теоремой из курса интегральных уравнений, которая утверждает, что сжимающий оператор имеет неподвижную точку:

$$\Phi\left(\vec{x}\right)=\vec{x}.$$

Значит, рассматриваемое интегральное уравнение (4.2) имеет единственное решение. Эквивалентная этому уравнению задача Коши (4.1) также имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_0+H]$. ■

Имеет место аналогичная теорема в глобальной формулировке. Она гарантирует единственность решения задачи (4.1) на всем отрезке решения $[t_0, T]$, но требует выполнения условий на функцию $\vec{f}\left(t,\vec{x}\right)$ не в параллелепипеде $\overline{D}$, а в $m+1$-мерной полосе.

# Лекция 5. Линейные однородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

## Определение дифференциального уравнения порядка *n*

Будем рассматривать задачу для следующего дифференциального уравнения:

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1\left(x\right) y^{(n-1)} + \ldots + a_n\left(x\right) y = f\left(x\right), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y'\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = y_n^0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Дифференциальное уравнение из системы (5.1) является линейным, так как оно состоит из линейной комбинации функции $y\left(x\right)$ и ее производных. Это уравнение является уравнением $n$-го порядка, так как старшая производная имеет порядок $n$.

Интегрирование данного уравнения дает $n$ произвольных констант. Поэтому для выделения единственного решения необходимо включать в задачу (5.1) $n$ дополнительных условий.

## Идея доказательства теоремы о существовании и единственности решения

Теорема существования и единственности решения задачи Коши (5.1) легко доказывается с помощью теоремы существования и единственности для нормальной системы дифференциальных уравнений первого порядка 4.1 после введения замены:

$$\begin{cases} y_1\left(x\right) = y\left(x\right), \\ y_2\left(x\right) = y'\left(x\right), \\ \vdots \\ y_n\left(x\right) = y^{(n-1)}\left(x\right). \end{cases}$$

После этого получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_3(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \vdots \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = y_n(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \dfrac{dy_n}{dx} = -a_1(x)\, y_n(x) - \ldots - a_n(x)\, y_1(x) + f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y_1\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y_2\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y_n\left(x^0\right) = y_n^0. \end{cases} \tag{5.2}$$

Систему (5.2) можно переписать в компактном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\vec{Y} = \vec{F}\left(x, \vec{Y}\right), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ \vec{Y}\left(x^0\right) = \vec{Y}_0, \end{cases} \tag{5.3}$$

где:

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ f(x) - a_1(x)\, y_n(x) - \ldots - a_n(x)\, y_1(x) \end{pmatrix}.$$

Система (5.3) — нормальная, значит, к ней можно применять соответствующую теорему 4.1. Выполнение условий теоремы при требовании непрерывности функций $a_1(x), \ldots, a_n(x)$ доказывается тривиально.

Теперь вернемся к исходной задаче Коши (5.1) и введем обозначение:

$$\begin{cases} Ly := y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = y_1^0, \\ y'\left(x^0\right) = y_2^0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = y_n^0, \end{cases}$$

где $L$ — линейный дифференциальный оператор, действующий на функцию $y(x)$ при условии, что функция $n$ раз дифференцируема.

## Теорема о принципе суперпозиции

**Теорема 5.1.** *Пусть:*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i f_i(x),$$

*причем:*

$$Ly_i = f_i(x),$$

*тогда решение уравнения из системы* (5.1) *представимо в виде комбинации:*

$$y(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

**Доказательство:**

Подставим представление для функции $y(x)$ в исходное уравнение (5.1), затем преобразуем:

$$Ly = L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right) = L\left(C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)\right) =$$
$$= C_1 L y_1(x) + \ldots + C_n L y_n(x) = C_1 f_1(x) + \ldots + C_n f_n(x) = f(x).$$

■

**Теорема 5.2.** *Любая комбинация решений однородного уравнения* $Ly = 0$ *тоже является решением однородного уравнения.*

**Доказательство:**

Для однородного уравнения $f(x) = 0$. Поэтому если $y_i$ — набор решений однородного уравнения:

$$Ly_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то комбинация решений также будет удовлетворять однородному уравнению:

$$L\left(\sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} C_i L y_i(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot 0 = 0.$$

■

**Теорема 5.3.** *Разность двух любых решений неоднородного уравнения* $Ly = f$ *является решением однородного уравнения.*

**Доказательство:**

Пусть:

$$Ly_1 = f(x),$$
$$Ly_2 = f(x),$$

тогда:

$$L(y_1 - y_2) = Ly_1 - Ly_2 = f(x) - f(x) = 0.$$

■

## Однородное линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка

Начнем изучение свойств линейного уравнения $n$-го порядка со случая однородного уравнения:

$$Ly = 0. \tag{5.4}$$

Заметим, что все возможные решения однородного уравнения (5.4) образуют линейное пространство. Это следует из теоремы о суперпозиции 5.2: из того, что любая линейная комбинация решений однородного уравнения тоже является его решением, следует тот факт, что эта линейная комбинация образует линейное пространство. Построим базис для данного пространства.

Пусть имеется набор из $n$ функций:

$$y_1(x), \ldots, y_n(x) \quad \text{на отрезке} x \in [a, b]. \tag{5.5}$$

**Определение 5.1.** *Будем называть функции* (5.5) *линейно зависимыми, если найдется нетривиальный набор коэффициентов $C_1, C_2, \ldots, C_n$ такой, что:*

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b].$$

**Определение 5.2.** *Будем называть функции* (5.5) *линейно независимыми, если равенство:*

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0, \quad x \in [a, b],$$

*возможно только в том случае, когда $C_1, \ldots, C_n$ — тривиальны.*

Теперь сформулируем практический критерий зависимости функций (5.5).

## Определитель Вронского системы функций

**Определение 5.3.** *Определитель вида:*

$$W(x) \equiv W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] := \begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}, \tag{5.6}$$

*называется определителем Вронского системы функций* (5.5).

**Теорема 5.4.** *Пусть набор функций* (5.5) *является линейно зависимым на отрезке $[a, b]$. Тогда определитель Вронского* (5.6) *системы этих функций тождественно равен нулю на $[a, b]$:*

$$W(x) = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

**Доказательство:**

Если функции (5.5) линейно зависимы, значит, существует такая нетривиальная линейная комбинация этих функций, которая равна нулю:

$$C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

Теперь составим следующую систему:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x) = 0, \\ C_1 y_1'(x) + \ldots + C_n y_n'(x) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}(x) = 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \ldots & y_n'(x) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся теоремой из линейной алгебры, которая гласит, что однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю. Так как по условию доказываемой теоремы нетривиальный набор коэффициентов существует, значит определитель системы, который совпадает с определителем Вронского (5.6), равен нулю. ■

**Теорема 5.5.** *Пусть набор функций* (5.5) *является линейно независимым на отрезке* $[a, b]$ *и пусть каждая из этих функций удовлетворяет однородному уравнению:*

$$Ly_i(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

*Тогда определитель Вронского системы функций* (5.5) *не равен нулю на* $[a, b]$*:*

$$W(x) = W[y_1(x), \ldots, y_n(x)] \neq 0 \quad \forall x \in [a, b].$$

**Доказательство:**

Предположим, что $\exists x^0 \in [a, b]$:

$$W\left(x^0\right) = 0.$$

Снова составим систему из комбинации функций в данной точке $x^0$:

$$\begin{cases} C_1 y_1\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n\left(x^0\right) = 0, \\ C_1 y_1'\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n'\left(x^0\right) = 0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}\left(x^0\right) = 0. \end{cases}$$

Перепишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1(x^0) & \ldots & y_n(x^0) \\ y_1'(x^0) & \ldots & y_n'(x^0) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}(x^0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(x^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Имеем систему однородных алгебраических уравнений (5.7). Определитель этой системы совпадает с определителем Вронского (5.6):

$$W\left(x^0\right) = W\left[y_1\left(x^0\right), \ldots, y_n\left(x^0\right)\right] = 0.$$

Снова воспользуемся теоремой из линейной алгебры (аналогично доказательству теоремы 5.4), откуда получим, что система (5.7) имеет нетривиальное решение: $C_1^0, \ldots, C_n^0$.

Составим вспомогательную функцию:

$$y\left(x\right) = C_1^0 y_1\left(x\right) + \ldots + C_n^0 y_n\left(x\right). \tag{5.8}$$

Заметим: $y_1\left(x\right), \ldots, y_n\left(x\right)$ являются решениями однородного дифференциального уравнения. По теореме 5.2 их комбинация (5.8) тоже является решением однородного уравнения. Вычислим значение комбинации (5.8) и ее производных в точке $x^0$, пользуясь системой (5.7), после чего составим задачу:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \\ y\left(x^0\right) = 0, \\ y'\left(x^0\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = 0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Таким образом, мы получили однородную задачу Коши с тривиальными начальными условиями. Система (5.9) всегда имеет единственное тривиальное решение:

$$y\left(x\right) \equiv 0, \quad x \in \left(x^0, b\right].$$

Можно поставить аналогичную задачу (5.9) и в обратную сторону, на отрезке $[a, x^0)$. В итоге получим:

$$y\left(x\right) \equiv 0, \quad x \in \left[a, b\right].$$

То есть мы нашли нетривиальный набор коэффициентов $C_1^0, \ldots, C_n^0$, который дает линейную комбинацию функций $y_1\left(x\right), \ldots, y_n\left(x\right)$, равную нулю на отрезке $[a, b]$. Значит, данный набор функций является линейно зависимым, что противоречит условию теоремы. Утверждение теоремы доказано. ■

Очевидное следствие:

**Теорема 5.6.** *Если имеется однородное дифференциальное уравнение $n$-го порядка и известна система решений этого уравнения на отрезке $[a, b]$, то определитель Вронского этой системы решений либо тождественно равен нулю в каждой точке отрезка $[a, b]$ и система решений линейно зависима на этом отрезке, либо не равен нулю во всех точках отрезка и решения являются линейно независимыми.*

Таким образом, определитель Вронского дает практический критерий линейной зависимости или независимости систем функций.

## Фундаментальная система решений

**Определение 5.4.** *Под фундаментальной системой решений однородного дифференциального уравнения порядка $n$ будем подразумевать набор любых $n$ линейно независимых на отрезке $[a, b]$ решений уравнения.*

Всегда ли уравнение имеет фундаментальную систему решений? Ответ дает следующая теорема.

## Теорема о существовании фундаментальной системы решений

**Теорема 5.7.** *Всякое линейное однородное дифференциальное уравнение $n$-го порядка с непрерывными коэффициентами на отрезке $[a, b]$ имеет фундаментальную систему решений.*

**Доказательство:**

Рассмотрим определитель из произвольного набора чисел, не равный нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.10}$$

Поставим $n$ задач Коши по определению функций $y_k$ следующим образом:

$$\begin{cases} Ly_k = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \quad k = 1, \dots, n, \\ y_k\left(x^0\right) = a_{1k}, \\ y'_k\left(x^0\right) = a_{2k}, \\ \vdots \\ y_k^{(n-1)}\left(x^0\right) = a_{nk}. \end{cases} \tag{5.11}$$

По теореме о существовании и единственности решения задачи Коши решение данных задач (5.11) существует. Значит, решая задачи Коши (5.11), мы можем найти $n$ функций:

$$y_k\left(x\right), \quad k = 1, \dots, n. \tag{5.12}$$

Составим из полученных функций (5.12) определитель Вронского:

$$W\left(x\right) = \begin{vmatrix} y_1\left(x\right) & \dots & y_n\left(x\right) \\ y'_1\left(x\right) & \dots & y'_n\left(x\right) \\ \vdots & & \\ y_1^{(n-1)}\left(x\right) & \dots & y_n^{(n-1)}\left(x\right) \end{vmatrix}. \tag{5.13}$$

Данный определитель (5.13) в точке $x^0$ по построению функций $y_k$ (5.12) совпадет с определителем (5.10):

$$W\left(x^0\right) = \Delta \neq 0.$$

То есть определитель Вронского не равен нулю в точке $x^0$, а значит, не равен нулю и на всем отрезке $[x^0, b]$. Значит, полученный набор функций (5.12) образует независимую систему функций на отрезке $[x^0, b]$, то есть образует фундаментальную систему решений. Теорема очевидным образом доказывается и для всего отрезка $[a, b]$. ■

**Теорема 5.8.** *Пусть система из $n$ функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, являющихся решениями однородного уравнения:*

$$Ly_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n,$$

*образует фундаментальную систему решений. Тогда любое решение однородного уравнения может быть представлено в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений:*

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x). \tag{5.14}$$

**Доказательство:**

Поставим задачу Коши:

$$\begin{cases} Lz = 0, \quad x \in \left(x^0, b\right], \\ z\left(x^0\right) = z_1^0, \\ z'\left(x^0\right) = z_2^0, \\ \vdots \\ z^{(n-1)}\left(x^0\right) = z_n^0, \end{cases} \tag{5.15}$$

где $z_i^0$ — произвольные начальные условия. Таким образом, получаем произвольное решение однородного уравнения $z(x)$.

Предполагая, что коэффициенты $C_i$ существуют, представим $z(x)$ в виде (5.14):

$$z(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x).$$

Теперь подставим представление для $z(x)$ (5.14) в начальные условия (5.15) и составим комбинацию:

$$\begin{cases} C_1 y_1\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n\left(x^0\right) = z_1^0, \\ C_1 y_1'\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n'\left(x^0\right) = z_2^0, \\ \vdots \\ C_1 y_1^{(n-1)}\left(x^0\right) + \ldots + C_n y_n^{(n-1)}\left(x^0\right) = z_n^0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Так как мы рассматриваем неоднородную систему уравнений, то гарантированно найдется решение системы (5.16), то есть коэффициенты $C_1^0, \ldots, C_n^0$ существуют.

Составим вспомогательную функцию:

$$z^0(x) = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x),$$

заметим, что в точке $x^0$ эта функция совпадает с решением задачи Коши (5.15): начальные условия выполняются по построению функции, а подстановка в дифференциальное уравнение дает верное тождество. Если эта функция удовлетворяет задаче Коши, то по теореме о существовании и единственности получаем, что функция $z^0$ совпадает с решением (5.14):

$$z(x) = z^0(x) = C_1^0 y_1(x) + \ldots + C_n^0 y_n(x).$$

■

# Лекция 6. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения *n*-го порядка

## Теорема об общем решении неоднородного дифференциального уравнения

На прошлой лекции мы начали рассматривать линейные неоднородные дифференциальные уравнения $n$-го порядка, они записываются в виде:

$$Ly = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y = f(x)\,. \tag{6.1}$$

**Теорема 6.1.** *Общее решение неоднородного уравнения* (6.1) *можно представить в виде суммы некоторого частного решения* $\tilde{y}(x)$ *неоднородного уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения:*

$$y(x) = \tilde{y}(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\,.$$

**Доказательство:**

Рассмотрим разность общего решения неоднородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения: $y(x) - \tilde{y}(x)$. По теореме о разности двух решений неоднородного уравнения 5.3 разность этих решений удовлетворяет однородному уравнению. По уже доказанной теореме о решении однородного уравнения 5.8, разность этих решений может быть представлена в виде комбинации элементов фундаментальной системы решений:

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i(x)\,.$$

■

## Решение неоднородного уравнения

Для нахождения решения неоднородного уравнения (6.1) существует два подхода: первый связан с методом вариации постоянной и разбирается подробно на семинарской части курса, поэтому на лекционной части не разбирается; второй подход связан с использованием функции Коши. Этот подход носит важный теоретический и прикладной характер, поэтому его мы рассмотрим подробно.

Сначала рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y\left(x^0\right) = 0, \\ y'\left(x^0\right) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}\left(x^0\right) = 1. \end{cases} \tag{6.2}$$

Преобразуем задачу (6.2), введя переменную $\xi$:

$$\begin{cases} Ly = 0, \quad x^0 < \xi < x \leqslant a, \\ y(\xi) = 0, \\ y'(\xi) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\xi) = 1. \end{cases} \tag{6.3}$$

Теперь решение задачи (6.3) будет зависеть и от переменной $x$, и от переменной $\xi$:

$$y = K(x, \xi).$$

## Представление решения с помощью функции Коши

**Определение 6.1.** *Функцией Коши $K(x,\xi)$ называется функция-решение следующей задачи Коши:*

$$\begin{cases} L_x K(x, \xi) = 0, \quad x^0 < \xi < x \leqslant a, \\ K(\xi, \xi) = 0, \\ K'_x(\xi, \xi) = 0, \\ \vdots \\ K_x^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1. \end{cases} \tag{6.4}$$

Индекс $x$ у оператора $L_x$ и производных означает, что производные вычисляются дифференцированием по переменной $x$.

**Теорема 6.2.** *Если поставлена задача Коши вида:*

$$\begin{cases} Ly = f(x), \quad x \in \left(x^0, a\right], \\ y(\xi) = 0, \\ y'(\xi) = 0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(\xi) = 0, \end{cases} \tag{6.5}$$

*то решение этой задачи может быть найдено в следующем виде:*

$$y(x) = \int\limits_{x^0}^{x} K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{6.6}$$

Практическая значимость теоремы 6.2 заключается в том, что для конкретной практической задачи дифференциальный оператор не меняется, но для разных условий эксперимента меняются начальные условия и неоднородность. Если необходимо найти множество решений задачи для различных условий, то достаточно

один раз решить задачу (6.5) для нахождения функции Коши, после чего можно использовать функцию Коши для построения различных решений, отвечающих разным значениям неоднородности $f(x)$. Однородность начальных условий всегда можно обеспечить путем замены переменной. Таким образом, можно один раз решить дифференциальное решение, после чего достаточно каждый раз вычислять интеграл (6.6), а не решать задачу Коши (6.5) для каждой рассматриваемой задачи.
**Доказательство:**

Подставим выражение для функции $y(x)$ (6.6) в задачу Коши (6.5):

$$Ly(x) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, y.$$

Вычислим производные:

$$\begin{aligned}
y'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x^0}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x^0}^{x} K(x+\Delta x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi - \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x^0}^{x} \left[K(x+\Delta x,\xi) - K(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \\
&= \int\limits_{x^0}^{x} \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[K(x+\Delta x,\xi) - K(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int\limits_{x}^{x+\Delta x} K(x+\Delta x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi}{\Delta x} = \\
&= \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{K(x+\Delta x,\xi^*)\, f(\xi^*)\,\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + K(x,x)\, f(x).
\end{aligned}$$

Итого, учитывая что $K(x,\xi)$ — решение задачи Коши с однородными начальными условиями (кроме $n-1$ условия) (6.4), заметим закономерность:

$$y(x) = \int\limits_{x^0}^{x} K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$y'(x) = \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + K(x,x) f(x) = \int\limits_{x^0}^{x} K'_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$y''(x) = K'_x(x,x) f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} K''_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{x^0}^{x} K''_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}(x) = K_x^{(n-2)}(x,x) f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int\limits_{x^0}^{x} K_x^{(n-1)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$y^{(n)}(x) = K_x^{(n-1)}(x,x) f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} K_x^{(n)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} K_x^{(n)}(x,\xi) f(\xi)\, d\xi.$$

Итого получим:

$$\begin{aligned} Ly = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x) y = f(x) + \\ + \int\limits_{x^0}^{x} \left[K_x^{(n)}(x,\xi) + a_1(x) K_x^{(n-1)}(x,\xi) + \ldots + a_n(x) K(x,\xi)\right] f(\xi)\, d\xi = \\ = f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} L_x K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = f(x) + \int\limits_{x^0}^{x} 0 f(\xi)\, d\xi = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $y(x)$, записанная через функцию Коши, действительно удовлетворяет неоднородному уравнению. Теперь покажем, что $y(x)$ удовлетворяет однородным начальным условиям:

$$y\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$y'\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K'_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$y''\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K''_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0,$$

$$\vdots$$

$$y^{(n-1)}\left(x^0\right) = \int\limits_{x^0}^{x^0} K^{(n-1)}_x(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = 0.$$

То есть данная функция действительно удовлетворяет задаче Коши для неоднородного уравнения с однородными начальными условиями (6.5). ■

## Уравнения *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим часто встречающийся на практике частный случай:

$$Ly \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0, \quad a_i = const, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{6.7}$$

Воспользуемся для поиска нетривиального решения однородного уравнения (6.7) методом Эйлера:

$$y(x) = Ce^{\lambda x}, \quad C \neq 0.$$

$$Ly = L\left[Ce^{\lambda x}\right] = C\left(\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + \ldots + a_n e^{\lambda x}\right) = \\ = C\left(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\right)e^{\lambda x} = 0.$$

Получаем условие на коэффициенты $\lambda$:

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n = 0. \tag{6.8}$$

**Определение 6.2.** *Многочлен из уравнения* (6.8)*:*

$$M(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n,$$

*называется характеристическим многочленом, а уравнение* (6.8) *называется характеристическим уравнением.*

С учетом кратности многочлен (6.8) степени $n$ имеет ровно $n$ корней.

Рассмотрим простейший случай: все корни многочлена — простые. Получаем $n$ различных решений характеристического уравнения (6.8) $\lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$, и получаем $n$ различных функций вида:

$$y_k(x) = e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{6.9}$$

**Теорема 6.3.** *Функции* (6.9) *при условии, что все корни характеристического многочлена* $\lambda_k$ *— простые, образуют фундаментальную систему решений однородного дифференциального уравнения порядка* $n$ *с постоянными коэффициентами* (6.7).

**Доказательство:**

Так как функций (6.9) ровно $n$ штук и они являются решениями однородного уравнения (6.7), нам остается лишь показать, что эти функции линейно независимы.

Допустим, что нашлась нетривиальная линейная комбинация, равная нулю:

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \ldots + C_n e^{\lambda_n x} = 0.$$

Допустим, что, по крайней мере:

$$C_1 \neq 0. \tag{6.10}$$

Разделим комбинацию на $e^{\lambda_n x}$:

$$C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \ldots + C_n = 0,$$

продифференцируем:

$$(\lambda_1 - \lambda_n)\, C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_n)x} + (\lambda_2 - \lambda_n)\, C_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_n)x} + \ldots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\, e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x} C_{n-1} = 0.$$

Повторим процедуру, разделим на $e^{(\lambda_{n-1} - \lambda_n)x}$:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)\, e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + C_2 (\lambda_2 - \lambda_n)\, e^{(\lambda_2 - \lambda_{n-1})x} + \ldots + C_{n-1} (\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0,$$

продифференцируем:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1})\, e^{(\lambda_1 - \lambda_{n-1})x} + \ldots + \\ + C_{n-2} (\lambda_{n-1} - \lambda_n)(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})\, e^{(\lambda_{n-2} - \lambda_{n-1})x} = 0.$$

Повторяя эту процедуру $n-1$ раз, придем к выражению:

$$C_1 (\lambda_1 - \lambda_n)(\lambda_1 - \lambda_{n-1}) \ldots (\lambda_1 - \lambda_2)\, e^{(\lambda_1 - \lambda_2)x} = 0. \tag{6.11}$$

По предположению (6.10), все скобки в выражении (6.11) не равны нулю и экспонента не равна нулю. Поэтому приходим к противоречию в предположении о существовании нетривиальной комбинации. Теорема доказана. ■

Теперь рассмотрим случай, когда, например, корень многочлена (6.8) $\lambda_k$ имеет кратность $p > 1$. Тогда различных функций (6.9) меньше чем $n$, их совокупность не образовывает фундаментальную систему решений. В таком случае строятся так называемые присоединенные функции:

$$e^{\lambda_k x}, \quad x e^{\lambda_k x}, \quad x^2 e^{\lambda_k x}, \ldots, x^{p-1} e^{\lambda_k x}. \tag{6.12}$$

Функции (6.12) образуют набор из $p$ функций. Прямой подстановкой можно доказать, что эти функции являются решениями однородного уравнения (6.7), и по аналогии с доказательством 6.3 можно доказать, что эти функции являются линейно независимыми (6.12). Совокупность функций (6.9) и (6.12) в таком случае образовывает фундаментальную систему решений. Очевидно, что корней с кратностью больше единицы может быть несколько. В таком случае для каждого кратного $\lambda_k$ строится аналогичный набор функций (6.12).

# Лекция 7. Системы линейных дифференциальных уравнений

## Определение системы линейных дифференциальных уравнений

В общем случае система линейных дифференциальных уравнений записывается в виде:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t)\,, \tag{7.1}$$

где:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ x^2(t) \\ \vdots \\ x^n(t) \end{pmatrix}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{F}(t) = \begin{pmatrix} f^1(t) \\ f^2(t) \\ \vdots \\ f^n(t) \end{pmatrix}.$$

Далее будем предполагать, что все компоненты функций $A(t)$ и $\vec{F}(t)$ являются непрерывными функциями на отрезке $t \in [a, b]$. Это нужно для того, чтобы применять теорему существования и единственности решения задачи Коши для задачи с системой (7.1):

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t)\,, \quad t \in \left(t^0, T\right] \subset [a, b]\,, \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0. \end{cases} \tag{7.2}$$

## Однородная система линейных дифференциальных уравнений

Начнем рассмотрение систем линейных уравнений с системы однородного вида:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x}. \tag{7.3}$$

**Теорема 7.1.** *Любая линейная комбинация решений однородной системы* (7.3) *также является решением однородной системы.*

**Доказательство:**

Рассмотрим произвольную линейную комбинацию решений однородной системы:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} c^i \vec{x}_i(t)\,,$$

то есть функции $\vec{x}_i$ удовлетворяют уравнениям:

$$\dot{\vec{x}}_i = A(t)\,\vec{x}_i.$$

Вычислим:

$$\dot{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{m} c^i \dot{\vec{x}}_i = \sum_{i=1}^{m} c^i A(t)\,\vec{x}_i = A(t) \sum_{i=1}^{m} c^i \vec{x}_i = A(t)\,\vec{x}.$$

■

**Теорема 7.2.** *Разность двух любых решений неоднородной системы* (7.1) *является решением однородной системы* (7.3).

**Доказательство:**

Запишем разность двух решений (7.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2,$$

где:

$$\dot{\vec{x}}_1 = A(t)\,\vec{x}_1 + \vec{F}(t)\,,$$
$$\dot{\vec{x}}_2 = A(t)\,\vec{x}_2 + \vec{F}(t)\,.$$

Вычислим:

$$\dot{\vec{x}} = \dot{\vec{x}}_1 - \dot{\vec{x}}_2 = A(t)\,\vec{x}_1 + \vec{F}(t) - A(t)\,\vec{x}_2 - \vec{F}(t) = A(t)\,(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = A(t)\,\vec{x}.$$

■

## Линейная зависимость и независимость вектор-функций

Введем понятия линейной зависимости и линейной независимости вектор-функций. Пусть вектор-функции:

$$\vec{x}_1(t)\,, \ldots, \vec{x}_n(t)\,, \tag{7.4}$$

являются решениями однородной системы линейных уравнений:

$$\dot{\vec{x}}_i = A(t)\,\vec{x}_i, \quad i = \overline{1,n}. \tag{7.5}$$

**Определение 7.1.** *Решения однородной системы* (7.5) *называются линейно зависимыми на отрезке* $[a,b]$, *если:*

$$\exists \vec{C} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^n \end{pmatrix} \neq \vec{0}: \qquad c^1\vec{x}_1(t) + c^2\vec{x}_2(t) + \ldots + c^n\vec{x}_n(t) \equiv \vec{0}, \quad \forall t \in [a,b]\,. \tag{7.6}$$

Можно записать равенство (7.6) в более компактной форме:

$$X(t)\,\vec{C} \equiv \vec{0}, \quad \forall t \in [a,b]\,, \tag{7.7}$$

где:

$$X(t) = (\vec{x}_1(t)\,, \ldots, \vec{x}_n(t))\,.$$

**Определение 7.2.** *Если равенство* (7.7) *возможно только в том случае, когда* $\vec{C} \equiv 0$, *то соответствующие функции* (7.4) *называются линейно независимыми на* $[a,b]$.

Если решения (7.4) являются линейно независимыми, то будем записывать их в виде матрицы, называемой фундаментальной матрицей:

$$W(t) = (\vec{x}_1(t)\,, \ldots, \vec{x}_n(t))\,. \tag{7.8}$$

## Фундаментальная система решений линейной системы дифференциальных уравнений

**Определение 7.3.** *Совокупность $n$ линейно независимых решений (7.4) линейной системы (7.1) из $n$ уравнений называется фундаментальной системой решений данной системы.*

**Теорема 7.3.** *Определитель Вронского, построенный из $n$ линейно независимых решений однородной линейной системы на отрезке $[a,b]$ (то есть построенный из фундаментальной системы решений), отличен от нуля во всех точках этого отрезка:*

$$detW\left(t\right) \neq 0 \quad \forall t \in \left[a,b\right].$$

**Доказательство:**

Предположим, что найдется точка $t^0$:

$$detW\left(t^0\right) = 0.$$

Составим систему:

$$W\left(t^0\right)\vec{C} = \vec{0}. \tag{7.9}$$

Воспользуемся теоремой из линейной алгебры, которая гласит, что однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы этой системы равен нулю. Значит, система (7.9) имеет нетривиальное решение: $\vec{C}_0 \neq \vec{0}$.

Составим вектор из функций (7.4):

$$\vec{x}\left(t\right) = W\left(t\right)\vec{C}_0 = c_0^1\vec{x}_1\left(t\right) + \ldots + c_0^n\vec{x}_n\left(t\right).$$

Каждая из функций $\vec{x}_1\left(t\right), \ldots, \vec{x}_n\left(t\right)$ является решением однородной системы. Вектор $\vec{x}\left(t\right)$ представляет из себя линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\dot{\vec{x}} = A\left(t\right)\vec{x}.$$

С другой стороны, в точке $t^0$:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = W\left(t^0\right)\vec{C}_0 = \vec{0}.$$

Получаем однородную задачу Коши с однородным начальным условием:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\left(t\right)\vec{x}, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{0}. \end{cases} \tag{7.10}$$

Система (7.10) имеет только тривиальное решение:

$$\vec{x}\left(t\right) = c_0^1\vec{x}_1\left(t\right) + \ldots + c_0^n\vec{x}_n\left(t\right) \equiv 0 \quad \forall t \in \left[a,b\right]. \tag{7.11}$$

Таким образом, мы получили определение линейно зависимых на $[a,b]$ функций $\vec{x}_1\left(t\right), \ldots, \vec{x}_n\left(t\right)$, что противоречит условию теоремы. Значит, утверждение теоремы верно. ■

**Теорема 7.4.** *Пусть $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ — решения однородной линейной системы. И пусть вектора $\vec{x}_1(t^0), \ldots, \vec{x}_n(t^0)$ — линейно независимы, $t^0 \in [a, b]$. Тогда вектор-функции $\vec{x}_1(t), \ldots, \vec{x}_n(t)$ тоже являются линейно независимыми на отрезке $[a, b]$.*

**Доказательство:**

Нам нужно доказать, что:

$$X(t)\vec{C} = \vec{0} \quad \forall t \in [a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \vec{C} = \vec{0}.$$

Предположим, что нашлась точка $t^1$:

$$X\left(t^1\right)\vec{C} = \vec{0}, \quad \vec{C} \neq \vec{0}. \tag{7.12}$$

Если однородная система имеет нетривиальное решение, то определитель матрицы системы (7.12) равен нулю.

Составим вектор:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C}.$$

Данный вектор представляет собой линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\vec{x}, \quad t \in \left(t^1, T\right], \\ \vec{x}\left(t^1\right) = \vec{0}. \end{cases}$$

Снова получаем, что $\vec{x}(t) = \vec{0}$ на $[a, b]$. В частности:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = X\left(t^0\right)\vec{C} = c^1\vec{x}_1\left(t^0\right) + \ldots + c^n\vec{x}_n\left(t^0\right) \equiv 0.$$

То есть, вектора $\vec{x}_1(t^0), \ldots, \vec{x}_n(t^0)$ — линейно зависимы. Получаем противоречие с условием теоремы. Значит, предположение о точке $t^1$ (7.12) неверно. Следовательно, утверждение теоремы верно. ■

## Теорема о представлении решения однородной системы

**Теорема 7.5.** *Любое решение однородной системы может быть представлено в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений:*

$$\vec{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c^i\vec{x}_i(t) = W(t)\vec{C}. \tag{7.13}$$

**Доказательство:**

Составим следующую систему уравнений:

$$W\left(t^0\right)\vec{C} = \vec{x}_0 = \vec{x}\left(t^0\right). \tag{7.14}$$

Получаем неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Так как определитель системы (7.14) ненулевой, то она имеет решение $\vec{C}_0$. Составим вспомогательную функцию:

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C}_0.$$

Данная функция представляет из себя линейную комбинацию решений однородной системы, и потому тоже является решением однородной системы:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x}, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0. \end{cases}$$

Получаем задачу Коши, по теореме существования и единственности решение этой задачи существует и представимо в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений (7.14):

$$\vec{x}(t) = W(t)\,\vec{C}_0.$$

Так как вектор $\vec{C}_0$ существует (7.14), то за счет перебора всех возможных векторов $\vec{x}_0$ получаем произвольные решения однородной системы, представимые в виде линейной комбинации, что доказывает утверждение теоремы. ■

**Замечание:** так как каждый столбец фундаментальной матрицы (7.8) является решением однородной системы (7.3), то мы можем переписать эту совокупность систем в матричном виде:

$$\dot{W} = A(t)\,W. \tag{7.15}$$

Возникает вопрос: как на практике найти фундаментальную систему решений?

## Способ нахождения фундаментальной матрицы системы уравнений

Можно это сделать, поставив задачу Коши для матричного уравнения (7.15):

$$\begin{cases} \dot{W} = A(t)\,W, \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ W\left(t^0\right) = B, \end{cases} \tag{7.16}$$

где $B$ — произвольная матрица, определитель которой отличен от нуля:

$$detB \neq 0.$$

На практике проще всего взять в качестве матрицы $B$ единичную матрицу: $B = E$.

## Решение неоднородной системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{x}} = A(t)\,\vec{x} + \vec{F}(t). \tag{7.17}$$

По аналогии с материалом пятой лекции, можно доказать, что общее решение неоднородной системы (7.17) представляется в виде суммы общего решения однородной системы (7.3) и частного решения неоднородной системы (7.17):

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{ч}}(t) + \sum_{i=1}^{n} c^i \vec{x}_i(t).$$

Для доказательства достаточно рассмотреть разность общего решения неоднородной системы и частного решения неоднородной системы, после чего воспользоваться теоремой о разности двух решений неоднородной системы и заметить, что любое решение однородной системы представимо в виде линейной комбинации элементов фундаментальной системы решений.

## Получение решения неоднородной системы уравнений методом Лагранжа

Для нахождения решения неоднородной системы воспользуемся методом вариации постоянной, также называемым методом Лагранжа.

Сначала необходимо найти фундаментальную систему решений $W(t)$ однородной задачи с помощью задачи (7.16). Когда фундаментальная система решений найдена, можем найти общее решение однородной системы (7.3):

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C},$$

после этого решение неоднородной системы находится в виде:

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C}(t).$$

Подставим это выражение в исходную систему (7.16):

$$W(t)\dot{\vec{C}}(t) + \dot{W}(t)\vec{C}(t) = A(t)W(t)\vec{C}(t) + \vec{F}(t),$$

$$W(t)\dot{\vec{C}}(t) + \left[\dot{W}(t) - A(t)W(t)\right]\vec{C}(t) = \vec{F}(t),$$

так как фундаментальная матрица удовлетворяет однородному матричному уравнению (7.16), второе слагаемое сокращается:

$$W(t)\dot{\vec{C}}(t) = \vec{F}(t),$$

$$\dot{\vec{C}}(t) = W^{-1}(t)\vec{F}(t).$$

Последний переход правомерен, так как определитель фундаментальной матрицы отличен от нуля. Теперь можем записать:

$$\vec{C}(t) = \int\limits_{t^0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau + \vec{C}_0.$$

Общее решение неоднородной системы примет вид:

$$\vec{x}(t) = W(t)\vec{C}(t) = W(t)\vec{C}_0 + W(t)\int\limits_{t^0}^{t} W^{-1}(\tau)\vec{F}(\tau)\,d\tau.$$

Если поставлена задача Коши:

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = A\left(t\right)\vec{x} + \vec{F}\left(t\right), \quad t \in \left(t^0, T\right], \\ \vec{x}\left(t^0\right) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

то можем определить $\vec{C}_0$:

$$\vec{x}\left(t^0\right) = W\left(t^0\right)\vec{C}_0, \quad \Rightarrow \quad \vec{C}_0 = W^{-1}\left(t^0\right)\vec{x}\left(t^0\right).$$

$$\vec{x}\left(t\right) = W\left(t\right)W^{-1}\left(t^0\right)\vec{x}\left(t^0\right) + \int\limits_{t^0}^{t} W\left(t\right)W^{-1}\left(\tau\right)\vec{F}\left(\tau\right)d\tau.$$

## Матрица Коши

Введем обозначение:

$$W\left(t\right)W^{-1}\left(\tau\right) = K\left(t,\tau\right).$$

**Определение 7.4.** *Матрица $K\left(t,\tau\right)$ называется матрицей Коши или импульсной матрицей.*

С помощью матрицы Коши решение задачи Коши может быть записано в виде:

$$\vec{x}\left(t\right) = K\left(t, t_0\right)\vec{x}\left(t^0\right) + \int\limits_{t^0}^{t} K\left(t,\tau\right)\vec{F}\left(\tau\right)d\tau.$$

По аналогии с функцией Коши, вводившейся ранее, матрица Коши позволяет уменьшать количество вычислений, когда необходимо многократно решать одну и ту же задачу с различными выражениями для неоднородности $\vec{F}\left(t\right)$ и начальных условий $\vec{x}_0$.

# Лекция 8.
# Краевые задачи

## Постановка краевой задачи

Будем рассматривать краевые задачи на примере следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка:

$$u'' + a_1(x)\,u' + a_2(x)\,u = f_2(x)\,. \tag{8.1}$$

При решении дифференциального уравнения второго порядка появляется две произвольных константы. Чтобы определить их для конкретной задачи, необходимо поставить два дополнительных условия: если задача решается на отрезке $x \in [0, l]$, то ставятся граничные условия:

$$u(0) = u^0, \quad u(l) = u^l,$$

таким образом, полная постановка краевой задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} u'' + a_1(x)\,u' + a_2(x)\,u = f_2(x)\,, \quad x \in (0, l)\,, \\ u(0) = u^0, \quad u(l) = u^l. \end{cases} \tag{8.2}$$

## Виды граничных (краевых) условий

Заметим, что граничные условия могут устанавливаться не только на значения самой искомой функции. Дадим определения возможных видов граничных условий для краевых задач второго порядка:

**Определение 8.1.** *Граничные условия на искомую функцию $u(x)$ вида:*

$$u(0) = u^0, \quad u(l) = u^l,$$

*называются условиями первого рода, или условиями Дирихле, соответствующая краевая задача (8.2) называется задачей Дирихле.*

**Определение 8.2.** *Граничные условия на производные функции $u(x)$ вида:*

$$u'(0) = u^0, \quad u'(l) = u^l,$$

*называются условиями второго рода, или условиями Неймана, краевая задача называется задачей Неймана.*

**Определение 8.3.** *Граничные условия на линейную комбинацию производных и самой функции $u(x)$ вида:*

$$u(0) + hu'(0) = u^0, \quad u(l) + hu'(l) = u^l,$$

*называются условиями третьего рода, или смешанными условиями, где $h$ — некоторая константа.*

Далее для простоты будем рассматривать задачу Дирихле (8.2), почти все формулируемые далее утверждения будут справедливы для всех трех видов задач.

## Однородная краевая задача и неоднородная краевая задача

Введем следующую функцию:

$$p(x) = e^{\int a_1(x)dx},$$

и домножим исходное уравнение (8.2) на $p(x)$:

$$p(x)\,u'' + a_1(x)\,p(x)\,u' + a_2(x)\,p(x)\,u = p(x)\,f_2(x)\,,$$

коэффициент перед $u'$ совпадает с $p'(x)$, коэффициент перед $u(x)$ переобозначим как $-q(x)$, а правую часть уравнения обозначим как $f_1(x)$:

$$p(x)\,u'' + p'(x)\,u' - q(x)\,u = f_1(x)\,,$$

после чего свернем два первых слагаемых как полную производную и определим дифференциальный оператор $L$:

$$Lu \equiv \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)\,u = f_1(x)\,.$$

Теперь исходная задача (8.2) записывается в более кратком виде следующим образом:

$$\begin{cases} Lu = f_1(x)\,, \quad x \in (0,l)\,, \\ u(0) = u^0, \quad u(l) = u^l. \end{cases} \tag{8.3}$$

Таким образом, мы получили краевую задачу для неоднородного дифференциального уравнения с неоднородными граничными условиями в общем виде.

**Утверждение:** всегда можно подобрать замену переменных, при которой неоднородная краевая задача с неоднородными граничными условиями (8.3) будет сведена к неоднородной краевой задаче с однородными краевыми условиями. Такая замена имеет вид:

$$u(x) = y(x) + v(x)\,,$$

где $v(x)$ удовлетворяет граничным условиям. Очевидно, что таких вариантов функции $v(x)$ может быть бесконечно много. Подставим замену в уравнение (8.3) и преобразуем:

$$\begin{cases} L\left(y(x) + v(x)\right) = f_1(x)\,, \quad x \in (0,l)\,, \\ y(0) + v(0) = u^0, \quad y(l) + v(l) = u^l, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Ly = f_1(x) - Lv = f(x)\,, \quad x \in (0,l)\,, \\ y(0) = 0, \quad y(l) = 0. \end{cases} \tag{8.4}$$

Таким образом, мы свели исходную произвольную задачу к задаче с однородными граничными условиями.

## Формула Грина и тождества Лагранжа

Введем полезные для дальнейшего вспомогательные функции. Возьмем две произвольные функции $u$ и $v$, составим следующую комбинацию и преобразуем:

$$\int_0^l v(\xi)\, L[u](\xi)\, d\xi = \int_0^l v(\xi)\left[(p(\xi)\, u')' - q(\xi)\, u\right] d\xi =$$

$$= \int_0^l v(\xi)\,(p(\xi)\, u')'\, d\xi - \int_0^l v(\xi)\, q(\xi)\, u(\xi)\, d\xi = v(\xi)\, p(\xi)\, u'\big|_0^l - \int_0^l \left[p(\xi)\, u'v' + q(\xi)\, vu\right] d\xi.$$

**Определение 8.4.** *Равенство:*

$$\int_0^l v(\xi)\, L[u](\xi)\, d\xi = v(\xi)\, p(\xi)\, u'\big|_0^l - \int_0^l \left[p(\xi)\, u'v' + q(\xi)\, vu\right] d\xi, \tag{8.5}$$

*называется первой формулой Грина.*

Получим теперь вторую формулу Грина. Для этого запишем первую формулу Грина (8.5) для функций $v, u$:

$$\int_0^l u(\xi)\, L[v](\xi)\, d\xi = u(\xi)\, p(\xi)\, v'\big|_0^l - \int_0^l \left[p(\xi)\, v'u' + q(\xi)\, uv\right] d\xi,$$

после чего вычтем первую формулу Грина (8.5) для $v, u$ из первой формулы Грина для $u, v$, сразу получим:

**Определение 8.5.** *Следующее равенство называется второй формулой Грина:*

$$\int_0^l \left[v(\xi)\, L[u](\xi)\, d\xi - u(\xi)\, L[v](\xi)\right] d\xi = \left[p(\xi)\left(v(\xi)\,\frac{du}{d\xi} - u(\xi)\,\frac{dv}{d\xi}\right)\right]\Bigg|_0^l. \tag{8.6}$$

Заменим теперь во второй формуле Грина (8.6) верхний предел с $l$ на $x$:

$$\int_0^x \left[v(\xi)\, L[u](\xi) - u(\xi)\, L[v](\xi)\right] d\xi = \left[p(\xi)\left(v(\xi)\,\frac{du}{d\xi} - u(\xi)\,\frac{dv}{d\xi}\right)\right]\Bigg|_0^x,$$

после чего продифференцируем это выражение по $x$, получим:

$$v(x)\, L[u](x) - u(x)\, L[v](x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(v(x)\,\frac{du}{dx} - u(x)\,\frac{dv}{dx}\right)\right].$$

Теперь подставим вместо произвольных функций фундаментальную систему решений однородного краевого уравнения $Ly = 0$ (8.4), $u = y_1$, $v = y_2$:

$$y_2(x)\, L[y_1](x) - y_1(x)\, L[y_2](x) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_2(x)\,\frac{dy_1}{dx} - y_1(x)\,\frac{dy_2}{dx}\right)\right]. \tag{8.7}$$

**Определение 8.6.** *Так как левая часть уравнения (8.7) обращается в ноль, а комбинация $y_1, y_2$ в правой части (8.7) представляет собой определитель Вронского $W(x)$, то запишем результат — так называемое тождество Лагранжа:*

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\,W(x)\right) = 0. \tag{8.8}$$

**Определение 8.7.** *Так как производная в (8.8) равна нулю, то интегрированием получаем так называемую формулу Лиувилля-Остроградского:*

$$p(x)\,W(x) = C.$$

## Теорема об однородной краевой задаче

**Теорема 8.1.** *Пусть однородная краевая задача (8.4) имеет только тривиальные решения. Тогда соответствующая ей неоднородная краевая задача (8.4) имеет не более одного решения.*

**Доказательство:** Пусть функции $y_1$, $y_2$ удовлетворяют неоднородной краевой задаче (8.4), то есть:

$$\begin{cases} L[y_1] = f(x), \quad x \in (0,l), \\ y_1(0) = 0, \quad y_1(l) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} L[y_2] = f(x), \quad x \in (0,l), \\ y_2(0) = 0, \quad y_2(l) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим разность этих функций:

$$w(x) = y_1(x) - y_2(x).$$

Как известно, разность двух любых решений неоднородного уравнения является решением однородного уравнения, то есть:

$$\begin{cases} L[w] = 0, \quad x \in (0,l), \\ w(0) = 0, \quad w(l) = 0. \end{cases}$$

По условию теоремы однородная краевая задача имеет только тривиальное решение, то есть

$$w(x) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2.$$

■

## Теорема о единственности решения

**Теорема 8.2.** *Пусть в операторе $L$ функция $q(x)$ — неотрицательная. Тогда однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.*

**Доказательство:** Перепишем первую формулу Грина (8.5):

$$\int\limits_0^l uL\left[v\right]dx = u\left(x\right)p\left(x\right)v'\big|_0^l - \int\limits_0^l \left[p\left(x\right)u'v' + q\left(x\right)vu\right]dx,$$

подставим $u = y\left(x\right)$, $v = y\left(x\right)$ — решение однородной краевой задачи:

$$\int\limits_0^l yL\left[y\right]dx = y\left(x\right)p\left(x\right)y'\big|_0^l - \int\limits_0^l \left[p\left(x\right)\left(y'\right)^2 + q\left(x\right)y^2\right]dx. \tag{8.9}$$

Левая часть (8.9) зануляется, так как однородное уравнение $L\left[y\right] = 0$, первое слагаемое в правой части (8.9) также равно нулю из-за граничных условий, тогда:

$$\int\limits_0^l \left[p\left(x\right)\left(y'\right)^2 + q\left(x\right)y^2\right]dx = 0.$$

По условию теоремы $q\left(x\right) \geqslant 0$, по определению $p\left(x\right) > 0$, $\left(y'\right)^2 \geqslant 0$, $y^2 \geqslant 0$. Значит, подынтегральная функция неотрицательна. В таком случае интеграл может быть равен нулю только в следующих случаях:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \Rightarrow \quad y\left(x\right) = const, \\ \left[\begin{array}{l} q\left(x\right) = 0, \\ y = 0, \end{array}\right. \end{cases} \tag{8.10}$$

Для задачи первого рода первое условие из приведенных в (8.10) сводится к тривиальному в силу однородных граничных условий, что и доказывает утверждение теоремы. Для задачи второго рода теорема выполняется при условии $q\left(x\right) > 0$, а для задачи третьего рода данная теорема не обобщается. ■

# Лекция 9.
# Функция Грина

## Определение функции Грина краевой задачи

**Определение 9.1.** *Функцией Грина краевой задачи называется функция $G(x,s)$ двух переменных, такая что выполняются следующие условия:*

*1) $G(x,s)$ определена и непрерывна в квадрате $D = \{x \in [0,l] \times s \in [0,l]\}$:*

$$G(x,s) \in \mathbb{C}\left(D = \{x \in [0,l] \times s \in [0,l]\}\right). \tag{9.1}$$

*2) $G(x,s)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению:*

$$L_x[G] = 0 \quad \text{при } 0 < x, s < l. \tag{9.2}$$

*3) $G(x,s)$ удовлетворяет однородным граничным условиям:*

$$G(0,s) = 0, \quad G(l,s) = 0. \tag{9.3}$$

*4) Производная функции Грина терпит разрыв первого рода:*

$$\left.\frac{\partial G(x,s)}{\partial x}\right|_{x=s-0}^{x=s+0} = \frac{1}{p(s)}. \tag{9.4}$$

## Теорема о существовании функции Грина

**Теорема 9.1.** *Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда функция Грина данной краевой задачи существует.*

Доказательство данной теоремы будет построено таким образом, чтобы получить одновременно и алгоритм построения функции Грина.

## Алгоритм построения функции Грина

**Доказательство:** Построим функцию $y_1(x)$ как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} L[y_1] = 0, & x \in (0,l), \\ y_1(0) = 0, \\ y_1'(0) \neq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_1(x) \not\equiv 0 \text{ на } [0,l].$$

И построим функцию $y_2(x)$ тоже как решение задачи Коши:

$$\begin{cases} L[y_2] = 0, & x \in [0,l), \\ y_2(l) = 0, \\ y_2'(l) \neq 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y_2(x) \not\equiv 0 \text{ на } [0,l].$$

Покажем, что функции $y_1, y_2$ не являются линейно зависимыми.

От противного: пусть существует нетривиальная комбинация:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \equiv 0, \quad x \in [0, l],$$

тогда:

$$y_2(x) = -\frac{C_1}{C_2} y_1(x) = C y_1(x), \quad y_2(0) = C y_1(0) = 0.$$

Поэтому функция $y_2(x)$ удовлетворяет однородной краевой задаче. По условию теоремы однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Получено противоречие. Значит, $y_1$ и $y_2$ — линейно независимы.

Теперь построим функцию Грина следующим образом:

$$G(x, s) = \begin{cases} C_1 y_1(x), & 0 \leqslant x \leqslant s, \\ C_2 y_2(x), & s \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{9.5}$$

Сразу заметим, что пункт (9.2) определения функции Грина выполнен: $y_1$ и $y_2$ удовлетворяют однородному уравнению.

Пункт (9.3) также выполнен — $y_1$ удовлетворяет левому граничному условию, $y_2$ удовлетворяет правому граничному условию.

Зададим условие непрерывности функции Грина на границе двух треугольников $x = s$:

$$C_1 y_1(s) - C_2 y_2(s) = 0. \tag{9.6}$$

Непрерывность внутри каждого из треугольников, в которых определена функция — очевидна. Так выполняется условие непрерывности функции Грина (9.1).

Зададим также условие скачка на производную (9.4) при переходе через $x = s$:

$$C_2 y_2'(s) - C_1 y_1'(s) = \frac{1}{p(s)}. \tag{9.7}$$

Перепишем данные условия (9.6), (9.7) в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_1' & -y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{p(s)} \end{pmatrix}. \tag{9.8}$$

Данная неоднородная система линейных алгебраических уравнений (9.8) имеет нетривиальное решение только в том случае, если определитель матрицы системы (9.8) отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_1' & -y_2' \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = -W[y_1(s), y_2(s)] = W(s) \neq 0.$$

Как видно, определитель матрицы системы пропорционален определителю Вронского функций $y_1, y_2$, который отличен от нуля на отрезке $s \in [0, l]$. Поэтому система уравнений (9.8) имеет решение. Найдем это решение, например, с помощью формул Крамера:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -y_2 \\ -\frac{1}{p(s)} & -y_2' \end{vmatrix}}{-W(s)} = \frac{y_2(s)}{p(s) W(s)}, \quad C_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & -\frac{1}{p(s)} \end{vmatrix}}{-W(s)} = \frac{y_1(s)}{p(s) W(s)}.$$

Теперь подставим полученные выражения для $C_1, C_2$ в выражение для функции Грина (9.5). Так как мы построили выражения для $C_1$ и $C_2$ исходя из условий на непрерывность функций и скачок производной (9.6), (9.7) при переходе через прямую $x = s$, то для построенной таким способом функции выполняются также и пункты (9.1), (9.4) определения функции Грина:

$$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{y_1(x)\, y_2(s)}{p(s)\, W(s)} = G_1(x,s), & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant l, \\ \dfrac{y_1(s)\, y_2(x)}{p(s)\, W(s)} = G_2(x,s), & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Таким образом, мы привели алгоритм построения функции Грина и доказали теорему о существовании функции Грина.

■

## Теорема о представлении решения неоднородной краевой задачи через функцию Грина

**Теорема 9.2.** *Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда решение соответствующей неоднородной краевой задачи может быть выписано в виде:*

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s)\, f(s)\, ds. \tag{9.9}$$

**Доказательство:** Покажем, что функция $y(x)$, построенная в виде (9.9), удовлетворяет неоднородной краевой задаче и граничным условиям.

Сначала распишем подробно выражение для $y(x)$ (9.9) и посчитаем производные $y(x)$ исходя из выражения (9.9):

$$y(x) = \int\limits_0^x G_2(x,s)\, f(s)\, ds + \int\limits_x^l G_1(x,s)\, f(s)\, ds,$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= G_2(x,x)\, f(x) + \int\limits_0^x G_{2,x}(x,s)\, f(s)\, ds - G_1(x,x)\, f(x) + \int\limits_x^l G_{1,x}(x,s)\, f(s)\, ds = \\ &= f(x)\left[G_2(x,x) - G_1(x,x)\right] + \int\limits_0^x G_{2,x}(x,s)\, f(s)\, ds + \int\limits_x^l G_{1,x}(x,s)\, f(s)\, ds = \\ &= \int\limits_0^x G_{2,x}(x,s)\, f(s)\, ds + \int\limits_x^l G_{1,x}(x,s)\, f(s)\, ds, \end{aligned}$$

$$y''(x) = f(x)\left[G_{2,x}(x,x) - G_{1,x}(x,x)\right] + \int\limits_0^x G_{2,xx}(x,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_x^l G_{1,xx}(x,s)\,f(s)\,ds =$$

$$= f(x) \times \frac{1}{p(x)} + \int\limits_0^x G_{2,x}(x,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_x^l G_{1,x}(x,s)\,f(s)\,ds.$$

Подставим полученные выражения в исходное выражение для оператора $L[y] = f$ и воспользуемся свойствами функции Грина (9.2), (9.4):

$$L[y] = p(x)\,y'' + p'(x)\,y' - q(x)\,y = p(x)\,\frac{f(x)}{p(x)} +$$

$$+ \int\limits_0^x \left[p(x)\,G_{2,xx}(x,s) + p'(x)\,G_{2,x}(x,s) - q(x)\,G_2(x,s)\right] f(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_x^l \left[p(x)\,G_{1,xx}(x,s) + p'(x)\,G_{1,x}(x,s) - q(x)\,G_1(x,s)\right] f(s)\,ds =$$

$$= f(x) + \int\limits_0^x L[G_2]\,f(s)\,ds + \int\limits_x^l L[G_1]\,f(s)\,ds = f(x).$$

Таким образом мы получили, что функция $y(x)$ (9.9) удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению. Проверим соответствие граничным условиям:

$$y(0) = \int\limits_0^0 G_2(0,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_0^l G_1(0,s)\,f(s)\,ds = 0,$$

$$y(l) = \int\limits_0^l G_2(l,s)\,f(s)\,ds + \int\limits_l^l G_1(l,s)\,f(s)\,ds = 0.$$

Так, за счет прямой подстановки мы показали, что функция $y(x)$ действительно удовлетворяет исходной краевой задаче. ■

## Теорема о единственности функции Грина

**Теорема 9.3.** *Пусть однородная краевая задача имеет только тривиальное решение. Тогда функция Грина единственна.*

**Доказательство:** Докажем, действуя от противного. Предположим, что существует две различных функции Грина: $G(x,s)$, $\tilde{G}(x,s)$. Тогда найдем решение краевой задачи через эти две функции Грина:

$$y(x) = \int\limits_0^l G(x,s)\,f(s)\,ds,$$

$$\tilde{y}(x) = \int\limits_0^l \tilde{G}(x,s) f(s)\, ds.$$

На прошлой лекции была доказана теорема о единственности решения неоднородной краевой задачи. Поэтому разность двух решений должна равняться нулю:

$$y(x) - \tilde{y}(x) = \int\limits_0^l \left[G(x,s) - \tilde{G}(x,s)\right] f(s)\, ds = 0.$$

Так как последнее равенство справедливо для произвольной функции $f(s)$, то тождественное равенство нулю возможно только в том случае, когда $G(x,s) = \tilde{G}(x,s)$. ■

## Вводные замечания к следующей лекции

На следующих двух лекциях будут рассматриваться основы теории устойчивости. Дадим базовое определение корректной постановки задачи по Адамару.

**Определение 9.2.** *Задача называется корректно поставленной по Адамару, если:*

1) *решение задачи существует;*

2) *решение задачи единственно;*

3) *решение задачи устойчиво.*

С точки зрения экспериментатора наиболее важным является третье условие данного определения: если с помощью математического моделирования изучаются реальные процессы, то существование и единственность решения задачи, как правило, очевидны. Однако, при решении задач всегда существуют некоторые погрешности входных данных. Устойчивость же решения относительно ошибок входных данных гарантирует малые отличия натурного эксперимента от численного эксперимента, что может быть важно во многих приложениях физики.

# Лекция 10. Основы теории устойчивости

## Базовые определения

Рассмотрим следующую нормальную обыкновенную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}, t\right). \tag{10.1}$$

**Определение 10.1.** *Решение $\vec{x} = \vec{\varphi}\left(t\right)$ системы* (10.1) *называется устойчивым по Липунову, если:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta\left(\varepsilon\right) > 0\colon \quad \forall \vec{x}_0\colon \quad \left\|\vec{\varphi}\left(t_0\right) - \vec{x}_0\right\| < \delta,$$

*решение $\vec{x} = \vec{\psi}\left(t\right)$ задачи Коши для системы:*

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}, t\right), \quad t \in \left(t_0, +\infty\right), \\ \vec{x}\left(t_0\right) = \vec{x}_0, \end{cases}$$

*удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\left\|\vec{\varphi}\left(t\right) - \vec{\psi}\left(t\right)\right\| < \varepsilon \quad \forall t \geqslant t_0.$$

*Кроме того, если $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\vec{\varphi}\left(t\right) - \vec{\psi}\left(t\right)\right\| = 0$, то решение $\vec{\varphi}\left(t\right)$ называется асимптотически устойчивым. См. также рисунок 10.1.*

Проведем вспомогательную замену:

$$\vec{y}\left(t\right) = \vec{x}\left(t\right) - \vec{\varphi}\left(t\right),$$

$$\dot{\vec{y}}\left(t\right) = \dot{\vec{x}}\left(t\right) - \dot{\vec{\varphi}}\left(t\right) = \vec{f}\left(\vec{x}, t\right) - \vec{f}\left(\vec{\varphi}, t\right) = \vec{f}\left(\vec{y} + \vec{\varphi}\left(t\right), t\right) - \vec{f}\left(\vec{\varphi}, t\right) = \vec{f}_1\left(\vec{y}, t\right),$$

в результате преобразований получаем систему, для которой проводится исследование на устойчивость тривиального решения $\vec{y}\left(t\right) \equiv 0$:

$$\dot{\vec{y}}\left(t\right) = \vec{f}_1\left(\vec{y}, t\right).$$

## Устойчивость тривиального решения однородной системы дифференциальных линейных уравнений

Далее будем рассматривать линеаризованную систему уравнений с постоянными коэффициентами, так как в дальнейшем будет справедливо разложение исходной нелинейной задачи в ряд Тейлора в окрестности некоторой интересующей нас точки:

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}. \tag{10.2}$$

Решим для матрицы $A$ задачу на собственные значения и собственные вектора. Пусть собственные значения, в том числе кратные, записываются в виде:

$$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k, \quad k = \overline{1, m}, \quad m \leqslant n.$$

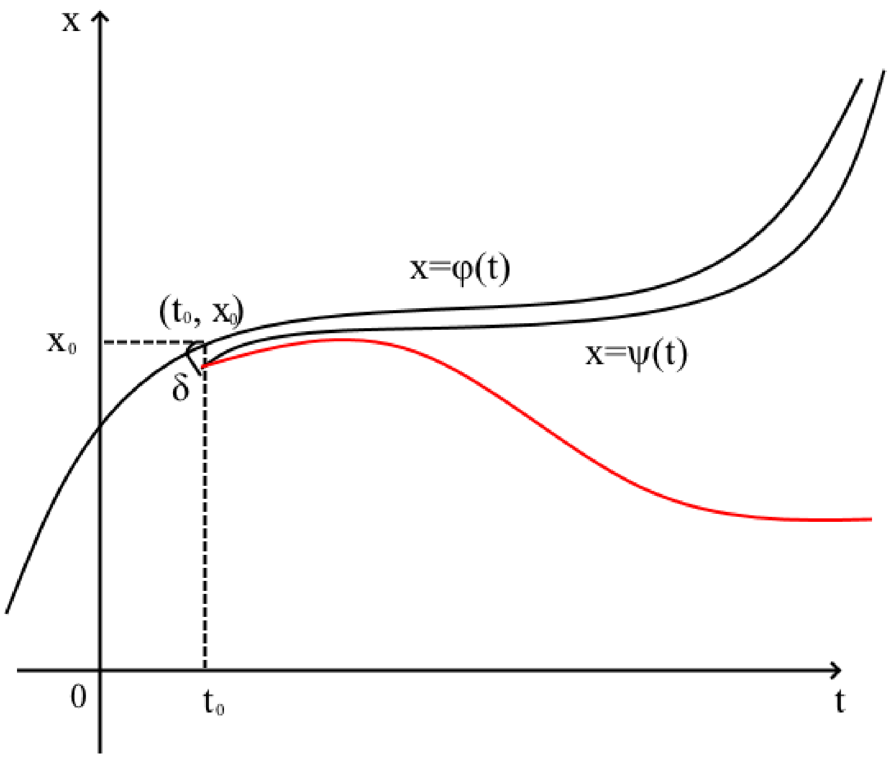


Рис. 10.1. Геометрическая интерпретация определения 10.1: несколько интегральных кривых-решений задачи Коши. Если решение устойчиво (кривая $\psi\,(t)$), то при отклонении входных данных $x_0$ на величину $\delta$ интегральная кривая отклоняется от решения без отклонения входных данных (кривая $\varphi\,(t)$) не более чем на $\varepsilon$. Если решение неустойчиво (красная кривая), то при малой ошибке входных данных интегральные кривые могут отличаться существенно.

**Теорема 10.1.** *Пусть* $Re\lambda_k = \mu_k < 0, \quad \forall k = \overline{1, m}$. *Тогда* $\exists \alpha > 0, R > 0$ *такие, что для решения* $\vec{x} = \vec{\varphi}\,(t)$ *системы* (10.2) *справедлива следующая оценка:*

$$\|\vec{\varphi}\,(t)\,\| \leqslant Re^{-\alpha t} \quad \text{при } t > t_0.$$

Пояснение: система (10.2) помимо тривиального решения имеет бесконечно много решений в виде комбинаций ФСР. Теорема 10.1 задает характер поведения для всех нетривиальных решений: в пределе $t \to \infty$ эти решения стремятся к тривиальному решению по норме.

**Доказательство:** Если все собственные значения имеют алгебраическую кратность 1, то любое нетривиальное решение системы (10.2) выражается как комбинация ФСР. В более общем случае могут быть кратные собственные значения, пусть независимых собственных значений $m \leqslant n$. Тогда произвольное решение системы записывается как комбинация ФСР с полиномами степени не больше $n - m$:

$$\vec{\varphi}\,(t) = \sum_{k=1}^{m} \vec{g}_k\,(t)\, e^{\lambda_k t}.$$

Теперь проведем оценки:

$$\|\vec{\varphi}(t)\| = \left\|\sum_{k=1}^{m} \vec{g}_k(t)\, e^{\lambda_k t}\right\| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \left\|\vec{g}_k(t)\, e^{\lambda_k t}\right\| = \sum_{k=1}^{m} \|\vec{g}_k(t)\| \left|e^{\lambda_k t}\right| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left|e^{(\mu_k + i\nu_k)t}\right| \|\vec{g}_k(t)\| = \sum_{k=1}^{m} \left|e^{\mu_k t}\right| \|\vec{g}_k(t)\|.$$

Так как все $\mu_k < 0$, то $\exists \alpha > 0: \quad \mu_k < -\alpha < 0$. Умножим теперь последнее равенство на $e^{\alpha t}$:

$$\|\vec{\varphi}(t)\| e^{\alpha t} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|\vec{g}_k(t)\|\, e^{(\mu_k+\alpha)t}.$$

Так как $\mu_k + \alpha < 0$, то:

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|\vec{g}_k(t)\|\, e^{(\mu_k+\alpha)t} = 0,$$

а также:

$$\|\vec{\varphi}(t)\| e^{\alpha t} \leqslant \sum_{k=1}^{m} \|\vec{g}_k(t)\|\, e^{(\mu_k+\alpha)t} \leqslant R,$$

что и требовалось доказать. ■

**Теорема 10.2.** *Пусть $Re\lambda_k = \mu_k < 0, \quad \forall k = \overline{1,m}$. Тогда $\exists \alpha > 0, R > 0$ такие, что для решения $\vec{x} = \vec{\varphi}(t; \vec{x}_0)$ системы (10.2) с дополнительным условием: $\vec{\varphi}(t_0; \vec{x}_0) = \vec{x}_0$ будет выполнена следующая равномерная по $\vec{x}_0$ оценка:*

$$\|\vec{\varphi}(t)\| \leqslant R\|\vec{x}_0\| e^{-\alpha t} \quad \textit{при } t > t_0.$$

**Доказательство:** Пусть $\vec{x} = \vec{\varphi}_j(t)$ — решение системы:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\varphi}}_j = A\vec{\varphi}_j, \quad t \in (t_0, \infty), \\ \vec{\varphi}_j(t_0) = \vec{e}_j = \left\{\delta_j^1, \delta_j^2, \ldots, \delta_j^n\right\}. \end{cases}$$

Тогда решение системы (10.2) может быть представлено в виде:

$$\vec{\varphi}(t; \vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\varphi}_j(t)\, x_0^j.$$

Запишем решение в точке $t_0$, чтобы проверить выполнение дополнительного условия:

$$\vec{\varphi}(t_0; \vec{x}_0) = \sum_{j=1}^{n} \vec{\varphi}_j(t_0)\, x_0^j = \vec{\varphi}_1(t_0)\, x_0^1 + \ldots + \vec{\varphi}_n(t_0)\, x_0^n = \vec{x}_0.$$

Возьмем теперь норму от данного представления:

$$\|\vec{\varphi}(t; \vec{x}_0)\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} \vec{\varphi}_j(t)\, x_0^j\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|x_0^j\right| \|\vec{\varphi}_j(t)\|.$$

По теореме 10.1 $\forall j \quad \exists R_j, \alpha_j$:

$$\|\vec{\varphi}_j\,(t;\vec{x}_0)\| \leqslant R_j e^{-\alpha_j t} \leqslant R e^{-\alpha t}, \quad R = \max_j |R_j|, \quad \alpha = \min_j |\alpha_j|,$$

поэтому:

$$\|\vec{\varphi}\,(t;\vec{x}_0)\| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \left|x_0^j\right| R e^{-\alpha t} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \|\vec{x}_0\| \, R e^{-\alpha t} = n \, \|\vec{x}_0\| \, R e^{-\alpha t},$$

переопределим $nR$ как новую константу $R$ и получим искомую равномерную оценку. ■

**Теорема 10.3.** *Для того, чтобы тривиальное решение системы* (10.2) *было асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы системы имели отрицательные действительные части:*

$$Re\lambda_k < 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad m \leqslant n. \tag{10.3}$$

**Доказательство:** Сначала докажем достаточность. Пусть выполнено условие (10.3). Необходимо доказать, что из этого условия следует:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta\,(\varepsilon) > 0\colon \quad \forall \vec{x}_0\colon \quad \|\vec{x}_0\| \leqslant \delta\colon \quad \|\vec{\psi}\,(t)\,\| < \varepsilon,$$

где $\vec{\psi}$ — решение задачи:

$$\begin{cases} \dot{\vec{\psi}} = A\vec{\psi}, \quad t \in (t_0, \infty)\,, \\ \vec{\psi}\,(t_0) = \vec{x}_0. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число, $\vec{x} = \vec{\psi}\,(t) \equiv \vec{\varphi}\,(t;\vec{x}_0)$:

$$\left\|\vec{\psi}\,(t)\right\| = \|\vec{\varphi}\,(t;\vec{x}_0)\| \leqslant R\,\|\vec{x}_0\|\,\left\|e^{-\alpha t}\right\|.$$

Пусть теперь $\delta = \frac{\varepsilon}{R}$. Тогда, если $\|\vec{x}_0\| < \delta$, то:

$$\left\|\vec{\psi}\,(t)\right\| \leqslant R\,\|\vec{x}_0\|\,\left\|e^{-\alpha t}\right\| < R\frac{\varepsilon}{R} e^{-\alpha t} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, верно определение устойчивости решения, а также верно определение асимптотической устойчивости, потому как $e^{-\alpha t} \to 0, \quad t \to \infty$.

Теперь докажем необходимость. Пусть тривиальное решение системы (10.2) асимптотически устойчиво. Предположим, что существует $\lambda_1$: $Re\lambda_1 = \mu_1 \geqslant 0$. Собственному значению $\lambda_1$ соответствует собственный вектор $\vec{h}$:

$$A\vec{h} = \lambda_1 \vec{h}, \quad \vec{h} = \vec{h}_1 + i\vec{h}_2.$$

Вектор $\vec{x}$, который является одним из решений исходной системы:

$$\vec{x} = Re\left(\vec{h} e^{\lambda_1 t}\right) = Re\left(\left(\vec{h}_1 + i\vec{h}_2\right) e^{(\mu_1 + i\nu_1)t}\right) = e^{\mu t}\left(\vec{h}_1 \cos\nu_1 t - \vec{h}_2 \sin\nu_1 t\right) \not\to 0.$$

Получается, что решение $\vec{x}$ не является асимптотически устойчивым — противоречие. Необходимость доказана. ■

# Лекция 11. Основы теории устойчивости (продолжение)

## Классификация точек покоя

**Определение 11.1.** *Точкой покоя системы уравнений:*

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, t) = A\vec{x},$$

*называется решение системы, не зависящее от переменной $t$: $\vec{x} \neq \vec{x}(t)$, то есть скаляр.*

Рассмотрим систему из двух уравнений с двумя неизвестными с матрицей с постоянными коэффициентами:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}. \tag{11.1}$$

Общее решение системы (11.1), если нет кратных собственных значений, задается в виде:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = C_1\vec{h}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2\vec{h}_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Если мы перейдем в базис из собственных векторов, то система уравнений (11.1) примет более простой диагональный вид:

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}}^1 \\ \overline{x}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x}^1 \\ \overline{x}^2 \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

тогда система уравнений разделяется на два отдельно решаемых уравнения:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}^1 = \lambda_1 \overline{x}^1 \\ \dot{\overline{x}}^2 = \lambda_2 \overline{x}^2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} \overline{x}^1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ \overline{x}^2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{matrix}$$

Выразим $t$ в данных уравнениях из первого уравнения и подставим во второе, после чего получим связь $x^1$ и $x^2$:

$$t = \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{\overline{x}^1}{C_1} \quad \Rightarrow \quad \overline{x}^2 = \frac{C_2}{C_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}} \left(\overline{x}^1\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}. \tag{11.3}$$

Далее возможны несколько случаев:

1) $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — одного знака. Тогда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$, $\overline{x}^2(\overline{x}^1)$ — семейство парабол. Если оба собственных значения меньше нуля: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то решения сходятся к нулю при $t \to \infty$. Если же $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то решения расходятся. Точка $(0, 0)$ называется «узлом». Узел может быть как устойчивым, так и неустойчивым. См. рис. 11.1.

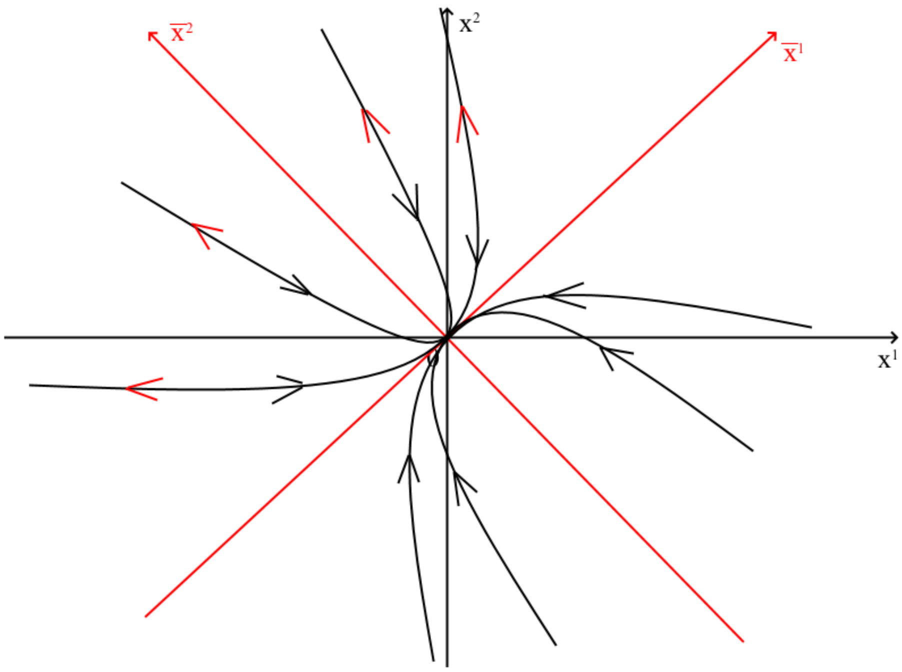


Рис. 11.1. Семейство парабол в случае, когда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — одного знака.

2) $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — разного знака. Тогда $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$, $\overline{x}^2(\overline{x}^1)$ — семейство гипербол. В таком случае любое малое отклонение решения от точки $(0,0)$ приводит к расхождению решения по соответствующей гиперболе. Такая точка покоя называется «седлом». Седло всегда является неустойчивым. См. рис. 11.2.

3) Случай комплексных собственных значений:

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta.$$

В этом случае решения записываются в виде:

$$\overline{x}^1(t) = C_1 e^{\alpha t}\cos\beta t,$$
$$\overline{x}^2(t) = C_2 e^{\alpha t}\sin\beta t.$$

В таком случае после преобразований получаем:

$$\frac{(\overline{x}^1)^2}{(C_1 e^{\alpha t})^2} + \frac{(\overline{x}^2)^2}{(C_2 e^{\alpha t})^2} = 1.$$

При $\alpha = 0$ получаем семейство эллипсов. Решения при отклонении от точки $(0,0)$ оказываются на эллипсе и совершают периодическое движение, не уходя на бесконечность. Точка $(0,0)$ в данном случае называется «центром» и является устойчивой точкой покоя, но не асимптотически устойчивой. См. рис. 11.3.

Если $\alpha \neq 0$, то полуоси эллипса меняются с изменением координаты $t$. В таком случае получается спираль, которая сходится к точке $(0,0)$, если $\alpha < 0$,

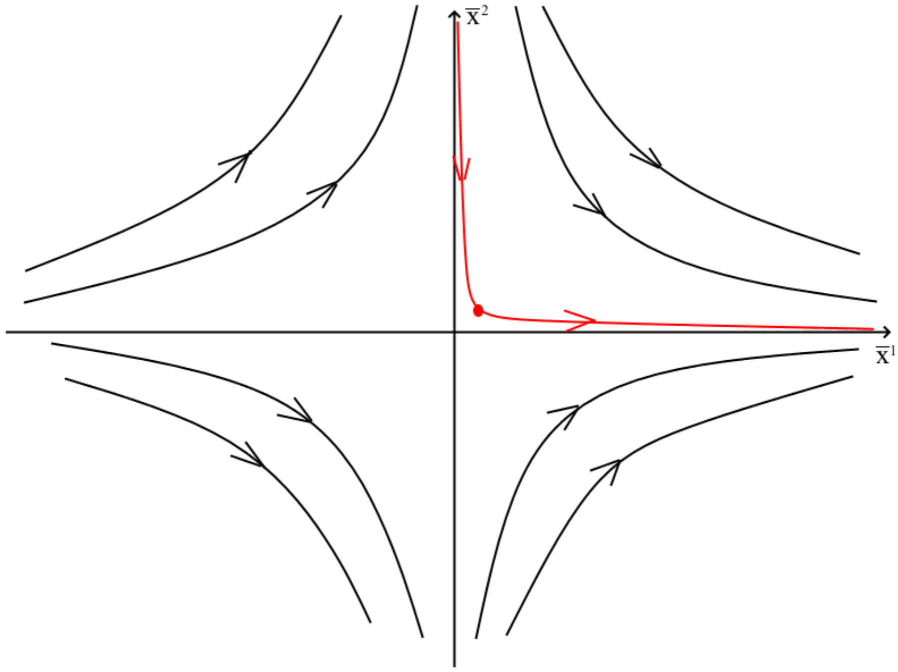


Рис. 11.2. Семейство гипербол в случае, когда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — разного знака.

и расходится на бесконечность, если $\alpha > 0$. Точка $(0, 0)$ называется «фокусом» и является устойчивой в случае $\alpha < 0$.

4) Возможны также вырожденные случаи, когда $\lambda_i = 0$ или $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — кратные. Данные случаи здесь не рассматриваются, так как настоящая лекция является обзорной.

## Задача об оценке решения

Рассмотрим следующую часто встречающуюся на практике автономную задачу:

$$\ddot{x} = f(x), \tag{11.4}$$

функция $f(x)$ — в общем случае может быть нелинейной. Сведем данную задачу (11.4) к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = p, \\ \dot{p} = f(x), \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \dot{\begin{pmatrix} x \\ p \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} p \\ f(x) \end{pmatrix},$$

или, в векторной форме:

$$\dot{\vec{X}} = \vec{F}\left(\vec{X}\right). \tag{11.5}$$

Преобразуем систему (11.5), разделив второе уравнение на первое:

$$\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{f(x)}{p},$$

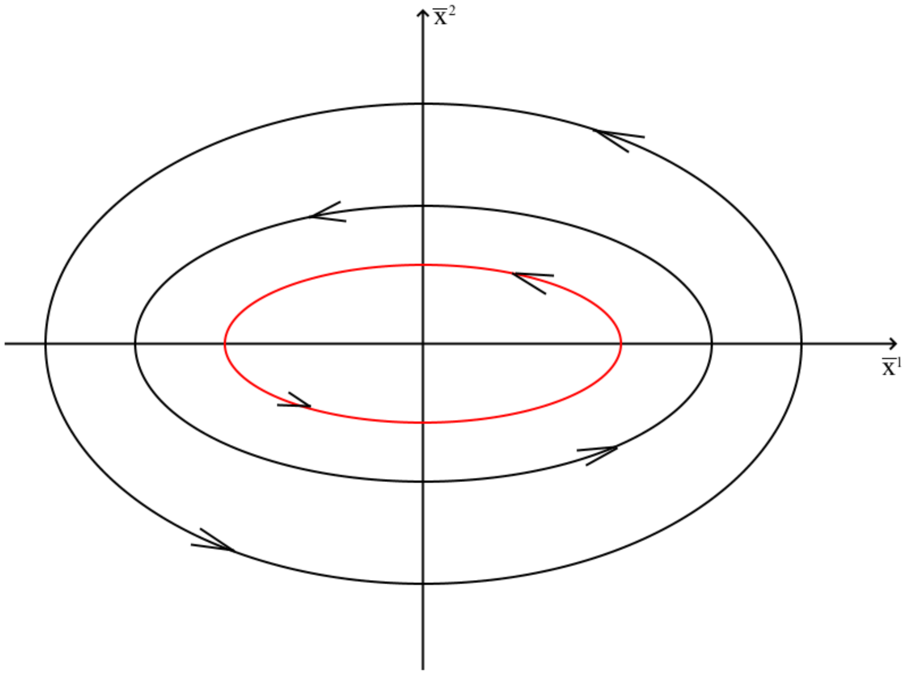


Рис. 11.3. Семейство эллипсов в случае, когда $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — комплексные.

$$pdp = f(x)\,dx, \quad \Rightarrow \quad \frac{p^2}{2} = \int f(x)\,dx + \tilde{C},$$

$$p = \pm\sqrt{2\int f(x)\,dx + C}.$$

Так как $f(x)$ в общем случае — нелинейная, то присутствует сложность в отображении фазовой кривой $p = p(x)$ на фазовой плоскости $(x, p)$. Проиллюстрируем оценку поведения решения на конкретном примере.

## Пример построения фазовой кривой

Рассмотрим задачу вида (11.4) с заданной квадратичной нелинейностью:

$$\ddot{x} = x(a - x).$$

Определим точки покоя в общем случае из условия:

$$\begin{cases} \dot{x} = p = 0, \\ \dot{p} = f(x) = 0. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{в общем случае точки покоя на фазовой плоскости: } (x_i, 0),$$

где $x_i$ — нули $f(x)$. Для их нахождения в общем случае разложим $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестностях $x_i$ до первого члена включительно:

$$f(x) = f(x_i) + f'_x(\overline{x})(x - x_i) + o(x - x_i).$$

Введем преобразование координат $\overline{x} = x - x_i$, после чего приближенная линеаризованная система примет вид (равенства справедливы только если $\overline{x} \to 0$):

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}} \\ p \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} p \\ f'_x(\overline{x})\,\overline{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'_x(\overline{x}) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ p \end{pmatrix} = A\vec{X}.$$

Решим характеристическое уравнение для данной системы:

$$det\,|A - \lambda E| = \lambda^2 - f'_x(\overline{x}) = 0.$$

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{f'_x(\overline{x})}.$$

В зависимости от знака производной получается либо точка покоя типа «седло», либо «центр». В случае конкретной рассматриваемой задачи получаем точки покоя с координатами $(0,0)$; $(a,0)$. Производная:

$$f'_x(x) = a - 2x,$$

поэтому точка $(0,0)$ — седло, $(a,0)$ — центр. Нарисуем качественно вид зависимости $\frac{p^2}{2}(x)$, руководствуясь видом функции $f(x)$: см. рис. 11.4. После чего качественно отобразим зависимость $p(x)$ — фазовую кривую: см. рис. 11.5.

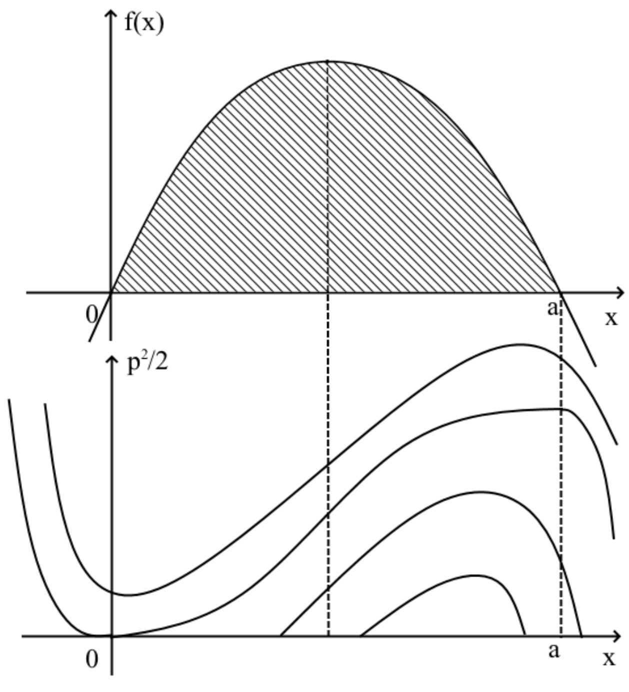


Рис. 11.4. Представление вида графика функции $\frac{p^2}{2}(x)$ исходя из вида графика для $f(x)$ как первообразной.

Из вида кривой на рисунке 11.5 можно сделать, например, вывод об устойчивости решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \ddot{x} = x(a-x), \quad t \in (t_0, T], \\ x(t_0) = a + \delta_1, \\ \dot{x}(t_0) = 0 + \delta_2, \end{cases}$$

где $\delta_1$, $\delta_2$ — ошибки задания начальных условий. В зависимости от величины ошибок решение может оказаться устойчивым (замкнутые эллипсы вокруг «центра» $(a, 0)$) в случае малых ошибок, а в случае больших ошибок решение может быть неустойчивым, что приведет к стремлению решения к бесконечности $x \to \infty$.

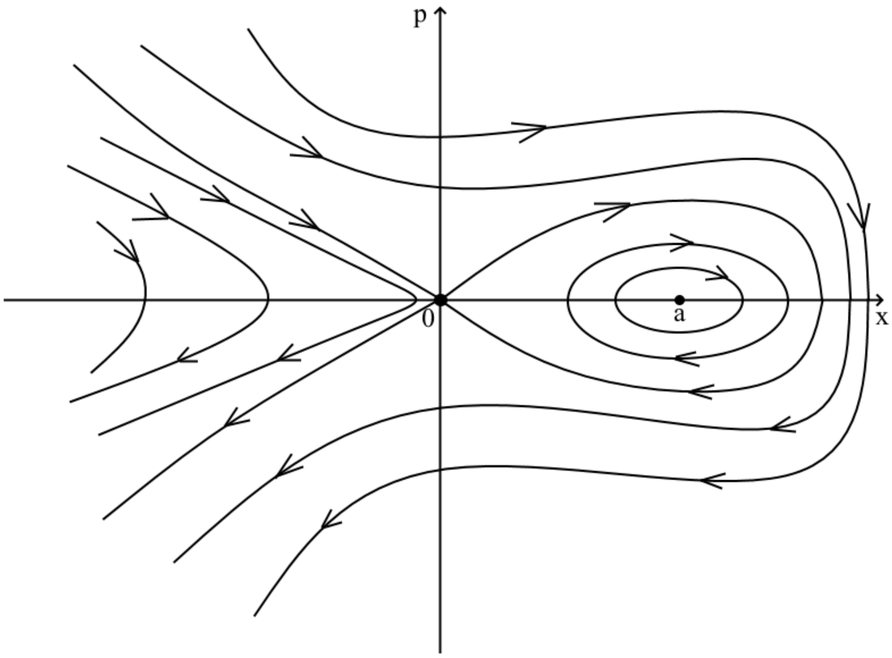


Рис. 11.5. Качественный вид зависимости $p\,(x)$ в случае рассматриваемой задачи с двумя точками покоя — «седлом» и «центром».

# Лекция 12.
# Основы решения уравнений в частных производных

## Общий вид уравнения в частных производных для уравнения первого порядка

Обыкновенные дифференциальные уравнения содержат функцию только одного аргумента $z(x)$. В общем же случае можно рассматривать функции нескольких аргументов $z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и строить дифференциальные уравнения относительно таких функций.

**Определение 12.1.** *Дифференциальное уравнение относительно функции нескольких переменных называется уравнением в частных производных.*

Запишем общий вид уравнения в частных производных первого порядка:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

В данной лекции мы рассмотрим случай линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка, пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тогда в общем виде запишем однородное уравнение:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0. \tag{12.1}$$

Введем понятие характеристической системы уравнений:

**Определение 12.2.** *Систему уравнений:*

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x})}, \tag{12.2}$$

*будем называть характеристической системой уравнений для уравнения* (12.1).

**Заметим**, что в двумерном случае $\vec{x} = (x_1, x_2)$ характеристическая система (12.2) состоит из одного уравнения, которое задает связь между компонентами функции $\vec{x}$.

**Определение 12.3.** *Будем называть решения характеристической системы* (12.2) *характеристиками.*

В двумерном случае характеристика представляет собой интегральную кривую на плоскости $(x_1, x_2)$.

**Определение 12.4.** *Первым интегралом характеристической системы* (12.2) *будем называть функцию, принимающую во всех точках характеристики постоянное значение:*

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C.$$

**Замечание:** для удобства при доказательстве дальнейших утверждений введем еще одну связь характеристической системы в виде дифференциала:

$$\frac{dx_1}{X_1(\vec{x})} = \frac{dx_2}{X_2(\vec{x})} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(\vec{x})} = dt,$$

таким образом, характеристическая система содержит $n$ уравнений относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

## Первая теорема о первом интеграле

**Теорема 12.1.** *Любое решение уравнения* (12.1) *является первым интегралом характеристической системы* (12.2).

**Доказательство:** Пусть функция:

$$z = \Psi(x_1, \ldots, x_n),$$

является решением исходного уравнения:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(\vec{x}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} = 0.$$

Перепишем покомпонентно:

$$X_1(\vec{x}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \ldots + X_n(\vec{x}) \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0.$$

Выразим функции $X_1, \ldots, X_n$ из характеристической системы, получим:

$$\frac{dx_1}{dt}\frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + \ldots + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0.$$

Таким образом, получается полная производная сложной функции:

$$\frac{d}{dt}\Psi(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = 0,$$

откуда получаем, что на характеристике верно:

$$\Psi(x_1(t), \ldots, x_n(t)) = C.$$

■

Справедлива и обратная теорема.

**Теорема 12.2.** *Любой первый интеграл характеристической системы* (12.2) *является решением уравнения* (12.1).

**Доказательство:** Пусть имеем первый интеграл характеристической системы, для него на характеристике верно:

$$\Psi\left(x_1\left(t\right), \ldots, x_n\left(t\right)\right) = C.$$

Вычислим производную интеграла по параметру $t$:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dx_1}{dt}\frac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \ldots + \frac{dx_n}{dt}\frac{\partial\Psi}{\partial x_n} = 0.$$

Если через каждую точку в пространстве $\vec{x}$ проходит характеристика, то данное равенство верно для произвольных точек. Таким образом, при выполнении условий существования и единственности решения функция $\Psi$ удовлетворяет исходному уравнению. ■

## Вторая теорема о первом интеграле

**Теорема 12.3.** *Пусть известны $n-1$ независимых первых интегралов характеристической системы* (12.2)*:*

$$\Psi_1\left(\vec{x}\right) = C_1, \ldots, \Psi_{n-1}\left(\vec{x}\right) = C_{n-1},$$

*то есть якобиан системы функций в рассматриваемой области отличен от нуля:*

$$\frac{D\left(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}\right)}{D\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right)} \neq 0, \qquad \text{в } D.$$

*Тогда общее решение уравнения* (12.1) *имеет вид:*

$$z = \Phi\left(\Psi_1, \ldots, \Psi_{n-1}\right).$$

**Доказательство:** Докажем, что функция $z$ удовлетворяет исходному уравнению:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right)\frac{\partial\Phi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right)\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_j}\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\Psi_j}\sum_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right)\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i} = 0.$$

Последнее равенство верно, так как $\Psi_j$ является первым интегралом.

Теперь докажем, что $\Phi$ является именно общим решением. Пусть произвольная функция $z = \Psi\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ является решением исходного уравнения. Составим следующую систему:

$$\begin{cases} X_1\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_1} + \ldots + X_n\dfrac{\partial\Psi}{\partial x_n} = 0, \\ X_1\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n\dfrac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} = 0, \\ \vdots \\ X_1\dfrac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n\dfrac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Данная система в матричной форме записи:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Psi}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Psi_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Так как нам известно, что данная однородная система имеет нетривиальное решение, то ее определитель тождественно равен нулю:

$$\frac{D\left(\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}\right)}{D\left(x_1, \dots, x_n\right)} \equiv 0 \quad \text{в } D.$$

Равенство нулю такого определителя означает линейную зависимость функций $(\Psi, \Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})$. Но так как функции $(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1})$ — независимы, то функция $\Psi$ явно выражается через них:

$$z = \Psi = \Phi\left(\Psi_1, \dots, \Psi_{n-1}\right),$$

что и требовалось доказать. ■

## Задача Коши для двумерного случая

Рассмотрим постановку задачи Коши для уравнения в частных производных в двумерном случае.

$$\begin{cases} X_1\left(x, y\right) \dfrac{\partial z}{\partial x} + X_2\left(x, y\right) \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0, \\ z\big|_{x=x(s), y=y(s)} = \varphi\left(s\right). \end{cases} \tag{12.3}$$

Алгоритм решения задачи Коши (12.3) следующий. Сначала решается характеристическая система:

$$\frac{dx}{X_1\left(x, y\right)} = \frac{dy}{X_2\left(x, y\right)} \quad \Rightarrow \quad \Psi_1\left(x, y\right) = C_1,$$

после чего производится подстановка дополнительного условия в первый интеграл:

$$\Psi_1\left(x\left(s\right), y\left(s\right)\right) = C_1,$$

и выражается $s$ через $C_1$:

$$s = w_1\left(C_1\right).$$

Затем подставляем данное выражение в дополнительное условие, производя обратную замену:

$$z = \varphi\left(w_1\left(C_1\right)\right)\big|_{C_1=\Psi_1(x,y)} = z\left(x, y\right),$$

в результате чего получается функция $z\left(x, y\right)$, удовлетворяющая и уравнению, и дополнительному условию.

## Обобщение на многомерный случай

Задача Коши в многомерном случае ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i\left(\vec{x}\right) \dfrac{\partial z}{\partial x_i} = 0, \\ z\big|_{x_1=x_1(s_1,\ldots,s_{n-1}),x_2=x_2(s_1,\ldots,s_{n-1}),\ldots,x_n=x_n(s_1,\ldots,s_{n-1})} = \varphi\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right). \end{cases} \tag{12.4}$$

Общий алгоритм решения следующий:

1) Находим $n-1$ независимых первых интегралов характеристической системы:

$$\frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

$$\begin{cases} \Psi_1\left(x_1,\ldots,x_n\right) = C_1, \\ \Psi_2\left(x_1,\ldots,x_n\right) = C_2, \\ \vdots \\ \Psi_{n-1}\left(x_1,\ldots,x_n\right) = C_{n-1}. \end{cases}$$

2) Подставляем зависимости $(x_1,\ldots,x_n)$ от $C_1,\ldots,C_{n-1}$ в дополнительное условие:

$$\begin{cases} \Psi_1\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right) = C_1, \\ \Psi_2\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right) = C_2, \\ \vdots \\ \Psi_{n-1}\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right) = C_{n-1}. \end{cases}$$

3) Разрешаем эту систему относительно $(s_1,\ldots,s_{n-1})$:

$$\begin{cases} s_1 = w_1\left(C_1,\ldots,C_{n-1}\right), \\ \vdots \\ s_{n-1} = w_{n-1}\left(C_1,\ldots,C_{n-1}\right). \end{cases}$$

4) После чего решение исходной задачи ищем в виде:

$$z = \varphi\left(w_1\left(C_1,\ldots,C_{n-1}\right),\ldots,w_{n-1}\left(C_1,\ldots,C_{n-1}\right)\right).$$

5) Выражаем константы $C_1,\ldots,C_{n-1}$ из первых интегралов:

$$\begin{aligned} z\left(x_1,\ldots,x_n\right) = \varphi\,[w_1\{&\Psi_1\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right),\ldots, \\ &\Psi_{n-1}\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right)\},\ldots, \\ &w_{n-1}\{\Psi_1\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right),\ldots, \\ &\qquad\Psi_{n-1}\left(x_1\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right),\ldots,x_n\left(s_1,\ldots,s_{n-1}\right)\right)\}]. \end{aligned}$$

# Лекция 13. Приближенные методы решения ОДУ и их систем. Численные методы решения

## Задача Коши для ОДУ первого порядка

Будем рассматривать задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в следующем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f\left(u, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ u\left(t_0\right) = u_0. \end{cases} \tag{13.1}$$

Задача — найти функцию $u\left(t\right)$ на отрезке от $t_0$ до $T$ приближенными методами. Понятно, что в случае, если известно аналитическое решение задачи (13.1) с заданной неоднородностью $f\left(u, t\right)$, то использование приближенных методов не необходимо. Здесь и далее будем преподалагать, что функция $f\left(u, t\right)$ — нелинейная и поиск аналитического решения не предполагается осуществимым.

Разделим отрезок $[t_0, T]$ на $M$ интервалов. В случае, если интервалы равные, обозначим шаг сетки и узлы сетки следующим образом:

$$\tau = \frac{T - t_0}{M}, \quad t_m = t_0 + m\tau, \quad m \in \overline{0, M}.$$

Поиск аналитического решения предполагается невозможным, поэтому будем искать так называемые сеточные значения функции:

$$u_m = u\left(t_m\right).$$

Разложим сеточное значение $u\left(t_{m+1}\right)$ функции в ряд Тейлора в окрестности точки $t_m$:

$$u\left(t\right) = u\left(t_m\right) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_m} \left(t - t_m\right) + \frac{1}{2}\left.\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\right|_{t=t_m} \left(t - t_m\right)^2 + \ldots,$$

$$u\left(t_{m+1}\right) = u\left(t_m\right) + \left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_m} \left(t_{m+1} - t_m\right) + \frac{1}{2}\left.\left(\frac{d^2u}{dt^2}\right)\right|_{t=t_m} \left(t_{m+1} - t_m\right)^2 + \ldots,$$

$$u\left(t_{m+1}\right) = u\left(t_m\right) + \left.f\right|_{t=t_m} \tau + \frac{\tau^2}{2}\left.\left(f_t + f_u f\right)\right|_{t=t_m} + \ldots.$$

Пренебрежем членами разложения в ряд Тейлора, начиная со второго члена и далее. Тогда можем записать:

$$u_{m+1} = u_m + \tau f\left(u_m, t_m\right). \tag{13.2}$$

Последнее равенство (13.2), вообще говоря, — приближенное, поэтому будем различать сеточные значения функции $u_m$ и значения точной функции $u\left(t_m\right)$ в тех же узлах, считая равенство строгим для приближенных сеточных значений.

Таким образом, мы получили простейшую численную схему поиска приближенного решения, называемую схемой Эйлера (13.2). Значение $u_0$ в данной схеме известно, после чего каждое последующее значение $u_{m+1}$ выражается через известное

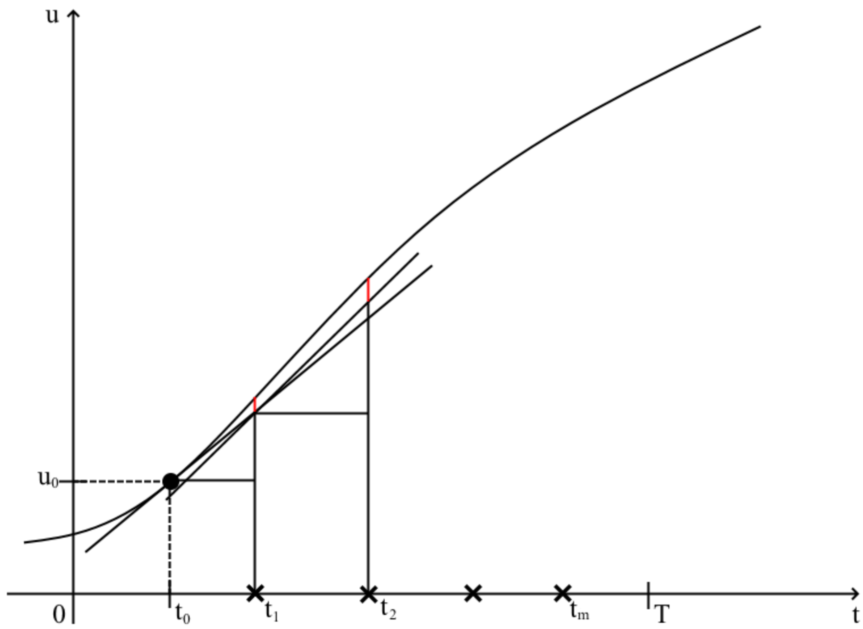


Рис. 13.1. Пусть точное решение задается некоторой кривой, представленной на рисунке. Вводится сетка $t_m$, после чего сеточные значения функции в каждом последующем узле задаются через касательную к графику функции в предыдущем узле. Красными отрезками обозначена погрешность определения значений функции. Очевидно, что со временем погрешности нарастают.

$u_m$, $m = \overline{0, M-1}$. Геометрическая интерпретация реализации данной схемы представлена на рис. 13.1.

При возрастании $t$ погрешности численной схемы нарастают. Чтобы уменьшить погрешности численной схемы необходимо уменьшать шаг сетки $\tau$, что эквивалентно увеличению числа узлов $M$. При стремлении $M$ к бесконечности численное решение будет стремиться к точному решению. На практике бесконечное число узлов задать нельзя — компьютер оперирует только конечными числами. Поэтому необходимо соблюдать баланс между погрешностями схемы и количеством узлов.

**Замечание:** при построении схемы Эйлера мы пренебрегли членами разложения в ряд Тейлора начиная от члена $\sim \tau^2$ и следующими. Поэтому схема Эйлера точно передает только два первых члена разложения в ряд Тейлора точного решения. Член разложения $\sim \tau^2$ задает оценку погрешности на одном шаге численной схемы. Оценим погрешность на всем интервале решения задачи:

$$|u(t_{m+1}) - u_{m+1}| \approx \frac{\tau^2}{2} C(t_m),$$

$$\sum_{m=0}^{M-1} \frac{\tau^2}{2} C(t_m) = \frac{\tau}{2} \sum_{m=0}^{M-1} C(t_m)\,\tau \approx \frac{\tau}{2} \int\limits_{t_0}^{T} C(t)\,dt = \tau C = O\left(\tau^1\right).$$

Таким образом, общая погрешность численного решения задачи есть $O(\tau^1)$. Это значит, что схема Эйлера точно передает первый член разложения в ряд Тейлора точного решения.

**Определение 13.1.** *Порядком точности численной схемы называется число p, если схема абсолютно точно передает p членов разложения в ряд Тейлора точного решения, общая погрешность численного решения в таком случае есть* $O(\tau^p)$.

**Замечание:** все сделанные выше утверждения справедливы и при решении многомерной задачи Коши с учетом замены производных функции $\vec{f}$ на матрицу Якоби при разложении в ряд Тейлора:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}, t), \quad t \in (t_0, T], \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0. \end{cases} \tag{13.3}$$

$$\text{Схема Эйлера:} \quad \vec{u}_0 = \vec{u}(t_0), \quad \vec{u}_{m+1} = \vec{u}_m + \tau \vec{f}(\vec{u}_m, t_m), \quad m = \overline{0, M-1}. \tag{13.4}$$

Здесь мы рассмотрели задачу Коши в простейшем виде — для уравнения первого порядка. На практике могут возникать и задачи высших порядков, в том числе с различными нелинейностями в производных. Однако, произвольные дифференциальные задачи могут быть сведены к задаче вида (13.3) путем замен переменных. Наиболее сложным случаем является случай с нелинейностью под знаком производной. В таком случае задачу можно свести к дифференциально-алгебраической системе, тоже представимой в виде (13.3). Задача (13.3) может быть численно решена многими схемами, в том числе и простейшей схемой Эйлера (13.4) обладающей первым порядком точности.

## Задача о моделировании движения тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести с учётом сопротивления воздуха

Рассмотрим пример — задачу о моделировании движения тела, брошенного под углом к горизонту в поле тяжести с учётом сопротивления воздуха. Математическая постановка задачи выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \vec{F}_c, \quad t \in (t_0, T], \\ \vec{r}(t_0) = \{x_0, y_0\}, \\ \dot{\vec{r}}(t_0) = \{v_0 \cos\alpha, v_0 \sin\alpha\}. \end{cases} \tag{13.5}$$

В простейшем случае отсутствия силы трения $F_c = 0$ решение известно — движение тела по параболе. См. рис. 13.2.

Теперь будем считать, что сила сопротивления пропорциональна скорости по величине и противоположно направлена ей:

$$\vec{F}_c = -k\vec{v}, \quad k > 0.$$

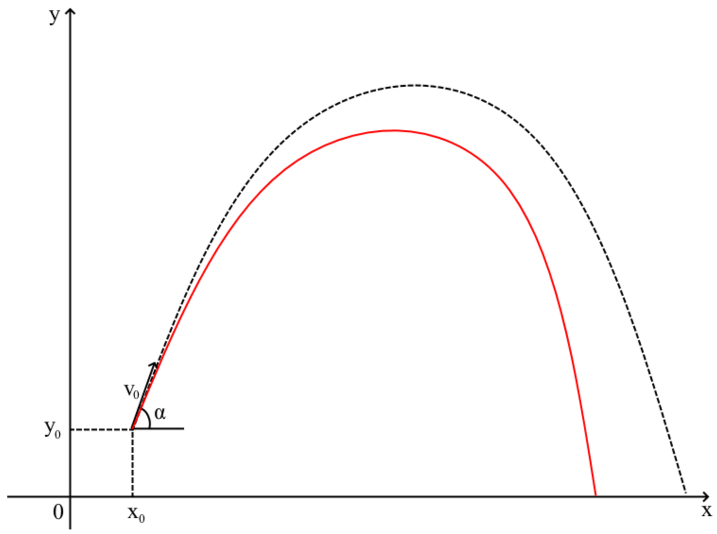


Рис. 13.2. Геометрическая интерпретация задачи о дижении тела под углом к горизонту.

Тогда система (13.5) сводится к решению линейного дифференциального уравнения. Если же сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости, то задача (13.5) является нелинейной:

$$\vec{F}_c = -k\,|\vec{v}|\,\vec{v}, \quad k > 0.$$

Случай, когда сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости — наиболее точно передает практически реализуемую зависимость силы трения воздуха. Случай пропорциональности скорости в первой степени — более грубый, но имеющий аналитическое решение, поэтому может использоваться для аналитических оценок. Будем решать более реалистичную задачу, используя численные методы:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} - k\,|\vec{v}|\,\vec{v}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{r}\,(t_0) = \{x_0, y_0\}, \\ \dot{\vec{r}}\,(t_0) = \{v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha\}. \end{cases}$$

Сделаем замену $\dot{\vec{r}} = \vec{v}$, чтобы свести задачу к задаче первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dot{\vec{v}} = \vec{g} - \dfrac{k}{m}\,|\vec{v}|\,\vec{v}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{r}\,(t_0) = \{x_0, y_0\}, \\ \vec{v}\,(t_0) = \{v_0\cos\alpha, v_0\sin\alpha\}. \end{cases}$$

Перепишем покомпонентно в матричной форме:

$$\begin{cases} \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dot{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} - \dfrac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Еще раз перепишем покомпонентно:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dot{y} = v_y, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dot{v}_x = -\dfrac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_x, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dot{v}_y = -g - \dfrac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_y, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ x\,(t_0) = x_0, \\ y\,(t_0) = y_0, \\ v_x\,(t_0) = v_0 \cos\alpha, \\ v_y\,(t_0) = v_0 \sin\alpha. \end{cases}$$

Теперь становится видно, что можно представить данную схему в виде (13.3), для этого запишем в векторном виде:

$$\begin{cases} \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ -\frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_x \\ -g - \frac{k}{m}\sqrt{v_x^2 + v_y^2}v_y \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ v_0 \cos\alpha \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}, \end{cases}$$

что эквивалентно системе вида (13.3), где:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix},$$

причем функция $\vec{f}$ в данном случае не зависит явно от аргумента $t$, поэтому система является автономной.

Теперь мы можем использовать схему Эйлера для решения исходной задачи (13.5) в преобразованном виде:

$$\vec{u}_{m+1} = \vec{u}_m + \tau\vec{f}\,(\vec{u}_m)\,.$$

## Реализация схемы на практике

В приложениях к данной лекции на портале teach-in даны листинги программ, реализующих схему Эйлера для решения задачи (13.5). Приведем несколько практических рекомендаций для самостоятельной реализации численных схем. Сначала запишем компоненты векторов как компоненты массивов в коде программы:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x = u\,[0] \\ y = u\,[1] \\ v_x = u\,[2] \\ v_y = u\,[3] \end{pmatrix}; \quad \vec{f}\,(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u\,[2] \\ u\,[3] \\ -\frac{k}{m}\sqrt{u\,[2]^2 + u\,[3]^2}u\,[2] \\ -g - \frac{k}{m}\sqrt{u\,[2]^2 + u\,[3]^2}u\,[3] \end{pmatrix}.$$

Данные векторы задаются в каждый момент времени, после чего применяется схема Эйлера для каждого следующего момента времени, например, в цикле for в пределах $m = \overline{0, M}$.

# Лекция 14. Семейство схем Рунге-Кутты

## Метод решения задачи Коши (повторение материала предыдущей лекции)

На предыдущей лекции мы рассмотрели метод решения задачи Коши вида:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u,t), \quad t \in (t_0, T], \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{14.1}$$

Цель решения задачи (14.1) — нахождение функции $u(t)$ на отрезке $[t_0, T]$. Если дифференциальное уравнение возможно решить аналитически, то не нужно привлекать численные методы. Если же нахождение аналитического решения не представляется возможным, то необходимо использовать численные методы. Для их использования вводится сетка:

$$t_m = t_0 + \frac{T - t_0}{M} m, \quad m = \overline{0, M}.$$

Сеточное решение можно находить с помощью различных численных схем, в том числе с помощью схемы Эйлера:

$$u_0 = u(t_0), \quad u_{m+1} = u_m + \tau f(u_m, t_m), \quad m = \overline{0, M-1}. \tag{14.2}$$

Мы показали, что схема Эйлера обладает первым порядком точности $p = 1$. Очевидно, что чем выше порядок точности численной схемы, тем данная схема лучше передает точное решение задачи. Поэтому на данной лекции мы будем рассматривать семейство схем Рунге-Кутты, обладающих более высокими порядками точности, чем схема Эйлера.

**Замечание:** выражения (14.1), (14.2) справедливы и в случае вектор-функций $\vec{u}, \vec{f}$. Далее будем рассматривать скалярный случай, подразумевая, что все утверждения обобщаются и на многомерный случай.

## Общая схема Рунге-Кутты (RK) в форме Бутчера

Если решается задача вида (14.1), то решение на сетке можно искать в виде:

$$u_{m+1} = u_m + \tau \sum_{k=1}^{s} b_k w_k, \quad m = \overline{0, M-1}, \tag{14.3}$$

где поправки к решению $w_k$ находятся в виде:

$$w_k = f\left(u_m + \tau \sum_{l=1}^{L} a_{kl} w_l, t_m + c_k \tau\right),$$

$b_k, a_{kl}, c_k$ — коэффициенты численной схемы, а для определения $L$ возможны несколько случаев:

$$L = \begin{cases} k-1, & \text{явная схема ERKs (explicit RK scheme стадии s)}, \\ k, & \text{неявная схема DIRKs (diagonal implicite RK scheme стадии s)}, \\ s, & \text{полностью неявная схема FIRKs (fully implicite RK scheme стадии s)}. \end{cases}$$

В данной лекции будем рассматривать только явные схемы Рунге-Кутты, то есть случай $L = k - 1$.

## Одностадийная схема Рунге-Кутты

Запишем одностадийную схему Рунге-Кутты, $L = k - 1$, $s = 1$:

$$\text{ERK1:} \quad \begin{cases} u_{m+1} = u_m + \tau b_1 w_1, \\ w_1 = f\left(u_m, t_m + c_1 \tau\right), \end{cases} \tag{14.4}$$

для полного определения схемы необходимо задать свободные коэффициенты $b_1, c_1$. Будем выбирать данные коэффициенты таким образом, чтобы схема (14.4) передавала наибольшее возможное число членов разложения в ряд Тейлора точного решения задачи (14.1). Напомним формулу для разложения функции $u\left(t\right)$ в окрестности точки $t_m$ при записи в точке $t_{m+1}$:

$$u\left(t_{m+1}\right) = u_m + \tau f + \frac{\tau^2}{2}\left(f_t + f_u f\right) + \frac{\tau^3}{6}\left(f_{tt} + 2 f_{tu} f + f_{uu} f^2 + f_u f_t + f_u^2 f\right) + \ldots \tag{14.5}$$

Теперь разложим в ряд Тейлора $w_1$ в окрестности точки $t_m$:

$$w_1 = f + f_t c_1 \tau + \ldots,$$

после чего подставим $w_1$ в выражение для $u_{m+1}$:

$$u_{m+1} = u_m + \tau b_1 f + \frac{\tau^2}{2}\left(2 c_1 b_1 f_t\right) + \ldots$$

Сравниваем $u_{m+1}$ и $u\left(t_{m+1}\right)$, видим, что нулевой член разложения передается точно, первый член разложения передается точно при $b_1 = 1$, а второй член разложения не передается точно ни при каких $c_1$. Таким образом, одностадийная схема Рунге-Кутты принимает следующий вид:

$$\text{ERK1:} \quad u_{m+1} = u_m + \tau f\left(u_m, t_m + c_1 \tau\right), \quad m = \overline{0, M-1}.$$

Данная схема обладает первым порядком точности $p = 1$. Константу $c_1$ можно выбирать произвольно и получать различные варианты реализации схемы.

**Замечание:** При $c_1 = 0$ схема ERK1 совпадает со схемой Эйлера.

Практическое значение имеют те значения $c_1$, при которых выполняется условие интерполяционности: имеет смысл вычислять все значения функций только внутри отрезка $[t_m, t_{m+1}]$, поэтому лучше задавать $c_1 \in [0, 1]$. Конкретное значение $c_1$ зависит от особенностей данной решаемой задачи и вида функции $f$.

## Двухстадийная схема Рунге-Кутты

Теперь построим схему ERK2:

$$\text{ERK2:}\quad \begin{cases} u_{m+1} = u_m + \tau\left(b_1 w_1 + b_2 w_2\right), \\ w_1 = f\left(u_m, t_m + c_1\tau\right), \\ w_2 = f\left(u_m + \tau a_{21} w_1, t_m + c_2\tau\right). \end{cases} \tag{14.6}$$

Данная схема содержит уже пять произвольных коэффициентов $b_1, b_2, c_1, c_2, a_{21}$. Найдем оптимальный набор коэффициентов, при которых схема передает наибольшее число членов ряда Тейлора точного решения (14.5). Сначала разложим $w_1, w_2$:

$$w_1 = f\left(u_m, t_m + c_1\tau\right) = f + f_t c_1 \tau + \ldots,$$

$$\begin{aligned} w_2 = f\left(u_m + \tau a_{21} w_1, t_m + c_2\tau\right) = f + f_u \tau a_{21} w_1 + f_t c_2 \tau + \ldots = \\ = f + f_u \tau a_{21}\left(f + f_t c_1 \tau + \ldots\right) + f_t c_2 \tau + \ldots, \end{aligned}$$

после чего подставим $w_1, w_2$ в $u_{m+1}$:

$$\begin{aligned} u_{m+1} = u_m + \tau\left[b_1\left(f + f_t c_1 \tau + \ldots\right) + b_2\left(f + f_u f \tau a_{21} + f_u f_t \tau^2 a_{21} + f_t c_2 \tau + \ldots\right)\right] = \\ = u_m + \tau\left(b_1 + b_2\right) f + \frac{\tau^2}{2}\left(\left(2b_1 c_1 + 2b_2 c_2\right) f_t + \left(2b_2 a_{21}\right) f_u f\right) + \ldots, \end{aligned}$$

вспомним разложение точного решения (14.5), сравним, и получим условия на коэффициенты:

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = 1, \\ b_1 c_1 + b_2 c_2 = \dfrac{1}{2}, \\ b_2 a_{21} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

При таком выборе коэффициентов локальная погрешность численной схемы порядка $O\left(\tau^3\right)$, глобальная погрешность — $O\left(\tau^2\right)$, поэтому порядок аппроксимации схемы — второй $p = 2$.

Система уравнений для определения коэффициентов содержит три уравнения при пяти неизвестных. Таким образом, данная схема (14.6) имеет два свободных параметра. Рунге при выводе схемы (14.6) выбрал следующие коэффициенты:

$$b_1 = \frac{1}{4},\quad b_2 = \frac{3}{4},\quad a_{21} = \frac{2}{3},\quad c_1 = 0,\quad c_2 = \frac{2}{3}.$$

Очевидно, что этот набор коэффициентов удовлетворяет системе уравнений, но не является единственным.

На практике схема ERK2 реализуется следующим образом:

1) Вычисляются $w_1, w_2$ при заданных коэффициентах (например, для набора Рунге):

$$w_1 = f\left(u_m, t_m\right),$$
$$w_2 = f\left(u_m + \tau\frac{2}{3}w_1, t_m + \frac{2}{3}\tau\right),$$

2) Находим решение в следующий момент времени:

$$u_{m+1} = u_m + \tau\left(\frac{1}{4}w_1 + \frac{3}{4}w_2\right),$$

3) Продолжаем процедуру на всех шагах $m = \overline{0, M-1}$.

На портале teach-in в материалах к лекции выложены листинги программ, реализующих схемы ERK1, ERK2 для решения задачи о броске тела под углом к горизонту, разбиравшейся на предыдущей лекции.

## Связь количества стадий с порядком точности

Построим следующую таблицу, отображающую связь количества стадий схемы с ее порядком точности (для схем с большим количеством стадий приведенные результаты также можно показать, проводя аналогичные выкладки):

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| s | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| p | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 |

Переход между четырех- и пятистадийной схемами, при котором не происходит повышение порядка точности, называется порогом Бутчера. Именно из-за данного свойства схем Рунге-Кутты наибольшей популярностью пользуется четырехстадийная схема, так как она более эффективна по отношению затрат ресурсов к получаемому уровню точности.

## Процедура автономизации

В настоящее время в научной литературе пользуется популярностью использование схем с наибольшими возможными порядками точности и наибольшим количеством стадий. По мере возрастания количества стадий процедуры вывода таких схем становятся все более громоздкими из-за вычисления очередных членов разложения в ряд Тейлора. Данные вычисления можно упростить, если исходная задача является автономной, то есть $f_t = 0$. Поэтому приведем процедуру автономизации произвольной задачи Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}\,(\vec{u}, t)\,, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{u}\,(t_0) = \vec{u}_0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{du^i}{dt} = \vec{f^i}\left(u^1, u^2, \ldots, u^n, t\right), \quad i = \overline{1, n}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ u^i\,(t_0) = u^i_0, \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Введем новую переменную $u^{n+1}(t) \equiv t$:

$$\begin{cases} \dfrac{du^i}{dt} = \vec{f^i}\left(u^1, u^2, \ldots, u^n, u^{n+1}\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in (t_0, T], \\ \dfrac{du^{n+1}}{dt} = 1, \quad t \in (t_0, T], \\ u^i(t_0) = u_0^i, \quad i = \overline{1,n}, \\ u^{n+1}(t_0) = t_0. \end{cases}$$

Таким образом, мы получили автономную систему уравнений, размерность системы увеличилась на единицу, но теперь можно использовать для решения данной системы методы, разработанные специально для автономных систем и требующие меньшего числа выкладок.

## Пример проведения процедуры автономизации и численная реализация

Рассмотрим пример, для которого также приведен листинг программы (пример 3), реализующей численное решение:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \lambda u(t-u), \quad t \in (t_0, T], \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Тестовый пример при наборе параметров $t_0 = -1, T = 2, \lambda = 10$, имеет следующее решение, приведенное на рис. 14.1.

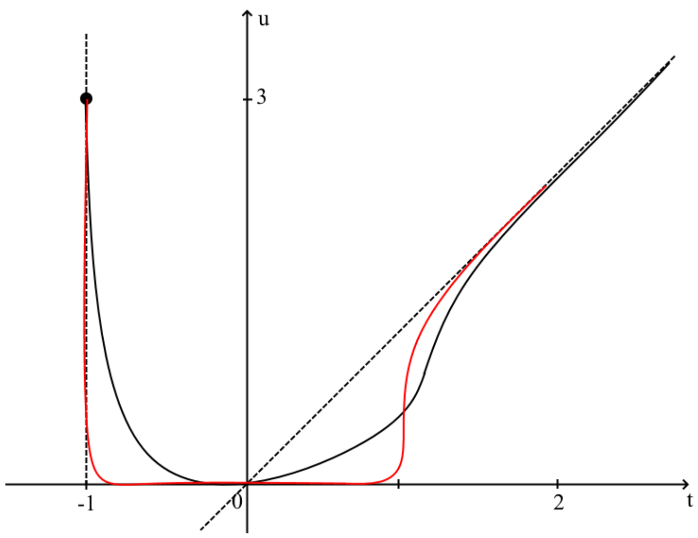


Рис. 14.1. Решение задачи при заданном наборе параметров $t_0 = -1, T = 2, \lambda = 10$. Предельный случай при $\lambda \gg 10$ обозначен красным.

Проведем для данного примера процедуру автономизации: введем две функции:

$$u^1(t) \equiv u(t), \quad u^2(t) = t,$$

тогда:

$$\begin{cases} \dfrac{du^1}{dt} = \lambda u^1 \left(u^2 - u^1\right), \quad t \in (t_0, T], \\ \dfrac{du^2}{dt} = 1, \quad t \in (t_0, T], \\ u^1(t_0) = u_0, \\ u^2(t_0) = t_0. \end{cases}$$

В векторном виде данная система запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u^1 (u^2 - u^1) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T], \\ \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}(t_0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ t_0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

что эквивалентно краткой форме записи в виде автономной системы:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}(\vec{u}), \quad t \in (t_0, T], \\ \vec{u}(t_0) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Для применения в программе вектор-функции записываются в следующем виде:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u^1 = u[0] \\ u^2 = u[1] \end{pmatrix}, \quad \vec{f}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \lambda u[0] (u[1] - u[0]) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

# Лекция 15.
# Жёсткие системы ОДУ и особенности их решения

## Постановка задачи и пример жесткой системы

Начнем рассмотрение жестких систем со следующей задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \lambda u, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ u\,(t_0) = u_0, \end{cases} \tag{15.1}$$

для данной задачи известно аналитическое решение, оно представлено на рисунке 15.1:

$$u\,(t) = u_0 e^{\lambda(t-t_0)}.$$

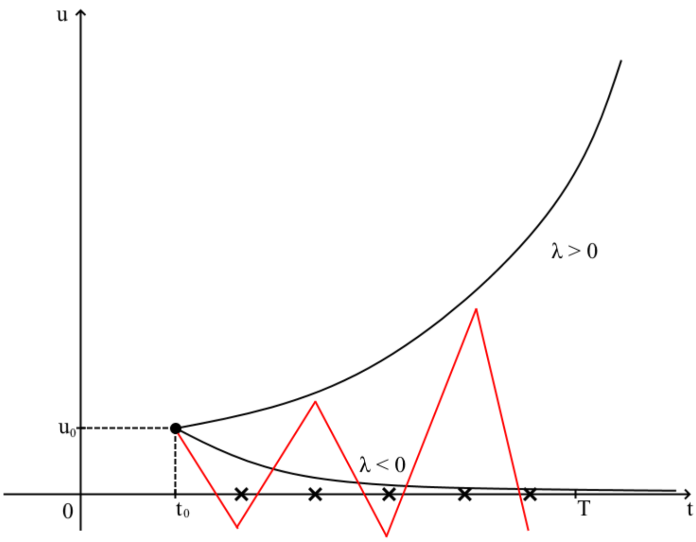


Рис. 15.1. Аналитическое решение задачи (15.1) при различных значениях $\lambda$, а также численное решение при недостаточно малом шаге по времени.

Теперь, допустим, во входных данных допущена ошибка $\delta u$, тогда точное решение со временем изменится:

$$u\,(t) = (u_0 + \delta u)\, e^{\lambda(t-t_0)} = u_0 e^{\lambda(t-t_0)} + \delta u e^{\lambda(t-t_0)}.$$

Видно, что при $\lambda > 0$ со временем ошибка будет только нарастать, в таком случае данная задача является плохо обусловленной. При $\lambda < 0$ ошибка всегда убывает, поэтому в данном случае задача является устойчивой по отношению к ошибкам входных данных. Однако, именно в случае $\lambda < 0$ возникает много проблем при решении задачи численными методами. Рассмотрим численное решение на примере одностадийной схемы Рунге-Кутты ERK1:

$$\text{ERK1:} \quad u_{m+1} = u_m + \tau f\,(u_m) = u_m + \tau\lambda u_m = (1 + \tau\lambda)\, u_m.$$

Так как мы знаем аналитическое решение, и знаем, что в случае $\lambda < 0$ решение всегда убывает, сохраняя знак, то мы можем записать:

$$\begin{cases} u_{m+1} < u_m, \\ \dfrac{u_{m+1}}{u_m} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{u_{m+1}}{u_m} < 1, \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 1 + \tau\lambda < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 + \tau\lambda < 1, \\ 1 + \tau\lambda > 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau\lambda < 0, \\ \tau\lambda > -1, \end{cases} \quad \begin{cases} \tau > 0, \\ \tau < -\dfrac{1}{\lambda}, \end{cases} \quad 0 < \tau < -\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, мы получили условие, при котором численное решение качественно будет вести себя, как аналитическое. В реальных задачах (например, радиоактивный распад) значение $\lambda$ может принимать очень большие значения. Значит, шаг сетки должен быть достаточно маленьким. Если же взять шаг по времени недостаточно малым, то может получиться качественно неверное решение (см. красную кривую на рис. 15.1). Такой эффект называется жесткостью.

В общем случае, когда аналитическое решение неизвестно, условие на шаг $\tau$ получить не удастся. Поэтому необходимо избавиться от данного ограничения. Есть несколько подходов к решению данной проблемы.

## Первый подход к решению жестких систем: переход к длине дуги

При численном решении в областях, где функция меняется достаточно быстро, на равномерной сетке может оказаться недостаточное количество узлов, в результате чего на каждом шаге приближенное решение будет отклоняться от искомой интегральной кривой существенно. Возможный путь решения данной проблемы — ввод такой сетки, чтобы узлы сетки были расположены на интегральной кривой достаточно равномерно. Для бесконечно малой части интегральной кривой верно:

$$(dl)^2 = (dt)^2 + (du)^2 = (dt)^2 + (f(u)\,dt)^2 = \left(1 f^2(u)\right)(dt)^2, \quad dt = \frac{dl}{\sqrt{1 + f^2(u)}},$$

где $dl$ — элемент интегральной кривой, таким образом мы сделали замену переменных в исходной задаче (15.1):

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dl} = \dfrac{f(u)}{\sqrt{1 + f^2(u)}}, \quad l \in (l_0, L], \\ u(l_0) = u_0, \end{cases}$$

Новые постоянные $l_0, L$ связаны с прежними постоянными $t_0, T$. $l_0 = 0$ — тривиально. Как найти $L$ через $T$ — определим позже, так как изначально итоговая длина кривой нам неизвестна. За счет такой замены узлы численной сетки будут расположены равномерно на исходной сетке.

## Решение жестких систем в общем случае

Теперь рассмотрим общий случай — неавтономная задача для системы из $n$ вектор-функций.

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{u}, t\right), \quad t \in (t_0, T], \\ \vec{u}\left(t_0\right) = \vec{u}_0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{du^i}{dt} = f^i\left(u^1, u^2, \ldots, u^n, t\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in (t_0, T], \\ u^i\left(t_0\right) = u_0^i, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Проведем замену аналогично одномерному случаю:

$$(dl)^2 = (dt)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(du^i\right)^2 = (dt)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, t\right) dt\right)^2 =$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, t\right)\right)^2\right) (dt)^2,$$

$$dt = \frac{dl}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, t\right)\right)^2}},$$

$$\begin{cases} \dfrac{du^i}{dl} = \dfrac{f^i\left(u^1, u^2, \ldots, u^n, t\right)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, t\right)\right)^2}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad l \in (l_0, L], \\ u^i\left(l_0\right) = u_0^i, \quad i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

чтобы окончательно избавиться от зависимости от $t$ в исходном уравнении, проведем процедуру автономизации:

$$\begin{cases} \dfrac{du^i}{dl} = \dfrac{f^i\left(u^1, u^2, \ldots, u^n, u^{n+1}\right)}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, u^{n+1}\right)\right)^2}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad l \in (l_0, L], \\ \dfrac{du^{n+1}}{dl} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \left(f^i\left(u^1, \ldots, u^n, u^{n+1}\right)\right)^2}}, \quad i = \overline{1,n}, \quad l \in (l_0, L], \\ u^i\left(l_0\right) = u_0^i, \quad i = \overline{1,n}, \\ u^{n+1}\left(l_0\right) = t_0, \quad i = \overline{1,n}. \end{cases}$$

**Замечание:** на практике тоже рекомендуется формально проводить процедуру автономизации, так как дополнительное условие $u^{n+1}\left(l_0\right) = t_0$ помогает определять значение $L$. При таком подходе расчет производится до тех пор, пока значение $u^{n+1}$ не превзойдет значение $T$. Это будет соответствовать тому, что интегральная кривая достигла длины $L$.

Общий алгоритм решения в таком случае будет записываться следующим образом:

1) $\vec{u}_0$ — известно, $j = 0$.

2) Фиксируем $dl$. Если $u_j^{n+1} < T$, находим решение на следующем шаге сетки $l_j$:

$$\vec{u}_{j+1} = \vec{u}_j + dl \sum_{k=1}^{s} b_k w_k.$$

3) Уменьшаем $dl$, пока не получим решение с требуемой точностью и повторяем предыдущий шаг.

В материалах к лекции на портале teach-in находятся три программы, реализующие решения рассматриваемых в лекциях 13, 15 задач (13.5), (15.1). Пример 4 реализует схему Эйлера для решения задачи (15.1), пример 5 реализует решение задачи (15.1) с помощью перехода к длине дуги кривой, а также процедуру автономизации, пример 6 реализует решение задачи (13.5) с помощью перехода к длине дуги кривой и автономизации.

## Второй подход к решению жестких систем: неявные схемы

Второй подход к решению жестких систем состоит в использовании неявных схем. Вернемся к примеру (15.1). Выпишем еще раз схему Эйлера для решения данной задачи и введем новое обозначение:

$$\text{ERK1:} \quad u_{m+1} = (1 + \tau\lambda)\, u_m \equiv R(\xi)\, u_m,$$

где $\xi = \tau\lambda$, а $R(\xi)$ называют функцией роста или функцией устойчивости.

**Определение 15.1.** *Схема называется $A$-устойчивой, если $|R(\xi)| \leqslant 1$ при $Re\xi < 0$.*

**Замечание:** задача (15.1) называется тестом Далквиста. По данной задаче принято сравнивать эффективность различных численных схем.

**Определение 15.2.** *Схема называется $L$-устойчивой, если она является $A$-устойчивой и $R(\xi) \to 0$ при $\xi \to \infty$.*

**Определение 15.3.** *Схема называется $L_p$-устойчивой, если она является $A$-устойчивой и $R(\xi) = O(\xi^{-p})$ при $\xi \to \infty$.*

**Определение 15.4.** *Схема называется $t$-монотонной, если она является $A$-устойчивой и $R(\xi) > 0$ при вещественно определенном $\xi$.*

Далквист доказал теорему, согласно которой любая явная схема не может являться $A$-устойчивой.

Построим обратную схему Эйлера — пример неявной схемы:

$$u_{m+1} = u_m + \tau f(u_{m+1}, t_{m+1}), \quad m = \overline{0, M-1}.$$

Изучим ее свойства на примере теста Далквиста:

$$u_{m+1} = u_m + \tau\lambda u_{m+1}, \quad m = \overline{0, M-1},$$

$$u_{m+1} = \frac{1}{1-\tau\lambda} u_m, \quad R(\xi) = \frac{1}{1-\xi}.$$

Легко показать, что такая численная схема, как и явная схема Эйлера, имеет первый порядок точности $p = 1$, но данная схема обладает существенным преимуществом, так как является $A$-устойчивой: $R(\xi) \leqslant 1$ для любых $\xi$, а также $L_1$-устойчива. Однако, данная схема гораздо более сложна при реализации.

## Семейство одностадийных схем Розенброка-Ваннера

Рассмотрим построение семейства одностадийных схем Розенброка-Ваннера на примере задачи (15.1).

$$u_{m+1} = u_m + \tau w_1, \quad m = \overline{0, M-1},$$

где $w_1$ определяется как решение:

$$\left[E - \alpha\tau f_u(u_m, t_m)\right] w_1 = f(u_m, t_m + \tau/2),$$

где $E$ — единичная матрица размерности системы уравнений (15.1), $f_u$ — Якобиан. Составим таблицу, в которой отобразим основные качества различных одностадийных численных схем (без вывода, в качестве справки):

| Название схемы | $\alpha$ | Устойчивость | Аппроксим. | Монотонность | Надежность | $R(\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CROS1 | $\frac{1+i}{2}$ | $L_2$-устойчивая | $O(\tau^2)$ | есть | очень надежна | 0 |
| чисто неявная | 1 | $L_1$-устойчивая | $O(\tau^1)$ | есть | высоко надежна | 0 |
| Схема с полусуммой | $\frac{1}{2}$ | $A$-устойчивая | $O(\tau^2)$ | сильно немонотонная | посредств. | -1 |
| Явная ERK1, Эйлера | 0 | нет | $O(\tau^1)$ | нет | очень плохая | – |

**Замечание:** схема с полусуммой обладает вторым порядком точности, поэтому при решении задач, не являющихся жесткими, ее использование дает больший выигрыш в результате. Однако, чисто неявная схема гораздо более устойчива, и потому лучше применима для решения жестких задач.

**Замечание:** схема CROS1 — одностадийная схема Розенброка с комплексным коэффициентом, объединяет в себе хорошие качества чисто неявной схемы и схемы с полусуммой, но не обладает недостатками данных двух схем. Поэтому данная схема является наиболее предпочтительной для использования при решении жестких задач.

В приложениях к данной лекции на портале teach-in находится листинг программы «пример 7», который реализует четыре приведенных в таблице численных схемы для решения задачи из «примера 3». Варьируя число узлов сетки, можно обнаружить различные эффекты, характерные для каждой из приведенных схем. При $M \to \infty$ все решения стремятся к точному решению задачи, что позволяет сделать выводы о работоспособности различных схем при меньших значениях числа узлов $M$.

# Лекция 16. Дифференциально-алгебраические системы

## Постановка дифференциально-алгебраической задачи

На прошлых лекциях мы рассматривали чисто дифференциальные системы уравнений. В реальных задачах могут присутствовать дополнительные связи между переменными, которые задаются с помощью алгебраических уравнений. Дадим общую постановку задачи для дифференциально-алгебраической системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{v}, \vec{y}, t\right), \quad t \in (t_0, T]\,, \\ 0 = \vec{g}\left(\vec{v}, \vec{y}, t\right), \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{v}\left(t_0\right) = \vec{v}_0, \quad \vec{g}\left(\vec{v}_0, \vec{y}_0, t_0\right) = 0, \end{cases} \tag{16.1}$$

данная краткая форма записи может быть трудной для восприятия, поэтому перепишем покомпонентно:

$$\begin{cases} \dfrac{dv^i}{dt} = f^i\left(v^1, \ldots, v^n, y^1, \ldots, y^k, t\right), \quad i = \overline{1,n}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ 0 = g^j\left(v^1, \ldots, v^n, y^1, \ldots, y^k, t\right), \quad j = \overline{1,k}, \quad t \in (t_0, T]\,, \\ v^i\left(t_0\right) = v_0^i, \quad i = \overline{1,n}, \quad g^j\left(v_0^1, \ldots, v_0^n, y_0^1, \ldots, y_0^k, t_0\right) = 0, \quad j = \overline{1,k}. \end{cases}$$

## Подход к решению дифференциально-алгебраических систем через сведение дифференциально-алгебраической системы к жесткой дифференциальной системе уравнений

Сведем данную дифференциально-алгебраическую систему (16.1) к дифференциальной системе, сделав следующее преобразование:

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}\left(\vec{v}, \vec{y}, t\right), \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \dfrac{d\vec{y}}{dt} = \dfrac{1}{\varepsilon}\vec{g}\left(\vec{v}, \vec{y}, t\right), \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{v}\left(t_0\right) = \vec{v}_0, \quad \vec{g}\left(\vec{v}_0, \vec{y}_0, t_0\right) = 0, \end{cases}$$

данная система уже является дифференциальной, и при $\varepsilon \to 0$ решение данной системы должно стремиться к решению системы (16.1). Однако, заметим следующее: при $\varepsilon > 0$ — система является плохо обусловленной системой ОДУ, при $\varepsilon < 0$ — система является жесткой системой ОДУ, для решения которых подходят численные схемы, разобранные на предыдущей лекции. Поэтому можно пользоваться для решения подобных задач методами, разработанными для решения жестких систем, считая данную задачу крайне жесткой.

## Подход Розенброка-Ваннера к решению дифференциально-алгебраических систем

Теперь снова рассмотрим исходную задачу (16.1), запишем ее в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & 0_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\vec{v}}{dt} \\ \frac{d\vec{y}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{f} \\ \vec{g} \end{pmatrix}, \quad t \in (t_0, T]\,,$$

или, обозначив матрицу из нулей и единиц как $D$, введя обозначение для вектора $\vec{u} = (\vec{v}, \vec{y})$ и обозначив вектор правой части как $\vec{F}$, получим:

$$D\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{u}, t\right),$$

то есть мы получили дифференциальную систему с вырожденной матрицей $D$ в левой части. Так как матрица вырожденная, то следующее равенство неверно, но все равно предположим, что возможно записать (такую запись можно обосновать, воспользовавшись, например, формальным введением малой $\varepsilon$, как в предыдущем подразделе):

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{dt} = D^{-1}\vec{F}\left(\vec{u}, t\right), \quad t \in (t_0, T]\,, \\ \vec{u}\left(t_0\right) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Тогда численную схему для такой задачи можно записать в виде:

$$\vec{u}_{m+1} = \vec{u}_m + \tau Re\vec{w}_1,$$

где $w_1$ определяется из:

$$\left[E - \alpha\tau\frac{\partial\left(D^{-}1\vec{F}\right)}{\partial\vec{u}}\left(\vec{u}_m, t_m\right)\right]\vec{w}_1 = D^{-1}\vec{F}\left(\vec{u}_m, t_m + \frac{\tau}{2}\right).$$

Домножим данное равенство слева на $D$, получим:

$$\left[D - \alpha\tau\frac{\partial\vec{F}}{\partial\vec{u}}\left(\vec{u}_m, t_m\right)\right]\vec{w}_1 = \vec{F}\left(\vec{u}_m, t_m + \frac{\tau}{2}\right).$$

Такой подход к решению дифференциально-алгебраических систем применим не только в рассмотренном случае, но и в случае коэффициентов при производных $\frac{d}{dt}$, отличных от нуля и единицы. В таком случае итоговая схема примет более сложный вид (нельзя вынести переменную матрицу $D$ из-под знака производной), но останется справедливой и применимой для решения подобных систем.

## Задача о движении маятника

Теперь рассмотрим конкретный пример — задачу о движении маятника в поле тяжести при наличии жесткой связи с подвесом. Листинг программы для решения данной задачи приведен в материалах к лекции как «пример 8».

Будем считать, что маятник массой $m$ движется в поле тяжести $\vec{g}$, длина подвеса постоянна и равна $l = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, скорость маятника в начальный момент времени для простоты можно задать равной нулю. Запишем уравнения Лагранжа первого рода для данного маятника:

$$\begin{cases} m\ddot{\vec{r}} = m\vec{g} + \lambda grad\varphi\left(\vec{r}, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ 0 = \left|\vec{r}\right|^2 - l^2 \equiv \varphi\left(\vec{r}, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \vec{r}\left(t_0\right) = \left\{x_0, y_0\right\}, \\ \dot{\vec{r}}\left(t_0\right) = \left\{v_{x0}, v_{y0}\right\}. \end{cases} \tag{16.2}$$

Сведем систему (16.2) к системе первого порядка по времени:

$$\begin{cases} \dot{\vec{r}} = \vec{v}, \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \dot{\vec{v}} = \vec{g} + \dfrac{\lambda}{m} grad\varphi\left(\vec{r}, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ 0 = \left|\vec{r}\right|^2 - l^2 \equiv \varphi\left(\vec{r}, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \vec{r}\left(t_0\right) = \left\{x_0, y_0\right\}, \\ \vec{v}\left(t_0\right) = \left\{v_{x0}, v_{y0}\right\}, \end{cases}$$

теперь запишем в векторном виде:

$$\begin{cases} \dot{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}, \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \dot{\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} + \dfrac{\lambda}{m}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ 0 = x^2 + y^2 - l^2 \equiv \varphi\left(\vec{r}, t\right), \quad t \in \left(t_0, T\right], \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}\left(t_0\right) = \begin{pmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Теперь запишем покомпонентно:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_x, \\ \dot{y} = v_y, \\ \dot{v}_x = \dfrac{2\lambda x}{m}, \qquad\qquad t \in \left(t_0, T\right], \\ \dot{v}_y = -g + \dfrac{2\lambda y}{m}, \\ 0 = x^2 + y^2 - l^2, \\ x\left(t_0\right) = x_0, \\ y\left(t_0\right) = y_0, \\ v_x\left(t_0\right) = v_{x0}, \\ v_y\left(t_0\right) = v_{y0}. \end{cases}$$

Цель — свести данную систему уравнений к системе вида:

$$\begin{cases} D\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}\left(\vec{u}, t\right), \quad t \in (t_0, T], \\ \vec{u}\left(t_0\right) = \vec{u}_0. \end{cases}$$

Очевидно, что матрица $D$ будет иметь размерность 5, так как дифференциальных и алгебраических уравнений на данный момент 4 + 1. Однако, переменных на данный момент всего четыре. Поэтому возьмем в качестве пятой переменной неизвестную постоянную Лагранжа $\lambda$:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x = u\left[0\right] \\ y = u\left[1\right] \\ v_x = u\left[2\right] \\ v_y = u\left[3\right] \\ \lambda = u\left[4\right] \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Изначально предполагалось, что $\lambda$ — некоторая константа. Вводя $\lambda$ как функцию, мы получаем метод проверки точности решения — на достаточно подробной сетке с использованием подходящей численной схемы $\lambda$ будет оставаться примерно постоянным.

Необходимо также получить условие на $\lambda$ в момент времени $t_0$. Данное условие можно получить, выразив $\lambda$ из третьего, четвертого и пятого уравнений системы. Для этого сначала продифференцируем условие связи:

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0, \quad \Rightarrow \quad x\dot{x} + y\dot{y} = 0,$$

$$\dot{x}\dot{x} + x\ddot{x} + \dot{y}\dot{y} + y\ddot{y} = 0, \quad \Rightarrow \quad \left(v_x\right)^2 + x\left(\dot{v}_x\right) + \left(v_y\right)^2 + y\left(\dot{v}_y\right) = 0,$$

$$\left(v_{x0}\right)^2 + x_0\frac{2\lambda\left(t_0\right)x_0}{m} + \left(v_y\right)^2 + y_0\left(-g + \frac{2\lambda\left(t_0\right)y_0}{m}\right) = 0,$$

$$\lambda\left(t_0\right)\left(\frac{2}{m}\left(x_0^2 + y_0^2\right)\right) = y_0 g - v_{x0}^2 - v_{y0}^2,$$

таким образом, окончательно получаем условие на $\lambda\left(t\right)$ в начальный момент времени, которым нужно дополнить исходную систему уравнений:

$$\lambda\left(t_0\right) = \frac{y_0 g - v_{x0}^2 - v_{y0}^2}{2l^2}m.$$

## Численная реализация решения задачи

Укажем теперь структуру вектор-функции $\vec{F}$ в виде, удобном для реализации при численном моделировании:

$$\vec{f}\left(\vec{u}\right) = \begin{pmatrix} u\left[2\right] \\ u\left[3\right] \\ \frac{2u[4]u[0]}{m} \\ -g + \frac{2u[4]u[1]}{m} \\ u\left[0\right]^2 + u\left[1\right]^2 - l^2 \end{pmatrix}.$$

Теперь мы можем применить для решения данной системы стандартный подход:

$$\begin{cases} \vec{u}_{m+1} = \vec{u}_m + \tau Re \vec{\omega}_1, \quad m = \overline{0, M-1}, \\ \left[D - \alpha\tau \vec{f}_{\vec{u}}\left(\vec{u}_m\right)\right]\vec{\omega}_1 = \vec{f}\left(\vec{u}\right). \end{cases}$$

Выпишем также явно матрицу Якоби $\vec{f}_{\vec{u}}$:

$$\vec{f}_{\vec{u}} = \frac{\partial f^i}{\partial u^j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{2u[4]}{m} & 0 & 1 & 0 & \frac{2u[0]}{m} \\ 0 & \frac{2u[4]}{m} & 0 & 1 & \frac{2u[1]}{m} \\ 2u\left[0\right] & 2u\left[1\right] & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приложенный в материалах к лекции файл «Пример 8» реализует построенную на данной лекции схему решения с помощью различных численных схем.

# Лекция 17. Численная диагностика существования решения задачи Коши

## Постановка задачи для ОДУ 1-го порядка

Будем рассматривать для простоты следующую здачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, ранее рассматривавшуюся на первой и третьей лекциях настоящего курса:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u^2, \quad t \in (0, 2]\,, \\ u\,(0) = 1. \end{cases} \tag{17.1}$$

Для задачи (17.1) известно аналитическое решение:

$$u\,(t) = \frac{1}{1-t},$$

а также особенностью данной задачи Коши является тот факт, что решение существует лишь до момента $t = 1$, где $u\,(t) \to \infty$. См. рис. 17.1.

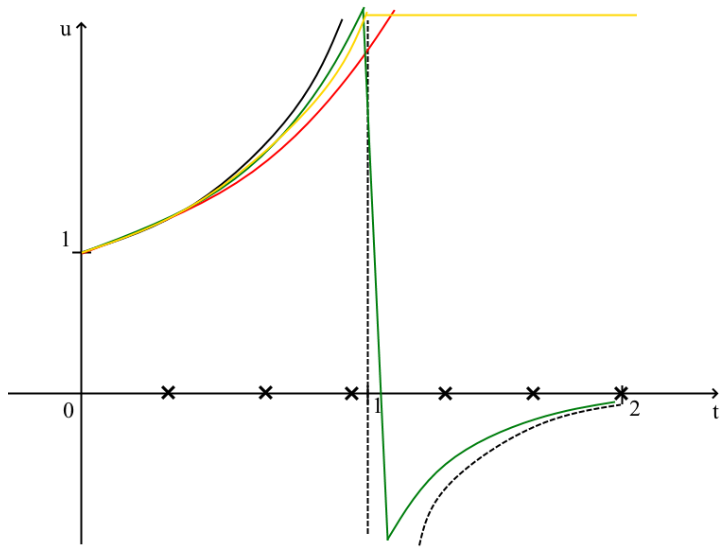


Рис. 17.1. Аналитическое решение задачи (17.1), а также несколько реализаций численного решения (качественно): явная схема — красная кривая, неявная схема и схема с полусуммой — зеленая кривая (с незначительными отлчиями), схема Розенброка с комплексным коэффициентом — желтая кривая.

## Проблема оценки существования решения

Априорным образом мы доказывали, что численное решение задачи (17.1) гарантированно существует до момента $t = \frac{1}{4}$, после чего продолжали итерационный процесс нахождения интервалов существования и в пределе получали интервал существования решения $t \in [0, 1)$. Для данной задачи мы можем получить аналитическое решение и сделать соответствующий вывод о существовании решения, а для реальных сложных задач обычно применимы лишь численные методы, поэтому такие априорные оценки проводить невозможно. Выпишем, например, семейство схем Розенброка в применении к данной задаче (17.1):

$$t_{m+1} = t_0 + \frac{T - t_0}{M} m, \quad \tau = \frac{T - t_0}{M}, \quad m = \overline{0, M},$$

$$\text{ROS1:} \quad u_{m+1} = u_m + \tau Re w_1, \quad m = \overline{0, M-1},$$

$$(1 - \alpha \tau f_u(u_m)) w_1 = f(u_m),$$

учитывая, что задача (17.1) — скалярная, можно выписать сразу явный вид схемы:

$$u_{m+1} = u_m + \tau Re \frac{u_m^2}{(1 - \alpha \tau 2 u_m)}, \quad m = \overline{0, M-1},$$

в зависимости от выбора значения $\alpha$ получаем различные варианты реализации одностадийных численных схем: явная схема Эйлера ($\alpha = 0$) — неустойчивая с первым порядком точности, схема с полусуммой ($\alpha = \frac{1}{2}$) — неустойчивая со вторым порядком точности, обратная схема Эйлера ($\alpha = 1$) — устойчивая с первым порядком точности, или схема Розенброка с комплексным коэффициентом ($\alpha = \frac{1+i}{2}$) — наиболее устойчивая и обладающая вторым порядком точности.

Для различных численных схем будем получать различный вид численного решения задачи (17.1), см. рис. 17.1. Вывод: численному решению не всегда можно доверять. Необходимо определять множество значений, на котором решение задачи гарантированно существует. В случае данного модельного примера (17.1) известно аналитическое решение, что позволяет оценивать существование решения априорно. В случае, если аналитическое решение неизвестно, такой метод неприменим. Необходимо разработать метод, позволяющий оценивать существование численного решения без использования априорных аналитических рассуждений.

**Замечание:** в реальных задачах физики величин, обращающихся в бесконечность, не бывает, поэтому тот факт, что решение задачи «перестает существовать», означает, что математическая модель не учитывает важные процессы, возникающие при физической реализации данной задачи, и потому модель для дальнейшего моделирования данного процесса должна быть пересмотрена и дополнена. Задача (17.1) может описывать, например. тепловыделение в химических реакциях. Функция $u(t)$, стремящаяся к бесконечности, означает бесконечное выделение энергии. Поэтому для разрешения данной проблемы необходимо дополнить модель, например, ограничениями на энерговыделение реакции.

## Формула Рунге-Ромберга

Еще раз рассмотрим задачу вида (17.1) в более общем виде:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f(u, t), \quad t \in (t_0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{17.2}$$

Допустим, мы построили численное решение данной задачи (17.2) с помощью некоторой численной схемы с порядком точности $p$ на заданной сетке. Порядок точности $p$ означает, что численная схема абсолютно точно передает $p$ членов разложения в ряд Тейлора точного решения. Запишем следующее:

$$u\left(t\right) = u^{(M)}\left(t\right) + O\left(\tau^p\right), \tag{17.3}$$

где введено новое обозначение: $u^{(M)}$ — численное решение задачи (17.2) на сетке с числом узлов $M$. Распишем главный член погрешности в выражении (17.3):

$$u\left(t\right) = u^{(M)}\left(t\right) + c\left(t\right)\tau^p + O\left(\tau^{p+1}\right).$$

Далее, предполагая число узлов сетки достаточно большим, $\tau$ — мало, пренебрежем членом $O\left(\tau^{p+1}\right)$. Тогда мы получаем уравнение в каждый момент времени $t$, в котором содержится две неизвестных величины — $u\left(t\right), c\left(t\right)$. Получим второе аналогичное уравнение, сгустив сетку в $r$ раз:

$$u\left(t\right) = u^{(rM)}\left(t\right) + c\left(t\right)\left(\frac{\tau}{r}\right)^p + O\left(\left(\frac{\tau}{r}\right)^{p+1}\right) = u^{(rM)}\left(t\right) + R^{(rM)}\left(t\right) + O\left(\left(\frac{\tau}{r}\right)^{p+1}\right). \tag{17.4}$$

Теперь вычтем из (17.4) (17.3):

$$0 = u^{(rM)}\left(t\right) - u^{(M)}\left(t\right) + c\left(t\right)\tau^p\left(\frac{1}{r^p} - 1\right) + O\left(\tau^{p+1}\right),$$

после чего выразим $c\left(t\right)$:

$$c\left(t\right) = \frac{u^{(rM)}\left(t\right) - u^{(M)}\left(t\right)}{r^p - 1}\left(\frac{r}{\tau}\right)^p + O\left(\tau^1\right),$$

и подставим полученное выражение в (17.4), получив тем самым выражение для главного члена погрешности:

$$R^{(rM)}\left(t\right) = \frac{u^{(rM)}\left(t\right) - u^{(M)}\left(t\right)}{r^p - 1} + O\left(\tau^{p+1}\right). \tag{17.5}$$

Теперь подставим (17.5) в (17.4):

$$u\left(t\right) = u^{(rM)}\left(t\right) + \frac{u^{(rM)}\left(t\right) - u^{(M)}\left(t\right)}{r^p - 1} + O\left(\tau^{p+1}\right). \tag{17.6}$$

В литературе формулу (17.6) обычно выписывают в виде:

$$R^{(rM)}\left(t\right) = \frac{u^{(rM)}\left(t\right) - u^{(M)}\left(t\right)}{r^p - 1}, \tag{17.7}$$

опуская $O\left(\tau^{p+1}\right)$. Данная формула (17.7) называется формулой Рунге-Ромберга и задает апостериорную асимптотически точную оценку погрешности. Данная оценка является асимптотически точной, потому что при стремлении $\tau$ к нулю даваемая оценка погрешности все более точно передает истинное значение погрешности.

Оценка является апостериорной, потому что при ее выводе не используется никаких априорных суждений о решении задачи, используются лишь уже полученные (в приложении к конкретной задаче) сеточные решения.

Формула (17.7) при подстановке в (17.6) позволяет давать оценку точного решения с более высоким порядком точности, чем порядок точности используемой схемы, потому как формула (17.6) фактически передает еще один член разложения точного решения в ряд Тейлора.

## Эффективный порядок точности

Теперь сгустим сетку еще в $r$ раз, тогда в дополнение к формуле (17.7) получим:

$$R^{\left(r^2M\right)}(t) = \frac{u^{\left(r^2M\right)}(t) - u^{(rM)}(t)}{r^p - 1}. \tag{17.8}$$

Разделим (17.7) на (17.8):

$$\frac{R^{(rM)}(t)}{R^{(r^2M)}(t)} = r^p \quad \Rightarrow \quad p^{eff}(t) = \log_r \frac{\left|R^{(rM)}(t)\right|}{\left|R^{(r^2M)}(t)\right|}. \tag{17.9}$$

Тогда, если оценки $R^{\left(r^2M\right)}(t), R^{(rM)}(t)$ сделаны точно ($\tau \to 0$), то формула (17.9) всегда дает значение порядка точности, совпадающее с порядком точности схемы. Однако, если $\tau$ фиксировано, то порядок точности по формуле (17.9) будет отличаться от теоретического порядка точности численной схемы. Поэтому вводится понятие эффективного порядка точности, определяемого по формуле (17.9). Чем ближе эффективный порядок точности к теоретическому порядку точности, тем лучше $R^{(rM)}(t)$ передает значение погрешности, и потому, сравнивая эффектный порядок точности с ожидемым, можно оценивать качество численного решения и при необходимости продолжать сгущение сетки до получения удовлетворительного результата.

Введем еще одно обозначение: $u_{(s)}(t) \equiv u^{\left(r^{s-1}M\right)}(t)$, и перепишем формулу (17.9):

$$p_{(s)}^{eff}(t_m) = \log_r \frac{\left|u_{(s-1)}(t_m) - u_{(s-2)}(t_m)\right|}{\left|u_{(s)}(t_m) - u_{(s-1)}(t_m)\right|}. \tag{17.10}$$

Формула (17.10) применима как минимум при расчете на трех последовательно сгущенных сетках. В результате можно составить итерационный процесс: определяется базовое число узлов сетки $M$, определяется число сгущений $s$, после чего рассчитывются решения и оценивается порядок точности по (17.10). В результате можно построить график $p_{(s)}^{eff}(t)$: см. рис. 17.2.

Интерпретация зависимости $p_{(s)}^{eff}(t)$ в приведенном случае следующая: теоретический порядок точности численно равен числу членов разложения в ряд Тейлора, которое может передать схема. Эффективный порядок точности численно равен тому числу членов разложения в ряд Тейлора, которое схема смогла передать в приложении к данной задаче. В момент времени, когда эффективный порядок точности становится меньше нуля, численная схема перестает передавать члены разложения в ряд Тейлора. Наиболее вероятное объяснение данного эффекта — решение исходной задачи перестало существовать.

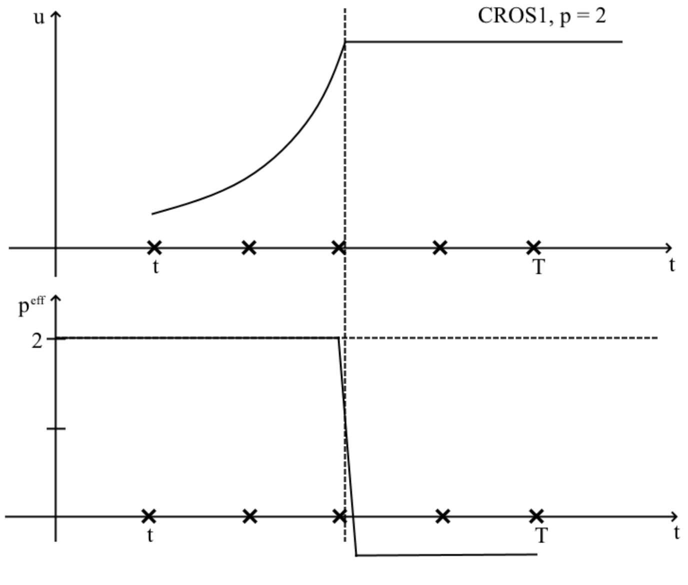


Рис. 17.2. Решение некоторой задачи вида (17.2) и график для порядка точности по формуле (17.10). Теоретический порядок точности численной схемы принят равным $p = 2$.

Таким образом, оценка эффективного порядка точности позволяет апостериорно оценивать существование решения задачи. В тех узлах численной сетки, где эффективный порядок точности стремится к теоретическому (или превышает его, так как численная схема при определенных условиях может давать большее число членов разложения) — решение существует, численному решению можно доверять. В тех узлах, где эффективный порядок точности становится меньше нуля — решение не существует. В случае, если эффективный порядок точности оказывается меньше ожидаемого теоретического, но больше нуля — решение существует, но не обладает достаточной гладкостью (численная схема не передает соответствующие члены разложения в ряд Тейлора, так как соответствующие производные функции не определены).

В материалах к лекции на портале teach-in находятся листинги программ: «пример 9» реализует решение тестовой задачи (17.1) с помощью различных одностадийных численных схем, «пример 10» строит эффективный порядок точности для данной задачи (17.1).

ФИЗИЧЕСКИЙ
ФАКУЛЬТЕТ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ