2.4 Уравнение поверхности в пространстве. Уравнение плоскости в пространстве

Пусть в (аффинном) пространстве V^3 задана декартова система координат $OXYZ \sim \sim \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и некоторая поверхность S.

Определение 2.10. Говорим что в системе $OXYZ$ уравнение $F(x, y, z) = 0$ есть уравнение поверхности S и пишем: $S\colon F(x, y, z) = 0$, если координаты любой точки $M(x, y, z) \in S$ удовлетворяют данному уравнению и обратно – любое решение этого уравнения, интерпретируемое как точка в пространстве, лежит на S.

Если уравнение $F(x, y, z) = 0$ имеет вид $S\colon a_{p_1 q_1 m_1} x^{p_1} y^{q_1} z^{m_1} + \ldots + a_{p_s q_s m_s} x^{p_s} y^{q_s} z^{m_s} = 0$, где $p_1, \ldots, p_s$, $q_1, \ldots, q_s$, $m_1, \ldots, m_s$ целые неотрицательные числа, то говорим, что S есть АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ поверхность, а число $m = \max\{p_1 + q_1 + m_1, \ldots, p_s + q_s + m_s\}$ называем ПОРЯДКОМ или степенью алгебраической поверхности S.

Например

(1) $S\colon 3x^2y + z^4 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2y^1z^0 + x^0y^0z^4 - 3x^0y^0z^0 = 0$ есть алгебраическая поверхность порядка $m = \max\{2+1+0, 0+0+4, 0+0+0\} = 4$ – четвертого порядка;

(2) $S\colon x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ (уравнение сферы радиуса 1) есть алгебраическая поверхность 2-ого порядка;

(3) Уравнение поверхности первого порядка есть:

$S\colon a_{100}x^1y^0z^0 + a_{010}x^0y^1z^0 + a_{001}x^0y^0z^1 + a_{000}x^0y^0z^0 = 0$

будем записывать в виде:

$S\colon Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ (!)

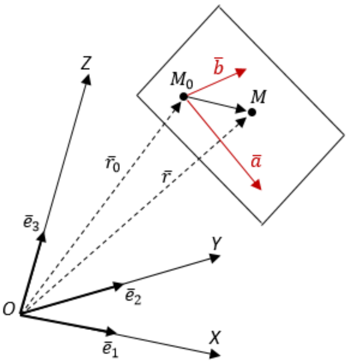
Аналогично теореме об инвариантности алгебраической линии на плоскости и её порядка, здесь имеет место теорема:

Теорема 2.3. Такие характеристики поверхности как её алгебраичность и порядок алгебраической поверхности НЕ ЗАВИСЯТ от системы координат, в которой записано уравнение поверхности.

ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

Если в качестве поверхности рассматривать плоскость, что эту поверхность традиционно обозначаем греческими буквами.

Пусть в пространстве задана плоскость π. Зафиксируем в пространстве репер (систему координат): $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \sim OXYZ$. На плоскости зададим точку $M_0 \in \pi$ и два неколлинеарных вектора $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ (см. рис.). Пусть их координаты в $OXYZ$ есть: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b}\{b_1, b_2, b_3\}$. Пусть точка $M(x, y, z)$ ПРОИЗВОДНАЯ точка на плоскости: $M \in \pi$.



Т.к $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ можно рассматривать как базис на плоскости π. Тогда вектор $\overline{M_0M}$ можно разложить по этому базису. Пусть t_1, t_2 – коэффициенты этого разложения:

$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t_1\bar{a} + t_2\bar{b} \text{ – векторно-параметрическое уравнение плоскости.}$$

Если перейти к покоординатной записи, то:

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= t_1 a_1 + t_2 b_1 \\ y - y_0 &= t_1 a_2 + t_2 b_2 \\ z - z_0 &= t_1 a_3 + t_2 b_3 \end{aligned}\right\} \text{ – параметрическое уравнение плоскости.}$$

Для последующей записи уравнения плоскости будем опираться на следующий очевидный факт: $M \in \pi \Leftrightarrow$ векторы $\bar{r}-\bar{r}_0$, $\bar{a}$, $\bar{b}$ компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение $(\bar{r}-\bar{r}_0, \bar{a}, \bar{b}) = 0$. По формуле смешанного произведения в координатах (см. стр. 28) это равносильно

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Формула $(*)$ это уравнение плоскости π, проходящий через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной векторам $\bar{a}$, $\bar{b}$ ($\bar{a} \nparallel \bar{b}$!).

Теорема 2.4. В произвольной системе координат $OXYZ$ плоскость задаётся линейным уравнением:

$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \end{array}\right\} \quad (1)$$

И обратно, уравнение (1) определяет плоскость в пространстве.

Доказательство. 1° Необходимость. Покажем, что уравнение плоскости есть линейное уравнение. Для этого разложим определитель в $(*)$ по первой строке:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}(x-x_0) + (-1)\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}(y-y_0) + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}(z-z_0) =$$

вводим обозначения $A = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ и продолжаем:

$= Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) = 0$

или, обозначая $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим $Ax + By + Cz + D = 0$.

Это равенство доказывает, что координаты точки $M(x, y, z) \in \pi$ удовлетворяют последнему уравнению. Покажем далее, что это есть линейное уравнение, т.е. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Для этого используем следующий приём: наряду с базисом $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ рассмотрим ортонормированный базис $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ и в нём определим два вектора $\bar{a}'$, $\bar{b}'$ с теми же координатами, что и векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{a}' = \{a_1, a_2, a_3\} \\ \bar{b}' = \{b_1, b_2, b_3\} \end{array}\right\} \text{ в базисе } \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$$

Т.к. $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то координаты этих векторов НЕ пропорциональны и $\bar{a}' \nparallel \bar{b}'$ откуда следует $[\bar{a}', \bar{b}'] \neq 0$ (критерий коллинеарности).

По формуле векторного произведения в ортонормированном базисе (см. стр. 28)

$$[\bar{a}', \bar{b}'] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\} = \{A, B, C\}$$

Т.к. $[\bar{a}', \bar{b}'] \neq 0$, то $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Итак доказано, что уравнение плоскости есть линейное уравнение:

$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \end{array}\right\} \quad (1)$$

2° Достаточность. Покажем, что линейное уравнение (1) определит плоскость в пространстве. Т.к. $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, то не нарушая общности положим, что $A \neq 0$. Рассмотрим в пространстве точку $M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$ и определим два вектора $\bar{a} = \{-B, A, 0\}$, $\bar{b} = \{-C, 0, A\}$.

Координаты векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ не пропорциональны, следовательно $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Запишем уравнение плоскости (*), проходящей через точку M_0 и параллельной векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\begin{vmatrix} x+\dfrac{D}{A} & y & z \\ -B & A & 0 \\ -C & 0 & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{vmatrix}\left(x+\frac{D}{A}\right) - \begin{vmatrix} -B & 0 \\ -C & A \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} -B & A \\ -C & 0 \end{vmatrix} z = A^2x + ABy + ACz + AD = 0$$

Так как $A \neq 0$, то на него можно разделить. Получаем уравнение

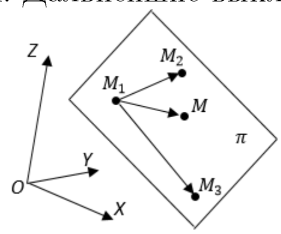
$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \end{array}\right\}$$

Тем самым показано, что совокупность всех решений уравнения (1) есть плоскость π, проходящая через $M_0\left(-\dfrac{D}{A}, 0, 0\right)$ и параллельная векторам $\bar{a}\{-B, A, 0\}$ и $\bar{b}\{-C, 0, A\}$. □

Следствие 2.3. Получено полное описание всех алгебраических поверхностей первого порядка – это плоскости и только они.

Определение 2.11. Линейное уравнение (1) также называем ОБЩИМ уравнением плоскости.

Пусть плоскость π проходит через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежащих на одной прямой. Получим уравнение такой плоскости. Дальнейшие выкладки практически копируют вывод уравнения (*). Рассмотрим три вектора



$\overline{M_1M} = \{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$,

$\overline{M_1M_2} = \{x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1\}$,

$\overline{M_1M_3} = \{x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1\}$,

где $M(x, y, z)$ произвольная точка на плоскости π: $M \in \pi$.

Очевидный факт: $M \in \pi \Leftrightarrow$ векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ компланарны $\Leftrightarrow$ смешанное произведение $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ – уравнение плоскости «через три точки»}$$

Собираем полученные уравнения в один список:

$$\left.\begin{array}{c} Ax+By+Cz+D=0 \\ (A^2+B^2+C^2 \neq 0) \end{array}\right\} \quad \text{(1) – общее уравнение плоскости}$$

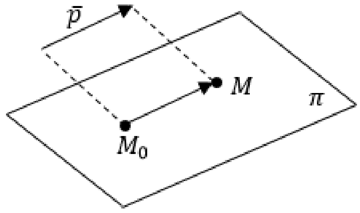
$$\bar{r} - \bar{r}_0 = t_1\bar{a} + t_2\bar{b} \quad \text{(2) –} \left\{\begin{array}{c} \text{векторно-параметрическое} \\ \text{уравнение плоскости} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} x-x_0 = t_1a_1 + t_2b_1 \\ y-y_0 = t_1a_2 + t_2b_2 \\ z-z_0 = t_1a_3 + t_2b_3 \end{array}\right\} \quad \text{(3) – параметрическое уравнение плоскости.}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(4) – уравнение плоскости «через три точки»}$$

Взаиморасположение плоскостей в пространстве

Обозначим за $\bar{p} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ любой вектор параллельный плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$.



Лемма 2.1. $\bar{p} \parallel \pi \Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0$.

Доказательство. Пусть $\bar{p} = \overline{M_0M}$, где $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $M(x_1, y_1, z_1)$ (см. рис.). Тогда $\bar{p} = \{x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\} \Rightarrow \alpha = x_1 - x_0$, $\beta = y_1 - y_0$, $\gamma = z_1 - z_0$. Поскольку точка $M_0 \in \pi$ и $M \in \pi$, то

$$\begin{array}{l} Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \end{array} \Leftrightarrow A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0) = 0 \Leftrightarrow A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \quad \square$$

Пусть в пространстве заданы две плоскости:
$\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
Следующий результат есть аналог теоремы о взаиморасположении прямых на плоскости (стр. 41).

Теорема 2.5 (О взаиморасположении двух плоскостей).

1° $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

2° $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

3° Плоскости пересекаются (по прямой) $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ и/или $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ и/или $\dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$

Замечание 2.7. В теореме будем доказывать пункты 1° и 2°, т.к. 3° сразу следует из 1°, 2°.

Доказательство. При доказательстве выделим два пункта.

(а) Докажем, во-первых, что $\pi_1 \parallel \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. В уравнении плоскости π_1 хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля ($A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \neq 0$). Не нарушая общности предположим, что $A_1 \neq 0$. Вводим два вектора $\bar{a}\{-B_1, A_1, 0\}$ и $\bar{b}\{-C_1, 0, A_1\}$. Их координаты удовлетворяют лемме 2.1:
$A_1(-B_1) + B_1A_1 + C_1 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \bar{a} \parallel \pi_1$
$A_1(-C_1) + B_1 \cdot 0 + C_1A_1 = 0 \Rightarrow \bar{b} \parallel \pi_1$
Если $\pi_1 \parallel \pi_2$ или $\pi_1 = \pi_2$, то $\bar{a}, \bar{b} \parallel \pi_2$ и по лемме 2.1 это равносильно

$$\begin{array}{l} A_2(-B_1) + B_2A_1 + C_2 \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow B_2A_1 = A_2B_1 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \\ A_2(-C_1) + B_2 \cdot 0 + C_2A_1 = 0 \Leftrightarrow C_2A_1 = A_2C_1 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{C_1}{C_2} \end{array} \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}.$$

(в) Обозначим $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda \Rightarrow A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$ и уравнения плоскостей π_1, π_2 принимают вид
$\pi_1\colon \lambda A_2x + \lambda B_2y + \lambda C_2z + D_1 = 0$
$\pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
Рассмотрим систему

$$\left.\begin{array}{r} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \lambda A_2x + \lambda B_2y + \lambda C_2z + D_1 = 0 \end{array}\right\}$$

которую решаем по Гауссу: 1-е уравнение умножаем на $(-\lambda)$ и прибавляем ко 2-му:

$$\left.\begin{array}{r} A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ D_1 - \lambda D_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Если $\pi_1 \parallel \pi_2$, то система не имеет решений и это равносильно $\dfrac{D_1}{D_2} \neq \lambda = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

Если $\pi_1 = \pi_2$, то система имеет ∞ решений и это равносильно $\dfrac{D_1}{D_2} = \lambda = \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$. $\square$

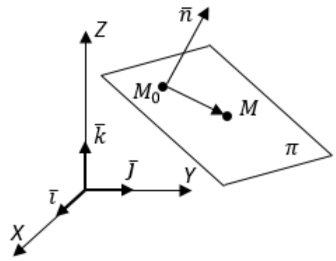
Уравнение плоскости в ПРЯМОУГОЛЬНОЙ системе $OXYZ \sim \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$

Определение 2.12. Вектор $\bar{n} \neq \bar{0}$ называем вектором НОРМАЛИ к плоскости π, если $\bar{n} \perp \pi$.

Очевидно, что любой вектор $\bar{n}' \neq \bar{0}$ такой, что $\bar{n}' \parallel \bar{n}$ также является вектором нормали. Из критерия коллинеарности $\bar{n}' \parallel \bar{n}$ следует $\bar{n}' = \lambda\bar{n}$, где $\lambda \neq 0$. Поэтому любой вектор нормали определен с точностью до константы.

Основным результатом здесь будет следующее

Утверждение 2.2. В *прямоугольной* системе $OXYZ \sim \{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ для плоскости, заданной общим уравнением $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ вектор $\bar{n} = \{A, B, C\}$ есть вектор нормали.



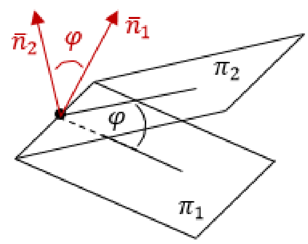
Доказательство.
Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$
$\Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ $(*)$
Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z) \in \pi \Rightarrow$
$Ax + By + Cz + D = 0$ $(**)$
Согласно критерию ортогональности векторов $\bar{n} \perp \overline{M_0M} \Leftrightarrow$
$(\bar{n}, \overline{M_0M}) = 0$. Т.к. $\bar{n} = \{A, B, C\}$, $\overline{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$
и $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ ортонормированный базис, то скалярное произведение есть сумма произведений одноименных координат:

$(\bar{n}, \overline{M_0M}) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = Ax + By + Cz + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0) =$ согласно $(*)$ $= Ax + By + Cz + D =$ согласно $(**)$ $= 0 \Rightarrow \bar{n} \perp \overline{M_0M}$. □

В прямоугольной системе координат многие формулы принимают наиболее простой вид. Рассмотрим здесь две задачи.

Задача 1

Получить формулу угла между плоскостями.



Решение

Пусть даны две плоскости $\pi_1 \nparallel \pi_2$ общими уравнениями
$\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$
$\pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$
и их векторы нормалей есть:
$\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ и $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$.

По определению угол φ между плоскостями с точностью до дополнительного угла равен углу между нормалями и

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

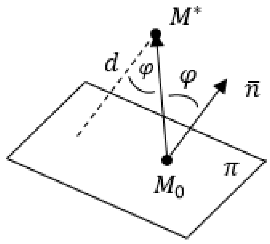
Следствие 2.4. (Критерий перпендикулярности плоскостей)

$$\pi_1 \perp \pi_2 \;\Leftrightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Задача 2

Найти расстояние от точки $M^*(x^*, y^*, z^*)$, до плоскости $\pi\colon Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение



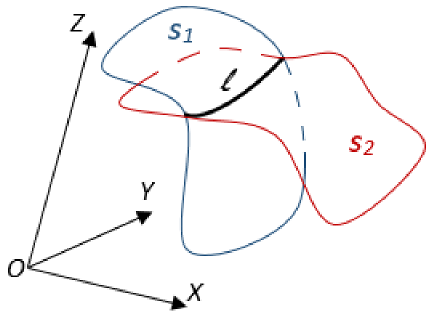
Рассмотрим на плоскости π некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Искомое расстояние d есть: $d = |M_0M^* \cos\varphi| = \dfrac{|(\overline{M_0M^*}, \bar{n})|}{|\bar{n}|}$.

Т.к. $\overline{M_0M^*} = \{x^* - x_0, y^* - y_0, z^* - z_0\}$, то

$$d = \frac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2.5 Задание линии в пространстве. Уравнение прямой в пространстве



Пусть в системе $OXYZ$ поверхности заданы уравнениями
$s_1\colon F_1(x, y, z) = 0$,
$s_2\colon F_2(x, y, z) = 0$.

Если $l = s_1 \cap s_2$ есть линия пересечения этих плоскостей (см. рис.), то её уравнение:

$$l\colon \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Пусть $s_1 = \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и
$s_2 = \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть две плоскости. Если $\pi_1 \nparallel \pi_2$, то $l = \pi_1 \cap \pi_2$ есть прямая в пространстве. По доказанному ранее:

$$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ и/или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ и/или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \qquad (*)$$

Неравенство $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ выполнено тогда и только тогда, когда $A_1B_2 \neq A_2B_1$, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Аналогично, два последующих неравенства $(*)$ можно задать как $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Группу неравенств $(*)$ можно задать одним неравенством:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

Из свойств определителей $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}$, следовательно, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2$ и последнее неравенство нам будет удобно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0 \qquad (**)$$

Таким образом, уравнение прямой в пространстве можно задать как

$$l\colon \begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0 \ (\pi_1 \nparallel \pi_2) \end{cases} \qquad (1)$$