

Вопросы по математическому анализу

2 семестр

Национальный исследовательский
Нижегородский Государственный Университет
имени Н.И. Лобачевского

Высшая Школа Общей и Прикладной Физики

Последнее обновление: 19 февраля 2024 г.

1. Несобственные интегралы 1-го и 2-го рода (определения, примеры).
2. Основные свойства несобственных интегралов.
3. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
4. Критерий сходимости несобственного интеграла от положительной функции.
5. Признаки сравнения для несобственных интегралов от положительных функций.
6. Признак Абеля сходимости несобственных интегралов.
7. Признак Дирихле сходимости несобственных интегралов.
8. Пространство \mathbb{R}^n : основные определения и свойства операций.
9. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.
10. Метрические пространства (определения и примеры).
11. Последовательности и пределы в метрических пространствах.
12. Множества в метрическом пространстве (открытые, замкнутые).
13. Точки (внутренние, внешние, предельные, граничные) множеств в метрическом пространстве.
14. Компактные множества в метрических пространствах. Необходимое условие компактности.
15. Критерий компактности в \mathbb{R}^n .

16. Функции на метрических пространствах, непрерывность, различные эквивалентные определения.
17. Образ компактного множества при непрерывном отображении. Обобщение 1-й и 2-й теоремы Вейерштрасса.
18. Равномерная непрерывность. Обобщение теоремы Кантора для непрерывной функции на компакте.
19. Связность, линейная связность. Образ связного множества при непрерывном отображении.
20. Покоординатная сходимости в \mathbb{R}^n .
20. Дифференцируемость функций нескольких переменных, определение оператора дифференцирования.
21. Частные производные. Матрица Якоби. Производная по направлению и градиент.
22. Необходимые условия дифференцируемости (непрерывность; существование частных производных).
23. Линии уровня функции, связь с градиентом.
24. Свойства дифференцируемых функций. Действия с ними.
25. Нормированные пространства (определение и примеры). Норма линейного оператора.
26. Теорема о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций.
27. Следствия из теоремы о дифференцируемости композиции. Инвариантность формы 1-го дифференциала.
28. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.
29. Касательная плоскость и её уравнение.
30. Производные высших порядков. Совпадение смешанных частных производных.
31. Дифференциалы высших порядков и их вычисление. Неинвариантность формы второго дифференциала.
32. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
33. Экстремумы функции нескольких переменных, необходимое условие экстремума.
34. Достаточные условия экстремума.

35. Теорема о неявной функции в случае, определяющем функцию одной переменной.
36. Теорема о неявной функции в случае, определяющем функцию нескольких переменных.
37. Теорема о неявной функции в общем (многомерном) случае отображения.
38. Теорема об обратной функции.
39. Замена переменных; полярные и сферические координаты.
40. Условные экстремумы: необходимое условие, примеры,
41. Метод множителей Лагранжа для условного экстремума.
42. Ряды с постоянными членами: частичные суммы и остаток ряда, критерий сходимости Коши, необходимое условие сходимости.
43. Арифметические свойства сходящихся рядов. Геометрическая прогрессия и её сумма.
44. Критерий сходимости положительного ряда.
45. Первый признак сравнения (через неравенства) для положительного ряда.
46. Второй признак сравнения (через пределы) для положительного ряда
47. Признак сходимости Коши для положительного ряда.
48. Признак сходимости Даламбера для положительного ряда.
49. Интегральный признак сходимости.
50. Гармонический и обобщенный гармонический ряды.
51. Признак Раабе и признак Гаусса.
52. Абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
53. Признак Лейбница.
54. Преобразование Абеля. Признак Абеля.
55. Признак Дирихле. Пример ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin x}{n^\alpha}$.
56. Ассоциативность и перестановки членов сходящегося ряда. Теорема Римана.
57. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши.

58. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Примеры.
59. Признаки Абеля и Дирихле равномерной сходимости.
60. Равномерная сходимость и непрерывность.
61. Теорема (признак) Дини (достаточное условие равномерной сходимости).
62. Равномерная сходимость и интегрирование .
63. Равномерная сходимость и дифференцирование.
64. Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда (теорема об интервале сходимости).
65. Формула Коши Адамара.
66. Функциональные свойства суммы степенного ряда.
67. Теорема Абеля о поведении степенного ряда на границе интервала сходимости.
68. Разложение функций в степенной ряд. Необходимое условие разложения.
69. Достаточное условие разложения в ряд Тейлора .
70. Разложение в ряд Тейлора функций: $y = e^x, \sin(x), \cos(x)$.
71. Разложение в ряд Тейлора функции $y = (1 + x)^a$.
72. Разложение в ряд Тейлора функций: $y = \ln(1 + x), \arctg(x)$.
73. Равномерная сходимость семейства функций: определение, критерий Коши
74. Непрерывные свойства предела равномерно сходящегося семейства функций
75. Теорема Дини.
76. Переход к пределу под знаком интеграла для семейства функций
77. Перестановка интегралов для семейства функций
78. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла.
79. Дифференцирование по параметру под знаком интеграла с переменными пределами интегрирования.
80. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Аналог теоремы Вейерштрасса⁸⁴. Аналог признаков Абеля-Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов

81. Переход к пределу для семейства несобственных интегралов
82. Дифференцирование несобственных интегралов по параметру
83. Перестановка несобственных интегралов
84. В-функция и ее свойства.
85. Г-функция и ее свойства: график Г-функции, связь В- и Г- функций, формула дополнения
86. Ряды Фурье. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье
87. Ряды Фурье в евклидовом пространстве. Оптимальность ряда Фурье.
88. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля.
89. Различные типы сходимости тригонометрического ряда Фурье (сходимость в среднем квадратическом, поточечная и равномерная сходимость)
90. Теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывной функции полиномами. Полнота тригонометрической системы функций.
91. Некоторые достаточные условия сходимости тригонометрического ряда Фурье
92. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Примеры.