

Лабораторная работа

«Волны в волноводах»

Горячев С., Можаров А.

11 июня 2025 г.

Теоретическая часть

В данной работе рассматриваются волноводы (прямоугольные, круглые и др.), теория которых основана на уравнениях Максвелла, а не телеграфных.

Их ключевая особенность — наличие критической длины волны ($\lambda < \lambda_{кр}$), зависящей от поперечных размеров ($ka \geq 1$), что определяет применение в сантиметровом/миллиметровом диапазонах для компактности. В таких волноводах распространяются волны с продольной компонентой поля, обладающие дисперсией и фазовой скоростью, превышающей скорость света ($v_{ф} > c$).

Цель работы: исследование поля волны в прямоугольном металлическом волноводе.

Собственные функции Φ и поперечное волновое число k_{\perp} определяются из уравнения:

$$\Delta_{\perp} \Phi + k_{\perp}^2 \Phi = 0, \quad \text{где} \quad \Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Волны могут быть классифицированы на:

1. ТЕ (Н-волны):

$$E_z = 0, H_z \neq 0, \Phi = H_z, \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$$

2. ТМ (Е-волны):

$$E_z \neq 0, H_z = 0, \Phi = E_z, \Phi = 0$$

Решение уравнения $\Delta_{\perp} \Phi + k_{\perp}^2 \Phi = 0$ ищется методом разделения переменных: $\Phi = X(x)Y(y)$. Подстановка в уравнение даёт:

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + k_{\perp}^2 = 0.$$

Разделение на константы:

$$\frac{X''}{X} = -k_x^2, \quad \frac{Y''}{Y} = -k_y^2, \quad k_{\perp} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Решения уравнений:

$$X = C_1 \cos(k_x x) + C_2 \sin(k_x x), \quad Y = C_3 \cos(k_y y) + C_4 \sin(k_y y).$$

Вопросы

1. Если существует волна H_{10} , то существует ли волна E_{10} ?

Волна E_{10} в прямоугольном волноводе не существует, потому что для ТМ-волн (Е-волн) оба индекса m и n должны быть ≥ 1 . При $n = 0$ поле E_z тождественно равно нулю, что исключает распространение волны.

Волна H_{10} существует — это основной тип волны в прямоугольном волноводе, где допустимо $n = 0$, так как у ТЕ-волн (Н-волн) H_z не обязана обращаться в ноль на стенках.

Минимальные ТМ-волны: E_{11} , E_{21} и т. д.

2. Доказательство соотношения $v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = c^2$ для волновода:

Способ 1 (на основе дисперсионного соотношения):

Фазовая $v_{\text{ф}}$ и групповая $v_{\text{гр}}$ скорости:

$$v_{\text{ф}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}}, \quad v_{\text{гр}} = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}.$$

Тогда:

$$v_{\text{ф}} \cdot v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}} \cdot c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2} = c^2.$$

Способ 2 (через вектор Умова-Пойнтинга и энергию):

Плотность энергии:

$$w = \frac{1}{2} (\varepsilon_0 \langle E^2 \rangle + \mu_0 \langle H^2 \rangle).$$

Поток энергии:

$$S_z = w \cdot v_{\text{гр}}.$$

Фазовая скорость:

$$v_{\text{ф}} = \frac{w \cdot c^2}{S_z}.$$

Подстановка:

$$v_{\text{ф}} v_{\text{гр}} = \frac{w \cdot c^2}{w} = c^2.$$

Практическая часть

Исследование волн в докритическом волноводе

Частота: 26.863 Гц. Установлена «самосогласованная» нагрузка. Данные приведены в таблице 1. График зависимости E от Z представлен на рис. 1.

Расчет омических потерь

Частота: 26.3 Гц. Данные приведены в таблице 2. График зависимости представлен на рис. 2.

Частота: 25.68 Гц. Данные приведены в таблице 3. График зависимости представлен на рис. 3.

Таблица 1: Зависимость напряжённости поля E от координаты Z											
Z , мм	3	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
E , мВ	16.4	16.2	16.2	17	17.8	18.6	19	19.4	20.4	23.6	24.4
Z , мм	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5	5.1
E , мВ	24.1	24.2	25.4	25.8	26.2	26.4	26.6	26.8	26.6	26.4	26
Z , мм	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6	6.1	6.2
E , мВ	25.6	25.2	25	24.4	23.8	23.2	22.4	21.6	20.8	19.8	19
Z , мм	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7	7.1	7.2	7.3
E , мВ	18	17	15.6	14.8	13.8	12.6	11.8	10.8	9.8	8.6	8.4
Z , мм	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8	8.1	8.2	8.3	8.4
E , мВ	6.8	6.2	5.28	4.4	3.76	3.12	2.48	1.92	1.44	1.12	0.72
Z , мм	8.5	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6				
E , мВ	0.48	0.64	0.8	0.96	1.28	1.84	2.16				

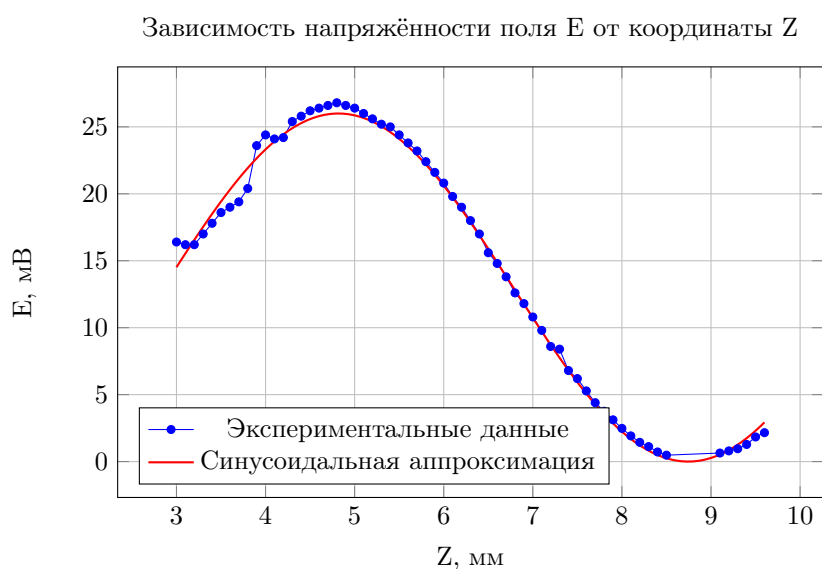


Рис. 1: График зависимости напряжённости поля E от координаты Z при частоте 26.863 Гц

Таблица 2: Зависимость мощности от количества волноводов

Мощность	Кол-во волноводов
1.2	0
1.1	1
0.56	2

Таблица 3: Зависимость мощности от количества волноводов

Мощность	Кол-во волноводов
1.29	0
1.07	1
0.85	2

Зависимость мощности от количества волноводов (26.3 Гц)

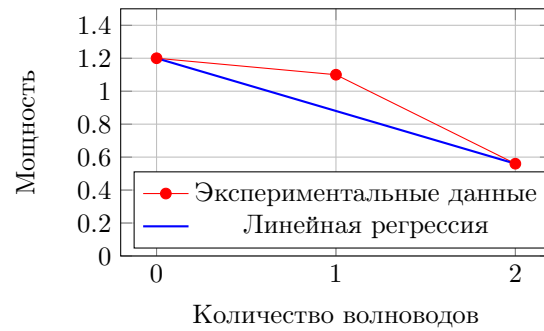


Рис. 2: График зависимости мощности от количества волноводов при частоте 26.3 Гц

Зависимость мощности от количества волноводов (25.68 Гц)

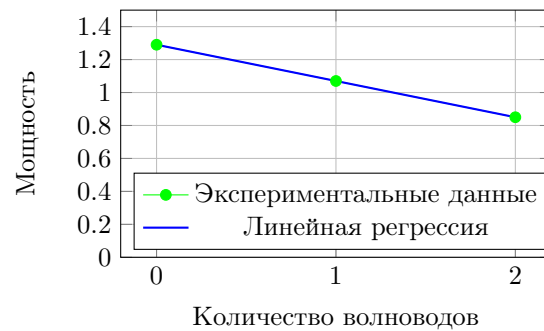


Рис. 3: График зависимости мощности от количества волноводов при частоте 25.68 Гц