Доказательство. Пусть даны векторы $\bar a, \bar b, \bar c$. Выберем базис $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ так, чтобы $\bar i \parallel \bar b$, $\bar j$ находится в плоскости векторов $\bar b$ и $\bar c$ (рис. 19). Тогда:

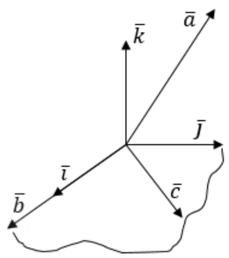

рис. 19

$$\left.\begin{array}{l} \bar b = \beta_1 \bar i \\ \bar c = \gamma_1 \bar i + \gamma_2 \bar j \\ \bar a = \alpha_1 \bar i + \alpha_2 \bar j + \alpha_3 \bar k \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \bar a = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \\ \bar b = \{\beta_1, 0, 0\} \\ \bar c = \{\gamma_1, \gamma_2, 0\} \end{array}$$

Для последующих вычислений будем использовать формулы скалярного произведения и однодетерминантную формулу векторного произведения в базисе $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$ (из списка на стр. 28). Тогда:

$$[\bar b, \bar c] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \beta_1 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \end{vmatrix} = \beta_1 \gamma_2 \bar k \Rightarrow [\bar b, \bar c] = \{0, 0, \beta_1 \gamma_2\}.$$

Тогда: $[\bar a, [\bar b, \bar c]] = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & \beta_1\gamma_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 \beta_1 \gamma_2 \bar i - \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 \bar j \Rightarrow [\bar a, [\bar b, \bar c]] = \{\alpha_2\beta_1\gamma_2; -\alpha_1\beta_1\gamma_2; 0\} \quad (*)$.

С другой стороны:

$(\bar a, \bar c) = \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 \Rightarrow \bar b(\bar a, \bar c) =$ из координатной записи операции (II) $= \{\alpha_1\beta_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_2; 0; 0\}$

$(\bar a, \bar b) = \alpha_1\beta_1 \Rightarrow \bar c(\bar a, \bar b) =$ из координатной записи операции (II) $= \{\alpha_1\beta_1\gamma_1; \alpha_1\beta_1\gamma_2; 0\}$

Вычитаем из предпоследнего равенства последнее:

$\bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b) = \{\alpha_2\beta_1\gamma_2; -\alpha_1\beta_1\gamma_2; 0\} \quad (**)$.

Сравнивая $(*)$ и $(**)$, получаем доказательство свойства. □

$(VI.2)$ Тождество Якоби: $[\bar a, [\bar b, \bar c]] + [\bar b, [\bar c, \bar a]] + [\bar c, [\bar a, \bar b]] = \bar 0$.

Доказательство. Согласно предыдущему свойству:

$$\left.\begin{array}{l} [\bar a, [\bar b, \bar c]] = \bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b) \\ [\bar b, [\bar c, \bar a]] = \bar c(\bar b, \bar a) - \bar a(\bar b, \bar c) \quad + \\ [\bar c, [\bar a, \bar b]] = \bar a(\bar c, \bar b) - \bar b(\bar c, \bar a) \end{array}\right\} \text{складываем все три слагаемых}$$

$$[\bar a, [\bar b, \bar c]] + [\bar b, [\bar c, \bar a]] + [\bar c, [\bar a, \bar b]] = \bar 0$$

□

1.9 Изменение базиса

Вопрос изменения базиса подробно рассмотрен для случая пространства V^2 (плоскости) и более конспективно для пространства V^3 (стереометрия).

<u>Случай плоскости</u>

Базис на плоскости это система $E = \{\bar e_1, \bar e_2\}$ состоящая из двух неколлинеарных векторов $\bar e_1 \nparallel \bar e_2$ (см. определение на стр. 9). Очевидно, что различных базисов (различных пар неколлинеарных векторов) можно образовать сколь угодно много. Рассмотрим два каких-либо базиса: $E = \{\bar e_1, \bar e_2\}$, который будем называть СТАРЫЙ базис и $E' = \{\bar e_1', \bar e_2'\}$ – НОВЫЙ базис (рис. 20).

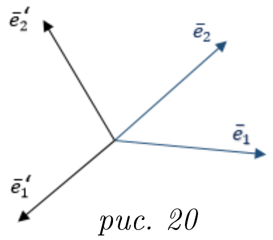

рис. 20

Согласно теореме 1.3 (стр. 9) каждый вектор можно разложить по базису и это разложение ОДНОЗНАЧНО, Разложим векторы нового базиса E' по старому:

$$\left.\begin{array}{l} \bar e_1' = c_{11}\bar e_1 + c_{21}\bar e_2 \\ \bar e_2' = c_{12}\bar e_1 + c_{22}\bar e_2 \end{array}\right\}, \qquad (*)$$

где коэффициенты разложения индексируем двумя индексами: c_{11}, c_{21} и c_{12}, c_{22}. По определению координат вектора (стр. 10) векторы $\bar{e}'_1$ и $\bar{e}'_2$ в базисе $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ имеют координаты:

$$\bar{e}'_1 = \{c_{11}, c_{21}\}, \quad \bar{e}'_2 = \{c_{12}, c_{22}\}.$$

Введем матрицу $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ структура которой есть:

1-ый столбец – координаты базисного вектора $\bar{e}'_1$ в старом базисе;

2-ой столбец – координаты базисного вектора $\bar{e}'_2$ в старом базисе.

Определение 1.29. Введенная матрица C называется матрицей перехода от старого базиса E к новому E'.

Замечание 1.18. Иногда говорят, что C переводит старый базис в новый и пишут $E \xrightarrow{C} E'$ или $C\colon E \to E'$.

Имеет место (важнейший!) факт:

Утверждение 1.6. Матрица C НЕВЫРОЖДЕННАЯ, т.е. ее детерминант ненулевой: $\det C = |C| \neq 0$.

Доказательство. Предположим противное: $|C| = 0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; c_{11}c_{22} = c_{12}c_{21}$ $\Rightarrow\; \dfrac{c_{11}}{c_{12}} = \dfrac{c_{21}}{c_{22}}$, т.е. координаты векторов $\bar{e}'_1 = \{c_{11}, c_{21}\}$ и $\bar{e}'_2 = \{c_{12}, c_{22}\}$ пропорциональны. По критерию коллинеарности векторов в координатной форме (см. стр. 10) это будет равносильно $\bar{e}'_1 \parallel \bar{e}'_2$, что противоречит определению базиса $E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$. $\square$

Рассмотрим произвольный вектор $\bar{a} \in V^2$. Пусть:

$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ – есть координаты вектора $\bar{a}$ в базисе E: $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$;

$\bar{a} = \{\alpha'_1, \alpha'_2\}$ – есть координаты вектора $\bar{a}$ в базисе E': $\bar{a} = \alpha'_1\bar{e}'_1 + \alpha'_2\bar{e}'_2$.

Установим связь между координатам вектора в старом и новом базисе. Пусть C – матрица перехода от старого базиса к новому $C\colon E \to E'$. Тогда:

$\bar{a} = \alpha'_1\bar{e}'_1 + \alpha'_2\bar{e}'_2 =$ по формуле $(*)$ на стр. 29 $= \alpha'_1(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2) + \alpha'_2(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2) =$
$= (c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2)\bar{e}_1 + (c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2)\bar{e}_2$.

Правая часть – разложение вектора $\bar{a}$ по базису $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Поэтому из однозначности разложения вектора по базису и из равенства $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2$ следует

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 \\ \alpha_2 = c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

Формула $(**)$ есть связь координат вектора в различных базисах или формула перерасчёта координат вектора при изменении базиса.

В пространстве V^3 мы вводим ДВА ортонормированных базиса (рис. 18 на стр. 27). Один был назван ПРАВЫМ, а второй ЛЕВЫМ. В векторном пространстве возникает аналогичная ситуация.

Определение 1.30. Ортонормированный базис $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ есть ПРАВЫЙ базис, если мы видим вращение первого вектора $\bar{e}_1$ ко второму $\bar{e}_2$ КРАТЧАЙШИМ путем ПРОТИВ часовой стрелки. Для правого ортонормированного базиса вводят обозначения: $\bar{e}_1 = \bar{i}$ и $\bar{e}_2 = \bar{j}$, т.е. $E = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ означает правый ортонормированный базис (рис. 21 (a)).

ПРАВЫЙ БАЗИС (а) *ЛЕВЫЙ БАЗИС* (в)

рис. 21

Определение 1.31. Ортонормированный базис $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ называем ЛЕВЫМ, если мы видим вращение первого вектора $\bar{f}_1$ ко второму вектору $\bar{f}_2$ кратчайшим путем ПО часовой стрелке (рис. 20 (*в*)).

Рассмотрим сейчас частный, но очень важный случай преобразования $(*)$ – поворот плоскости на угол φ. Предварительно введем СОГЛАШЕНИЕ:

Угол φ называем положительным если вращение происходит против часовой стрелки. В противном случае угол отрицательный (как в школьной тригонометрии!).

На рис. 22 изображен поворот базиса $E = \{\bar{i}, \bar{j}\}$.

Из рисунка следует:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{i}' = \cos\varphi \bar{i} + \sin\varphi \bar{j} \\ \bar{j}' = -\sin\varphi \bar{i} + \cos\varphi \bar{j} \end{array}\right\}$$

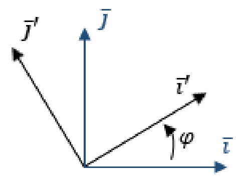

рис. 22

Из определения матрицы перехода следует, что

$C_1 \colon E \to E'$ имеет вид: $C_1 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Отметим, что $|C_1| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{vmatrix} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 \Rightarrow |C_1| = +1.$

Т.к. $E = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ – ПРАВЫЙ ортонормированный базис, то после поворота $E' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ также будет правым ортонормированным базисом.

Все рассуждения проведенные для правого ортонормированного базиса будут справедливы и для левого ортонормированного базиса $F = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2\}$ (рис. 21 (*в*)): после вращения $C_1 \colon F \to F'$ получающийся базис остается левым ортонормированным базисом F'.

Рассмотрим переход к разноименным базисам: правый $\to$ левый и, аналогично, левый в правый. В пространстве V^2 кроме $E = \{\bar{i}, \bar{j}\}$ и $E' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ (см. рис. 22) введем еще один ортонормированный базис

по закону: $\left.\begin{array}{l} \bar{i}'' = \bar{i}' \\ \bar{j}'' = -\bar{j}' \end{array}\right\}$

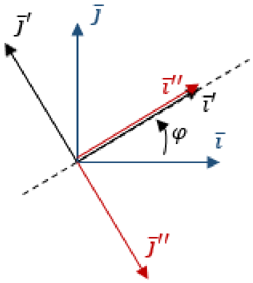

рис. 23

Из рис. 23 понятно, что поскольку $E' = \{\bar{i}', \bar{j}'\}$ – правый, то $E'' = \{\bar{i}'', \bar{j}''\}$ – левый базис. Переход $E' \to E''$ можно интерпретировать как отражение относительно прямой, проходящей через вектор $\bar{i}'$ (или $\bar{i}''$).

Далее: $\left.\begin{array}{l} \bar{i}'' = \bar{i}' = \cos\varphi \bar{i} + \sin\varphi \bar{j} \\ \bar{j}'' = -\bar{j}' = \sin\varphi \bar{i} - \cos\varphi \bar{j} \end{array}\right\}$

Из определения матрицы перехода следует, что если $C_2 \colon E \to E''$, то $C_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$.

Отметим, что $|C_2| = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{vmatrix} = -\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = -1 \Rightarrow |C_2| = -1.$

Иногда запись матриц C_1 и C_2 объединяют в одну матрицу

$C = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varepsilon\sin\varphi \\ \sin\varphi & \varepsilon\cos\varphi \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \pm 1$.

Если $\varepsilon = +1$, то переход осуществляется между одноименными базисами (поворот). И $\varepsilon = -1$ в противном случае (в преобразовании присутствует отражение).

Случай пространства

Если $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и $E' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ – два базиса в V^3, то определение матрицы перехода $C\colon E \to E'$ и закон изменения координат вектора при изменении базиса полностью копируют случай плоскости V^2.

Разложим векторы нового базиса по старому:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{e}'_1 = c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 + c_{31}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_2 = c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + c_{32}\bar{e}_3 \\ \bar{e}'_3 = c_{13}\bar{e}_1 + c_{23}\bar{e}_2 + c_{33}\bar{e}_3 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

По определению координат вектора в базисе (стр. 10) векторы $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ в старом базисе $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ имеют координаты:

$$\bar{e}'_1 = \{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}, \quad \bar{e}'_2 = \{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}, \quad \bar{e}'_3 = \{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Введем Матрицу $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, структура которой есть:

1-ый столбец – координаты 1-го базисного вектора $\bar{e}'_1$ в старом базисе;
2-ой столбец – координаты 2-го базисного вектора $\bar{e}'_2$ в старом базисе;
3-ий столбец – координаты 3-го базисного вектора $\bar{e}'_3$ в старом базисе.

Определение 1.32. Матрица C называется матрицей перехода от старого базиса E к новому E'. Запись: $E \xrightarrow{C} E'$ или $C\colon E \to E'$.

Утверждение 1.7. Матрица C невырожденная, т.е. $|C| \neq 0$.

Доказательство. (от противного)

Предположим, что $|C| = 0$. Столбцы матрицы C – координаты векторов $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$. Из критерия компланарности векторов (свойство $(V.2)$ смешанного произведения, стр. 21) следует, что $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ есть компланарная тройка векторов. Противоречие с определением базиса E' в V^3. □

Рассмотрим произвольный вектор $\bar{a} \in V^3$. Пусть:
$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ – есть координаты вектора $\bar{a}$ в базисе E: $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$;
$\bar{a} = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3\}$ – есть координаты вектора $\bar{a}$ в базисе E': $\bar{a} = \alpha'_1\bar{e}'_1 + \alpha'_2\bar{e}'_2 + \alpha'_3\bar{e}'_3$.

Установим связь между координатам вектора в старом и новом базисе. Пусть C – матрица перехода от старого базиса к новому $C\colon E \to E'$. Тогда:

$\bar{a} = \alpha'_1\bar{e}'_1 + \alpha'_2\bar{e}'_2 + \alpha'_3\bar{e}'_3 =$ по формуле $(*)$ $= \alpha'_1(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 + c_{31}\bar{e}_3) + \alpha'_2(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 + c_{32}\bar{e}_3) + \alpha'_3(c_{13}\bar{e}_1 + c_{23}\bar{e}_2 + c_{33}\bar{e}_3) = (c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 + c_{13}\alpha'_3)\bar{e}_1 + (c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + c_{23}\alpha'_3)\bar{e}_2 + (c_{31}\alpha'_1 + c_{32}\alpha'_2 + c_{33}\alpha'_3)\bar{e}_3$.

Правая часть – разложение вектора $\bar{a}$ по базису $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Поэтому из однозначности разложения вектора по базису и из равенства $\bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3$ следует

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = c_{11}\alpha'_1 + c_{12}\alpha'_2 + c_{13}\alpha'_3 \\ \alpha_2 = c_{21}\alpha'_1 + c_{22}\alpha'_2 + c_{23}\alpha'_3 \\ \alpha_3 = c_{31}\alpha'_1 + c_{32}\alpha'_2 + c_{33}\alpha'_3 \end{array}\right\} \qquad (**)$$

Формула $(**)$ есть связь координат вектора в различных базисах или формула перерасчёта координат вектора при изменении базиса.

Если ставить вопрос о виде матрицы C в случае перехода от одного ортонормированного базиса к другому (как это было проделано для случая плоскости V^2), то этого мы здесь проводить не будем. Эта задача в общем виде будет решена в курсе АЛГЕБРА.