

# Линейные двухполюсники и четырехполюсники

Александр Крупин

30 декабря 2020 г.

## 1 Анализ линейных двухполюсников

Посмотрим, как зависят модуль и аргумент импеданса различных линейных двухполюсников, изображенных на рисунке (1). Нетрудно вывести следующие формулы:

$$\text{Схема (а): } Z(\omega) = R - \frac{j}{\omega C}$$

$$\text{Схема (б): } Z(\omega) = R + j\omega L$$

$$\text{Схема (в): } Z(\omega) = R + \frac{j}{\frac{1}{R} + j\omega C}$$

$$\text{Схема (г): } Z(\omega) = R + \frac{j}{\frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L}}$$

Теперь получим желаемые зависимости:

$$\text{Схема (а): } |Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}; |\arg(Z(\omega))| = \arctg\left(\frac{1}{\omega CR}\right)$$

$$\text{Схема (б): } |Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}; |\arg(Z(\omega))| = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$\text{Схема (в): } |Z(\omega)| = \frac{\sqrt{(2R + \omega^2 C^2 R^3)^2 + (\omega CR^2)^2}}{1 + (\omega CR)^2}; |\arg(Z(\omega))| = \arctg\left(\frac{\omega CR}{2 + (\omega CR)^2}\right)$$

$$\text{Схема (г): } |Z(\omega)| = \frac{\sqrt{(2\omega^2 L^2 R + R^3)^2 + (R^2 \omega L)^2}}{\omega^2 L^2 + R^2}; |\arg(Z(\omega))| = \arctg\left(\frac{R\omega L}{2\omega^2 L^2 + R^2}\right)$$

Построим соответствующие графики (3 – 10). Добавим данные, полученные с помощью эксперимента, на них же. Заметим, что практически везде, эксперимент отличается от теории, не более чем на 5%, что является вполне приемлемой точностью. Исключением являются (4 и 8), на них ошибка сильно больше. Причем заметим, что и тот и другой графики показывают значение аргумента для  $RC$ -цепей (схемы (а) и (в) на рис.1). Скорее всего значение емкости конденсатора на схеме, не соответствует действительности. Действительно, слегка поменяв емкость, наблюдается лучшее соответствие между теорией и практикой (см. конец отчета рис.5).

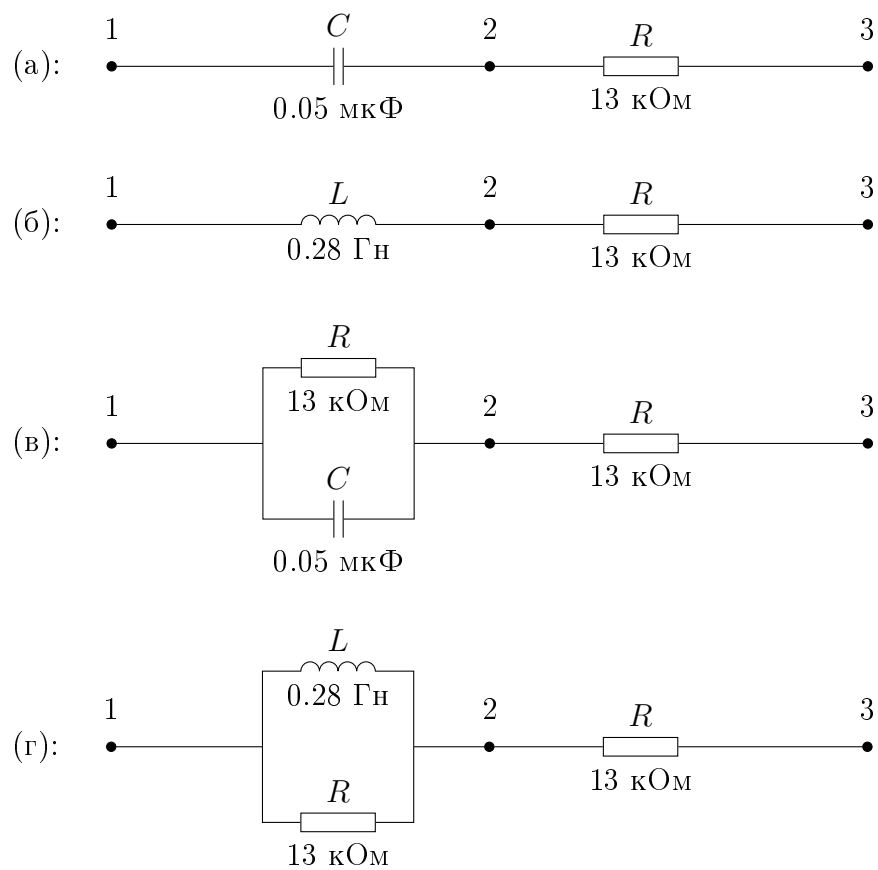


Рис. 1: Линейные двухполюсники

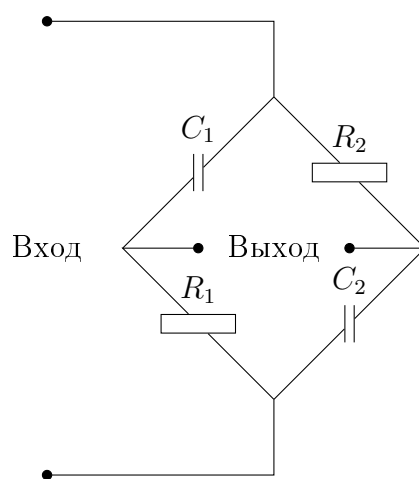


Рис. 2: Фазовращатель

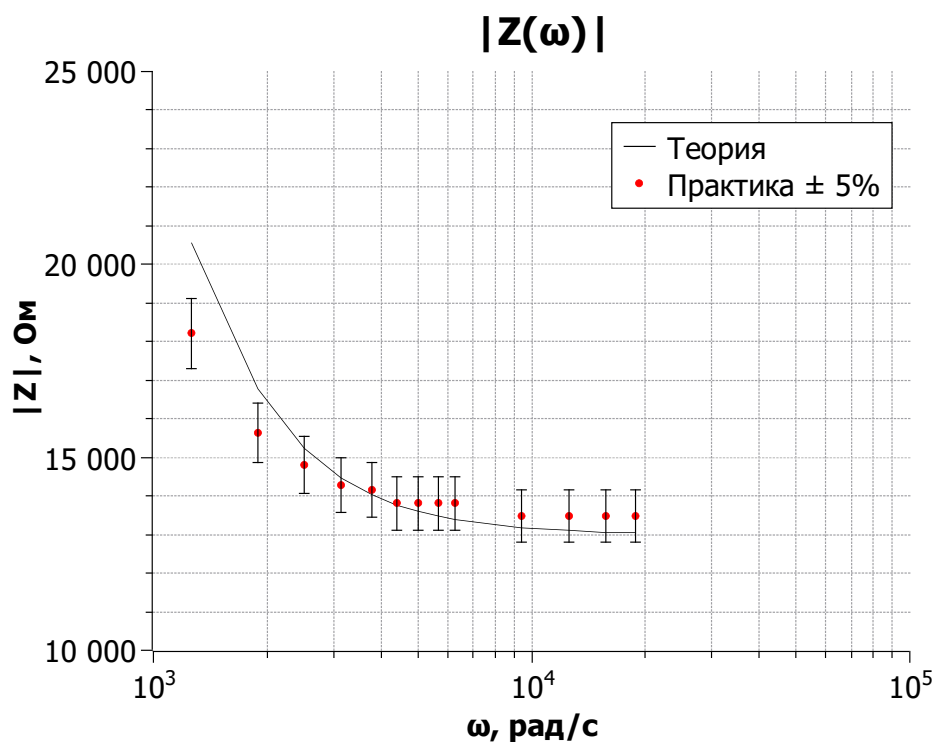


Рис. 3: Двухполюсник (а)

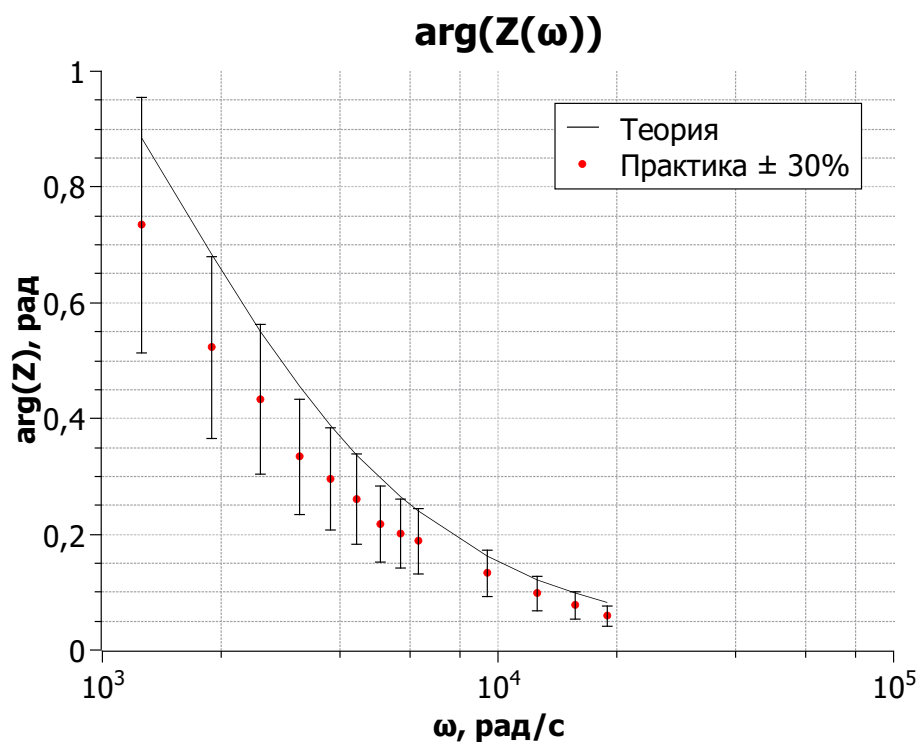


Рис. 4: Двухполюсник (а)

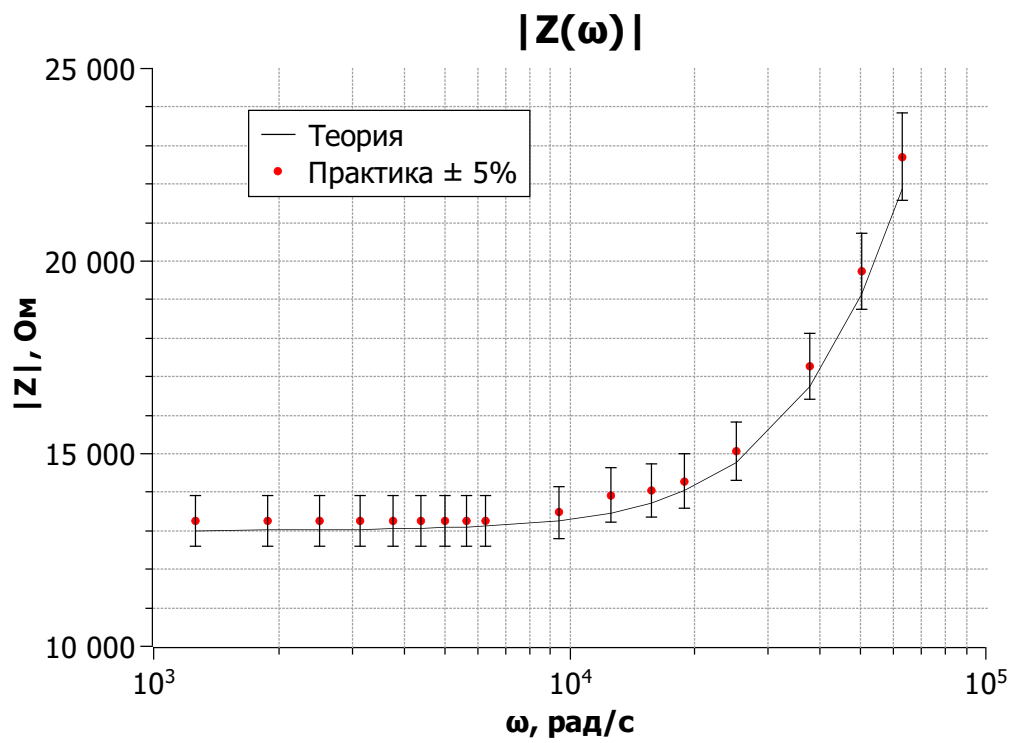


Рис. 5: Двухполюсник (б)

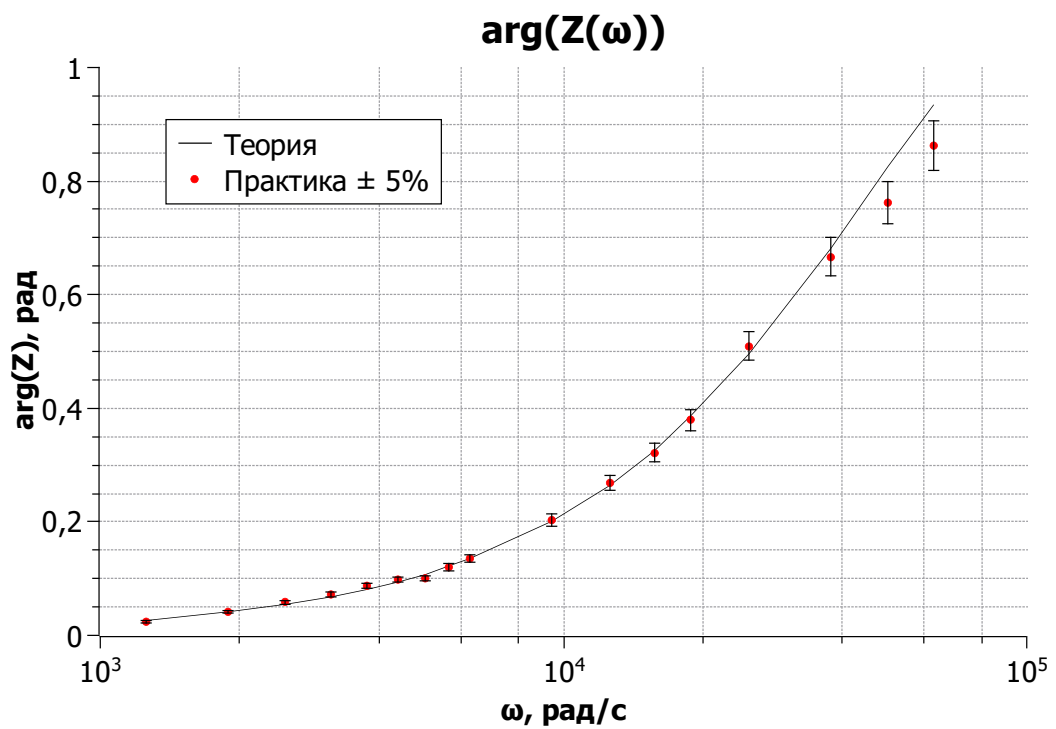


Рис. 6: Двухполюсник (б)

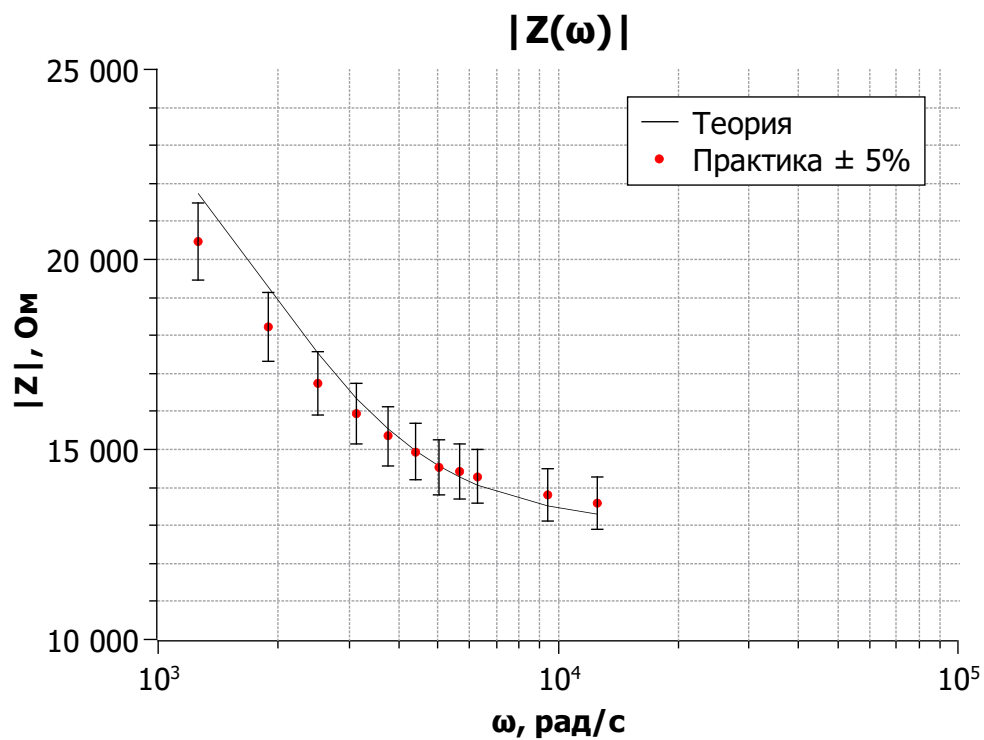


Рис. 7: Двухполюсник (в)

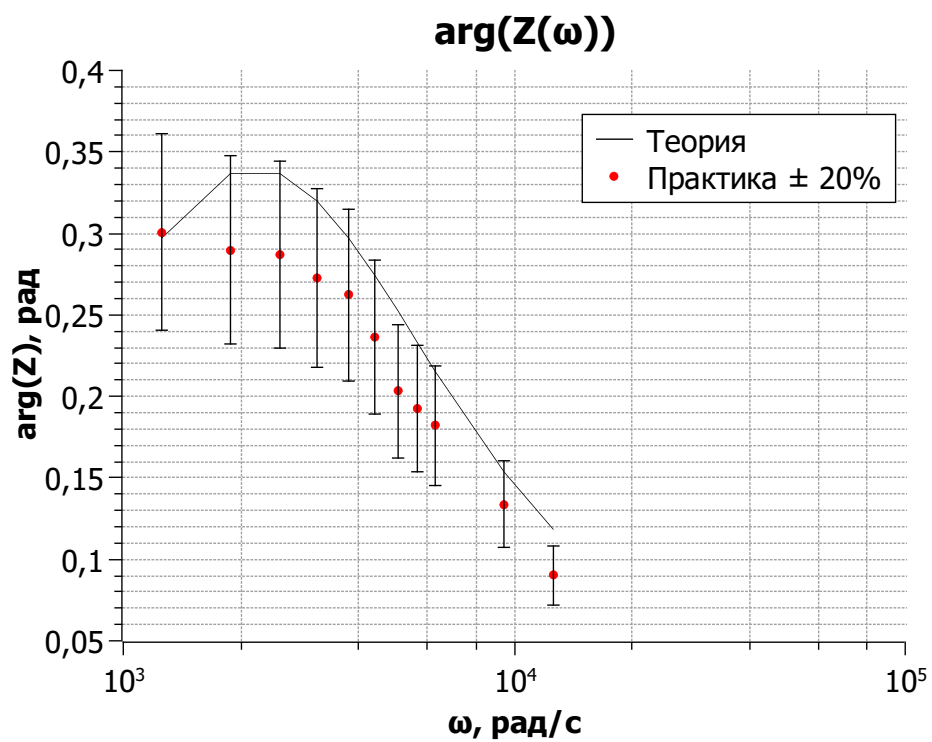


Рис. 8: Двухполюсник (в)

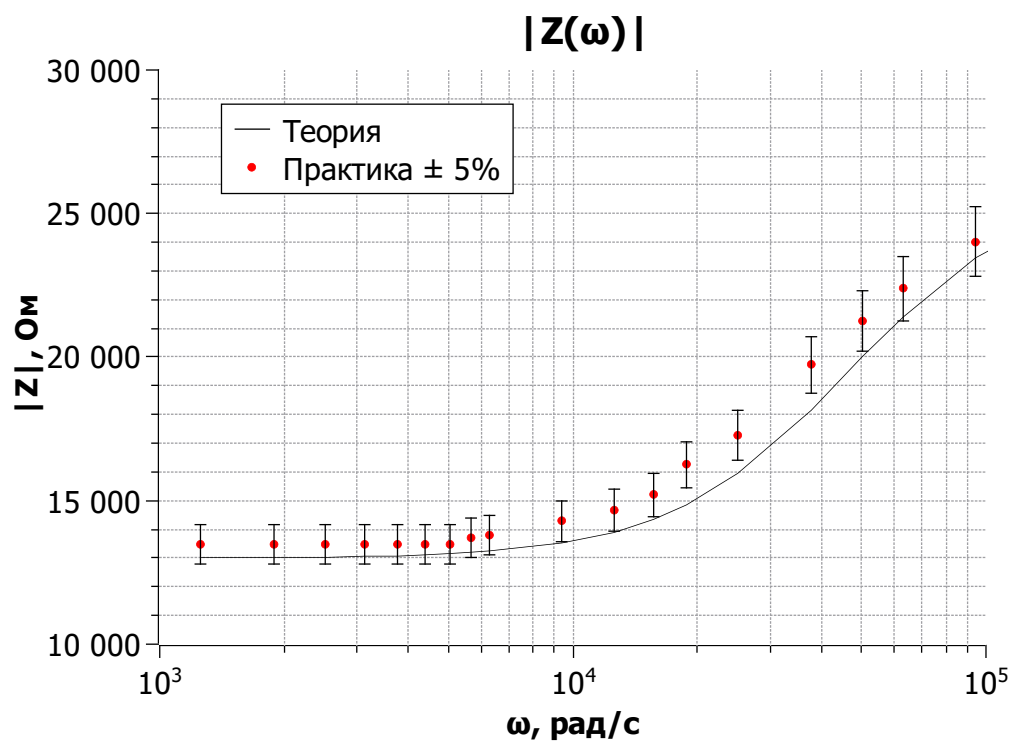


Рис. 9: Двухполюсник (г)

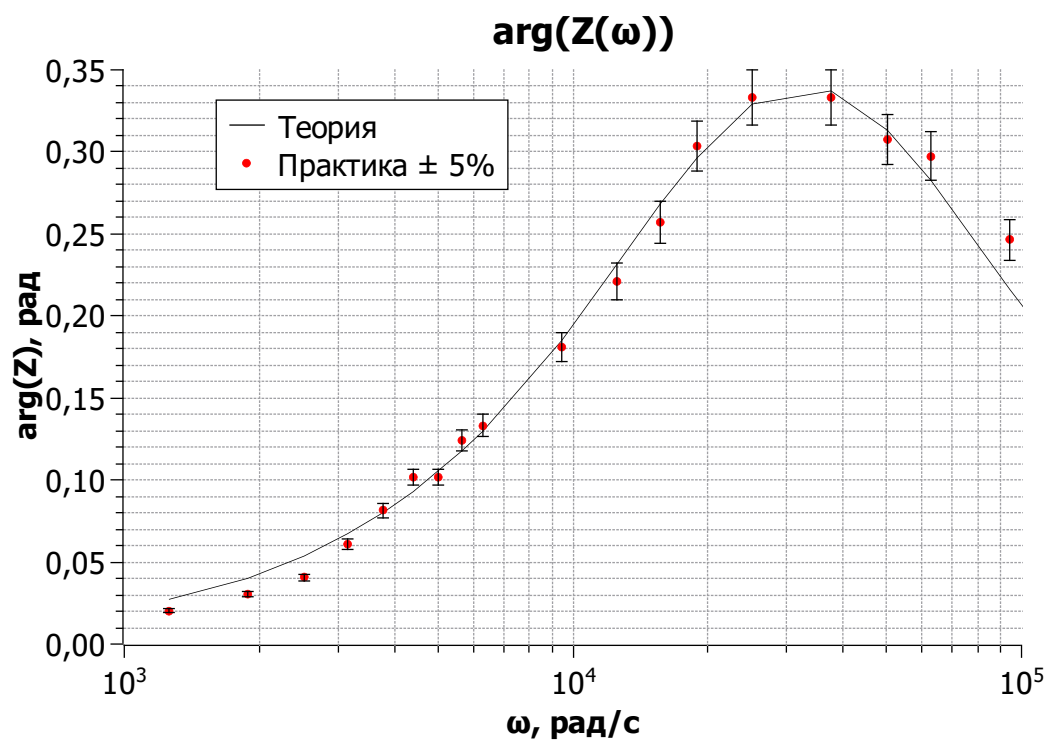


Рис. 10: Двухполюсник (г)

## 2 Мостовой фазовращатель рис.2

### 2.1 Зависимость сдвига фаз от частоты

Возьмем  $R_1 = R_2 = R = 140$  кОм;  $C_1 = C_2 = C = 0,015$  мкФ. Тогда, используя метод фазовых диаграмм, получим:  $\operatorname{tg}(\frac{\varphi}{2}) = \omega RC$ . Построим соответствующий график (11) и добавим на него данные, полученные с помощью эксперимента.

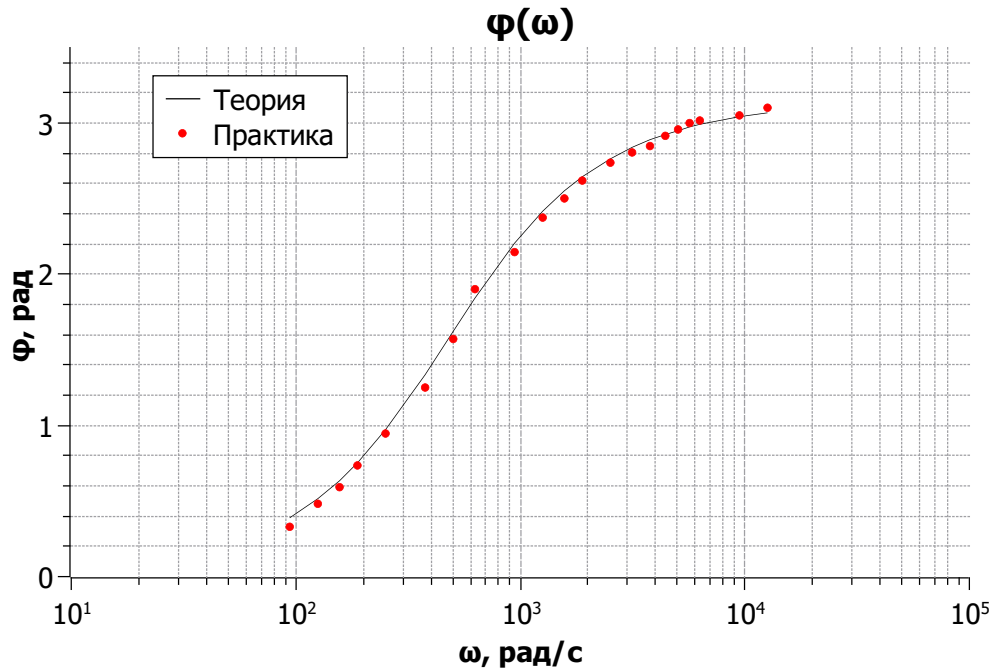


Рис. 11: Мостовой фазовращатель

При росте  $\omega$  мы приближаемся к желаемому значению  $\pi$ . Наибольшая ошибка наблюдается в окрестности  $\pi/2$ , что согласуется с методом, которым мы пользуемся на практике (см. приложение к работе). При приближении к  $\pi/2$  форма эллипса едва ли меняется, поэтому изменения параметров сложно детектировать. В то время как с точки зрения теории, если представить график синуса, то в окрестности  $\pi/2$  разброс значений синуса "наиболее резкий что выдает наибольшую ошибку".

### 2.2 Зависимость сдвига фаз от сопротивления

Зафиксируем  $\omega = 80$  Гц ( $\omega \approx 500$  рад/с) и будем менять  $R$  от 10 до 140 кОм. Видно, что в окрестности  $\pi/2$  точки, полученные из практики, вообще не отличаются. Это происходит по причине, описанной в предыдущем пункте.

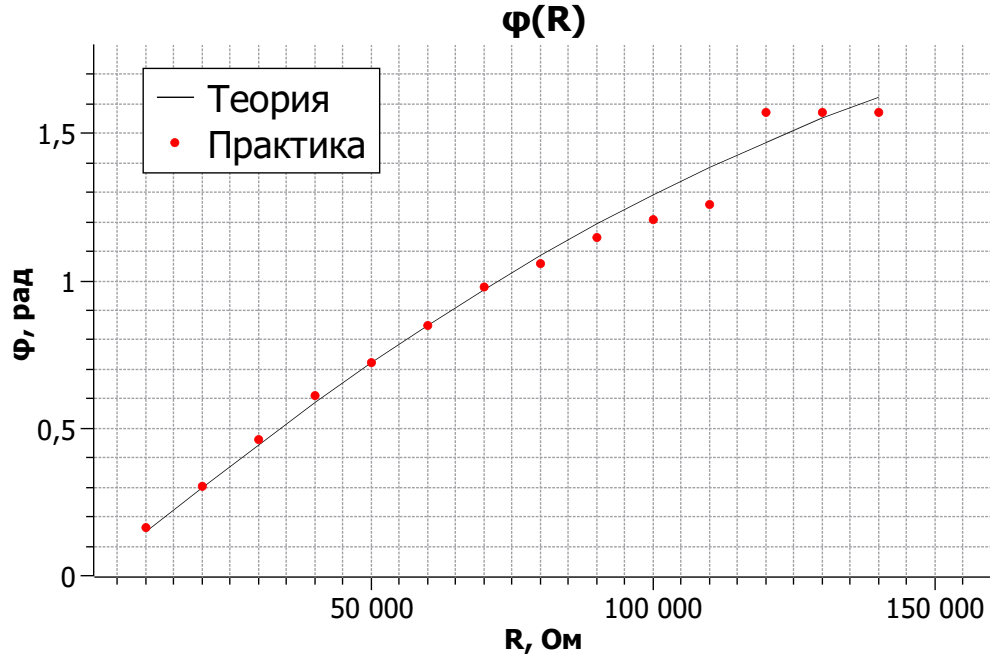


Рис. 12: Мостовой фазовращатель

### 3 Четырехполюсник на рис 15

$R = 13 \text{ кОм}$ ;  $C = 50 \text{ пФ}$ . Пусть  $\Omega = \omega RC$ .

Приведем выражение для амплитудной и фазовой характеристик данного четырехполюсника:

$$\varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\Omega(5 - \Omega)^2}{1 - 6\Omega^2};$$

$$K(\omega) = \frac{\Omega^3}{\sqrt{(1 - 6\Omega^2)^2 + \Omega^2(5 - \Omega^2)^2}}$$

Начнем с анализа фазовой характеристики. Простейший анализ асимптотики показывает, что при "маленьких"  $\Omega$  функция ведет себя как линейная. Конкретно при  $\Omega = 0$  получаем  $\varphi = 3\pi/2$ , при  $\Omega \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow \pi$ . Обещанный сдвиг фазы на  $\pi$  можно получить и при других значениях  $\Omega$ . Из дальнейшего анализа функции следует, что достигнуть противофазы можно при:  $\Omega = 1/\sqrt{6}$  ( $\omega \approx 630 \text{ рад/с}$ ).

На практике мы специально начинали со значения  $\omega \approx 250 \text{ рад/с}$ , при котором достигается противофаза. Заметная ошибка в окрестности  $\pi/2$  возникает по причинам, обсуждаемым ранее. Посмотрим на график (13).

Теперь посмотрим на амплитудную характеристику  $K(\omega)$ . Из теории следует, что в противофазе, амплитуда выходного сигнала в 29 раз меньше амплитуды входного. Проверим, построим график (14).



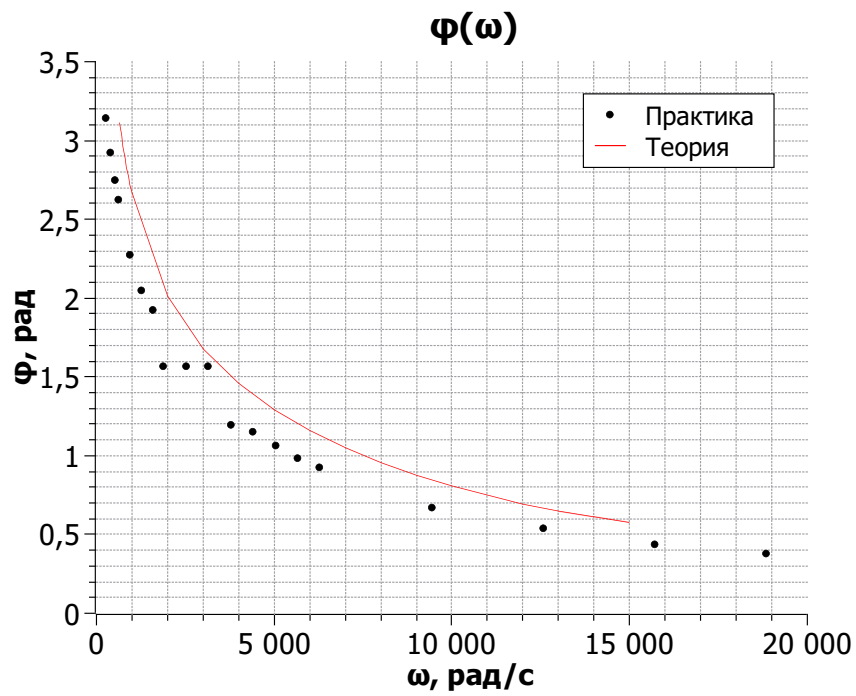


Рис. 13

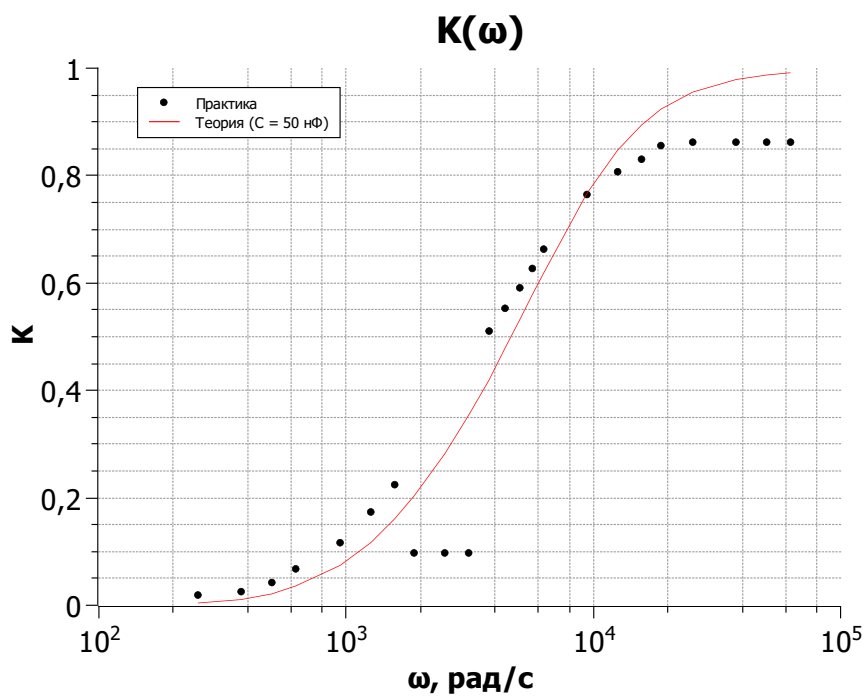


Рис. 14

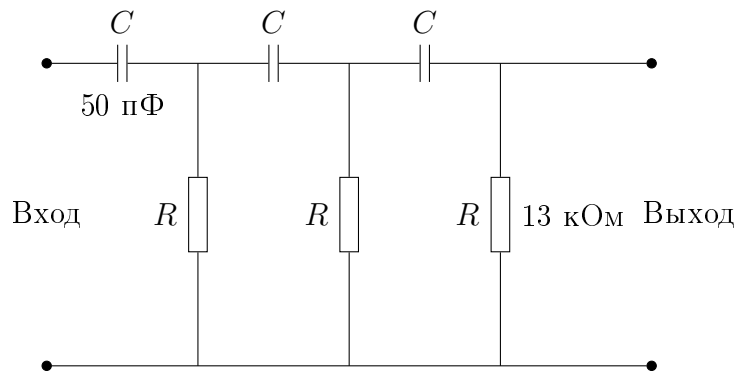


Рис. 15

## 4 Итоги

Чем сложнее схема встречалась в работе, тем больше для нее расхождений в теории и практики мы получали. По ходу отчета были высказаны предположения. Прежде всего, это характеристики элементов, которые либо неточно указаны, либо изменились со временем. Затем метод, использующий геометрические параметры эллипса, дает весомую ошибку в конкретных моментах.

Большие ошибки для четырехполюсников наталкивают на мысль, что, возможно, емкости в схемах различны, так как в этом случае, рассмотренная нами теория не работает.

## 5 Приложение

### 5.1 графики из пункта 1

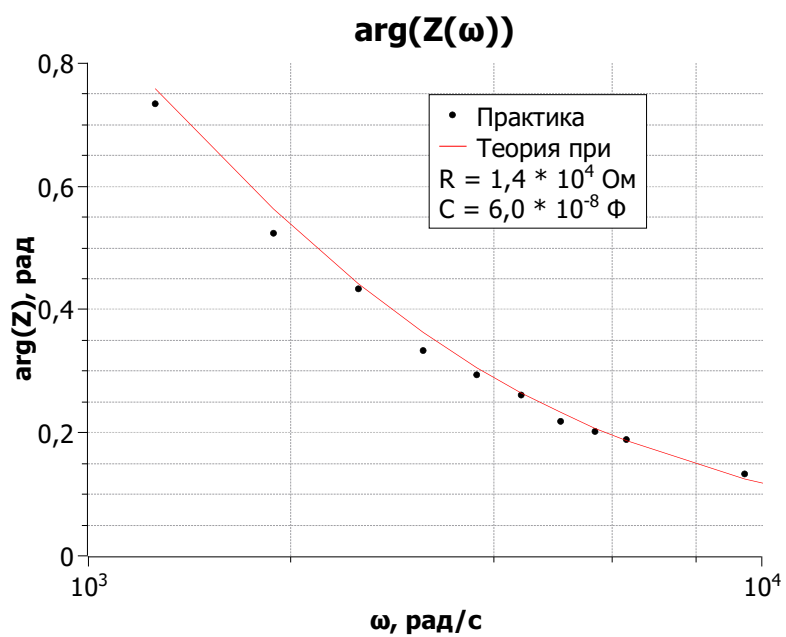


Рис. 16: Двухполюсник (а)

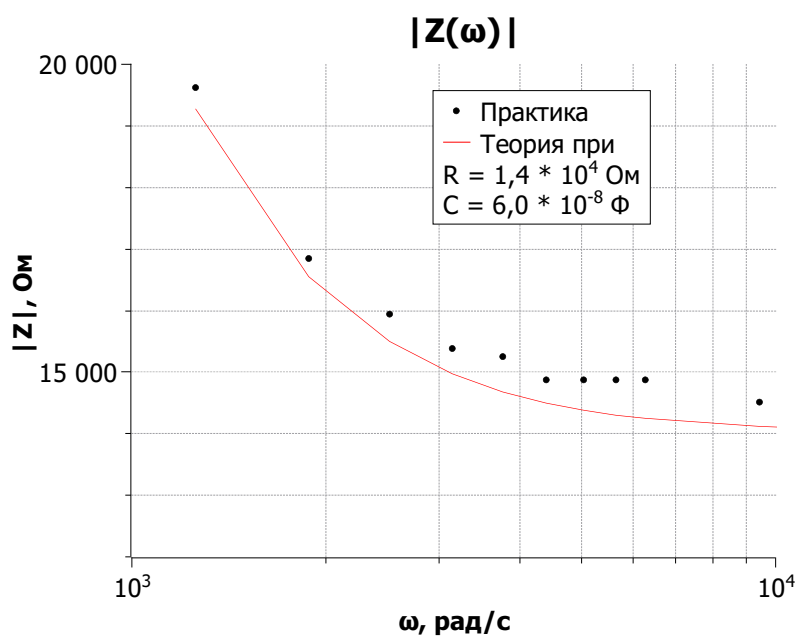


Рис. 17: Двухполюсник (а)

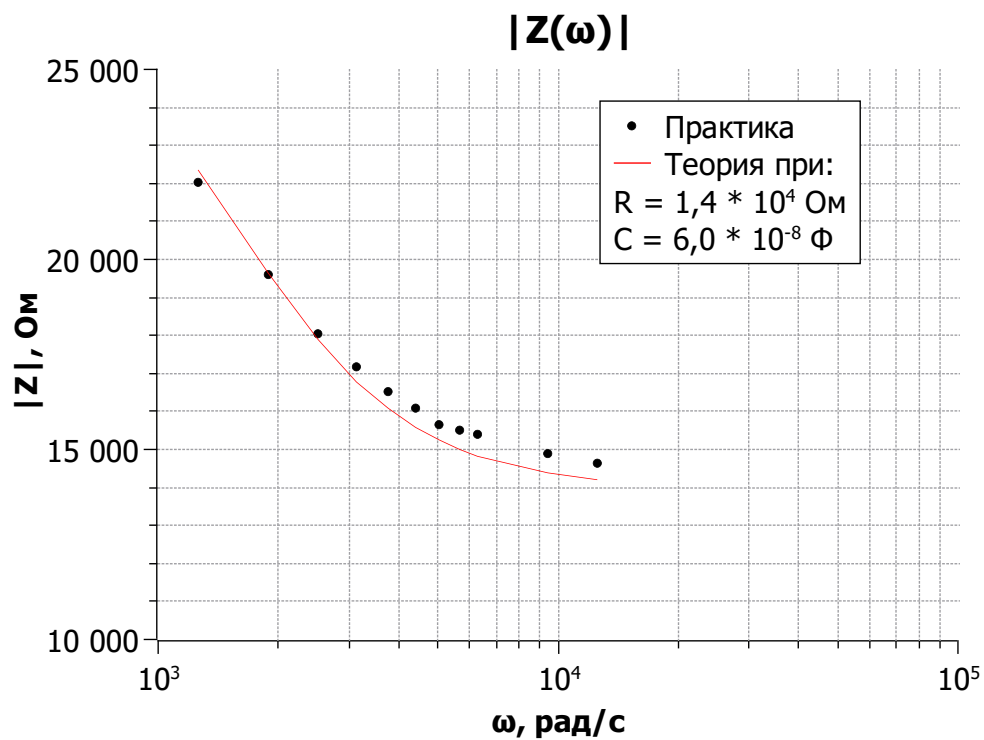


Рис. 18: Двухполюсник (в)

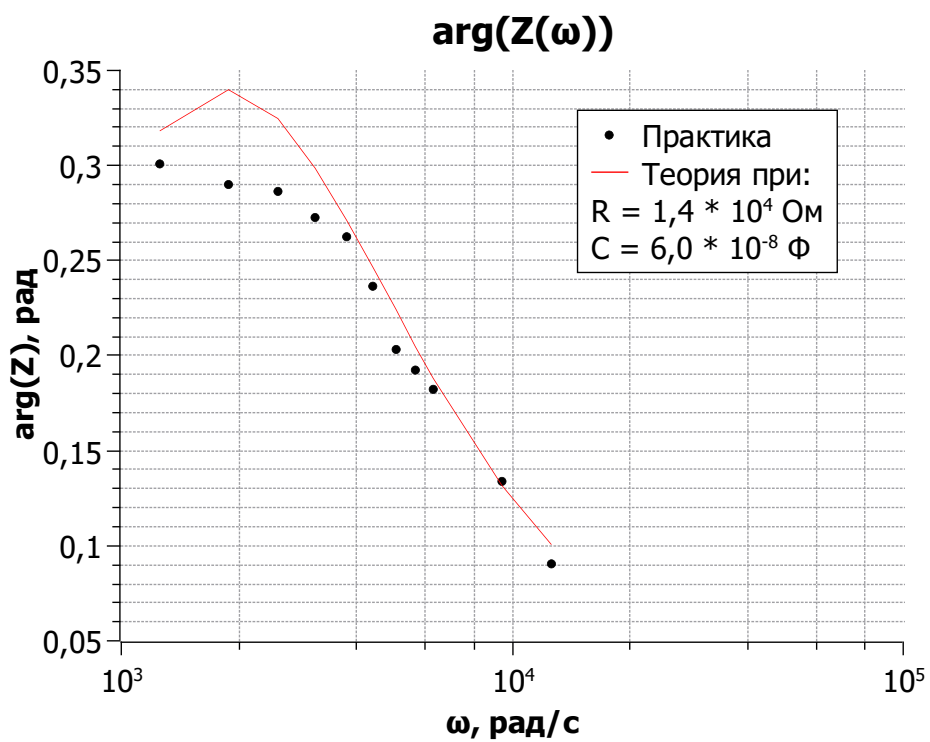


Рис. 19: Двухполюсник (в)

## 5.2 графики из пункта 3

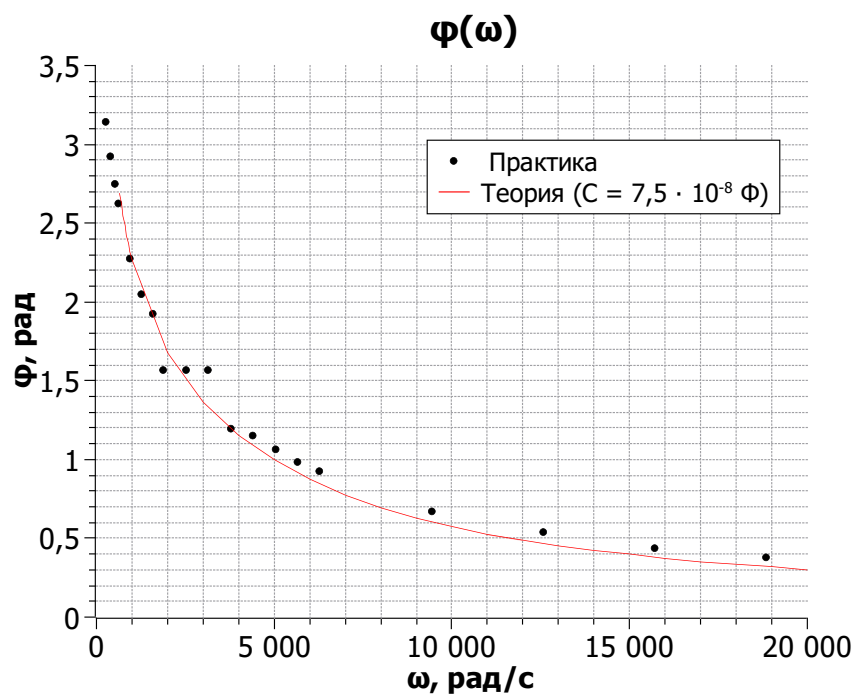


Рис. 20: Четырехполюсник (15)

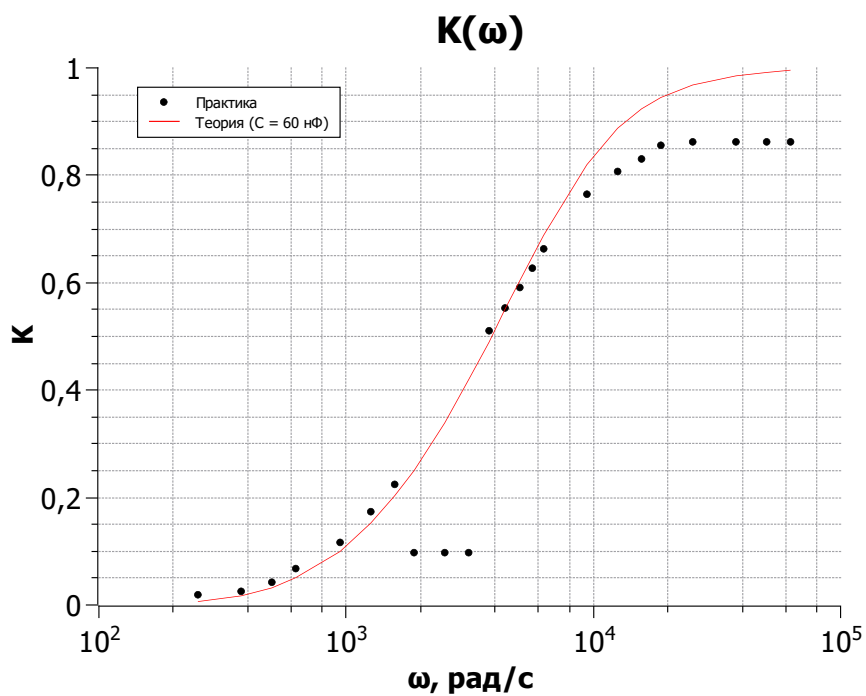


Рис. 21: Четырехполюсник (15)