1.5 Векторное произведение векторов

Операция векторного произведения – это четвертая операция с векторами, которую будем также обозначать римской цифрой (IV). Подчеркнем, что эта операция вводится только для векторов в пространстве V^3 (стереометрия). Предварительно введем определение:

Определение 1.23. Тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется УПОРЯДОЧЕННОЙ, если существенен порядок в записи векторов: $\bar{a}$ – первый; $\bar{b}$ – второй; $\bar{c}$ – третий.

Если мы изменим порядок записи, например, возьмем тройку $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ (тех же самых) векторов, то это будет уже другая упорядоченная тройка. Легко увидеть, что можно образовать шесть разных упорядоченных троек:

$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$; $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$; $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ $(*)$

$\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$; $\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}$; $\bar{a}, \bar{c}, \bar{b}$ $(**)$

Рассмотрим упорядоченную тройку $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ НЕ компланарных векторов. Пусть они имеют общее начало и первые два вектора $\bar{a}, \bar{b}$ находятся в плоскости π. На рис. 13 изображена тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$, где конец вектора $\bar{c}$ изображен НАД плоскостью π.

Определение 1.24 (Ориентация тройки векторов). Тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется правоориентированной или ПРАВОЙ, если с конца ПОСЛЕДНЕГО вектора $\bar{c}$ наблюдаем вращение первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ кратчайшим путем ПРОТИВ часовой стрелки. Тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется левоориентированной или ЛЕВОЙ, если с конца последнего вектора $\bar{c}$ наблюдаем вращение первого вектора $\bar{a}$ ко второму вектору $\bar{b}$ кратчайшим путем ПО часовой стрелке.

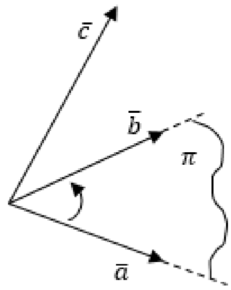

рис. 13

Замечание 1.14. Понятие ориентации тройки векторов имеет смысл только для НЕ КОМПЛАНАРНЫХ векторов.

Из определения ориентации тройки векторов следует, что тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ на рис. 13 есть правая тройка. Если рассмотреть другую тройку $\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$, то сейчас с конца последнего вектора $\bar{c}$ мы наблюдаем вращение первого вектора $\bar{b}$ ко второму – $\bar{a}$ уже по часовой стрелке и, следовательно, тройка $\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$ – левая.

Ориентация троек векторов тесно связана с циклическими перестановками.

Циклическая перестановка векторов

Рассмотрим некоторую тройку векторов, например $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Сейчас последний вектор $\bar{c}$ поставим на первое место: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \to \bar{c}, \bar{a}, \bar{b}$. В полученной тройке последний вектор $\bar{b}$ поставим на первое место: $\bar{c}, \bar{a}, \bar{b} \to \bar{b}, \bar{c}, \bar{a}$ и, наконец, в последней тройке последний вектор $\bar{a}$ поставим на первое место: $\bar{b}, \bar{c}, \bar{a} \to \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. В итоге мы вернулись к исходной тройке $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Этот процесс называют циклической перестановкой векторов и его можно изобразить на схеме:

$$\begin{tikzcd} & \bar{c}, \bar{a}, \bar{b} \arrow[dd] \\ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \arrow[ur] & \\ & \bar{b}, \bar{c}, \bar{a} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

(*диаграмма-цикл длины три*)

Эти три тройки были выписаны в виде последовательности $(*)$ выше.

Вновь рассмотрим исходную тройку векторов и рассмотрим НЕ циклическую перестановку: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \to \bar{b}, \bar{a}, \bar{c}$. Для последней тройки делаем циклическую перестановку векторов:

$$
\begin{tikzcd}
 & \bar{c}, \bar{b}, \bar{a} \arrow[dd] \\
\bar{b}, \bar{a}, \bar{c} \arrow[ur] & \\
 & \bar{a}, \bar{c}, \bar{b} \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

Три выписанные тройки образуют последовательность $(**)$, что написана выше.

Если тройка $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – правая (левая), то последовательность троек $(*)$ есть последовательность правых (левых) троек. Этот факт следует из определения ориентации тройки векторов и из рис. 13 (проверьте!). Тем самым доказано следующее утверждение.

Утверждение 1.4. В результате циклической перестановки векторов ориентация тройки НЕ ИЗМЕНЯЕТСЯ. Из шести возможных троек: три – правые и три – левые.

После введенных в данном параграфе определений, можно дать определение (IV) операции – операции векторного произведения векторов. Предварительно отметим, чтобы задать ненулевой вектор ($\neq \bar{0}$), необходимо задать два его атрибута:

1° Длину (модуль, норму) вектора;

2° Направление вектора.

Определение 1.25. (1) Если $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ – два неколлинеарных вектора, то под их *векторным произведением* понимают ВЕКТОР, обозначаемый как $[\bar{a}, \bar{b}]$ и удовлетворяющий условиям:

$1^\circ \quad |[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$;

$$2^\circ \begin{cases} [\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}, \bar{b} \text{ (ортогонален к своим сомножителям)}, & (2^\circ a) \\ \text{тройка } [\bar{a}, \bar{b}], \bar{a}, \bar{b} \text{ – правая.} & (2^\circ b) \end{cases}$$

(2) Если $\bar{a}$ и/или $\bar{b}$ равен $\bar{0}$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$.

Замечание 1.15. Иногда векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]$ обозначают как $\bar{a} \times \bar{b}$. Мы же будем придерживаться введенной выше записи $[\bar{a}, \bar{b}]$, где $\bar{a}$ называем левым множителем, а $\bar{b}$ – правым множителем.

Определение векторного произведения требует некоторых объяснений, которые ниже мы рассматриваем как случаи $1, 2, 3$.

<u>Случай 1.</u>

Если вектор $\bar{a}$ и/или вектор $\bar{b}$ есть нулевой вектор, то угол $(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ НЕ определен (см. стр. 14) и, следовательно, не определен $\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$. Тогда из условия 1° в определении векторного произведения нельзя получить значение $|[\bar{a}, \bar{b}]|$, так как в произведении $|\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$ не определен третий множитель. Именно поэтому случай $\bar{a}$ и/или $\bar{b}$ равен $\bar{0}$ оговаривается отдельно условием (2) в определении векторного произведения.

<u>Случай 2.</u>

Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$, то $\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \sin 0 = 0$. То есть в этом случае $|[\bar{a}, \bar{b}]| = 0$ и $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$.

<u>Случай 3.</u>

Если $\bar{a} \nparallel \bar{b}$, то $\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \neq 0$ и по соглашению 2 (см. стр. 3) получаем, что так как $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$, то

$|\bar{a}| \neq 0$ и $|\bar{b}| \neq 0$. Поэтому $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) \neq 0$, т.е. $[\bar{a}, \bar{b}] \neq \bar{0}$. Векторы свободные и можем считать, что $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало и, следовательно, находятся в одной плоскости π (см. рис. 14). Из условия $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \bar{a}, \bar{b}$ (условие ($2°a$)) следует, что $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \pi$. По отношению к плоскости π вектор $[\bar{a}, \bar{b}]$ может быть направлен либо "вверх", либо "вниз" (см. рис. 14). Именно ради того, чтобы устранить двузначность в таком определении направления, вводят условие ($2°b$), которое обязывает вектора $[\bar{a}, \bar{b}], \bar{a}, \bar{b}$ быть правой тройкой.

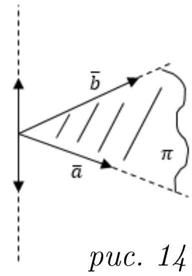

рис. 14

Случаи $1, 2, 3$ подробно (может быть даже слишком подробно) объясняют условия, возникающие в определении векторного произведения. Кроме того, здесь может быть сформулирован еще один критерий коллинеарности векторов (предыдущие критерии на стр. 7 и 10).

Теорема 1.14 (Критерий коллинеарности векторов)**.** Вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) тогда и только тогда, когда $[\bar{a}, \bar{b}] = 0$.

Доказательство. Следует из рассмотренных выше случаев $1, 2, 3$. □

Рассмотрим сейчас свойства операции (IV) векторного произведения. Далее неориентированный угол между векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$ для краткости будем обозначать $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$.

($IV.1$) Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}$.

Доказательство.
Из условия неколлинеарности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ следует, что угол φ между ними не равен нулю. Пусть h – высота параллелограмма, опущенная из конца вектора $\bar{b}$ на основание $\bar{a}$ (см. рис. 15). Тогда $h = |\bar{b}| \sin \varphi$ и из формулы площади параллелограмма получаем $S = |\bar{a}| \cdot h = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi = |[\bar{a}, \bar{b}]|$. То есть $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$.

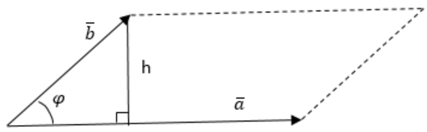

рис. 15

□

($IV.2$) Антикоммутативность: в результате перестановки сомножителей векторное произведение меняет знак, т.е. $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

Доказательство. Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}$ и $[\bar{b}, \bar{a}] = \bar{0}$, следовательно, $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

Пусть $\bar{a} \nparallel \bar{b}$. Из условия $1°$ в определении векторного произведения следует, что модуль $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi = |[\bar{b}, \bar{a}]|$. Таким образом, $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |[\bar{b}, \bar{a}]|$.
Пусть теперь $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ и $\bar{a}, \bar{b}$ лежат в плоскости π (рис. 16)
Из условия ($2°a$) в определении векторного произведения следует, что $[\bar{a}, \bar{b}] \perp \pi$ и $[\bar{b}, \bar{a}] \perp \pi$. Из условия ($2°b$) в определении векторного произведения следует, что $[\bar{a}, \bar{b}], \bar{a}, \bar{b}$ – правая тройка и $[\bar{b}, \bar{a}], \bar{b}, \bar{a}$ – правая тройка. Тогда из определения правой тройки векторов следует, что $[\bar{a}, \bar{b}] \uparrow\downarrow [\bar{b}, \bar{a}]$ и так как $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |[\bar{b}, \bar{a}]|$, то $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$.

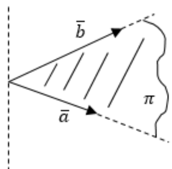

рис. 16

□

($IV.3$) Свойство дистрибутивности векторного произведения по левому и правому множителям: для любых $\bar{a}, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{b}, \bar{b}_1, \bar{b}_2 \in V^3$ и $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ справедливо
$[\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2, \bar{b}] = \lambda_1 [\bar{a}_1, \bar{b}] + \lambda_2 [\bar{a}_2, \bar{b}]$ – дистрибутивность (линейность) по левому множителю;
$[\bar{a}, \mu_1 \bar{b}_1 + \mu_2 \bar{b}_2] = \mu_1 [\bar{a}, \bar{b}_1] + \mu_2 [\bar{a}, \bar{b}_2]$ – дистрибутивность (линейность) по правому множителю.

Доказательство. Будет дано позже (см. следующий параграф). □