

Атомная физика

Лекция 11

М.Ю. Рябиков

канд. физ.-мат. наук, в.н.с. ИПФ РАН

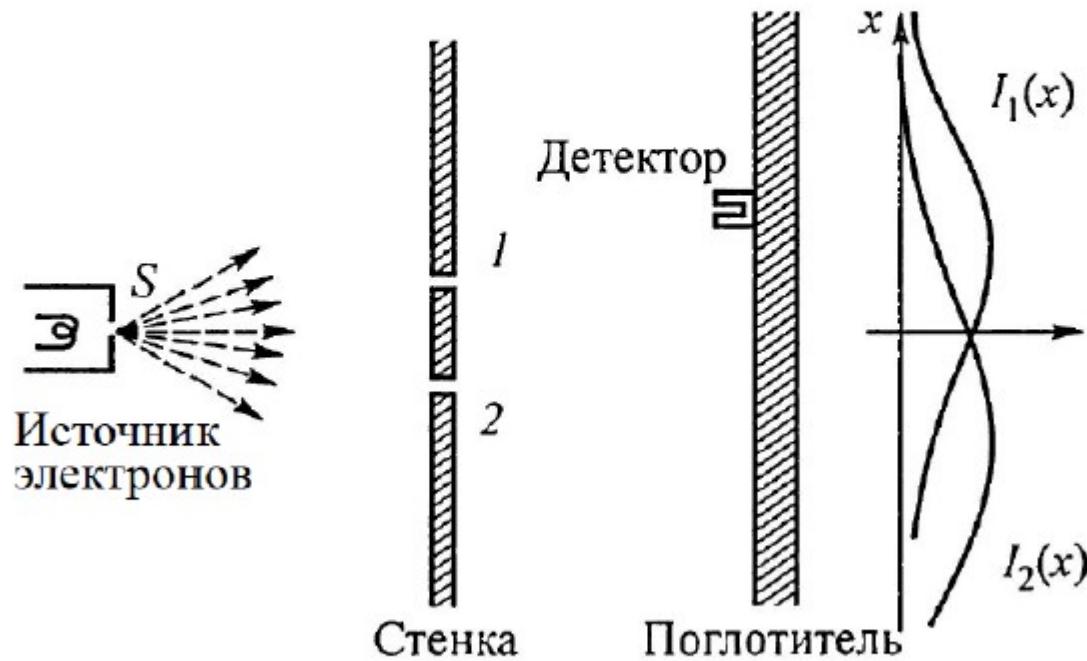
ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ВШОПФ

2025

Соотношения неопределенностей

Интерференционный опыт Юнга на электронах

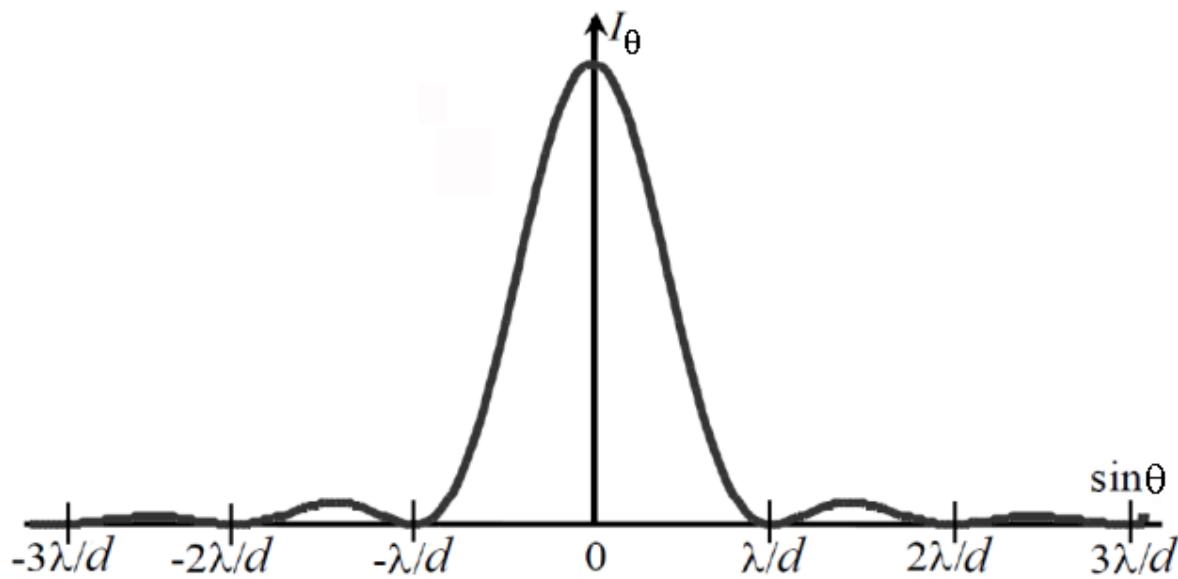
Аналог опыта Юнга 1802 г. по интерференции света на двух щелях.
Эксперимент на электронах - К. Йонсон (1961 г.).



Распределение интенсивности рассеянных электронов вдоль оси x
при одном открытом отверстии (1 или 2)

Замечание

Строго говоря, картина от дифракции на одной щели, помимо основного центрального максимума, содержит также последовательность чередующихся побочных максимумов и минимумов. Мы здесь для упрощения отвлечемся от этого факта, рассматривая лишь центральную часть дифракционной картины, содержащую главный максимум.



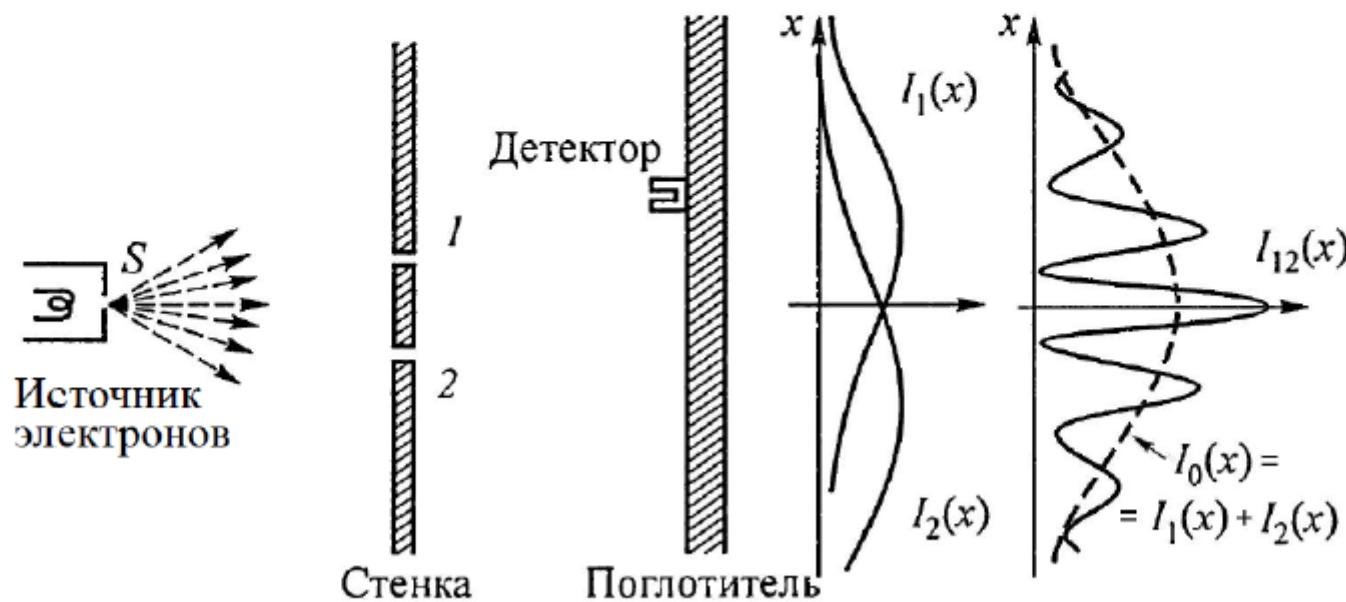
Дифракция Фраунгофера на одной щели: распределение интенсивности на экране в зависимости от синуса угла дифракции

При открывании обеих щелей вместо плавного распределения интенсивностей, представляющего собой сумму распределений интенсивностей от каждой щели:

$$I_0(x) = I_1(x) + I_2(x) \quad (11.1)$$

наблюдается интерференционная картина, содержащая множество максимумов и минимумов, как при дифракции света на такой же стенке. При этом

$$I_{12}(x) \neq I_1(x) + I_2(x). \quad (11.2)$$



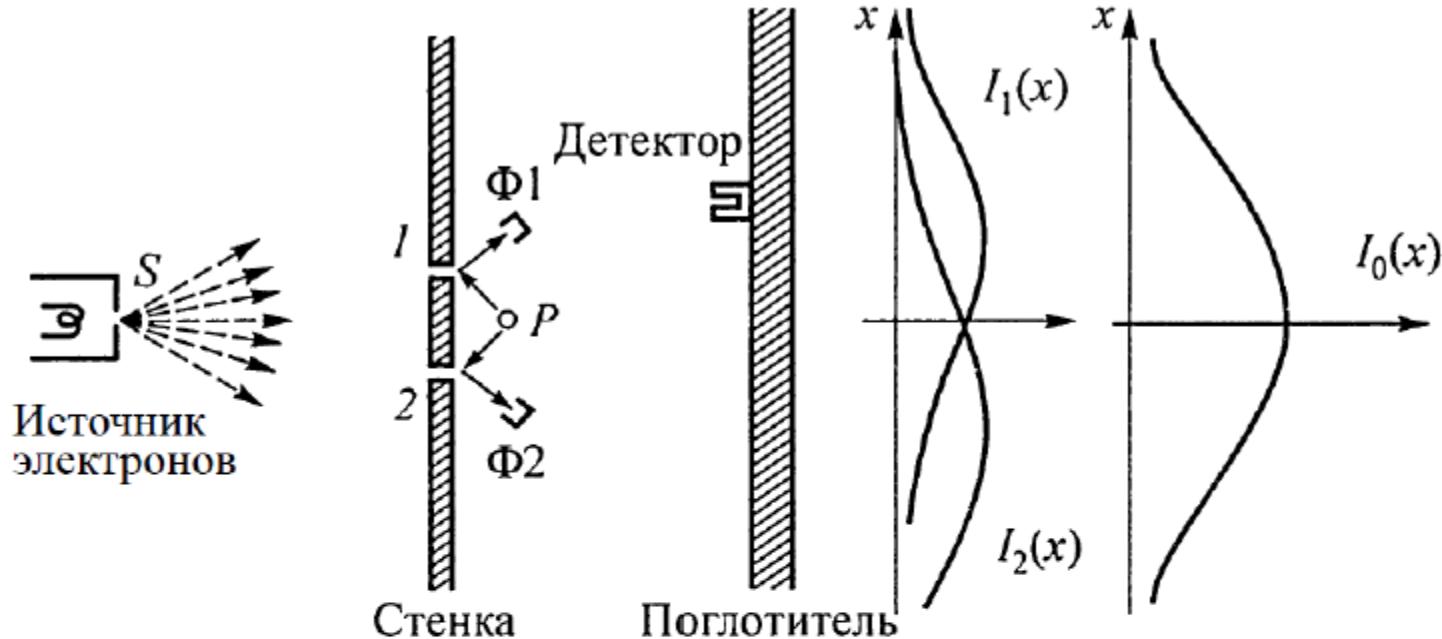
Интерференция электронов в схеме Юнга

Что с чем интерферирует?

Опыты Фабриканта-Бибермана-Сушкина → каждый электрон поодиночке даёт вклад в общую интерференционную картину.

Если бы электрон мог разделиться на две части, то можно было бы предположить, что интерферируют части одного электрона. Но, согласно всем экспериментам, электрон неделим. Тогда, казалось бы, одна часть электронов должна проходить через отверстие 1, а другая – через отверстие 2 → должна регистрироваться сумма $I_0(x) = I_1(x) + I_2(x)$, не содержащая каких-либо интерференционных максимумов → с точки зрения классической физики, интерференция электронов невозможна. Но она наблюдается в эксперименте!

Как же устроено прохождение электронов через отверстия в перегородке? Можно ли детально проследить за движением электронов? Можно попробовать это выяснить, используя рассеяние фотонов.



Рассеяние фотонов на электронах в схеме Юнга

Эксперимент: фотоприемники Φ_1 и Φ_2 не срабатывают одновременно \rightarrow электрон действительно не делится на части и не проходит через оба отверстия одновременно. Но при использовании фотоприемников детектор электронов регистрирует кривую попаданий электронов вида $I_0(x) = I_1(x) + I_2(x)$. \rightarrow При наблюдении за прохождением электронов интерференционная картина **исчезает!**

В чем причина?

Использование рассеяния фотонов → Фотон, взаимодействуя с электроном, изменяет его физические характеристики → В опытах без использования ФД и с их использованием реализуются разные физические процессы, что приводит к разным результатам.

Чтобы ослабить воздействие света на движущиеся электроны, можно попробовать

(1) ослабить его интенсивность или (2) уменьшить энергию и импульс рассеиваемых фотонов.

Результаты:

(1) С уменьшением интенсивности света начинает сказываться квантовая природа излучения: во время пролета электрона через систему щелей в этой области пространства может не оказаться ни одного фотона, и некоторые электроны проскаивают незамеченными: они достигают экрана, но ни одному из ФД не удается их зарегистрировать. Но именно в этом случае на экране начинает появляться интерференционная картина! → Незамеченные электроны характеризуются распределением $I_{12}(x)$.

(2) Убавить импульс фотонов – это означает использовать излучение более длинноволнового диапазона частот. Но, как известно, предельная разрешающая способность оптической аппаратуры составляет величину порядка длины волны λ (см. далее пример оптического микроскопа) → Как только длина волны используемого света окажется больше расстояния между щелями d ($\lambda \geq d$), зарегистрировав электрон, мы не сможем сказать, через какую из щелей он пролетел (при появлении электрона за любым из двух отверстий со сравнимой вероятностью мог сработать любой из двух детекторов). И опять, именно в этот момент появится интерференционная картина!

Получается, что надо выбирать одно из двух: либо мы наблюдаем интерференционную картину, но тогда мы не знаем, через какую из щелей прошел тот или иной электрон, либо мы имеем эту информацию, но тогда интерференционной картины не будет.

Как объяснить полученный результат?

Для получения достаточного пространственного разрешения длина волны рассеиваемого света должна быть меньше расстояния между щелями: $\lambda < d$.

Тогда для импульса фотона имеем $p = 2\pi\hbar/\lambda > 2\pi\hbar/d$. Этот импульс при рассеянии передается электрону. Так, если электрон до взаимодействия имел только продольный импульс, теперь он приобретет еще и поперечный импульс Δp_e больше или порядка $2\pi\hbar/d$:

$$\Delta p_e \geq \frac{2\pi\hbar}{d}. \quad (11.3)$$

В результате электрон отклонится на угол θ , равный

$$\theta \sim \frac{\Delta p_e}{p_e} \sim \frac{2\pi\hbar}{dp_e} \sim \frac{\lambda_D}{d}. \quad (11.4)$$

Но полученная величина как раз соответствует значению угла, под которым виден первый минимум интерференционной картины от одной щели \rightarrow электрон смещается вдоль приемного экрана на величину порядка размера интерференционной картины от одной щели, а, значит, и всей картины (двухщелевая интерференция наблюдается, когда картины от первой и второй щелей перекрываются) \rightarrow интерференционная картина размывается.

Как объяснить полученный результат?

Для получения достаточного пространственного разрешения длина волны рассеиваемого света должна быть меньше расстояния между щелями: $\lambda < d$.

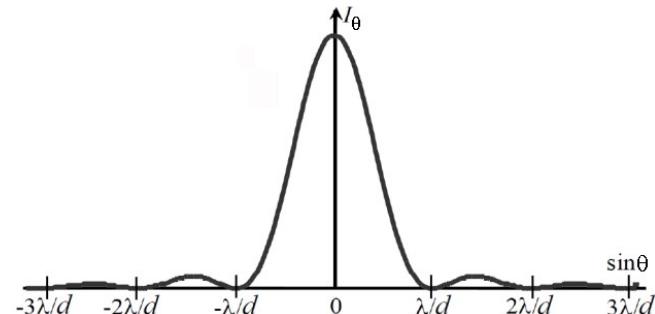
Тогда для импульса фотона имеем $p = 2\pi\hbar/\lambda > 2\pi\hbar/d$. Этот импульс при рассеянии передается электрону. Так, если электрон до взаимодействия имел только продольный импульс, теперь он приобретет еще и поперечный импульс Δp_e больше или порядка $2\pi\hbar/d$:

$$\Delta p_e \geq \frac{2\pi\hbar}{d}. \quad (11.3)$$

В результате электрон отклонится на угол θ , равный

$$\theta \sim \frac{\Delta p_e}{p_e} \sim \frac{2\pi\hbar}{dp_e} \sim \frac{\lambda_D}{d}. \quad (11.4)$$

Но полученная величина как раз соответствует значению угла, под которым виден первый минимум интерференционной картины от одной щели \rightarrow электрон смещается вдоль приемного экрана на величину порядка размера интерференционной картины от одной щели, а, значит, и всей картины (двухщелевая интерференция наблюдается, когда картины от первой и второй щелей перекрываются) \rightarrow интерференционная картина размывается.



В рассмотренном примере проявляется общее свойство процессов измерения над квантовыми объектами: измерение изменяет состояние квантового объекта. В нашей задаче, проводя измерение, мы произвели «перезагрузку». Если измерения не было, то начальное условие есть частица перед экраном с двумя щелями. После измерения произошло то, что называется *коллапсом волновой функции*. Мы теперь точно знаем координаты электрона, и начальным условием задачи становится частица в окрестности конкретной (1-й или 2-й) щели. В случае дифракции света это соответствовало бы помещению источника света вблизи одной из щелей. Результатом такой «перезагрузки» является то, что теперь на экране мы будем наблюдать типичную картину от дифракции на одной щели, без признаков чередования максимумов и минимумов, характерных для двухщелевой интерференции.

Таким образом, мы не можем точно проследить траекторию микрочастицы, не оказывая на неё заметное возмущающее воздействие. Само понятие траектории оказывается неприменимым к микрочастицам, что находит свое выражение в соотношениях неопределенности Гейзенберга.

Соотношения неопределенности Гейзенberга

Парадоксальные с точки зрения классической физики результаты лабораторных экспериментов с микрочастицами (напр., дифракция массивных микрочастиц на монокристаллах) и анализ мысленных экспериментов (см. далее) привели Вернера Гейзенберга (немецкий физик, 1927) к предположению о существовании некоторого фундаментального закона природы, который он назвал *принципом неопределенности*. Количественное выражение этого принципа – *соотношения неопределенности*:

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar \quad (11.5)$$

$$\Delta y \Delta p_y \geq 2\pi\hbar \quad (11.6)$$

$$\Delta z \Delta p_z \geq 2\pi\hbar \quad (11.7)$$

→ Любое тело не может в определенный момент времени иметь точные значения координаты и соответствующего ей импульса.

Частные случаи точного определения координаты или импульса.

Движение частиц микромира не описывается классической траекторией!

Отсутствие классических траекторий снимает «парадокс» прохождения электронов через перегородку с двумя отверстиями в рассмотренной выше схеме Юнга.

«Мысленные эксперименты» Гейзенберга

1. Измерение координаты частицы с использованием узкой щели

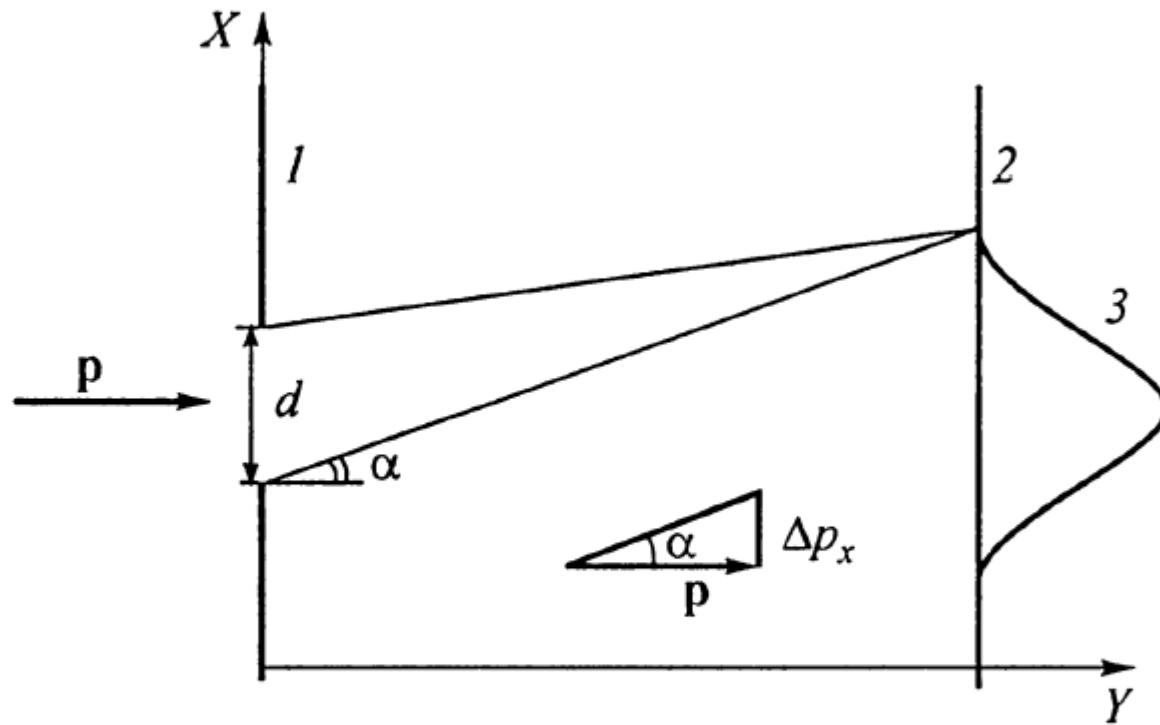


Схема прохождения электронов через щель

- 1 – непрозрачная перегородка со щелью, 2 – экран, регистрирующий электроны,
- 3 – главный максимум дифракционной картины;
- p – начальный импульс электрона, d – ширина щели

Наблюдение прохождения электрона через щель представляет собой измерение его координаты x в некоторый момент времени. Погрешность измерения координаты (Δx) – не менее ширины щели (d). Сужаем щель → уменьшаем неопределенность координаты Δx . Какой при этом может быть минимальная погрешность Δp_x измерения соответствующей проекции импульса?

Движение свободного электрона описывается монохроматической волной де Броиля с волновым вектором $\mathbf{k}=\mathbf{p}/\hbar$ и длиной волны $\lambda=2\pi\hbar/p$.

Взаимодействие электрона со щелью → дифракция Фраунгофера волны де Броиля на щели. Главный максимум дифракционной картины на экране ограничен симметричными относительно центра первыми нулями. Их положения определяются условием деструктивной интерференции:

$$d \sin \alpha \sim \lambda \quad (11.8)$$

(при расстоянии от щели до экрана, во много раз превышающем ширину щели, лучи, идущие от противоположных краев щели в заданную точку экрана, можно считать параллельными). Ширина главного максимума по полувысоте: $\sin \alpha = \lambda / 2d$.

Угол α определяет угловую ширину главного максимума дифракционной картины. Ширина главного максимума на экране оказывается больше, чем ширина щели.

Рассматривая электрон как частицу, увеличение степени его делокализации можно объяснить полученным им приращением проекции импульса p_x при взаимодействии со щелью. Это приращение (см. рисунок выше) находится в интервале от $-p \sin \alpha$ до $+p \sin \alpha$, т.е. возникающая неопределенность импульса равна

$$\Delta p_x = 2p \sin \alpha. \quad (11.9)$$

Выражая модуль импульса через длину волны де Броиля, $a \sin \alpha$ – из условия (11.8), получим

$$\Delta p_x = 2 \frac{2\pi\hbar}{\lambda} \frac{\lambda}{2d} = \frac{2\pi\hbar}{d}. \quad (11.10)$$

Заменяя ширину щели d на неопределенность координаты Δx , мы получим равенство $\Delta p_x = 2\pi\hbar / \Delta x$.

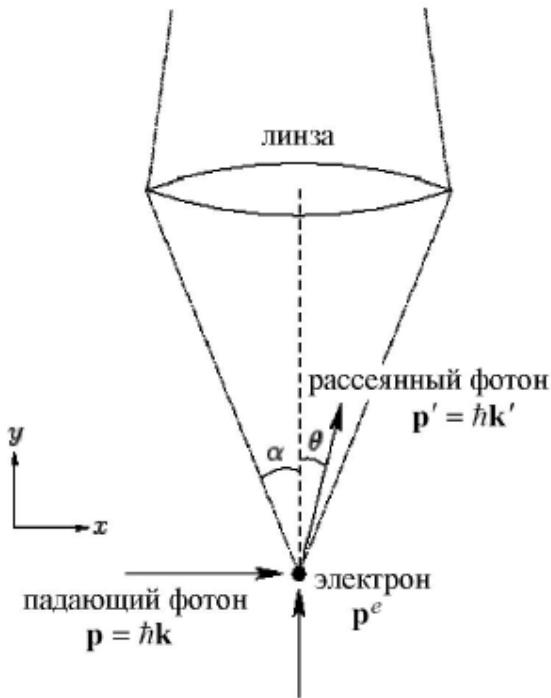
Оценка приращения проекции импульса была проведена нами по ширине главного максимума дифракционной картины. Учет побочных максимумов \rightarrow увеличение возможного приращения проекции импульса, определяющего неопределенность величины этой проекции. Таким образом, неопределенности координаты электрона и соответствующей проекции его импульса связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar, \quad (11.11)$$

а это есть не что иное как соотношение неопределенностей Гейзенберга.

2. Измерение координаты частицы с помощью микроскопа

Пусть свободный электрон имеет начальный импульс p^e и движется в направлении наблюдателя, т.е. вдоль оси y . Цель – определение x -координаты электрона.



«Микроскоп Гейзенберга»

Измерение координаты электрона осуществляется с помощью рассеяния на нем монохроматического света. Рассеянный фотон, попадающий внутрь конуса с углом раствора 2α , перехватывается объективом.

Вследствие дифракции на объективе точечный объект, попадающий в фокус линзы, отображается в фокальной плоскости окуляра в пятно конечного размера. Согласно классической оптике, размер этого изображения определяется длиной волны света λ и апертурой объектива микроскопа. Согласно дифракционной теории Аббе, минимальное расстояние между точками, которые отображаются микроскопом как раздельные, выражается формулой

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}. \quad (11.12)$$

Здесь α – угол, определяющий апертуру объектива (см. рисунок).

В реальности погрешность измерения координаты всегда превышает величину (11.12), что связано с неидеальным качеством линз и другими особенностями аппаратуры.

(11.12) → Точность измерения координаты можно улучшить, используя свет с более короткой длиной волны.

Теперь рассмотрим точность измерения проекции импульса частицы Δp_x . Казалось бы, эту точность можно повысить, поточнее измерив координату частицы в два различных момента времени, вычислив отсюда с большей точностью проекцию скорости v_x и,

соответственно, импульса p_x : $p_x \approx m_e \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$. Однако для измерения координаты

частицы необходимо, чтобы на ней рассеялся фотон. По законам сохранения часть импульса фотона при этом передастся наблюдаемой частице. → Импульс частицы изменится → возникнет неопределенность Δp_x . Оценим величину Δp_x .

В данном эксперименте свет представляет собой поток фотонов с импульсами, направленными вдоль горизонтальной оси и равными по модулю $2\pi\hbar/\lambda$.

Для получения информации о координате электрона рассеянный фотон должен попасть внутрь апертуры объектива микроскопа. Конкретное значение угла рассеяния при этом остается неизвестным. Известно лишь, что, поскольку рассеянный фотон попал в систему линз микроскопа, он двигался внутри конуса с углом раствора 2α (см. рисунок). Следовательно, составляющая p_x импульса для фотонов, рассеянных на электроне и попавших затем в объектив микроскопа, может иметь любое значение внутри некоторого конечного интервала. Но, согласно закону сохранения импульса, в этом же интервале будет лежать и измеряемый в данном эксперименте импульс электрона. Найдем этот интервал значений импульса.

Согласно рисунку, компоненты (k_x, k_y) волнового вектора падающего фотона могут быть записаны как $(k, 0)$. Тогда компоненты волнового вектора фотона, рассеянного на угол θ , запишутся как $(k \sin \theta, k \cos \theta)$. → Для изменения x -компоненты волнового вектора рассеянного фотона имеем $\Delta k_x = k(\sin \theta - 1)$. → x -компоненты импульса фотона изменяется на величину $\Delta p_x = \hbar k(\sin \theta - 1)$. В соответствии с законом сохранения импульса, записанным для x -компоненты $(\Delta p_x + \Delta p_x^e = 0)$, x -компоненты импульса электрона должна измениться на ту же величину, что и у фотона, но с противоположным знаком, т.е. в результате рассеяния фотона электрон приобретает импульс отдачи, x -компоненты которого равна $p_x^e = \hbar k(1 - \sin \theta)$.

Рассеянию фотона в диапазон углов от $\theta = \alpha$ до $\theta = -\alpha$ соответствует разброс значений p_x^e в пределах от $\hbar k(1 - \sin \alpha)$ до $\hbar k(1 + \sin \alpha)$, т.е. неопределенность x -проекции импульса электрона, измеряемой данным методом, равна $2\hbar k \sin \alpha$, или

$$\Delta p_x \approx \frac{4\pi\hbar \sin \alpha}{\lambda} \quad (11.13)$$

(значок « e » у импульса опускаем).

Отсюда видно, что для уменьшения неопределенности проекции импульса нужно увеличивать длину волны света λ . Но, с другой стороны, согласно (11.12), для уменьшения неопределенности координаты надо эту длину волны уменьшать.



Мы приходим к выводу, что невозможно одновременно сделать малыми обе неопределенности Δx и Δp_x . Действия, уменьшающие одну неопределенность, увеличивают другую.

Произведение величин неопределенностей (11.12) и (11.13) дает соотношение

$$\Delta x \Delta p_x \geq 2\pi\hbar. \quad (11.14)$$



Мы опять приходим к соотношению неопределенностей Гейзенберга.

О возможности делимости фотона

В двухщелевом эксперименте с электронами, рассмотренном нами раньше, фотоприемники не срабатывают одновременно – электрон всегда проходит или через одну щель, или через другую, и никогда не делится на части. А может ли делиться на части фотон?

Для рассмотрения этого проанализируем результаты эксперимента, схема которого представлена ниже.

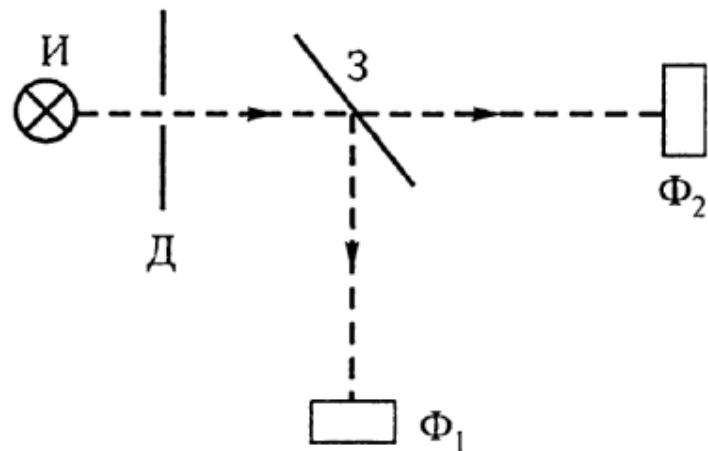


Схема прохождения фотонов через полупрозрачное зеркало:

И – источник монохроматических фотонов, Д – диафрагма,
З – полупрозрачное зеркало, Φ_1 и Φ_2 – фотоэлементы.

Пусть источник испускает видимый свет с определенной частотой ω . После прохождения диафрагмы сформировавшийся узкий пучок света попадает на полупрозрачное зеркало, которое расщепляет пучок на два – (1) рассеянный под прямым углом и (2) проходящий. Для измерения интенсивностей этих пучков используются фотоэлементы Φ_1 и Φ_2 .

Пусть сначала падающее излучение имеет достаточно высокую интенсивность. Фотоэлементы в этом случае регистрируют интенсивные рассеянный и прошедший сигналы одинаковой величины. С точки зрения классической физики это ожидаемо: падающая ЭМ волна расщепляется на две части одинаковой интенсивности.

С точки зрения квантовой теории пучок падающего излучения состоит из фотонов с одинаковой энергией $\hbar\omega$. Чтобы установить, что происходит с каждым отдельным фотоном при расщеплении падающей волны на две, можно выбрать фотоэлементы из материала с таким значением работы выхода, что они будут регистрировать только

фотоны с энергиями, превышающими, например, $\frac{2}{3}\hbar\omega$. Такие фотоэлементы не будут

реагировать на попадание в них фотонов с «половинной» энергией, равной $\frac{1}{2}\hbar\omega$.

Наблюдения показывают, что в данном эксперименте оба детектора регистрируют некоторую интенсивность излучения. → Отдельные фотонны не делятся пополам,

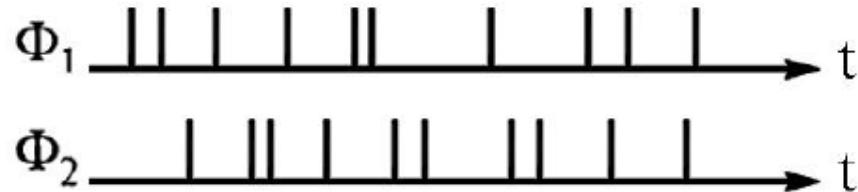
т.к. при таком делении каждая часть получила бы энергию $\frac{1}{2}\hbar\omega$, и ни один из

детекторов ничего бы не зарегистрировал. Кроме того, деление фотона пополам, означающее уменьшение вдвое его частоты, привело бы к наблюдению изменения цвета рассеянного и прошедшего пучков по сравнению с цветом падающего пучка.

Такого изменения цвета в опытах не наблюдается → гипотеза о делении фотона на две части не подтверждается.

Равенство интенсивностей, регистрируемых фотоэлементами, означает, что за единицу времени на них приходит очень близкое к одинаковому количество фотонов.

Далее будем уменьшать интенсивность потока падающего излучения (подобно тому, как ослаблялся электронный пучок в опытах Фабриканта и др. по дифракции одиночных электронов). Если интенсивность светового пучка становится очень малой, то фотоэлементы регистрируют отдельные фотоны. При этом попадания в разные детекторы распределяются во времени случайным образом, хотя средние количества фотонов, попавших в детекторы Φ_1 и Φ_2 , остаются равными (см. рисунок ниже).



Сигналы на фотоэлементах Φ_1 и Φ_2

Результаты данного опыта показывают, что фотон, проходя через полупрозрачное зеркало, с равной вероятностью может рассеяться и попасть в детектор Φ_1 или пройти насеквость и попасть в детектор Φ_2 . При этом у каждого фотона энергия остаётся неизменной. Таким образом, рассеяние или прохождение фотонов при взаимодействии с полупрозрачным зеркалом являются случайными событиями, в которых проявляются корпускулярные свойства света.