

Измерение ёмкости конденсатора

Бояринцева Н.А.

Можаров А.Р.

26 декабря 2023

Теоретическая часть

В данной лабораторной работе для измерения ёмкости конденсатора используется измерительный мост (рис. 1).

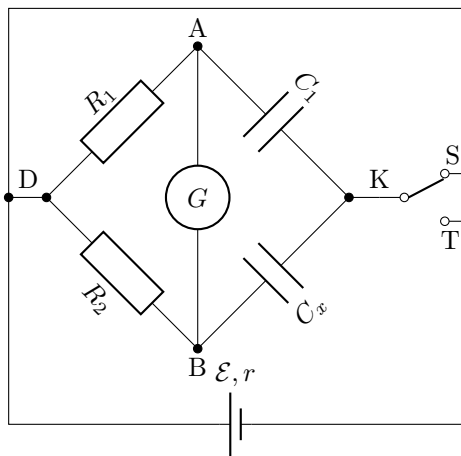


Рис. 1: Измерительный мост

Здесь R_1 и R_2 представляют собой магазины сопротивлений. Конденсатор C_1 является эталонным (его ёмкость известна с достаточно высокой точностью). Конденсатор C_x , соответственно, является неизвестным, ёмкость которого предстоит измерить. В качестве измерительного прибора G (*нуль-индикатора*) используются *нуль-гальванометр* (обычный гальванометр, применяемый для регистрации отсутствия тока) или осциллограф.

В положении ключа T происходит зарядка конденсаторов. В положении S , соответственно, разрядка.

Условие баланса моста

Условием баланса моста называется условие, при котором напряжение на нуль-индикаторе U_G равно нулю. Попробуем найти это условие.

Выведем это условие из упрощающих нам жизнь предположений, что сопротивление измерительного прибора достаточно велико, чтобы через него тёк ток, и внутреннее сопротивление источника достаточно мало, чтобы создавать заметное падение напряжения.

Запишем второй закон Кирхгофа для контура DAKTD:

$$I_1 R_1 + \frac{q_1}{C_1} = \mathcal{E}$$

Ввиду наших предположений:

$$I_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

Тогда поделив всё это безобразия на R_1 получаем несложное дифференциальное уравнение:

$$\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{R_1 C_1} = \frac{\mathcal{E}}{R_1}$$

Разделяем переменные:

$$\begin{aligned}\frac{dq_1}{dt} &= \frac{\mathcal{E}}{R_1} - \frac{q_1}{R_1 C_1} = \frac{\mathcal{E} C_1 - q_1}{R_1 C_1} \\ \frac{dq_1}{\mathcal{E} C_1 - q_1} &= \frac{dt}{R_1 C_1} \\ \frac{d(q_1 - \mathcal{E} C_1)}{q_1 - \mathcal{E} C_1} &= -\frac{dt}{R_1 C_1} \\ \ln(q_1 - \mathcal{E} C_1) &= -\frac{1}{R_1 C_1} t + \text{const} \\ q_1(t) &= \mathcal{E} C_1 + \text{const} \cdot \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\end{aligned}$$

И, ввиду начальных условий $q_1(0) = 0$, получаем зависимость заряда q_1 на конденсаторе C_1 от времени:

$$q_1(t) = \mathcal{E} C_1 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\right)$$

Тогда напряжение на том же конденсаторе:

$$U_1(t) = \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\right)$$

Аналогичным образом найдём напряжение на измеряемом конденсаторе:

$$U_x(t) = \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{R_2 C_x}\right)\right)$$

Пусть в точке A потенциал φ_A , в точке B потенциал φ_B , в точке K потенциал φ_K , тогда:

$$\varphi_K - \varphi_A = U_1(t) \quad \varphi_K - \varphi_B = U_x(t)$$

Тогда напряжение на нуль-индикаторе:

$$\begin{aligned}U_G(t) &= \varphi_A - \varphi_B = (\varphi_K - \varphi_B) - (\varphi_K - \varphi_A) = U_x(t) - U_1(t) \\ U_G(t) &= \mathcal{E} \left(\exp\left(-\frac{t}{R_2 C_x}\right) - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\right)\end{aligned}$$

Чтобы выполнялось условие баланса моста:

$$\begin{aligned}U_G(t) &= 0 \\ \mathcal{E} \left(\exp\left(-\frac{t}{R_2 C_x}\right) - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\right) &= 0 \\ \exp\left(-\frac{t}{R_2 C_x}\right) - \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right) &= 0 \\ \exp\left(-\frac{t}{R_2 C_x}\right) &= \exp\left(-\frac{t}{R_1 C_1}\right)\end{aligned}$$

Прологарифмируем по основанию e :

$$-\frac{t}{R_2 C_x} = -\frac{t}{R_1 C_1}$$

Таким образом условием баланса моста будет:

$$R_1 C_1 = R_2 C_x \tag{1}$$

Неизвестную ёмкость можно же будет найти из формулы:

$$C_x = C_1 \frac{R_1}{R_2} \tag{2}$$

Режимы измерения

Заметим, что время зарядки конденсатора достаточно не велико и при использовании мостовой схемы имеет место не моментальный отклик прибора. В зависимости от включённого в цепь измерительного прибора, данная лабораторная работа предполагает два метода измерений с использованием мостовой схемы:

1. *Безынерционный.*

Этот метод предполагает использование прибора с достаточным быстродействием для регистрации импульсов $U_G(t)$. В данной лабораторной работе этим прибором является осциллограф.

2. *Инерционный (он же баллистический).*

Этот метод, соответственно, предполагает использование прибора с недостаточным быстродействием. В данной лабораторной работе этим прибором является высокочувствительный нуль-гальванометр.

Погрешности

Погрешность измерения — отклонение измеряемого значения величины от истинного. Погрешности можно классифицировать по источнику возникновения:

1. *Инструментальная.*

Обусловлена несовершенством измерительных приборов.

2. *Методическая.*

Обусловлена неточностью модели физического процесса.

3. *Субъективная.*

Обусловлена личными особенностями экспериментатора (к примеру скорость реакции).

И прочие. По характеру проявления погрешности могут быть:

1. *Систематическая.*

Остаётся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

2. *Случайная.*

Возникает при некотором случайном событии во время эксперимента.

(К примеру хлопок дверью соседней лаборатории во время проведения акустического эксперимента)

А по способу выражения:

1. *Абсолютная.*

Разность истинного значения величины и измеренного.

$$\Delta X_i = X_i - X_0$$

Поскольку при проведении эксперимента не всегда бывает точно известно истинное значение измеряемой величины, то вместо него принимается некоторое среднее значение, полученное в ходе эксперимента.

$$\Delta X_i = X_i - \bar{X}$$

2. *Относительная.*

Отношение погрешности величины к самой величине.

$$\delta X = \frac{\Delta X_i}{X_i}$$

Все же измерения можно классифицировать на два класса:

1. *Прямые измерения.*

Непосредственное измерение значения величины соответствующим прибором.

(Измерение длины стола рулеткой)

2. *Косвенные измерения.*

Вычисление значения величины по известной зависимости искомой величины от известных.

(Измерение средней скорости: отдельно измеряется пройденное расстояние, отдельно время движения)

Погрешности при косвенных измерениях. Если требуется измерить некоторую величину $f(x_1, x_2, \dots)$, то:

1. При сумме складываются абсолютные погрешности.

Т.е. если $f(x_1, x_2, \dots) = x_1 + x_2 + \dots$, то

$$\Delta f = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \dots$$

2. При произведении (и частном) складываются относительные погрешности.

Т.е. если $f(x_1, x_2, \dots) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots$, то

$$\delta f = \delta x_1 + \delta x_2 + \dots$$

3. При произвольной зависимости имеет место более общая формула:

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \Delta x_2\right)^2 + \dots}$$

Однако данная формула справедлива только при условии независимости параметров x_1, x_2, \dots

Практическая часть

Класс точности магазинов сопротивлений R_1 и R_2 : 0,2, т.е. при максимально возможном сопротивлении $R_{max} = 100$ кОм абсолютная погрешность составляет $\Delta R = 200$ Ом. Ёмкость эталонного конденсатора $C_1 = 1 \pm 0,002$ мкФ.

Ввиду формулы (2), относительная формула для погрешности измерения ёмкости конденсатора будет иметь вид:

$$\delta C_x = \delta C_1 + \delta R_2 + \delta R_1$$

1. Измерить неизвестную ёмкость C_x прямым измерением (рис. 2).

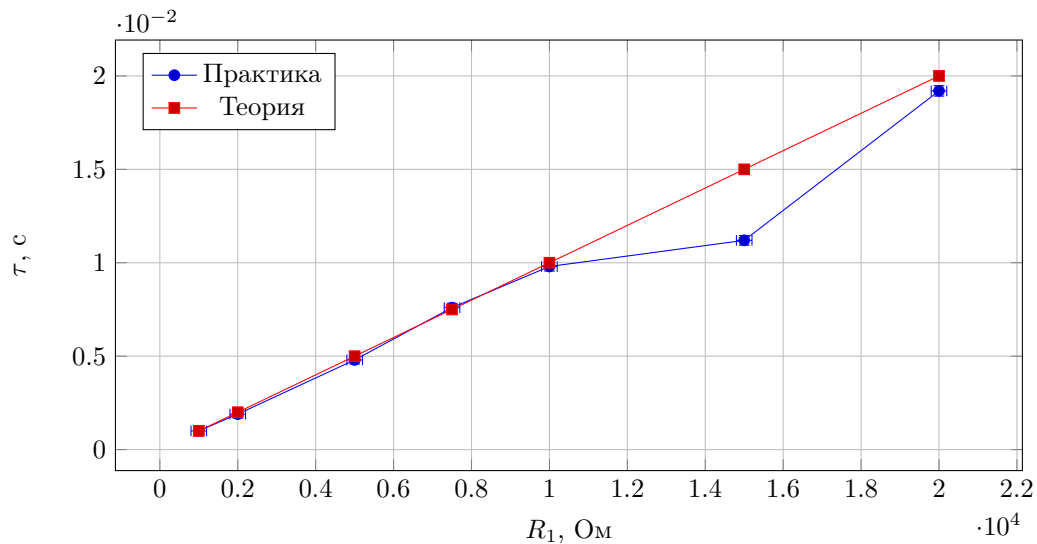


Рис. 2: Прямое измерение

Как видно из графика, линейная зависимость τ от $R_1 C_1$ соблюдается достаточно точно, за исключением точки $R_1 = 15$ кОм, в которой, видимо, имела место ошибка проведения эксперимента.

2. Измерить неизвестную ёмкость C_x безынерционным методом (рис. 3).

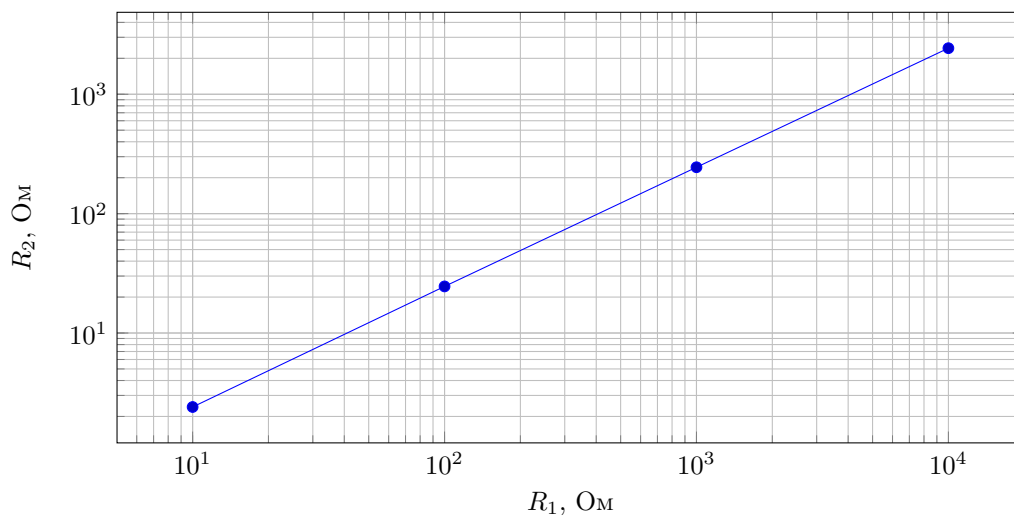


Рис. 3: Безынерционный метод

Результат измерения ёмкости данным способом: $C_x = 4,11$ мкФ.

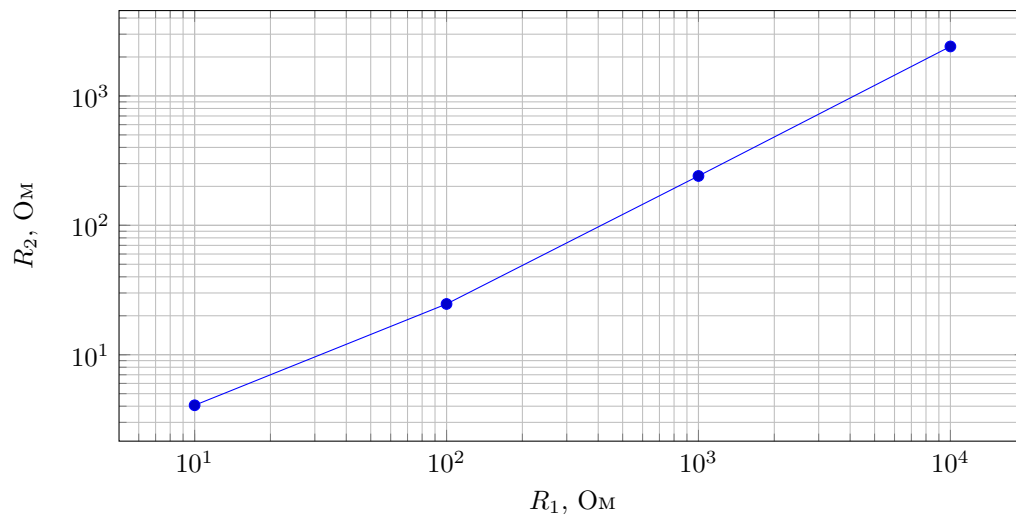


Рис. 4.1: 12 В

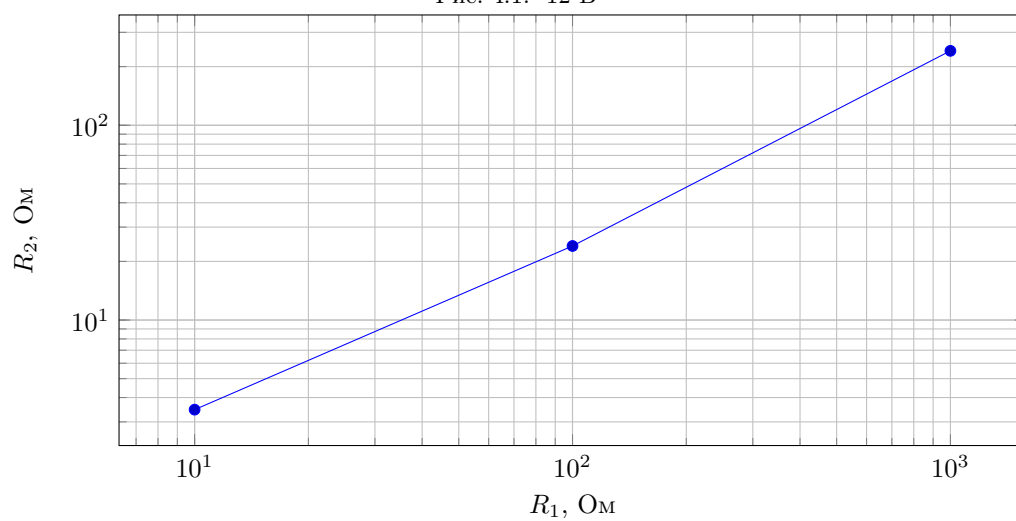


Рис. 4.2: 24 В

Рис. 4: Инерционный метод

3. Измерить неизвестную ёмкость C_x инерционным методом (рис. 4).

Результат измерения ёмкости данным способом: при $U = 12$ В $C_x = 3,70$ мкФ, а при $U = 24$ В $C_x = 3,73$ мкФ.