

# Вопросы и билеты

Национальный исследовательский  
Нижегородский Государственный Университет  
имени Н.И. Лобачевского  
Высшая Школа Общей и Прикладной Физики

Последнее обновление: 20 января 2024 г.

## Курс 1 Семестр 1

### Математический анализ

#### Билет 1:

1. Мощность множеств. Счётные множества и множества мощности континуум.
2. Число  $e$ .
3. Интегралы с переменным верхним пределом и их свойства.

#### Билет 2:

1. Определение точной верхней и точной нижней границы множества.
2. Вторая теорема Больцано-Коши.
3. Интеграл с переменным верхним пределом и его свойства. Определение интеграла Римана и его графический смысл.

#### Билет 3:

1. Теорема о существовании арифметического корня.
2. Первая теорема Больцано-Коши.
3. Формула Ньютона-Лейбница.

#### Билет 4:

1. Теорема о вложенных отрезках (в т.ч. в случае стремления к нулю длины отрезков).
2. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне.

3. Достаточное условие интегрируемости монотонной функции.

**Билет 6:**

1. Теорема о единственности предела последовательности.
2. Второй замечательный предел.
3. Интегралы с подстановками Эйлера.

**Билет 7:**

1. Необходимое условие сходимости.
2. Первый замечательный предел.
3. Критерии интегрирования в терминах колебаний.

**Билет 8:**

1. Бином Ньютона.
2. Первая теорема Вейерштрасса (возможные вопросы: определения ограниченной и непрерывной функции).
3. Эквивалентные условия интегрируемости в терминах колебаний.

**Билет 9:**

1. Теорема Больцано-Вейерштрасса о подпоследовательностях.
2. Эквивалентность дифференцируемости и существования производной в точке.
3. Свойства сумм Дарбу.

**Билет 10:**

1. Критерий Коши для последовательностей.
2. Теорема о непрерывности обратной функции.
3. Интеграл Римана. Необходимое условие интегрируемости.

**Билет 11:**

1. Теорема Вейерштрасса для монотонной функции.
2. Теорема Лагранжа.
3. Линейные свойства определённого интеграла.

**Билет 12:**

1. Арифметические свойства предела.
2. Теорема Коши.
3. Аддитивные свойства определённого интеграла.

**Билет 13:**

1. Неполнота и алгебраическая незамкнутость поля рациональных чисел.
2. Теорема Роля (возможные вопросы: теорема Вейерштрасса и теорема Ферма).
3. Множества меры ноль и их свойства. Критерий Лебега интегрируемости по Риманы.

**Билет 14:**

1. Теорема о двух милиционерах.
2. Вторая теорема Вейерштрасса.
3. Условия интегрируемости для непрерывных функций и функций с конечным числом разрывов.

**Билет 15:**

1. Сравнение бесконечно малых функций (возможные вопросы: определение предела функции по Коши и по Гейне).
2. Параметрически заданные функции и их производные (возможные вопросы: определение производной, теорема Коши).
3. Интегрируемость суммы и произведения интегрируемых функций.

## **Механика**

Вопросы коллоквиума по разделам «Движение в неинерциальных системах отсчёта» и «Колебательное движение» (по состоянию первого курса 2022/2023 года):

**Билет 1:** Уравнение движения в неинерциальной системе отсчета: простейшие примеры и общий случай. Силы инерции.

**Билет 2:** Система отсчета, связанная с Землей. Эффекты, связанные с суточным вращением Земли.

**Билет 3:** Система отсчета, связанная с Землей. Приливы: качественная картина, оценка высоты приливной волны.

**Билет 4:** Гармонические колебания (определение и основные характеристики; закон сохранения энергии; фазовый портрет; примеры).

**Билет 5:** Физический маятник (малые колебания: период, приведенная длина, зависимость периода колебаний от положения точки подвеса).

**Билет 6:** Физический маятник (произвольные колебания: фазовый портрет, качественный анализ движения).

**Билет 7:** Затухающие свободные колебания (определение и основные характеристики; фазовый портрет; примеры).

**Билет 8:** Линейный осциллятор под действием гармонической внешней силы (характеристики стационарных колебаний; влияние диссипации).

**Билет 9:** Резонанс. Установление амплитуды колебаний. Зависимость от декремента затухания.

**Билет 10:** Гармонический осциллятор с медленно меняющейся частотой. Адиабатические инварианты.

## Аналитическая геометрия

Вопросы к экзамену (Разуваев):

1. Операции над векторами и их свойства. Доказать свойство ассоциативности.
2. Определение пропорциональности векторов. Доказать равносильность коллинеарности и пропорциональности векторов.
3. Геометрическое определение базиса на прямой  $V_1$ , плоскости  $V_2$  и пространстве  $V_3$ . Теоремы о разложении любого вектора по базису (случаи  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$ ).
4. Определение координат вектора (рассмотреть случай пространства  $V_3$ ). Операции над векторами в координатной форме. Доказать критерий коллинеарности векторов в координатной форме.
5. Определение линейно зависимых и линейно независимых систем векторов. Алгебраическое определение базиса в векторном пространстве.
6. Определение скалярного произведения векторов и его свойства. Выражение скалярного произведения векторов в координатной форме в общем случае и случае ортонормированного базиса.
7. Понятие ориентации тройки векторов и циклической перестановки. Определение и свойства векторного произведения векторов.
8. Определение смешанного произведения векторов. Доказать численное равенство модуля смешанного произведения векторов и значения объёма параллелепипеда, построенного на этих векторах.
9. Критерий коллинеарности трёх векторов.
10. Вывод формулы векторного произведения в координатной форме в общем случае и в случае ортонормированного базиса.
11. Вывод формулы смешанного произведения в координатной форме.

12. Матрица перехода в  $V_2$ . Невырожденность матрицы перехода. Закон изменения координат вектора при изменении базиса.
13. Определение аффинного пространства и аффинной системы координат. Определение координат точки и координат вектора. Изменение координат точки при изменении системы координат.
14. Уравнение линии на плоскости. Определение алгебраической линии  $n$ -ого порядка. Доказать инвариантность понятия алгебраической линии и её порядка относительно изменения декартовой системы координат для случая алгебраической линии первого порядка.
15. Вывод векторного, параметрического и канонического уравнений прямой на плоскости.
16. Вывод уравнения прямой по двум точкам и общего уравнения прямой.
17. Доказать теорему о взаимном расположении прямых на плоскости.
18. Определение пучка прямых на плоскости. Вывод уравнения пучка прямых на плоскости.
19. Вывод формулы расстояния от точки до прямой на плоскости.
20. Определение алгебраической поверхности и её порядка. Векторно-параметрическое и параметрическое уравнения плоскости.
21. Теорема о задании линейным уравнением в произвольной системе координат и обратный случай. Общее уравнение плоскости.
22. Определение вектора нормали к плоскости. Координаты вектора нормали к плоскости, заданной общим уравнением в прямоугольной системе координат.
23. Вывод формулы расстояния от точки до плоскости.
24. Уравнение линии в пространстве. Вывод уравнений прямых в пространстве.
25. Вывод формулы расстояния между скрещивающимися прямыми.
26. Эллипс и теорема о модулях радиус-векторов эллипса.
27. Критерий принадлежности точки эллипсу ( $r_1 + r_2 = 2a$ ).
28. Гипербола и теорема о модуле радиус-векторов гиперболы.
29. Критерий принадлежности точки гиперболе ( $|r_1 - r_2| = 2a$ ).
30. Парабола.

## История

1. Славяне. Восточные славяне.
2. Киевская Русь и её соседи. Норманская теория. Обзор деятельности первых русских князей.
3. Социально-экономическое и политическое развитие Киевской Руси в IX – X веках.
4. Княжение Владимира. Крещение Руси. Значение принятия христианства.
5. Время Ярослава Мудрого. Киевская Русь в XI веке.
6. Княжение Владимира Мономаха (1113 – 1125). Киевская Русь в XII веке. Феодалная раздробленность Руси. Владимиро-Суздальская Русь.
7. Невская битва (1240 год). Александр Невский. Ледовое побоище (1242 год).
8. Русь и монголо-татары.
9. Великое княжество Московское в XIV – XV веках. Иван Калита.
10. Борьба Московского княжества с Золотой Ордой. Дмитрий Иванович Донской. Куликовская битва.
11. Объединение русских земель вокруг Московского княжества.
12. Объединение русских земель в единое государство. Иван III.
13. Россия в первой половине XVI века.
14. Реформы Ивана IV Грозного. Опричнина.
15. Внешняя политика Ивана IV.
16. Русское государство в конце XVI века. Внутренняя и внешняя политика царя Фёдора (1584 – 1598).
17. «Смута» в России в начале XVII века. Самозванничество.
18. Борьба русского народа с польской интервенцией. Нижегородское ополчение под предводительством Кузьмы (в последствии Козьмы) Минина и Дмитрия Пожарского.
19. Правление царя Михаила Фёдоровича Романова (1613 – 1645).
20. Правление царя Алексея Михайловича (1645 – 1676). Соборное уложение 1649 года.
21. Церковь и раскол в XVII веке. Протопоп Аввакум. Патриарх Никон. Соловецкое восстание.

22. Внешняя политика при Алексее Михайловиче. Воссоединение Украины с Россией.
23. Социальные протесты XVII века. Крестьянская война под предводительством Степана Тимофеевича Разина.
24. Царствование Петра I. Социально-экономическое развитие России на рубеже XVII – XVIII веков.
25. Внешняя политика Петра I.
26. Реформы Петра I Великого и их историческое значение.
27. Дворцовые перевороты.
28. Внутренняя политика Екатерины II. «Уложенная комиссия» (1767 – 1768 годов).
29. Просвещённый абсолютизм.
30. Социально-политическое развитие России во второй половине XVIII века. «Золотой век дворянства».
31. Внешняя политика России в период правления Екатерины II (1762 – 1796 годы).
32. Правление Павла I (1796 – 1801 годы).

## **Курс 1 Семестр 2**

### **Математический анализ**

#### **Билет 1:**

1. Признаки сравнения сходимости несобственных интегралов.
2. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
3. Переход к пределу под знаком интеграла для семейства функций.

#### **Билет 4:**

1. Компактные множества в метрических пространствах. Необходимое условие компактности.
2. Признак Раабе.
3. Ряды Фурье. Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье.

#### **Билет 5:**

1. Связность и линейная связность. Образ связного множества при непрерывном отображении.

2. Признак Дирихле для числового ряда.
3. Переход к пределу под знаком интеграла для семейства функций.

**Билет 6:**

1. Критерий компактности в  $\mathbb{R}^n$ .
2. Признак Даламбера сходимости положительного ряда.
3. Дифференцируемость интеграла, зависящего от параметра.

**Билет 7:**

1. Образ компакта при непрерывном отображении.
2. Формула Коши-Адамара.
3. Бета-функция и её свойства.

**Билет 8:**

1. Достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.
2. Критерий сходимости положительного ряда.
3. Равенство Парсеваля и неравенство Бесселя.

**Билет 9:**

1. Теорема о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций.
2. Равномерная сходимость и интегрирование.
3. Разложение в ряд Тейлора:  $\ln(1+x)$ ,  $\arctg(x)$ .

**Билет 10:**

1. Связность и линейная связность. Образ связного множества при непрерывном отображении.
2. Достаточное условие абсолютного экстремума.
3. Интегральный признак сходимости.

**Билет 11:**

1. Инвариантность первого дифференциала.
2. Совпадение смешанных частных производных.
3. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Аналог теоремы Вейерштрасса.

**Билет 12:**

1. Равномерная непрерывность. Обобщение теоремы Кантора.
2. Теорема Абеля о поведении степенного ряда на границе интервала сходимости.
3. Признак Дини.



## Термодинамика и молекулярная кинетическая теория

Известные билеты:

### Билет 3:

1. Идеальный газ. Агрегатные состояния вещества. Закон Дальтона.
2. Молекулярно-кинетическая формулировка температуры и теплового равновесия.

### Билет 4:

1. Теплоёмкость.
2. Распределение Ферми-Дирака

### Билет 9:

1. Статистика Бозе-Эйнштейна.
2. Вязкость газа; внутреннее трение; коэффициент вязкости; сила вязкого трения; оценка коэффициента вязкости.

### Билет 10:

1. Термодинамические процессы; квазистатические процессы (обратимые); адиабатическое расширение и сжатие (общий вид, примеры).
2. Спектр излучения абсолютно чёрного тела; распределение по степеням свободы для электромагнитного излучения; формула Планка; закон Стефана-Больцмана; закон Вина.

### Билет 13:

1. Второе начало термодинамики.
2. Фазы вещества: классификация и условие равновесия.

### Билет 14:

1. Обратимые круговые процессы. Идеальный газ. Цикл Карно.
2. Вывод уравнения Клайперона-Клаузиуса.

### Билет 17:

1. Энтропия обратимых и необратимых процессов. Неравенство Клаузиуса.
2. Поверхностное натяжение и его термодинамический смысл (связь коэффициента полезного действия с температурой).

### Билет 18:

1. Коэффициент полезного действия в необратимом круговом процессе (физические причины необратимости; примеры).
2. Смачивание и несмачивание; условие равновесия границы; краевой угол (примеры).

**Билет 19:**

1. Реальные газы (определение); газ Ван-дер-Ваальса (уравнение; изотермы в координатах  $P(V)$ ; внутренняя энергия; теплоёмкость).
2. Соотношение между давлением и кривизной поверхности; формулы Лапласа; закон Жюрена.

**Билет 20:**

1. Термодинамическое и статистическое определение макропараметров физической системы. Эргодические системы.
2. Характер движения отдельной частицы в газе. Длина свободного пробега. Среднеквадратичное отклонение частицы от начального положения.

Вопросы к экзамену (по состоянию 1 курс 2022/2023 года):

1. Способы описания систем многих частиц. Термодинамическое описание. Внутренние и внешние параметры. Уравнение состояния.
2. Понятие температуры. Абсолютная шкала температур. Абсолютный нуль. Давление.
3. Агрегатные состояния вещества. Идеальный газ (уравнение состояния идеального газа: вывод, пределы применимости). Закон Дальтона.
4. Идеальный газ во внешнем силовом поле. Барометрическая формула: вывод, частные случаи, условия применимости.
5. Работа (элементарная работа; работа при конечном процессе; геометрическая интерпретация; положительная и отрицательная работа; круговые процессы). Внешние параметры и обобщенные силы.
6. Адиабатическая оболочка. Внутренняя энергия. Количество тепла. Первый принцип термодинамики.
7. Звук как волна деформации. Скорость звука в газе. Изотермический и адиабатический звук.
8. Теплоемкость (теплоемкость физической системы; удельная и молярная теплоемкость; зависимость теплоемкости от процесса; примеры).
9. Термодинамическое равновесие. Функции состояния термодинамической системы. Энтальпия (определение, физический смысл, примеры).

10. Термодинамические процессы. Квазистатические (обратимые) процессы. Адиабатическое расширение и сжатие (определение; общие соотношения для обратимого процесса; примеры).
11. Процесс Джоуля-Томсона. Закон Джоуля. Необратимые термодинамические процессы.
12. Второй принцип термодинамики (формулировка; физический смысл; примеры: тепловые двигатели с одним и двумя тепловыми резервуарами).
13. Обратимый круговой процесс. Идеальный цикл Карно (прямой и обратный цикл Карно; второй принцип для обратимых круговых процессов).
14. Теорема Карно. Абсолютная термодинамическая шкала температур. Следствие теоремы Карно: связь калорического и термического уравнений состояния.
15. Энтропия (определение, физический смысл, примеры). Второй принцип для обратимых процессов. Равенство Клаузиуса.
16. Второй принцип для необратимых процессов. Неравенство Клаузиуса: вывод; физический смысл; следствия для адиабатических процессов.
17. К.п.д. необратимых круговых процессов (физические причины необратимости, примеры необратимых процессов).
18. Реальные газы. Уравнение Ван-дер-Ваальса (вывод; изотермы В.д.В.; внутренняя энергия и теплоемкость газа В.д.В.)
19. Термодинамическое и статистическое определения макропараметров физической системы. Эргодические системы. Высшая Школа Общей и Прикладной Физики
20. Основные понятия теории вероятностей (событие, вероятность, статистический ансамбль; непрерывные случайные величины, плотность вероятности; сложение вероятностей; условная вероятность; независимые события; средние значения случайных величин).
21. Распределение молекул газа по скоростям (пространство скоростей, изображающая точка, статистическая постановка задачи, функция распределения); закон распределения скоростей Максвелла-Больцмана: математическая запись и физический смысл. Условия применимости максвелловского распределения.
22. Закон Максвелла-Больцмана: вывод; одномерное и трехмерное распределения; распределение по модулю скорости; характерные скорости молекул.

23. Давление газа с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Давление фотонного газа.
24. Молекулярно-кинетический смысл температуры и теплового равновесия. Принцип равномерного распределения энергии по степеням свободы: частные примеры и условия применимости.
25. Теплоемкость газов (классическая теория и пределы ее применимости). Степени свободы электромагнитного излучения в полости; ультрафиолетовая катастрофа.
26. Вероятностный смысл энтропии. Молекулярно-кинетическая формулировка второго принципа термодинамики. Статистический вес.
27. Микро- и макросостояния системы. Ансамбль различных частиц. Распределение Больцмана и условия его применимости.
28. Ансамбль неразличимых частиц. Статистика Ферми-Дирака (фермионы; статистический вес; распределение Ферми-Дирака; вырождение Ферми-газа; оценка теплоёмкости).
29. Ансамбль неразличимых частиц. Статистика Бозе-Эйнштейна (бозоны; статистический вес; распределение Бозе-Эйнштейна)
30. Излучение абсолютно чёрного тела. Степени свободы электромагнитного излучения в полости и их заполнение. Формула Планка. Закон Стефана-Больцмана, закон Вина.
31. Теплоемкость кристаллических твердых тел. Закон Дюлонга-Пти. Ансамбль фононов; теория теплоёмкости Дебая. Поведение теплоёмкости вблизи абсолютного нуля.
32. Испарение и конденсация веществ, подчиняющихся уравнению Ван-дер-Ваальса. Правило Максвелла. Метастабильные состояния. Критическая точка.
33. Общие условия термодинамического равновесия и устойчивости при различных условиях. Энтропия, свободная энергия, термодинамический потенциал Гиббса.
34. Фазы, их классификация, фазовые превращения, условия равновесия фаз. Фазовая диаграмма.
35. Испарение и конденсация в широком смысле. Уравнение Клайперона-Клаузиуса (вывод, физический смысл, примеры).
36. Зависимость давления насыщенного пара от температуры. Абсолютная и относительная влажность воздуха.
37. Фазовые превращения второго рода (определения, физический смысл, примеры). Соотношения Эренфеста.

38. Природа поверхностного натяжения. Коэффициент поверхностного натяжения: определение и физический смысл. Термодинамика поверхностного натяжения.
39. Смачиваемые и несмачиваемые поверхности. Равновесие границы и краевого угла. Примеры.
40. Соотношение между давлением и кривизной поверхности. Формула Лапласа. Капиллярные явления, закон Жюрена. Примеры.
41. Характер движения отдельной частицы в газе. Длина свободного пробега. Среднеквадратичное отклонение частицы от начального положения.
42. идеального газа. Поток тепла с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Оценка коэффициента теплопроводности. Уравнение теплопроводности.
43. Вязкость идеального газа. Внутреннее трение с точки зрения молекулярно-кинетической теории. Оценка коэффициента вязкости. Сила вязкого трения; примеры проявления.

## Линейная алгебра

**Билет 2:** Подпространства. Разложение подпространства в прямую сумму подпространств. Примеры разложения на подпространства.

**Билет 5:** Обратная матрица и её вид.

**Билет 17:** Унитарные операторы и их матрицы. (Всё, что знаете)

**Билет 18:** Ортогональные операторы и их матрицы. (Всё, что знаете)

**Билет 20:** Квадратичные формы: определение и диагонализация методом ортогональных преобразований. Закон инерции.

**Билет 21:** Метод Якоби диагонализации квадратичных форм.

**Билет 22:** Положительно определённые квадратичные формы и операторы в терминах квадратичных форм. (Определение; Необходимые и достаточные условия)

**Билет 24:** Одновременная диагонализация квадратичных форм

## Курс 2 Семестр 1

### Теория функций комплексного переменного

**Билет 6:**

1. ?
2. ?
3. ?
4. ?
5. ?
6. Найти оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 4p + 5}$$

**Билет 7:**

1. Множества на комплексной плоскости. Открытые, замкнутые, ограниченные и неограниченные множества. Граница множества. Предельные точки множества. Линейно-связное множество. Область. Односвязная и п-связная область. Компактное множество на комплексной плоскости. Расстояние между множествами. Доказательство факта, что расстояние между двумя ограниченными непересекающимися компактами больше нуля.
2. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры (для нескольких корней).
3. ?
4. ?
5. ?
6. ?

**Билет 8:**

1. Функции комплексного переменного, предел, непрерывность и т.д.
2. Достаточные условия существования оригинала.
3. ?
4. ?
5. Найти особые точки и определить их тип:

$$f(z) = \frac{sh(\pi z)}{z^4 + 1} \cdot e^{\frac{1}{z}}$$

6. Решить задачу Коши:  $x' + x = e^{-t}$ ,  $x(0) = 1$ .

**Билет 10:**

1. Дифференцируемость основных функций ( $e^z$ ,  $\sin(z)$ ,  $\cos(z)$ ), рациональных и других элементарных. Теорема о существовании дифференцируемой функции комплексного переменного по данной действительной (мнимой) части (без доказательства).

2. Формула Меллина.
3. Решить уравнение  $\cos(z) + \sin(z) = i$ .
4. Отобразить область  $\{|z - 1| > 1; |z - 2| < 2; \operatorname{Im} z > 0\}$  на полуплоскость  $\operatorname{Im} \omega > 0$ .
5. Найти особые точки и определить их тип:

$$f(z) = \frac{2z - \sin(2z)}{z^2(z^2 + 1)}$$

6. Найти изображение функции  $f(t) = t \operatorname{sh}(4t) \eta(t)$ .

**Билет 12:**

1. Интегрирование функций комплексного переменного. Формула для вычисления с помощью параметризации. Неравенства. Определение несобственного интеграла по лучу и по прямой. Теорема о возможности аппроксимировать интеграл по кривой интегралом по ломанной. Теорема об аппроксимации интеграла по границе области (без доказательства).
2. Принцип соответствия границ (без доказательства). Критерий однолиственности функции в области.
3. Исследовать на дифференцируемость  $f(z) = z \cdot \bar{z}$ .
4. Найти образ полуплоскости  $\operatorname{Re} z > 1$  при отображении:

$$\omega(z) = \frac{z - 3 + i}{z + 1 + i}$$

5. Найти интеграл:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\cos(\varphi) + 2}$$

6. Найти изображение функции:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2n - 2 \leq t < 2n - 1 \\ -1, & 2n - 1 \leq t < 2n \end{cases}, n \in \mathbb{N}$$

**Билет 15:**

1. Интеграл и первообразная. Теорема о первообразной.
2. Свойства преобразования Лапласа.
3. ?
4. ?
5. ?
6. ?

**Билет 22:**

1. Целые функции. Теорема Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры (для одного корня). Теорема Мореры.
2. Лемма Жордана.
3. ?
4. ?
5. ?
6. ?

Полный список теоретических вопросов:

1. Комплексные числа. Действительная и мнимая части комплексного числа. Модуль и аргумент комплексного числа. Арифметические действия с комплексными числами и их геометрический смысл.
2. Корни из комплексных чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и показательная формы записи комплексных чисел. Возведение в комплексную степень.
3. Последовательности комплексных чисел. Предел. Ограниченность. Покоординатная сходимость. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Критерий Коши.
4. Ряды комплексных чисел. Абсолютная и условная сходимость. Критерий Коши. Необходимое условие сходимости. Сходимость абсолютно сходящегося ряда.
5. Расширенная комплексная плоскость. Сфера Римана. Стереографическая проекция. Доказательство факта, что прямым и окружностям комплексной плоскости при стереографической проекции соответствуют окружности сферы Римана.
6. Кривые на комплексной плоскости. Простая кривая. Замкнутая кривая. Кривая, проходящая через бесконечность. Спрямолинейная и кусочно-гладкая кривые.
7. Множества на комплексной плоскости. Открытые, замкнутые, ограниченные и неограниченные множества. Граница множества. Предельные точки множества. Линейно-связное множество. Область. Односвязная и  $n$ -связная область. Компактное множество на комплексной плоскости. Расстояние между множествами. Доказательство факта, что расстояние между двумя ограниченными непересекающимися компактами больше нуля.
8. Функции комплексной переменной. Предел. Непрерывность и равномерная непрерывность. Непрерывность действительной, мнимой части и модуля непрерывной функции комплексного переменного. Теорема Кантора.



9. Дифференцируемость функций комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Примеры. Гармонические и сопряженные функции.
10. Дифференцируемость основных функций ( $e^z$ ,  $\sin z$ ,  $\cos z$ ), рациональных и других элементарных функций. Теорема о существовании дифференцируемой функции комплексного переменного по данной действительной (мнимой) части (без доказательства).
11. Геометрический смысл производной. Теорема об обратной функции.
12. Интегрирование функций комплексного переменного. Формула для вычисления с помощью параметризации. Неравенства. Теорема о возможности аппроксимировать интеграл по кривой интегралом по ломаной. Теорема об аппроксимации интеграла по границе области (без доказательства).
13. Интегральная теорема Коши. Следствия.
14. Интеграл и первообразная. Теорема о первообразной.
15. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для функции комплексного переменного и гармонической функции.
16. Принцип максимума гармонической функции и принцип максимума модуля дифференцируемой функции.
17. Функциональные ряды. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Теорема о том, что почленное домножение равномерно сходящегося функционального ряда на ограниченную функцию не изменяет равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Почленное интегрирование равномерно сходящегося ряда.
18. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда.
19. Почленное дифференцирование степенного ряда. Единственность разложения функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формулы для коэффициентов ряда Тейлора. Основные разложения ( $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$ ,  $(1+z)^k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ).
20. Основной критерий регулярности функции в области. Оценка радиуса сходимости степенного ряда регулярной функции. Интегральное представление производных регулярной функции. Неравенство Коши. Бесконечная дифференцируемость дифференцируемой и гармонической функций.
21. Целые функции. Теорема Лиувилля. Основная теорема высшей алгебры (про один корень). Теорема Мореры.

22. Теорема Вейерштрасса о почленном дифференцировании функционального ряда.
23. Теорема единственности. Понятие аналитического продолжения. Принцип аналитического продолжения. Аналитические продолжения элементарных функций и соотношений.
24. Правильные и особые точки. Теорема о том, что на границе сходимости степенного ряда лежит особая точка функции.
25. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Функции, аналитические на кривой и в области. Аналитическая функция  $\ln z$ . Точки ветвления.
26. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Функции, аналитические на кривой и в области. Аналитическая функция  $z^\alpha$  ( $\alpha$  – действительное). Точки ветвления.
27. Ряд Лорана. Регулярность суммы ряда Лорана. Теорема Лорана. Единственность разложения функции в ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана.
28. Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема о главной части ряда Лорана в окрестности устранимой точки. Следствие. Классификация особых точек.
29. Нули регулярных функций. Вид регулярной функции в окрестности нуля. Полюса. Порядок полюса. Вид ряда Лорана в окрестности полюса.
30. Существенно особые точки. Вид ряда Лорана в окрестности существенно особой точки. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Теорема Пикара (без доказательства).
31. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции с конечным числом полюсов.
32. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Следствие. Теорема о вычетах для области, содержащей бесконечность.
33. Лемма Жордана.
34. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры (для нескольких корней).
35. Определение конформного отображения (в точке, в области). Свойства конформных отображений. Теорема о том, что при конформном отображении образом области является область.

36. Однолиственность функции в точке. Локальный критерий однолиственности. Необходимые и достаточные условия однолиственности функции в полюсе и в бесконечности.
37. Принцип соответствия границ (без доказательства). Критерий однолиственности функции в области.
38. Линейная функция. Дробно-линейная функция. Теорема о том, что дробно-линейная функция — единственная, конформно отображающая расширенную комплексную плоскость на себя.
39. Круговое свойство дробно-линейных отображений. Единственность дробно-линейного отображения, переводящего три заданные точки в три заданные точки.
40. Симметричные точки. Сохранение симметрии при дробно-линейных отображениях.
41. Отображение верхней полуплоскости и единичного круга на единичный круг. Задача с нормировкой. Теорема Римана (без доказательства).
42. Основные свойства степенной функции и функции Жуковского. Круговые луночки. Показательная функция.
43. Задача Дирихле для уравнения Лапласа. Существование и единственность решения.
44. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа для круга и полуплоскости.
45. Интегралы, зависящие от параметра. Теоремы о непрерывности, регулярности функции, заданной интегралом, зависящим от параметра. Интегрирование под знаком интеграла.
46. Несобственные интегралы (по лучу или прямой). Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Непрерывность функции, заданной таким интегралом.
47. Преобразование Лапласа. Регулярность изображения. Стремление к нулю изображения при  $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ .
48. Свойства преобразования Лапласа (линейность, теорема подобия, изображение производной, интегрирование оригинала, интегрирование и дифференцирование изображения, теорема запаздывания, теорема сдвига, теорема свертки).
49. Формула Меллина.
50. Достаточные условия существования оригинала. Нахождение оригинала с помощью вычетов.

## Теоретическая механика

- Билет 1:** Основные положения механики Ньютона, принцип относительности Галилея, принцип детерминизма Ньютона. I, II и III закон Ньютона. Инертная масса, импульс, момент импульса материальной точки.
- Билет 2:** Законы сохранения импульса и момента импульса системы материальных точек в механике Ньютона. Центр масс.
- Билет 3:** Кинетическая и потенциальная энергия материальной точки, уравнение для изменения механической энергии материальной точки во времени.
- Билет 4:** Закон сохранения энергии для системы материальных точек в механике Ньютона.
- Билет 5:** Теорема о вириале в механике Ньютона.
- Билет 6:** Связи в механике Лагранжа. Основная задача механики для систем с идеальными голономными связями.
- Билет 7:** Уравнения Лагранжа первого рода.
- Билет 8:** Принцип Д'Аламбера-Лагранжа. Независимые обобщенные координаты. Вывод уравнений Лагранжа второго рода для независимых обобщенных координат.
- Билет 9:** Обобщенные импульсы и обобщенные силы в механике Лагранжа.
- Билет 10:** Потенциальные и обобщенно-потенциальные силы в механике Лагранжа. Диссипативная функция Рэлея.
- Билет 11:** Сила Лоренца как обобщенно-потенциальная сила. Функция Лагранжа для системы заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле.
- Билет 12:** Законы сохранения обобщенного импульса и обобщенной энергии в механике Лагранжа.
- Билет 13:** Линейные колебания в одномерных лагранжевых системах.
- Билет 14:** Линейные колебания в консервативных лагранжевых системах с несколькими степенями свободы.
- Билет 15:** Функционал действия. Вариационный принцип Гамильтона и принцип наименьшего действия для обобщенно-потенциальных систем. Вывод уравнений Лагранжа из вариационного принципа.

**Билет 16:** Свойства уравнений Лагранжа, следующие из вариационного принципа. Инвариантные преобразования функции Лагранжа, замена координат.

**Билет 17:** Симметрия механических систем и законы сохранения. Теорема Нетер.

**Билет 18:** Классификация состояний равновесия на двумерной фазовой плоскости. «Консервативные» и «диссипативные» состояния равновесия. Состояния равновесия типа «центр», «седло», «узел» и «фокус».

**Билет 19:** Качественный анализ систем с одной степенью свободы на фазовой плоскости (консервативные и диссипативные системы).

**Билет 20:** Интегрирование уравнений движения одномерных консервативных систем.

**Билет 21:** Периодическое движение в одномерных натуральных консервативных системах. Вычисление периода колебаний для заданного потенциала.

**Билет 22:** Восстановление потенциала по заданной зависимости периода колебаний от полной энергии.

**Билет 23:** Определение возмущения периода колебаний при возмущении потенциальной энергии.

**Билет 24:** Колебания математического маятника.

Вопросы теоретического минимума:

**Билет 1:** Необходимые и достаточные условия потенциальности силы (без вывода).

**Билет 2:** Законы сохранения импульса и момента импульса для системы материальных точек.

**Билет 3:** Закон сохранения энергии для системы материальных точек.

**Билет 4:** Теорема о вириале (простейшая формулировка для одной материальной точки).

**Билет 5:** Типы состояний равновесия систем с одной степенью свободы.

**Билет 6:** Интеграл энергии для движения материальной точки в одномерном потенциальном поле.

**Билет 7:** Независимые обобщенные координаты (определение и нетривиальный пример).

**Билет 8:** Уравнения Лагранжа в независимых обобщенных координатах для систем с идеальными голономными связями (формулировки с учетом и без учета диссипативных сил).

**Билет 9:** Обобщенные силы (определение и пример).

**Билет 10:** Обобщенно-потенциальные силы (определение и пример).

**Билет 11:** Обобщенная энергия в механике Лагранжа (определение и условие сохранения).

**Билет 12:** Функция Лагранжа натуральной механической системы.

**Билет 13:** Функция Лагранжа свободной материальной точки в декартовой, цилиндрической и сферической системах координат.

**Билет 14:** Функция Лагранжа заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле общего вида.

**Билет 15:** Функция Лагранжа заряженной частицы в постоянном магнитном поле

**Билет 16:** Циклические координаты в уравнениях Лагранжа, их связь с интегралами движения.

**Билет 17:** Вариационный принцип Гамильтона (формулировка в механике Лагранжа).

**Билет 18:** Функция Лагранжа и фазовая плоскость гармонического осциллятора.

**Билет 19:** Фазовая плоскость и зависимость периода от энергии (качественно) математического маятника.

## Дифференциальные уравнения

До коллоквиума (по состоянию 2 курса на 2023 год):

**Билет 1:** Понятие обыкновенного ДУ, порядок ДУ, решение ДУ. Понятие ДУ 1-го порядка, решение ДУ, задача Коши, геометрический смысл ДУ и его решения. Изоклины, метод изоклин.

**Билет 2:** Понятия общего, частного и особого решений для ДУ 1-го порядка, разрешенного относительно производной. Формулировка теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка. Условие Липшица. Пример, демонстрирующий факт локальности теоремы. Пример, показывающий, что теорема дает лишь достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши.

**Билет 3:** ДУ 1-го порядка с разделяющимися переменными: понятие, метод интегрирования. Особые решения, критерий для уравнения  $y' = f(y)$ , привести примеры. ДУ, сводящиеся к уравнению с разделяющимися переменными.

**Билет 4:** Однородные ДУ 1-го порядка и сводящиеся к ним: понятия и методы интегрирования.

**Билет 5:** Линейные ДУ 1-го порядка. Свойства линейного однородного уравнения (есть нулевое; всякое ненулевое целиком лежит выше или ниже оси  $x$ ; сумма двух решений – решение; частное решение опр-ся с точностью до константы; структура общего решения; если известно частное, то общее – это  $c \cdot$  на это частное). Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного уравнения. Методы интегрирования линейного неоднородного уравнения (метод Лагранжа вариации произвольной постоянной, метод Бернулли). Уравнения Бернулли и Риккати.

**Билет 6:** Симметричная форма ДУ первого порядка. ДУ в полных дифференциалах. Необходимое и достаточное условие уравнения в полных дифференциалах. Способы восстановления функции по ее полному дифференциалу.

**Билет 7:** Некоторые способы решения уравнения, не являющегося уравнением в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Способы нахождения интегрирующего множителя. Свойства интегрирующего множителя. Интегрирующий множитель и особые решения.

**Билет 8:** ДУ 1-го порядка, не разрешенные относительно производной. Поле направлений (в чем отличие от ур-я, разрешенного отн-но производной). Задача Коши. Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Особые решения. Методы нахождения особых решений (дискриминантная кривая, огибающая).

**Билет 9:** Методы интегрирования уравнений, не разрешенных относительно производной. Метод разрешения отн-но производной; Метод введения параметра:

1. ур-е не содержит искомой ф-ции (разрешимо отн-но  $x$ , не разрешимо ни отн-но  $x$ , ни отн-но производной)
2. ур-е не содержит  $x$  (ур-е разрешимо отн-но  $y$ , не разрешимо ни отн-но  $y$ , ни отн-но производной)
3. ур-е общего вида (ур-е разрешимо отн-но  $x$ , отн-но  $y$ , не разрешимо ни отн-но  $x$ , ни отн-но  $y$ , ни отн-но производной)

**Билет 10:** Уравнения Лагранжа и Клеро.

**Билет 11:** ДУ высших порядков. Задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности решения задачи Коши. Классы ДУ высших порядков, допускающие понижение порядка. Методы интегрирования. Уравнение, не содержащее искомой функции и ее производных до порядка  $(k-1)$  включительно, порядок уравнения можно понизить на  $k$  единиц. Уравнение, не содержащее независимой переменной, порядок уравнения можно понизить на единицу. Уравнение в точных производных допускает понижение порядка на единицу. Однородное (относительно  $y$  и производных) уравнение – понижение порядка на единицу. Обобщенное однородное (относительно  $x, y$  и ее производных) – понижение порядка на единицу.

**Билет 12:** Линейные дифференциальные уравнения произвольного порядка с переменными коэффициентами, однородные и неоднородные уравнения. Формулировка теоремы о существовании и единственности решений задачи Коши для линейного уравнения, глобальность решений задачи Коши. Понятие линейной зависимости и независимости произвольных функций, примеры, необходимое условие линейной зависимости. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости. Общие свойства решений ЛОДУ. Вывод формулы Лиувилля-Остроградского. Определить ЛОДУ  $n$ -го порядка, однородного и неоднородного. Сформулировать теорему, добавив, что в отличие от общей теоремы существования, решение задачи Коши для ЛОДУ  $n$ -го порядка существует сразу на всем интервале определения коэффициентов уравнения. Определить ЛЗ и ЛНЗ функций. Необходимое условие ЛЗ функций (тождественное равенство нулю определителя Вронского; достаточным это условие не является: привести пример, когда определитель Вронского тождественно равен нулю, а функции ЛНЗ). Необходимое и достаточное условие ЛЗ (одна из функций линейно выражается через остальные). Общие свойства решений ЛОДУ: Предложение 1 (решение, полученное линейной комбинацией частных решений, тоже решение); Предложение 2 (необходимые и достаточные условия ЛЗ и ЛНЗ функций, являющихся решениями ЛОДУ  $n$ -го порядка); Предложение 3 (Формула Лиувилля-Остроградского)

**Билет 13:** Общее решение линейного однородного ДУ произвольного порядка с переменными коэффициентами, пространство решений, фундаментальная система решений, размерность пространства решений. Задача о построении ЛОДУ по заданной ФСР. Понижение порядка линейного однородного ДУ при известном частном решении. Определить ФСР. Теорема (о существовании ФСР), Теорема (о структуре общего решения ЛОДУ), Утверждение (ЛОДУ  $n$ -го порядка не может иметь более чем  $n$  линейно независимых частных решений). Множество решений ЛОДУ  $n$ -го порядка образует  $n$ -мерное линейное пространство. Задача о построении ЛОДУ по заданной ФСР. Построение решения понижением порядка ЛОДУ при известном частном решении.

**Билет 14:** Линейное неоднородное ДУ  $n$ -го порядка с переменными коэффициентами, общее решение. Нахождение частного решения методом



вариации произвольных постоянных. Предложение о структуре общего решения ЛНДУ. Метод вариации.

После коллоквиума (по состоянию 2 курса на 2023 год):

**Билет 15:** Линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, метод Эйлера, характеристическое уравнение, фундаментальная система решений в случае простых корней характеристического уравнения, фундаментальная система решений в случае кратных корней характеристического уравнения. Вещественные решения вещественного уравнения. Опред-е ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Основная теорема алгебры (о числе корней многочлена  $n$ -ой степени). Лемма и следствие (о ФСР для ЛОДУ в случае простых корней хар.ур-я). Теорема (о ФСР для ЛОДУ в случае кратных корней). Лемма (случай вещественных коэф.ур-я, если оно имеет комплекснозначное реш-е, то его вещ-ая и мнимая части явл-ся реш-ми). Лемма (о вещественной ФСР, получающейся из набора комплексных компонент)

**Билет 16:** Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами: получения частных решений в случае неоднородности типа квазиполинома. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и неоднородностью произвольного вида: метод вариации произвольных постоянных. Уравнение Эйлера. Определение квазиполинома степени  $k$ , отвечающего комплексному числу. Теорема (о виде частного решения для ЛНДУ с неоднородностью типа квазиполинома). Метод вариации произвольных постоянных в случае неоднородности произвольного вида. Уравнение Эйлера (сведение к ЛДУ с постоянными коэффициентами).

**Билет 17:** Линейные дифференциальные системы с переменными коэффициентами: однородные и неоднородные системы, формулировка теоремы о существовании и единственности решений задачи Коши, глобальность решений, общие свойства решений однородной системы. Линейная зависимость и независимость вектор-функций, необходимое условие линейной зависимости, определитель Вронского. Определение системы  $n$  ЛДУ 1-го пор-ка, однородной и неоднородной. Формулировка теоремы о сущ-ии и ед-ти решений з-чи Коши с указанием св-ва глобальности. Понятие ЛЗ и ЛНЗ в-р-функций. Необх.усл-е ЛЗ ф-ций, но не достаточное (пример). Лемма (линейная комбинация частных решений однор.сист- решение). Предложение (критерий линейной зависимости для  $n$  в-р-ф-ций, явл-ся решениями однор.системы – равно нулю их опред-ля Вронского).

**Билет 18:** Пространство решений линейной однородной дифференциальной системы с переменными коэффициентами, фундаментальные ре-

шения, фундаментальная матрица системы. Формула Лиувилля-Остроградского для системы. Описание всех фундаментальных матриц системы. Теорема (Пространство реш-й системы  $n$  лн.однор.ДУ 1-го пор-ка образует  $n$ -мерное векторное пр-во). Формула Лиувилля-Остроградского для системы. Фунд. система решений, фундаментальная матрица. Описание всех фундаментальных матриц системы.

**Билет 19:** Линейные неоднородные дифференциальной системы с переменными коэффициентами, общее решение неоднородной системы. Метод вариации постоянных для поиска частного решения. Предложение (о структуре общего реш-я неоднородной системы). Метод вариации.

**Билет 20:** Линейные однородные дифференциальные системы с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера, характеристическое уравнение. Фундаментальная система решений в случае простых корней характеристического уравнения, фундаментальная система решений в случае кратных корней характеристического уравнения. Вещественные решения вещественной системы в случае комплексных корней характеристического уравнения. Метод Эйлера. Характеристическое уравнение. Предложение (о ФСР в случае простых корней хар.ур-я). Случай комплексных корней хар.ур-я (выделение вещественных реш-й). Случай кратных корней хар.ур-я (Теорема о ЖНФ, присоединенные векторы; метод неопределенных коэффициентов, понятие алгебраической и геометрической кратности собственного значения.). Общее реш-е системы для матрицы  $2 \times 2$ ,  $3 \times 3$ .

**Билет 21:** Нахождение частных решений неоднородной системы с постоянными коэффициентами и неоднородностью в виде векторного квазиполинома.

**Билет 22:** Матричная экспонента и ее свойства.

**Билет 23:** Понятие об устойчивости решения ДУ и ДС по Ляпунову. Примеры устойчивости и неустойчивости по Ляпунову. Условие устойчивости по Ляпунову нулевого решения линейной однородной системы. Критерий Рауса-Гурвица. Рассматривается неавтономная система  $n$  ур-й 1-го пор-ка. Опред-я сист, устойчивого и асимптотической устойчивости по Ляпунову. Примеры скалярных уравнений, имеющих устойчивое и неустойчивое по Ляпунову нулевое реш-е. Устойчивость состояния равновесия типа центр линейной автономной системы на плоскости (не является асимптотически устойчивым). Исследование устойчивости произвольного решения системы (всегда можно свести к исследованию устойчивости нулевого реш-я с помощью некоторой замены). Теорема об устойчивости по Ляпунову нулевого реш-я ЛОС. Матрица Гурвица. Критерий Рауса-Гурвица (все корни имеют отрицательные действительные части тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры матрицы Гурвица положительны).

**Билет 24:** Исследование устойчивости с помощью функций Ляпунова. Устойчивость по первому приближению. Производная функции в силу системы. Теорема Ляпунова об устойчивости (с док-вом). Теорема Ляпунова об асимптотической устойчивости (без док-ва). Теорема Ляпунова о неустойчивости (без док-ва). Теорема Четаева о неустойчивости (без док-ва). Теорема об устойчивости по 1-ому приближению (без док-ва).

**Билет 25:** Понятие об автономных системах, фазовое пространство, фазовые траектории и их свойства. Окрестность состояния равновесия автономной системы, фазовые портреты линейных систем на плоскости. Случаи узлов и седел. Случаи фокусов и центров. Узлы с кратными корнями и состояния равновесия с нулевым корнем. Теорема о типах состояний равновесия для двумерной автономной системы на плоскости с произвольными правыми частями. Проблема различения центра и фокуса. Предельные циклы. Признаки отсутствия ЗФТ. Опре-е автономной системы ДУ 1-го пор-ка. Понятия фазового пространства и фазовой траектории. Свойства фазовых траекторий (доказать любые два). Линейные двумерные автономные системы на плоскости, к изучению фазовых портретов которых приводит изучение автономных систем на плоскости в окрестности состояния равновесия. Теорема о типах состояний равновесия для двумерной автономной системы на плоскости с произвольными правыми частями. Достаточное условие существования центра. Теорема Ляпунова (необходимое и достаточное условие наличия центра). Изолированные и неизолированные фазовые траектории. Определение предельного цикла (ПЦ), устойчивого и неустойчивого ПЦ. Орбитальная устойчивость (в чем отличие от устойчивости по Ляпунову). Принцип кольца для «распознавания» предельных циклов. Признаки Дюлака и Бендиксона отсутствия ЗФТ.

**Билет 26:** Теорема о существовании и единственности решения задачи Коши для ДУ 1-го порядка: теорема Пикара, доказательство методом последовательных приближений Пикара. Лемма Гронуолла с доказательством.

**Билет 27:** Понятие о продолжении решений ДУ 1-го порядка. Доказательство теоремы о продолжении решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной.

**Билет 28:** Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных условий. Формулировка теорем без доказательств.

**Билет 29:** Первые интегралы. Определение, физический и геометрический смыслы первого интеграла. Определение функционально независимой системы первых интегралов. Формулировки теорем о существовании функционально независимых первых интегралов (для неавтономной и автономной систем).