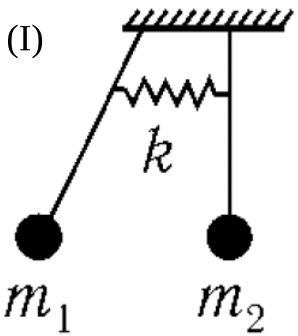
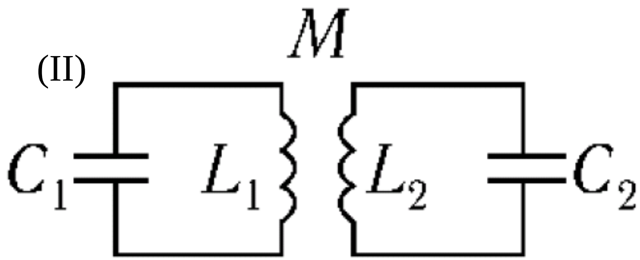
# Колебания в системе связанных осцилляторов

# Собственные колебания системы с двумя степенями свободы (примеры систем)

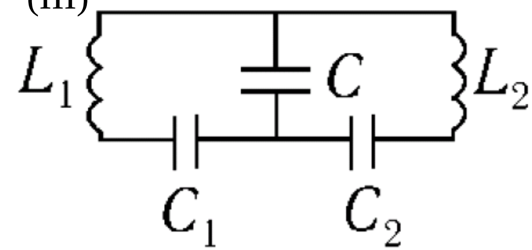
(I)



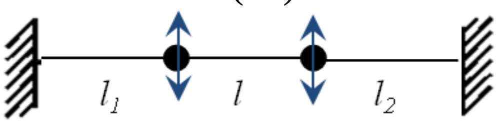

(II)




(III)

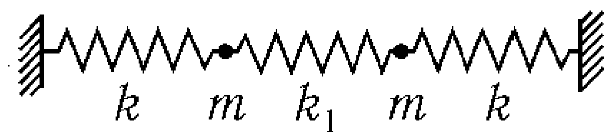



(IV)




$T = const$ (сила натяжения шнура)

(V)



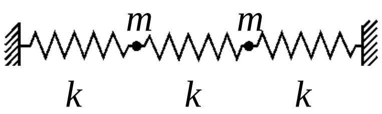

Сохраняется энергия (на примере (IV)):

$$\begin{cases} m_1\ddot{y}_1 = -\dfrac{T}{l}y_1 - \dfrac{T}{l}(y_1 - y_2) \quad \Big| \dot{y}_1 & (2.1) \\ m_2\ddot{y}_2 = -\dfrac{T}{l}y_2 - \dfrac{T}{l}(y_2 - y_1) \quad \Big| \dot{y}_2 & (2.2) \end{cases} \qquad +; \quad \int \ldots dt$$

$$\frac{m_1\dot{y}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{y}_2^2}{2} + \frac{Ty_1^2}{2l} + \frac{Ty_2^2}{2l} + \frac{T(y_1^2 - y_2^2)}{2l} = 0 \quad (2.3)$$

(ДЗ) Записать уравнения для остальных систем. Показать, что для них энергия тоже сохраняется

# Собственные колебания системы с двумя степенями свободы (частный случай)




$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{2k}{m}x_1 - \dfrac{k}{m}x_2 = 0 & (3.1) \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{2k}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 = 0 & (3.2) \end{cases}$$

(3.3) $\omega_{\Pi 1}^2 = \omega_{\Pi 2}^2 = \dfrac{2k}{m}$ - парциальные частоты

*Парциальная частота – частота, на которой совершаются колебания одного осциллятора, если другой осциллятор удерживается.*

$$x_{1,2} \sim e^{-i\omega t} \qquad (3.4)$$

↓ уравнение на нормальные (собственные) частоты:

$$\begin{vmatrix} \left(\dfrac{2k}{m} - \omega^2\right) & \left(-\dfrac{k}{m}\right) \\ \left(-\dfrac{k}{m}\right) & \left(\dfrac{2k}{m} - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (3.5)$$

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right)^2 = \left(\frac{k}{m}\right)^2 \qquad (3.6)$$

$$\frac{2k}{m} - \omega^2 = \pm\frac{k}{m} \qquad (3.7)$$

(3.8) $\boxed{\omega_{\text{H}1}^2 = \dfrac{k}{m}}$ $\boxed{\omega_{\text{H}2}^2 = \dfrac{3k}{m}}$ - нормальные частоты

$$\omega_{\text{H}1}^2 < \omega_{\Pi 1}^2 = \omega_{\Pi 2}^2 < \omega_{\text{H}2}^2 \qquad (3.9)$$

Нормальные координаты ($U_1$, $U_2$)

$$\begin{pmatrix} \dfrac{k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & \dfrac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1,1} \\ U_{1,2} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.10) \qquad \begin{pmatrix} -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{k}{m} \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2,1} \\ U_{2,2} \end{pmatrix} = 0 \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} U_1 = (1, \ \ 1) \\ U_2 = (1, -1) \end{pmatrix} \quad (3.12) \qquad \begin{cases} U_1 = x_1 + x_2 & (3.13) \\ U_2 = x_1 - x_2 & (3.14) \end{cases}$$

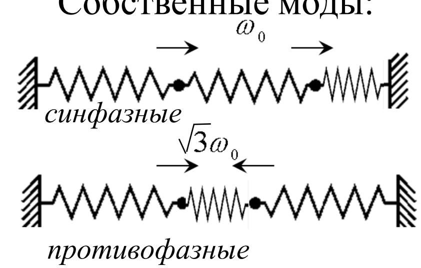
$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + \omega_{\text{H}1}^2 U_1 = 0 & (3.15) \\ \ddot{U}_2 + \omega_{\text{H}2}^2 U_2 = 0 & (3.16) \end{cases}$$

-уравнения в нормальных координатах

$$\begin{cases} \ddot{U}_1 + \omega_0^2 U_1 = 0 & (3.17) \\ \ddot{U}_2 + 3\omega_0^2 U_2 = 0 & (3.18) \end{cases} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad (3.19)$$

Собственные моды:

$$\begin{cases} U_1 = A_1\cos(\omega_0 t - \phi_1) & (3.20) \\ U_2 = A_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \phi_2) & (3.21) \end{cases}$$



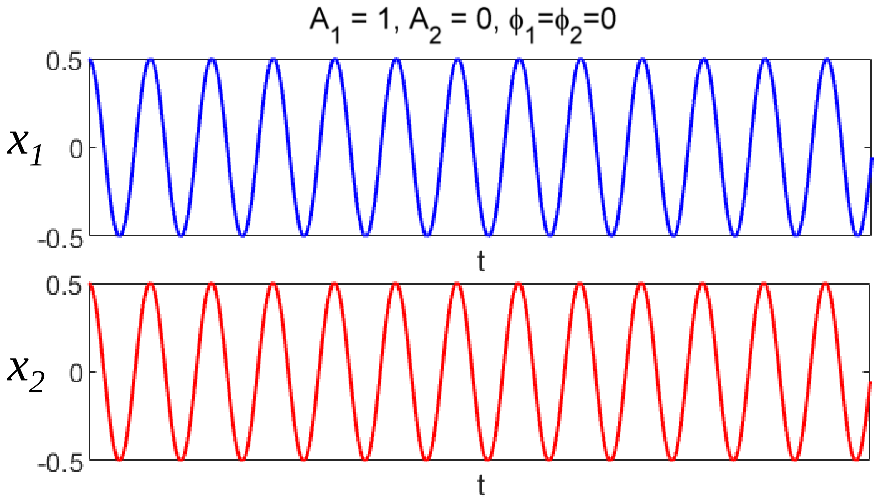

$$\begin{cases} x_1 = (U_1 + U_2)/2 & (3.22) \\ x_2 = (U_1 - U_2)/2 & (3.23) \end{cases}$$

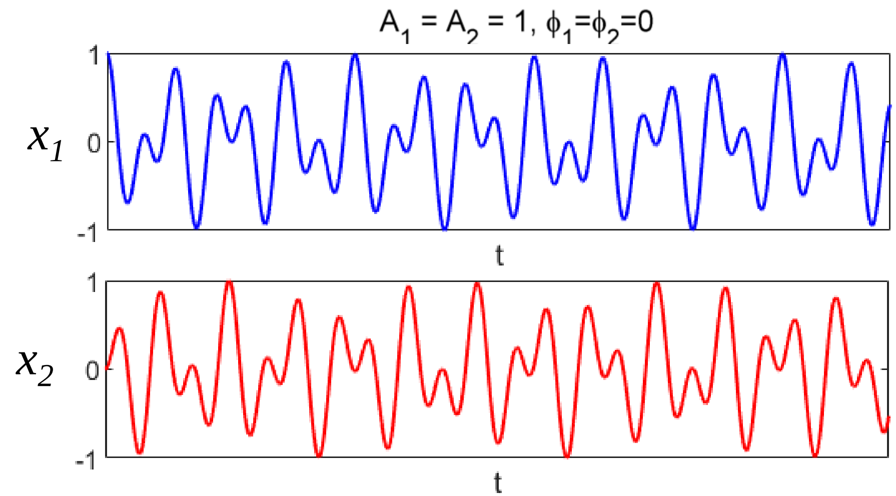
$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \cdot A_1\cos(\omega_0 t - \phi_1) + 1/2 \cdot A_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \phi_2) & (3.24) \\ x_2 = 1/2 \cdot A_1\cos(\omega_0 t - \phi_1) - 1/2 \cdot A_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \phi_2) & (3.25) \end{cases}$$

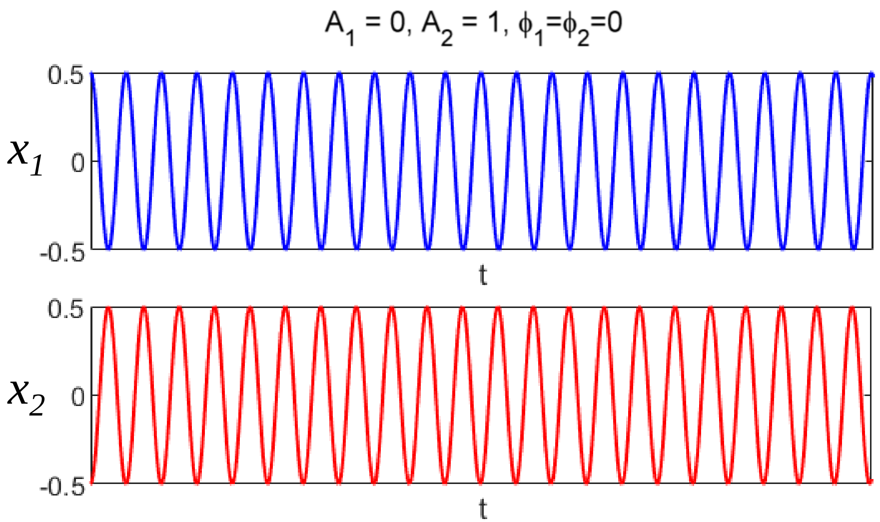
# Собственные колебания системы с двумя степенями свободы (частный случай)

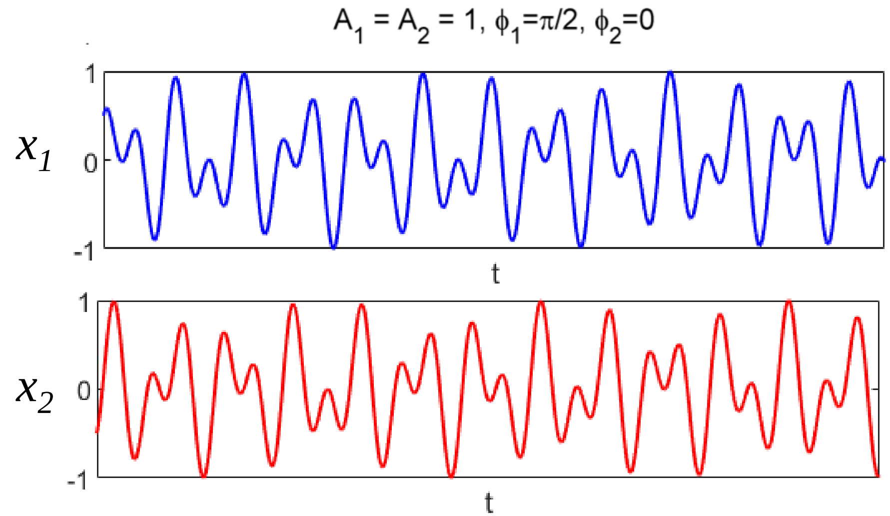
Выражения (3.24) и (3.25):

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \cdot A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) + 1/2 \cdot A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \phi_2) \\ x_2 = 1/2 \cdot A_1 \cos(\omega_0 t - \phi_1) - 1/2 \cdot A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t - \phi_2) \end{cases}$$




(ДЗ) Построить самостоятельно осциллограммы для различных амплитуд и фаз

# Собственные колебания системы с двумя степенями свободы (некоторые общие свойства)

$$\omega_{\text{Н}1}^2 < \omega_{\text{П}1}^2 \le \omega_{\text{П}2}^2 < \omega_{\text{Н}2}^2 \qquad (5.1)$$

- показжем, что выполняется всегда (частный случай (3.9))

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{\text{П}1}^2 x_1 - \alpha x_2 = 0 & (5.2) \\ \ddot{x}_2 + \omega_{\text{П}2}^2 x_2 - \alpha x_1 = 0 & (5.3) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \left(\omega_{\text{П}1}^2 - \omega^2\right) & (-\alpha) \\ (-\alpha) & \left(\omega_{\text{П}2}^2 - \omega^2\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5.4)$$

$$\left(\omega^2\right)^2 - \left(\omega_{\text{П}1}^2 + \omega_{\text{П}2}^2\right)\omega^2 + \left(\omega_{\text{П}1}^2\omega_{\text{П}2}^2 - \alpha^2\right) = 0 \qquad (5.5)$$

$$\left(\omega^2\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\omega_{\text{П}1}^2 + \omega_{\text{П}2}^2\right) \pm \sqrt{\left(\left(\omega_{\text{П}2}^2 - \omega_{\text{П}1}^2\right)^2 + 4\alpha^2\right)}\right] \qquad (5.6)$$

$$\omega_{\text{Н}1}^2 = \omega_{\text{П}1}^2 - \ldots \quad (5.7) \qquad \omega_{\text{Н}2}^2 = \omega_{\text{П}2}^2 + \ldots \quad (5.8)$$

$$\boxed{\omega_{\text{Н}1}^2 < \omega_{\text{П}1}^2 \le \omega_{\text{П}2}^2 < \omega_{\text{Н}2}^2}$$

- показали, что выражение (5.1) справедливо

Получим важные соотношения, которые будем использовать дальше:

$$\omega_{\text{Н}1}^2\omega_{\text{Н}2}^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\omega_{\text{П}1}^2 + \omega_{\text{П}2}^2\right)^2 - \left(\left(\omega_{\text{П}2}^2 - \omega_{\text{П}1}^2\right)^2 + 4\alpha^2\right)\right] = \frac{1}{4}\left[4\left(\omega_{\text{П}1}^2\omega_{\text{П}2}^2\right) - 4\alpha^2\right] = \omega_{\text{П}1}^2\omega_{\text{П}2}^2 - \alpha^2 \qquad (5.9)$$

$$\boxed{\omega_{\text{Н}1}^2\omega_{\text{Н}2}^2 = \omega_{\text{П}1}^2\omega_{\text{П}2}^2 - \alpha, \quad \omega_{\text{Н}1}^2 + \omega_{\text{Н}2}^2 = \omega_{\text{П}1}^2 + \omega_{\text{П}2}^2} \qquad (5.10)$$

# Два одинаковых осциллятора со слабой связью (I)

$$\alpha << \omega_0^2 \quad (6.1)$$

- условие слабой связи (но на этом слайде не используется)

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + \alpha(x_1 - x_2) = 0 & (6.2) \\ \ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + \alpha(x_2 - x_1) = 0 & (6.3) \end{cases}$$

→ парциальные частоты: $\omega_{\Pi 1}^2 = \omega_{\Pi 2}^2 = \omega_0^2 + \alpha$ (6.4)

$$x_{1,2} \sim e^{-i\omega t} \quad (6.5)$$

↓ уравнение на нормальные частоты:

$$\begin{vmatrix} (\omega_0^2 + \alpha - \omega^2) & (-\alpha) \\ (-\alpha) & (\omega_0^2 + \alpha - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (6.6)$$

$$\omega_0^2 + \alpha - \omega^2 = \pm\alpha \quad (6.7)$$

$$\begin{cases} \omega_{H1}^2 = \omega_0^2 & (6.8) \\ \omega_{H2}^2 = \omega_0^2 + 2\alpha & (6.9) \end{cases}$$

- нормальные частоты

(ДЗ) Найти нормальные координаты. Выписать уравнения в нормальных координатах. Показать, что:

$$\begin{cases} x_1 = 1/2 \cdot A_1 \cos(\omega_{H1} t - \varphi_1) + 1/2 \cdot A_2 \cos(\omega_{H2} t - \varphi_2) & (6.10) \\ x_2 = 1/2 \cdot A_1 \cos(\omega_{H1} t - \varphi_1) - 1/2 \cdot A_2 \cos(\omega_{H2} t - \varphi_2) & (6.11) \end{cases}$$

# Два одинаковых осциллятора со слабой связью (II)

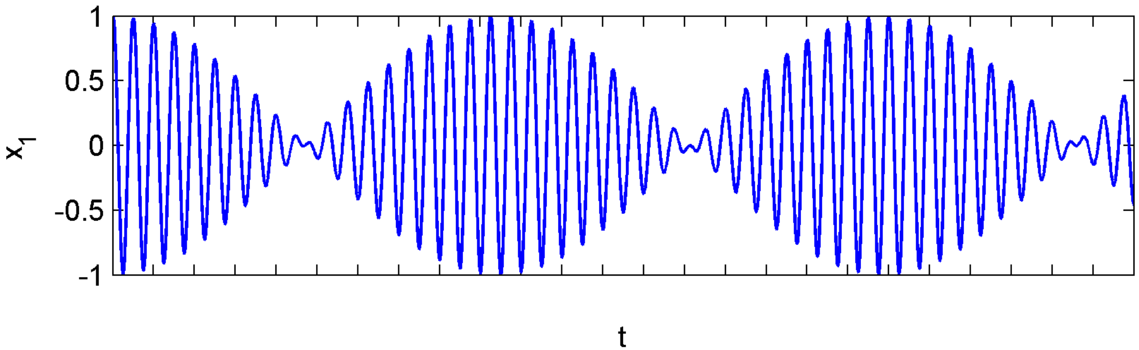
Отклоним один маятник. Начальные условия:

$$x_1(0) = x_0, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \qquad (7.1)$$

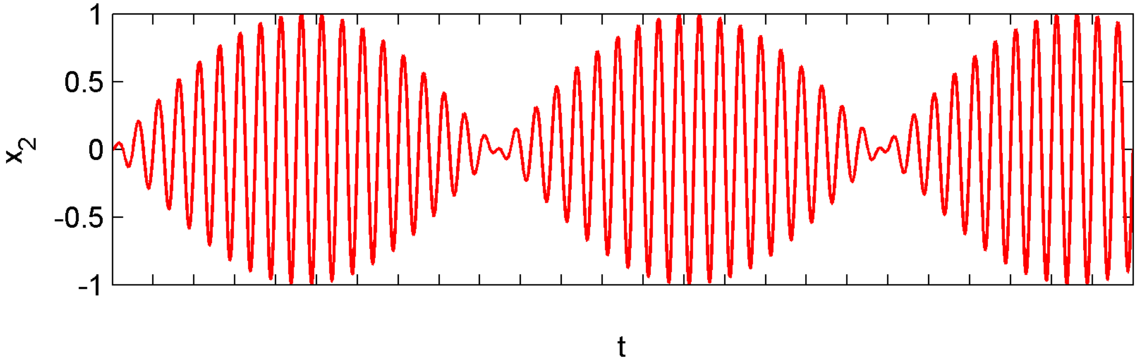
Используя начальные условия (7.1) и условие слабой связи (6.1) $\alpha << \omega_0^2$, перепишем выражения (6.10) и (6.11):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2} \cdot x_0 \left( \cos(\omega_{н1} t) + \cos(\omega_{н2} t) \right) \approx x_0 \cos(\omega_0 t) \cos\left( \dfrac{\alpha}{2\omega_0} t \right) & (7.2) \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \cdot x_0 \left( \cos(\omega_{н1} t) - \cos(\omega_{н2} t) \right) \approx x_0 \sin(\omega_0 t) \sin\left( \dfrac{\alpha}{2\omega_0} t \right) & (7.3) \end{cases}$$

Биения:




- график функции (7.2)




- график функции (7.3)

# Вынужденные колебания в системе двух связанных осцилляторов. Динамическое демпфирование

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha(x_1 - x_2) = F\cos(\gamma t) & (8.1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha(x_2 - x_1) = 0 & (8.2) \end{cases}$$

$$\omega_{\Pi 1}^2 = \omega_1^2 + \alpha, \quad \omega_{\Pi 2}^2 = \omega_2^2 + \alpha \qquad (8.3)$$

Выражения (5.10): $\omega_{H1}^2 + \omega_{H2}^2 = \omega_{\Pi 1}^2 + \omega_{\Pi 2}^2, \quad \omega_{H1}^2\omega_{H2}^2 = \omega_{\Pi 1}^2\omega_{\Pi 2}^2 - \alpha$

Ищем решение на частоте вынуждающей силы:

$$x_1 = A\cos(\gamma t), \quad x_2 = B\cos(\gamma t) \qquad (8.4)$$

$$\begin{cases} -\gamma^2 A + \omega_1^2 A + \alpha A - \alpha B = F \\ -\gamma^2 B + \omega_2^2 B + \alpha B - \alpha A = 0 \end{cases} \qquad (8.5)$$

$$\begin{pmatrix} (\omega_1^2 + \alpha - \gamma^2) & (-\alpha) \\ (-\alpha) & (\omega_2^2 + \alpha - \gamma^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (8.6)$$

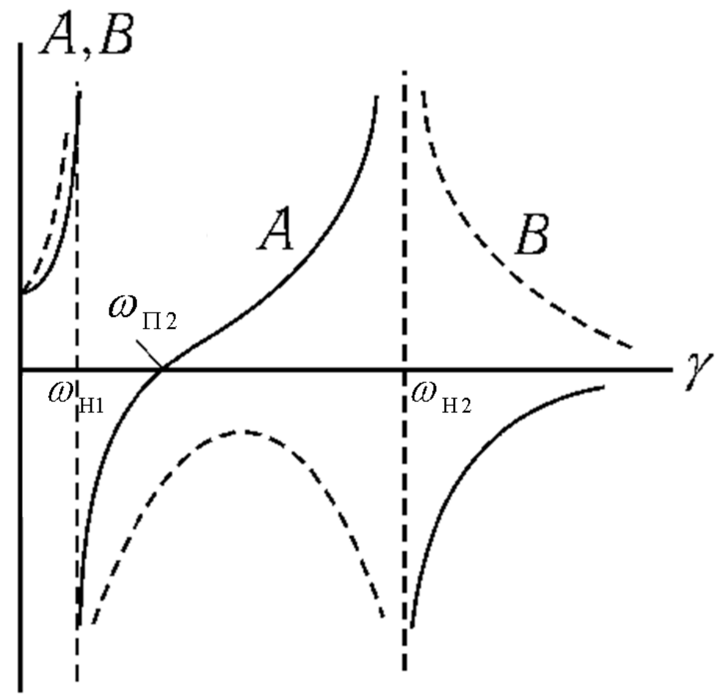
$$\Delta = (\omega_1^2 + \alpha - \gamma^2)(\omega_2^2 + \alpha - \gamma^2) - \alpha^2 = (\omega_{\Pi 1}^2 - \gamma^2)(\omega_{\Pi 2}^2 - \gamma^2) - \alpha^2 =$$
$$= \gamma^4 - \gamma^2(\omega_{\Pi 1}^2 + \omega_{\Pi 2}^2) + \omega_{\Pi 1}^2\omega_{\Pi 2}^2 - \alpha^2 = \gamma^4 - \gamma^2(\omega_{H1}^2 + \omega_{H2}^2) + \omega_{H1}^2\omega_{H2}^2$$

$$\boxed{\Delta = (\omega_{H1}^2 - \gamma^2)(\omega_{H2}^2 - \gamma^2)} \qquad (8.7)$$

$$(8.8) \quad \boxed{A = \frac{\begin{vmatrix} (F) & (-\alpha) \\ (0) & (\omega_2^2 + \alpha - \gamma^2) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{(\omega_2^2 + \alpha - \gamma^2)F}{\Delta} = \frac{(\omega_{\Pi 2}^2 - \gamma^2)F}{(\omega_{H1}^2 - \gamma^2)(\omega_{H2}^2 - \gamma^2)}}$$

$$(8.9) \quad \boxed{B = \frac{\begin{vmatrix} (\omega_1^2 + \alpha - \gamma^2) & (F) \\ (-\alpha) & (0) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{F\alpha}{\Delta} = \frac{F\alpha}{(\omega_{H1}^2 - \gamma^2)(\omega_{H2}^2 - \gamma^2)}}$$

1) $\gamma \to \omega_{H1}, \omega_{H2}$ – резонанс
2) $\gamma = \omega_{\Pi 2}$ – 1й осциллятор не колеблется (динамическое демпфировние)



# Вынужденные колебания в системе двух связанных осцилляторов. Теорема взаимности

Пусть теперь сила действует на второй осциллятор:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 + \alpha(x_1 - x_2) = 0 & (9.1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 + \alpha(x_2 - x_1) = F\cos(\gamma t) & (9.2) \end{cases}$$

Ищем решение на частоте вынуждающей силы (как на предыдущем слайде, см. (8.4)):

$$x_1 = A\cos(\gamma t), \quad x_2 = B\cos(\gamma t)$$

$$\begin{pmatrix} \left(\omega_1^2 + \alpha - \gamma\right) & (-\alpha) \\ (-\alpha) & \left(\omega_2^2 + \alpha - \gamma\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ F \end{pmatrix} \qquad (9.3)$$

$$\boxed{A = \frac{\begin{vmatrix} (0) & (-\alpha) \\ (F) & \left(\omega_2^2 + \alpha - \gamma^2\right) \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{F\alpha}{\Delta}} \qquad (9.4)$$

$$\boxed{B = \frac{F \cdot \left(\omega_{\Pi 1}^2 - \gamma^2\right)}{\Delta}} \qquad (9.5)$$

Сравним (9.4) и (8.9)…

**При воздействии на один осциллятор внешней силы второй будет колебаться так же,**
**Как первый при воздействии внешней силы на второй (теорема взаимности).**

# Свободные колебания в системе N связанных линейных осцилляторов

$$a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}x_j = 0 \qquad (10.1)$$

Можно получить закон сохранения энергии:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(a_{ij}\ddot{x}_j + b_{ij}x_j\right) = 0 \quad \Big|\dot{x}_j, +, \int \ldots dt \qquad (10.2)$$

Ищем решение в виде:

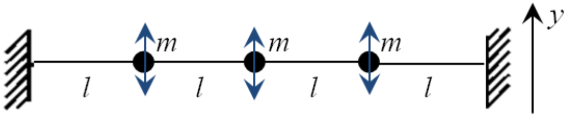
$$x_j \sim e^{-i\omega t} \qquad (10.3)$$

↓ Уравнение на нахождение собственных частот:

$$\det\left[-a_{ij}\omega^2 + b_{ij}\right] = 0 \qquad (10.4)$$

У системы N собственных частот.

# Свободные колебания в системе трех связанных линейных осцилляторов (пример)




$T = const$ *(сила натяжения шнура)* $\qquad \omega_0^2 = \dfrac{T}{ml} \qquad (11.1)$

$$\begin{cases} m\ddot{y}_1 = -\dfrac{T}{l}y_1 - \dfrac{T}{l}(y_1 - y_2) & (11.2) \\ m\ddot{y}_2 = -\dfrac{T}{l}(y_2 - y_1) - \dfrac{T}{l}(y_2 - y_3) & (11.3) \\ m\ddot{y}_3 = -\dfrac{T}{l}y_3 - \dfrac{T}{l}(y_3 - y_2) & (11.4) \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\omega_0^2 & \omega_0^2 & 0 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ 0 & \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \qquad (11.5) \qquad\qquad y_{1,2,3} \sim e^{-i\omega t} \qquad (11.6)$$

$$\begin{vmatrix} (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 & 0 \\ -\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) & -\omega_0^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & (2\omega_0^2 - \omega^2) \end{vmatrix} = 0 \qquad (11.7)$$

$$(2\omega_0^2 - \omega^2)\left[(2\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2(\omega_0^2)^2\right] = 0 \qquad (11.8)$$

$$2\omega_0^2 - \omega^2 = 0, \quad 2\omega_0^2 - \omega^2 = \pm\sqrt{2}\omega_0^2 \qquad (11.9)$$

Нормальные (собственные) частоты:

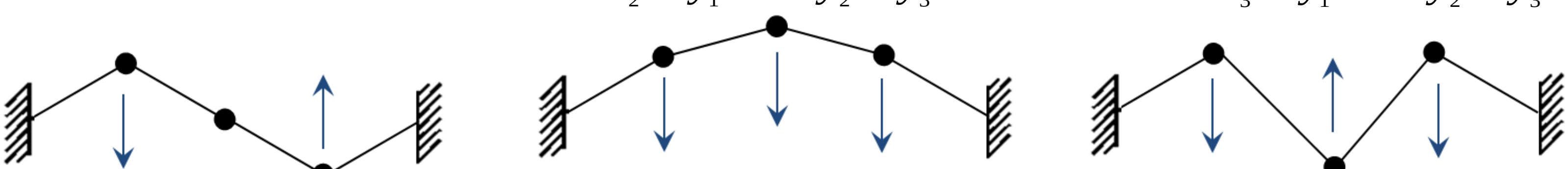
$\omega_{\text{Н}1}^2 = 2\omega_0^2 \quad (11.10) \qquad \omega_{\text{Н}2}^2 = \omega_0^2\left(2 - \sqrt{2}\right) \quad (11.11) \qquad \omega_{\text{Н}3}^2 = \omega_0^2\left(2 + \sqrt{2}\right) \quad (11.12)$

(ДЗ) Показать, что нормальные (собственные) координаты определяются следующими выражениями:

$U_1 = (1,0,-1);$
$U_1 = y_1 - y_3 \qquad (11.13)$

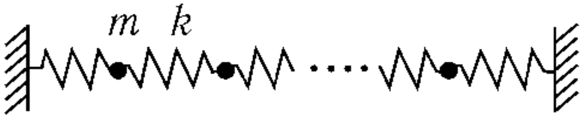
$U_2 = (1,\sqrt{2},1);$
$U_2 = y_1 + \sqrt{2}y_2 + y_3 \qquad (11.14)$

$U_3 = (1,-\sqrt{2},1);$
$U_3 = y_1 - \sqrt{2}y_2 + y_3 \qquad (11.15)$



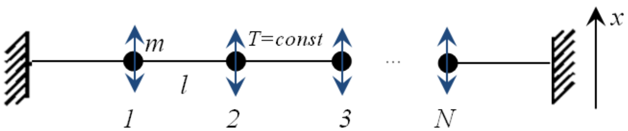
Собственные моды

# Колебания в однородных цепочках гармонических осцилляторов. Дисперсионная характеристика




$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

или




$$\omega_0^2 = \frac{T}{ml}$$

$$L(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\dot{x}_n^2 - \frac{\omega_0^2}{2}\left[x_1^2 + \sum_{n=2}^{N}(x_n - x_{n-1})^2 + x_N^2\right] \quad (12.1)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_0^2(2x_1 - x_2) = 0 & (12.2) \\ \ddot{x}_n + \omega_0^2(-x_{n-1} + 2x_n - x_{n+1}) = 0 & (12.3) \\ \ddot{x}_N + \omega_0^2(-x_{N-1} + 2x_N) = 0 & (12.4) \end{cases}$$

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2(-x_{n-1} + 2x_n - x_{n+1}) = 0 \quad (12.5)$$

$$n = 1,2,\ldots,N; \quad x_0 = x_{N+1} = 0 \quad (12.6)$$

$$x_n \sim e^{-i(\omega t \pm n\varphi)} \quad (12.7)$$

$$-\omega^2 + \omega_0^2(-e^{-i\varphi} + 2 - e^{i\varphi}) = 0 \quad (12.8)$$

$$-\omega^2 + 2\omega_0^2(1 - \cos(\varphi)) = 0 \quad (12.9)$$

$$\boxed{\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2(\varphi/2)} \quad (12.10)$$

$$x_n = Ae^{-i(\omega t + n\varphi)} + Be^{-i(\omega t - n\varphi)} \quad (12.11)$$

Применяем первое ГУ (12.6) к (12.11):

$$x_0 = 0 \Rightarrow A = -B \quad (12.12)$$

Из (12.11) с учетом (12.12) получаем:

$$x_n = 2iBe^{-i\omega t}\left(e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}\right)/(2i) \quad (12.13)$$

$$x_n = 2iBe^{-i\omega t}\sin(n\varphi) \quad (12.14)$$

Применяем второе ГУ (12.6) к (12.14):

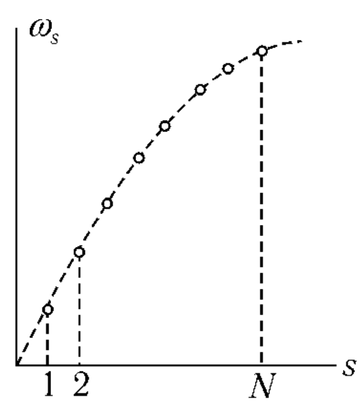
$$x_{N+1} = 0 \Rightarrow \sin((N+1)\varphi) = 0 \Rightarrow \varphi_s = \frac{\pi s}{N+1}, \quad (12.15)$$

$s = 1,2,\ldots,N$

Из (12.10) с учетом (12.15) получаем:

$$\omega_s = 2\omega_0 \sin(\varphi_s/2) \quad (12.16)$$

$$\boxed{\omega_s^2 = 2\omega_0^2\left(1 - \cos\left(\frac{\pi s}{N+1}\right)\right)} \quad (12.17)$$



# Колебания в однородных цепочках гармонических осцилляторов. Применение общей формулы для N=3

На предыдущем слайде получили (12.17):

$$\boxed{\omega_s^2 = 2\omega_0^2\left(1-\cos\left(\frac{\pi s}{N+1}\right)\right)}$$

Теперь возьмем N = 3:

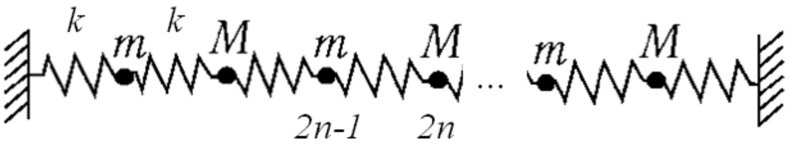
$$\omega_{\text{н}1}^2 = 2\omega_0^2\left(1-\cos\left(\frac{1\cdot\pi}{3+1}\right)\right) = \omega_0^2\left(2-\sqrt{2}\right) \qquad (13.1)$$

$$\omega_{\text{н}2}^2 = 2\omega_0^2\left(1-\cos\left(\frac{2\cdot\pi}{3+1}\right)\right) = 2\omega_0^2 \qquad (13.2)$$

$$\omega_{\text{н}3}^2 = 2\omega_0^2\left(1-\cos\left(\frac{3\cdot\pi}{3+1}\right)\right) = \omega_0^2\left(2+\sqrt{2}\right) \qquad (13.3)$$

Выражения совпали с независимо полученными на слайде 11
[сравните (13.1) и (11.11); (13.2) и (11.10); (13.3) и (11.12)].

# Колебания в цепочках гармонических осцилляторов с частицами двух сортов (I)




$$\begin{cases} m\ddot{x}_{2n-1} + k\left(-x_{2n-2} + 2x_{2n-1} - x_{2n}\right) = 0 & (14.1) \\ M\ddot{x}_{2n} + k\left(-x_{2n-1} + 2x_{2n} - x_{2n+1}\right) = 0 & (14.2) \end{cases}$$

$$n = 1,2,\ldots,N; \quad x_0 = x_{2N+1} = 0 \qquad (14.3)$$

$$\begin{cases} x_{2n-1} = Ae^{-i(\omega t \pm (2n-1)\varphi)} & (14.4) \\ x_{2n} = Be^{-i(\omega t \pm 2n\varphi)} & (14.5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(-m\omega^2 + 2k\right)A - k\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)B = 0 & (14.6) \\ -k\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right)A + \left(-M\omega^2 + 2k\right)B = 0 & (14.7) \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} \left(-m\omega^2 + 2k\right) & \left(-2k\cos(\varphi)\right) \\ \left(-2k\cos(\varphi)\right) & \left(-M\omega^2 + 2k\right) \end{vmatrix} = 0 \qquad (14.8),\ (14.9)$$

(ДЗ) Проверить, что корни уравнения:

$$\boxed{\omega_{\pm}^2 = \frac{k(m+M)}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4mM)}{(m+M)^2}\right)\sin^2(\varphi)}\right)} \qquad (14.10)$$

Применяем первое ГУ (14.3) к (14.5):

$$x_0 = 0 \Rightarrow B_1 e^{-i\omega t} + B_2 e^{-i\omega t}, \quad B_1 = -B_2 \qquad (14.11)$$

Перепишем (14.5) с учетом (14.11):

$$x_{2n} = 2iBe^{-i\omega t}\left(\frac{e^{2in\varphi} - e^{-2in\varphi}}{2i}\right) = 2iBe^{-i\omega t}\sin(2n\varphi) \qquad (14.12)$$

Из (14.6) выразим A через B:

$$A = \frac{2k\cos(\varphi)}{2k - m\omega^2}B \qquad (14.13)$$

Из (14.4) с учетом (14.13) получаем:

$$x_{2n-1} = \frac{2 \cdot 2iBk\cos(\varphi)}{2k - m\omega^2}e^{-i\omega t}\sin((2n-1)\varphi) \qquad (14.14)$$

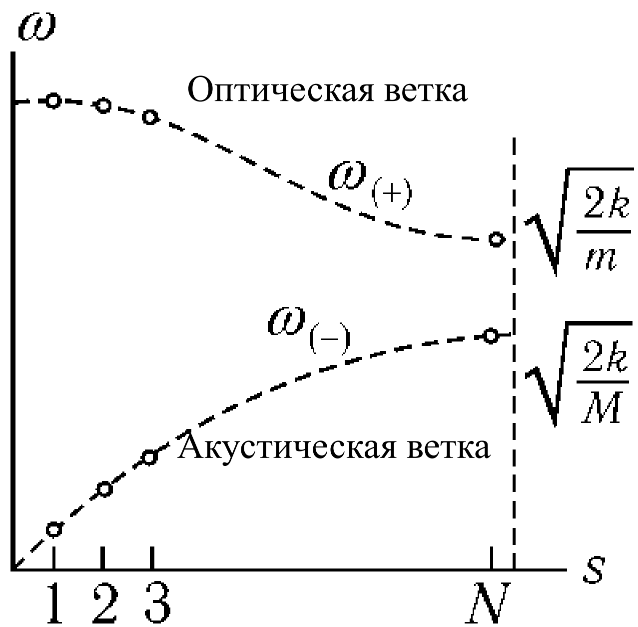
Применяем второе ГУ (14.3) к (14.4):

$$x_{2N+1} = 0 \Rightarrow (2N+1)\varphi_s = \pi s \qquad (14.15)$$

но $(\varphi_{2N+1-s} = \pi - \varphi_s)$

поэтому $s = 1,2,\ldots,N$ - определяет полный набор частот

# Колебания в цепочках гармонических осцилляторов с частицами двух сортов (II)




Для акустической ветки ($\omega_-$) A и B одного знака
Для оптической ветки ($\omega_+$) A и B разных знаков

Если M>>m:
Для оптической ветки: только легкие массы (m) колеблются, тяжелые массы (M) неподвижны.
Для акустической ветки: смещаются только тяжелые массы (M).

(ДЗ) Как осуществить предельный переход m=M?

Выражение (14.10):

$$\boxed{\omega_{\pm}^2 = \frac{k(m+M)}{mM}\left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{4mM)}{(m+M)^2}\right)\sin^2(\varphi)}\right)}$$