А.И. Маринин

Линейная алгебра

Практическое пособие

Часть II

Нижний Новгород, 2019

Во второй части практического пособия рассматриваются следующие темы: жорданова форма матрицы, линейные операторы в евклидовом (унитарном) пространстве, билинейные и квадратичные формы. Как и в первой части, акцент ставится на примерах вычислительного характера, что не исключает появления теоретических задач и вопросов.

Словарик

$\mathbb{F}[X]$ – пространство всех многочленов от x над полем $\mathbb{F}$.

$\mathbb{F}_m[X]$ – пространство многочленов от x степени не выше m над полем $\mathbb{F}$.

$V_{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_k E)$ – собственное подпространство оператора $\mathcal{A}$, отвечающее корню $\lambda = \lambda_k$ характеристического многочлена

$V^{\lambda_k} = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_k E)^{n_k}$ – наибольшее инвариантное подпространство оператора $\mathcal{A}$, в котором единственным собственным значением является $\lambda = \lambda_k$; $n_k = \dim V^{\lambda_k}$ – кратность корня λ_k в характеристическом многочлене

$D = \mathrm{diag}(A_{m_1},\ A_{m_2}, \dots, A_{m_s})$ – блочно-диагональная матрица с квадратными матрицами (блоками) порядков $m_1, m_2, \dots, m_s$ на главной диагонали

$J_{m_k}(\lambda_k)$ – жорданова клетка порядка m_k с $\lambda = \lambda_k$ на главной диагонали

A_g – жорданова матрица (блочно-диагональная матрица с жордановыми клетками на главной диагонали); $A_g = \mathrm{diag}\,(J_{m_1}(\lambda_{i_1}), \dots, J_{m_p}\left(\lambda_{i_p}\right))$; числа $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_p}$ в блоках могут повторяться

Литература

1. Г.М. Жислин. Основы линейной алгебры. Учебное пособие. Н.Новгород, 2014.
2. И.М. Гельфанд. Лекции по линейной алгебре.
3. И.В. Проскуряков. Сборник задач по линейной алгебре.
4. В.И. Арнольд. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

IV. Жорданова форма матрицы

Линейный оператор $\mathcal{A}$ в конечномерном пространстве не всегда диагонализируем. Дело в том, что диагонализация в n-мерном пространстве предполагает существование ровно n линейно независимых собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, семейство которых дает нужный ("диагональный") базис. Однако таких векторов может оказаться меньше n (размерности пространства). Посмотрим

Пример 1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе e. Ищем корни характеристического многочлена $\det||A - \lambda E||$, то есть решаем уравнение $\lambda^2 = 0$, и получаем $\lambda_{1,2} = 0$. Собственные векторы находятся как решения матричного уравнения $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, то есть $x_2 = 0$ и единственным собственным вектором (он всегда ненулевой!), с точностью до пропорциональности, является $f = (1,0)$; для построения собственного базиса его недостаточно, поэтому к диагональному виду матрицу привести не удается.

Пример 2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица поворота плоскости (на какой угол?). В стандартном базисе $\mathbb{R}^2$ оператор $\mathcal{A}$ не диагонализируем (почему?). В пространстве же над полем $\mathbb{C}$ имеем $\lambda^2 + 1 = 0,\ \lambda_{1,2} = \pm i$ - два мнимых корня, которым отвечают собственные векторы $g_1 = (1, -i),\ g_2 = (1, i)$; базис $< g_1, g_2, g_3 >$ собственный, и в нем наш оператор имеет матрицу

$$A_g = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Задача 1. Заполните пробелы в **примере 2**. Найдите собственные векторы и матрицу перехода к диагональному базису.

Задача 2. Оператор **примера 1** не диагонализируем ни над каким полем $\mathbb{F}$. Докажите.

Указание. Собственное подпространство $\mathrm{Ker}(A - \lambda E) = \mathrm{Ker}(A)$ одномерно.

Поскольку диагонализация не всегда возможна, в линейной алгебре разработаны методы отыскания такого базиса, в котором матрица оператора принимает наиболее простой, "канонический" вид. Этот канонический вид как раз и является жордановой формой. Теория приведения к ней матрицы дана в [**1**]. Мы будем обсуждать и решать эту задачу в наиболее общей постановке: не только предъявлять каноническую форму, но и вычислять соответствующий канонический (жорданов) базис.

Разберем подробно особенно важный случай оператора в 3-мерном пространстве, которое, вообще говоря, предполагается комплексным (поле $\mathbb{F}$ коэффициентов есть $\mathbb{C}$). Итак, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на линейном комплексном пространстве $\mathcal{V}$ (матрица $\mathcal{A}$ задана в фиксированном базисе и обозначается той же буквой A), $\dim\mathcal{V} = 3$,

$$\det||A - \lambda E|| \qquad (1) \ –$$

характеристический многочлен. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни (1), их наличие гарантируется основной теоремой алгебры многочленов.

(**i**). Корни уравнения (1) <u>попарно различны</u>: $\lambda_k \neq \lambda_j$ $(k \neq j; k, j = 1..3)$. Собственные векторы g_1, g_2, g_3 с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ линейно независимы (теоретический факт!), и матрица $\mathcal{A}$ в базисе $< g_1, g_2, g_3 >$ диагональна с $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ на главной диагонали. Получаем разложение $\mathcal{V} = \bigoplus_{p=1}^{3} \operatorname{Ker}(A - \lambda_p E)$ – прямая сумма собственных одномерных подпространств.

Пример 3. Пусть оператор в некотором базисе задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычисляя корни характеристического многочлена

$$\varphi(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6,$$

получаем $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$. Находим последовательно собственные векторы как решения систем уравнений

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_{\mathrm{p}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ \text{p=1, 2, 3}.$$

Например, для $g_2 = 2$ нужно решить однородную систему

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 0. \\ 4x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

В полном соответствии с теорией, ранг матрицы этой системы равен 2, поэтому пространство решений одномерное и $g_2 = (1, 1, 0)$ – его базис. Аналогично, для $\lambda_1 = 1$ и

$\lambda_3 = 3$ находим $g_1 = (1, 2, 1)$ и $g_3 = (1, 2, 2)$. Итак, $< g_1, g_2, g_3 >$ – жорданов базис. Напишем матрицу перехода к нему от исходного базиса:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(как обычно, в столбцах матрицы перехода стоят координаты в исходном базисе векторов нового, то есть жорданова базиса). Легко увидеть, что $\det||C|| = -1$. Вычисляя обратную матрицу, находим

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь $A_g = C^{-1}AC$ – жорданова форма, и

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii). $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Здесь имеем $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^2 \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_3 E)$, причем размерности инвариантных подпространств $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ и $\mathrm{Ker}(A - \lambda_3 E)$ равны соответственно 2 и 1 (алгебраические кратности собственных чисел λ_1 и λ_3). В $\mathrm{Ker}(A - \lambda_3 E)$ пусть $< g_3 >$ – базис (g_3 – собственный вектор с собственным значением λ_3). Для $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ возможны два подслучая:

(**а**) в $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ имеется 2 линейно независимых собственных вектора g_1 и g_2 (с собственным значением λ_1). Тогда $< g_1, g_2, g_3 >$ – базис $\mathcal{V}$, в котором матрица нашего оператора диагональна с $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_3$ на главной диагонали.

Пример 4. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\varphi(\lambda) = \det||A - \lambda E|| = -(\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10).$$

Корнями уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ являются $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 10$. Для $\lambda_1 = 1$ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

эквивалентную уравнению $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, имеющему два линейно независимых решения $g_1 = (-2, 1, 0)$ и $g_2 = (2, 0, 1)$. Аналогично, для $\lambda_3 = 10$ находим $g_3 = (1, 2, -2)$. Матрица перехода к жорданову базису $< g_1, g_2, g_3 >$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

и $$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} -$$

искомая жорданова форма;

(**b**) $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E) = 1$, и одного собственного вектора не хватает для базиса подпространства $\dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$. Рассмотрим ограничение A на $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ и выберем какой-нибудь вектор g_2 из $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2 \setminus \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)$ (такой вектор обязательно есть, так как оператор $(A - \lambda_1 E)$ не аннулирует все (имеющее размерность 2) подпространство $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$. Как найти g_2? Например, так: выбрать базис подпространства $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)$ и дополнить его (единственным в данном случае вектором g_2) до базиса $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$. Найденный вектор g_2 под действием $(A - \lambda_1 E)$ перейдет в $g_1 = (A - \lambda_1 E)\, g_2 \in \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)$. Векторы g_1 и g_2 линейно независимы (теория!) и (взятые именно в таком порядке) образуют базис $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$, а вместе с вектором g_3 (базисом $\operatorname{Ker}(A - \lambda_3 E)$) – канонический (жорданов) базис всего пространства $\mathcal{V}$. Для $\operatorname{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ получаем жорданову клетку второго порядка, именно $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, поскольку

$$Ag_1 = \lambda_1 g_1,\ Ag_2 = g_1 + (\lambda_1 E) g_2 = g_1 + \lambda_1 g_2;$$

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \text{– искомая жорданова форма.}$$

Пример 5. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\varphi(\lambda) = -(\lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda - 3)$. $\lambda_{1,2} = -1$, $\lambda_3 = 3$. Теперь

$$A - \lambda_1 E = A + E = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{pmatrix},\ (A + E)^2 = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 16 \\ 32 & -32 & 32 \\ 32 & -32 & 32 \end{pmatrix};$$

$\operatorname{rg}(A + E) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(A + E) = 1$; $f = (1, 2, 1)$ – собственный вектор; $g_2 = (1, 1, 0)$, тогда $(A + E)\, g_2 = g_1 = (-1, -2, -1)$; $< g_1, g_2 >$ – базис $\operatorname{Ker}(A + E)^2$. Для собственного значения $\lambda_3 = 3$ собственным вектором будет $g_3 = (1, 2, 2)$, и $< g_1, g_2, g_3 >$ – жорданов базис $\mathcal{V}$,

$$A_g = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(**iii**). $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_0$. $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)^3$. Несколько подслучаев:

(a) $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E) = 3 \Rightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)^3 = V = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)$; выбрав три собственных линейно независимых вектора оператора $\mathcal{A}$, получим для $\mathcal{A}$ диагональный базис; эта ситуация рассмотрена в (**i**);

(b) $\dim \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 E) = 2$; поступаем, как в п. (**iib**): g_2 – вектор, не входящий в ядро $(A - \lambda_0 E)$; $g_1 = (A - \lambda_0 E) g_2 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)$; теперь дополним g_1 вектором g_3 до базиса $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)$; в базисе $< g_1, g_2, g_3 >$

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \text{ – жорданова форма.}$$

Пример 6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. $\lambda_{1,2,3} = 2$, $f = (1, 2, 0)$ – собственный вектор;

$A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; пусть $g_2 = (0, 1, 0)$; $g_1 = (A - 2E) g_2 = (1, 2, 1) \in \mathrm{Ker}(A - 2E)$; дополним g_1 до базиса ядра оператора $A - 2E$ – например, вектором $g_3 = (0, 0, 1)$. В базисе $< g_1, g_2, g_3 >$ $A_g = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = C^{-1} A C$, где $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

(c) $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E) = 1$, $\dim \mathrm{Im}\,(A - \lambda_0 E) = 2$. Ищем такой вектор $g_3 \in \mathcal{V}$, что $(A - \lambda_0 E) g_3 = g_2 \neq \theta$, причем $g_2 \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)$. Это возможно, иначе для любого вектора $g \in \mathcal{V}$ выполнялось бы условие $(A - \lambda_0 E)^2 g = \theta$, то есть $\mathcal{V} = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)^2$ и $\dim V = 2$. Иными словами, нужен такой вектор g_3, что $(A - \lambda_0 E)^2 g_3 \neq 0$; этот вектор дополняет до базиса $\mathcal{V}$ базис подпространства $\mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E)^2$. Теперь, когда g_3 найден, вычисляем

$$g_2 = (A - \lambda_0 E) g_3, \quad A g_3 = g_2 + \lambda_0 g_3 \qquad (*). \text{ Далее,}$$

$$(A - \lambda_0 E)^2 g_3 = (A - \lambda_0 E) g_2 = g_1, \;\; A g_2 = g_1 + \lambda_0 g_2 \qquad (**);$$

$$g_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 E), \quad A g_1 = \lambda_0 g_1 \qquad (***).$$

Учитывая (*), (**), (***), в базисе $< g_1, g_2, g_3 >$ пишем

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

$\varphi(\lambda) = \det\|A - \lambda E\| = -\left(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1\right), \lambda_{1,2,3} = 1,$

$A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$, $\mathrm{rg}\,(A - E) = 2,\ \dim \mathrm{Ker}(A - E) = 1.$

$(A - E)^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$. Вычисляем векторы канонического базиса:

$$g_3 = (1, 0, 0),\ g_2 = (A - E)g_3 = (0, -2, -1),\ g_1 = (A - E)g_2 = (3, 1, 1).$$

Построили базис Жордана, в нем

$$A_g = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ситуация в случае трехмерного пространства полностью исчерпана. А что при $\dim \mathcal{V} > 3$? Пространство представляется прямой суммой инвариантных подпространств $\mathrm{Ker}(A - \lambda_k E)^{m_k}$, где λ_k – m_k-кратный корень характеристического многочлена (1). Задержимся ненадолго на варианте $\dim \mathcal{V} = 4$. Если все корни (1) различны, матрица $\mathcal{A}$ диагонализируема в собственном базисе (как в (**i**)). Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3,\ \lambda_4 \neq \lambda_1$, то один из векторов базиса доставляет $\mathrm{Ker}(A - \lambda_4 E)$, остальные три берутся из $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^3$. Так как $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^3 = 3$, сужение оператора $\mathcal{A}$ на подпространство $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^3$ приведет к рассмотренному случаю трехкратного собственного значения (см. (**iii**)). При $\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_3 = \lambda_4,\ \lambda_1 \neq \lambda_3$ в подпространствах $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 E)^2$ и $\mathrm{Ker}(A - \lambda_3 E)^2$ поступаем, как в п. (**ii**).

Новое возникает при корне кратности 4 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_0$) и только тогда, когда $\dim \mathrm{Ker}(A - A_0 E) = 1$. Последовательно находим:

g_4 – так, что $(A - \lambda_0 E)^3\ g_4 \neq \theta$; далее

$$g_3 = (A - \lambda_0 E)g_4, \quad g_2 = (A - \lambda_0 E)g_3, \quad g_1 = (A - \lambda_0 E)g_2.$$

Эти соотношения дают

$$Ag_4 = g_3 + \lambda_0 g_4,\ Ag_3 = g_2 + \lambda_0 g_3,\ Ag_2 = g_1 + \lambda_0 g_2,\ Ag_1 = \lambda_0 g_1.$$

Базис $< g_1, g_2, g_3, g_4 >$ жорданов, и в нем получим

$$J_4(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Пусть оператор $\mathcal{A}$ задан матрицей A в жордановом базисе $< g_{1,\dots,}g_n >$. Укажите все $\mathcal{A}$-инвариантные подпространства. Не торопитесь. Прежде чем сформулировать ответ, потренируйтесь на матрицах порядков 3, 4, 5.

Задача 4. A – произвольная матрица, λ – собственное значение. Определите количество клеток с λ на диагонали в жордановом представлении A (не переходя в жорданов базис).
Ответ. $\operatorname{def}(A - \lambda E) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda E)$.

Задача 5. Не находя жорданова базиса, выпишите жорданову форму матрицы, зная, что $\varphi(\lambda) = (\lambda - 1)^4$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Указание. Вычислите $(A - E)^2$ и $(A - E)^3$.
Ответ. $\operatorname{diag}(J_3(1), 1)$.

Задача 6. Найдите жорданову форму $J(A)$ матрицы A, если известно, что

$$\varphi(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)^3 \ \text{ и } \ rg\,(A - 2E) = 3, \ rg\,(A + E) = 4.$$

Ответ. $\operatorname{diag}(J_3(-1),\ 2, 2)$.

Займемся ненадолго возведением матрицы (оператора) в натуральную степень. Если $A = \operatorname{diag}(A_{1,} A_2, \dots, A_p)$, то $A^k = \operatorname{diag}(A_1^k, A_2^k, \dots, A_p^k)$. В жордановом базисе матрица A_g имеет блочно-диагональный вид с жордановыми клетками-блоками. Посмотрим поближе: $A|_{V^{\lambda_p}}$ – подматрица A_g (ограничение $\mathcal{A}$ на V^{λ_p}) – в качестве блоков содержит жордановы клетки различных порядков с одним и тем же собственным числом λ_p, поэтому при вычислении k-й степени матрицы в жордановом базисе инвариантного подпространства V^{λ_p} нужно возвести в эту степень каждую матрицу $J_m(\lambda_p)$, и вычисленная степень заполнит тот же блок, в котором находилась матрица $J_m(\lambda_p)$ (не забудем, что не только подпространство V^{λ_p}, но и все **его** подпространства с базисами

$< g_{1,\dots,}g_m >$, векторы которых передвигаются оператором $\mathcal{A}$ по схеме $g_m \to g_{m-1} \to \dots \to g_1 \to \theta$, являются инвариантными относительно $\mathcal{A}$).

Пусть $J_m(\lambda_p)$ – одна из жордановых клеток. Тогда матрица $B = J_m(\lambda_p) - \lambda_p E$ есть жорданова клетка с нулями на главной диагонали. Умножение B на себя приводит к сдвигу диагонали единиц на одну позицию вправо (проверьте). B^q сдвигает диагональ единиц на q позиций вправо. При q = m получим

$$B^m = (J_m(\lambda_p) - \lambda_p E)^m = 0 \qquad (2).$$

Задача 7. Если подпространство U $\mathcal{A}$-инвариантно, то U инвариантно относительно оператора $\mathcal{A} - \lambda E$ при любом λ. Докажите.
Решение. $x \in U \Rightarrow \mathcal{A}x \in U, \lambda x \in U \Rightarrow (\mathcal{A} - \lambda E)x = \mathcal{A}x - \lambda x \in U$.

Для многочлена $f \in \mathbb{C}[X], f(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0, c_i \in \mathbb{C}, i \in [1..n]$ и любой квадратной матрицы A можно построить матричный многочлен $f(A) = c_m A^m + \dots + c_0 E$. Так, при $f(x) = \frac{1}{k}x + 1$ получим $f(A) = (E + \frac{A}{k})$.

Задача 8. Докажите, что если $f \in \mathbb{C}[X],\ f(x) = c_m x^m + \dots + c_1 x + c_0,\ c_i \in \mathbb{C},\ i \in [1..n]$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ – все различные корни $\varphi(\lambda)$ – характеристического многочлена оператора $\mathcal{A}$ – с кратностями $m_1, \dots, m_k$ соответственно, то собственными значениями оператора $f(\mathcal{A})$ будут числа $f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_k)$ с теми же кратностями $m_1, \dots, m_k$.
Указание. В операторном многочлене $f(\mathcal{A})$ степени m рассмотрите сначала все одночлены $c_k \mathcal{A}^k$.

Задача 9. $\mathbb{R}_4[X]$ – линейное пространство многочленов от x степени ≤ 4 над полем $\mathbb{R}$, D – оператор дифференцирования в базисе <1, x, x^2, x^3, x^4>: $Df(x) = \frac{d}{dx}f(x),\ f \in \mathbb{R}_5(X)$. Найдите жорданову форму матрицы D. А в базисе <1, x, $x^2/2$, $x^3/6$, $x^4/24$>?
Ответ. $J_5(0)$.

Определение. exp (A) – **экспонента** $\mathcal{A}$ – есть

$$e^A = \lim_{k \to \infty} (E + \frac{A}{k})^k \qquad (3)$$

Что именно означает предельный переход в (3) и вообще теория экспоненты оператора в конечномерном линейном пространстве дана в прекрасной книге [**4**], здесь приведем такой важный результат:

Теорема. $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Если A и B - числа, то $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ – основное свойство экспоненты.

Задача 10. Верна ли формула $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$ для матриц A и B (одного порядка)? При каком условии на матрицы основное свойство экспоненты все же выполняется?
Ответ. $AB = BA$.

В естественнонаучных моделях нередко возникает необходимость вычисления $\exp(A)$ (например, при решении систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами). Итак, дан оператор $\mathcal{A}$ в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{V}$, $\dim\mathcal{V} = n$.

Задача 11. Найдите $\exp(A)$.
Решение. Перейдем к базису Жордана; в нем каждая клетка выглядит так:

$$D = \lambda_p E_m + J_m(0) \qquad (4).$$

Здесь E_m – единичная матрица порядка m (матричная единица), представление дано в циклическом базисе $<g_1, g_2, \dots, g_m>$, и $g_m \to g_{m-1} \to \cdots \to g_1 \to \theta$. Правила работы с блочно-диагональной матрицей с блоками вида (4) таковы, что вычисление степеней D, а значит и $\exp(D)$, проводится с каждой клеткой независимо от остальных. Получаем

$$e^D = e^{\lambda_p E_m + J_m(0)} = e^{\lambda_p E_m} \cdot e^{J_m(0)} = e^{\lambda_p} E_m \cdot \sum_{s=0}^{\infty} \frac{J_s(0)}{s!} \qquad (5).$$

Но в $(J_m(0))^s$ диагональ единиц удалена от главной диагонали $J_m(0)$ на s единиц, остальные элементы $(J_m(0))^s$ – нули. Поскольку $(J_m(0))^m = 0$, ряд (5) сводится к конечной сумме. Теперь, когда вычислена экспонента в жордановом базисе g, в исходном базисе f получим требуемое:

$$e_f^A = C\, e_g^A\, C^{-1} \qquad (6),$$

где C– матрица перехода от f к g; (6) объясняется тем, что для любой матрицы M

$$(CMC^{-1})^k = (CMC^{-1})(CMC^{-1}) \dots (CMC^{-1}) = CM(C^{-1}C)M(C^{-1}C) \dots MC^{-1} = CM^kC^{-1}.$$

Задача 12. Линейный оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном пространстве имеет в некотором базисе диагональную матрицу с различными элементами на диагонали. Найдите все подпространства, инвариантные относительно $\mathcal{A}$.

Ответ. Количество инвариантных подпространств равно 2^n.

Задача 13. Найдите все инвариантные подпространства относительно оператора, имеющего в некотором базисе матрицу, состоящую из одной жордановой клетки.

Ответ. Количество инвариантных подпространств равно размерности пространства.

Задача 14. Докажите, что всякое подпространство V^{λ_k} линейного оператора $\mathcal{A}$ инвариантно относительно любого линейного оператора $\mathcal{B}$, перестановочного с $\mathcal{A}$.

Указание. $\mathcal{B}$ коммутирует со всеми $(\mathcal{A}-\lambda_k E)^p, p \in [1..n_k]$…

$$x \in V^{\lambda_k} \Rightarrow (\mathcal{A}-\lambda_k E)^{n_k}(\mathcal{B}x) = \mathcal{B}((\mathcal{A}-\lambda_k E)^{n_k}x) = \mathcal{B}(\theta) = \theta \Rightarrow \mathcal{B}x \in V^{\lambda_k}.$$

Задача 15. Пусть $A = J_4(3)$. Найдите жорданову форму матрицы A^2.
Ответ. $J_4(9)$.

Задача 16. Вычислите $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^{50}$.

Указание. Перейдите в жорданов базис (а потом вернитесь!).

Ответ. $2^{50} \cdot \begin{pmatrix} 26 & -25 \\ 25 & -24 \end{pmatrix}$.

V. Линейные операторы в унитарном и евклидовом пространствах

Наличие в унитарном пространстве скалярного произведения дополняет палитру теории операторов свежими красками. Здесь впервые будет прослежена взаимосвязь линейных операторов и билинейных форм (выступающих в этой главе в образе скалярного произведения).

Если $\mathcal{V}$ – унитарное пространство, x пробегает $\mathcal{V}$, y – **фиксированный вектор**, $\mathcal{A}$ – линейный оператор на $\mathcal{V}$, то скалярное произведение $(\mathcal{A}x, y)$ задает на $\mathcal{V}$ **линейную форму** $\varphi_y(x)$ от переменного вектора x, то есть:

1) $\varphi_y(x_1 + x_2) = (\mathcal{A}(x_1 + x_2), y) = (\mathcal{A}(x_1) + \mathcal{A}(x_2), y) = (\mathcal{A}(x_1), y) + (\mathcal{A}(x_2), y) =$
$$= \varphi_y(x_1) + \varphi_y(x_2);$$

2) $\varphi_y(\lambda x) = (\mathcal{A}(\lambda x), y) = (\lambda \mathcal{A}x, y) = \lambda(\mathcal{A}x, y) = \lambda\varphi_y(x)$.

В ортонормированном базисе $\mathcal{V}$ линейная форма от x может быть представлена в виде скалярного произведения x на некоторый постоянный (**не зависящий от** x) вектор a. Это – теорема, а вот доказательство:

пусть $\varphi(x)$ – линейная форма, рассматриваемая на комплексном унитарном пространстве $\mathcal{V}$ с ортонормированным базисом $<e_1, \dots, e_n>$; тогда $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$; учитывая линейность φ, получим $\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i)$; если возьмем $\varphi(e_i) = \overline{a_i}$, то (не забудем, что базис ортонормированный!)

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{a_i} = (x, a), \text{ где } a = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i. \text{ Доказано.}$$

Применим к нашему случаю: $\varphi_y(x) = (\mathcal{A}x, y) = (x, a)$, причем a не зависит от x (но, конечно, может зависеть от y), и нам удобно написать $a = y^*$. Получили отображение $\mathcal{V}$ в себя: $y \to y^*$. Обозначим $y^* = \mathcal{A}^* y$. Теперь установим линейность только что построенного оператора $\mathcal{A}^*$. По определению $\mathcal{A}^*$,

$$(\mathcal{A}x, \alpha y + \beta z) = (x, \mathcal{A}^*(\alpha y + \beta z)) \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$(\mathcal{A}x, \alpha y + \beta z) = (\mathcal{A}x, \alpha y) + (\mathcal{A}x, \beta z) = \bar{\alpha}(\mathcal{A}x, y) + \bar{\beta}(\mathcal{A}x, z) =$$

$$= \bar{\alpha}(x, \mathcal{A}^* y) + \bar{\beta}(x, \mathcal{A}^* z) = (x, \alpha\mathcal{A}^* y) + (x, \beta\mathcal{A}^* z) = (x, \alpha\mathcal{A}^* y + \beta\mathcal{A}^* z) \qquad (2)$$

Сравнивая правые части (1) и (2), легко попасть в ловушку и заключить, что $\mathcal{A}^*(\alpha y + \beta z) = \alpha\mathcal{A}^* y + \beta\mathcal{A}^* z$ – эта формула как раз и выражает линейность $\mathcal{A}^*$. На самом деле пока достоверно только (для любого вектора x) равенство скалярных произведений $\big(x, \mathcal{A}^*(\alpha y + \beta z)\big)$ и $(x, \alpha\mathcal{A}^* y + \beta\mathcal{A}^* z)$. Возможно ли для всех x равенство $(x, a) = (x, b)$ при различных a и b? Нет: если $a \neq b$ и $(x, a - b) = 0$, то при $x = a - b$ получится $(a - b, a - b) = 0$, что противоречит положительной определенности скалярного произведения. Итак, оператор $\mathcal{A}^*$ линеен. Добавим, что проведенные для унитарного пространства рассуждения сохраняют силу и в случае евклидова (вещественного) пространства, достаточно просто опустить "черточки" над скалярами.

Установлено следующее: в унитарном (евклидовом) пространстве линейному оператору $\mathcal{A}$ соответствует один и только один **сопряженный оператор** $\mathcal{A}^*$:

$$\forall x, y \in \mathcal{V} \ \ (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y).$$

Свойства операции сопряжения

1) $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$:

$(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y),\ (y, \mathcal{A}x) = (\mathcal{A}^* y, x) \Rightarrow\ <$ замена $x \leftrightarrow y >$ $(x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^* x, y)$ или $(\mathcal{A}^* x, y) = (x, \mathcal{A}y)$, что и означает $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$;

2) $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^*$:

$$(x, (\mathcal{A}\mathcal{B})^* y) = (\mathcal{A}\mathcal{B}, y) = (\mathcal{B}x, \mathcal{A}^* y) = (x, (\mathcal{B}^*\mathcal{A}^*) y) ;$$

3) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$:

$$(x, (\mathcal{A} + \mathcal{B})^* y) = \big((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y\big) = (\mathcal{A}x, y) + (\mathcal{B}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y) + (x, \mathcal{B}^* y) = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*) y)$$

4) $(\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*$:

$$(x, (\lambda\mathcal{A})^* y) = \big((\lambda\mathcal{A})x, y\big) = \lambda(\mathcal{A}x, y) = \lambda(x, \mathcal{A}^* y) = \big(x, (\bar{\lambda}\mathcal{A}^*) y\big) ;$$

5) $(\mathcal{E})^* = \mathcal{E}$:

$$(\mathcal{E}x, y) = (x, y) = (x, \mathcal{E}y) .$$

В каждом базисе линейному оператору сопоставляется некоторая матрица. Пусть $<e_1, \dots, e_n>$ – **ортонормированный базис**, $A = (a_{ik})_{i,k=1..n}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$.

$(\mathcal{A}e_k, e_i) = (\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j, e_i) = (a_{ik} e_i, e_i) = a_{ik}$. Посмотрим, как выглядит матрица сопряженного оператора в том же базисе. Обозначим как $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$ матрицу $\mathcal{A}^*$. Для базисных векторов получим $(e_k, \mathcal{A}^* e_i) = (e_k, Be_i) = (e_k, \sum_{j=1}^{n} b_{ji} e_j) = (e_k, b_{ki} e_k) = \overline{b_{ki}}(e_k, e_k) = \overline{b_{ki}}$. При $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ увидим, что

$$(Ax, y) = (A\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = (\sum_{k=1}^{n} x_k Ae_k, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_k \overline{y_i} a_{ik} ;$$

$$(x, A^* y) = (x, By) = (\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, B\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = (\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{i=1}^{n} y_i Be_i) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_k \overline{y_i}\ \overline{b_{ki}} .$$

Проведенная выкладка дает $\overline{b_{ki}} = a_{ik}, b_{ki} = \overline{a_{ik}}$. Вспомнив $(b_{ik})_{i,k=1..n} = A^*$, находим, что элементы A^* транспонированы и комплексно-сопряжены элементам A.

Теорема 1. Каждому линейному оператору $\mathcal{A}$ в унитарном (евклидовом) пространстве однозначно соответствует сопряженный линейный оператор $\mathcal{A}^*$, причем в любом ортонормированном базисе матрица $\mathcal{A}^*$ является транспонированной и комплексно-сопряженной матрице $\mathcal{A}$.

Особенно важную роль играют те операторы, которые совпадают со своими сопряженными. Такой оператор $\mathcal{A}$, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$, называется **эрмитовым** (**самосопряженным** в вещественном случае), а его матрица – **эрмитовой** (**симметричной**). Если матрица A оператора $\mathcal{A}$ в каком-то (а значит, в любом) **ортонормированном** базисе эрмитова, то $\mathcal{A}$ эрмитов.

Свойства эрмитовых (самосопряженных) операторов

Э1) Если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A},\ \mathcal{B}^* = \mathcal{B},$ то $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = (\mathcal{A} + \mathcal{B})$;

Э2) если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A},\ \mathcal{B}^* = \mathcal{B},$ то $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = (\mathcal{A}\mathcal{B}) \Leftrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B} = \mathcal{B}\mathcal{A}$: $(\mathcal{A}\mathcal{B})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{A} = \mathcal{A}\mathcal{B}$;

Э3) если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A},$ то $(\alpha\mathcal{A})^* = \alpha\mathcal{A} \Leftrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$;

Э4) если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}$ обратим, то $\mathcal{A}^{-1}$ эрмитов и $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1} = (\mathcal{A}^{-1})$;

Э5) тождественный оператор эрмитов.

Пример 1. Произведение эрмитовых операторов не обязательно является эрмитовым оператором (см. свойство **Э2**):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ – симметричные матрицы, однако матрица

$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ не симметрична и не соответствует самосопряженному оператору. Конечно, здесь нет противоречия: операторы не коммутируют (проверьте).

Пример 2. $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ – эрмитовы операторы, каков бы ни был линейный оператор $\mathcal{A}$.

Пример 3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Имеем

$$AA^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ 11 & 25 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A^*A.$$

Некоммутативность A и A^* невозможна, если $\mathcal{A}$ эрмитов. Вы уже заметили (?), что в нашем примере оператор $\mathcal{A}$ неэрмитов.

Задача 1. Докажите, что если операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ эрмитовы, то $\mathcal{AB} + \mathcal{BA}$ и $i(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})$ – эрмитовы операторы.

Решение. $(\mathcal{AB} + \mathcal{BA})^* = (\mathcal{AB})^* + (\mathcal{BA})^* = \mathcal{B}^*\mathcal{A}^* + \mathcal{A}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{BA} + \mathcal{AB} = \mathcal{AB} + \mathcal{BA}$;
$(i(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})^* = -i(\mathcal{B}^*\mathcal{A}^* - \mathcal{A}^*\mathcal{B}^*) = -i(\mathcal{BA} - \mathcal{AB}) = i(\mathcal{AB} - \mathcal{BA})$.

Произвольный линейный оператор можно “склеить” из эрмитовых, подобно комплексному числу, имеющему своими составляющими действительную и мнимую части. Сказанное поясняет

Пример 4. $\mathcal{A}$ $-$ линейный оператор; $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ эрмитовы. В самом деле, возьмем $\mathcal{A}_1 = \frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2}, \mathcal{A}_2 = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}^*}{2i}$. Во-первых, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + i\mathcal{A}_2$; во-вторых, слагаемые в этой сумме эрмитовы: $(\mathcal{A}_1)^* = (\frac{\mathcal{A}+\mathcal{A}^*}{2})^* = \frac{\mathcal{A}^*+\mathcal{A}}{2} = \mathcal{A}_1$; $(\mathcal{A}_2)^* = (\frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}^*}{2i})^* = \frac{\mathcal{A}^*-\mathcal{A}}{-2i} = \frac{\mathcal{A}-\mathcal{A}^*}{2i} = \mathcal{A}_2$. Полученное эрмитово разложение единственно: пусть $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$ - такие эрмитовы операторы, что $\mathcal{A} = \mathcal{B} + i\mathcal{C}$; тогда $\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^* - i\mathcal{C}^*$ и $\mathcal{B} = (\mathcal{A} + \mathcal{A}^*)/2$, $\mathcal{C} = (\mathcal{A} - \mathcal{A}^*)/2i$. Операторы $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ в эрмитовом разложении $\mathcal{A}$ коммутируют: $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_2\mathcal{A}_1 = \frac{1}{2i}(\mathcal{A}^*\mathcal{A} - \mathcal{A}\mathcal{A}^*) = 0$.

Задача 2. $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ -1-i & 1-i \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе $<e_1, e_2>$. Найдите матрицу $\mathcal{A}^*$ в базисе $<f_1, f_2>$, где $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - ie_2$. Является ли оператор $\mathcal{A}^*$ эрмитовым?

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 3+2i \end{pmatrix}$. Оператор $\mathcal{A}^*$ неэрмитов.

Задача 3. Пусть $\vec{\boldsymbol{a}} -$ фиксированный вектор пространства $\mathbb{R}^3$. $\mathcal{A}$ – преобразование, такое, что $\mathcal{A}\vec{\boldsymbol{x}} = [\vec{\mathbf{a}}, \vec{\boldsymbol{x}}]$ – векторное произведение. Найдите $\mathcal{A}^*$.

Решение. $(\mathcal{A}\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = ([\vec{\mathbf{a}}, \vec{\boldsymbol{x}}], \vec{\boldsymbol{y}}) = (\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = -(\vec{\boldsymbol{x}}, \vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{y}}) = (\vec{\boldsymbol{x}}, -[\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{y}}]) = (\vec{\boldsymbol{x}}, (-\mathcal{A})\vec{\boldsymbol{y}})$.

Задача 4. Если один и тот же вектор x является собственным для оператора $\mathcal{A}$ с собственным значением λ и для оператора $\mathcal{A}^*$ с собственным значением μ, то $\mu = \overline{\lambda}$.
Доказательство. $(\mathcal{A}x, y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$; $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y) = (x, \mu y) = \overline{\mu}(x, y)$.

Совсем не утверждается, что взаимно сопряженные операторы обязательно имеют общий собственный вектор. Приведем

Пример 5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Характеристические многочлены операторов $g(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4$ и $h(\mu) = \mu^2 - 3\mu - 4$, их корни – $\lambda_1 = \mu_1 = -1$ и $\lambda_2 = \mu_2 = 4$. $\lambda_1 = -1$ дает собственный вектор $g_1 = (1, -1)$ (как решение уравнения $x_1 + x_2 = 0$), $\lambda_2 = 4$ – $g_2 = (2, 3)$ $(3x_1 - 2x_2 = 0)$; $\mu_1 = -1$ – $h_1 = (3, -2)$ $(2x_1 + 3x_2 = 0)$ и $\mu_2 = 4$ – $h_2 = (1, 1)$ $(-3x_1 + 3x_2 = 0)$. Общих собственных векторов у $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ нет!

Задача 5. Докажите, что если оператор $\mathcal{A}$ в n-мерном унитарном пространстве имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то собственными значениями сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ будут сопряженные числа $\overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \ldots, \overline{\lambda_n}$.
Указание. Сравните характеристические многочлены операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Учтите, что определитель матрицы не изменяется при ее транспонировании.

Вспомним, что **ортогональное дополнение подпространства** $\mathcal{L}$ унитарного пространства $\mathcal{V}$ есть такое подпространство $\mathcal{L}^\perp$, векторы которого ортогональны ко всем векторам $\mathcal{L}$. Очевидны (почти) следующие факты:

1) $(\mathcal{L}^\perp)^\perp = \mathcal{L}$;

2) $\mathcal{V} = \mathcal{L} \oplus \mathcal{L}^\perp$.

Задача 6. Докажите 1) и 2).

Видим, что произвольный вектор $x \in \mathcal{V}$ однозначно представляется в виде суммы $x = y + z,\ y \in \mathcal{L},\ z \in \mathcal{L}^\perp$. Здесь y – ортогональная **проекция** x на $\mathcal{L}$, z – **перпендикуляр**.

Продолжим изучение эрмитовых операторов и отметим новые их свойства.

Э6) Если оператор $\mathcal{A}$ эрмитов, то $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$;

Э7) собственные значения эрмитова оператора $\mathcal{A}$ вещественны:

$\mathcal{A}x = \lambda x, |x| = 1 \Rightarrow \lambda = \lambda \cdot 1 = \lambda(x, x) = (\lambda x, x) = (\mathcal{A}x, x) = (x, \lambda x) = \bar{\lambda}(x, x) = \bar{\lambda}$;

Э8) собственные векторы эрмитова оператора $\mathcal{A}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\mathcal{A}x_1 = \lambda_1 x_1,\ \mathcal{A}x_2 = \lambda_2 x_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2,\ x_1 \neq \theta, x_2 \neq \theta \Rightarrow$$

$$(\mathcal{A}x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2);\ (x_1, \mathcal{A}x_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \overline{\lambda_2}(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2) \Rightarrow (x_1, x_2) = 0.$$

Теорема 2. $\mathcal{A}$ – линейный оператор в унитарном пространстве $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$ – подпространство. Если $\mathcal{U}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, то $\mathcal{U}^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.

Доказательство. $x \in \mathcal{U},\ y \in \mathcal{U}^{\perp}, \mathcal{A}x \in \mathcal{U} \Rightarrow (\mathcal{A}x, y) = 0 = (x, \mathcal{A}^{*}y) \Rightarrow \mathcal{A}^{*}y \in \mathcal{U}^{\perp}$.

Пусть в условиях **теоремы 2** оператор $\mathcal{A}$ эрмитов и h_1 – его собственный вектор. Линейная оболочка $\mathcal{U}$=L(h_1) – одномерное инвариантное подпространство. Тогда ортогональное дополнение $\mathcal{U}^{\perp}$ – (n–1)-мерное подпространство (n = $\dim \mathcal{V}$) – также инвариантно относительно $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}^{*} = \mathcal{A}$). В $\mathcal{U}^{\perp}$ $\mathcal{A}$ остается эрмитовым и имеет собственный вектор (в $\mathcal{U}^{\perp}$) с вещественным собственным значением. Завершая индуктивное рассуждение, доказываем теорему:

Теорема 3. В n-мерном унитарном пространстве существуют n попарно ортогональных собственных векторов эрмитова оператора; соответствующие собственные значения вещественны.

Построенные (**теорема 3**) векторы можно нормировать. Справедлива

Теорема 4. Матрица эрмитова оператора в некотором ортонормированном базисе унитарного пространства диагональна.

Если матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе унитарного пространства диагональна с вещественными числами на диагонали, то $\mathcal{A}$ эрмитов. Это – **критерий эрмитовости** оператора.

Пример 6. Найдем ортонормированный базис из собственных векторов эрмитова оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & i \\ 0 & 3 & 0 \\ -i & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Вычислим собственные значения:

$\det||A - \lambda E|| = (3-\lambda)(\lambda-2)^2 - 3 + \lambda = 0,\ (\lambda-1)(\lambda-3)^2 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 3.$

При $\lambda_1 = 1$ получим $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + ix_3 \\ 2x_2 \\ -ix_1 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $v_1 = (1, 0, i)$ – собственный вектор. При $\lambda_{2,3} = 3$ имеем $\begin{pmatrix} -1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + ix_3 \\ 0 \\ -ix_1 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$x_1 - ix_3 = 0$. Оба линейно независимых вектора $v_2 = (1, 0, -i)$ и $v_3 = (1, 1, -i)$ ортогональны вектору v_1 (свойство **Э8**). Для получения искомого базиса из собственных векторов необходимо, прежде всего, ортогонализировать v_2 и v_3. Сделаем это:

$u_2 = v_2,\ u_3 = v_3 - \alpha u_2;\ u_3 \perp u_2;\ (v_3 - \alpha u_2, u_2) = 0,$
$(v_3, u_2) - \alpha(u_2, u_2) = (1, 1, -i)(1, 0, -i) = 1 - i^2 - \alpha(1 + 0 - i^2)$ и $\alpha = 1$. Определили $u_2 = (1, 0, -i), u_3 = (0, 1, 0)$. Добавим $u_1 = v_1$. Остается нормировать u_1, u_2, u_3. Это легко: $|u_1| = |u_2| = \sqrt{1 \cdot 1 + i \cdot (-i)} = \sqrt{2},\ |u_3| = 1$. Искомый базис есть

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{i}{\sqrt{2}}\right), w_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right), w_3 = (0, 1, 0).$$

Актуализация свойства **Э7** и **теоремы 3** при рассмотрении евклидова пространства и самосопряженных операторов в нем требует некоторых технических усилий.

Э7') Собственные значения самосопряженного оператора вещественны.

Доказательство. Пусть $\lambda = \alpha + i\beta,\ \beta \neq 0$ – корень характеристического многочлена $\varphi(\lambda) = \det||A - \lambda E||$ самосопряженного оператора $\mathcal{A}$. В этом случае, как известно, в евклидовом пространстве $\mathcal{V}$ существует двумерное инвариантное для $\mathcal{A}$ подпространство $\mathcal{U}$. Знакомый небольшой трюк $\mathcal{A}(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$ показывает действие $\mathcal{A}$ на векторы x и y: $\begin{cases} \mathcal{A}x = \alpha x - \beta y \\ \mathcal{A}y = \beta x + \alpha y \end{cases}$. Умножив скалярно первое равенство на y, второе на x и вычитая одно из другого, придем к $(\alpha x - \beta y, y) - (x, \beta x + \alpha y) = -\beta((x,x) + (y,y))$. Но, в силу самосопряженности $\mathcal{A}$, $(\mathcal{A}x, y) - (x, \mathcal{A}y) = 0$. Значит $\beta = 0$ – противоречие с выдвинутым предположением.

Следующие утверждения о самосопряженных операторах дословно повторяют те, которые были проведены для эрмитовых операторов.

Э8') Собственные векторы самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

Теорема 3'. В n-мерном евклидовом пространстве существуют n попарно ортогональных собственных векторов самосопряженного оператора; соответствующие собственные значения вещественны.

Теорема 4'. Матрица самосопряженного оператора в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства диагональна.

Если матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-то ортонормированном базисе евклидова пространства диагональна с вещественными числами на диагонали, то $\mathcal{A}$ самосопряжен. Это – **критерий самосопряженности** оператора.

Задача 7. $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Тогда $\operatorname{Im}\mathcal{A} = (\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$. Докажите.

Решение. $\forall y \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^*\ \ \mathcal{A}^*y = \theta \Rightarrow \forall x \in \mathcal{V}\ \ (x, \mathcal{A}^*y) = 0 = (\mathcal{A}x, y) \Rightarrow \mathcal{A}x \in (\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$, $\operatorname{Im}\mathcal{A} \subset (\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$.

Обратно: $\forall x \in \mathcal{V}\ \ \mathcal{A}x \in \operatorname{Im}\mathcal{A}$. Пусть $y \in (\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$. Тогда (см. **задачу 6**)
$(\mathcal{A}x, y) = 0 = (x, \mathcal{A}^*y) \Rightarrow \mathcal{A}^*y = \theta,\ y \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$.

Пример 7. Пусть P_2 – пространство многочленов от t степени ≤ 2 над $\mathbb{R}$, $\mathcal{A}f = f', f \in P_2$. Найдем матрицу $\mathcal{A}$ в базисе $<1, t, t^2> = <e_1, e_2, e_3>$. Так как

$\mathcal{A}e_1 = \theta, \mathcal{A}e_2 = 1 = e_1, \mathcal{A}e_3 = 2t = 2e_2$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Убедимся, что Im $\mathcal{A} = (\text{Ker } \mathcal{A}^*)^\perp$. Ker $\mathcal{A}^*$: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$ и Ker $\mathcal{A}^*$=L((0, 0, 1))=L(e_3). (Ker $\mathcal{A}^*)^\perp$ =L(e_1, e_2).
Im $\mathcal{A}$ = L($\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \mathcal{A}e_3) = \text{L}(\mathcal{A}e_2, \mathcal{A}e_3) = \text{L}(e_1, 2e_2) = \text{L}(e_1, 2e_2) = (\text{Ker } \mathcal{A}^*)^\perp$.

Задача 8. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор в пространстве $\mathcal{V}$. Докажите, что

$\mathcal{V}$ = Im $\mathcal{A} \oplus$ Ker $\mathcal{A}$, при этом Im $\mathcal{A}$ и Ker $\mathcal{A}$ ортогональны.

Решение. Используем результаты **задач 6, 7**:

$$\mathcal{V} = \text{Im } \mathcal{A} \oplus (\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \text{Im } \mathcal{A} \oplus (\text{Ker } \mathcal{A}^*) = \text{Im } \mathcal{A} \oplus \text{Ker } \mathcal{A},$$

и слагаемые прямой суммы взаимно ортогональны.

Задача 9. $A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$. Вычислите A^{100}.

Решение. Матрица симметрична в стандартном базисе $\mathbb{R}^2$, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ самосопряжен и его матрица может быть приведена к диагональной форме. Нетрудно найти собственные значения: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$; они различны и им соответствуют ортогональные собственные векторы $f_1 = (1, \sqrt{2})$, $f_2 = (-\sqrt{2}, 1)$. $C = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к ортогональному (не нормированному) базису $<f_1, f_2>$.

$$C^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},\ A_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = C^{-1}A_eC \Rightarrow A_e = CA_fC^{-1} \text{ и}$$

$$A_e^{100} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{100}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{100} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_e^{100} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2^{100} - 2 & \sqrt{2}(2^{100} + 1) \\ \sqrt{2}(2^{100} + 1) & 2^{101} - 1 \end{pmatrix}.$$

Теорема 5. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы в комплексном пространстве. Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют, $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$, то у этих операторов имеется общий собственный вектор.

Теорема 6. $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – эрмитовы (самосопряженные) операторы в унитарном (евклидовом) пространстве. Для того, чтобы у операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ был общий ортонормированный базис из собственных векторов, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутировали, $\mathcal{AB}$=$\mathcal{BA}$.

Пример 8. Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в ортонормированном базисе заданы матрицами

$A = \begin{pmatrix} 17 & 2 \\ 2 & 14 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Найдем матрицу перехода к общему ортонормированному базису из собственных векторов и матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в этом базисе.

Заметим, что операторы самосопряженные и $\mathcal{AB}$=$\mathcal{BA}$ (убедитесь). Вдохновляясь **теоремой 6**, идем к цели. Найдем собственные значения и соответствующие им собственные векторы наших операторов. $|A–\lambda E| = (17–\lambda)(14–\lambda) – 4 = \lambda^2 – 31\lambda + 324 = 0$,

$\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = 13$. Собственный вектор для λ_1 получаем решая уравнения $-x_1 + 2x_2 = 0$, $f_1 = (2, 1)$. Аналогично для λ_2 находим $f_1 = (1, -2)$. Вычислив собственные значения оператора $\mathcal{B}$ (решаем уравнение $(7–\mu)(1–\mu) – 16 = \mu^2 – 8\mu – 9 = 0$) $\mu_1 = 9$ и $\mu_2 = –1$, увидим, что им соответствуют те же собственные векторы f_1 и f_2. После нормировки получим общий базис $<g_1, g_2>$ из собственных векторов; $g_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), g_2 = (\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$. Матрица перехода к этому базису $C = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$, матрицами $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в базисе $<g_1, g_2>$ будут

$$A_g = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix},\ B_g = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Линейный оператор $\mathcal{U}$ в унитарном комплексном пространстве $\mathcal{V}$ называется **унитарным**, если он сохраняет скалярное произведение: $\forall x, y \in \mathcal{V}\ \ (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$.

Свойства унитарных операторов

В следующих предложениях предполагается, что $\mathcal{U}$ – унитарный оператор.

У1) $\mathcal{U}\,\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\,\mathcal{U} = \mathcal{E}$:

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}^*\mathcal{U}x, y) = (x, y) = (\mathcal{E}x, y) \Rightarrow \mathcal{U}^*\,\mathcal{U} = \mathcal{E};$$

У2) $(\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, x)$ – изометрия (сохранение длин векторов):

$$x = y \Rightarrow (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, y) = (x, x);$$

У3) $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$ – следует из **У1**);

У4) $\mathcal{U}$ переводит любую ортонормированную систему векторов из $\mathcal{V}$ (в частности, базис) в ортонормированную систему векторов (базис):

$<g_1, g_2, \dots, g_m>$ - ортонормированная система,

$$(g_i, g_k) = \delta_{ik} \Rightarrow (\mathcal{U}g_i, \mathcal{U}g_k) = (g_i, g_k) = \delta_{ik};$$

У5) собственные значения $\mathcal{U}$ имеют модуль, равный 1:

пусть λ – собственное значение $\mathcal{U}$, x – соответствующий собственный вектор; если взять $|x| = 1$, то

$$1 = (x, x) = (\mathcal{U}^*\mathcal{U}x, x) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda\bar{\lambda}(x, x) = |\lambda|^2;$$

У6) произведение унитарных операторов есть унитарный оператор;

У7) единичный (тождественный) оператор унитарен.

Свойства **У1)-У4)** равносильны и являются критериями унитарности оператора $\mathcal{U}$.

Матрица U называется **унитарной**, если $UU^* = U^*U = E$.

Матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе является унитарной, так как матрицы взаимно сопряженных операторов $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}^*$ в ортонормированном базисе взаимно сопряжены:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij}\overline{u}_{kj} = \delta_{ik}, \ \sum_{j=1}^{n} u_{ji}\overline{u}_{jk} = \delta_{ik} \quad .$$

В ортонормированном базисе условие $UU^* = E$ $(U^*U = E)$ означает, что сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы U (U^*) на элементы, сопряженные элементам другой строки (столбца), равна 0, а сумма квадратов модулей элементов любой строки (столбца) равна 1.

Теорема 7. $\mathcal{U}$ – унитарный оператор в n-мерном пространстве $\mathcal{V}$, g – собственный вектор с собственным значением λ,

$$\mathcal{U}g = \lambda g, \ g \neq \theta.$$

Тогда (n–1)-мерное подпространство $(\mathrm{L}(g))^{\perp}$ – ортогональное дополнение $\mathrm{L}(g)$ – инвариантно относительно $\mathcal{U}$.

Теорема 8. Для каждого унитарного оператора $\mathcal{U}$ в n–мерном комплексном пространстве существует ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{U}$ с собственными значениями, по модулю равными 1; в этом базисе матрица $\mathcal{U}$ диагональна и имеет вид

$$U = \begin{pmatrix} e^{\varphi_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\varphi_n} \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Является ли линейный оператор $\mathcal{A}$, имеющий в ортонормированном базисе матрицу $A = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, эрмитовым (унитарным)?

Ответ. Унитарный, неэрмитов.

Задача 11. $A = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе. Найдите ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу $\mathcal{A}$ в этом базисе. Является ли оператор $\mathcal{A}$ эрмитовым (унитарным)?

Решение. Матрица $\mathcal{A}$ – эрмитова и унитарна, поэтому оператор $\mathcal{A}$ эрмитов и унитарен. $\det||A - \lambda E|| = \lambda^2 - i(-i) = \lambda^2 - 1 = 0$ при $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Очевидно, что

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица $\mathcal{A}$ в собственном базисе. Найдем собственный базис. При $\lambda_1 = 1$ ($\lambda_2 = -1$) для координат собственных векторов получаем уравнение

$$-x_1 + ix_2 = 0 \ \ (-ix_1 + x_2 = 0), \text{и} \ \ g_1 = (i, 1), \ \ g_2 = (-i, 1) \text{ –}$$

собственные векторы. Остается их нормировать ($|x_1| = |x_2| = \sqrt{2}$) и указать матрицу перехода к ортонормированному собственному базису:

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 12. Может ли матрица унитарного оператора в некотором базисе быть неунитарной?
Ответ. Да.

Обратимся к вещественным пространствам со скалярным произведением, евклидовым пространствам.

Линейный оператор $\mathcal{U}$ в евклидовом пространстве $\mathcal{V}$ называется **ортогональным**, если он сохраняет скалярное произведение: $\forall x, y \in \mathcal{V} \ \ (\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (x, y)$.

Если $x = y$, то

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = (\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) = (x, x) = |x|^2 \text{ –}$$

ортогональный оператор сохраняет длины векторов (изометрия).

Пример 9. Сохранение длин векторов – достаточное условие ортогональности оператора:

$$(\mathcal{U}x, \mathcal{U}y) = \frac{1}{2}\Big(\big(\mathcal{U}(x + y), \mathcal{U}(x + y)\big) - (\mathcal{U}x, \mathcal{U}x) - (\mathcal{U}y, \mathcal{U}y)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\big((x + y, x + y) - (x, x) - (y, y)\big) = (x, y).$$

Поскольку $cos\varphi = \frac{(x,y)}{|x||y|}$ и ортогональный оператор $\mathcal{U}$ сохраняет (x, y), $|x|$, $|y|$, то $cos\varphi$ есть инвариант $\mathcal{U}$. Если $<e_1, \dots, e_n>$ – ортонормированный базис, то $<\mathcal{U}e_1, \dots, \mathcal{U}e_n>$ – тоже ортонормированный базис,

$$(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_k) = \delta_{ik} \qquad (3)$$

В терминах матриц:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} u_{kj} = \delta_{ik}, \ \sum_{j=1}^{n} u_{ji} u_{jk} = \delta_{ik} \quad (4)$$

Таким образом, строки (столбцы) матрицы $\mathcal{U}$ в **ортонормированном** базисе ортогональны и нормированы.

Задача 13. Докажите, что (3) и (4) – достаточные условия ортогональности $\mathcal{U}$.

Решение. Для (3): в ортонормированном базисе e $(\mathcal{U}e_i, \mathcal{U}e_k) = (e_i, e_k) = \delta_{ik}$;

если $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, то

$$(Ux, Uy) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k (Ue_i, Ue_k) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k (e_i, e_k) = (x, y) .$$

Матрица, для которой выполнены свойства (4), называется **ортогональной**.

Свойства ортогональных операторов

O1) $\mathcal{U}$ – ортогональный оператор;

O2) $\mathcal{U}$ – изометричный оператор;

O3) $\mathcal{U}$ переводит ортонормированный базис в ортонормированный;

O4) $\mathcal{U}$ обратим и $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$;

O5) $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = \mathcal{E}$;

O6) матрица $\mathcal{U}$ в ортонормированном базисе ортогональна;

O7) определитель матрицы ортогонального оператора $\mathcal{U}$ равен ± 1;

O8) собственные значения ортогонального оператора по модулю равны 1;

O9) произведение ортогональных операторов есть ортогональный оператор;

O10) единичный (тождественный) оператор ортогонален.

Условия **O1**) – **O6**) равносильны.

Задача 14. Докажите, что ортогональность $\mathcal{U}$ является необходимой и достаточной для ортогональности оператора $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$.

Решение. Если $\mathcal{U}$ ортогонален, то $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$, и $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – ортогональный оператор.

Если оператор $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ ортогонален, то

$(\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*(\mathcal{U}^*\mathcal{U}) = \mathcal{E}$ и $((\mathcal{U}^*\mathcal{U})x, (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*y) = (x, (\mathcal{U}^*\mathcal{U})^*(\mathcal{U}^*\mathcal{U})y) = (x, \mathcal{E}y) = (x, y)$.

Задача 15. Линейный оператор $\mathcal{C}$ в арифметическом пространстве со стандартным скалярным произведением переводит столбцы матрицы $\mathcal{A}$ в столбцы матрицы $\mathcal{B}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Является ли $\mathcal{C}$ ортогональным?

Решение. $\mathcal{C}$ действует по схеме (a и b – столбцы матриц A и B соответственно)

$$e \xrightarrow{A} a, \quad a \xrightarrow{A^{-1}} e \xrightarrow{B} b \Rightarrow C = BA^{-1}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}, C = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Выполнено вышеуказанное свойство (4), поэтому $\mathcal{C}$ – ортогональный оператор.

Задача 16. В линейной оболочке L = L$(sinx, cosx)$ скалярное произведение векторов $f_1 = a_1 sinx + b_1 cosx$ и $f_2 = a_2 sinx + b_2 cosx$ задается формулой $(f_1, f_2) = a_1 a_2 + b_1 b_2$. $\mathcal{D}^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ – оператор в L. Докажите, что $\mathcal{D}^2$ – симметричный и ортогональный, и найдите его матрицу в базисе $< sinx, cosx >$.

Решение. $(sinx, cosx) = 0,\ (sinx, sinx) = (cosx, cosx) = 1$, то есть базис $< sinx, cosx >$ ортогональный. $\mathcal{D}^2(sinx) = -sinx,\ \mathcal{D}^2(cosx) = -cosx \Rightarrow$

$D^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – матрица $\mathcal{D}^2$. Оператор симметричный и ортогональный (так как матрица симметрична и ортогональна).

Теорема 9. Если подпространство $\mathcal{L}$ евклидова пространства $\mathcal{V}$ инвариантно относительно ортогонального оператора $\mathcal{U}$, то $\mathcal{L}^{\perp}$ также инвариантно относительно $\mathcal{U}$.

Так как $\mathcal{U}$ – линейный оператор в вещественном пространстве, у него обязательно имеется одномерное, либо двумерное инвариантное подпространство. Согласно **теореме 9**, для инвариантного подпространства $\mathcal{L}$ ортогональное дополнение $\mathcal{L}^{\perp}$ остается инвариантным относительно $\mathcal{U}$ (в $\mathcal{L}^{\perp}$ $\mathcal{U}$ по-прежнему ортогонален), и в слагаемом $\mathcal{L}^{\perp}$ прямой суммы $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{\perp}$ точно так же можно обнаружить инвариантное подпространство. И так далее… Индуктивное умозаключение позволяет зафиксировать такой результат для ортогонального оператора $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{V} = (\bigoplus_{i=1}^{p} L_i) \oplus (\bigoplus_{j=1}^{q} M_j),\ \dim L_i = 1,\ \dim M_j = 2,\ i = 1, \dots, p,\ j = 1, \dots, q;$$

$L_i,\ M_j$ инвариантны относительно $\mathcal{U}$.

Видим, что структура ортогонального оператора (и его матрицы) определяется его действием в одно- и двумерном инвариантных подпространствах. Изучим это действие.

<u>Одномерный случай</u>. s - собственный вектор (λ – собственное значение),

$$(\mathcal{U}s, \mathcal{U}s) = (\lambda s, \lambda s) = \lambda^2 (s, s) = (s, s) \Rightarrow \lambda^2 = 1, \lambda = \pm 1,$$

$$\mathcal{U}s = s \text{ или } \mathcal{U}s = -s.$$

<u>Двумерный случай</u>. В ортонормированном базисе $<f_1, f_2>$ инвариантного подпространства M пусть $U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ – матрица $\mathcal{U}$.

1. $\det||U|| = -1$ (см. **О7**), $u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = -1$. Характеристический многочлен
$$\varphi(\lambda) = (\lambda - u_{11})^2(\lambda - u_{22})^2 - u_{12}u_{21} = \lambda^2 - (u_{12} + u_{21})\lambda - 1$$
имеет два собственных значения λ_1, λ_2; так как $\det||U|| = -1,\ \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ (**О8**) и $Uf_1 = f_1, Uf_2 = -f_2$, то эта ситуация уже рассмотрена при описании одномерного случая; здесь M распадается в прямую сумму одномерных инвариантных подпространств $\mathrm{L}(f_1)$ и $\mathrm{L}(f_2)$.

2. $\det||U|| = 1,\ u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = 1$; $\varphi(\lambda) = \lambda^2 - (u_{12} + u_{21})\lambda + 1$.
Так как матрица $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$ ортогональна, $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} \\ u_{12} & u_{22} \end{pmatrix}$; с другой стороны, $\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_{22} & -u_{12} \\ -u_{21} & u_{11} \end{pmatrix}$; отсюда получаем
$$u_{11} = u_{22} = \alpha,\ u_{21} = -u_{12} = \beta,\ \ U = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix};$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \Rightarrow \exists\varphi \in [0, 2\pi) \colon \alpha = cos\varphi, \beta = sin\varphi \quad \text{и}$$
$$U = \begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix} -$$
поворот в плоскости M на угол φ. В частности, при $\varphi = k\pi\ (k = 0; 1)$ имеем $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – тождественное преобразование при k = 0, а при $k = \pi$ увидим $U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – симметрия относительно начала координат (поворот на π). Эти два состояния рассмотрены выше, а при каждом $\varphi \neq k\pi\ (k = 0; 1)$ получается “настоящий” поворот.

Итоговый результат:

Теорема 10. $U : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ – ортогональный оператор. В $\mathcal{V}$ существует такой ортогональный нормированный базис, в котором матрица U – блочно-диагональная с блоками (1), (–1), $\begin{pmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{pmatrix}$ на главной диагонали.

VI. Билинейные и квадратичные формы

Материал этого раздела будет изложен последовательно для вещественного и комплексного линейных пространств, начиная с первого.

Вещественный случай

Определение. **Билинейная форма** на линейном пространстве $\mathcal{V}$ над $\mathbb{R}$ есть отображение

$$\mathcal{B}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} -$$

числовая функция двух векторных переменных, линейная по каждому аргументу
(1) $\mathcal{B}(x+y,z) = \mathcal{B}(x,z) + \mathcal{B}(y,z)$;
(2) $\mathcal{B}(\alpha x, y) = \alpha\mathcal{B}(x,y)$;
(3) $\mathcal{B}(x, y+ z) = \mathcal{B}(x,y) + \mathcal{B}(x,z)$;
(4) $\mathcal{B}(x, \alpha y) = \alpha\mathcal{B}(x,y)$ $\qquad (x,y,z \in \mathcal{V},\ \lambda \in \mathbb{R})$.

Пример 1. $\mathcal{B}(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ – билинейная форма на $\mathbb{R}^3$.

Пример 2. $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ – билинейная форма в пространстве непрерывных на отрезке [0,1] функций (пространство C([0,1])).

Пример 3. Скалярное произведение в евклидовом пространстве.

Пример 4. Определитель матрицы второго порядка – билинейная форма (функция) строк (столбцов) на $\mathbb{R}^2$.

Билинейная форма $\mathcal{B}$ называется **симметричной**, если $\forall x,y \in \mathcal{V}$ $\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(y,x)$.

Пример 5. Скалярное произведение – симметричная билинейная форма.

Матрицей билинейной формы $\mathcal{B}$ в базисе $<e_1, \dots, e_n>$ называется матрица $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$, элементы b_{ik} которой являются значениями формы $\mathcal{B}$ на базисных векторах:

$$b_{ik} = \mathcal{B}(e_i, e_k).$$

Матрица B билинейной формы называется **симметричной**, если $b_{ik} = b_{ki}$. В этом случае форма $\mathcal{B}$ **симметрична** (определение).

Пусть дан базис $<e_1, \dots, e_n>$. Тогда значение формы $\mathcal{B}$ на векторах x, y равно

$$\mathcal{B}(x,y) = x^*By,$$

где x и y – столбцы координат векторов в заданном базисе (x^* – вектор-строка).

Поясним эту формулу на примере двумерного пространства.

$$x^* = (x_1\ x_2), \qquad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{gathered} \mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(x_1 e_1 + x_2 e_2, y_1 e_1 + y_2 e_2) = \\ = x_1 y_1 \mathcal{B}(e_1, e_1) + x_1 y_2 \mathcal{B}(e_1, e_2) + x_2 y_1 \mathcal{B}(e_2, e_1) + x_2 y_2 \mathcal{B}(e_2, e_2) = \\ = b_{11} x_1 y_1 + b_{12} x_1 y_2 + b_{21} x_2 y_1 + b_{22} x_2 y_2 = \\ = x_1 (b_{11} y_1) + x_2 (b_{21} y_1) + x_1 (b_{12} y_2) + x_2 (b_{22} y_2) = \\ = (x_1\ \ x_2) \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \end{gathered}$$

Таким образом, чтобы получить значение билинейной формы $\mathcal{B}$ на векторах x и y, нужно перемножить слева направо три матрицы: строка координат x, матрица B, столбец координат y. Также верно $\mathcal{B}(x, y) = y^* B^* x$ (проверьте).

Теорема 1. Если $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$ – матрица в каком-то базисе $<e_1, \dots, e_n>$ пространства $\mathcal{V}$, то существует билинейная форма $\mathcal{B}$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, имеющая в этом базисе в качестве матрицы именно B.

Доказательство. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Возьмем $\mathcal{B}(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i y_k$. $\mathcal{B}$ – искомая билинейная форма, $\mathcal{B}(e_i, e_k) = b_{ik}$.

Для симметричности билинейной формы необходимым и достаточным условием является симметричность ее матрицы в любом базисе:

$\mathcal{B}$ симметрична $\Rightarrow$

$$b_{ik} = \mathcal{B}(e_i, e_k) = \mathcal{B}(e_k, e_i) = b_{ki}\ ;$$

$B = B^* \Rightarrow$

$$\mathcal{B}(x, y) = y^* B^* x = y^* B x, \ \ \mathcal{B}(y, x) = y^* B^* x = \mathcal{B}(x, y).$$

Узнаем, как меняется матрица билинейной формы при переходе к другому базису.

Теорема 2. $(f) = (e)C$ (C – матрица перехода от базиса e к базису f; (e) и (f) – строки $(e_1, \dots, e_n)$ и $(f_1, \dots, f_n)$ векторов базисов. B_e, B_f – матрицы билинейной формы $\mathcal{B}$ в этих базисах. Тогда

$$B_f = C^* B_e C.$$

Доказательство. Значение билинейной формы – число, не зависящее от базиса,

$$x^* B_e y = x'^* B_f y',$$

x', y' – столбцы координат векторов в базисе f. По формулам преобразования координат при переходе к новому базису,

$$x = Cx', \qquad y = Cy' \ \Rightarrow$$

$$x^*B_e y = (Cx')^*B_e(Cy') = x'^*(C^*B_eC)y' = x'^*B_f y' \Rightarrow\ B_f = C^*B_eC$$
(так как столбцы x' и y' произвольные).

Задача 1. Билинейная форма в базисе $<e_1, e_2, e_3>$ записывается как

$$\mathcal{B}(x, y) = -2x_1y_1 + 3x_1y_2 + x_1y_3 + 5x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2.$$

Найдите выражение $\mathcal{B}$ в базисе $<f_1, f_2, f_3>$, где $f_1 = e_2, f_2 = -e_1, f_3 = e_2+e_3$.

Решение. $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C| = 1$; $B_e = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ – матрицы перехода к новому базису (f – базис, так $\det\|C\| \neq 0$) и формы $\mathcal{B}$ в базисе e.

$$B_f = C^*B_eC = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -3 & -2 & -4 \\ -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. **Рангом** $\operatorname{rg}\mathcal{B}$ билинейной формы $\mathcal{B}$ называется ранг ее матрицы.

Из **теоремы 2** следует, что $\operatorname{rg} B_f = \operatorname{rg} B_e$. Ранг билинейной формы не зависит от выбора базиса и является инвариантом самой формы.

Пересчитаем элементы матрицы B по формулам $b'_{ik} = \frac{1}{2}(b_{ik} + b_{ki})$ и получим $B' = (b'_{ik})_{i,k=1..n}$, $b'_{ik} = b'_{ki}$ – симметричная матрица.

Положив $x = y$ в *симметричной* билинейной форме $\mathcal{B}$, придем к **квадратичной форме**:

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x, x).$$

Симметричная билинейная форма, из которой получена квадратичная форма, называется **полярной** к этой квадратичной форме.

Квадратичная форма однозначно определяет полярную к ней билинейную форму:

$$\mathcal{B}(x, y) = \tfrac{1}{2}\big(\mathcal{B}(x + y, x + y) - \mathcal{B}(x, x) - \mathcal{B}(y, y)\big) = \tfrac{1}{2}\big(\mathcal{Q}(x + y) - \mathcal{Q}(x) - \mathcal{Q}(y)\big).$$

Полярную к квадратичной $\mathcal{Q}(x)$ билинейную форму будем обозначать $\mathcal{Q}(x, y)$.

Матрицей квадратичной формы $\mathcal{Q}(x)$ в базисе e называется матрица Q полярной билинейной формы $\mathcal{Q}(x, y)$ в том же базисе. Матрица Q симметрична. Имеем

$$\forall x \in \mathcal{V}\ \ \mathcal{Q}(x) = x^*Qx$$

Ранг квадратичной формы – это ранг полярной билинейной формы (определение).

Квадратичная форма $\mathcal{Q}$ наз **невырожденной** (**вырожденной**), если

$$\operatorname{rg}\mathcal{Q} = \dim\mathcal{V}\ \ (\operatorname{rg}\mathcal{Q} < \dim\mathcal{V}).$$

Как известно, для квадратичной формы возможно отыскать такой базис, в котором матрица формы принимает наиболее простой (диагональный) вид.

Теорема 3 (основная). $Q(x)$ - квадратичная форма на $\mathcal{V}$. Существует базис f, в котором

$$Q_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_i \in \mathbb{R}, \ i \in [1..\mathrm{n}], \ \mathrm{n} = \dim \mathcal{V},$$

$(Q_f = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n))$. В координатах: $Q(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2$.

Доказательство. Любой курс лекций по линейной алгебре.

Диагональный базис f в **теореме 3** называется **каноническим**, в нем квадратичная форма имеет **канонический вид**.

Метод Лагранжа приведения квадратичной формы к диагональному виду

Решим следующие две задачи.

Задача 2. Найдите канонический базис и канонический вид квадратичной формы, задаваемой в базисе $<e_1, e_2, e_3>$ выражением

$$Q(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \qquad (!)$$

Решение. Заметим, что коэффициент при x_2^2 не равен 0 (он равен 3). Сгруппируем все содержащие x_2 слагаемые и выделим в полученной группе полный квадрат с тем, чтобы вне группы не осталось слагаемых с x_2:

$$3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 =$$
$$= 3\left(x_2^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{2}{3}x_2x_3 - \frac{4}{9}x_1x_3 + \frac{4}{9}x_1^2 + \frac{1}{9}x_3^2\right) - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 =$$
$$3(\tfrac{2}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}x_3)^2 - \tfrac{4}{3}x_1^2 - \tfrac{1}{3}x_3^2 + \tfrac{4}{3}x_1x_3.$$

(!) приобретает вид

$$3(\frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 - \frac{4}{3}x_1^2 - \frac{1}{3}x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_3 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 =$$
$$= 3(\tfrac{2}{3}x_1 + x_2 - \tfrac{1}{3}x_3)^2 - \tfrac{4}{3}x_1^2 + \tfrac{8}{3}x_3^2 + \tfrac{16}{3}x_1x_3$$

Сделаем замену координат

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3. \\ y_3 = x_3 \end{cases}$$

Форма перейдет в

$$Q(y) = 3y_2^2 - \tfrac{4}{3}y_1^2 + \tfrac{8}{3}y_3^2 + \tfrac{16}{3}y_1y_3. \qquad (!!)$$

Выделим теперь в (!!) полный квадрат, группируя слагаемые, содержащие y_1:

$$-\tfrac{4}{3}y_1^2 + \tfrac{16}{3}y_1y_3 = -\tfrac{4}{3}(y_1^2 - 4y_1y_3) = -\tfrac{4}{3}(y_1 - 2y_3)^2 + \tfrac{16}{3}y_3^2 \quad \text{и}$$

$$Q(y) = 3y_2^2 + \tfrac{8}{3}y_3^2 - \tfrac{4}{3}(y_1 - 2y_3)^2 + \tfrac{16}{3}y_3^2 = -\tfrac{4}{3}(y_1 - 2y_3)^2 + 3y_2^2 + 8y_3^2. \quad (!!!)$$

Еще одна замена координат:

$$\begin{cases} z_1 = y_1 - 2y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

(!!!) перейдет в

$$= -\frac{4}{3}{z_1}^2 + 3z_2^2 + 8z_3^2 \quad -$$

канонический вид квадратичной формы.

Приведенным выкладкам можно дать матричное оформление:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2/3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

матрица перехода к каноническому базису f,

$$f_1 = e_1 - \frac{2}{3}e_2,\ f_2 = e_2,\ f_3 = 2e_1 - e_2 + e_3.$$

Дополнительно укажем, что билинейная форма, полярная к нашей квадратичной, в каноническом (диагональном) базисе выглядит так:

$$Q(u, v) = -\frac{4}{3}u_1v_1 + 3u_2v_2 + 8u_3v_3.$$

Задача 3. $Q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ – квадратичная форма в $\mathbb{R}^3$. Приведите ее методом Лагранжа к каноническому виду.

Решение. В отличие от предыдущей задачи, нет квадрата ни одной из координат, но есть произведение x_1x_2. Применим стандартный прием введения новых переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2. \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

Форма приобретет вид

$$y_1^2 - y_2^2 + y_1y_3 - y_2y_3 + y_1y_3 + y_2y_3 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 =$$
$$= (y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - y_2^2 - y_3^2 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

Замена

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases} \quad \text{даст } Q(z) = {z_1}^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

и $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к каноническому базису.

Теорема 4 (закон инерции). Количества положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах переменных в каноническом представлении квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса и являются инвариантами самой формы.

Соглашения. **Положительный** (**отрицательный**) **индекс инерции** – p (q) – количество положительных (отрицательных) коэффициентов в каноническом представлении квадратичной формы; разность $s = p - q$ – **сигнатура** формы.

В рассмотренной **задаче 3** $\operatorname{rg} Q = 3, p = 1, q=2, \ s = -1$.

В вещественном пространстве канонический вид квадратичной формы можно упростить. Пусть в $Q(x) = q_1 x_1^2 + \cdots + q_n x_n^2$ первые p коэффициентов положительны, следующие q отрицательны, последние (если есть) равны 0. Замена $x_i = \sqrt{|q_i|}\, y_i$ приведет к форме

$$Q(y) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2, \qquad (*)$$

p (q) – положительный (отрицательный) индекс инерции. Коэффициенты квадратичной формы равны 1, –1, 0.

Вид (*) квадратичной формы называется **нормальным**.

Определение. Квадратичная форма называется **положительно** (**отрицательно**) **определенной**, если

$$\forall x \in \mathcal{V}, x \neq \theta \;\; Q(x) > 0 \;\; (Q(x) < 0\,).$$

Теорема 5 (критерий Сильвестра). Пусть

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & \cdots & q_{kk} \end{vmatrix} -$$

угловые миноры матрицы $Q = (q_{ik})_{i,k=1..n}$ квадратичной формы $Q(x)$. Для того, чтобы форма Q была положительно определенной, необходима и достаточна положительность всех угловых миноров:

$$\forall k \in [1..n] \;\; \Delta_k > 0.$$

Следствие. Для того, чтобы форма Q была отрицательно определенной, необходимо и достаточно выполнение отношений

$$\forall k \in [1..n] \quad \Delta_{k-1} \cdot \Delta_k < 0, \;\; \Delta_0 = 1.$$

Задача 4. Найдите значения параметра a, при которых квадратичная форма

$$Q(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 - 2x_3x_1 + 4x_2^2 + 2x_2x_3 + ax_3^2$$

является положительно определенной.
Ответ. При $a > 1$ форма Q положительно определена.

Если $p = \operatorname{rg} Q$ ($q = \operatorname{rg} Q$), квадратичная форма положительно (отрицательно) определена. Однако для положительной (отрицательной) определенности недостаточно отсутствие отрицательных (положительных) коэффициентов в каноническом (или нормальном) представлении формы. Например, форма $x_2^2 + x_3^2$ ранга 2 в трехмерном пространстве принимает нулевое значение на ненулевом векторе (1, 0, 0).

Пример 6. Исследуем на экстремум функцию трех переменных

$$u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2z + x.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} u'_x = 2x - y + 1 = 0 \\ u'_y = 2y - x = 0 \\ u'_z = 2z + 2 = 0 \end{cases},$$

найдем стационарную точку M(-2/3, -1/3, -1). Второй дифференциал

$$d^2u = 2dx^2 - 2dxdy + 2dy^2 + 2dz^2 -$$

квадратичная форма дифференциалов независимых переменных. Ее матрица есть

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ Угловые миноры

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 2 = 6 > 0.$$

По **теореме 5**, форма d^2u положительно определенная, и M – точка минимума.

Если зафиксировать в вещественном линейном пространстве симметричную билинейную форму $\mathcal{B}$, полярную к положительно определенной квадратичной форме, то эта билинейная форма вносит в пространство евклидову структуру. Действительно,

$$\forall\, x, y, z \in \mathcal{V},\ \alpha \in \mathbb{R}$$

(1) $\mathcal{B}(y, x) = \mathcal{B}(x, y)$;
(2) $\mathcal{B}(x + y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z)$;
(3) $\mathcal{B}(\alpha x, y) = \alpha\mathcal{B}(x, y)$;
(4) $\mathcal{B}(x, x) \geq 0,\ \mathcal{B}(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Наконец, посмотрим на билинейные и квадратичный формы в **евклидовом** пространстве.

Пусть $\mathcal{V}$ – n-мерное евклидово пространство, $\mathcal{B}(x, y)$ – билинейная форма на $\mathcal{V}$.

Теорема 6. Существует такой линейный оператор $\mathcal{A}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, однозначно определенный, что

$$\forall\, x, y \in \mathcal{V}\ (\mathcal{A}x, y) = \mathcal{B}(x, y).$$

Если билинейная форма $\mathcal{B}$ симметрична, $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор.

Доказательство. e – ортонормированный базис $\mathcal{V}$. В нем матрица $\mathcal{B}$ есть

$$B = (b_{ik})_{i,k=1..n},\ \ b_{ik} = \mathcal{B}(e_i, e_k).$$

Если $\mathcal{A}$ – оператор, такой, что

$$\mathcal{A}e_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}e_i \text{, где } a_{ki} = b_{ik}\text{, то при } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k \text{ имеем}$$

$$\mathcal{A}x = \sum_{i,j=1}^{n} x_i a_{ji} e_j,\ (\mathcal{A}x, y) = \sum_{i,j,k=1}^{n} x_i y_k a_{ji}(e_j, e_k) = \sum_{i,k=1}^{n} x_i y_k a_{ki} = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i y_k = \mathcal{B}(x, y).$$

Единственность: пусть $\mathcal{B}(x,y)$=$(\mathcal{A}_1 x, y) \Rightarrow \forall\, x, y \in \mathcal{V}$ $(\mathcal{A}x, y) = (\mathcal{A}_1 x, y)$, $((\mathcal{A}_1 - \mathcal{A})x, y)$. Положим $y = (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A})x$, и получим $(\mathcal{A}_1 - \mathcal{A})x = \theta$, откуда $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ (почему?).
Если $b_{ki} = b_{ik}$ (форма $\mathcal{B}$ симметричная), то $a_{ki} = a_{ik}$, то есть оператор $\mathcal{A}$ самосопряженный. Заметим попутно, что матрицы оператора $\mathcal{A}$ и формы $\mathcal{B}$ совпадают (в базисе e).

При переходе с матрицей C к новому базису f матрица оператора $\mathcal{A}$ перейдет в $C^{-1}AC$, а матрица B билинейной формы – в C^*BC. Если базис f ортонормированный, то матрица C ортогональна и $C^{-1} = C^*$. Учитывая $B_e = A_e$, увидим, что матрицы билинейной формы и соответствующего линейного оператора преобразуются одинаково. В случае, когда $\mathcal{B}(x,y)$ – симметричная билинейная форма (тогда $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор), матрица $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе диагональна с собственными значениями $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали, и билинейная (квадратичная) форма приобретет вид

$$\mathcal{B}(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i x_i y_j \quad \left(\mathcal{B}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2\right).$$

Только что проведенные рассуждения доказывают следующую теорему:
Теорема 7 (о приведении квадратичной формы к главным осям).
Дано: $\mathcal{Q}(q)$ – квадратичная форма в евклидовом пространстве $\mathcal{V}$.
Тогда существует ортонормированный базис f, в котором

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \text{, где } x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Приведем алгоритм отыскания ортонормированного базиса, в котором билинейная (квадратичная) форма имеет канонический вид:

1) выписываем симметричную матрицу $Q = (q_{ij})_{i,j=1..n}$;
2) вычисляем корни $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ характеристического многочлена $\det||Q - \lambda E||$ (n вещественных, не обязательно различных, корней);
3) для каждого корня λ_m кратности k_m находим линейно независимую систему из k_m векторов, отвечающих собственному значению λ_m; если $k_m > 1$, проведем ортогонализацию системы;
4) нормируем векторы, полученные на предыдущем шаге, и канонический базис построен;
5) пишем матрицу перехода к каноническому базису.

Замечание. После шага 2) алгоритма уже можно написать канонический вид формы, не находя канонического базиса.

Задача 5. Ортогональным преобразованием приведите к сумме квадратов квадратичную форму

$$Q(x) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Решение. Эта форма уже рассматривалась в **задаче 2**. Но теперь ее надлежит привести к каноническому виду ортогональным преобразованием евклидова пространства.

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ – матрица нашей формы.}$$

$$\det||Q - \lambda E|| = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_{3,4} = 4.$$

Ищем собственные векторы.

$$\lambda_1 = -2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \quad x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow g_1 = (-2, 1, 1), |g_1| = \sqrt{6}, f_1 = (-\tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}});$$

$$\lambda_{3,4} = 4 \Rightarrow 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow g_2 = (1, 2, 0), g_3 = (1, 0, 2).$$

Нужна ортогонализация.

$$g_2' = g_2, g_3' = g_3 + \alpha g_2' = (1+\alpha, 2\alpha, 2),\ (g_2', g_3') = 1 + 5\alpha = 0, \alpha = -1/5,$$

$$g_2' = (1, 2, 0), g_3' = (2, -1, 5), |g_2'| = \sqrt{5}, |g_3'| = \sqrt{30} \Rightarrow$$

$$f_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\right), f_3 = (\tfrac{2}{\sqrt{30}}, -\tfrac{1}{\sqrt{30}}, \tfrac{5}{\sqrt{30}}).$$

Преобразование

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

приводит форму к каноническому виду

$$Q(z) = -2z_1^2 + 4z_2^2 + 4z_3^2.$$

Задача 6. Укажите канонический вид квадратичной формы в евклидовом пространстве, не находя приводящего к этому виду ортогонального преобразования:

$$Q(x) = 7x_1^2 + 7x_2^2 + 7x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 7-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0,\ \lambda^3 - 21\lambda^2 + 144\lambda - 324 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 6, \lambda_3 = 9 \Rightarrow$$

$$Q(\mathrm{y}) = 6y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

Дана пара квадратичных форм $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$. Существует ли ортонормированный базис, в котором обе эти формы приводятся к сумме квадратов координат? Вообще говоря, нет.

Пример 7. $Q_1(x) = x_1^2,\ Q_2(x) = x_1x_2$. Допустим, что преобразование с матрицей

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

диагонализирует матрицы обеих форм.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}y_1 + c_{12}y_2 \\ c_{21}y_1 + c_{22}y_2 \end{pmatrix}. \text{ Тогда}$$

$$Q_1(y) = (c_{11}y_1 + c_{12}y_2)^2 = c_{11}^2 y_1^2 + c_{12}^2 y_2^2 + 2c_{11}c_{12}y_1y_2 \Rightarrow c_{11} = 0 \ \ (c_{12} = 0).$$

Пусть $c_{11} = 0 \Rightarrow c_{12} \neq 0$, иначе матрица C вырождена.

$$Q_2(y) = (c_{11}y_1 + c_{12}y_2)(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) = c_{12}y_2(c_{21}y_1 + c_{22}y_2) = c_{12}c_{21}y_1y_2 + c_{12}c_{22}y_2^2.$$

Чтобы форма Q_2 имела канонический вид, нужно $c_{12}c_{21} = 0$, что при $c_{12} \neq 0$ дает $c_{21} = 0$, но это противоречит невырожденности C (первый столбец нулевой). То же самое получим в предположении $c_{12} = 0$.

Теорема 8. Если Q_1 и Q_2 – пара квадратичных форм в n-мерном евклидовом пространстве, причем Q_2 положительно определена, то существует ортонормированный базис, в котором форма Q_1 имеет канонический, а Q_2 – нормальный вид.

Доказательство. Введем в пространстве новую евклидову структуру, в которой скалярное произведение задается полярной к Q_2 билинейной формой. В любом ортонормированном базисе форма Q_2 имеет нормальный вид. Из этих базисов выберем тот, в котором Q_1 становится канонической (**теорема 7**).

Условие положительной определенности одной из форм в **теореме 8** не является необходимым.

Пример 8. $Q_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2,\ Q_2(x) = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ имеют уже канонический вид, но ни Q_1, ни Q_2 не являются положительно определенными квадратичными формами.

Дадим рецепт одновременного приведения пары форм, удовлетворяющих условиям теоремы 8, к сумме квадратов:

1) рассматриваем многочлен (подобный характеристическому) $\psi(\lambda) = \det||Q_1 - \lambda Q_2||$ и ищем его корни;
2) для каждого корня $\psi(\lambda)$ отыскиваем векторы взаимного канонического базиса (точно так же, как в типичной ситуации с нахождением собственных векторов).

Пример 9. $\dim \mathcal{V} = 2$. $Q_1(x) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 8x_2^2,\ Q_2(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2.$

Здесь Q_2 – положительно определенная квадратичная форма ($Q_2(x) = (x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2$).

$$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix},\ Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ – матрицы наших форм.}$$

$$\psi(\lambda) = \det||Q_1 - \lambda Q_2|| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5-\lambda \\ 5-\lambda & 8-4\lambda \end{vmatrix}, \text{ корни } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 3.$$

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow g_1 = (2, -1),\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow g_1 = (2, 1).$$

$$Q_2(g_1) = g_1^* Q_2 g_1 = (2 \ -1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 4,\ |g_1| = 2,$$

$$Q_2(g_2) = g_2^* Q_2 g_2 = (2 \ \ 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 12,\ |g_2| = \sqrt{12}.$$

После нормировки $f_1 = (1, -1/2),\ f_2 = (2/\sqrt{12}, 1/\sqrt{12})$.

В базисе $< f_1, f_2 >$

$$Q_1(y) = -y_1^2 + 3y_2^2,\ Q_2(y) = y_1^2 + y_2^2.$$

Комплексный случай

Определение. **Билинейная форма** на линейном пространстве $\mathcal{V}$ над $\mathbb{C}$ есть отображение

$$\mathcal{B}: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R} -$$

числовая функция двух векторных переменных, линейная по первому и полулинейная по второму аргументу:

(1) $\mathcal{B}(x+y,z) = \mathcal{B}(x,z) + \mathcal{B}(y,z)$;

(2) $\mathcal{B}(\alpha x,y) = \alpha\mathcal{B}(x,y)$;

(3) $\mathcal{B}(x,y+\ z) = \mathcal{B}(x,y) + \mathcal{B}(x,z)$;

(4) $\mathcal{B}(x,\alpha y) = \overline{\alpha}\mathcal{B}(x,y)$ $\qquad\qquad (x,y,z \in \mathcal{V},\ \lambda \in \mathbb{C})$.

Пример 10. Скалярное произведение в унитарном пространстве.

Пример 11. $\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$ – билинейная форма в пространстве комплексных непрерывных на отрезке [0,1] функций (пространство C([0,1])).

Билинейная форма $\mathcal{B}$ называется **эрмитовой**, если $\forall x,y \in \mathcal{V}\ \ \mathcal{B}(y,x) = \overline{\mathcal{B}(x,y)}$.

Пример 12. Скалярное произведение в унитарном пространстве – эрмитова билинейная форма.

Матрица $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$ билинейной формы $\mathcal{B}$ в базисе $<e_1, \dots, e_n>$ комплексного линейного пространства определяется так же, как в вещественном случае:

$$b_{ik} = \mathcal{B}(e_i, e_k).$$

$$\mathcal{B}(x,y) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i \overline{y_k} \text{ при } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,\ y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\ .$$

Матрица B билинейной формы **эрмитова**, если $b_{ki} = \overline{b_{ik}}$. В этом случае форма $\mathcal{B}$ **эрмитова** (таково определение).

Для того, чтобы билинейная форма $\mathcal{B}(x,y)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы число $\mathcal{B}(x,x)$ было вещественным для любого (комплексного!) вектора x.

В базисе $<e_1, \dots, e_n>$ значение формы $\mathcal{B}$ на векторах x, y равно

$$\mathcal{B}(x,y) = x^T B \overline{y},$$

где x^T – вектор-строка, $\overline{y}$ – столбец координат, комплексно-сопряженных координатам y, T – операция транспонирования. Поясним это:

$$\mathcal{B}(x,y) = \mathcal{B}(x_1e_1 + x_2e_2,\ y_1e_1 +\ y_2e_2) = b_{11}x_1\overline{y_1} + b_{12}x_1\overline{y_2} + b_{21}x_2\overline{y_1} + b_{22}x_2\overline{y_2}) =$$

$$= x_1(b_{11}\overline{y_1} + b_{12}\overline{y_2}) + x_2(b_{21}\overline{y_1} + b_{22}\overline{y_2}) = (x_1\ \ x_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \overline{y_2} \end{pmatrix}.$$

Теорема 1'. Если $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$ – матрица в каком-то базисе $<e_1, \ldots, e_n>$ пространства $\mathcal{V}$, то существует билинейная форма $\mathcal{B}$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$, имеющая в этом базисе в качестве матрицы именно B.

Доказательство. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Возьмем $\mathcal{B}(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} b_{ik} x_i \overline{y_k}$. $\mathcal{B}$ – искомая билинейная форма, $\mathcal{B}(e_i, e_k) = b_{ik}$.

Теорема 2'. (f) = $(e)C$ (C – матрица перехода от базиса e к базису f; (e) и (f) – строки $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ векторов базисов. B_e, B_f – матрицы билинейной формы $\mathcal{B}$ в этих базисах. Тогда

$$B_f = C^T B_e \overline{C}.$$

Определение. **Рангом** rg $\mathcal{B}$ билинейной формы $\mathcal{B}$ называется ранг ее матрицы.
Ранг билинейной формы есть инвариант относительно замены базиса.

Квадратичная форма $\mathcal{Q}$ наз **невырожденной**, если $\operatorname{rg} \mathcal{Q} = \dim \mathcal{V}$.

Положив $x = y$ в билинейной форме $\mathcal{B}$, придем к **квадратичной форме**:

$$\mathcal{Q}(x) = \mathcal{B}(x, x).$$

Билинейная форма, из которой получена квадратичная форма, называется **полярной** к этой квадратичной форме.

Квадратичная форма однозначно определяет полярную к ней билинейную форму:

$$\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{B}(x + y, x + y) + i\mathcal{B}(x + iy, x + iy) - \mathcal{B}(x - y, x - y) - i\mathcal{B}(x - iy, x - iy)\big) =$$

$$= \tfrac{1}{4}\big(\mathcal{Q}(x + y) + i\mathcal{Q}(x + iy) - \mathcal{Q}(x - y) - i\mathcal{Q}(x - iy)\big).$$

Квадратичная форма **эрмитова**, если полярная билинейная форма эрмитова. Для того, чтобы квадратичная форма $\mathcal{Q}(x)$ была эрмитовой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathcal{Q}(\ x)$ принимала только вещественные значения

Матрицей квадратичной формы $\mathcal{Q}(x)$ в базисе e называется матрица Q полярной билинейной формы $\mathcal{Q}(x, y)$ в том же базисе. Считаем, что матрица Q эрмитова. Имеем

$$\forall x \in \mathcal{V}\ \ \mathcal{Q}(x) = x^T Q \overline{x}.$$

Ранг квадратичной формы – это ранг полярной билинейной формы (определение).

Квадратичная форма $\mathcal{Q}$ наз **невырожденной**, если $\operatorname{rg} \mathcal{Q} = \dim \mathcal{V}$.

Теорема 3'. $\mathcal{Q}(x)$ – эрмитова квадратичная форма на $\mathcal{V}$. Существует базис f, в котором $Q_f = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i \in [1..\mathrm{n}]$, $\mathrm{n} = \dim \mathcal{V}$. В координатах: $\mathcal{Q}(y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |y_i|^2$.

Диагональный базис f в **теореме 3'** называется **каноническим**, в нем квадратичная форма имеет **канонический вид**.

Теорема 4' (закон инерции). Количества положительных и отрицательных коэффициентов при квадратах модулей переменных в каноническом представлении **эрмитовой** квадратичной формы не зависят от выбора канонического базиса и являются инвариантами самой формы.

Индексы инерции, сигнатура квадратичной формы вводятся так же, как в вещественном случае. То же относится к понятию положительно (отрицательно) определенной формы. Сохраняется формулировка критерия Сильвестра.

Если зафиксировать в комплексном линейном пространстве $\mathcal{V}$ эрмитову билинейную форму $\mathcal{B}$, полярную к положительно определенной квадратичной форме, то эта билинейная форма вносит в $\mathcal{V}$ структуру унитарного пространства. Действительно,

$$\forall\, x, y, z \in \mathcal{V}$$

(1) $\mathcal{B}(y, x) = \overline{\mathcal{B}(x, y)}$;
(2) $\mathcal{B}(x + y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z)$
(3) $\mathcal{B}(\alpha x, y) = \alpha \mathcal{B}(x, y)$
(4) $\mathcal{B}(x, x) \geq 0,\ \mathcal{B}(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

Посмотрим на билинейные и квадратичный формы в **унитарном** пространстве.

Пусть $\mathcal{V}$ – n-мерное унитарное пространство, $\mathcal{B}(x, y)$ – билинейная форма на $\mathcal{V}$.

Теорема 6'. Существует такой линейный оператор $\mathcal{A}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{V}$, однозначно определенный, что

$$\forall\, x, y \in \mathcal{V}\ (\mathcal{A}x, y) = \mathcal{B}(x, y).$$

Если билинейная форма $\mathcal{B}$ эрмитова, то $\mathcal{A}$ – эрмитов оператор.

Теорема 7' (о приведении квадратичной формы к главным осям).

Дано: $\mathcal{Q}(q)$ – эрмитова квадратичная форма в унитарном пространстве $\mathcal{V}$.

Тогда существует ортонормированный базис f, в котором

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left| x_i^2 \right|, \text{ где } x = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i\,,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. Пусть в каком-то ортонормированном базисе $< e_1, \dots, e_n >$ эрмитова билинейная форма $\mathcal{B}$, полярная к Q, имеет матрицу $B = (b_{ik})_{i,k=1..n}$, и $\mathcal{A}$ – линейный оператор с матрицей $A_e = B_e^T$ (то есть матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе e является транспонированной к матрице билинейной формы $\mathcal{B}$). Так как форма $\mathcal{B}$ эрмитова, то $B^* = B$, оператор $\mathcal{A}$ эрмитов и его матрица в некотором ортонормированном базисе $< f_1, \dots, f_n >$ диагональна с вещественными числами на главной диагонали. Если C – матрица (унитарная) перехода к базису f, то

$$A_f = diag\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = C^{-1}A_eC = C^*A_eC;$$

матрица A_f диагональная, поэтому совпадает со своей транспонированной, $A_f^T = A_f \Rightarrow$

$$A_f^T = (C^*A_eC)^T = C^TB_e\overline{C}; \text{ но } B_f = C^TB_e\overline{C} \text{ –}$$

закон преобразования матрицы билинейной формы, а значит $B_f = A_f$.

Задача 7. В ортонормированном базисе двухмерного унитарного пространства записана квадратичная форма

$$Q(x) = 2|x_1|^2 + ix_1\overline{x_2} - ix_2\overline{x_1} + 2|x_2|^2.$$

Найдите ортонормированный базис, в котором эта форма имеет канонический вид, и сам канонический вид формы.

Решение. Сначала ищем собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & i \\ -i & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3.$$

Теперь – собственные векторы (они ортогональны, так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$):

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},\ x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow g_1 = (1, i),$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix}, -x_1 + ix_2 = 0 \Rightarrow g_2 = (i, 1).$$

Нормируя векторы g_1 и g_2, получим искомый базис:

$$|g_1| = |g_2| = \sqrt{2} \Rightarrow f_1 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{i}{\sqrt{2}}\right), f_1 = \left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right), C = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \text{ –}$$

матрица перехода.

$$C^T = C = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \overline{C} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix}, Q^T = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q_f = C^TQ^T\overline{C} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 3i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Q(y) = |y_1|^2 + 3|y|^2.$$

Теорема 8'. Если Q_1 и Q_2 – пара эрмитовых квадратичных форм в n-мерном унитарном пространстве, причем Q_2 положительно определена, то существует ортонормированный базис, в котором форма Q_1 имеет канонический, а Q_2 – нормальный вид.

VII. Примерные экзаменационные задачи

Задача 1. Является ли система элементов $\{sinx, sin2x\}$ пространства $\boldsymbol{C}[0,1]$ непрерывных функций на отрезке [0,1] линейно независимой? Почему?

Решение. Если $\alpha sinx + \beta sin2x = 0$, то, дифференцируя, получим $\alpha cosx + 2\beta cos2x = 0$. Для существования нетривиального решения системы уравнений $\begin{cases} \alpha sinx + \beta sin2x = 0 \\ \alpha cosx + 2\beta cos2x = 0 \end{cases}$ необходимо и достаточно (теорема Крамера) равенство нулю определителя системы; но $\begin{vmatrix} sinx & sin2x \\ cosx & 2cos2x \end{vmatrix} = -2sin^3x \neq 0$. Система линейно независима.

Задача 2. Найдите базис и размерность $L + M$ и $L \cap M$, где

L=<*a, b*>, *a* =(1, 2, 1, 0), *b* =(–1, 1, 1, 1), *M*=<*c, d*>, *c* = (2,–1, 0,–1), *d* = (1,–1, 3, 7).

Решение. Найдем сначала базис $L + M$, то есть максимальную линейно независимую подсистему системы <*a, b, c, d*>:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Видим, что <*a, b, c, d*> – линейно независимая подсистема. dim $L \cap M$=0, $L + M = L \oplus M$.

Задача 3. Одним линейным преобразованием координат приведите пару форм к каноническому виду и запишите формулы этого преобразования координат:

$$f(x) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2,\ g(x) = 2x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2.$$

Решение. Очевидно (?), $g(x)$ – положительно определенная квадратичная форма.

$$\det\|F - \lambda\, G\| = \begin{vmatrix} 2-2\lambda & -3/2-3\lambda \\ -3/2-3\lambda & -5/2-5\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{29}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}.$$

Для λ_1: $\begin{pmatrix} -27 & -45 \\ -45 & -75 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $3x_1+5x_2 = 0$, $h_1 = (5, -3)$;

Для λ_2: $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $3x_1 = 0$, $h_2 = (0,1)$;

$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода к базису h;

$$C^*FC = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3/2 \\ -3/2 & -5/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145/2 & 0 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix},$$

$$C^*GC = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$f(y) = \frac{145}{2}y_1^2 - \frac{5}{2}y_2^2,\ g(y) = 5y_1^2 + 5y_2^2.$$

Задача 4. Докажите, что преобразование F пространства многочленов степени $\le n$, заданное формулой $F(f(t)) = f(t+1)$, линейно и найдите его матрицу в базисе $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. Найдите образ и ядро преобразования F.

Решение. $e_0 = 1, e_1 = t, e_2 = t^2, \ldots, e_n = t^n$.

$$F\big(f(t) + g(t)\big) = F\big((f + g)(t)\big) = (f + g)(t + 1) = f(t + 1) + g(t + 1)) =$$

$$= F\big(f(t)) + \mathrm{F}(g(t)\big);$$

$$F\big(\alpha f(t)\big) = (\alpha F)(t + 1) = \alpha F\big(f(t)\big) \Rightarrow F \text{ линейно.}$$

$$F(e_0) = 1, F(e_1) = F(t) = t + 1 = e_0 + e_1$$

$$F(e_2) = F(t^2) = (t + 1)^2 = t^2 + 2t + 1 = e_0 + 2e_1 + e_2,$$

$$\ldots$$

$$F(e_n) = F(t^n) = (t + 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k t^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k e_k \ \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & C_n^1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & C_n^2 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & C_n^{n-1} \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 \end{pmatrix} -$$

на главной диагонали единицы, ниже – нули.

$$\mathrm{rg}\, F = n \Rightarrow \mathrm{Im}\, F = \mathbb{R}_n[t], \mathrm{Ker}\, F = \{\theta\}.$$

Задача 5. Найдите жорданов базис для преобразования, заданного в стандартном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$, и запишите его матрицу в жордановом базисе.

Решение.

$$\det ||A - \lambda E|| = (3 - \lambda)(-1 - \lambda)(-5 - \lambda) - 16\lambda - 16 = -(\lambda + 1)^3 \Rightarrow$$

$\lambda = -1$ – собственное значение, dim Ker (A+E) = 2 – его геометрическая кратность:

$$A + E = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 + 2x_3 = 0.$$

Вектор $f_2 = (1,0,0)$ не входит в Ker (A+E) (независим над Ker (A+E)), так как $1+2\cdot 0 \neq 0$.

$$(A+E)f_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (f_1)^T \in \mathrm{Ker}\,(A+E).$$

Дополним f_1 до базиса Ker $(A+E)$: например, $f_3 = (0,1,0)$. $<f_1, f_2, f_3>$ – жорданов базис.

$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\det\|C\| = -\frac{1}{2}$, $C^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, C – матрица перехода;

$$A_g = C^{-1}AC = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Постройте ортонормированный базис линейной оболочки данной системы векторов (координаты векторов заданы в ортонормированном базисе):
$\{(i, 1, -i),\ (2, 0, -1),\ (0, 2, -i)\}$.

Решение. *a, b, c* – наши векторы, L = L(*a, b, c*). Выделим из < *a, b, c*> максимальную линейно независимую подсистему (базис линейной оболочки L).

$$\begin{vmatrix} i & 1 & -i \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -i \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому L = L(*a, b*). Проведем ортогонализацию:

$$f_1 = a = (i, 1, -i),$$

$$f_2 = b + \alpha f_1,\ (f_2, f_1) = (b, f_1) + \alpha(f_1, f_1) = 0 \Rightarrow 2\bar{i} + 0\cdot 1 - 1\cdot\left(\overline{-i}\right) + \alpha(1+1+1),$$

$$3\alpha - 3i = 0,\ \alpha = i,\ f_2 = (2, 0, -1) + i(i, 1, -i) = (1, i, 0).$$

Последнее – это нормировка. $|f_1| = \sqrt{3},\ |f_2| = \sqrt{2} \Rightarrow$

$$g_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{i}{\sqrt{3}}\right), g_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{i}{\sqrt{2}}, 0\right);\ |g_1| = |g_2| = 1,\ g_1 \perp g_2,\ \mathrm{L}(a, b, c) = \mathrm{L}(g_1, g_2).$$

Задача 7. Укажите какой-нибудь базис пространства многочленов степени ≤ 5, состоящий из многочленов степени 5.

Решение. Базис, например, составляют многочлены

$$f_0 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1,\ f_1 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x,\ f_2 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2,$$
$$f_3 = x^5 + x^4 + x^3,\ f_4 = x^5 + x^4,\ f_5 = x^5.$$

C – матрица перехода от базиса $e = <1, x, x^2, x^3, x^4, x^5>$ к базису f,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 8. Найдите ядро и образ проекции трехмерного пространства на биссектрису второго октанта.

Решение. $f_3 = (-1, 1, 1)$ – направляющий вектор биссектрисы II октанта,
$-x + y + z = 0$ – уравнение плоскости, перпендикулярной f_3,

$$f_1 = (2, 1, 1),\ \ f_2 = (0, 1, -1) \text{ и}$$

$<f_1, f_2>$ – базис этой плоскости.

В базисе $<f_1, f_2, f_3>$ пространства $\mathbb{R}^3$ матрицей проектирования является

$$P_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ – матрица перехода от базиса e к f.

$$|C| = 6, C^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$P_e = CP_fC^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Ядро: плоскость $-x + y + z = 0$. Образ: $\mathrm{L}(f_3)$.

Задача 9. Пусть в пространстве многочленов степени ≤ 2 базис состоит из многочленов $1, t, t^2$, $f(1) = f(-1)\ \forall f$, а скалярное произведение определено формулой

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt\,.$$

Найдите матрицу оператора, сопряженного к оператору дифференцирования (в данном базисе).

Решение. $\mathcal{A}=\frac{d}{dt}$. Тогда

$$(\mathcal{A}f, g) = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dt}(f(t))g(t)dt = (f(t)g(t))\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} f(t)\frac{d}{dt}(g(t))dt = \int_{-1}^{1} f(-\frac{dg}{dt})dt = (f, -\mathcal{A}g),$$

значит $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$.

$$\frac{d(1)}{dt} = 0,\ \frac{d(t)}{dt} = 1,\ \frac{d(t^2)}{dt} = 2t \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A^* = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 10. Найдите матрицу оператора проектирования пространства

$$U = L((1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, 1))$$

параллельно пространству $V = L((1, 1, 0, -1), (0, 0, 0, 1))$ в стандартном базисе $\mathbb{R}^4$.

Решение. Обозначив $a_1 = (1, -1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 0, 0, 1)$, $a_3 = (1, 1, 0, -1)$, $a_4 = (0, 0, 0, 1)$, получим $U = L(a_1, a_2)$, $V = L(a_3, a_4)$, причем система $< a_1, a_2, a_3, a_4>$ линейно независима и является базисом a пространства. $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$. В базисе a

$$P_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C^{-1} P_e C \text{, где}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} -$$

матрица перехода от базиса e к a. Тогда

$$|C| = 1,\ C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, P_e = C P_a C^{-1} \Rightarrow$$

$$P_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$