Задание 1

Решить уравнение

$$4y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2(1-y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2y}{1+y^2}\left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_1(x)$$

Решение:

В начале определим тип уравнения вида

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \Psi = 0.$$

Рассмотрим выражение $B^2 - AC$.

$$B^2 - AC = (1-y^2)^2 + 4y^2 = (1+y^2)^2 > 0$$

Следовательно наше уравнение гиперболическое во всей области. Для поиска уравнений на характеристики запишем

$$Ady^2 - 2Bdydx + Cdx^2 = 0.$$

Решая квадратное уравнение получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} = \frac{(1-y^2) \pm (1+y^2)}{4y^2}$$

Получаем совокупность двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{c} 2y^2 dy = dx \\ 2dy + dx = 0 \end{array}\right.$$

Откуда получаем уравнения характеристик

$$\xi = x + 2y, \qquad \eta = 3x - 2y^3.$$

Перепишем наше уравнение в новых переменных. Для этого выразим производные по старым переменным через производные по новым и старые переменные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

Заметим также, что

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 3, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = -6y^2, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} = -12y,$$

Теперь подставим в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
&4y^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}\right] + \\
&+ 2(1-y^2)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right] - \\
&- \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}\right] - \\
&- \frac{2y}{1+y^2}\left(2\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]\right) = \\
&= 4y^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(1)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 1 \cdot 3 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}(3)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0\right] + \\
&+ 2(1-y^2)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}\cdot 1 \cdot 2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 1 \cdot (-6y^2) + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\cdot 3 \cdot (-6y^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 3 \cdot 2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 0\right] - \\
&- \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}(2)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\cdot 2 \cdot (-6y^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\left(-6y^2\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot(-12y)\right] - \\
&- \frac{2y}{1+y^2}\left(2\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 1 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot 3\right] - \left[\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot 2 + \frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot(-6y^2)\right]\right) = \\
&= 4y^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 9\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right] + 2(1-y^2)\left[2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 6y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - 18y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 6\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta}\right] - \\
&- \left[4\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 24y^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + 36y^4\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - 12y\frac{\partial u}{\partial \eta}\right] - 12y\frac{\partial u}{\partial \eta} = \left[4y^2 + 4\left(1-y^2\right) - 4\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \\
&+ \left[24y^2 - 12\left(1-y^2\right)y^2 + 12\left(1-y^2\right) + 24y^2\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \left[36y^2 - 36\left(1-y^2\right)y^2 - 36y^4\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \\
&+ \left[12y - 12y\right]\frac{\partial u}{\partial \eta} = 12\left(1+y^2\right)^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0
\end{aligned}$$

Откуда мы получаем соотношение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

где f_1 и f_2 — произвольные функции. Их мы найдем из начальных условий. Подставляя условия

$$u(x,0) = \varphi_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = \varphi_1(x)$$

Мы определяем неизвестные функции:

1. $$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \left(2\frac{\partial u}{\partial \xi} - 6y^2\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{(x,0)} = 2\frac{\partial u}{\partial \xi} = 2f_1'(x) = \varphi_1(x)$$

   Откуда получаем выражение для f_1:

   $$f_1(x) = \int_0^x \frac{\varphi_1(t)}{2}dt + \mathrm{C}$$

2. $$u(x,0) = f_1(x) + f_2(3x) = \varphi_0(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f_2(x) = \varphi_0\left(\frac{x}{3}\right) - \int_0^{x/3} \frac{\varphi_1(t)}{2}dt - \mathrm{C}$$

И окончательно

$$u(x,y) = f_1(x+2y) + f_2(3x-2y^3) = \int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \frac{\varphi_1(t)}{2}dt + \varphi_0\left(x - \frac{2}{3}y^3\right).$$

Ответ:

$$u(x,y) = \int_{x-\frac{2}{3}y^3}^{x+2y} \frac{\varphi_1(t)}{2}dt + \varphi_0\left(x - \frac{2}{3}y^3\right)$$

Задание 2

Дана струна днины l имеющая в начальный момент профиль $u(x,0) = \varphi(x)$ и начинающая движение без начальной скорости. Скорость распространения возмущений в струне равна a. найти методом характеристик отклонение струны в точке $x = l/3$ в момент времени $t = 10.5\,l/a$. Концы струны закреплены.

Решение:

Как известно, для колебаний струны в данной точке в данный момент времени справедливо выражение:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(s)ds,$$

где $\varphi(x)$ — начальное отклонение, а $\Psi(x)$ — скорость в начальный момент времени в точке x. Но при вычислении по этой формуле у нас могут возникнуть проблемы, поскольку начальные условия заданы только на отрезке от 0 до l, а в итоговую формулу могут входить значения функций с большего интервала.

Однако, в случае закрепленных концов, нечетное периодическое продолжение на всю область начальных условий обеспечивает выполнение начальных условий, и в силу совпадения с начальными условиями на $[0,l]$ является искомыми функциями. То есть φ и Ψ — нечетные функции с периодом $2l$.

Итак, поскольку $\Psi \equiv 0$,

$$u(l/3,\ 10.5\,l/a) = \frac{\tilde{\varphi}(l/3 - a \cdot 10.5\,l/a) + \tilde{\varphi}(l/3 + a \cdot 10.5\,l/a)}{2}$$

где $\tilde{\varphi}$ — искомое продолжение начального отклонения. В силу того, что период равен $2l$ мы можем добавить к аргументу $2nl$ с целью попасть в онтервал $[-l,\ l]$, что соответствует четному числу отражений от границ. Затем, при необходимости, мы можем сменить знак аргумента со сменой знака функции, что соответствует однократному отражению от левой границы.

$$u(l/3,\ 10.5\,l/a) = \frac{\tilde{\varphi}(-10\frac{1}{6}l) + \tilde{\varphi}(10\frac{5}{6}l)}{2} = \frac{\tilde{\varphi}(-\frac{1}{6}l) + \tilde{\varphi}(\frac{5}{6}l)}{2} = \frac{\varphi(\frac{5}{6}l) - \varphi(\frac{1}{6}l)}{2}$$

Ответ:

$$u(l/3,\ 10.5\,l/a) = \frac{\varphi(\frac{5}{6}l) - \varphi(\frac{1}{6}l)}{2}$$

Задание 3

Начальное отклонение полуограниченной струны задается формулами

$$u(x,0)=\begin{cases} 0, & 0<x\leqslant c,\\ h(x-c)/c, & c<x\leqslant 2c,\\ -h(x-3c)/c, & 2c<x\leqslant 3c,\\ 0, & 3c<x. \end{cases}$$

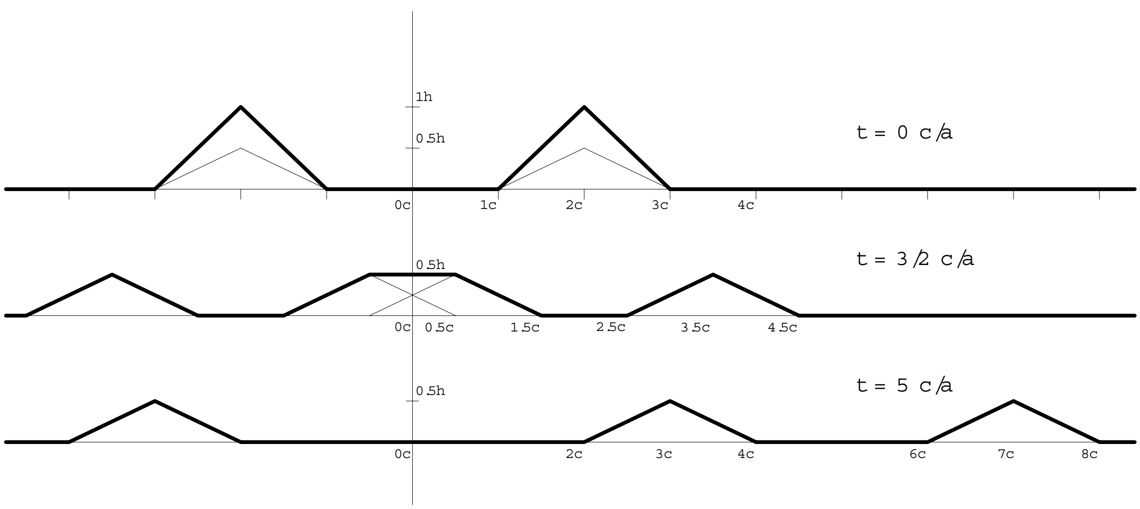
Начальная скорость равна нулю. Левый конец свободен. Нарисовать форму струны в моменты времени $t=3c/2a,\ t=5c/a$.

Решение:

Разница с предыдущей задачей заключается только в том, что свободный конец дает нам четное продолжение начальных условий. То есть

$$u(x,3c/2a)=\frac{\varphi(|x-3c/2|)+\varphi(x+3c/2)}{2},\qquad u(x,5c/a)=\frac{\varphi(|x-5c|)+\varphi(x+5c)}{2}.$$

Ответ:



Слева от вертикалоной прямой ($x=0$) — виртуальная часть струны. Тонкие линии изображают бегущие сигналы, толстые — результат сложения сигналов — итоговый профиль струны.

Задание 4

Найти функцию Грина задачи о распределении тепла в однородном стержне длины l, левый конец которого поддерживается при нулевой температуре, а на правом происходит излучение теплп в среду с нулевой температурой.

Решение:

Уравнение теплопроводности для стержня выглядит как

$$f(x,t) - \frac{\partial u}{\partial t} c\rho + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0,$$

где u - температура, за f обозначена плотность мощности источников, ρ - плотность, c - теплоемкость, k - коэффициент теплопроводности.

Для однородного стержня уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t), \qquad (1)$$

переобозначив $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, $g = \frac{f}{c\rho}$. Надо учесть граничные условия, которые в нашем случае выглядят как $u(0,t) = 0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \sigma u\right)\Big|_{x=l} = 0$.

Для начала решим задачу без источников тепла. Тогда, попытавшись представить решение в виде произведения функции зависящей только от x и зависящей только от t имеем

$$X(x)T^{'}(t) = a^2 T(t) X^{''}(x)$$

откуда переходим к системе

$$\left\{ \begin{array}{c} T^{'} + \lambda a^2 T = 0 \\ -X^{''} = \lambda X \end{array} \right. \qquad X(0) = 0, \ \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \sigma X\right)\Bigg|_{x=l} = 0.$$

Дополнительные условия возникают из граничных условий. Поскольку случай тождественно нулевого T нас не интересует, остается только такая логическая возможность.

Итак, рассматривая уравнение на пространственную координату мы можем видеть, что это — задача Штурма. Заметим, что $\lambda \geqslant 0$, поскольку домножив на $\overline{X}$ и проинтегрировав получаем:

$$0 = \int_a^l \left(X^{''}\overline{X} + \lambda \left|X\right|^2\right) dx = X^{'}\overline{X}\Big|_0^l + \int_a^l \left(\lambda \left|X\right|^2 - \left|X^{'}\right|^2\right) dx$$

В силу положительности σ получаем, что $\lambda \geqslant 0$, больше того, в силу граничных условий $\lambda \neq 0$. Таким образом, решение уравнения можно записать в виде

$$X = A\cos\omega x + B\sin\omega x,$$

где $\omega^2 = \lambda$. Осталось для нахождения последовательности значений ω подставить граничные условия. Из того, что $X(0) = 0$ следует, что $A = 0$. Условие на правом конце дает нам $\omega\cos\omega l + \sigma\sin\omega l = 0$. Отсюда мы находим последовательность значений ω, а следовательно и собственных функций. По теореме Стеклова по ним можно разложить любую функцию удовлетворяющую нашим начальным условиям.

Итак

$$\tan \omega_n l = -\frac{\omega_n}{\sigma}$$

$$X_n = \sin \omega_n x$$

$$T_n = \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 t}$$

В данном случае функции X_n не отнормированы. Нормированные функции будем обозначать $\tilde{X}_n$. В силу линейности попытаемся собрать решение в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n T_n \tilde{X}_n.$$

Действительно, начальное условие $\phi(x)$ в силу теоремы Стеклова может быть разложено по нашим функциям:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \tilde{X}_n.$$

Из этого условия и находятся коэффициенты разложения A_n ($\tilde{A}_n$). Можно записать формулу:

$$A_n = \frac{\int_0^l \phi(\xi) X_n(\xi) d\xi}{\|X_n\|^2}; \quad \tilde{A}_n = \int_0^l \phi(\xi) \tilde{X}_n(\xi) d\xi$$

Представленное в виде ряда решение сходится равномерно при $t > 0$ за счет экспоненты. В силу теоремы единтсвенности это и будет искомым решением. Но перепишем это в другом виде.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n T_n \tilde{X}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \phi(\xi) \tilde{X}_n(\xi) d\xi T_n(t) \tilde{X}_n(x) = \int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{X}_n(\xi) \tilde{X}_n(x) T_n(t) \right) \phi(\xi) d\xi$$

Следовательно, если обозначить за

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \omega_n \xi \sin \omega_n x}{\int_0^l \sin^2 \omega_n \eta d\eta} \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 t},$$

то решение задачи можно бубет выразить через начальные условия по формуле

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) \phi(\xi) d\xi$$

Теперь посмотрим, что изменится при добавлении источников тепла. Уравнение вида (2) решается по стандартной схеме - общее решение представляется как сумма частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного.

Будем искать решение неоднородного уравнения с нулевыми начальными условиями, тогда мы уже знаем решение однородного уравнения с нужными нам начальными условиями. То есть представим решение нашей задачи в виде $u = v + w$, где w - частное решение неоднородного уравнения.

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x,t), \tag{2}$$

Разложим g по собственным функциям и попытаемся найти представление для w через собстенные функции.

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\tilde{X}_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\int_0^l g(\xi,t)\tilde{X}_n(\xi)d\xi \right) \tilde{X}_n(x) \right] \tag{3}$$

Представим w в виде ряда

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)\tilde{X}_n(x) \tag{4}$$

и предполагая возможность почленного дифференцирования можем записать систему уравнение в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(w_n^{'}(t) + \omega_n^2 a^2 w_n(t) - g_n(t) \right) \tilde{X}_n(x) = 0. \tag{5}$$

В силу однозначности разложения нуля мы получаем, что все множители, стоящие в формуле (5) перед собственными функциями — нули. Следовательно мы можем переписать это как систему

$$w_n^{'}(t) + \omega_n^2 a^2 w_n(t) = g_n(t).$$

Решение, как известно представляется в виде

$$w_n(t) = \int_0^t \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 (t-\tau)} g_n(\tau) d\tau = \int_0^t \int_0^l \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 (t-\tau)} g(\xi,\tau)\tilde{X}_n(\xi) d\xi d\tau$$

Итак, мы можем записать выражение дял w:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \int_0^l \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 (t-\tau)} g(\xi,\tau)\tilde{X}_n(\xi) d\xi d\tau \tilde{X}_n(x) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) g(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

Для получения окончательного решения задачи, надо подставить функцию v, отвечающую удовлетворению начальлных условий, итак, решением задачи является функция

$$u(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t)\phi(\xi)d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau) g(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t)$ — искомая функция Грина, выражение для которой уже давалось ранее и выглядит как

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\omega_n\xi \sin\omega_n x}{\int_0^l \sin^2\omega_n \eta d\eta} \mathbf{e}^{-\omega_n^2 a^2 t},$$

где ω_n — корни трансцендентного уравнения $\tan\omega_n l = -\frac{\omega_n}{\sigma}$.

Если взять интеграл, стоящий в знаменателе, то мы получаем:

$$\int_0^l \sin^2\omega_n\eta d\eta = \frac{1}{2}\frac{-\cos\omega_n l\sin\omega_n l + \omega_n l}{\omega_n} = \frac{1}{2}\frac{\frac{\omega_n}{\sigma}\cos^2\omega_n l + \omega_n l}{\omega_n} = \frac{1}{2}\left(l + \frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}\right)$$

Теперь мы можем записать ответ

Ответ:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\omega_n\xi\sin\omega_n x}{\frac{1}{2}\left(l+\frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}\right)}\mathbf{e}^{-\omega_n^2a^2t}, \quad \tan\omega_n l = -\frac{\omega_n}{\sigma}$$

Задание 5

Найти величину силы тока в линии, свободной от искажений, если левый конец заземлен, правый изолирован, ток в начальный момент отсутствует, начальное напряжение равно E, длина линии l.

Решение:

Запишем систему телеграфных уравнений

$$\begin{cases} L\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + RI = 0 \\ C\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + GU = 0 \end{cases}$$

Граничные условия:

$$U(0,t) = 0, \qquad I(l,t) = 0$$

Начальные условия:

$$U(x,0) = E, \qquad I(x,0) = 0$$

Проверим начальные и граничные условия на согласованность. Мы видим, что одна пара условий согласована, действительно, $I(l,t) = 0$, $I(x,0) = 0$ дают одно и то-же условия на границе в начальный момент времени. Другая-же — несогласована. Исправим найденное несогласование.

Сгладим начальное условие на напряжение так, чтобы сохранилась дважды дифференцируемость. Будем исправлять начальные условия многочленом вблизи нуля.

$$U(x,o) = \varphi(x) = \begin{cases} \frac{E}{\delta^3}\left(x^3 - 3\delta x^2 + 3\delta^2 x\right) & 0 \leqslant x \leqslant \delta \\ E & \delta < x \leqslant l \end{cases}$$

Теперь мы рассмотрим задачу с начальными и новыми граничными условиями.

Если мы нашли $I(x,t)$ — решение, то его можно подставить в исходную систему, получив тождество, и в предположении дважды дифференцируемости

$$\begin{array}{rc} C\frac{\partial}{\partial t} \,|\cdot & L\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + RI = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \,|\cdot & C\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial x} + GU = 0 \\ & \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial I}{\partial t} + RGI = 0 \end{array}$$

Введя замену функции

$$W(x,t) = \mathbf{e}^{\frac{R}{L}t} I(x,t)$$

и переходя к ней в уравнении получаем:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{(RC + LG)^2 - 4LCRG}{4L^2C^2}W$$

В силу того, что в данной линии отсутствует искажение, то есть $RC = LG$, получаем

$$\frac{(RC + LG)^2 - 4LCRG}{4L^2C^2} = \frac{(RC + RC)^2 - 4RCRC}{4L^2C^2} = 0$$

откуда видно, что уравнение записывается как

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \frac{1}{LC}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = a^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \qquad a = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Итак, мы получили волновое уравнение. Теперь нам надо определить граничные условия. Из непрерывно-дифференцируемости мы можем заключить:

$$\begin{array}{rcl} U(0,t)=0 \implies I_x(0,t)=0 & \implies & W_x(0,t)=0 \\ I(l,t)=0 & \implies & W(l,t)=0 \end{array}$$

Мы получили ту же задачу, которая будет рассмотрена в задании 8. Итак, процесс разделения переменных для этой задачи будет приведен позднее, а пока мы просто предъявим результат.

$$W_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right),\ \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2,\ T_n(t) = A_n\cos\frac{a\pi(2n-1)t}{2l} + B_n\sin\frac{a\pi(2n-1)t}{2l}$$

Коэффициенты A_n и B_n находятся из начальных условий. Действительно, наше решение по предположению имеет вид

$$W = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n T_n^1 + B_n T_n^2\right) W_n$$

где

$$T_n^1(t) = \cos\frac{a\pi(2n-1)t}{2l}, \qquad T_n^2(t) = \sin\frac{a\pi(2n-1)t}{2l}$$

Предполагая возможность почленного дифференцирования ряда мы можем записать:

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n, \qquad W_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi(2n-1)}{2l}B_n W_n$$

Причем система функций W_n удовлетворяет теореме Стеклова, то есть по ней можно разложить любую функцию с нулевой производной в $x=0$ и нулевым значением в $x=l$ и при том квадратично интегрируемую.

Теперь обратимся к начальным условиям.

$$W(x,0) = I(x,t)\mathbf{e}^{\frac{R}{L}t}\Big|_{t=0} = 0$$

$$W_t(x,0) = \left(\frac{R}{L}I(x,t) + I_t(x,t)\right)\mathbf{e}^{\frac{R}{L}t}\Big|_{t=0} = I_t(x,0) = -\frac{1}{L}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + RI\right) = -\frac{1}{L}\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$W_t(x,o) = \begin{cases} \frac{E}{\delta^3}\left(3x^2 - 6\delta x + 3\delta^2\right) & 0 \leqslant x \leqslant \delta \\ E & \delta < x \leqslant l \end{cases}$$

Заметим, что

$$W(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n W_n = 0 \qquad \implies \qquad A_n = 0$$

Таким образом

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{a\pi(2n-1)t}{2l} W_n$$

Разложим условия на W_t по нашим функциям — синусам.

$$\int_0^{\delta} (x-\delta)^2 \cos \omega x dx = \frac{2\delta\omega - 2\sin\omega\delta}{\omega^3}$$

Откуда находим

$$\tilde{W_t^{\delta}}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{12E}{l\delta^3 L} \frac{\delta\omega_n - \sin\omega_n\delta}{\omega_n^3} \cos\omega_n x$$

В пределе получаем

$$\tilde{W_t^{\delta}}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2E}{lL} \cos\omega_n x$$

Откуда находим

$$B_n = -\frac{4E}{a\pi(2n-1)L}$$

И окончательно получаем

$$I(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4E}{\pi(2n-1)} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)t}{2l\sqrt{LC}}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Ответ:

$$I(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4E}{\pi(2n-1)} \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{\pi(2n-1)t}{2l\sqrt{LC}}\right) \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right) \mathbf{e}^{-\frac{R}{L}t}$$

Задание 6

Найти с заданной точностью ε решение уравнения

$$\psi(x) = x + \frac{1}{12}\int_0^1 \frac{\psi(y)}{\sqrt{1+x^2y^2}}dy,\ \varepsilon = 0.1$$

Решение:

Рассмотрим ядро нашего интегрального уравнения

$$k(x,y) = \frac{1}{12}\frac{1}{\sqrt{1+x^2y^2}}.$$

Это ядро является малым. Действительно:

$$q = \sup_{x\in\mathbb{R}}\int_0^1 |k(x,y)|\,dy = \sup_{x\in\mathbb{R}}\int_0^1 \frac{1}{12}\frac{1}{\sqrt{1+x^2y^2}}dy \leqslant \frac{1}{12}.$$

Введем оператор $A:$

$$A\varphi(x) = \int_0^1 k(x,y)\varphi(y)dy$$

Тогда наше уравнение перепишется в виде

$$\psi(x) = A\psi + x$$

Откуда

$$\psi = (I-A)^{-1}\,x$$

В силу малости ядра оператора A имеем

$$(I-A)^{-1}\,\varphi = \varphi + A\varphi + A^2\varphi + ... + A^n\varphi + ...$$

Причем

$$|A^n\varphi| \leqslant q^nM,\ M = \sup|\varphi| \Longrightarrow \qquad \left|\sum_{i=n}^{\infty}A^i\varphi\right| \leqslant \frac{q^n}{1-q}M$$

Следовательно, отбрасывая все члены ряда для обратного оператора, начиная с n-ного, мы получаем гарантированную точность $\varepsilon = \frac{q^n}{1-q}M$. В нашей задаче $M = \sup_{[0,1]} x = 1$, $q = 1/12$, $\varepsilon = 0.1$, откуда получаем, что эже нулевого приближения обратного оператора хватает для получения решения с заданной точностью. Приближенным решением будет являться функция $\psi = x$.

Ответ:

$$\tilde{\psi}(x) = (I-A)_0^{-1}\,x = x, \quad \varepsilon = 1/11$$

Задание 7

Решить уравнение

$$f(x) = \cos(x) + \int_1^4 \sin^2(x-y) f(y) dy$$

Решение:

Ядро уравнения $k(x,y)$ можно представить в виде

$$k = \sin^2(x-y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2(x-y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x \cos 2y + \frac{1}{2}\sin 2x \sin 2y$$

Итак, мы видим, что наше уравнение представляет из себя уравнение с вырожденным ядром. Таким образом, решение должно быть представленно в виде

$$f(x) = \cos x + A + B\cos 2x + C \sin 2x \tag{6}$$

Действительно, уравнение имеет вид

$$f(x) = \cos x + \int_1^4 \frac{1}{2} f(y)dy - \cos 2x \int_1^4 \frac{1}{2}\cos 2y f(y)dy + \sin 2x \int_1^4 \frac{1}{2}\sin 2y f(y) dy$$

Подставим в уравнение искомое решение, представленное в виде (6), уравнение должно превратиться в тождество. Мы получаем

$$\cos x + A + B\cos 2x + C\sin 2x = \cos x + \int_1^4 \frac{1}{2}\left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy -$$
$$- \cos 2x \int_1^4 \frac{1}{2}\cos 2y \left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy +$$
$$+ \sin 2x \int_1^4 \frac{1}{2}\sin 2y \left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy$$

Откуда, в силу линейной независимости $1,\ \cos 2x,\ \sin 2x$ получаем систему линейных уравнений на коэффициенты:

$$\begin{cases} A = \int_1^4 \frac{1}{2}\left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy \\ B = -\int_1^4 \frac{1}{2}\cos 2y \left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy \\ C = \int_1^4 \frac{1}{2}\sin 2y\left(\cos y + A + B\cos 2y + C\sin 2y\right) dy \end{cases}$$

Если взять интегралы, то мы получаем систему уравнений в виде

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & \frac{1}{2}(\sin 8 - \sin 2)B & + & \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos 8)C & = & -(\sin 4 - \sin 1) \\ \frac{1}{2}(\sin 8 - \sin 2)A & + & \frac{1}{8}(28 + \sin 16 - \sin 4)B & + & \frac{1}{8}(\cos 4 - \cos 16)C & = & \frac{1}{6}\left(3\sin y + \sin 3y\right)\big|_1^4 \\ \frac{1}{2}(\cos 2 - \cos 8)A & + & \frac{1}{8}(\cos 4 - \cos 16)B & + & \frac{1}{8}(\sin 4 - \sin 16 - 4)C & = & \frac{1}{6}\left(3\cos y + \cos 3y\right)\big|_1^4 \end{array} \tag{7}$$

Как мы видим, матрица коэффициентов симметричная с диагональным преобладанием, следовательно ее детерминант не может быть равен нулю. Решая систему уравнений по правилу Крамера мы находим коэффициенты $A,\ B,\ C$, которые и подставляем в формулу для нахождения решения.

Ответ:

Решением уравнения является функция

$$f(x) = \cos x + A + B\cos 2x + C\sin 2x.$$

Коэффициенты находятся из системы (7).

Задание 8

Найти решение задачи о вынужденных колебаниях струны длины l, левый конец которой свободен, правый закреплен, начальные условия нулевые, плотность распределения сил есть $A\cos(\pi x/2l)$.

Решение:

Примем координату левого конца струны равной нулю. Будем считать, что от него отсчитывается величина x. Запишем уравнение колебаний струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = g(x,t) \tag{8}$$

Для решения этой задачи воспользуемся рассуждениями, примененными в задаче 4. Мы Проведем разделение переменных для случая свободных колебаний, а затем вынужденные колебания разложим по собственным функциям.

Представив $u = T(t)X(x)$ мы приходим к уравнению $T''X - a^2TX'' = 0$. В этом уравнении можно провести резделение переменных, что приводит нас к системе

$$\begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ -X'' = \lambda X \end{cases}$$

Функция пространственной координаты дает нам задачу Штурма. Учитывая граничные условия мы получаем, что $\lambda > 0$ ($\lambda = 0$ соответствует нулевой собственной функции), что дает нам решения вида

$$X_n(x) = \cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2, \quad T_n(t) = A\cos\frac{a\pi(2n-1)t}{2l} + B\sin\frac{a\pi(2n-1)t}{2l}$$

По найденным нами собственным функциям задачи Штурма можно разложить любую функцию из исследуемого класса. В частности можно представить вынуждающую силу в виде ряда.

Для вынуждающей силы известно выражение:

$$g(x,t) = A\cos(\pi x/2l)\,.$$

Мы ищем представление в виде

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)X_n(x) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\int_0^l g(\xi,t)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)\xi}{2l}\right)d\xi\right)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right)\right]$$

Отсюда можно найти выражение для $g_i(t)$. $g_1(t) = A$, остальные — нулевые. Также в виде ряда мы можем представить частное решение, соответствующее вынуждающей силе.

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t)X_n(x)$$

Предполагая возможность дифференцирования мы подставляем ряд в виде решения. Получае разложение нуля по собственным функциям, следовательно все коэффициенты нулевые. Мы можем перейти к системе:

$$\begin{cases} w_n''(t) + \lambda_n a^2 w_n(t) = A & n = 1 \\ w_n''(t) + \lambda_n a^2 w_n(t) = 0 & n \neq 1 \end{cases}$$

Учитывая нулевые начальные условия получаем

$$\begin{cases} w_1(t) = \frac{A}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t) \\ w_{n \neq 1}(t) = 0 \end{cases}$$

Итак, решение имеет вид

$$w = \frac{A}{\omega_1^2} (1 - \cos \omega_1 t) \cos \left(\frac{\pi x}{2l} \right), \quad \omega_1 = \frac{a\pi}{2l}$$

Действительно, оно удовлетворяет неоднородному уравнению с нулевыми начальными условиями, но условия в полной задаче и есть нулевые, следовательно оно является также решением всей задачи.

Ответ:

$$u = \frac{A}{\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2} \left(1 - \cos \frac{a\pi}{2l} t \right) \cos \left(\frac{\pi x}{2l} \right)$$

Задание 9

Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в области

$$D = \{(x, y)\ :\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$$

при условиях $u(x, 0) = \varphi(x),\ u(0, y) = \psi(y)$.

Решение:

Мы рассматриваем задачу Дирихле. Для ее решения найдем функцию Грина нашей области. Как известно для двумерной области

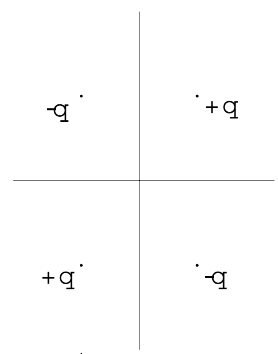
$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_0}} + v(M, M_0)$$

v — гармоническая в области D. При этом должно выполняться условие

$$G(M, M_0)|_{\partial D} = 0$$

Наша область имеет специальный вид, поэтому нейзвестная функция v легко находится с помощью принципа изображений.

Для того, чтобы получить ноль функции Грина на оси OX надо все "заряды" отразить относительно оси со сменой знака. Аналогичную операцию надо проделать с "зарядами" (включая изображения) относительно оси OY. В данном случае после двух отражений мы получим ноль функции Грина на границах области — первого квадранта.



Итак, мы можем записать функцию Грина в явном виде:

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y+y_0)^2}} + \\ + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y+y_0)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x+x_0)^2 + (y-y_0)^2}}$$

Зная функцию Грина и значение u на границе области, мы можем определить значение u во всей области по формуле

$$u(M_0) = -\int_{\partial D} \frac{\partial G}{\partial n}(M, M_0) \Phi(M) dl$$

Подставим в задачу наши условия:

$$\frac{\partial G}{\partial x}((0, y), M_0) = \frac{1}{(x_0^2 + (y-y_0)^2)(x_0^2 + (y+y_0)^2)} \frac{4x_0 y_0 y}{\pi}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}((x, 0), M_0) = \frac{1}{(y_0^2 + (x-x_0)^2)(y_0^2 + (x+x_0)^2)} \frac{4y_0 x_0 x}{\pi}$$

$$u(x_0, y_0) = \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial x}((0,y), M_0)\psi(y)dy + \int_0^\infty \frac{\partial G}{\partial y}((x,0), M_0)\phi(x)dx =$$
$$= \frac{4x_0y_0}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{y\cdot\psi(y)dy}{(x_0^2+(y-y_0)^2)(x_0^2+(y+y_0)^2)} + \int_0^\infty \frac{x\cdot\phi(x)dx}{(y_0^2+(x-x_0)^2)(y_0^2+(x+x_0)^2)}\right]$$

При этом граничные условия должны быть такими, что несобственные интегралы, выражающие ответ, сходятся во всей области.

Ответ:

$$u(x_0, y_0) = \frac{4x_0y_0}{\pi}\left[\int_0^\infty \frac{y\cdot\psi(y)dy}{(x_0^2+(y-y_0)^2)(x_0^2+(y+y_0)^2)} + \int_0^\infty \frac{x\cdot\phi(x)dx}{(y_0^2+(x-x_0)^2)(y_0^2+(x+x_0)^2)}\right]$$

Задание 10

Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в области

$$D = \{(x, y) \ : \ 0 \leqslant x \leqslant a, \ 0 \leqslant y \leqslant b\}$$

при условиях $u(0, y) = 1, \ u(x, b) = 1 + x^2/a^2, \ u(a, y) = 1 + y^2/b^2, \ u_y(x, 0) = 0.$

Решение:

Мы попытаемся представить наше решение в виде

$$u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$$

где v удовлетворяет граничным условиям, соответственно w имеет однородные граничные условия. Тогда для выполнения нашего уравнения необходимо, чтобы

$$\Delta w = -\Delta v$$

Заметим, что

$$v = 1 + \frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2}$$

удовлетворяет граничным условиям. Тогда на w получаем уравнение

$$\Delta w = -2\frac{x^2 + y^2}{a^2 b^2}$$

Формально решим задачу $-\Delta w = \lambda w$. Проведем разделение переменных. Представим $w = X(x)Y(y)$. Тогда

$$-X''Y - Y''X = \lambda XY$$

откуда

$$-\frac{X''}{X} = \lambda + \frac{Y''}{Y} = \alpha$$

$$\begin{cases} X'' + \alpha X = 0 \\ Y'' + (\lambda - \alpha)Y = 0 \end{cases}$$

При этом надо учесть граничные условия:

$$X(0) = 0, \ \ X(a) = 0, \ \ Y'(0) = 0, \ \ Y(b) = 0$$

Из первого уравнения с учетом граничных условий мы получаем $\alpha \geqslant 0$, но нулевое значение отвечает нулевой функции, что нам не интересно. Остается случай $\alpha > 0$. Мы можем найти собственные функции.

$$X = A\cos\sqrt{\alpha}x + B\sin\sqrt{\alpha}x$$

Учитывая условие $X(0) = 0, \ X(a) = 0$ получаем

$$X = \sin\sqrt{\alpha}x, \qquad \alpha = \left(\frac{\pi k}{a}\right)^2$$

Теперь обратимся к Y, обозначив $\gamma = \lambda - \alpha$ мы проведем тот же анализ. Заметив, что также $\gamma \geqslant 0$ и нулевое значение γ нам не подходит, можем написать выражение для Y:

$$Y = A\cos\sqrt{\alpha}y + B\sin\sqrt{\alpha}y$$

Но на этот раз заданы другие граничные условия — $Y'(0) = 0,\ Y(b) = 0$, откуда находим:

$$Y = \cos\sqrt{\gamma}y, \qquad \gamma = \left(\frac{2l-1}{2}\frac{\pi}{b}\right)^2$$

Итак, нам надо разложить функцию $2\frac{x^2+y^2}{a^2b^2}$ по произведениям X_mY_n. Действительно, если существует разложение

$$2\frac{x^2+y^2}{a^2b^2} = \sum A_{mn}X_mY_n$$

То в силу того, что X_mY_n собственная функция оператора $-\Delta w$ получаем, что $-\Delta X_mY_n = \lambda_{mn}X_mY_n$, откуда находим разложение для w:

$$w = \sum \frac{A_{mn}}{\lambda_{mn}}X_mY_n$$

Покажем возможность разложения функции $g(x, y)$ по нашей системе. Заметим, что в силу теоремы Стеклова мы можем разложить функцию одного переменного:

$$g(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)Y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}X_mY_n$$

Как мы видим, разложение возможно. Тогда проведем разложение нужной нам функции:

$$2\frac{x^2+y^2}{a^2b^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x)\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{b}y\right)$$

Откуда мы находим выражение для $A_n(x)$:

$$A_n(x) = \frac{2}{b}\int_0^b 2\frac{x^2+y^2}{a^2b^2}\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{b}y\right)dy = \frac{4}{a^2b^3}\left[\frac{\omega_{y,n}^2b^2-2}{\omega_{y,n}^3} + \frac{x^2}{\omega_{y,n}}\right]\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$$

Точно так же мы можем найти A_{mn}:

$$A_{mn} = \frac{2}{a}\int_0^a A_n(x)\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)dx = \frac{8}{a^3b^3}\left[\frac{\omega_{y,n}^2b^2-2}{\omega_{y,n}^3}\cdot\frac{1-(-1)^m}{\omega_{x,m}} + \frac{2-\omega_{x,m}^2a^2}{\omega_{x,m}^3\omega_{y,n}}(-1)^m\right](-1)^{n+1}$$

где

$$\omega_{x,m} = \frac{\pi m}{a}, \qquad \omega_{y,n} = \frac{(2n-1)\pi}{2b}$$

Заметим, что $\lambda = \gamma + \alpha = \omega_{x,m}^2 + \omega_{y,n}^2$ Итак, теперь мы можем записать ряд для w, а следовательно, выразить решение нашей задачи.

Ответ:

$$u = 1 + \frac{x^2}{a^2}\frac{y^2}{b^2} + \sum_{m,n} \frac{A_{mn}}{\lambda_{mn}} \sin \omega_{x,m} x \cos \omega_{y,n} y$$

$$A_{mn} = \frac{8}{a^3 b^3} \left[\frac{\omega_{y,n}^2 b^2 - 2}{\omega_{y,n}^3} \cdot \frac{1 - (-1)^m}{\omega_{x,m}} + \frac{2 - \omega_{x,m}^2 a^2}{\omega_{x,m}^3 \omega_{y,n}} (-1)^m \right] (-1)^{n+1}$$

$$\omega_{x,m} = \frac{\pi m}{a}, \qquad \omega_{y,n} = \frac{(2n-1)\pi}{2b}, \qquad \lambda_{mn} = \omega_{x,m}^2 + \omega_{y,n}^2$$

Задание 11

Проинтегрировать методом Фурье уравнение колебаний струны в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} - 2ku_t$$

при заданных начальных условиях $u(0,x) = l\sinh(x/l)$, $u_t(0,x) = ax/l$, l — длина струны, Левый конец струны закреплен, правый свободен.

Решение:

Действуя по стандартной схеме, проведем разделение переменных, представив решение в виде $T(t)X(x)$. В этом случае это приводит нас к системе вида

$$\left\{ \begin{array}{c} T'' + 2kT' + \lambda a^2 T = 0 \\ -X'' = \lambda X \end{array} \right.$$

Как и в восьмой задаче, $\lambda > 0$.

Решением задачи Штурма с данными граничными условиями являются функции

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi(2n-1)x}{2l}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}\right)^2$$

Теперь займемся нахождением соответствующего T_n. Обозначим $\omega_n^2 = \lambda_n a^2$. Уравнение

$$T'' + 2kT' + \omega_n^2 T = 0$$

имеет три принципиально различных случая:

$$\left\{ \begin{array}{lcc} k > \omega & T^1 = \mathbf{e}^{(-k-\sqrt{k^2-\omega^2})t} & T^2 = \mathbf{e}^{(-k+\sqrt{k^2-\omega^2})t} \\ k = \omega & T^1 = \mathbf{e}^{-kt} & T^2 = t\mathbf{e}^{-kt} \\ k < \omega & T^1 = \cos(\sqrt{\omega^2-k^2}t)\mathbf{e}^{-kt} & T^2 = \sin(\sqrt{\omega^2-k^2}t)\mathbf{e}^{-kt} \end{array} \right.$$

Представим решение нашей задачи в виде ряда:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^1 T_n^1 + A_n^2 T_n^2\right) X_n$$

Из начальных условий мы получаем уравнения на коэффициенты:

$$\left\{ \begin{array}{c} A_n^1 T_n^1(0) + A_n^2 T_n^2(0) = \phi_n \\ A_n^1 (T_n^1)'(0) + A_n^2 (T_n^2)'(0) = \psi_n \end{array} \right.$$

Где ϕ_n и ψ_n — коэффициенты разложения начального отклонения и начальной скорости по собственным функциям. Рассмотрим коэффициенты этой системы:

	$T^1(0)$	$T^2(0)$	$T^{1'}(0)$	$T^{2'}(0)$
$k > \omega$	1	1	$-k - \sqrt{k^2-\omega^2}$	$-k + \sqrt{k^2-\omega^2}$
$k = \omega$	1	0	$-k$	1
$k < \omega$	1	0	$-k$	$\sqrt{\omega^2-k^2}$

Определитель системы не равен нулю, поэтому она всегда разрешима. Мы показали, что решение нашей задачи представляется в виде ряда и привели алгоритм поиска коэффициентов. Теперь выразим коэффициенты в более простой форме.

$$\phi_n = \frac{2}{l}\int_0^l u(x,0)X_n dx = \frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1}$$

$$\psi_n = \frac{2}{l}\int_0^l u_t(x,0)X_n dx = \frac{8a}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1}$$

Решая систему уравнений мы находим коэффициенты разложения:

$$\begin{array}{lll}
k > \omega_n \;:\; & A_n^1 = \frac{(\sqrt{k^2-\omega_n^2}-k)\phi_n-\psi_n}{2\sqrt{k^2-\omega_n^2}} & A_n^2 = \frac{(\sqrt{k^2-\omega_n^2}+k)\phi_n+\psi_n}{2\sqrt{k^2-\omega_n^2}} \\
k = \omega_n \;:\; & A_n^1 = \frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1} & A_n^2 = \left(\frac{8a}{(2n-1)^2\pi^2} + k\frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}\right)(-1)^{n-1} \\
k < \omega_n \;:\; & A_n^1 = \frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1} & A_n^2 = \frac{\left(\frac{8a}{(2n-1)^2\pi^2}+k\frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}\right)}{\sqrt{\omega_n^2-k^2}}(-1)^{n-1}
\end{array}$$

Теперь мы можем написать редставление для u.

Ответ:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{ll}
k > \omega_n: & \left(\frac{(\sqrt{k^2-\omega_n^2}-k)\phi_n-\psi_n}{2\sqrt{k^2-\omega_n^2}}\mathbf{e}^{-\sqrt{k^2-\omega^2}t} + \frac{(\sqrt{k^2-\omega_n^2}+k)\phi_n+\psi_n}{2\sqrt{k^2-\omega_n^2}}\mathbf{e}^{\sqrt{k^2-\omega^2}t}\right)\mathbf{e}^{-kt} \\
k = \omega_n: & \left(\phi_n\mathbf{e}^{-kt} + (\psi_n + k\phi_n)t\mathbf{e}^{-kt}\right) \\
k < \omega_n: & \left(\phi_n\cos\sqrt{\omega_n^2-k^2}t\mathbf{e}^{-kt} + \frac{(\psi_n+k\phi_n)}{\sqrt{\omega_n^2-k^2}}\sin\sqrt{\omega_n^2-k^2}t\mathbf{e}^{-kt}\right)
\end{array}\right. \cdot \sin\left(\frac{\omega_n x}{a}\right)$$

где

$$\omega_n = \frac{\pi a(2n-1)}{2l}, \quad \phi_n = \frac{8l\cosh(1)}{4+(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1}, \quad \psi_n = \frac{8a}{(2n-1)^2\pi^2}(-1)^{n-1}$$

Задание 12

Найти распределение тепла в однородном стержне длины l при наличии источников тепла с плотностью $g(x,t) = Q\left(1 - \mathbf{e}^{-\beta t}\right) x\,(l-x)\,/l^2$. Начальное распределение температуры $f(x) = 0$, $0 \leqslant x < l/2$ $f(x) = T$, $l/2 \leqslant x \leqslant l$. Левый конец стержня теплоизолирован, на правом происходит излучениие тепла в среду с температурой T.

Решение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x,t)$$

Запишем граничные условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = -\sigma(u(l,t) - T)$$

Перед нами задача с неоднородными граничными условиями. Решение проведем в два этапа. Найдем функцию, удовлетворяюшую нашему уравнению с учетом источников тепла и неоднородности граничного условия. Обозначим эту функцию за v, тогда любое другое решение уравнения будет отличаться от v на решение уравнения свободного распространения тепла с однородными граничными условиями.

Действительно, пусть $u = v + w$, тогда:

$$\frac{\partial(v+w)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 (v+w)}{\partial x^2} + g(x,t), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x,t) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial(v+w)}{\partial x}(l,t) = -\sigma((v+w)(l,t) - T), \quad \frac{\partial v}{\partial x}(l,t) = -\sigma(v(l,t) - T) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x}(l,t) = -\sigma w(l,t)$$

$$\frac{\partial(v+w)}{\partial x}(0,t) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x}(0,t) = 0$$

Удовлетворение наччалоному условию достигается за счет функции w.

Как нам известно из решения четвертого задания, для решения уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

мы можем воспользоваться методом разделения переменных, откуда получаем:

$$\begin{cases} X = A\cos\omega x + B\sin\omega x \\ T = C\mathbf{e}^{-a^2\omega^2 t} \end{cases}$$

Подставим граничные условия. Из условия на левом конце следует, что $B = 0$, тогда из условия на правом конце мы получаем набор частот:

$$\tan\omega_n l = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Итак, мы получаем

$$X_n = \cos\omega_n x, \quad T_n = \mathbf{e}^{-a^2\omega_n^2 t}, \quad \tan\omega_n l = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Для системы функций X_n справедлива теорема Стеклова.

Теперь перейдем непосредственно к отысканию v. Заметим, что функция $v_1 = T$ удовлетворяет нашему уравнению и уничтожает неоднородное граничное условие. Нам надо найти v_2 с однородными граничными условиями, отвечающую наличию источников тепла.

$$g = Q\left(1 - \mathbf{e}^{-\beta t}\right) x\left(l - x\right)/l^2$$

Разложим g по собственным функциям.

$$g(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \qquad g_n(t) = \frac{\int_0^l g(x,t) X_n(x) dx}{\int_0^l X_n^2(x) dx}$$

Представив v_2 в виде

$$v_2 = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) X_n(x)$$

так-же как и в четвертой задаче мы получаем соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(V_n'(t) + \omega_n^2 a^2 V_n(t) - g_n(t)\right) X_n(x) = 0$$

которое, в силу единственности представления, очевидным образом превращается в систему

$$V_n'(t) + \omega_n^2 a^2 V_n(t) - g_n(t) = 0$$

При этом нам надо задаться некоторыми начальными условиями. Будем считать начальные условия нулевыми.

Найдем g_n:

$$g_n(t) = \frac{Q(1 - \mathbf{e}^{-\beta t})}{l^2} \frac{\int_0^l x(l-x)\cos\omega_n x dx}{\int_0^l \cos^2 \omega_n x dx} = \frac{Q(1 - \mathbf{e}^{-\beta t})}{\omega_n^3 l^2} \frac{2\sin\omega_n l - \omega_n l \cos\omega_n l - \omega_n l}{\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\omega_n^2 + \sigma^2}}$$

Как известно, решением уравнения на V_n с нулевым начальным условием является

$$V_n = \int_0^t \mathbf{e}^{-a^2\omega_n^2(t-\tau)} g_n(\tau) d\tau$$

Мы находим коэффициенты для v_2, а следовательно можем считать v_2 известным.

Теперь перейдем к отысканию w. Это — решение однородного уравнения. Представим его в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} A_n T_n X_n$$

Каждое слагаемое удовлетворяет уравнению, как и весь ряд. Следовательно вопрос встает только в выполнении начальных условий. Разберемся, какие начальные условия мы имеем. v_2 рассматривалась с нулевыми начальными условиями, следовательно, не внесла поправки. Что касается v_1, то она имела начальными условиями T, откуда получаем начальные условия для w:

$$\varphi(x) = f(x) - T$$

Раскладывая начальные условия находим

$$A_n = \varphi_n = \frac{\int_0^l \varphi(x)\cos\omega_n x dx}{\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}} = -\frac{T\sin\frac{\omega_n l}{2}}{\omega_n\left(\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}\right)}$$

Собирая все вместе можно написать ответ:

Ответ:

$$u(x,t) = T - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{T\sin\frac{\omega_n l}{2}}{\omega_n\left(\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}\right)}\cos(\omega_n x)\mathbf{e}^{-a^2\omega_n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t \mathbf{e}^{-a^2\omega_n^2(t-\tau)}g_n(\tau)d\tau\cos(\omega_n x)$$

где

$$g_n(t) = \frac{Q(1-\mathbf{e}^{-\beta t})}{\omega_n^3 l^2}\frac{2\sin\omega_n l - \omega_n l\cos\omega_n l - \omega_n l}{\frac{l}{2} + \frac{\sigma}{\omega_n^2+\sigma^2}}, \qquad \tan\omega_n l = \frac{\sigma}{\omega_n}$$

Задание 13

Решить задачу о колебаниях "секторной"мембраны $\{0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \rho \leqslant R\}$ при условиях, что края закреплены, начальная скорость отсутствует, а начальное отклонение равно $R(1 - \rho/R)$

Решение:

Мы можем записать уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$$

Проведем разделение временной и пространственной переменных:

$$u = Z(p)T(t)$$

Откуда получаем систему

$$\begin{cases} T^{''} + \lambda a^2 T = 0 \\ -\Delta Z = \lambda Z \end{cases}$$

Теперь, пользуясь специфическим видом области — секторная мембрана — мы проведем разделение пространственных переменных. В полярных координатах оператор Лапласа выглядит как

$$\Delta Z = \frac{1}{r}\left(rZ_r^{'}\right)_r + \frac{1}{r^2} Z_{\varphi\varphi}^{''}$$

Мы можем записать

$$-\frac{1}{r}\left(rZ_r^{'}\right)_r - \frac{1}{r^2} Z_{\varphi\varphi}^{''} = \lambda Z$$

Теперь можно приступать к разделению переменных. Представим $Z = G(r)H(\varphi)$, откуда получаем

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rG^{'}\right)H - \frac{1}{r^2} G H^{''} = \lambda G H$$

откуда находим

$$\frac{-r\frac{d}{dr}\left(rG^{'}\right)}{G} - \lambda r^2 = \frac{H^{''}}{H} = -\gamma$$

Из начальных условий следует, что $\gamma > 0$ (случай нулевого $gamma$ нам не интересен, так как он соответствует нулевому собственному значению).

Из нулевых граничных условий уравнения $H^{''} + \gamma H = 0$ находим, что собственными функциями являются $H_n = \sin(4n\varphi)$, которым соответствуют собственные значения $\gamma_n = 16n^2$.

Для G имеем уравнение

$$-r^2 G^{''} - rG^{'} - \lambda r^2 G = -\gamma_n G,\ G(R) = 0$$

Определим знак λ. Домножим уравнение на $\overline{G}$ и проинтегрируем:

$$-\int_0^R \frac{d}{dr}\left(rG^{'}\right)\overline{G} dr + \gamma \int_0^R \frac{G\overline{G}}{r} dr = \lambda \int_0^R rG\overline{G} dr$$

разберемся с первым из интегралов

$$-\int_0^R \frac{d}{dr}\left(rG'\right)\overline{G}dr = -\left. rG'\overline{G}\right|_0^R + \int_0^R rG'\overline{G'}dr = \int_0^R rG'\overline{G'}dr$$

Поскольку $G(R) = 0$ в силу граничного условия, $G'(R)$ — ограничена. Кроме того мы полагаем, что $\sup|rG'|$ ограничен. Мы получили, что λ умноженная на положительный множитель равна сумме двух положительных. Откуда можно заявить о положительности λ.

В силу положительности λ мы можем перейти к новой переменной $\rho = \sqrt{\lambda}r$. Тогда наше уравнение преобретает вид

$$\rho^2 G'' + \rho G' + (\rho^2 - \nu^2)G = 0, \quad \nu_n^2 = \gamma_n$$

Это — уравнение Бесселя ν-того порядка. Его решениями являются функция Бесселя и функция Неймана. Но в нашей задаче функция Неймана должна быть отброшена в силу ее особенности в нуле. Мы использовали одно граничное условие. Перейдем ко второму. Обозначим через $\mu_{\nu k}$ k-тый нуль функции Бесселя ν-того порядка. Учтя нулевое граничное условие мы можем упорядочить наши функции: $\sqrt{\lambda}R = \mu_{\nu k}$, таким образом,

$$\lambda_{\nu k} = \frac{\mu_{\nu k}^2}{R^2}$$

Мы получаем в качестве собственных функций нашей задачи систему

$$G_{\nu k}(r) = \mathcal{J}_\nu\left(\frac{\mu_{\nu k}}{R}r\right)$$

Можно записать, что

$$Z_{nk}(r,\varphi) = G_{\nu_n k}(r)H_n(\varphi) = \mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\sin(4n\varphi), \quad \nu_n = 4n$$

Мы можем представить решение нашей задачи в виде

$$u = \sum_{n,k=1}^{\infty}\left(A_{nk}\cos\sqrt{\lambda_{nk}}at + B_{nk}\sin\sqrt{\lambda_{nk}}at\right)\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\sin(4n\varphi)$$

Мы видим, что

$$u(p,0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} A_{nk}\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\sin(4n\varphi)$$

$$u_t(p,0) = \sum_{n,k=1}^{\infty} B_{nk}\sqrt{\lambda_{nk}}a\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\sin(4n\varphi)$$

Раскладывая начальные условия мы найдем коэффициенты. Из того, что начальная скорость равна нулю получаем, что $B_{nk} = 0$. С коэффициентами A_{nk} дело обстоит сложнее. Разложим начальное отклонение по собственным функциям:

$$R(1 - r/R) = \sum_n A_n(r)\sin(4n\varphi), \qquad A_n(r) = \sum_k A_{nk}\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)$$

$A_n(r)$ легко находится:

$$A_n(r) = \frac{\int_0^{\pi/4} R(1-\frac{r}{R})\sin(4n\varphi)d\varphi}{\int_0^{\pi/4}\sin^2(4n\varphi)d\varphi} = \frac{4(R-r)}{\pi n}$$

Точно так же, но при этом не забывая, что нам придется иметь дело с другим скалярным произведением, мы находим коэффициенты A_{nk}.

$$A_{nk} = \frac{4}{\pi n}\frac{\int_0^R (R-r)\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\cdot rdr}{\int_0^R \mathcal{J}_{\nu_n}^2\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\cdot rdr}$$

Мы нашли коэффициенты и теперь запишем ответ

Ответ:

$$u(r,\varphi,t) = \sum_{n,k}\frac{4}{\pi n}\frac{\int_0^R (R-r)\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\cdot rdr}{\int_0^R \mathcal{J}_{\nu_n}^2\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\cdot rdr}\cos\frac{a\mu_{\nu_n k}t}{R}\mathcal{J}_{\nu_n}\left(\frac{\mu_{\nu_n k}}{R}r\right)\sin(4n\varphi), \quad \nu_n = 4n$$