На рисунке также изображена прямая $d: x = -\frac{p}{2}$ называемая директриссой параболы и точка $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы. Вектор $\bar{r} = \overline{FM}$ называют фокальным радиус-вектором точки $M(x, y)$ параболы.

Его модуль $r = |\bar{r}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Расстояние от точки $M(x, y)$ до директриссы, обозначаемое δ, будет (см. рис.) равно: $\delta = x + \frac{p}{2}$.

Теорема 2.12. Чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала параболе необходимо и достаточно, чтобы она была равноудалена от фокуса и директриссы: $r = \delta$.

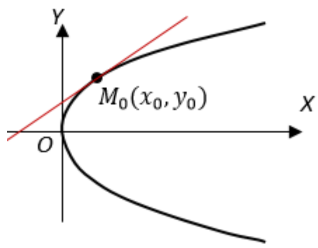
Доказательство. (1) Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Тогда из $r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ следует $r^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$. Подставляем $y^2 = 2px$:

$r^2 = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px = x^2 + px + \frac{p^2}{4} = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$.

Т.к. $x > 0$, $p > 0$, то $x + \frac{p}{2} > 0$ и из последнего равенства следует $r = x + \frac{p}{2}$.

Т.к. $\delta = x + \frac{p}{2}$, то $r = \delta$.

(2) Обратно. Пусть для некоторой точки $M(x, y)$ выполнено условие $r = \delta$. Надо доказать, что точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Из $r = \delta$ следует $\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \frac{p}{2}$ $\Rightarrow \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 - px = px \Rightarrow y^2 = 2px$, т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. □



Уравнение касательной

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит параболе. Находим уравнение касательной к параболе в точке M_0. Дифференцируем уравнение параболы $y^2 = 2px$:

$2y(x)y'(x) = 2p \Rightarrow y'(x) = \frac{p}{y(x)}$.

Полагая $y(x_0) = y_0$ получаем: $y'(x_0) = \frac{p}{y_0}$. Тогда уравнение касательной:

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow yy_0 - y_0^2 = px - px_0$. Поскольку точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит параболе, то $y_0^2 = 2px_0 \Rightarrow yy_0 = 2px_0 + px - px_0 = px + px_0$. В итоге получаем

$yy_0 = p(x + x_0)$ – уравнение касательной к параболе в точке $M_0(x_0, y_0)$ $(y_0 \neq 0)$.

2.7 Классификация алгебраических линий второго порядка

Алгебраической линией 2-го порядка мы назвали множество точек на плоскости и только их, которые удовлетворяют уравнению

$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_0 = 0. \qquad (1)$

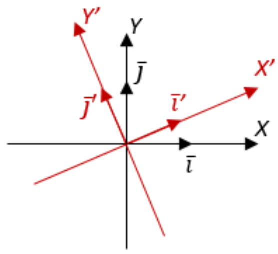
Замечание 2.11. (*Важное!*) Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ – уравнение окружности радиуса 1. Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не имеет действительных решений ($\varnothing$ решений) и на действительной плоскости ему не соответствует <u>ни одна кривая</u>. Однако в области комплексных чисел это уравнение имеет решение (например $x = i$, $y = 0$) и по аналогии с действительной окружностью говорят, что уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ есть уравнение мнимой окружности. Иногда мнимую окружность символически изображают на действительной плоскости пунктиром, хотя реальной линии нет (см. рис.):

действительная и мнимая окружности

Цель данной лекции – показать как уравнение (1) изменением системы координат можно "максимально упростить" и на этом основании дать классификацию уравнений 2-го порядка и, как следствие, линий 2-го порядка.

Рассмотрим уравнение (1), которое задано в (прямоугольной) декартовой системе координат OXY. Рассмотрим поворот этой системы на угол φ: $OXY \xrightarrow{\varphi} OX'Y'$:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{i}' = \cos\varphi \bar{i} + \sin\varphi \bar{j} \\ \bar{j}' = -\sin\varphi \bar{i} + \cos\varphi \bar{j} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \cos\varphi x' - \sin\varphi y' \\ y = \sin\varphi x' + \cos\varphi y' \end{array}\right\} \qquad (2)$$



Уравнение (1) в системе $OX'Y'$ будет:
$a_{11}(\cos\varphi x' - \sin\varphi y')^2 + 2a_{12}(\cos\varphi x' - \sin\varphi y')(\sin\varphi x' + \cos\varphi y') +$
$+ a_{22}(\sin\varphi x' + \cos\varphi y')^2 + 2a_{10}(\cos\varphi x' - \sin\varphi y') + 2a_{20}(\sin\varphi x' + \cos\varphi y') +$
$+ a_0 = 0.$

Раскрывая скобки и собирая коэффициенты при одинаковых степенях переменных x' и y', получаем

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_0 = 0, \qquad (1)'$$

где

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi, \qquad (3)$$

а вид остальных коэффициентов нас не интересует.

Утверждение 2.4. Существует такой угол поворота φ: $OXY \to OX'Y'$, что в "повернутой" системе $OX'Y'$ уравнение $(1)'$ не будет содержать произведения переменных, т.е. $a'_{12} = 0$.

Доказательство. Требуем, чтобы $a'_{12} = 0$. Из (3) следует

$$-a_{11}\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\cos\varphi = 0.$$

Делим обе части уравнения на $(-\cos^2\varphi)$, считая что $\cos\varphi \neq 0$, и получаем:

$$a_{12}tg^2\varphi + (a_{11} - a_{22})tg\varphi - a_{12} = 0.$$

Дискриминант уравнения $D = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0$. Следовательно, существуют два корня, которые отвечают двум углам поворота φ_1 и φ_2:

$$tg\varphi_1 = \frac{(a_{22} - a_{11}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}} \text{ и } tg\varphi_2 = \frac{(a_{22} - a_{11}) - \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}},$$

что доказывает данное утверждение. $\square$

Для записи формулы поворота (формулы (2)) нам нет необходимости знать значение угла φ, а необходимо знать $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Значение этих функций можно получить из известных значений $tg\varphi$:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\varphi = \pm\dfrac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}\\ \cos\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}\end{array}\right\} \qquad (*)$$

Итак, первый шаг в приведении уравнения (1) к наиболее простому (каноническому) виду есть:

> *Шаг 1*
> 1° Решаем уравнение (3). Берем одно из значений $tg\varphi_1$ или $tg\varphi_2$.
> 2° По $(*)$ записываем формулу поворота (2).

После выполнения Шага 1 в системе $OX'Y'$ уравнение (1) принимает вид

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_0 = 0. \qquad (1)'$$

С целью унификации обозначений систему $OX'Y'$ будем записывать как $O'X'Y'$ (здесь $O = O'$).

Следующий шаг – параллельный перенос системы $O'X'Y'$ в $O''X''Y''$. Предварительно:

Утверждение 2.5. Если в уравнении $(1)'$ $a'_{11} \neq 0$, то параллельным переносом вдоль оси $O'X'$ можно обнулить первую степень этой координаты.

Доказательство. Пусть $a'_{11} \neq 0$. Перепишем это уравнение в виде

$$a'_{11}\left((x')^2 + 2\frac{a'_{10}}{a'_{11}}x'\right) + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{20}y' + a'_0 = 0.$$

Дополняем до полного квадрата:

$$a'_{11}\left((x')^2 + 2\frac{a'_{10}}{a'_{11}}x' + \left(\frac{a'_{10}}{a'_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a'_{10}}{a'_{11}}\right)^2\right) + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{20}y' + a'_0 = 0 \;\Rightarrow$$

$$a'_{11}\left(x' + \frac{a'_{10}}{a'_{11}}\right)^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{20}y' + \left(a'_0 - \frac{(a'_{10})^2}{a'_{11}}\right) = 0.$$

Определяем параллельный перенос $O'X'Y' \to O''X''Y''$ формулой

$$\left.\begin{array}{l} x'' = x' + \dfrac{a'_{10}}{a'_{11}}\\ y'' = y'\end{array}\right\}$$

И это есть формула параллельного переноса системы $O'X'Y'$ вдоль оси $O'X'$ в новое начало $O''\left(-\dfrac{a'_{10}}{a'_{11}}; 0\right)$. В системе $O''X''Y''$ уравнение принимает вид

$$a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 + 2a''_{20}y'' + a''_0 = 0, \text{ где: } a''_{11} = a'_{11},\ a''_{22} = a'_{22},\ a''_{20} = a'_{20},\ a''_0 = a'_0 - \frac{(a'_{10})^2}{a'_{11}}.$$

Вид последнего уравнения доказывает данное утверждение. □

Замечание 2.12. Аналогичные утверждения будут иметь место для случаев, когда в $(1)'$ $a''_{22} \neq 0$ или $a''_{11}, a''_{22} \neq 0$.

Объединим эти результаты в виде итога выполнения второго шага.

> *Шаг 2*
> В результате параллельного переноса уравнение $(1)'$ может быть приведено к виду:
> (a°) $a'_{11} \neq 0, a'_{22} = 0 \;\Rightarrow\; a''_{11}(x'')^2 + 2a''_{20}y'' + a''_0 = 0 \quad (2a)$
> (b°) $a'_{22} \neq 0, a'_{11} = 0 \;\Rightarrow\; a''_{22}(y'')^2 + 2a''_{10}x'' + a''_0 = 0 \quad (2b)$
> (c°) $a'_{11}, a'_{22} \neq 0 \;\Rightarrow\; a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 + a''_0 = 0 \quad (2c)$

Рассмотрим каждый случай отдельно.

Случай (c°)

В уравнении ($2c$) оба коэффициента $a''_{11}, a''_{22} \neq 0$. Рассмотрим два возможных подслучая.

Подслучай ($c^\circ 1$)

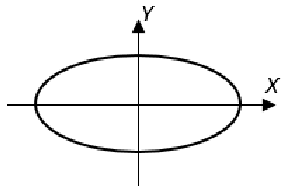
Пусть коэффициенты a''_{11} и a''_{22} одного знака. Здесь может быть три варианта.

Вариант ($c^\circ 1\alpha$): знак a''_0 противоположен знаку a''_{11} и a''_{22}. Тогда перепишем ($2c$):

$$a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 = -a''_0 \mid : (-a''_0) \;\Rightarrow\; \frac{(x'')^2}{-a''_0/a''_{11}} + \frac{(y'')^2}{-a''_0/a''_{22}} = 1,$$

причем в знаменателе стоят положительные величины, которые обозначим как: $-\dfrac{a''_0}{a''_{11}} = a^2$, $-\dfrac{a''_0}{a''_{22}} = b^2$. Тогда уравнение принимает вид (двойные штрихи у x'' и y'' опускаем):

(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – действительный эллипс

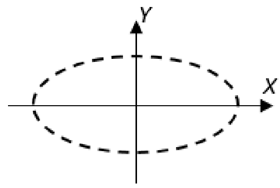


Вариант ($c^\circ 1\beta$): знак a''_0 совпадает со знаками a''_{11} и a''_{22}. Тогда перепишем ($2c$):

$$a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 = -a''_0 \mid : (+a''_0) \;\Rightarrow\; \frac{(x'')^2}{a''_0/a''_{11}} + \frac{(y'')^2}{a''_0/a''_{22}} = -1,$$

причем в знаменателе стоят положительные величины, которые обозначим как: $\dfrac{a''_0}{a''_{11}} = a^2$, $\dfrac{a''_0}{a''_{22}} = b^2$. Опуская штрихи получим уравнение:

(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – мнимый эллипс



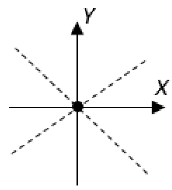
Это уравнение НЕ ИМЕЕТ действительных решений ($\varnothing$ решений в $\mathbb{R}$), но имеет комплексные решения. Это уравнение называется уравнением мнимого эллипса. На действительной плоскости изображения этой линии НЕТ, но схематично его отображаем картинкой (см. рис.)

Вариант ($c^\circ 1\gamma$). Здесь $a''_0 = 0$. Тогда уравнение ($2c$) примет вид: $a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 = 0$.

В области действительных чисел это уравнение имеет одно решение: $x'' = 0$, $y'' = 0$.

Всегда можно считать, что $a''_{11}, a''_{22} > 0$. Обозначим $a''_{11} = a^2$, $a''_{22} = b^2$ и уравнение (опуская штрихи) запишем как

(3) $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ – две мнимые пересекающиеся прямые



Над полем $\mathbb{C}$ это уравнение можно разложить на множители $(ax'' + by''i)(ax'' - by''i) = 0$.

Линейные уравнения: $l_1\colon ax'' + by''i = 0$ и $l_2\colon ax'' - by''i = 0$ в комплексной плоскости будут определять две (мнимые) прямые. Поэтому уравнение $a^2x^2 + b^2y^2 = 0$ называют уравнением двух мнимых прямых пересекающихся в действительной точке $O(0,0)$ – начало координат.

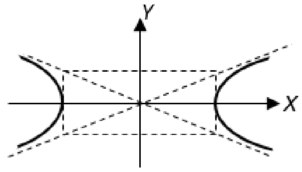
Подслучай ($c^\circ 2$)

Пусть теперь коэффициенты a''_{11} и a''_{22} имеют различные знаки. Относительно коэффициента a''_0 в уравнении ($2c$) возможны два варианта.

Вариант ($c^\circ 2\alpha$). Здесь $a''_0 \neq 0$. Предположим, что знак a''_0 противоположен знаку a''_{11}. Тогда перепишем ($2c$): $a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 = a''_0 \mid : a''_0 \;\Rightarrow\; \dfrac{(x'')^2}{a''_0/a''_{11}} + \dfrac{(y'')^2}{a''_0/a''_{22}} = 1$,

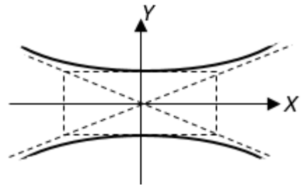
где $\dfrac{a''_0}{a''_{11}} = a^2 > 0$ и $\dfrac{a''_0}{a''_{22}} = -b^2 < 0$. Опуская штрихи получим уравнение:

(4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гипербола



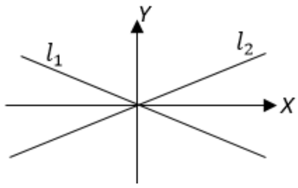
Если же знак a''_0 СОВПАДАЕТ со знаком a''_{11}, то аналогично рассуждая получим:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – гипербола, сопряжённая с $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$



Вариант ($c^\circ 2\beta$). Здесь $a''_0 = 0$. Тогда уравнение ($2c$) примет вид: $a''_{11}(x'')^2 + a''_{22}(y'')^2 = 0$. Пусть $a''_{11} > 0$ и $a''_{11} = a^2$. Тогда $a''_{22} < 0$ и $a''_{22} = -b^2$. Получаем уравнение:

(5) $a^2x^2 - b^2y^2 = 0$ – две пересекающиеся прямые



Разложим левую часть на множители: $(ax'' + by'')(ax'' - by'') = 0$. Тогда $l_1 \colon ax'' + by'' = 0$ и $l_2 \colon ax'' - by'' = 0$ – две пересекающиеся прямые в начале координат (см. рис).

Случай (b°)

Рассмотрим уравнение ($2b$): $a''_{22}(y'')^2 + 2a''_{10}x'' + a''_0 = 0$, где $a''_{22} \neq 0$.

Подслучай ($b^\circ 1$)

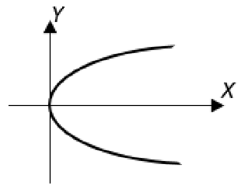
Пусть $a''_{10} \neq 0$. Запишем уравнение в виде: $a''_{22}(y'')^2 + 2a''_{10}\left(x'' + \dfrac{a''_0}{2a''_{10}}\right) = 0$.
Осуществим параллельный перенос вдоль оси $O''X''$: $O''X''Y'' \to O'''X'''Y'''$ по формуле:

$$\left.\begin{aligned} x''' &= x'' + \frac{a''_0}{2a''_{10}} \\ y''' &= y'' \end{aligned}\right\}$$

В системе $O'''X'''Y'''$ уравнение принимает вид: $a''_{22}(y''')^2 + 2a''_{10}x''' = 0 \mid : a''_{22} \;\Rightarrow$
$(y''')^2 = -\dfrac{2a''_{10}}{a''_{22}}x'''$. Здесь может возникнуть два варианта:

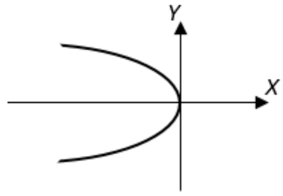
Вариант ($b^\circ 1\alpha$). Знаки a''_{10} и a''_{22} противоположны. Полагая $-\dfrac{a''_{10}}{a''_{22}} = p > 0$ и опуская штрих запишем уравнение как:

(6) $y^2 = 2px$ – парабола



Вариант $(b^\circ 1\beta)$. Знаки a''_{10} и a''_{22} одинаковые. Полагая здесь $\dfrac{a''_{10}}{a''_{22}} = p > 0$, запишем уравнение в виде:

$y^2 = -2px$ – парабола но с "хвостами влево"

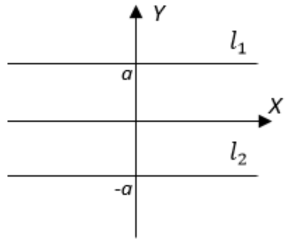


Подслучай $(b^\circ 2)$

Здесь $a''_{10} = 0$ и уравнение $(2b)$ есть: $a''_{22}(y'')^2 + a''_0 = 0$. Относительно коэффициентов может возникнуть три варианта.

Вариант $(b^\circ 2\alpha)$. Знаки a''_0 и a''_{22} противоположны: $\dfrac{a''_0}{a''_{22}} < 0$. Полагая $\dfrac{a''_0}{a''_{22}} = -a^2$, запишем уравнение в виде:

(7) $y^2 - a^2 = 0$ – две параллельные прямые

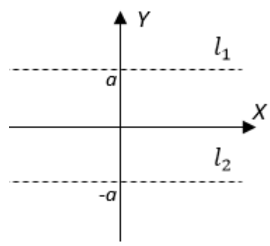


Уравнение распадается на два линейных уравнения: $l_1\colon y'' - a = 0$ и $l_2\colon y'' + a = 0$ – говорим, что кривая распадается на две параллельные прямые.

Вариант $(b^\circ 2\beta)$. Знаки a''_0 и a''_{22} совпадают и уравнение принимает вид: $(y'')^2 + a^2 = 0$.

Над полем $\mathbb{C}$ это уравнение разлагается на множители $(y'' - ai)(y'' + ai) = 0$ и говорим, что кривая распадается на две мнимые прямые.

(8) $y^2 + a^2 = 0$ – две мнимые параллельные прямые



Вариант $(b^\circ 2\gamma)$. Здесь $a''_0 = 0$ и уравнение $(y'')^2 = 0$ разлагается на два одинаковых линейных множителя: $y \cdot y = 0$. Каждому множителю отвечает прямая и в итоге для этого случая получаем, что кривая распадается на две слившиеся прямые.

Случай (a°)

Здесь исходное уравнение есть: $a''_{11}(x'')^2 + 2a''_{20}y'' + a''_0 = 0$, где $a''_{11} \neq 0$.

Исследование происходит точно также как в случае (b°). В итоге мы получим уравнения:

$x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ – парабола с "хвостами" вверх или вниз.

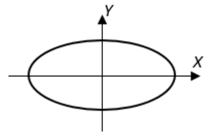
$x^2 - a^2 = 0$ – две прямые параллельные оси OY.

$x^2 + a^2 = 0$ – две мнимые параллельные прямые.

$x^2 = 0$ – две совпавшие прямые.

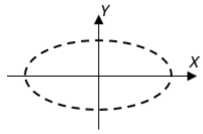
Анализ всех случаев (a°), (b°), (c°) решает вопрос о классификации алгебраических уравнений 2-й степени. Рассмотрим ниже уравнения, которые называют КАНОНИЧЕСКИМИ уравнениями и соответствующие им кривые:

(1) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a \geqslant b > 0 \end{array}\right\}$



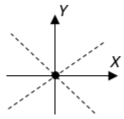
Действительный эллипс

(2) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 \\ a \geqslant b > 0 \end{array}\right\}$



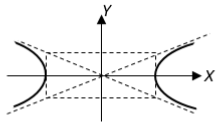
Мнимый эллипс

(3) $\left.\begin{array}{l} a^2x^2 + b^2y^2 = 0 \\ a \geqslant b > 0 \end{array}\right\}$



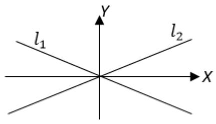
Две мнимые пересекающиеся прямые

(4) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ a, b > 0 \end{array}\right\}$



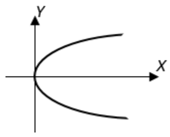
Гипербола

(5) $\left.\begin{array}{l} a^2x^2 - b^2y^2 = 0 \\ a \geqslant b > 0 \end{array}\right\}$



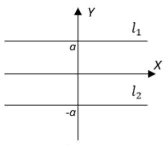
Две пересекающиеся прямые

(6) $\left.\begin{array}{l} y^2 - 2px = 0 \\ p > 0 \end{array}\right\}$



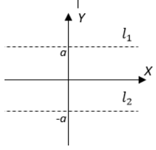
Парабола

(7) $\left.\begin{array}{l} y^2 - a^2 = 0 \\ a > 0 \end{array}\right\}$



Две параллельные прямые

(8) $\left.\begin{array}{l} y^2 + a^2 = 0 \\ a > 0 \end{array}\right\}$



Две мнимые параллельные прямые

(9) $\left. y^2 = 0 \right\}$ Две слившиеся прямые, совпадающие с осью OX

Вопрос: Можно ли каждое алгебраическое уравнение 2-й степени (алгебраическую кривую 2-го порядка) привести к каноническому виду? В процессе выполнения Шага 1 (поворот) и Шага 2 (параллельный перенос) мы получаем уравнения: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, где $a < b$; $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$; $x^2 \pm a^2 = 0$; $y^2 + 2px = 0$ $(p > 0)$ и т.д., которые не являются каноническими, т.е. не попадают в перечисленный выше список (1)-(9). В этом случае есть ещё один, Шаг 3, состоящий в дополнительной замене координат. Например, для уравнения $x^2 + 2py = 0$ $(p > 0)$ применяется замена $x^* = -y$, $y^* = x$. Тогда в системе OX^*Y^* уравнение принимает канонический вид: $(y^*)^2 - 2px^* = 0$ $(p > 0)$.

Вывод. В результате выполнения шагов 1 и 2 и (если необходимо) 3 каждую кривую 2-го порядка можно привести к каноническому виду. Всего существует (включая мнимые) 9 кривых второго порядка.