Атомная физика

Лекция 2

М.Ю. Рябикин

канд. физ.-мат. наук, в.н.с. ИПФ РАН

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ВШОПФ

2025

Тепловое излучение

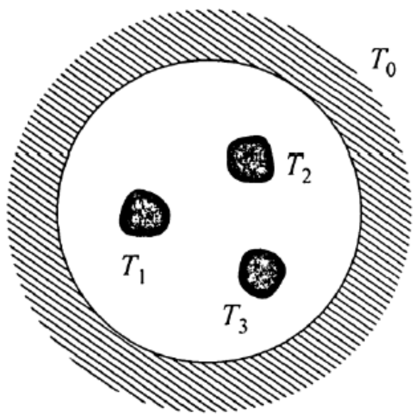
(часть 1)

Излучение ЭМ волн нагретыми телами.

Тепловое излучение и его природа.

Смещение максимума теплового излучения в область более высоких частот при повышении температуры.

Равновесное излучение



Начальное состояние: $T_1 \neq T_2 \neq T_3 \neq \ldots$

Теплообмен путем излучения и поглощения

$\rightarrow$ равновесное состояние: $T_1 = T_2 = T_3 = \ldots T_0$

$\rightarrow$ можно оставить лишь полость.

В равновесии: $\forall\, ds$ на внутренней оболочке

количество поглощаемой энергии = количеству излучаемой энергии $\forall\, dt$, $\forall\, d\omega$, $\forall$ направления и $\forall$ поляризации.

Это называется ***равновесным излучением.***

T – единственный параметр, характеризующий равновесное состояние.

Не любое излучение является тепловым или равновесным.

Энергетические характеристики теплового излучения

Спектральные и интегральные характеристики.
Шкалы частот и длин волн.

Спектральная плотность энергии:

$\rho_\omega d\omega$ – энергия поля в единице объема в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$

$\rho_\lambda d\lambda$ – энергия поля в единице объема в интервале длин волн от λ до $\lambda + d\lambda$

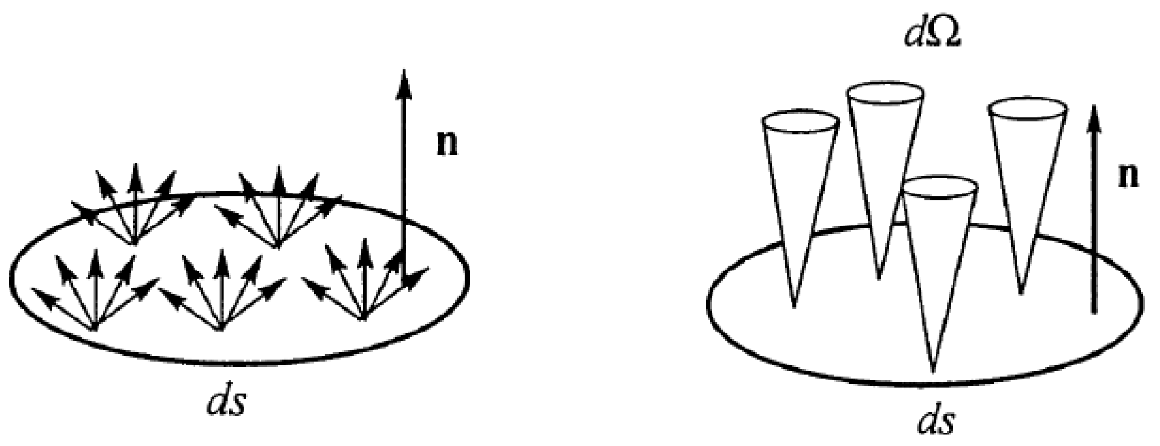
Объемная плотность энергии:

$$U = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega \quad \text{или} \quad U = \int_0^\infty \rho_\lambda d\lambda$$

Бывает удобно использовать величины, характеризующие не энергию в объеме тела, а энергию, излучаемую телом вовне.

Удельная интенсивность излучения:

I – энергия равновесного теплового излучения, проходящего в единицу времени через произвольную единичную площадку внутри единичного телесного угла с осью, перпендикулярной площадке.



Энергия равновесного теплового излучения, проходящего за время dt через произвольную площадку ds внутри телесного угла $d\Omega$ с осью, ***перпендикулярной*** площадке:

$$dW = I\, ds\, d\Omega\, dt \qquad (0.1)$$

Соответствующие спектральные интенсивности:

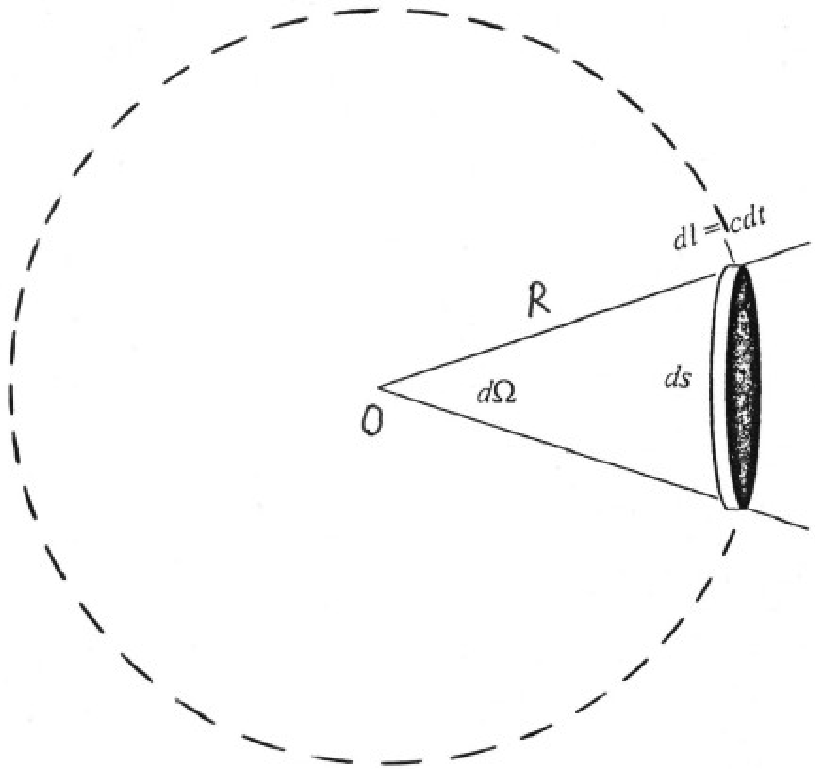
$$I = \int_0^\infty I_\omega d\omega = \int_0^\infty I_\lambda d\lambda \qquad (0.2)$$

Если ось телесного угла $d\Omega$ составляет угол θ с нормалью к площадке:

$$dW_\theta = I \cos\theta\, ds\, d\Omega\, dt\,. \qquad (0.1.1)$$

$\cos\theta\, ds$ – «видимая величина площадки» ds.

Связь величин *U* и *I*



Возьмем площадку ds, соответствующую телесному углу $d\Omega$.

Расстояние, которое проходит испущенный из точки О свет за время dt:

$dl = cdt \;\rightarrow\; dt = dl / c$.

$\rightarrow$ Энергия излучения, проходящего через площадку за время dt:

$dW_i = I\, ds\, d\Omega\, dl / c = I\, dV\, d\Omega / c$ (так как $dV = ds\, dl$).

С другой стороны, из определения объемной плотности энергии излучения:

$$dW = U\,dV \quad \to I\,d\Omega / c = U_i$$

– доля объемной плотности энергии поля, излучаемая внутрь телесного угла $d\Omega$.

Интегрируем по полному телесному углу ($U = \sum\limits_{i\,(\Omega=4\pi)} U_i$) →

$$\frac{4\pi I}{c} = U \qquad (0.3)$$

Для спектральных характеристик:

$$\frac{4\pi I_\omega}{c} = \rho_\omega \quad \text{или} \quad \frac{4\pi I_\lambda}{c} = \rho_\lambda \qquad (0.4)$$

Закон Кирхгофа

Рассмотрим тело, способное излучать и поглощать тепловое излучение. Пусть тело непрозрачно (например, за счет больших размеров). Энергия, излучаемая в диапазоне от ω до $\omega + d\omega$ за dt с площадки ds внутрь телесного угла $d\Omega$ с осью, составляющей угол θ с нормалью к площадке ds:

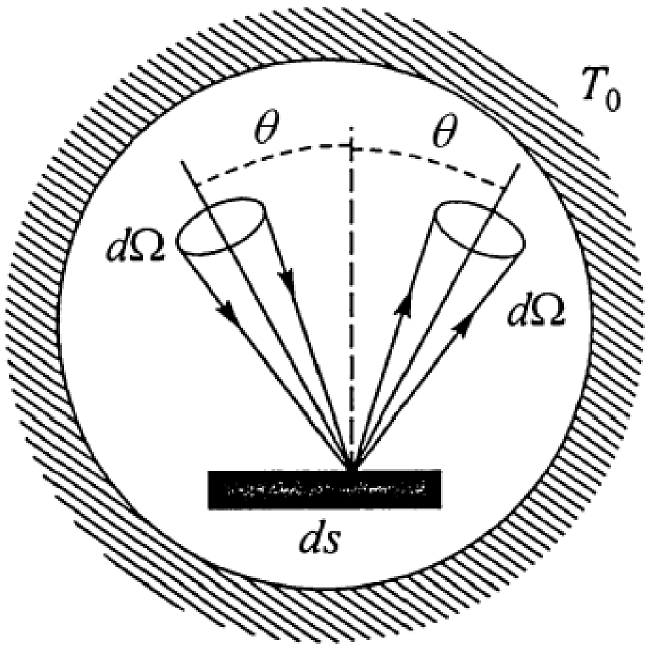
$$dW_{\omega,\omega+d\omega} = E_\omega \cos\theta \, d\Omega \, ds \, dt \, d\omega \,. \qquad (0.5а)$$

E_ω – излучательная способность тела в интервале от ω до $\omega + d\omega$ в направлении, определяемом углом θ.

Введем поглощательную способность тела в интервале от ω до $\omega + d\omega$ в направлении, определяемом углом θ, как поглощаемую телом долю энергии падающего излучения (безразмерная величина):

$$A_\omega = \frac{W_{\text{погл}}(\omega)}{W_{\text{пад}}(\omega)} \,. \qquad (0.5б)$$

Найдем связь между E_ω и A_ω для заданного тела. Эти величины характеризуют лишь поверхность рассматриваемого тела и не зависят от внешних условий, в том числе от излучения.



Энергия, падающая в диапазоне от ω до $\omega + d\omega$ за dt на площадку ds:

$$I_\omega \cos\theta \, ds \, d\Omega \, dt \, d\omega. \qquad (0.6)$$

Поглощаемая часть: $A_\omega I_\omega \cos\theta \, ds \, d\Omega \, dt \, d\omega$.

Отражаемая часть: $(1 - A_\omega) I_\omega \cos\theta \, ds \, d\Omega \, dt \, d\omega$.

Излучаемая энергия: $E_\omega \cos\theta \, d\Omega \, ds \, dt \, d\omega$.

Полная энергия, исходящая за dt от площадки ds внутри телесного угла $d\Omega$:

$$\left[(1 - A_\omega) I_\omega + E_\omega\right] \cos\theta \, ds \, d\Omega \, dt \, d\omega. \qquad (0.7)$$

Излучение равновесное $\to \left[(1-A_\omega)\, I_\omega + E_\omega\right] = I_\omega$. Или:

$$I_\omega = \frac{E_\omega}{A_\omega}\,. \qquad (0.8)$$

Поскольку I_ω характеризует равновесное излучение в полости и не зависит от присутствия каких-либо тел, а определяется только ω и T, то и правая часть (0.8) тоже определяется только ω и T.

$\downarrow$

Отношение излучательной способности к поглощательной способности тела $\frac{E_\omega}{A_\omega}$ для все тел одинаково и зависит только от температуры и частоты.

Это закон Кирхгофа (1859).

Абсолютно черное тело

Рассмотрим идеализированное тело с $A_\omega = 1$. Такое тело называют абсолютно черным телом (АЧТ).

Абсолютно черное, как и $\forall$ нагретое тело – источник теплового излучения.

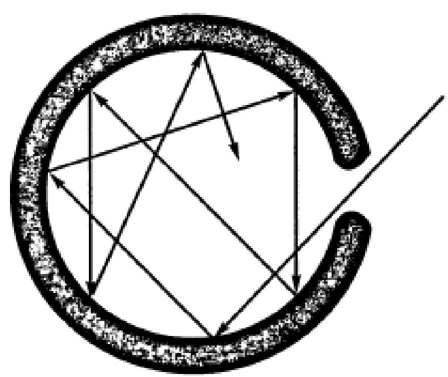
Введем обозначение e_ω для излучательной способности АЧТ $\to$

$I_\omega = e_\omega \to$ з-н Кирхгофа в виде

$$\frac{E_\omega}{A_\omega} = e_\omega . \qquad (0.9)$$

Отношение излучательной способности к поглощательной способности для любого тела есть универсальная функция температуры и частоты $e_\omega(T, \omega)$, равная излучательной способности абсолютно черного тела.

Простейшая модель АЧТ:



Противоречие между названием и свойствами АЧТ (способность излучать, иметь любой цвет (в зависимости от T)).
«Абсолютно черное» ***не означает***, что тело ничего не излучает!!!

Примеры материалов, близких к АЧТ.

- сажа (A_ω до 0.96), черный бархат, черная шерсть животных (важна пористость поверхности).

Самый «черный» материал на сегодняшний день: ***Vantablack*** (A_ω =0.99965) – углеродные нанотрубки, насажденные вертикально на алюминиевую подложку (Vertically Aligned NanoTube Arrays + Black).

«***Серые***» тела: A_ω зависит от T, но не от ω.

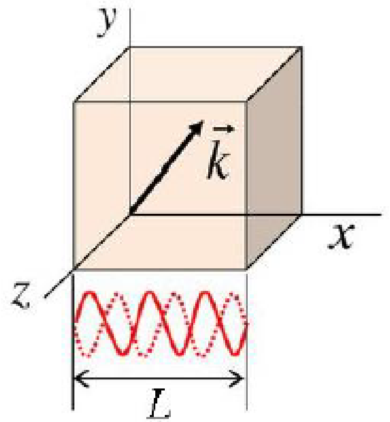
Спектр СТ – как у ЧТ, но яркость ниже (см. (0.9), $A_\omega = \text{const} < 1$).

Возможно лишь в ограниченной области частот и температур.
СТ в видимом диапазоне: каменный уголь (A_ω =0.80 при T= 400–900 К).

Спектр равновесного излучения

Рассмотрим замкнутую полость со стенками, удерживаемыми при $T = \mathrm{const}$. Задача – вычислить ρ_ω как функцию от T.

Формула Рэлея-Джинса



Простой случай – ЭМ поле в кубическом объеме с зеркальными стенками (длина каждой стенки=L). Произвольное состояние ЭМ поля в полости – суперпозиция стоячих волн («полевых мод»).

$$\rho_\omega d\omega = \langle \varepsilon_\omega \rangle dn_{d\omega}$$

Число полевых мод $dn_{d\omega}$ в интервале $(\omega,\ \omega + d\omega) = ?$

***1D случай*.**

Стоячая волна удовлетворяет условию

$$n\frac{\lambda}{2} = L \qquad (1.1)$$

$$\lambda \to \mathbf{k} = \mathbf{e}_x \frac{2\pi}{\lambda} \to$$

$$n_x = \frac{L}{\pi} k_x \qquad (1.2)$$

В интервале (k_x , $k_x + dk_x$) укладывается dn_x нормальных колебаний поля:

$$dn_x = \frac{L}{\pi} dk_x \qquad (1.3)$$

Стоячие волны $\rightarrow$ бегущие волны.

Стоячая волна – суперпозиция 2х встречных бегущих волн $\rightarrow$

$$dn_x = \frac{L}{2\pi} dk_x \,, \qquad (1.4)$$

$$k_x \in (-\infty, +\infty)$$

***3D случай*.**

$$dN = dn_x dn_y dn_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 dk_x dk_y dk_z = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 d^3k \qquad (1.5)$$

Делим на L^3 $\rightarrow$ число полевых мод в единице объема в интервале ($\mathbf{k}$, $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$):

$$dn_{dk} = d^3k/(2\pi)^3. \qquad (1.6)$$

С учетом двух независимых состояний поляризации:

$$dn_{dk} = 2d^3k/(2\pi)^3. \qquad (1.7)$$

Число различных типов колебаний в интервале $(\omega,\ \omega + d\omega) = ?$

$k = \dfrac{\omega}{c}$; интегрируем (1.7) по различным направлениям $\mathbf{k}$ $\rightarrow$

$$dn_{d\omega} = 2\frac{1}{(2\pi)^3}4\pi k^2 dk = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \qquad (1.8)$$

$$\downarrow$$

$$\rho_\omega d\omega = \langle \varepsilon_\omega \rangle dn_{d\omega} = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\langle \varepsilon_\omega \rangle d\omega \qquad (1.9)$$

($\langle \varepsilon_\omega \rangle$ – средняя энергия полевой моды с частотой ω).

$\langle \varepsilon_\omega \rangle = ?$ Задача сводится к вычислению средней энергии осциллятора, находящегося в термодинамическом равновесии со средой при температуре T.

По закону Больцмана, вероятность обнаружить у осциллятора энергию ε:

$$w(\varepsilon) = A\exp(-\varepsilon / k_B T) \qquad (1.10)$$

Средняя энергия:

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\int \varepsilon w(\varepsilon) d\varepsilon}{\int w(\varepsilon) d\varepsilon} = k_B T \qquad . \qquad (1.11)$$

Полученный ответ – не что иное как иллюстрация общего закона классической статистической механики – закона равнораспределения энергии по степеням свободы: на каждую колебательную степень свободы в состоянии термодинамического равновесия приходится энергия $k_B T/2$ (по $k_B T/2$ на колебания электрического и магнитного поля

$\rightarrow$ по $k_B T$ на одну моду).

(1.11) $\rightarrow$ (1.9) $\rightarrow$

$$\rho_\omega = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} k_B T \qquad (1.12)$$

(«***формула Рэлея-Джинса***», 1905).

Неудовлетворительность формулы Рэлея-Джинса.
Интеграл по частотам от (1.12) расходится:

$$U = \int_0^\infty \rho_\omega d\omega = \frac{k_B T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 d\omega \rightarrow \infty \qquad (1.13)$$

$\rightarrow$ объемная плотность энергии ЭМ поля бесконечно велика («***ультрафиолетовая катастрофа***», П. Эренфест).

Причины неудовлетворительности использованного подхода.

Некорректность результата (1.12) подтверждается и экспериментально полученной ***формулой Вина*** (В. Вин, 1896) для ρ_ω при больших ω:

$$\rho_\omega \sim \exp(-b\omega / k_B T) \qquad (1.14)$$

Формула Рэлея-Джинса оказывается верной лишь для НЧ (красной) части спектра излучения.

Формула Планка

Гипотеза Планка как революционный шаг в понимании особенностей распределения энергии по спектру равновесного излучения.

Формула Планка (1900) позволила правильно описать это распределение для всех ω.

Ключевое предположение: энергия любой конкретной полевой моды может принимать только строго определенный набор значений, кратных минимальному. Это, как оказывается, может приводить к нарушению закона равнораспределения энергии по степеням свободы – см. ниже.

Согласно Планку:

$$\varepsilon_n = n\varepsilon_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1.15)$$

ε_0 - минимальная порция (***квант***) энергии.

Проводим вычисления, аналогичные (1.11):

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n w(\varepsilon_n)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} w(\varepsilon_n)} \qquad (1.16)$$

$w(\varepsilon)$ по-прежнему определяется по Больцману.

Введя $\beta = 1/k_B T$, перепишем (1.16):

$$\langle \varepsilon_\omega \rangle = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} n\varepsilon_0 \exp(-n\varepsilon_0\beta)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_0\beta)} = -\frac{d}{d\beta} \ln \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\varepsilon_0\beta) = -\frac{d}{d\beta} \ln \frac{1}{1-\exp(-\varepsilon_0\beta)} = \frac{\varepsilon_0}{\exp(\varepsilon_0 / k_B T) - 1} \qquad (1.17)$$

При малых ε_0 снова получаем $\langle \varepsilon \rangle = k_B T$, но при $\varepsilon_0 / k_B T >> 1$ средняя энергия экспоненциально падает с ростом ε_0. Если ε_0 зависит от частоты, получим неравномерное распределение энергии по степеням свободы.

(1.17) $\rightarrow$ в (1.9) $\rightarrow$ новое выражение для ρ_ω.

Чтобы при $\omega \rightarrow \infty$ получалась формула Вина, необходимо потребовать, чтобы квант энергии осциллятора был пропорционален частоте:

$$\varepsilon_0 = \hbar\omega \qquad (1.18)$$

$\hbar$ – введенный Планком коэффициент пропорциональности, получивший название ***постоянной Планка*** (точнее - ***приведённой*** постоянной Планка).
Его значение: $\hbar = 1.05 \times 10^{-27}$ эрг с.

Используют также $h = 2\pi\hbar = 6.62 \times 10^{-27}$ эрг с (***"обычная"*** постоянная Планка).

С учетом (1.18) получаем:

$$\rho_\omega d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega^3}{\exp(\hbar\omega / k_B T) - 1} d\omega \qquad (1.19)$$

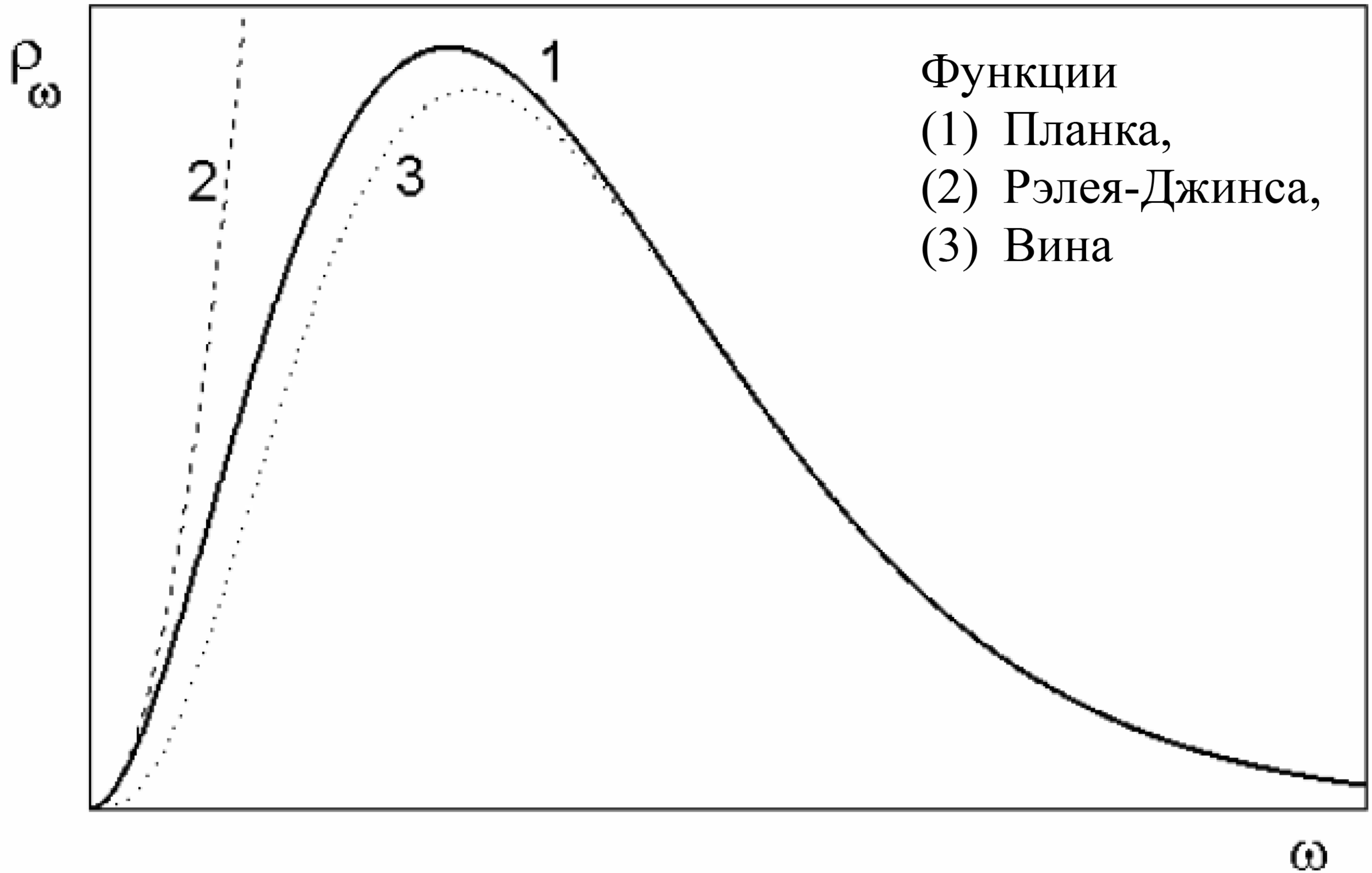
– ***формула Планка***.

Формула Планка содержит как частные случаи все установленные ранее законы для равновесного излучения. Так, формулы Рэлея-Джинса и Вина являются, соответственно, НЧ и ВЧ приближениями (1.19).

В НЧ пределе, раскладывая знаменатель (1.19) по показателю экспоненты, являющемуся малым параметром, получаем формулу Рэлея-Джинса.
В ВЧ пределе, пренебрегая в (1.19) единицей по сравнению с экспонентой, получаем

$$\rho_\omega d\omega = \frac{1}{\pi^2 c^3} \hbar\omega^3 \exp(-\hbar\omega / k_B T) d\omega \qquad (1.20)$$

т.е. формулу Вина (асимптотика при больших ω определяется экспонентой).



Максимум планковской функции:

$$\frac{\hbar \omega_{\max}}{k_B T} \approx 2.82, \qquad (1.21)$$

что согласуется с ***законом смещения Вина*** (Вин, 1893).