Глава 2

Аналитическая геометрия

2.1 Аффинное пространство и системы координат

В школьной геометрии рассматриваются «геометрические фигуры»: прямые на плоскости и в пространстве, плоскости в пространстве, окружности, треугольники, кубы, призмы и т.д. Все эти фигуры представляют совокупности точек, удовлетворяющих тем или иным требованиям. Например, окружность – множество всех точек, равноудалённых от данной, треугольник – множество всех точек, лежащих в области ограниченной тремя прямыми и т.д. Таким образом, базовым объектом в классической геометрии является понятие точки.

В векторной алгебре (Глава 1) не вводилось понятие точки, а основным понятием являлось понятие вектора. Векторы и точки, это объекты *различной природы*. Множество векторов и точек целесообразно объединить в одну конструкцию. Рассмотрим формализм этого альянса.

Пусть T есть множество, элементы которого будем называть точками и обозначать $A, B, C, \ldots \in T$. Пусть V векторное пространство, состоящее из векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots \in V$.

Определение 2.1. Аффинным пространством A^{aff} называем пару множеств (V, T), для которой выполнены аксиомы Вейля (G. Weil):

1° $\forall A, B \in T \;\; \exists \bar{x} \in V$, что $\bar{x} = \overline{AB}$;

2° $\forall A \in T$ и $\forall \bar{x} \in V \;\; \exists B \in T$, что $\overline{AB} = \bar{x}$;

3° $\forall A, B, C \in T$ справедливо равенство: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Замечание 2.1. Слово affinity (англ.) можно перевести как «сродственный». В этом смысле пространство V и множество T являются «родственниками» пространства A^{aff}.

По определению считаем, что размерность A^{aff} есть размерность векторного пространства V: $\dim A^{aff} = \dim V$. Тогда

Если $\dim A^{aff} = 1$, то A^{aff} называем аффинной прямой;

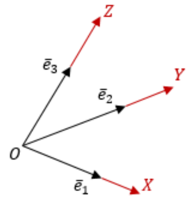
Если $\dim A^{aff} = 2$, то A^{aff} называем аффинной плоскостью (планиметрия);

Если $\dim A^{aff} = 3$, то A^{aff} называем аффинным пространством (стереометрия).

С практической точки зрения A^{aff} как симбиоз (V, T) означает, что объектами такого пространства будут **И** векторы **И** точки.

Рассмотрим аффинное пространство A^{aff}, $\dim A^{aff} = 3$. Выделим в этом пространстве некоторую точку $O \in T$, которую будем называть началом координат. В пространстве $V = V^3$ рассмотрим некоторый базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Репéром (repere франц.) называем точку и базис: $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.



Через векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ в том же направлении проводим оси (направленные прямые) X, Y, Z:

X – ось абсцисс,

Y – ось ординат,

Z – ось аппликат.

Понятие репера $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ или декартовой системы координат $OXYZ$ (иногда пишут XYZ) это тождественные понятия. Иногда нам выгодней использовать репер, а иногда говорить о декартовой системе координат.

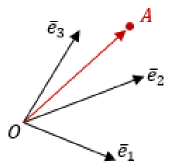
Для случая аффинной плоскости или аффинной прямой естественным образом понятие репера или декартовой системы координат будут следующими:

Для A^{aff}, $\dim A^{aff} = 2$ $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ – репер и OXY (или XY) – декартова система координат на плоскости.

Для A^{aff}, $\dim A^{aff} = 1$ $\{O, \bar{e}_1\}$ – репер и OX (или X) – декартова система координат на прямой.

В данном курсе АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ будем рассматривать только аффинные пространства (совокупность И векторов И точек), поэтому термин «аффинность» будем часто опускать.

Рассмотрим (аффинное) трёхмерное пространство и пусть $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ репер в нём.

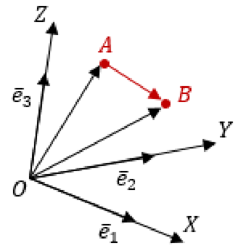


Введём понятие координат точки. Рассмотрим в пространстве точку A.

Определение 2.2. Радиус-вектором точки A называем вектор $\overline{OA}$ (см. рис).

Радиус-вектор $\overline{OA}$ разложим по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$:
$\overline{OA} = x_A\bar{e}_1 + y_A\bar{e}_2 + z_A\bar{e}_3$, причём коэффициенты разложения определены однозначно.

Определение 2.3. Координатами точки A в системе координат $OXYZ$ называют координаты её радиус-вектора. Пишем: $(\bullet)A(x_A; y_A; z_A)$.



Рассмотрим в пространстве две точки A и B. Согласно аксиоме 1° Вейля существует один вектор $\overline{AB}$.

Задача

Определить координаты вектора $\overline{AB}$.

Решение: $\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

Так как $(\bullet)O(0; 0; 0)$, то

$\overline{AB} = \{x_B; y_B; z_B\} - \{x_A; y_A; z_A\} = \{x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A\}$.

Следовательно, чтобы найти координаты вектора $\overline{AB}$ необходимо из конца вектора вычесть координаты начала.

Поставим ещё одну задачу, которую называют

ДЕЛЕНИЕ ОТРЕЗКА В ДАННОМ ОТНОШЕНИИ

Пусть в пространстве через точки A и B проведена прямая l. Отрезком $[A, B]$ называем все точки l лежащие между A и B.

Определение 2.4. Говорим, что точка M делит отрезок $[A, B]$ в отношении λ, если:

$$\overline{AM} = \lambda\overline{MB}.$$

Если $(\bullet)M \in [A, B]$, то $\overline{AM} \upuparrows \overline{MB} \Rightarrow \lambda > 0$. В этом случае говорим, что точка M делит $[A, B]$ внутренним образом. Если $(\bullet)M \notin [A, B]$, то $\overline{AM} \uparrow\downarrow \overline{MB} \Rightarrow \lambda < 0$ и говорим, что точка M делит $[A, B]$ внешним образом.

Пусть в пространстве зафиксирована декартова система $OXYZ$ и координаты точек в ней есть $(\bullet)A(x_A; y_A; z_A)$, $(\bullet)M(x_M; y_M; z_M)$ и $(\bullet)B(x_B; y_B; z_B)$.

Задача

Пусть точка M делит отрезок $[A, B]$ в отношении λ. Пусть известны координаты точек A и B. Найти координаты точки M.

Решение: $\overline{AM} = \{x_M - x_A; y_M - y_A; z_M - z_A\}$;

$\overline{MB} = \{x_B - x_M; y_B - y_M; z_B - z_M\} \Rightarrow \lambda\overline{MB} = \{\lambda(x_B - x_M); \lambda(y_B - y_M); \lambda(z_B - z_M)\}$.

$\overline{AM} = \lambda\overline{MB} \Rightarrow x_M - x_A = \lambda x_B - \lambda x_M \Rightarrow (1+\lambda)x_M = x_A + \lambda x_B$.

Аналогично, $(1+\lambda)y_M = y_A + \lambda y_B$ и $(1+\lambda)z_M = z_A + \lambda z_B$. В итоге получаем

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \\ y_M &= \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \\ z_M &= \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} \end{aligned}\right\} \quad \text{Формулы деления отрезка в данном отношении}$$

«Прикладной» характер этих формул будет рассмотрен на практических задачах.

Замечание 2.2. В случае (аффинной) плоскости формулы деления отрезка примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} \\ y_M &= \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} \end{aligned}\right\}$$

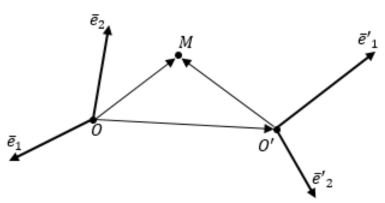
Изменение координат точки при изменении декартовой системы координат

Здесь этот вопрос подробно рассмотрим для случая плоскости. Случай пространства полностью аналогичен.

Пусть в плоскости даны два репера $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ и $\{O', \bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ или, что одно и тоже, две системы координат OXY и $O'X'Y'$. Будем считать, что задана матрица перехода $C = (c_{ij})$ от базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ к $\{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{e}'_1 &= c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2 \\ \bar{e}'_2 &= c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2 \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Пусть M некоторая точка на плоскости (см. рис.):



Пусть координаты точки M в системе OXY есть $M(x, y)$, а в системе $O'X'Y'$ её координаты есть $M(x', y')$, по определению координат точки это означает, что:

$\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2$;

$\overline{O'M} = x'\bar{e}'_1 + y'\bar{e}'_2$.

С учётом $(*)$

$\overline{O'M} = x'(c_{11}\bar{e}_1 + c_{21}\bar{e}_2) + y'(c_{12}\bar{e}_1 + c_{22}\bar{e}_2) = (c_{11}x' + c_{12}y')\bar{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\bar{e}_2$.

Пусть известны координаты начала O' в системе OXY: $O'(x_0, y_0)$ по определению координат точки $\overline{OO'} = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2$.

Из рисунка видно, что $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Следовательно, $x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 = x_0\bar{e}_1 + y_0\bar{e}_2 + (c_{11}x' + c_{12}y')\bar{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y')\bar{e}_2 = (c_{11}x' + c_{12}y' + x_0)\bar{e}_1 + (c_{21}x' + c_{22}y' + y_0)\bar{e}_2$.

Из единственности разложения вектора по базису получаем

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned}\right\}$$ Формула изменения координат точки при изменении системы координат

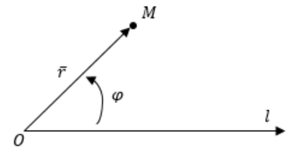
В случае пространства всё будет аналогично:

$$\left.\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0 \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0 \end{aligned}\right\}$$

Если на плоскости или в пространстве определить базис как систему *ортонормированных* векторов $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ или $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$, то соответствующие реперы $\{O, \bar{i}, \bar{j}\}$ или $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ будут определять ПРЯМОУГОЛЬНУЮ декартову систему координат OXY или $OXYZ$. Именно эти системы координат вам известны из школы.

Оказывается, что произвольная (в частности прямоугольная) декартова система координат не есть единственный способ задавать положение точки системой чисел. Различных систем координат существует строго говоря бесконечно много. Ниже мы рассмотрим некоторые из них.

ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ



Говорим, что на плоскости задана полярная система координат, если задана точка O, которую называем *полюсом* и исходящий из неё луч l, который называем *полярной осью* (см. рис.). Рассмотрим произвольную точку $M \neq O$ и определим вектор $\bar{r} = \overline{OM}$. Тогда положение точки M можно охарактеризовать двумя числами: расстоянием $r = |\bar{r}| = |\overline{OM}|$ и углом φ между вектором $\bar{r}$ и полярной осью. Такой угол называют *полярным углом* и его считаем положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки (как на рис.) и отрицательным в противном случае. В случае полюса: $M = O$ считаем $r = 0$, а угол φ не определённым.

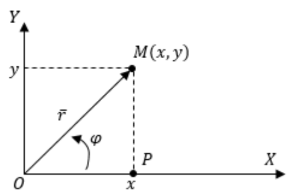
Определение 2.5. Полярными координатами точки M называем пару чисел: $(\bullet)M(r;\varphi)$

Если полярные координаты $(r;\varphi)$ заданы, то по ним положение точки M восстанавливается однозначно. Однако обратное НЕ ВЕРНО: полярный угол определён с точностью до кратного 2π. Так полярными координатами данной точки M будут:

$M(r;\varphi) = M(r;\varphi \pm 2\pi) = M(r;\varphi \pm 4\pi) = \ldots$

Чтобы убрать неоднозначность в задании координат точки иногда накладывают условие: $0 \leqslant \varphi < 2\pi$.

Установим связь между полярной и ПРЯМОУГОЛЬНОЙ декартовой системой координат OXY. Пусть полюс совпадает с началом O прямоугольной декартовой системы координат, а полярный луч направим по оси OX. Тогда (см. рис.)



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Формула $(*)$ выражает декартовы координаты точки $M(x;y)$ через полярные координаты. Обратно. Из $\triangle OMP$ следует

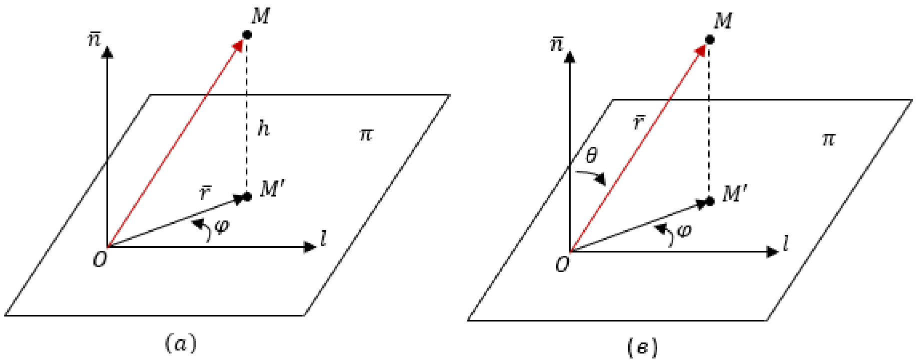
$$\left.\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}\right\} \qquad (**)$$

Формула (**) выражает полярные координаты r, φ через декартовы координаты. Заметим, что для нахождения φ, вообще говоря, необходимо использовать два последних равенства в (**) (подумайте почему!). В некоторых книжках из последних двух равенств делают вывод: $tg\,\varphi = \dfrac{y}{x}$ – это ошибка.

В решении ряда задач использование полярной системы координат оказывается гораздо эффективней, чем применение декартовой системы. Такие задачи у вас будут, например, в курсе МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА. Здесь мы на этом останавливаться не будем.

Цилиндрические и сферические координаты в пространстве

Рассмотрим в пространстве плоскость π и зададим на ней полярную систему координат. O – полюс, l – полярная ось. Пусть $\bar{n}$ некоторый вектор перпендикулярный к плоскости π (см. рис. а, в).



Цилиндрические координаты точки M это тройка чисел $(\bullet)M(r;\varphi;h)$, где $h = MM'$ и $MM' \perp \pi$ (см. рис. a).

Сферические координаты $(\bullet)M(r;\varphi;\theta)$ (см. рис. $в$).