

Билет №1

Обратный оператор: определение, теорема о существовании. Построение матрицы обратного оператора.

Билет №2

Линейные операторы, действия над ними. Матрицы линейных операторов, действия над ними.

Билет №3

Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, координаты, размерность пространства.

Билет №4

Подпространства. Прямая сумма подпространств. Связь базисов K и H_i если $K = \sum_{i=1}^p \oplus H_i$. Теорема о том, что если $H \subset K$, то $H_1 \oplus H = K$ для $H_1 = \{x \mid x \in K, x \perp H\}$.

Билет №5

Теорема о ранге и дефекте линейного оператора. Лемма о базисе.

Билет №6

Инвариантные подпространства линейных операторов. Вид матрицы при наличии инвариантных подпространств. Собственные векторы и их свойства (без нахождения).

Билет №7

Нахождение собственных векторов линейных операторов. Характеристическое уравнение. Нахождение собственных векторов в случае кратных корней. Диагонализуемые матрицы и операторы. Доказать, что если оператор A диагонализуем в K , то он диагонализуем в $H \subset K$, если H — инвариантно для A . Одновременная диагонализация 2^x и 3^x операторов, каждый из которых диагонализуем.

Билет №8

Пространства со скалярным произведением. Свойства скалярного произведения. Вывод неравенств

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||.$$

Билет №9

Сопряжённый оператор и его свойства. Матрица сопряжённого оператора (A^*). Существование A^* в конечномерном пространстве.

Билет №10

Эрмитовы операторы, симметричные операторы и их матрицы. Случай бесконечномерных пространств. Свойства собственных векторов и собственных значений эрмитовых (симметричных) операторов (кроме диагонализуемости).

Билет №11

Ортогональность векторов. Ортонормированные системы. Построение ортонормированной системы векторов из произвольной линейно-независимой системы.

Билет №12

Унитарные матрицы и операторы. Их свойства (кроме диагонализуемости).

Билет №13

Диагонализуемость эрмитовых операторов в конечномерных пространствах. Диагонализуемость семейства коммутирующих эрмитовых операторов.

Билет №14

Линейная и билинейная формы. Матрица билинейной формы, её изменение при переходе к новому базису. Симметричные билинейные формы и их диагонализуемость.

Билет №15

Квадратичные формы. Их матрицы. Диагонализуемость квадратичных форм. Индексы инерции и закон инерции квадратичных форм.

Билет №16

Диагонализуемость эрмитовых операторов. Возможность одновременной диагонализации семейства эрмитовых операторов.

Билет №17

Приведение матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме в случае, когда оператор имеет $k \geq 2$ различных собственных значений (случай $k = 1$ считать известным).

Билет №18

Метод Якоби приведения квадратичных форм к каноническому виду.

Билет №19

Диагонализуемость унитарных операторов. Ортогональные операторы и их свойства. Ортогональные матрицы. Ортогональные операторы в \mathbb{R}^3 .

Билет №20

Положительно определённые формы и операторы. Необходимое и достаточное условие положительной определённости квадратичных форм и положительно определённых операторов.

Билет №21

Гильбертово и предгильбертово пространства. Примеры. Гильбертовость конечномерного пространства в случае $F = \mathbb{C}$ и $F = \mathbb{R}$.

Билет №22

Метод Лагранжа для приведения квадратичных форм к каноническому виду. Нахождение нового базиса в методе Лагранжа.

Билет №23

Приведение матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме в случае, когда оператор имеет единственное собственное значение.
