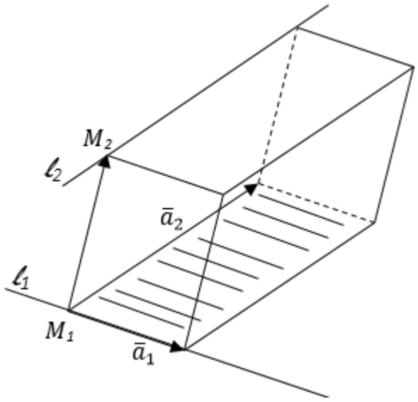
На векторах $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ строим параллелепипед объема $V = |(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|$.



В качестве основания выбираем нижнюю часть параллелепипеда. На рис. Она отмечена штриховкой. Его площадь $S = |[\bar{a}_1, \bar{a}_2]|$. Расстояние h между скрещивающимися прямыми выражается через объем V и площадь S как:

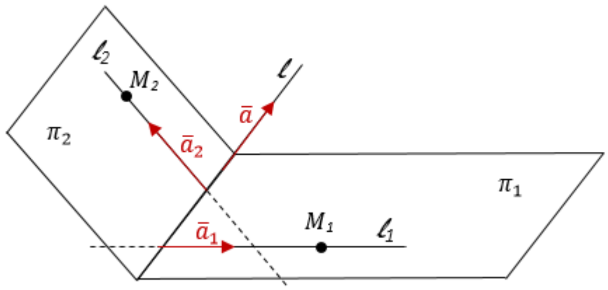
$$h = \frac{V}{S} = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|[\bar{a}_1, \bar{a}_2]|}.$$

Или в развернутой форме

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Задача 4. Написать уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

$$l_1\colon \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{q_1} = \frac{z - z_1}{r_1},$$
$$l_2\colon \frac{x - x_2}{p_2} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{r_2}.$$



Пусть $\bar{a}$ есть направляющий вектор l. В качестве $\bar{a}$ можно взять, например, $\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$. Действительно, из определения векторного произведения следует, что $\bar{a} \perp \bar{a}_1$ и $\bar{a} \perp \bar{a}_2$.

Пусть π_1 – плоскость, проходящая через прямые l и l_1 (см.рис.).

Для любой точки $M(x, y, z) \in \pi_1$ векторы $\overline{M_1M}$, $\bar{a}$, $\bar{a}_1$ компланарны. Согласно критерию компланарности векторов (равенство нулю смешанного произведения) это равносильно

$\pi_1\colon (\overline{M_1M}, \bar{a}, \bar{a}_1) = 0$ – уравнение плоскости π_1.

Аналогично, для произвольной точки $M(x, y, z) \in \pi_2$

$\pi_2\colon (\overline{M_2M}, \bar{a}, \bar{a}_2) = 0$ – уравнение плоскости π_2.

Общий перпендикуляр l есть $l = \pi_1 \cap \pi_2$. Тогда

$$l\colon \begin{cases} (\overline{M_1M}, \bar{a}, \bar{a}_1) = 0 \\ (\overline{M_2M}, \bar{a}, \bar{a}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{– уравнение общего перпендикуляра}$$

2.6 Кривые второго порядка

Здесь и далее OXY – прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим многочлен 2-го порядка от двух переменных:

$$\left.\begin{array}{l} F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_0, \\ \text{где } a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0 \end{array}\right\}$$

Появление коэффициентов 2 при некоторых слагаемых объясняется удобством дальнейших вычислений.

Определение 2.14. Кривой второго порядка или алгебраической линией второго порядка называем множество точек, удовлетворяющий уравнению $F(x, y) = 0$ и только их.

Основной задачей для нас будет являться классификация алгебраических линий 2-го порядка. Для алгебраических линий 1-го порядка классификация была максимально проста: Алгебраические линии 1-го порядка это прямые и только они. В случае кривых 2-го порядка ситуация гораздо сложнее. Начнём рассмотрение с наиболее "знаменитых" кривых 2-го порядка и обсудим их свойства.

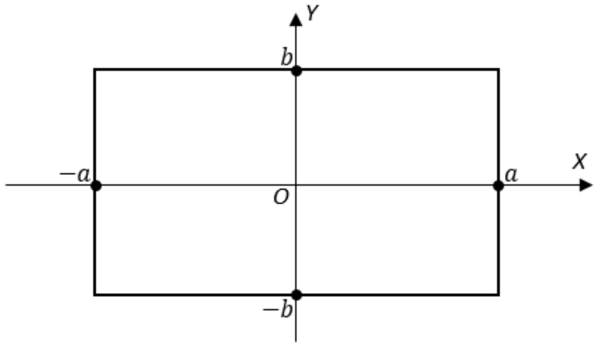
ЭЛЛИПС

Определение 2.15. Эллипсом называем кривую 2-го порядка уравнение которой в системе OXY есть:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ \text{где } a \geqslant b > 0\end{array}\right\} \qquad (1)$$

Исследование формы эллипса

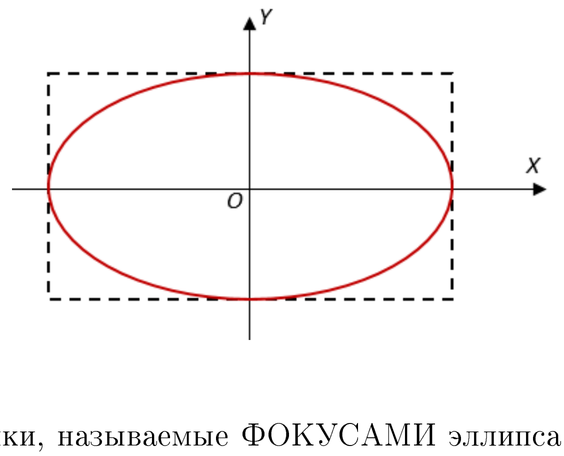
Из уравнения эллипса следует, что для любой точки $M(x, y)$ эллипса выполняются условия $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, т.е. все точки этой кривой 2-го порядка находятся внутри прямоугольника со сторонами $x = \pm a$, $y = \pm b$.



Такой прямоугольник называют ОСНОВНЫМ ПРЯМОУГОЛЬНИКОМ эллипса, а точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ вершинами эллипса. Т.к. $a \geqslant b$, то "горизонтальные" стороны основного прямоугольника имеют длину $2a$ и называются большой осью эллипса, а "вертикальные" стороны длины $2b$ – малой осью эллипса. Соответственно a и b – большая и малая полуось эллипса.

Из уравнения эллипса следует, что если точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, то точки $M'(-x, y)$, $M''(x, -y)$ и $M'''(-x, -y)$ также находятся на эллипсе. Последнее означает, что эллипс – кривая 2-го порядка симметричная относительно осей X, Y и начало координат – центр эллипса. Следовательно, достаточно исследовать кривую в I-й четверти $(x, y \geqslant 0)$ и по симметрии эту линию можно продолжить в II, III и IV четвертях. Из (1) получаем

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \;\Rightarrow\; y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$



и в I-й четверти это уравнение разрешается относительно y:

$$y = y(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Производная этой функции:

$$y' = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} < 0.$$

Т.к. $y(0) = b$ и $y(a) = 0$, то из условия $y' < 0$ следует, что на отрезке $[0, a]$ функция монотонно убывает от точки $(0, b)$ к точке $(a, 0)$.

С эллипсом связываются две замечательные точки, называемые ФОКУСАМИ эллипса. Определим (положительное) число $c \geqslant 0$ равенством:

$$c^2 = a^2 - b^2$$

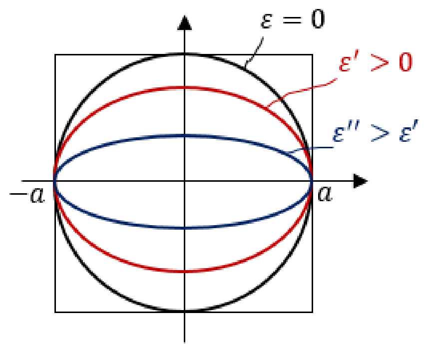
Зададим две точки $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ называемые правым и левым фокусами, соответственно. Введём ещё одну характеристику эллипса:

$$\varepsilon_э = \frac{c}{a} \text{ – эксцентриситет эллипса.}$$

Т.к. $c < a$, то

$$0 \leqslant \varepsilon_э < 1$$

Отметим, что если $\varepsilon_э = 0$, то $c = 0$, что означает $a = b$. Уравнение эллипса в этом случае перепишется в виде $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, т.е. $x^2 + y^2 = a^2$.



Определение 2.16. Окружность – это эллипс с нулевым эксцентриситетом.

Пусть в уравнении эллипса величина a фиксирована. Увеличение ε от 0 до 1 будет приводить к “сжатию” эллипса (вдоль оси OY). С этой точки зрения можно сказать, что величина эксцентриситета характеризует степень деформации эллипса.

Рассмотрим на эллипсе произвольную точку $M(x, y)$.

Определим векторы

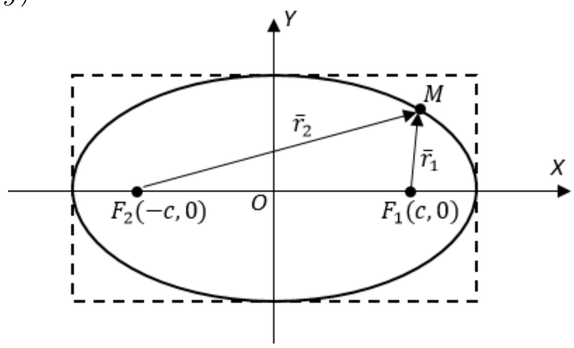
$\bar{r}_1 = \overline{F_1M}$ и $\bar{r}_2 = \overline{F_2M}$,

которые называем:

ФОКАЛЬНЫМИ РАДИУС-ВЕКТОРАМИ точки $M(x, y)$.

Модули этих векторов обозначаем как

$r_1 = |\bar{r}_1|$ и $r_2 = |\bar{r}_2|$.



Теорема 2.6 (О модулях радиус-векторов эллипса)**.** $r_1 = a - \varepsilon x$, $r_2 = a + \varepsilon x$.

Доказательство. $r_1 = |\bar{r}_1| = |\overline{F_1M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$. Тогда $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + {}$ $+ \dfrac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \dfrac{b^2}{a^2}x^2 = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 - 2cx + c^2 + b^2 = (\text{т.к. } c^2 = a^2 - b^2) =$ $= \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = (\text{т.к. } c = \varepsilon a) = \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon a x + a^2 = (\varepsilon x - a)^2 = (a - \varepsilon x)^2$.

Так как $x \leqslant a$ и $\varepsilon < 1$, то $a - \varepsilon x > 0$. Следовательно, $r_1 = a - \varepsilon x$.

Второе равенство $r_2 = a + \varepsilon x$ доказывается аналогично. □

Теорема 2.7 (Критерий принадлежности точки эллипсу)**.** Чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала эллипсу необходимо и достаточно $r_1 + r_2 = 2a$.

Доказательство. (1) Необходимость. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу. На основании предыдущей теоремы: $r_1 + r_2 = a - \varepsilon x + a + \varepsilon x = 2a$.

(2) Достаточность. Пусть для точки $M(x, y)$ выполнено $r_1 + r_2 = 2a$. Надо доказать, что точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу. Вычислим r_1 и r_2:

$r_1 = |\bar{r}_1| = |\overline{F_1M}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$,

$r_2 = |\bar{r}_2| = |\overline{F_2M}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$.

Тогда из $r_1 + r_2 = 2a$ следует $\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$. Или

$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$. Возводим обе части равенства в квадрат:

$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \quad \Rightarrow$

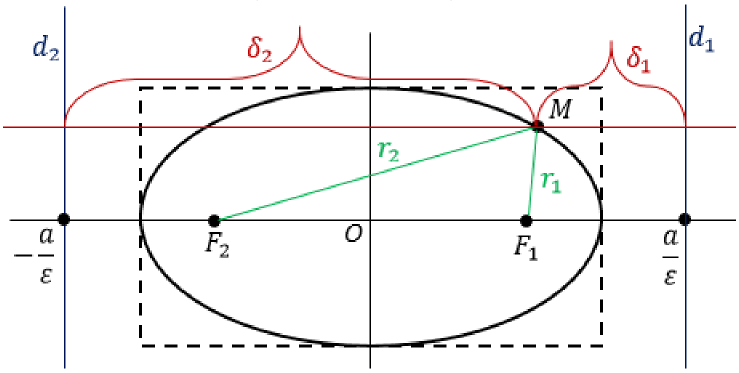
$-2cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + 2cx \quad \Rightarrow$

$a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a^2 + cx$. Возводим обе части равенства в квадрат:

$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4+2a^2cx+c^2x^2 \quad \Rightarrow$
$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+2a^2cx+c^2x^2 \quad \Rightarrow$
$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2 \quad \Rightarrow$
$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$. Так как $a^2-c^2=b^2$, то
$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Теперь делим на a^2b^2 и получаем
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, т.е. точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу. □

С эллипсом свяжем две прямые, называемые ДИРЕКТРИССАМИ:

$$d_1\colon x=\frac{a}{\varepsilon},\quad d_2\colon x=-\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{(см. рис.)}$$



Директриссы и фокусы, лежащие по одну сторону от OY называем соответствующими: d_1 и F_1 – соответствующие директрисса и фокус. Аналогично, d_2 и F_2. На приведённом выше рисунке расстояние от точки $M(x,y)$ до директрисы d_1 обозначено как δ_1. Расстояние от $M(x,y)$ до d_2 есть δ_2.

Теорема 2.8. Для того, чтобы точка $M(x,y)$ принадлежала эллипсу необходимо и достаточно чтобы отношение её расстояния до фокуса к расстоянию до соответствующей директриссы равнялось эксцентриситету эллипса:

$$\frac{r_1}{\delta_1}=\varepsilon=\frac{r_2}{\delta_2}.$$

Доказательство. Ранее была получена формула расстояния от точки $M^*(x^*,y^*)$ до прямой l общее уравнение которой $l\colon Ax+By+C=0$. Расстояние $=\dfrac{|Ax^*+By^*+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Рассмотрим в качестве l директриссу $d_1\colon x=\dfrac{a}{\varepsilon}$ общее уравнение которой $\varepsilon x-a=0$ ($A=\varepsilon$, $B=0$, $C=-a$). В качестве $M^*(x^*,y^*)$ рассматриваем точку $M(x,y)$. Поэтому $\delta_1=\dfrac{|\varepsilon x-a|}{\varepsilon}$.

По теореме о модулях радиус-векторов эллипса $r_1=|a-\varepsilon x|=|\varepsilon x-a|$.

Следовательно, $\dfrac{r_1}{\delta_1}=|\varepsilon x-a|\dfrac{\varepsilon}{|\varepsilon x-a|}=\varepsilon$.

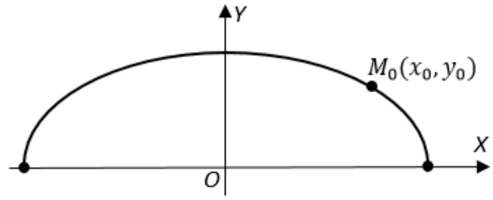
Другое равенство $\dfrac{r_2}{\delta_2}=\varepsilon$ доказывается аналогично. □

Уравнение касательной к эллипсу

Рассмотрим на эллипсе точку $M_0(x_0,y_0)$, где $y_0\neq 0$, т.е. точка M_0 не совпадает с вершинами эллипса $(a,0)$ и $(-a,0)$. Уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ удается разрешить относительно y в двух случаях:

(1) $y(x)\geqslant 0 \;\Rightarrow\; y(x)=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (верхняя часть эллипса);

(2) $y(x)\leqslant 0 \;\Rightarrow\; y(x)=-\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ (нижняя часть эллипса).



Рассмотрим первый вариант (см. рис).

Подставим $y(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ в уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y(x)^2}{b^2} = 1$ и дифференцируем обе части: $\dfrac{2x}{a^2} + \dfrac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0$. Подставим в это уравнение координаты точки $M_0(x_0, y_0)$: $\dfrac{2x_0}{a^2} + \dfrac{2y_0 y'(x_0)}{b^2} = 0$. Получаем:

$$y'(x_0) = -\frac{x_0}{a^2}\frac{b^2}{y_0}$$

Уравнение касательной к функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ есть (матем. анализ)
$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$

В нашем случае $y - y_0 = -\dfrac{x_0}{a^2}\dfrac{b^2}{y_0}(x - x_0) \Rightarrow a^2 y_0 y - a^2 y_0^2 = -b^2 x_0 x + b^2 x_0^2 \quad (*)$

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, то $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1 \;\Rightarrow\; b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$ и $(*)$ принимает вид: $a^2 y_0 y + b^2 x_0 x = a^2 b^2$. Делим на $a^2 b^2$ и получаем $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$

Абсолютно такие же выкладки «проходят» для второго случая – нижней части эллипса. Общий итог:

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y = 1 \text{ – уравнение касательной эллипса в точке } M_0(x_0, y_0) \ (y_0 \neq 0)$$

ГИПЕРБОЛА

Гиперболой называем кривую 2-го порядка, уравнение которой в системе OXY есть

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

Исследование формы гиперболы

Из (2) следует $y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \Rightarrow y(x) = \begin{cases} \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} & \text{для } y \geqslant 0 \\ -\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} & \text{для } y \leqslant 0 \end{cases}$

Область определения обеих функций (верхняя часть $y \geqslant 0$ и нижняя часть $y \leqslant 0$ гиперболы) $|x| \geqslant a$. Точки $(a, 0)$, $(-a, 0)$ называем *вершинами* гиперболы. Все точки кривой 2-го порядка для $x \geqslant a$ называем ПРАВОЙ ВЕТКОЙ гиперболы, а для $x \leqslant -a$ – ЛЕВОЙ ВЕТКОЙ гиперболы.

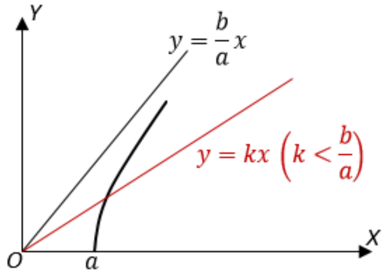
Замечание 2.10. Гипербола – кривая 2-го порядка, состоящая из двух веток, но это одна и та же кривая!

Из уравнения (2) следует, что если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то точки $M'(-x, y)$, $M''(x, -y)$ и $M'''(-x, -y)$ также лежат на гиперболе, т.е. гипербола – линия симметричная относительно координатных осей и начала координат. В силу симметрии, достаточно исследовать форму гиперболы в I-й четверти $(x \geqslant 0, y \geqslant 0)$:

$y = y(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ и $x \geqslant a$.

$y'(x) = \dfrac{b}{a}\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$ для $x > a$, следовательно, $y(x)$ возрастает при $a < x < +\infty$.

Рассмотрим точки пересечения гиперболы с прямой $y = kx$. Если точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют уравнению $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Тогда $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{k^2x^2}{b^2} = 1$, т.е. $b^2x^2 - a^2k^2x^2 = a^2b^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2 - a^2k^2} > 0 \;\Rightarrow\; b^2 - a^2k^2 > 0 \;\Rightarrow\; k^2 < \dfrac{b^2}{a^2}$. Т.к. рассматривается I-я четверть, то $k < \dfrac{b}{a}$



Вывод

Если $k < \dfrac{b}{a}$, то прямая $y = kx$ пересекает гиперболу в одной точке, если $\dfrac{b}{a} \leqslant k < +\infty$, то пересечений НЕТ.

Вычислим расстояние от точки $M(x, y)$ принадлежащей гиперболе (I-я четверть) до прямой $y = \dfrac{b}{a}x$.

Для этого приведем уравнение прямой к общему виду:

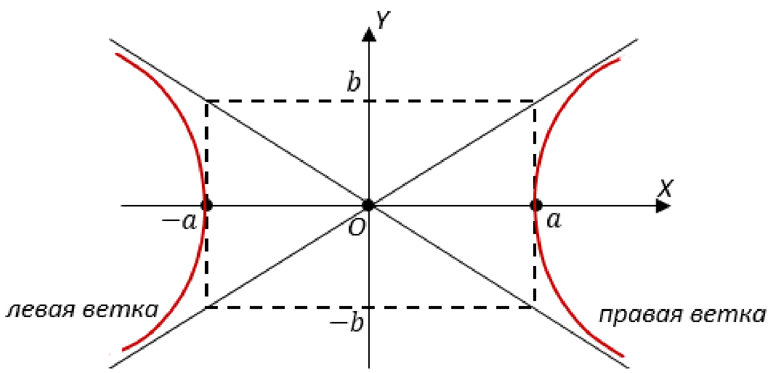
$bx + (-a)y + 0 = 0$ (здесь $A = b$, $B = -a$, $C = 0$) и по формуле расстояния от точки до прямой: $\dfrac{|Ax + By + c|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{|bx - ay(x)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \dfrac{|bx - b\sqrt{x^2 - a^2}|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Если обозначить $f(x) = bx - b\sqrt{x^2 - a^2}$, то

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \lim_{x\to+\infty} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) = b \lim \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{a^2b}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

Таким образом, при удалении точки M вправо расстояние от нее до прямой $y = \dfrac{b}{a}x$ неограниченно уменьшается, следовательно, $y = \dfrac{b}{a}x$ – АССИМПТОТА ГИПЕРБОЛЫ.

Распространяя (по симметрии) график на всю плоскость, мы получим вид гиперболы (см. рис):



Гипербола – кривая 2-го порядка, имеющая две ветки и две ассимптоты $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, которые проходят через противоположные вершины основного прямоугольника «шириной» $2a$ и «высотой» $2b$.

Для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ введем величину $c > 0$ равенством

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(не путать с одноименной величиной $c^2 = a^2 - b^2$ для эллипса!)

Определим фокусы гиперболы, как точки с координатами $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ и введем фокальные радиус-векторы

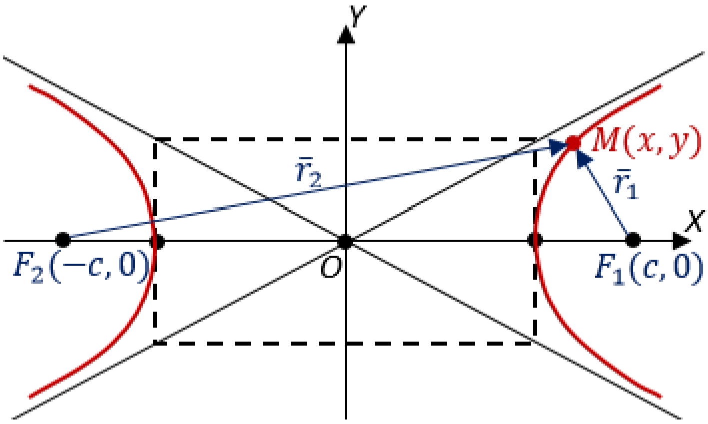
$\bar{r}_1 = \overline{F_1M}, \quad r_1 = |\bar{r}_1|$,

$\bar{r}_2 = \overline{F_2M}, \quad r_2 = |\bar{r}_2|$.

Для гиперболы введем понятие эксцентриситета $\varepsilon_{\text{г}}$:

$$\varepsilon_{\text{г}} = \frac{c}{a}$$

(т.к. здесь $c > a$, то $\varepsilon > 1$(!)).



Теорема 2.9 (О модулях радиус-векторов гиперболы)**.** $r_1 = |a - \varepsilon x|$, $r_2 = |a + \varepsilon x|$.

Доказательство. Разбиваем на два случая: для r_1 и для r_2.

Случай 1.

Так как $\bar{r}_1 = \{x - c, y\}$, то $r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ и $r_1^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2$. Подставляем $y = y(x)$: $r_1^2 = x^2 - 2cx + c^2 + \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = x^2 - 2cx + c^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2) =$ $= x^2 - 2cx + c^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - (c^2 - a^2) = a^2 - 2cx + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 - 2\varepsilon ax + \varepsilon^2 x^2 = (a - \varepsilon x)^2$.

Получаем, что $r_1 = |a - \varepsilon x|$.

Уточним это равенство. Рассмотрим два варианта:

(а) Точка $M(x, y)$ принадлежит правой ветке. Тогда $x \geqslant a$ и т.к. $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x < 0$.

(б) Точка $M(x, y)$ принадлежит левой ветке. Тогда $x \leqslant -a$ и т.к. $\varepsilon > 1$, то $a - \varepsilon x > 0$.

Следовательно, $r_1 = |a - \varepsilon x| = \begin{cases} \varepsilon x - a & \text{для правой ветки} \\ a - \varepsilon x & \text{для левой ветки} \end{cases}$

Случай 2.

Так как $\bar{r}_2 = \{x + c, y\}$, то $r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_2^2 = (x+c)^2 + y^2 = x^2 + 2cx + c^2 + y^2$. Подставляем $y = y(x)$: $r_2^2 = x^2 + 2cx + c^2 + \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) = x^2 + 2cx + c^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}(x^2 - a^2) =$ $= x^2 + 2cx + c^2 + \dfrac{c^2 - a^2}{a^2}x^2 - c^2 + a^2 = a^2 + 2cx + \dfrac{c^2}{a^2}x^2 = a^2 + 2\varepsilon ax + \varepsilon^2 x^2 = (a + \varepsilon x)^2$.

Получаем, что $r_2 = |a + \varepsilon x|$.

Уточним это равенство:

(а) Точка $M(x, y)$ принадлежит правой ветке. Тогда $x \geqslant a$ и т.к. $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x > 0$.

(б) Точка $M(x, y)$ принадлежит левой ветке. Тогда $x \leqslant -a$ и т.к. $\varepsilon > 1$, то $a + \varepsilon x < 0$.

Следовательно, $r_2 = |a + \varepsilon x| = \begin{cases} a + \varepsilon x & \text{для правой ветки} \\ -a - \varepsilon x & \text{для левой ветки} \end{cases}$ □

Теорема 2.10 (Критерий принадлежности точки гиперболе)**.** Точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда $|r_1 - r_2| = 2a$.

Доказательство. (1) Необходимость. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит гиперболе. Рассмотрим два случая:

(а) Точка $M(x, y)$ принадлежит правой ветке. Тогда $r_1 - r_2 = \varepsilon x - a - (a + \varepsilon x) = -2a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$.

(б) Точка $M(x,y)$ принадлежит левой ветке. Тогда $r_1 - r_2 = a - \varepsilon x - (-a - \varepsilon x) = 2a$ и $|r_1 - r_2| = 2a$.

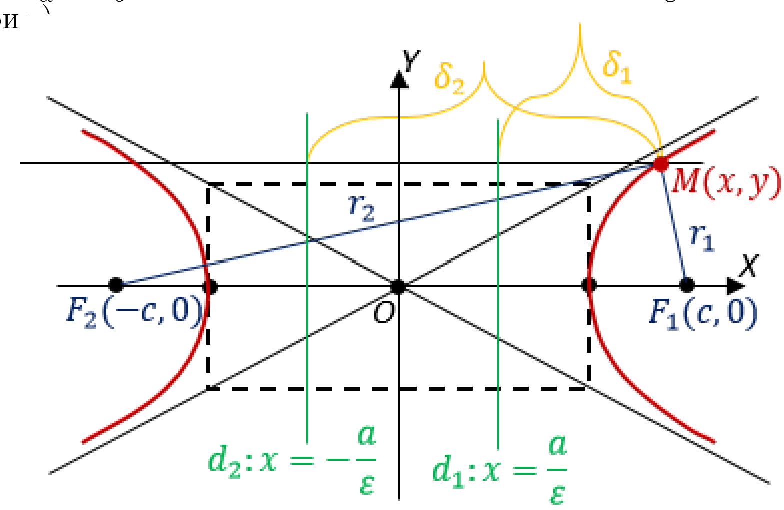
(2) Достаточность. Пусть для точки $M(x,y)$ выполнено условие $|r_1 - r_2| = 2a$.

Так как $r_1 = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x+c)^2+y^2}$, то из $|r_1 - r_2| = 2a$ следует, что $|\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2}| = 2a$, т.е. $\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a \Rightarrow$ $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2} \Rightarrow (x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$ $\Rightarrow \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = -a^2 - cx \Rightarrow a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow$ $a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \Rightarrow a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \Rightarrow$ $(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$. Поскольку $a^2 - c^2 = -b^2$, то получаем

$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$. Теперь делим на $(-a^2b^2)$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе. □

Директриссы гиперболы

Для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ определим две прямые $d_1\colon x = \dfrac{a}{\varepsilon}$, $d_2\colon x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ – директриссы гиперболы (см. ри



Директиссы и фокусы лежащие по одну сторону от оси OY называем соответствующими. Пусть расстояние от точки $M(x,y)$ до d_1 есть δ_1, а до d_2 есть δ_2.

Теорема 2.11. Точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе тогда и только тогда, когда отношение расстояний до фокуса и до соответствующей директриссы есть величина равная ε:

$$\frac{r_1}{\delta_1} = \varepsilon = \frac{r_2}{\delta_2}.$$

Доказательство. Доказываем для правой ветки (для левой аналогично).

(1) Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит правой ветке. Из рисунка следует, что $\delta_1 = x - \dfrac{a}{\varepsilon} = \dfrac{\varepsilon x - a}{\varepsilon}$ = по формуле стр.59 = $\dfrac{r_1}{\varepsilon}$. Тогда $\dfrac{r_1}{\delta_1} = \varepsilon$.

(2) Обратно. Пусть для точки $M(x,y)$ выполнено условие $\dfrac{r_1}{\delta_1} = \varepsilon$. Докажем, что точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе. Имеем $r_1 = \varepsilon\delta_1$, т.е. $\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \varepsilon\left(x - \dfrac{a}{\varepsilon}\right) = \varepsilon x - a$ $\Rightarrow \dfrac{c}{a}x - a = \sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow \dfrac{c^2}{a^2}x^2 - 2cx + a^2 = (x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \Rightarrow$ $\dfrac{c^2}{a^2}x^2 - x^2 - y^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow \dfrac{c^2-a^2}{a^2}x^2 - y^2 = c^2 - a^2$. Так как $c^2 - a^2 = b^2$, то получаем $\dfrac{b^2}{a^2}x^2 - y^2 = b^2$. Осталось разделить на b^2: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, т.е. точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе. □

Уравнение касательной к гиперболе

Уравнение гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ дифференцируем по x при условии, что $y=y(x)$:
$\dfrac{2x}{a^2}-\dfrac{2y(x)y'(x)}{b^2}=0 \;\Rightarrow\; y'(x)=\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x}{y(x)}$.

Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе. Полагая $y_0=y(x_0)$ значение производной при $x=x_0$ есть $y'(x_0)=\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}$.

Уравнение касательной, проведённой в точке $M_0(x_0,y_0)$ к линии $l\colon y=y(x)$ есть $y-y_0=k(x-x_0)$, где $k=y'(x_0)$.

Для случая l – гипербола: $y-y_0=\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{x_0}{y_0}(x-x_0)$. Умножаем на a^2y_0:

$a^2y_0y-a^2y_0^2=b^2x_0x-b^2x_0^2$. Так как точка $M_0(x_0,y_0)$ принадлежит гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, то $b^2x_0^2-a^2y_0^2=a^2b^2$. Следовательно, $b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$. Делим на a^2b^2:

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1 \text{ – уравнение касательной к гиперболе в точке } M_0(x_0,y_0).$$

ПАРАБОЛА

Параболу определяем как линию, уравнение которой в OXY есть

$$y^2=2px, \text{ где } p>0 \qquad (3)$$

Величину p называем ФОКАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ.

Исследование формы параболы

Функция $y^2=2px$ определена для $x\geqslant 0$, следовательно, парабола – кривая 2-го порядка, лежащая в правой полуплоскости. При $x=0$ будет $y=0$, т.е. точка $O(0,0)$ принадлежит параболе. Эту точку называем вершиной параболы.

Если точка $M(x,y)$ принадлежит параболе, то точка $M'(x,-y)$ принадлежит параболе. Следовательно, ось OX – ось симметрии кривой. Поэтому достаточно рассмотреть функцию для случая $y\geqslant 0$: $y=y(x)=\sqrt{2px}$ $(x\geqslant 0)$.

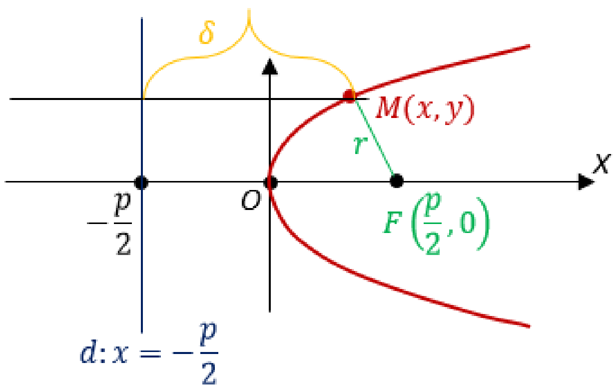
$y'(x)=\dfrac{\sqrt{p}}{\sqrt{2x}}>0 \;\Rightarrow\;$ на интервале $(0,+\infty)$ функция $y(x)$ возрастающая.

Т.к. $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=+\infty$, то горизонтальных асимптот нет.

Если бы существовала наклонная асимптота $y=kx+b$, то $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}$.

Здесь же $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2p}}{\sqrt{x}}=0 \;\Rightarrow\;$ наклонных ассимптот нет.

С учётом симметрии график линии $y^2=2px$ есть (см. рис.)



На рисунке также изображена прямая $d: x = -\dfrac{p}{2}$ называемая директриссой параболы и точка $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ – фокус параболы. Вектор $\bar{r} = \overline{FM}$ называют фокальным радиус-вектором точки $M(x, y)$ параболы.

Его модуль $r = |\bar{r}| = \sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2}$

Расстояние от точки $M(x, y)$ до директриссы, обозначаемое δ, будет (см. рис.) равно: $\delta = x + \dfrac{p}{2}$.

Теорема 2.12. Чтобы точка $M(x, y)$ принадлежала параболе необходимо и достаточно, чтобы она была равноудалена от фокуса и директриссы: $r = \delta$.

Доказательство. (1) Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Тогда из $r = \sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2}$ следует $r^2 = \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - px + \dfrac{p^2}{4} + y^2$. Подставляем $y^2 = 2px$:

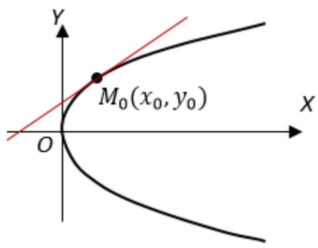
$r^2 = x^2 - px + \dfrac{p^2}{4} + 2px = x^2 + px + \dfrac{p^2}{4} = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2$.

Т.к. $x > 0$, $p > 0$, то $x + \dfrac{p}{2} > 0$ и из последнего равенства следует $r = x + \dfrac{p}{2}$.

Т.к. $\delta = x + \dfrac{p}{2}$, то $r = \delta$.

(2) Обратно. Пусть для некоторой точки $M(x, y)$ выполнено условие $r = \delta$. Надо доказать, что точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. Из $r = \delta$ следует $\sqrt{\left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x + \dfrac{p}{2}$ $\Rightarrow \left(x - \dfrac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \dfrac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2 - px = px \Rightarrow y^2 = 2px$, т.е. точка $M(x, y)$ принадлежит параболе. □

Уравнение касательной



Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит параболе. Находим уравнение касательной к параболе в точке M_0. Дифференцируем уравнение параболы $y^2 = 2px$:

$2y(x)y'(x) = 2p \;\Rightarrow\; y'(x) = \dfrac{p}{y(x)}$.

Полагая $y(x_0) = y_0$ получаем: $y'(x_0) = \dfrac{p}{y_0}$. Тогда уравнение касательной:

$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - y_0 = \dfrac{p}{y_0}(x - x_0) \;\Rightarrow\; yy_0 - y_0^2 = px - px_0$. Поскольку точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит параболе, то $y_0^2 = 2px_0 \;\Rightarrow\; yy_0 = 2px_0 + px - px_0 = px + px_0$. В итоге получаем

$$yy_0 = p(x + x_0) \text{ – уравнение касательной к параболе в точке } M_0(x_0, y_0) \ (y_0 \neq 0).$$