ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящем учебном пособии рассмотрены практически все вопросы, обычно изучаемые в университетских курсах линейной алгебры.

Пособие имеет две особенности.

1. Теория матриц строится как следствие теории линейных операторов в конечномерных пространствах. Такой подход представляется естественным и логически обоснованным.

2. Везде, где это не приводит к серьезным усложнениям, в пособии наряду с конечномерными пространствами рассматриваются и бесконечномерные пространства и определенные в них операторы. В частности, это делается при построении обратных операторов, при изучении свойств унитарных и эрмитовых операторов и в ряде других мест. Реализуя этот подход, мы всюду отмечаем, какие отличия возникают в бесконечномерном случае и какие определения и утверждения сохраняются при уходе от конечномерности. Причина именно такого подхода — в потребностях приложений и других университетских курсов (в первую очередь — математической физики и теории представлений).

Пособие написано замкнуто и чтение его возможно без знакомства с другими дисциплинами (нужны только некоторые сведения из теории определителей). Поэтому, может быть, в некоторых местах изложение излишне подробно (например, при изучении систем линейных однородных алгебраических уравнений).

Пособие содержит и упражнения для самостоятельной работы. Их выполнение безусловно будет способствовать усвоению излагаемого материала.

Небольшой по объему курс линейной алгебры, безусловно, является вспомогательным по отношению к другим курсам физико-математического цикла университетского образования. Однако значение его не пропорционально велико и это связано с двумя обстоятельствами.

Во-первых, многие понятия, идеи, методы и результаты линейной алгебры присутствуют и работают почти во всех физико-математических дисциплинах.

Во-вторых, — и это, пожалуй, более важно — линейная алгебра, возможно, больше других университетских курсов учит культуре математического мышления, способности *на простом материале* строить доказательства и умению отличать доказанное от не доказанного, хотя и кажущегося очевидным. Другими словами, линейная алгебра прививает мышлению «математический порядок». А как сказал Леонард Эйлер: «Ежели кто к математическому порядку не приучен, тот вразумлен быть не может».

В работе принята следующая система нумерации. Параграфы нумеруются внутри каждой главы, пункты и формулы имеют первой цифрой номер параграфа, в котором они находятся, второй — номер пункта, формулы внутри параграфа. Аналогично нумеруются теоремы и леммы. При ссылках внутри данной главы ее номер опускается, а при ссылках на параграф, пункт, формулу и т. д. другой главы обязательно указывается номер главы. Так п. 2.4 и теорема 5.2 — это соответственно четвертый пункт § 2 и вторая теорема § 5 той же главы, где помещены данные ссылки.

ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

п.1.1. Главные понятия нашего курса — понятия поля и линейного пространства.

Определение. *Числовое множество F называется полем, если для любых $\alpha, \beta \in F$ выполняется $\alpha \pm \beta \in F$, $\alpha\beta \in F$ и $\alpha/\beta \in F$ при $\beta \neq 0$*[1].

Примеры полей:

1) $F = \mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;

2) $F = \mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;

3) $F = F_0 = \{\alpha \mid \alpha = p/q, \forall\, p, q$ —целые числа, $q \neq 0\}$ — множество рациональных чисел;

4) $F = F_1 = \{\alpha \mid \alpha = a + b\sqrt{3}, \forall\, a, b \in F_0\}$.

Задания

1. Показать, что F_1 — поле.
2. Выяснить, является ли полем множество

$$F = \{\alpha \mid \alpha = a + b\sqrt[3]{3},\ \forall\, a, b \in F_0\}.$$

Определение. *Множество $K = \{x, y, z, \dots\}$ элементов $x, y, z \dots$ называется линейным пространством над полем F, если*

I. *существует закон, по которому каждым двум элементам $x, y \in K$ ставится в соответствие элемент $z \in K$, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый $z = x + y$ (правило сложения);*

[1] Мы рассматриваем только числовые поля.

II. *существует закон, по которому каждому элементу* $x \in K$ *и каждому скаляру* (*числу*) $\alpha \in F$ *ставится в соответствие элемент* $z \in K$, *называемый произведением* α *на элемент* x *и обозначаемый* $z = \alpha x$ (*правило умножения*);

и если законы I *и* II *обладают следующими свойствами*:

I. а) $x + y = y + x$ *для* $\forall\, x, y \in K$;

б) $(x + y) + z = x + (y + z)$ *для* $\forall\, x, y, z \in K$;

в) *существует элемент* $\theta \in K$ *такой, что* $x+\theta = x$ *для* $\forall\, x \in K$; *элемент* θ *называется нуль-вектором*;

г) *для* $\forall\, x \in K$ *существует элемент* $\widetilde{x} \in K$ *такой, что* $x+\widetilde{x} = \theta$; *элемент* $\widetilde{x}$ *называется противоположным для* x;

II. а) $1 \cdot x = x$ *для* $\forall\, x \in K$;

б) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ *для* $\forall\, x \in K$, $\forall\, \alpha, \beta \in F$;

в) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ *для* $\forall\, \alpha, \beta \in F$, $\forall\, x \in K$;

г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ *для* $\forall\, \alpha \in F$, $\forall\, x, y \in K$.

Элементы линейного пространства называются векторами.

Приведем примеры линейных пространств.

1. $K = V_3\,\{V_2\}$ — множество векторов в трехмерном пространстве {на плоскости} над полем $F = \mathbb{R}$ с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр.

2. $K = K_n = \{x \mid x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \forall\, \alpha_i \in F, i = 1, 2, \ldots, n\}$ — множество наборов n чисел с операциями сложения векторов и умножения вектора на скаляр, определенными следующими соотношениями: для $x = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $y = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in K_n$, $\lambda \in F$, полагаем $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$, $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$. Нуль-вектор пространства K_n: $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$, противоположный элемент для x есть $\widetilde{x} = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

3. $K = C[ab]$ — пространство непрерывных на отрезке $[ab]$ функций $x(t)$, $F = \mathbb{R}$, с обычными законами сложения функций и умножения функции на скаляр.

4. $K = H_0$ — множество решений $X = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in F$, однородной алгебраической системы m уравнений с коэффициентами из F:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{1.1}$$

с теми же законами I, II, что в K_n.

Легко проверяется, что условия I а)–г), II а)–г) выполняются для всех примеров 1–4.

Задание

Выяснить, являются ли линейными пространствами следующие множества функций с естественными законами сложения функций и умножения функции на скаляр, $F = \mathbb{R}$:

а) множество $C^1[0,1]$ — непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[0,1]$;

б) $K = \{x(t) \mid x(t) \in C[0,1]$ (см. пример 3), $x(0) = 0\}$;

в) $K = \big\{x(t) \mid x(t) \in C^1[0,1],\ x(1/2) = 2x'(1)\big\}$;

г) $K = \big\{x(t) \mid x(t) \in C[0,1],\ x(1/2) = 1/2\}$;

д) $K = \{x(t) \mid x(t) \in C^1[0,1],\ x'(0{,}7) = 0{,}7\}$.

п.1.2. Возвращаемся теперь к случаю произвольного линейного пространства K над полем F. Многие из фактов, которые для конкретных пространств очевидны, в случае абстрактного линейного пространства требуют доказательства. Например, в конкретных пространствах нулевой и противоположный элементы — единственные, $0x = \theta$ при $\forall\, x \in K$, $\alpha\theta = \theta$ при $\forall\, \alpha \in F$, противоположный элемент $\widetilde{x}$ для x — это $(-1)x$. Докажем эти факты в общем случае.

Пусть θ_1 и θ — нуль-вектора в K. Тогда в силу определения нуль-вектора имеем

$$\theta_1 + \theta = \theta_1 \quad (\text{ибо } \theta \text{ — нуль-вектор})$$

и

$$\theta_1 + \theta = \theta \quad (\text{ибо } \theta_1 \text{ — нуль-вектор});$$

значит, $\theta_1 = \theta$, т. е. нуль-вектор — единственный. Далее, пусть $x \in K$ и $\widetilde{x}$, $\widetilde{x}_1$ — противоположные элементы для x. В силу I б)

$$(\widetilde{x} + x) + \widetilde{x}_1 = \widetilde{x} + (x + \widetilde{x}_1).$$

Так как $\widetilde{x}$ и $\widetilde{x}_1$ — противоположные вектора для x, то отсюда получаем $\theta + \widetilde{x}_1 = \widetilde{x} + \theta$, т. е. $\widetilde{x}_1 = \widetilde{x}$ и, значит, противоположный элемент вектора — единственный. Докажем, что $0x = \theta$. Имеем

$$(1 + 0)x = 1 \cdot x = x.$$

Но в силу II в) $(1 + 0)x = x + 0x$. Таким образом, получаем, что $x = x + 0x$. Прибавим к обеим частям этого равенства вектор $\widetilde{x}$, противоположный x. Получим

$$x + \widetilde{x} = (x + 0x) + \widetilde{x} = (0x + x) + \widetilde{x} = 0x + (x + \widetilde{x}) = 0x + \theta = 0x,$$

т. е. $\theta = 0x$.

Наконец, покажем, что $(-1)x = \widetilde{x}$. Вычислим $\big(1 + (-1)\big)x$.

Имеем $\big(1 + (-1)\big)x = 1 \cdot x + (-1)x = x + (-1 \cdot x)$, но левая часть этого равенства равна $0x = \theta$ и, значит, $x + (-x) = \theta$, т. е. $(-1)x = \widetilde{x}$. Далее будем писать вместо $(-1)x$ просто $-x$. Из приведенных рассуждений следует, что в линейном пространстве наряду с операцией сложения можно определить операцию вычитания как сложение с противоположным вектором.

Задание

Доказать, что $\alpha\theta = \theta$ при $\forall \alpha \in F$.

п.1.3. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — фиксированные вектора из K, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — фиксированные числа из F.

Определение. *Линейной комбинацией векторов* $x_1, \ldots, x_m$ *называется вектор* $y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$.

Беря разные наборы $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, мы получаем различные линейные комбинации векторов $x_1, \ldots, x_m$.

Определение. *Линейной оболочкой* $\mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_m\}$ *векторов* $x_1, \ldots, x_m$ *называется множество всех линейных комбинаций векторов* $x_1, \ldots, x_m$:

$$\mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_m\} = \Big\{ y \mid y = \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i, \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F \Big\}.$$

Задание

Докажите, что $\mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_m\}$ есть линейное пространство над полем F.

Определение. *Вектора* $x_1, \ldots, x_m$ *из* K *называются линейно зависимыми, если* $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_m \in F$ *так, что* $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \theta$ *и* $\sum_{i=1}^m |\alpha_i| \neq 0$ (*т. е. не все коэффициенты* α_i *нулевые*).

Вектора $x_1, \ldots, x_m$ *из* K *называются линейно независимыми, если равенство* $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i = \theta$ *выполняется только при*

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0.$$

Рассмотрим пример. Пусть $K_n = \{x \mid x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \forall\, \xi_j \in F\}$ и $x_i = (\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots \xi_{ni})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ — какие-то вектора из K. Покажем, как определить, будут ли вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимыми или нет. Составим линейную комбинацию $y = \sum_{i=1}^m c_i x_i$ этих векторов и попробуем обратить ее в нуль-вектор. Очевидно,

$$y = \Big(\sum_{i=1}^m \xi_{1i} c_i, \sum_{i=1}^m \xi_{2i} c_i, \ldots, \sum_{i=1}^m \xi_{ni} c_i \Big)$$

и, значит, равенство $y=\theta=(0, 0, \ldots, 0)$ эквивалентно системе равенств

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} c_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Соотношения (1.2) — это система n однородных уравнений с m неизвестными $c_1, \ldots c_m$. По определению, вектора $x_1, \ldots, x_m$ будут линейно зависимыми, если система (1.2) допускает ненулевое решение. Выясним, когда это происходит.

Матрица $\|A\|$ (таблица коэффициентов) этой системы имеет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1m} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \ldots & \xi_{nm} \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Определение. *Назовем рангом $\rho(\|A\|)$ матрицы $\|A\|$ наибольший из порядков ее миноров не равных нулю.*

В пп. 2.4 и 2.5 будет доказано, что для существования ненулевого решения системы (1.2) необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы $\|A\|$ был меньше числа неизвестных, т. е. чтобы выполнялось неравенство

$$p := \rho(\|A\|) < m. \tag{1.4}$$

При $m = n$ данное требование означает, что

$$\Delta = \det \|A\| = 0. \tag{1.5}$$

При $m > n$ условие (1.4) выполняется автоматически, ибо матрица $\|A\|$ вообще не содержит миноров m-го порядка. Следовательно, в обоих этих случаях вектора $x_1, \ldots, x_m$ — линейно зависимы.

Задание

Привести примеры линейно зависимых и линейно независимых систем векторов $x_1, \ldots, x_m$ при $m < n$.

п.1.4. Изучим некоторые свойства линейно зависимых и линейно независимых систем.

1. Вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда среди них найдется такой вектор x_j, который является линейной комбинацией остальных векторов, т. е. когда для некоторых чисел $d_s \in F$

$$x_j = \sum_{s=1,\, s\neq j}^{m} d_s x_s. \tag{1.6}$$

Действительно, если (1.6) выполнено, то $\sum_{s=1}^{m} \alpha_s x_s = \theta$, где $\alpha_s = d_s$, $s \neq j$, $\alpha_j = -1$, т. е. вектора $x_1, \ldots, x_m$ — линейно зависимы. С другой стороны, если вектора $x_1, \ldots, x_m$ — линейно зависимы, то $\exists\, \alpha_s \in F$ такие, что

$$\sum_{s=1}^{m} \alpha_s x_s = \theta \tag{1.7}$$

и $\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s| > 0$. Пусть j таково, что $\alpha_j \neq 0$. Тогда, поделив (1.7) на α_j, получаем из (1.7)

$$x_j = \sum_{s=1, s\neq j}^{m} d_s x_s,$$

где $d_s = -\alpha_s/\alpha_j$, т. е. (1.6) доказано.

2. Если вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы, то и вектора любой подсистемы этой системы линейно независимы. Действительно, рассмотрим произвольную подсистему из $x_1, \ldots, x_m$. Для простоты считаем, что это $x_1, \ldots, x_k$, $k < m$. Тогда, если вектора $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимы, то $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$, $\alpha_i \in F$, $\sum_{s=1}^{k} |\alpha_s| > 0$, такие, что $\sum_{s=1}^{k} \alpha_s x_s = \theta$, а, значит, и $\sum_{s=1}^{m} \alpha_s x_s = \theta$, где $\alpha_{k+1} = \alpha_{k+2} = \ldots = \alpha_m = 0$ и $\sum_{s=1}^{m} |\alpha_s| > 0$. Таким образом, предположив линейную зависимость векторов какой-либо подсистемы, мы получили, что вектора $x_1, \ldots, x_m$ всей системы линейно зависимы. Значит, системы линейно независимых векторов не имеют линейно зависимых подсистем.

Задание

1. Покажите, что у линейно зависимой системы векторов подсистемы могут быть как линейно зависимы, так и линейно независимы.

2. Докажите, что система векторов $x_1, \ldots, x_m$, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

§ 2. БАЗИС И РАЗМЕРНОСТЬ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

п.2.1. **Определение.** *Говорят, что вектора $e_1, \ldots, e_n \in K$ образуют базис в линейном пространстве K над полем F, если*

Б1. *Для $\forall\, x \in K$ $\exists\, \xi_1, \ldots, \xi_n \in F$ так, что*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i; \tag{2.1}$$

Б2. *Вектора $e_1, \ldots, e_n$ линейно независимы.*

Примеры

1. В пространстве K_n базис образуют вектора

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad e_n = (0, 0, \ldots, 1).$$

Действительно, произвольный вектор $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K_n$ можно разложить по векторам $e_1, \ldots, e_n$:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$$

и вектора e_i линейно независимы, ибо $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ и поэтому $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \theta$ лишь при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$.

2. В пространстве K полиномов $P_n(t)$ степени не выше чем n над полем $F = \mathbb{R}$ в качестве базиса можно взять $e_1 = 1, e_2 = t, \ldots, e_n = t^{n-1}$, $e_{n+1} = t^n$.

Задание

Проверить, что вектора $e_1, \ldots, e_{n+1}$ действительно образуют базис.

В общем случае нахождение базиса в конкретных пространствах не так просто, как в рассмотренных примерах. Мы вернемся к этому вопросу в п. 2.4.

Определение. *Коэффициенты ξ_i, $i = 1,2, \ldots, n$, в разложении* (2.1) *называются координатами вектора x по базису $e_1, \ldots, e_n$.*

Покажем, что координаты определяются вектором однозначно. Предположим, что вектор $x \in K$ имеет в базисе $e_1, \ldots, e_n$ два набора координат: $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\widetilde{\xi}_1, \ldots, \widetilde{\xi}_n$, т. е.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i e_i.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i - \sum_{i=1}^{n} \widetilde{\xi}_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \widetilde{\xi}_i) e_i = \theta.$$

Так как вектора базиса линейно независимы, то из последнего равенства следует, что $\xi_i - \widetilde{\xi}_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. $\xi_i = \widetilde{\xi}_i$ и, значит, координаты вектора определяются (самим вектором и базисом) однозначно. Зная координаты векторов, мы можем заменить действия с векторами действиями с координатами. Действительно, если координаты векторов x и y суть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n$, то координаты суммы векторов $x + y$ равны $\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n$, ибо

$$x + y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i) e_i,$$

а координаты вектора αx при $\forall\, \alpha \in F$ — это $\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n$.

п.2.2. Покажем, как, зная координаты векторов, можно определить, являются ли эти вектора линейно зависимыми. В пространстве K с базисом $e_1, \ldots, e_n$ рассмотрим систему m векторов x_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, координаты которых суть $\xi_{1i}, \xi_{2i}, \ldots, \xi_{ni}$, т. е. $x_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} e_j$. Попробуем обратить в нуль-вектор линейную комбинацию этих векторов с какими-то коэффициентами $c_i \in F$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \Big(\sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} e_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} c_i \Big) e_j = \theta. \qquad (2.2)$$

Так как вектора e_j линейно независимы, то равенство (2.2) будет верно, лишь когда коэффициенты перед векторами e_j равны нулю:

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_{ji} c_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \qquad (2.3)$$

Мы получили систему n линейных однородных уравнений с m неизвестными $c_1, \ldots, c_m$ и заданными коэффициентами ξ_{ji}. Но эта система совпадает с системой (1.2) п. 1.3 и поэтому мы можем воспользоваться сделанными там выводами. Пусть $\|A\|$ — матрица этой системы (см. (1.3)) и $\Delta = \det \|A\|$ при $m = n$. Согласно п. 1.3 при $m > n$ а также при $m = n$ и $\Delta = 0$ существует ненулевое решение $c_1, \ldots, c_m$ системы (2.3). Значит, в этих случаях вектора $x_1, \ldots, x_m$ — линейно зависимы. При $m = n$ и $\Delta \neq 0$ система (2.3) имеет только нулевое решение и, следовательно, вектора $x_1, \ldots, x_m$ в этом случае линейно независимы. Наконец, при $m < n$ вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно зависимы, если ранг $\rho(\|A\|)$ матрицы $\|A\|$ меньше m и линейно независимы, если $\rho(\|A\|) \geq m$.

Из наших рассуждений, в частности, следует, что если базис в пространстве K состоит из n векторов, то любые m векторов при $m > n$ линейно зависимы.

п.2.3. Определение. *Говорят, что размерность линейного пространства K равна n и пишут* $\dim K = n$, *если в K найдется система n линейно независимых векторов, а любые m векторов* *при $m > n$ будут линейно зависимы. Если для любого целого $N > 0$ в K можно найти N линейно независимых векторов, то говорят, что пространство K бесконечномерно и пишут* $\dim K = +\infty$.

Лемма 2.1. *Размерность пространства K равна числу элементов базиса.*

Действительно, если базис состоит из n элементов, то $\dim K \geq n$, ибо вектора базиса линейно независимы. С другой стороны, неравенство $\dim K > n$ — невозможно, ибо в силу п. 2.2 любые m векторов из K при $m > n$ линейно зависимы.

Лемма 2.2. *Если* $\dim K = n$, *то любые n линейно независимых векторов из K образуют базис.*

Действительно, пусть вектора $e_1, \ldots, e_n$ из K — линейно независимы и x — произвольный вектор из K. Так как $\dim K = n$, то вектора $e_1, e_2, \ldots, e_n, x$ — линейно зависимы. Значит, $\exists\, c_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $c_i \in F$, такие, что $\sum_{i=0}^{n} |c_i| > 0$ и

$$\sum_{i=1}^{n} c_i e_i + c_0 x = \theta. \tag{2.4}$$

Если коэффициент $c_0 = 0$, то $\sum_{i=1}^{n} |c_i| > 0$ и из (2.4) $\sum_{i=1}^{n} c_i e_i = \theta$. Но это невозможно, ибо вектора $e_1, \ldots, e_n$ — линейно независимы. Значит, $c_0 \neq 0$ и из (2.4) мы получим

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad \text{где} \quad \xi_i = -\frac{c_i}{c_0}.$$

Таким образом, произвольный вектор $x \in K$ раскладывается по линейно независимым векторам $e_1, \ldots, e_n$. Значит, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в K.

Лемму 2.2 можно использовать для построения базиса в n-мерном пространстве.

Лемма 2.3. *Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — произвольные линейно независимые вектора в пространстве K над полем F и $m < n$,* $n = \dim K$. *Тогда можно указать вектор $x \in K$ так, что вектора $f_1, \ldots, f_m, x$ — линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что при $\forall\, x \in K$ вектора $f_1, \ldots$ $\ldots, f_m, x$ линейно зависимы. Тогда существуют константы $c_0, c_1, \ldots$ $\ldots, c_m \in F$, $\sum_{i=0}^{m} |c_i| > 0$, такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i + c_0 x = \theta. \tag{2.5}$$

Если $c_0 = 0$, то $\sum_{i=1}^m |c_i| > 0$ и в силу (2.5) $\sum_{i=1}^m c_i f_i = \theta$, что невозможно в силу линейной независимости векторов $f_1, \ldots, f_m$. Значит, $c_0 \neq 0$ и из соотношения (2.5) мы получаем, что

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i f_i, \quad \text{где} \quad \xi_i = -\frac{c_i}{c_0}. \tag{2.6}$$

Так как x — произвольный вектор из K и вектора $f_1, \ldots, f_m$ — линейно независимы, то из (2.6) следует, что вектора $f_1, \ldots, f_m$ образуют базис в K. А это невозможно, ибо $m < n$. Значит, предположение о том, что система векторов $f_1, \ldots, f_m, x$ линейно зависима при $\forall\, x \in K$ неверно и лемма доказана.

Для построения базиса в K можно взять произвольный вектор $e_1 \in K$, $e_1 \neq \theta$, и, последовательно применяя лемму 2.3, дополнить его до линейно независимой системы $e_1, \ldots, e_n$, состоящей из n векторов. В силу леммы 2.2 набор векторов $e_1, \ldots, e_n$ есть базис в K.

п.2.4. Рассмотрим теперь важный для приложений пример определения размерности пространства и построения в нем базиса. Пусть $K = H_0$ — пространство решений $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ линейной однородной системы

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ti}\, \xi_i = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, m \tag{2.7}$$

над полем F (см. п. 1.1, пример 4). Обозначим таблицу коэффициентов (матрицу) системы (2.7) через $\|A\|$:

$$\|A\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

и пусть $p = \rho(\|A\|)$ — ранг матрицы $\|A\|$. Очевидно $0 \leq p \leq n$.

При $p = 0$ все коэффициенты a_{ti} в (2.7) — нулевые и поэтому любой набор чисел $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из поля F является решением системы (2.7), т. е. $H_0 = \{x \mid x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \forall\, \xi_i \in F\} = K_n$. Следовательно, в качестве базиса в H_0 можно взять векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, …, $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ и $\dim H_0 = n$.

При $p = n$ в системе (2.7) существует подсистема из n уравнений с не нулевым определителем, из которой следует, что единственное решение ее (и (2.7)) — это $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$. Поэтому при $p = n$ $\dim H_0 = 0$. В силу сказанного далее рассматриваем только случай $0 < p < n$. Только для простоты предположим, что минор (один из миноров) p-го порядка не равный нулю, расположен в левом верхнем углу матрицы $\|A\|$:

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0.$$

(Иногда этот минор называют базисным.) Запишем первые p уравнений системы (2.7) в виде

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ti}\xi_i = -\sum_{i=p+1}^{n} a_{ti}\xi_i, \quad t = 1, 2, \dots, p \tag{2.8}$$

и рассмотрим соотношения (2.8) как систему линейных неоднородных уравнений относительно $\xi_1, \dots, \xi_p$ при заданных $\xi_{p+1}, \dots, \xi_n$. Так как определитель Δ_p системы (2.8) не равен нулю, то каждому фиксированному набору чисел $\xi_{p+1}, \dots, \xi_n$ будет отвечать единственное решение $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ системы (2.8) (с известными правыми частями). В качестве $\xi_{p+1}, \dots, \xi_n$ будем последовательно брать наборы $\xi_{p+1}^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)}$, $j = 1, 2, \dots, n-p$, следующего вида: $\xi_{p+j}^{(j)} = 1$, $\xi_i^{(j)} = 0$, $i \neq p+j$, $i = p+1, \dots, n$. Полученное для j-го набора решение системы (2.8) обозначим через $(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_p^{(j)})$ и допишем к нему значения $\xi_{p+1}^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)}$, при которых оно найдено. Таким образом, мы получим $(n-p)$ n-компонентных векторов $X_j = \left(\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_p^{(j)}, \xi_{p+1}^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)}\right)$, $j = 1, 2, \dots, n-p$, где у каждого вектора X_j все компоненты $\xi_i^{(j)} = 0$ при $i \geq p+1$, кроме $\xi_{p+j}^{(j)} = 1$. Запишем эти результаты в виде таблицы

	ξ_1	ξ_2	$\dots$	ξ_p	ξ_{p+1}	ξ_{p+2}	$\dots$	ξ_n
X_1	$\xi_1^{(1)}$	$\xi_2^{(1)}$	$\dots$	$\xi_p^{(1)}$	1	0	$\dots$	0
X_2	$\xi_1^{(2)}$	$\xi_2^{(2)}$	$\dots$	$\xi_p^{(2)}$	0	1	$\dots$	0
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
X_{n-p}	$\xi_1^{(n-p)}$	$\xi_2^{(n-p)}$	$\dots$	$\xi_p^{(n-p)}$	0	0	$\dots$	1

По построению, вектора X_i являются решениями системы (2.8), т. е. первых p уравнений системы (2.7), причем в силу выбора значений $\xi_i^{(j)}$, $i \geq p+1$

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ti}\,\xi_i^{(j)} = -a_{t,j+p}, \quad t = 1, 2, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, n-p. \tag{2.9}$$

п.2.5. Теорема 2.1. *Вектора* X_j, $j = 1, 2, \ldots, n-p$, *образуют базис в пространстве решений системы* (2.7).

Доказательство. Для справедливости теоремы 2.1 надо установить, что

а) вектора X_j линейно независимы;

б) любое решение $X = (\xi_1, \ldots \xi_n)$ системы (2.7) можно представить в виде линейной комбинации векторов X_j;

в) вектора X_j удовлетворяют всем уравнениям системы (2.7), а не только первым p.

Докажем утверждения а)–в). Составим линейную комбинацию Y векторов X_j

$$Y = \sum_{j=1}^{n-p} c_j X_j.$$

Из определения векторов X_j следует, что в векторе $Y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, очевидно, $\eta_{p+1} = c_1$, $\eta_{p+2} = c_2, \ldots, \eta_n = c_{n-p}$. Поэтому равенство $Y = \theta = (0, 0, \ldots, 0)$ возможно только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-p} = 0$. Значит, вектора X_j линейно независимы, т. е. а) — доказано.

Докажем б). Пусть $\overline{X} = (\overline{\xi}_1, \overline{\xi}_2, \ldots \overline{\xi}_p, \overline{\xi}_{p+1}, \ldots, \overline{\xi}_n)$ — произвольное решение (2.7). Тогда, очевидно, $\overline{X}$ есть решение и (2.8). Покажем, что

$$\overline{X} = \sum_{s=1}^{n-p} \overline{\xi}_{p+s} X_s. \tag{2.10}$$

Положим

$$\overline{Y} = \sum_{s=1}^{n-p} \overline{\xi}_{p+s} X_s, \quad Z = \overline{X} - \overline{Y}.$$

Так как $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ удовлетворяют системе (2.8), то и вектор $Z = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ удовлетворяет (2.8). По построению, $\xi_{p+1} = \xi_{p+2} = \ldots \ldots = \xi_n = 0$. Следовательно, после подстановки решения Z в (2.8) правые части уравнений (2.8) будут равны нулю. Поэтому из полученной однородной системы (с ненулевым определителем Δ_p) будет следовать, что $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_p = 0$. Таким образом, $Z = (0, 0, \ldots, 0)$ и (2.10) доказано. Значит утверждение б) выполняется.

Докажем в). Произвольно фиксируем числа j, $1 \leq j \leq n-p$, и s, $s \geq p+1$, и покажем, что решение X_j системы (2.8) удовлетворяет s-му уравнению системы (2.7), т. е. что

$$\sum_{i=1}^{p} a_{si}\, \xi_i^{(j)} = -a_{s,p+j} \tag{2.11}$$

(здесь мы учли, что $\xi_i^{(j)} = 0$, $i = p+1, \ldots, n$, $i \neq j+p$, $\xi_{j+p}^{(j)} = 1$.) Положим $k = p + j$ и рассмотрим систему

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ti}\xi_i = -a_{tk}\xi_k, \quad t = 1, 2, \ldots, p; s, \tag{2.12}$$

состоящую из $(p+1)$ однородных уравнений с $(p+1)$ неизвестными $\xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_k$. Так как ранг матрицы $\|A\|$ равен p, а матрица системы (2.12) имеет порядок $(p+1)$, то ее определитель равен нулю. Следовательно, у системы (2.12) существует ненулевое решение $Z = (\xi_1, \ldots, \xi_p, \xi_k)$. В этом решении $\xi_k \neq 0$, ибо при $\xi_k = 0$ из первых p уравнений системы мы получили бы $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_p = 0$ и $Z = (0, 0, \ldots, 0)$, что противоречит выбору Z. Поделим все уравнения системы (2.12) на ξ_k и положим $\eta_i = \xi_i/\xi_k$. Получим

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ti}\eta_i = -a_{tk}, \quad t = 1, 2, \ldots, p; \ s. \tag{2.13}$$

Из первых p уравнений системы (2.13) в силу (2.9) следует, что $\eta_i = \xi_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, а уравнение с номером $t = s$ показывает, что числа $\xi_i^{(j)}$ удовлетворяют уравнению (2.11). Таким образом X_j есть решение не только первых p уравнений системы (2.7), но и любого другого уравнения этой системы. Утверждение в) доказано и тем самым теорема 2.1 доказана полностью.

Следствие. *Размерность пространства H_0 решений системы* (2.7) *равна* $n - \rho(\|A\|)$.

Замечание. Следствие описывает и случаи $\rho(\|A\|) = 0$ $(\dim H_0 = n)$ и $\rho(\|A\|) = n$ $(\dim H_0 = 0)$.

§ 3. ПОДПРОСТРАНСТВА. ПРЯМАЯ СУММА ПОДПРОСТРАНСТВ

п.3.1. Введем весьма важное понятие подпространства. Пусть K — линейное пространство над полем F.

Определение. *Множество векторов H называется подпространством пространства K над полем F, если $H \subseteq K$ и H является пространством над тем же полем F относительно тех же законов сложения векторов и умножения векторов на скаляры из F, что и пространство K.*

Таким образом, для того, чтобы множество H из K было подпространством, должны выполняться условия I, II, I а)–г), II а)–г) § 1, где вместо K надо написать H. Однако фактически для того, чтобы множество H было подпространством, достаточно выполнения лишь условий I и II:

I) для $\forall\, x, y \in H$ выполняется $x + y \in H$;

II) для $\forall\, \alpha \in F$, $\forall\, x \in H$ выполняется $\alpha x \in H$.

Действительно, требования I а), б) и II а)–г) выполнены для векторов из H и скаляров из F, поскольку они выполнялись в K, а $H \subseteq K$. Существование нуль-вектора в H следует из II и соотношения $\theta = 0x \in H$ при $x \in H$. Существование противоположного элемента $\widetilde{x}$ для $x \in H$ вытекает из II и соотношения $\widetilde{x} = (-1)x \in H$ при $x \in H$.

Таким образом, подмножество H из K — подпространство, если выполняются требования I, II. Приведем примеры подпространств.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_m \in K$, $H = \mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_m\}$.
2. $K = K_n$, $H = H_0$ — множество решений системы (2.7).
3. $K = C[ab]$, $H = \{x(t) \,|\, x(t) \in K,\ x(a) = x(b)\}$.
4. $K = V_3$, $H = V_2$ (V_3 и V_2 — векторные пространства в R^3 и в R^2).

Заметим, что при $H \subset K$ выполняется $\dim H < \dim K$. Действительно, если $\dim H = \dim K = n$, то в H есть n линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_n$. В силу леммы 2.2 эти вектора образуют базис и в K и в H и значит $\mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_n\} = K = H$, что неверно. Поэтому $\dim H < \dim K$.

п.3.2. Пусть K — линейное пространство над полем F и $H_1, \ldots$ $\ldots, H_m$ — некоторые подпространства K.

Определение. *Говорят, что линейное пространство K над полем F разлагается в прямую сумму подпространств $H_1, H_2, \ldots, H_m$, и пишут*

$$K = \sum_{i=1}^{m} \oplus H_i, \tag{3.1}$$

если

1) *для $\forall\, x \in K$ найдутся такие $x_i \in H_i$, что*

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i; \tag{3.2}$$

2) *для $\forall\, x \in K$ разложение (3.2) единственно, т. е. если выполняется (3.2) и кроме того $x = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i$ для каких-то $\overline{x}_i \in H_i$, то $\overline{x}_i = x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.*

Требование 2) эквивалентно требованию

2а) разложение нуль-вектора θ по векторам из H_i единственно, т. е.

$$\theta = \sum_{i=1}^{m} \theta_i,$$

где θ_i — нуль-вектор в пространстве H_i[2)].

Задание 1

Докажите равносильность условий 2) и 2а).

Из условия 2) вытекает, что $H_i \cap H_j = \{\theta\}$ при $i \neq j$. Действительно, если вектор $y \in H_i \cap H_j$, то мы можем записать

$$y = y_i + \theta_j = \theta_i + y_j, \tag{3.3}$$

где y_s — это вектор y, взятый из пространства H_s, $s = i, j$. Если $y \neq \theta$, то равенство (3.3) противоречит требованию 2) и, значит, $y = \theta$. В связи с этим возникает мысль о возможности замены условия 2) в определении прямой суммы подпространств на условие

2б) $H_i \cap H_j = \{\theta\}$, $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Однако при $m \geq 3$ выполнение 2б) не влечет справедливость 2). Рассмотрим пример. Пусть $K = V_2$ — множество векторов на плоскости x, y, $F = \mathbb{R}$. Пусть вектора e_1 и e_2 направлены по координатным осям,

$$H_1 = \{\alpha e_1 \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad H_2 = \{\alpha e_2 \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\},$$
$$H_3 = \{\alpha(e_1 + e_2) \mid \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Ясно, что $H_i \cap H_j = \{\theta\}$, $i \neq j$. В то же время условие 2) не выполняется, ибо, например, для вектора $x = e_1 + e_2$ справедливы два разложения

$$x = \theta_1 + \theta_2 + x \quad \text{и} \quad x = e_1 + e_2 + \theta_3.$$

Задание 2

Докажите, что при $m = 2$ условия 2) и 2б) эквивалентны.

п.3.3. Опишем один из распространенных способов разбиения пространства K в прямую сумму подпространств.

[2)] Разумеется $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_m = \theta$, ибо нуль-вектор в пространстве единственный. Нижний индекс указывает лишь номер пространства, откуда «взят» нуль-вектор.

Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ базис в K. Разобьем множество базисных векторов на m подмножеств G_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, так, что $G_i \cap G_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\cup_{i=1}^m G_i = e$. Обозначим базисные вектора из e, попавшие в G_i, через $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$, где k_i — число элементов множества G_i. По построению, $\sum_{i=1}^m k_i = n$. Положим

$$H_i = \mathcal{L}\{e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}\}$$

и покажем, что

$$K = \sum_{i=1}^{m} \oplus H_i. \tag{3.4}$$

Пусть $x \in K$. Так как вектора $e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(m)}, \ldots, e_{k_m}^{(m)}$ — это все базисные вектора $e_1, e_2, \ldots, e_n$ (в других обозначениях и, возможно, расположенные в другом порядке), то найдутся такие числа $\xi_s^{(i)}$, что

$$x = \sum_{i=1}^{m} \sum_{s=1}^{k_i} \xi_s^{(i)} e_s^{(i)}. \tag{3.5}$$

Положим

$$x_i = \sum_{s=1}^{k_i} \xi_s^{(i)} e_s^{(i)}.$$

Тогда в силу (3.5)

$$x = \sum_{i=1}^{m} x_i, \tag{3.6а}$$

где $x_i \in H_i$, и, значит, условие 1) п. 3.2 выполнено. Проверим выполнение условия 2).

Допустим, что кроме (3.6а) для каких-то векторов $\overline{x}_i$, $\overline{x}_i \in H_i$, справедливо представление

$$x = \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i. \tag{3.6б}$$

Тогда в силу (3.6а), (3.6б)

$$\sum_{i=1}^{m} (x_i - \overline{x}_i) = \theta. \tag{3.7}$$

Так как $x_i - \overline{x}_i \in H_i$, то разлагая этот вектор по базису $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$ пространства H_i, получим, что

$$x_i - \overline{x}_i = \sum_{s=1}^{k_i} \eta_s^{(i)} e_s^{(i)}. \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.7) имеем

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}\eta_s^{(i)}e_s^{(i)}=\theta.$$

Это равенство — разложение нуль-вектора по базису пространства K и, значит, все коэффициенты $\eta_s^{(i)}=0$. Поэтому в силу (3.8) $x_i=\overline{x}_i$, $i=1,2,\ldots,m$, и, значит, требование 2) п. 3.2 выполнено и тем самым (3.4) доказано.

Проведенные рассуждения позволяют решить, например, следующую задачу. Пусть H_1 — подпространство из K. Надо построить подпространство $H_2\subset K$ так, что $K=H_1\oplus H_2$. В силу сказанного, для этого достаточно произвольный базис $e_1,\ldots,e_k$ пространства H_1 дополнить любым образом до базиса $e_1,\ldots,e_k,e_{k+1},\ldots,e_n$ в K и положить $H_2=\mathcal{L}\{e_{k+1},\ldots,e_n\}$.

п.3.4. В п. 3.3 установлено, что разбив множество базисных векторов на не пересекающиеся множества G_i и взяв затем линейные оболочки векторов каждого множества G_i, мы получим подпространства H_i, в прямую сумму которых разбивается пространство K.

Пусть теперь нам дано разложение (3.1) и в каждом пространстве H_i выбран произвольный базис $e_1^{(i)},\ldots,e_{k_i}^{(i)}$. Покажем, что вектора $e=\left(e_1^{(1)},\ldots,e_{k_1}^{(1)},\ldots,e_1^{(i)},\ldots,e_{k_i}^{(i)},\ldots,e_1^{(m)},\ldots,e_{k_m}^{(m)}\right)$ образуют базис в K. Пусть $x\in K$. В силу условия 1) п. 3.2 $\exists\, x_i\in H_i$ так, что

$$x=\sum_{i=1}^{m}x_i. \tag{3.9}$$

Разлагая x_i по базису пространства H_i, получим

$$x_i=\sum_{s=1}^{k_i}\xi_s^{(i)}e_s^{(i)}. \tag{3.10}$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим разложение произвольного вектора x по векторам $e_s^{(i)}$, $s=1,\ldots,k_i$, $i=1,2,\ldots,m$

$$x=\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}\xi_s^{(i)}e_s^{(i)}. \tag{3.11}$$

Покажем, что вектора системы e линейно независимы. Если бы это было не так, то для некоторых констант $c_s^{(i)}\in F$, $\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}|c_s^{(i)}|>0$, мы имели бы, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{k_i}c_s^{(i)}e_s^{(i)}=\theta. \tag{3.12}$$

Отсюда в силу условия 2) (или 2а) п. 3.2

$$\sum_{s=1}^{k_i} c_s^{(i)} e_s^{(i)} = \theta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

Поскольку при каждом фиксированном значении i вектора $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \ldots$ $\ldots, e_{k_i}^{(i)}$ линейно независимы, то из (3.13) следуют равенства

$$c_s^{(i)} = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, k_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{3.14}$$

и, значит, вектора системы e линейно независимы. Отсюда и из (3.11) следует, что набор векторов e — это базис в K, что и требовалось доказать.

Отметим, что так как число элементов базиса равно размерности пространства, то из наших рассуждений следует, что при выполнении (3.1)

$$\dim K = \sum_{i=1}^{m} \dim H_i,$$

т. е. сумма размерностей пространств H_i в прямой сумме (3.1) равна размерности K.

§ 4. ПРОСТРАНСТВА СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

п.4.1. Изучаемые нами линейные пространства моделируют многие конкретные пространства (см. § 1). Однако в некоторых из них (например, V_2, V_3) имеются понятия, аналоги которых нами еще не вводились: это скалярное произведение, длина вектора и ряд других. Введем их.

Определение. *Говорят, что в пространстве K над полем F задано скалярное произведение (x, y), если любой паре элементов $x, y \in K$ ставится в соответствие число $(x, y) \in F$ и если это соответствие обладает следующими свойствами: для $\forall\, x, y, z \in K$ и $\forall\, \lambda \in F$ выполняется*

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$;
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x, x) > 0$ *при* $x \neq \theta$.

Свойства 2) и 3) означают линейность скалярного произведения по первому аргументу. Отметим, что в силу 1) из 2) следует, что

$$(x, y + z) = \overline{(y + z, x)} = \overline{(y, x)} + \overline{(z, x)} = (x, y) + (x, z),$$

и что
$$(x, \lambda y) = \overline{(\lambda y, x)} = \overline{\lambda (y, x)} = \overline{\lambda}(x, y).$$
Далее, в силу 3) для $\forall\, x \in K$
$$(\theta, x) = (0x, x) = 0(x, x) = 0. \tag{4.1}$$

Из свойств 1)–3) вытекает, что для $\forall\, x_i, y_j \in K$ и $\alpha_i, \beta_j \in F$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, p$ справедливо равенство
$$\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i, \sum_{j=1}^{p} \beta_j y_j\Big) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \alpha_i \overline{\beta}_j\,(x_i, y_j). \tag{4.2}$$
Скалярное произведение определяется одинаково как в конечномерном, так и в бесконечномерном пространствах и поэтому все вышесказанное относится и к случаю $\dim K < +\infty$ и к случаю $\dim K = +\infty$. Если $\dim K < +\infty$ и вектора $e_1, \ldots, e_n$ образуют базис, то скалярное произведение векторов $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ в силу (4.2) будет выражаться формулой
$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j\,(e_i, e_j). \tag{4.3}$$
Приведем примеры скалярных произведений.

1. Пусть $K = K_n$. Тогда при $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $\xi_i, \eta_i \in F$, можно положить $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i$. Заметим, что если поле F есть множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел, то в обозначениях вместо K_n иногда пишут R_n, а если F есть множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел, то вместо K_n часто пишут C_n.

2. $K = \mathcal{L}_2[ab] = \big\{x(t) \mid \int_a^b |x(t)|^2 dt < +\infty\big\}$ [3], $F = \mathbb{C}$. Тогда при $x(t), y(t) \in \mathcal{L}_2[ab]$ полагают
$$(x, y) = \int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

3. $K = \big\{x(t) \mid |x(t) \in C^1[ab],\ x'(a) = x(a)\big\}$, $F = \mathbb{C}$.
$$(x, y) = \int_a^b x'(t)\,\overline{y'(t)}\,dt.$$

[3] В определении пространства $\mathcal{L}_2[ab]$ интеграл берется в смысле Лебега (Л) [7]. В нашем курсе мы ограничиваемся функциями из $\mathcal{L}_2[ab]$ квадратично интегрируемыми по Риману (Р), учитывая, что интегралы (Р) и (Л) для этих функций совпадают.

Задание

Проверить, что в приведенных примерах формулы для (x, y) действительно определяют скалярное произведение.

Разумеется, введение скалярного произведения в линейном пространстве неоднозначно. Так, для $x, y \in K_n$ можно положить, например,

$$(x, y)_1 = \sum_{m=1}^{n} m^2 \xi_m \overline{\eta}_m.$$

Задание

Найти необходимые и достаточные условия для набора чисел $\gamma_m \in F$ для того, чтобы формула

$$(x, y)_2 = \sum_{m=1}^{n} \gamma_m \xi_m \overline{\eta}_m$$

определяла скалярное произведение в K_m.

п.4.2. Введем в произвольном линейном пространстве со скалярным произведением понятие нормы вектора, обобщающее понятие длины вектора в V_2 и V_3.

Определение. *Нормой $\|x\|$ вектора $x \in K$ называется корень из скалярного произведения x на x:*

$$\|x\| = (x,x)^{1/2}.$$

В силу свойств скалярного произведения, $\|x\| > 0$ при $x \neq \theta$ и $\|\theta\| = 0$. Для конкретных пространств имеем:

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt} \quad \text{при} \quad x \in \mathcal{L}_2[a, b],$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \qquad \text{при} \quad x \in K_n.$$

Вектор x называется нормированным, если $\|x\| = 1$. Если $\|x\| \neq 1$ и $x \neq \theta$, то вектор x можно нормировать, положив $\widetilde{x} = x \cdot \|x\|^{-1}$. Тогда $\|\widetilde{x}\| = \sqrt{(\widetilde{x}, \widetilde{x})} = \sqrt{(x, x) \cdot \|x\|^{-2}} = 1$.

Выведем ряд полезных неравенств для скалярного произведения и нормы.

Утверждение 1. Для $\forall\, x, y \in K$ выполняется неравенство Коши–Буняковского:

$$|(x, y)| \le \|x\| \cdot \|y\|, \tag{4.4}$$

где знак равенства имеет место только если вектора x и y линейно зависимы.

Утверждение 2. Для $\forall\, x, y \in K$ выполняются неравенства треугольника:

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|, \tag{4.5а}$$

$$\|x - y\| \ge \big|\|x\| - \|y\|\big|, \tag{4.5б}$$

где знак равенства имеет место, только когда вектора x и y линейно зависимы и $(x, y) \ge 0$.

Докажем утверждение 1. Если вектора x и y линейно зависимы, то в силу п. 1.4[4] или $x = \lambda_1 y$ или $y = \lambda_2 x$ для каких-либо $\lambda_1, \lambda_2 \in F$. В обоих случаях, очевидно,

$$|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Далее считаем x и y линейно независимыми и положим $z = \alpha x + \beta y$, где $\alpha = \|y\|^2$, $\beta = -(x, y)$. Очевидно, $\|z\| > 0$, так как при $\|z\| = 0$ мы имели бы $z = \theta$ и в силу линейной независимости векторов x и y выполнялось бы равенство $\alpha = 0$, что невозможно, ибо $y \ne \theta$ вследствие линейной независимости x и y. Имеем

$$\|z\|^2 = (\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y) = \\ = |\alpha|^2 (x, x) + \beta\overline{\alpha}(y, x) + \alpha\overline{\beta}(x, y) + |\beta|^2 (y, y) = \\ = (y, y)\big(\|x\|^2 \|y\|^2 - |(x, y)|^2\big).$$

Так как $\|z\| > 0$, то выполняется $\|x\|^2\|y\|^2 - |(x, y)|^2 > 0$ и (4.4) доказано со знаком строго неравенства.

Применение неравенства (4.4) для конкретных пространств приводит к ряду известных неравенств. Например, при $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in K$ имеем

$$|(x, y)| = \Big|\sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i\Big| \le \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2},$$

[4] Напоминаем, что при ссылках внутри одной главы мы не указываем ее номер. Поэтому п. 1.4 — это пункт 4 из § 1 данной главы.

при $x(t), y(t) \in \mathcal{L}_2[ab]$

$$|(x,y)| = \left|\int_a^b x(t)\,\overline{y}(t)\,dt\right| \le \|x\|\cdot\|y\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}\,\sqrt{\int_a^b |y(t)|^2 dt}$$

и т. д.

Докажем утверждение 2. Имеем

$$\|x \pm y\|^2 = (x \pm y, x \pm y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm (y,x) \pm (x,y). \qquad (4.6)$$

Взяв в (4.6) знак (+) и оценивая там скалярные произведения (y,x) и (x,y) по модулю с помощью (4.4), получим

$$(x+y, x+y) \le \|x\|^2 + 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2. \qquad (4.7а)$$

Аналогично, взяв в (4.6) знак (−), получим

$$(x-y, x-y) \ge \|x\|^2 - 2\|x\|\cdot\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| - \|y\|)^2. \qquad (4.7б)$$

Из неравенств (4.7а), (4.7б) следуют неравенства (4.5а), (4.5б) со знаками $\le$ и $\ge$ соответственно.

Если вектора x, y — линейно независимы, то $|(x,y)| < \|x\|\cdot\|y\|$, поэтому при переходе от (4.6) к (4.7а) и (4.7б) мы получим в (4.7а), (4.7б), а значит и в (4.5а), (4.5б) строгие неравенства. Пусть теперь x и y — линейно зависимы. Покажем, что равенства в (4.5а), (4.5б) возможны лишь при $(x,y) \ge 0$. Действительно, пусть $(x,y) \ge 0$. Тогда при переходе от (4.6) к (4.7а), (4.7б) (а значит и к (4.5а), (4.5б)) мы получим равенство, ибо $(y,x) = \overline{(x,y)} = (x,y)$ и $(x,y) = |(x,y)| = \|x\|\cdot\|y\|$. Пусть теперь в (4.5а), (4.5б) выполняются равенства. Возведя эти равенства в квадрат и приведя в полученных соотношениях подобные члены, мы получим (с учетом (4.6)), что $\mathrm{Re}(x,y) = \|x\|\,\|y\|$. Но так как x и y линейно зависимы, то $|(x,y)| = \|x\|\,\|y\|$, и, значит, $\mathrm{Re}(x,y) = |(x,y)|$, откуда следует, что $\mathrm{Im}(x,y) = 0$ и $(x,y) \ge 0$. Утверждение 2 полностью доказано.

Неравенства (4.4), (4.5а), (4.5б) являются естественным аналогом известных из школьного курса неравенств для векторов. Пусть, например, $x, y \in V_2$, т. е. x и y — вектора на плоскости и φ — угол между ними. Тогда $(x,y) = |x|\,|y|\cos\varphi$ и, значит, $|(x,y)| \le |x|\,|y|$, и $|x+y| \le |x| + |y|$, $|x-y| \ge \big||x| - |y|\big|$.

п.4.3. В векторных пространствах V_2 и V_3 после введения скалярного произведения было определено понятие ортогональности векторов. Введем это понятие и в случае произвольного линейного пространства.

Определение. *Вектора $x,y \in K$ называются ортогональными, если $(x,y) = 0$.*

Для ортогональных векторов, очевидно, $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (теорема Пифагора).

Задание

Докажите, что взаимно ортогональные вектора $x_1, \ldots, x_m$, $x_j \neq \theta$, $j = 1, 2, \ldots, m$, линейно независимы.

Определение. *Система взаимно ортогональных и нормированных векторов называется ортонормированной.*

Опыт работы в векторных пространствах V_2, V_3 показывает, что очень удобно, когда базис в пространстве является ортонормированным. Аналогичная ситуация имеет место и в любом конечномерном пространстве K со скалярным произведением. Действительно, пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в K, $x, y \in K$. Разложим вектора x, y по базису e и найдем величины (x, y) и $\|x\|$.

При произвольном базисе e имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j,$$

$$(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j (e_i, e_j), \quad \|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\xi}_j (e_i, e_j).$$

А если базис ортонормированный, т. е. если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$ [5], то

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i, \quad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2.$$

Отметим также, что координаты векторов в ортонормированном базисе легко находятся. Умножая скалярно разложения x и y по базису e на вектор e_s, получаем

$$(x, e_s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (e_i, e_s) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \delta_{is} = \xi_s,$$

$$(y, e_s) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j (e_j, e_s) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \delta_{js} = \eta_s.$$

Координаты векторов в ортонормированном базисе иногда называются обобщенными коэффициентами Фурье.

[5] Напоминаем, что символ Кронекера $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, $\delta_{ii} = 1$.

п.4.4. Ортогонализация векторов. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — линейно независимые вектора в (не обязательно конечномерном) пространстве K над полем F и $H = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_n\}$ — линейная оболочка векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Покажем, как, исходя из базиса $e_1, \ldots, e_n$ подпространства $H \subseteq K$, можно построить в H ортонормированный базис. Пусть $\widetilde{f}_1 = e_1$, $f_1 = \widetilde{f}_1 \, \|\widetilde{f}_1\|^{-1}$, $\widetilde{f}_2 = e_2 - (e_2, f_1)f_1$, $f_2 = \widetilde{f}_2 \, \|\widetilde{f}_2\|^{-1}$ и вообще

$$\widetilde{f}_k = e_k - \sum_{s=1}^{k-1}(e_k, f_s)f_s, \tag{4.8а}$$

$$f_k = \widetilde{f}_k \, \|\widetilde{f}_k\|^{-1}, \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{4.8б}$$

Определение (4.8б) корректно, ибо $\|\widetilde{f}_k\| \neq 0$ при $\forall\, k$, $1 \leq k \leq n$. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $\exists\, m$, $2 \leq m \leq n$, такое, для которого $\|\widetilde{f}_m\| = 0$, $\|\widetilde{f}_k\| > 0$ при $1 \leq k < m$, и покажем, что это невозможно. Действительно, в силу соотношений (4.8а) при $k \leq m$ и (4.8б) при $k \leq m-1$ вектора f_m и f_s, $s \leq m-1$, выражаются через линейные комбинации векторов e_t с номерами t не превосходящими соответственно m и s. Поэтому, полагая в (4.8а) $k = m$ и выражая там вектора f_s через $e_1, e_2, \ldots, e_s$, $s \leq m-1$, мы получим, что

$$\widetilde{f}_m = e_m + \sum_{t=1}^{m-1} d_t e_t,$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ — некоторые константы из поля F. Так как, по предположению, $\|\widetilde{f}_m\| = 0$, то $\widetilde{f}_m = \theta$ и, значит,

$$e_m + \sum_{t=1}^{m-1} d_t e_t = \theta,$$

что противоречит линейной независимости векторов $e_1, \ldots, e_m$. Следовательно, $\|\widetilde{f}_k\| > 0$ при $\forall\, k$, $k \leq n$, и определение (4.8б), действительно, корректно при $\forall\, k$, $1 \leq k \leq n$. По построению, вектора f_k нормированы. Покажем, что

$$(f_k, f_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1 \quad \text{при} \quad k = 2, 3, \ldots, n. \tag{4.9}$$

Равенства (4.9) доказываются по индукции. Предположим, что соотношения (4.9) выполняются для $k = 2, 3, \ldots, p$, где p — произвольное число, $p < n$, и докажем (4.9) при $k = p+1$. В силу (4.8а) с $k = p+1$ имеем

$$(\widetilde{f}_{p+1}, f_j) = \Big(e_{p+1} - \sum_{s=1}^{p} (e_{p+1}, f_s)\, f_s, f_j\Big). \tag{4.10}$$

По предположению индукции $(f_s, f_j) = \delta_{sj}$ при $j < s$, $s \le p$. Поэтому правая часть в (4.10) равна нулю. Значит, равенства (4.9) выполняются при $k = p + 1$, и, следовательно, при всех k, $k = 1, 2, \dots, n$. По доказанному, вектора $f_1, \dots, f_n$ образуют ортонормированный базис в H. Таким образом, исходя из произвольной линейно независимой системы векторов $e_1, \dots, e_n$ мы построили ортонормированную систему $f_1, \dots, f_n$. Если вектора $e_1, \dots, e_n$ образовывали базис в K, то вектора $f_1, \dots, f_n$ суть ортонормированный базис в K.

п.4.5. При разложении линейного пространства в прямую сумму подпространств (см. § 3) иногда возникает следующая задача. Дано подпространство $H \subset K$. Требуется найти подпространство H_1 так, чтобы $K = H \oplus H_1$. В пространствах без скалярного произведения для решения этой задачи мы выбирали базис $e_1, \dots, e_m$ в H, достраивали его векторами $e_{m+1}, \dots, e_n$ до базиса всего пространства K и в качестве H_1 брали линейную оболочку векторов $e_{m+1}, \dots, e_n$. Однако, если в K есть скалярное произведение, то построение пространства H_1 упрощается. Имеет место

Лемма 4.1. *Пусть K — конечномерное пространство над полем F, $H \subset K$ — произвольное подпространство из K и*

$$H_1 = H_\perp = \{y \mid y \in K,\ (y,x) = 0\ \forall x \in H\}.$$

Тогда

$$K = H \oplus H_\perp.$$

Доказательство. Пусть z — произвольный вектор из K, $e_1, \dots$ $\dots, e_m$ — ортонормированный базис в H и

$$z_\perp = z - \sum_{k=1}^{m} (z, e_k) e_k.$$

Положим $x = \sum_{k=1}^{m} (z, e_k) e_k$. Очевидно, $x \in H$, а $z_\perp \in H_\perp$, ибо

$$(z_\perp, e_i) = (z, e_i) - (x, e_i) = (z, e_i) - \sum_{k=1}^{m} (z, e_k)(e_k, e_i) = \\ = (z, e_i) - (z, e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Значит, $(z_\perp, x) = 0$. По построению

$$z = x + z_\perp,$$

т. е. $\forall z \in K$ представлен в виде суммы векторов из H и $H_\perp$. Это представление единственно, т. е. если $z = \widetilde{z}_\perp + \widetilde{x}$, где $\widetilde{z}_\perp \in H_\perp$, $\widetilde{x} \in H$, то $\widetilde{z}_\perp = z_\perp$ и $\widetilde{x} = x$. Действительно, поскольку

$$z = \widetilde{z}_\perp + \widetilde{x} = z_\perp + x, \tag{4.11}$$

то $\widetilde{z}_\perp - z_\perp = x - \widetilde{x}$. Умножая обе части этого равенства на $(x - \widetilde{x})$, получим

$$(x - \widetilde{x}, x - \widetilde{x}) = (\widetilde{z}_\perp - z_\perp, x - \widetilde{x}) = 0$$

и, значит, $x = \widetilde{x}$. В силу (4.11) $z_\perp = \widetilde{z}_\perp$. Лемма доказана.

§ 5. ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

п.5.1. В настоящем параграфе обсуждается ряд вопросов, относящихся в основном к бесконечномерным пространствам со скалярным произведением. Обычно эти вопросы не включаются в курс линейной алгебры — они ближе к курсам математического или даже функционального анализа. Однако ответы на них позволяют сделать переход от конечномерного случая к бесконечномерному более естественным и понятным. Далее мы рассматриваем пространства только над полями $F = \mathbb{C}$ или $F = \mathbb{R}$.

Определение. *Пространство K со скалярным произведением называется предгильбертовым.*

Наличие в пространстве скалярного произведения, а следовательно и нормы, позволяет ввести в K метрику, т. е. определить расстояние между элементами. В качестве расстояния между элементами x и y из K возьмем $\|x - y\|$. Последовательность $\{x_m\} \in K$ назовем сходящейся к предельному элементу $x_0 \in K$ и будем писать $x_m \to x_0$ при $m \to \infty$, если $\|x_m - x_0\| \to 0$ при $m \to \infty$. Последовательность $\{x_m\} \in K$ назовем фундаментальной, если

$$\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0. \tag{5.1}$$

Любая сходящаяся последовательность — фундаментальна, ибо если $x_n \to x_0$, то, используя (4.5а), имеем

$$\|x_m - x_n\| = \|x_m - x_0 + x_0 - x_n\| \le \|x_m - x_0\| + \|x_0 - x_n\| \to 0$$

при $m, n \to \infty$. Однако, обратное утверждение, вообще говоря, не верно, т. е. в предгильбертовом пространстве K фундаментальная последовательность не обязательно сходится к элементу из K. Приведем пример. Пусть $K = C[0, 2]$, и при $x(t), y(t) \in K$

$$\big(x(t), y(t)\big) = \int_0^2 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt, \tag{5.2а}$$

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_0^2 |x(t)|^2 dt}. \tag{5.2б}$$

Рассмотрим последовательность функций $x_n(t)$, $x_n(t) \equiv 0$ при $t \in [0, 1 - 1/n]$, $x_n(t) = n(t - 1 + 1/n)$ при $t \in [1 - 1/n, 1]$, $x_n(t) \equiv 1$ при $t \in [1, 2]$. Вычисления показывают, что $\|x_m(t) - x_p(t)\| \to 0$ при $m, p \to \infty$, т. е. последовательность x_n — фундаментальна.

Очевидно, что последовательность $x_n(t)$ в каждой точке t сходится к функции

$$y_0(t) = 0, \quad t \in [0, 1), \qquad y_0(t) = 1, \quad t \in [1, 2].$$

Функция $y_0(t)$ имеет разрыв при $t = 1$ и поэтому $y_0(t) \notin C[0, 2]$, но это не мешает считать величину $\|y_0(t) - x_n(t)\|$ по формуле (5.2б). Имеем

$$\|y_0 - x_n\|^2 = \int\limits_0^2 |y_0 - x_n|^2\, dt = \int\limits_{1-1/n}^{1} |x_n|^2\, dt \leq \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Допустим теперь, что у последовательности x_n существует предельный элемент $x_0 \in K$, т. е. $\|x_0 - x_n\| \to 0$, при $n \to \infty$. Тогда

$$\|x_0 - y_0\| = \|y_0 - x_n + x_n - y_0\| \leq \|y_0 - x_n\| + \|x_n - x_0\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Значит, $\|y_0 - x_0\| = 0$, т. е. $\int_0^2 |y_0 - x_0|^2 dx = 0$ и, следовательно, $y_0 = x_0$, что неверно, ибо $x_0 \in C[0, 2]$, $y_0 \notin C[0, 2]$. Таким образом, рассматриваемая фундаментальная последовательность x_n не имеет предельного элемента в пространстве K.

Определение. *Пространство K, в котором любая фундаментальная последовательность сходится к элементу этого пространства, называется полным*[6].

Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым.

Задание

Доказать, что любое конечномерное предгильбертово пространство над полем $F = \mathbb{R}$ (или $F = \mathbb{C}$) является гильбертовым.

---

[6] Данное определение относится к любым линейным пространствам, в которых определено расстояние между элементами, а значит, и понятие сходимости. Например, пространство $C[0,2]$ является полным относительно равномерной сходимости, т. е. если для какой-то последовательности функций $f_n(t) \in C[0,2]$ выполняется равенство $\lim\limits_{n,m\to\infty} \max\limits_{t\in[0,2]} |f_n(t) - f_m(t)| = 0$, то $\exists f_0(t) \in C[0,2]$ так, что $\max\limits_{t\in[0,2]} |f_n(t) - f_0(t)| \to 0$ при $n \to \infty$.

п.5.2. Пусть K — гильбертово пространство и $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — бесконечная ортонормированная система векторов из K (т.е. $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$). Для $\forall\, y \in K$ числа $c_i = (y, e_i)$ называются обобщенными коэффициентами Фурье. Составим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ и определим его частную сумму

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k.$$

Будем говорить, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится к вектору y и писать

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k,$$

если

$$\|y - S_n\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Положим

$$R_n = y - S_n$$

и выясним некоторые свойства векторов R_n и S_n. Докажем. что

$$(R_n, e_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{5.3}$$

$$(R_n, S_n) = 0, \tag{5.4}$$

$$\|S_n\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \tag{5.5}$$

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \|R_n\|^2. \tag{5.6}$$

Имеем

$$(R_n, e_j) = (y - S_n, e_j) = (y, e_j) - \sum_{k=1}^{n} c_k (e_k, e_j) = c_j - \sum_{k=1}^{n} c_k \delta_{kj} = c_j - c_j = 0.$$

Равенство (5.3) доказано. Справедливость (5.4) следует из (5.3):

$$(R_n, S_n) = \sum_{j=1}^{n} \overline{c}_j (R_n, e_j) = 0.$$

Далее,

$$\|S_n\|^2 = (S_n, S_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \sum_{j=1}^{n} c_j e_j \right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c}_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c}_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} |c_i|^2$$

и (5.5) доказано. Наконец, (5.6) следует из (5.4), (5.5):

$$\|y\|^2 = (R_n + S_n, R_n + S_n) =$$
$$= \|R_n\|^2 + (R_n, S_n) + (S_n, R_n) + \|S_n\|^2 = \|R_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2.$$

В силу (5.6)

$$\|y\|^2 \geq \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2. \tag{5.7}$$

Правая часть неравенства (5.7) есть неубывающая числовая функция от n. Поэтому в (5.7) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. Сделав это, получим

$$\|y\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \tag{5.8}$$

Неравенство (5.8) называется неравенством Бесселя. Если в (5.8) имеет место равенство, т. е.

$$\|y\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2, \tag{5.9}$$

то его называют равенством Парсеваля. Из (5.8) следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится. Поэтому и в силу (5.6) существует предел $\|R_n\|$ при $n \to \infty$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \|R_n\|^2 = \|y\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2. \tag{5.10}$$

Равенство (5.10) показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|R_n\|^2 = 0$ тогда и только тогда, когда для вектора y выполняется равенство Парсеваля.

п.5.3. Определение. *Ортонормированная система векторов $e_1, e_2, \ldots$ называется полной в K, если для $\forall\, y \in K$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится к y:*

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Полная ортонормированная система в бесконечномерном гильбертовом пространстве K является аналогом ортонормированного базиса в конечномерном пространстве.

Замечания

1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ сходится независимо от полноты системы $e_1, e_2, \ldots$.

Действительно, сходимость ряда — это сходимость частных сумм S_n. Чтобы доказать существование предела $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ достаточно показать, что последовательность S_n — фундаментальна (так как в гильбертовом пространстве любая фундаментальная последовательность сходится). Имеем (считая $n > m$)

$$\lim_{m,n\to\infty} \|S_n - S_m\|^2 = \lim_{m,n\to\infty} \left\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \right\|^2 = \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 = 0,$$

ибо в силу (5.7) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2$ сходится, а значит, последовательность S_n сходится к некоторому вектору из K.

2. Не любая бесконечная ортонормированная система является полной. Действительно, если $e_1, e_2, \ldots$ — полная ортонормированная система, то, например, система $e_2, e_3, \ldots$ не будет полной хотя бы потому, что элемент e_1 не может быть разложен по векторам $e_2, e_3, \ldots$, так как все его обобщенные коэффициенты Фурье равны нулю.

ГЛАВА II

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ. ДЕЙСТВИЯ НАД ЛИНЕЙНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

п.1.1. Пусть X и Y — не обязательно конечномерные линейные пространства над полем F. Будем говорить, что в пространстве X задан оператор A со значениями в пространстве Y и писать $X \xrightarrow{A} Y$, если задано отображение A, ставящее в соответствие каждому элементу $x \in X$ какой-либо элемент $y \in Y$. В этом случае пишем $y = Ax$.

Определение. *Оператор A называется линейным, если для $\forall\, x_1, x_2 \in X$ и для $\forall\, \alpha, \beta \in F$*

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2. \tag{1.1}$$

В случае $\dim X < +\infty$ для задания оператора A достаточно задать его на базисе $e_1, \ldots, e_n$ пространств X, т. е. задать вектора Ae_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, если $x = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j$, то в силу (1.1)

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} \xi_j A e_j.$$

Если $\dim X < +\infty$, $\dim Y < +\infty$ и $f_1, \ldots, f_m$ — базис в пространстве Y, то, разлагая вектора Ae_j по этому базису, имеем

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.2}$$

где a_{ij} — числа из поля F, зависящие от оператора A и от выбранных базисов $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_m$. Поместим числа a_{ij} в таблицу $\|A\|$ из m $(= \dim Y)$ строк и n $(= \dim X)$ столбцов, записав в j-м стобце коэффициенты a_{ij}, $i = 1, 2, \dots, m$ разложения (1.2) вектора Ae_j по базису $f_1, \dots, f_m$. Таким образом, таблица $\|A\|$ имеет вид

$$\|A\| = \begin{Vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта таблица называется матрицей оператора A. Для матрицы $\|A\|$ используется также обозначение

$$\|A\| = (a_{ij})_m^n \quad \text{или} \quad \|A\| = (a_{ij}).$$

Знание матрицы оператора A позволяет найти координаты вектора Ax для любого $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in X$. Действительно,

$$Ax = \sum_{j=1}^n \xi_j Ae_j = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{i=1}^m a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^m \Big(\sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j \Big) f_i.$$

Таким образом, координаты η_i вектора $Ax = \sum_{i=1}^m \eta_i f_i$ выражаются формулами

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j, \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1.3}$$

п.1.2. Приведем примеры линейных операторов.

1. Пусть $K = X = Y$, $\dim K = n$, $e_1, \dots, e_n$ — базис в K и

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\lambda_i \in F$. Оператор A и его матрица в этом случае назваются диагональными, ибо матрица $\|A\|$ может содержать не нулевые элементы только на диагонали:

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Если у диагонального оператора $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 1$, то оператор называется тождественным (единичным) и обозначается через I, а его матрица — через E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, $Ix = x$ для $\forall\, x \in K$.

2. Оператор проектирования. Пусть $n = \dim K < +\infty$, H — подпространство K и $m = \dim H < n$. Обозначим через $e_1, \ldots, e_m$ базис в H и дополним его векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$ до базиса в K. Тогда $\forall\, x \in K$ имеет вид $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, e_i$. Положим

$$P_H x := \sum_{i=1}^{m} \xi_i\, e_i.$$

Оператор P_H называется оператором проектирования в K на подпространство H. Очевидно, $P_H^2 = P_H$ и матричные элементы p_{st} матрицы $\|P_H\|$ оператора P_H имеют вид: $p_{ss} = 1$, $s = 1, 2, \ldots, m$, $p_{st} = 0$ при $\forall\, s, t$, $s \neq t$ и при $s = t > m$.

3. $X = K_n = \{x \mid x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)\} = Y$. $Ax = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, где $\eta_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}\xi_j$, d_{ij} — произвольные фиксированные числа из поля F.

Задания

1. Доказать линейность операторов в примерах 1–3.

2. Пусть $X = Y = C[-1, +1]$, $x(t) \in X$. Выяснить, являются ли линейными следующие операторы A_1–A_6:

а) $A_1x(t) = x^2(t)$; б) $A_2x(t) = \sqrt{x^2(t)}$; в) $A_3x(t) = |x(t)|^{1/2}$;

г) $A_4x(t) = \alpha(t)x(t)$, где $\alpha(t)$ — фиксированная функция из X;

д) $A_5x(t) = x(t^2)$, е) $A_6x(t) = x\big(\varphi(t)\big)$, где $\varphi(t)$ — фиксированная непрерывная функция из X, $-1 \leq \varphi(t) \leq +1$.

п.1.3. Пусть линейный оператор A действует из пространства X в пространство Y, $\dim X, \dim Y \leq +\infty$ и $AX = \{Ax \mid x \in X\}$.

Определение. *Будем говорить, что оператор A осуществляет изоморфное отображение пространства X на пространство Y, если $AX = Y$ и если отображение A взаимно однозначно.*

Другими словами, линейное отображение A есть изоморфизм, если для $\forall\, y \in Y$ $\exists!\, x$ такой, что $Ax = y$.

При изоморфизме линейно независимые вектора переходят в линейно независимые. Покажем это. Пусть θ_X и θ_Y — нуль-вектора пространств X и Y, $x_1, \ldots, x_m$ — линейно независимые вектора из пространства X, $y_i = Ax_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Если вектора $y_1, \ldots, y_m$ линейно зависимы, то $\exists\, \alpha_i \in F$ так, что

$$z_Y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = \theta_Y \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| > 0.$$

В силу линейности и взаимной однозначности отображения A прообраз $z_X \in X$ вектора $z_Y \in Y$ есть

$$z_X = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \theta_X, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| > 0,$$

что невозможно в силу линейной независимости векторов $x_1, \ldots, x_m$. Значит, образы y_i линейно независимых векторов x_i линейно независимы. С другой стороны, если $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_m$ — линейно независимые вектора из Y, то их прообразы $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$ при отображении A тоже линейно независимы. Действительно, если бы вектора $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_m$ были линейно зависимы, то $\exists\, \beta \in F$ так, что

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \overline{x}_i = \theta_X \tag{1.4а}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} |\beta_i| > 0. \tag{1.4б}$$

Тогда, применяя оператор A к (1.4а), мы получили бы, что

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i \overline{y}_i = \theta_Y,$$

что невозможно. Отсюда следует, в частности, что конечномерные изоморфные пространства имеют одинаковую размерность. Более того, любые два (конечномерных) пространства X и Y одинаковой размерности — изоморфны. Действительно, пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — базисы в пространствах X и Y. Тогда изоморфизм между X и Y можно задать линейным оператором A_0, для которого $A_0 e_i = f_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Задание

Проверить, что отображение A_0, $X \xrightarrow{A_0} Y$ — изоморфизм.

п.1.4. Пусть линейные операторы A и B действуют из линейного пространства X в линейное пространство Y. Оператор C назовем суммой операторов A и B и будем писать $C = A + B$, если для $\forall\, x \in X$ выполняется

$$Cx = Ax + Bx.$$

Оператор D назовем произведением числа $\alpha \in F$ на оператор A и будем писать $D = \alpha A$, если для $\forall\, x \in X$

$$Dx = \alpha\, Ax.$$

Очевидно, операторы C и D — линейные; кроме того, для $\forall\, \alpha, \beta \in F$ легко проверяются равенства

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Пусть $K_{\text{оп}} = K_{\text{оп}}(X, Y)$ — множество всех линейных операторов, действующих из X в Y. Легко видеть, что это множество содержит и нулевой оператор A_θ, для которого $A + A_\theta = A$ при $\forall\, A \in K_{\text{оп}}$, и противоположный для A оператор $\widetilde{A}$, такой, что $A + \widetilde{A} = A_\theta$. Действительно, пусть θ_Y — нуль-вектор пространства Y. Определим операторы A_θ и $\widetilde{A}$ равенствами $A_\theta x = \theta_Y$, $\widetilde{A}x = -Ax$ для $\forall\, x \in X$. Очевидно, что операторы $A_\theta, \widetilde{A}$ принадлежат $K_{\text{оп}}$ и имеют требуемые свойства. Таким образом, множество линейных операторов обладает свойствами линейного пространства.

Задание

Докажите, что $K_{\text{оп}}(X, Y)$ — линейное пространство над полем F.

Кроме операций сложения и умножения на скаляр, можно определить операцию умножения линейных операторов.

Пусть X, Y, Z — линейные конечномерные пространства над полем F, A, B — линейные операторы, $X \xrightarrow{B} Y$, $Y \xrightarrow{A} Z$.

Определение. *Оператор C назовем произведением операторов A и B и будем писать $C = AB$, если для $\forall\, x \in X$ выполняется*

$$Cx = A(Bx).$$

Покажем, что оператор C — линейный, $X \xrightarrow{C} Z$. Пусть $x_1, x_2 \in X$, $\alpha_1, \alpha_2 \in F$. Тогда для $\forall\, x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2$

$$C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A\big(B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)\big) = A(\alpha_1 Bx_1 + \alpha_2 Bx_2) = \\ = \alpha_1 ABx_1 + \alpha_2 ABx_2 = \alpha_1 Cx_1 + \alpha_2 Cx_2.$$

Аналогично определению произведения двух операторов можно определить произведение любого конечного числа операторов. Пусть, например, $X_1, X_2, \ldots, X_{m+1}$ — линейные пространства, операторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ действуют согласно схеме

$$X_1 \xrightarrow{A_m} X_2 \xrightarrow{A_{m-1}} X_3 \xrightarrow{A_{m-2}} X_4 \ldots X_{m-1} \xrightarrow{A_2} X_m \xrightarrow{A_1} X_{m+1}.$$

Полагаем $C = A_1A_2\ldots A_m$, если $Cx = A_1\Big(A_2\big(\ldots(A_m x)\ldots\big)\Big)$.

п.1.5. В курсах линейной алгебры линейные операторы изучаются обычно в конечномерных пространствах. Однако огромное большинство операторов, встречающихся в приложениях, действует в бесконечномерных пространствах. Поэтому необходимо отметить возникающие здесь отличия, а также указать общие свойства по сравнению с конечномерным случаем. В пп. 1.1 и 1.3 мы не исключали случаи $\dim X = \dim Y = +\infty$, но предполагали, что оператор A определен на $\forall\, x \in X$. Здесь мы начнем с того, что в бесконечномерном пространстве оператор A, как правило, определен не во всем пространстве X, а в некотором его подпространстве (обычно бесконечномерном), называемом областью определения оператора A и обозначаемом D_A. При этом один и тот же оператор A в одном и том же пространстве может иметь различные области определения в зависимости от рассматриваемой задачи.

Например, пусть $X = \mathcal{L}_2[a,b] = \big\{x(t) \mid \int_a^b |x|^2 dt < +\infty\big\}$ (см. п. 4.1, гл. I) и оператор $A = -d^2/dt^2$. Ясно, что оператор A не может быть определен на всем пространстве $\mathcal{L}_2[a,b]$. В качестве области определения A можно взять, в частности, любую из областей

$D_A = \{x(t) \mid x(t) \in C^2[a,b]\}$;

$D_A^{(1)} = \{x(t) \mid x(t) \in D_A,\ x(a) = x(b) = 0\}$;

$D_A^{(2)} = \{x(t) \mid x(t) \in D_A,\ x(a) = 0,\ x'(b) = 0\}$ и т. д.

Далее, в бесконечномерном пространстве не существует базиса и поэтому в рамках нашего курса мы не можем говорить, например, о матрице рассматриваемого оператора.

Дадим строгие определения. Пусть X и Y — линейные пространства над полем F, $\dim X = +\infty$, $\dim Y \le +\infty$ и $D \subseteq X$ — некоторое подпространство из X. Назовем оператор A, действующий из D в Y линейным, если для $\forall\, x_1, x_2 \in D$ и $\forall\, \alpha, \beta \in F$ выполняется

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\, A x_1 + \beta\, A x_2.$$

Если B — линейный оператор, $D \xrightarrow{B} Y$, то мы можем определить сумму $C_1 = A + B$ операторов A и B и произведение $C_2 = \alpha A$ скаляра α на оператор A так же как в п. 1.3, но всюду вместо включения $x \in X$ мы должны писать $x \in D$. Легко видеть, что множество линейных операторов, действующих из D в Y является линейным пространством (докажите это).

Следуя идеям п. 1.3, можно определить произведение линейных операторов, действующих в бесконечномерных пространствах. В дальнейшем изложении мы всюду будем отмечать, какие результаты относятся только к конечномерному случаю, а какие верны и для бесконечномерных пространств.

§ 2. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

п.2.1. Пусть X и Y — конечномерные пространства над полем F, $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ — базисы в них, и A — произвольный линейный оператор, $X \xrightarrow{A} Y$. В п. 1.1 мы установили, что оператору A отвечает матрица $\|A\| = (a_{ij})^n_m$, в j-м столбце которой записаны коэффициенты a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$ разложения (1.2) вектора Ae_j по базису $f_1, \ldots, f_m$. Пусть линейный оператор B также действует из X в Y и $\|B\| = (b_{ij})^n_m$. Определим линейные операторы $C = A + B$, $D = \alpha A$, $\alpha \in F$, согласно п. 1.3. В силу п. 1.1 этим операторам будут отвечать матрицы $\|C\| = (c_{ij})^n_m$ и $\|D\| = (d_{ij})^n_m$, элементы которых определяются из соотношений:

$$Ce_j = Ae_j + Be_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) f_i = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} f_i,$$

$$De_j = \alpha Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ij} f_i = \sum_{i=1}^{m} d_{ij} f_i.$$

Отсюда

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad d_{ij} = \alpha a_{ij}. \tag{2.1}$$

Определение. *Матрицы $\|C\| = (c_{ij})^n_m$ и $\|D\| = (d_{ij})^n_m$ с матричными коэффициентами* (2.1) *называются соответственно суммой $\|A\| + \|B\|$ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ и произведением $\alpha\|A\|$ скаляра α на матрицу $\|A\|$, т. е.*

$$\|C\| = \|A + B\| = \|A\| + \|B\|, \quad \|D\| = \|\alpha A\| = \alpha\|A\|. \tag{2.2}$$

Другими словами, сумма $\|A\| + \|B\|$ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ — это матрица, отвечающая сумме $A + B$ операторов A и B, а произведение скаляра α на матрицу $\|A\|$ — это матрица оператора αA.

Разумеется, определить сумму матриц и произведение скаляра на матрицу можно было не вспоминая про операторы, а оперируя только с матрицами. Именно так и делается в большинстве руководств по линейной алгебре и это отнюдь не мешает работать с матрицами. Более того, в практической работе не обязательно (а иногда излишне) помнить о происхождении определений (2.1), а надо просто их использовать. В то же время знать истоки определения действий с матрицами весьма полезно. И особенно ясно мы это увидим при определении произведения матриц в п. 2.3. Но пока остановимся на других вопросах.

п.2.2. Пусть $K_{\text{м}}(m,n)$ — множество матриц с m строками и n столбцами с элементами из поля F и с операциями сложения матриц и умножения матрицы на скаляр, определенными согласно (2.1), (2.2).

Задание

Докажите, что $K_{\text{м}}(m,n)$ — линейное пространство над полем F.

Мы знаем (см. п. 1.4), что каждому линейному оператору, действующему из X в Y, отвечает матрица $m \times n$ пространства $K_{\text{м}}(m,n)$ (зависящая от выбора базисов в пространствах X и Y). Однако верно и обратное. Каждой матрице из $K_{\text{м}}(m,n)$ можно сопоставить единственный оператор из $K_{\text{оп}}(X,Y)$ следующим образом. Пусть $\|C\| = (c_{ij})_m^n$ — некоторая матрица из $K_{\text{м}}(m,n)$. Рассмотрим произвольные n-мерное линейное пространство X и m-мерное пространство Y и пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ — базисы в X и Y. Поставим в соответствие матрице $\|C\|$ линейный оператор C, $X \xrightarrow{C} Y$, определяемый равенствами

$$Ce_j = \sum_{i=1}^{m} c_{ij} f_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Ясно, что это соответствие определяет оператор C однозначно и что оно линейно, т. е. линейной комбинации $\alpha\|A\| + \beta\|B\|$ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ из $K_{\text{м}}(m,n)$ будет отвечать линейная комбинация $\alpha A + \beta B$ отвечающих матрицам операторов A и B из $K_{\text{оп}}(X;Y)$. Кроме того, разным матрицам отвечают разные операторы. Действительно, если матрицам $\|A\|$ и $\|B\|$ отвечает один и тот же оператор, то их разности $\|C\| = \|A\| - \|B\|$ будет отвечать нулевой оператор, что в силу (2.3) возможно только для матрицы $\|C\|$ с нулевыми элементами $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} = 0$, т. е. при $\|A\| = \|B\|$. Из проведенных рассуждений следует, что пространство $K_{\text{м}}(m,n)$ матриц изоморфно пространству линейных операторов $K_{\text{оп}}(X, Y)$, действующих из n-мерного пространства в m-мерное (см. п. 1.3). Этот факт можно использовать, например, для нахождения размерности пространства $K_{\text{оп}}(X; Y)$.

Задание

Найти $\dim K_{\text{оп}}(X; Y)$.

п.2.3. Пусть X, Y, Z — линейные пространства над полем F, A и B — линейные операторы: $X \xrightarrow{B} Y \xrightarrow{A} Z$, e_i, f_j, g_s, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$, $s = 1, 2, \ldots, p$ — базисы соответственно в пространствах X, Y, Z и

$$\|A\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pm} \end{pmatrix}, \quad \|B\| = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

— матрицы операторов A и B в этих базисах. Найдем матрицу $\|C\|$ оператора $C := AB$. Имеем:

$$Ce_j = ABe_j = A\sum_{k=1}^{m} b_{kj} f_k = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} A f_k = \\ = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \sum_{i=1}^{p} a_{ik} g_i = \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \Big) g_i,$$

т. е. матричные элементы c_{ij} матрицы $\|C\|$ будут определяться равенствами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, 2, \ldots, p, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Определение. *Матрица* $\|C\| = (c_{ij})_p^n$, *элементы которой определяются формулами* (2.4), *называется произведением матриц* $\|A\|$ *и* $\|B\|$:

$$\|C\| = \|A\|\,\|B\|.$$

Другими словами, произведением $\|A\|\,\|B\|$ матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ называется матрица $\|C\|$, отвечающая произведению $C = AB$ соответствующих операторов. Согласно (2.4) элемент c_{ij} матрицы $\|C\|$ получается умножением (как m-мерных векторов) i-й строки матрицы $\|A\|$ на j-й столбец мат- рицы $\|B\|$. Умножение матриц $\|A\|$ и $\|B\|$ возможно, если число столбцов матрицы $\|A\|$ равно числу строк матрицы $\|B\|$. Полученная в произведении матрица $\|C\| = \|A\|\,\|B\|$ будет иметь столько строк, сколько их у матрицы $\|A\|$, и столько столбцов, сколько их у матрицы $\|B\|$. То есть $\|C\| = (c_{ij})_p^n$. Отметим, что если определения суммы матриц и умножения матрицы на скаляр (см. п. 2.1) были интуитивно предсказуемы без упоминания операторов, то определение (2.4) произведения матриц без отсыла к произведению операторов выглядело бы неожиданным.

Задание

Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ — квадратные матрицы порядка n. Найти произведение $\|A\|\,\|B\|$ в случаях, когда

1) $a_{i_0 j_0} = 1$, $a_{ij} = 0$ при $(i,j) \neq (i_0, j_0)$;

2) $b_{i_0 j_0} = 1$, $b_{ij} = 0$ при $(i,j) \neq (i_0, j_0)$; здесь i_0, j_0 — произвольные числа $1 \le i_0, j_0 \le n$.

п.2.4. Умножение блочных матриц. В некоторых случаях удобно перед умножением матриц разбить их на блоки. Пусть мы ищем $\|A\|\,\|B\|$. Проведя горизонтальные и вертикальные линии, разобьем матрицы $\|A\|$ и $\|B\|$ на блоки, которые образуют суперстроки и суперстолбцы этих матриц. Обозначим блоки матрицы $\|A\|$ через A_{ij}, а матрицы $\|B\|$ — через B_{js}. Разбиение проведем так, что:

1) число суперстолбцов матрицы $\|A\|$ равняется числу суперстрок матрицы $\|B\|$ (т. е. число блоков A_{ij}, $j = 1, 2, \ldots, k$ в i-й суперстроке совпадает с числом блоков B_{jt}, $j = 1, 2, \ldots, k$ в t-м суперстолбце матрицы $\|B\|$);

2) число столбцов в блоке A_{ij} совпадает с числом строк в блоке B_{jt} для $\forall\, i, j, t$, т. е.

$$\|A\| = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1k} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2k} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline A_{p1} & A_{p2} & \ldots & A_{pk} \end{array}\right), \quad \|B\| = \left(\begin{array}{c|c|c|c} B_{11} & B_{12} & \ldots & B_{1s} \\ \hline B_{21} & B_{22} & \ldots & B_{2s} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline B_{k1} & B_{k2} & \ldots & B_{ks} \end{array}\right).$$

Тогда произведение $\|A\|\,\|B\|$ можно записать в виде

$$\|A\|\,\|B\| = \left(\begin{array}{c|c|c|c} \sum\limits_{j=1}^{k} A_{1j}B_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{k} A_{1j}B_{j2} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{k} A_{1j}B_{js} \\ \hline \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hline \sum\limits_{j=1}^{k} A_{pj}B_{j1} & \sum\limits_{j=1}^{k} A_{p_j}B_{j2} & \ldots & \sum\limits_{j=1}^{k} A_{pj}B_{js} \end{array}\right).$$

Довольно часто встречается случай перемножения так называемых блочно-диагональных матриц.

Определение. *Назовем квадратную матрицу* $\|C\| = (c_{ij})$ *блочно-диагональной, если все ее элементы равны нулю, кроме быть может, элементов не пересекающихся квадратных блоков произвольной размерности, диагонали которых лежат на диагонали* $c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn}$ *матрицы* $\|C\|$.

Если $\|A\|$ и $\|B\|$ — блочно-диагональные матрицы, имеющие одинаковое число блоков,

$$\|A\| = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}, \quad \|B\| = \begin{pmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{pmatrix}$$

и блоки A_s и B_s имеют одинаковый порядок, $s = 1, 2, \ldots, p$, то

$$\|A\|\,\|B\| = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_pB_p \end{pmatrix}.$$

При этом порядки блоков $A_1, \ldots, A_p$ могут быть произвольны.

§ 3. ОБРАТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И МАТРИЦЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СУЩЕСТВОВАНИЕ, НАХОЖДЕНИЕ

п.3.1. Пусть X и Y — линейные не обязательно конечномерные (если не сказано иное) пространства над полем F, A — линейный оператор, $X \xrightarrow{A} Y$. Линейный оператор $B_л$, $Y \xrightarrow{B_л} X$, называется левым обратным для A если для $\forall\, x \in X$ выполняется

$$B_л A x = x. \tag{3.1}$$

Линейный оператор $B_п$, $Y \xrightarrow{B_п} X$, называется правым обратным для A, если для $\forall\, y \in Y$ выполняется

$$AB_п y = y. \tag{3.2}$$

Обозначим через I_X и I_Y единичные (тождественные) операторы соответственно на линейных пространствах X и Y (т. е. $I_X x = x$ и $I_Y y = y$ для $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in Y$). Тогда равенства (3.1), (3.2) можно переписать в виде

$$B_л A = I_X, \quad AB_п = I_Y. \tag{3.3}$$

Если для оператора A существуют и левый и правый обратные, то они совпадают. Действительно, в силу свойств произведения линейных операторов

$$B_\text{л} A B_\text{п} = B_\text{л}(A B_\text{п}) = B_\text{л} I_Y = B_\text{л}$$

и одновременно

$$B_\text{л} A B_\text{п} = (B_\text{л} A) B_\text{п} = I_X B_\text{п} = B_\text{п},$$

откуда $B_\text{л} = B_\text{п}$. В этом случае в силу (3.3)

$$BA = I_X, \quad AB = I_Y, \tag{3.4}$$

где $B = B_\text{л} = B_\text{п}$.

Определение. *Оператор B, удовлетворяющий соотношениям* (3.4), *называется обратным для оператора A и обозначается через A^{-1}.*

Таким образом, для обратного оператора A^{-1} выполняется

$$A^{-1} A = I_X, \quad A A^{-1} = I_Y. \tag{3.5}$$

Оператор A, у которого существует обратный, называется обратимым.

Вопросы существования и нахождения обратного оператора чрезвычайно важны для приложений. Действительно, очень многие задачи нахождения неизвестной величины x по заданной величине y сводятся (часто приближенно) к задаче решения уравнения

$$Ax = y,$$

где A — известный линейный оператор. И если мы знаем A^{-1}, то применяя A^{-1} к обеим частям этого уравнения, сразу находим x:

$$x = A^{-1} y.$$

п.3.2. Прежде чем формулировать и доказывать теорему о существовании обратного оператора, рассмотрим два примера, в которых обратный оператор не существует. Анализируя их, мы попытаемся понять, какие условия должны выполняться для существования обратного оператора.

Пример 1. Пусть

$$X = \left\{ P_n(t) \mid P_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j t^j, \ \forall a_j \in \mathbb{R}, \ n = 0, 1, 2, \ldots \right\}$$

— линейное пространство всех полиномов любых степеней с вещественными коэффициентами и $Y \equiv X$. В бесконечномерном пространстве X определим операторы A и B формулами

$$AP_n(t) = t\,P_n(t) \in Y, \quad BP_n(t) = \big(P_n(t) - P_n(0)\big)/t \in X.$$

Тогда B будет левым обратным для A, ибо

$$BAP_n(t) = B\big(tP_n(t)\big) = \big(tP_n(t) - 0\,P_n(0)\big)/t = P_n(t)$$

для $\forall\,P_n(t) \in X$. В то же время оператор B не является правым обратным, ибо при $P_n(0) \neq 0$

$$ABP_n(t) = A\big(P_n(t) - P_n(0)\big)/t = P_n(t) - P_n(0) \neq P_n(t).$$

Заметим, что в данном примере множество значений

$$AX = \{AP_n(t) \,|\, P_n(t) \in X\} = \{tP_n(t) \,|\, P_n(t) \in X\}$$

оператора A не совпадает с $Y \equiv X$, ибо AX не содержит полиномов нулевой степени, кроме $P_0 \equiv 0$.

Пример 2. Рассмотрим теперь ситуацию, когда $AX = Y$. Пусть

$$X = K_n = \big\{x \,|\, x = (\xi_1, \ldots, \xi_n),\ \xi_i \in F,\ i = 1, 2, \ldots, n\big\},$$
$$Y = K_{n-1} = \big\{y \,|\, y = (\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}),\ \eta_i \in F,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\big\}.$$

Для $\forall\,x = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) \in X$ определим оператор A равенством $Ax{:=}(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in Y$. Очевидно, что $AX = \{Ax \,|\, x \in K_n\} = Y$. Пусть далее $\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$ — любые числа, $\beta_i \in F$, $\overline{y} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) \in Y$, $\overline{x} = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0) \in X$. Определим оператор B на пространстве Y равенством $B\overline{y} = \overline{x}$. Тогда B — правый обратный для оператора A, ибо

$$AB\overline{y} = AB(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) = A(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0) = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) = \overline{y}.$$

В то же время оператор B не является левым обратным, так как при $x_0 = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n)$ имеем

$$BAx_0 = BA(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, \beta_n) = B(\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}) =$$
$$= (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, 0) \neq x_0, \quad \text{если} \quad \beta_n \neq 0.$$

Таким образом, хотя в данном примере $AX = Y$ (чего не было в примере 1), но обратный оператор A^{-1} не существует.

Заметим, что в данном примере отображение $X \xrightarrow{A} Y$ не является взаимно однозначным, ибо

$$Ax_\alpha = Ax_\beta$$

при $\forall\,x_\alpha = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \alpha)$, $x_\beta = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \beta)$ для $\forall\,\alpha, \beta \in F$.

Таким образом, рассмотренные примеры подсказывают (но не доказывают!), что в формулировке теоремы о существовании обратного оператора желательно потребовать выполнения тех условий, которые не выполняются в примерах 1 и 2, т. е. потребовать, чтобы $AX = Y$ и чтобы отображение $X \xrightarrow{A} Y$ было взаимно однозначным. Оказывается, именно эти условия являются необходимыми и достаточными для существования обратного оператора как в конечномерном, так и в бесконечномерном случаях.

п.3.3. Теорема 3.1. *Пусть линейный оператор A действует из пространства X в пространство Y. Тогда для существования обратного оператора A^{-1} необходимо и достаточно выполнение условий*

$$AX = Y, \tag{3.6}$$

$$\text{отображение} \quad X \xrightarrow{A} Y \quad \text{взаимно однозначно.} \tag{3.7}$$

Замечание. Условия (3.6), (3.7) означают, что оператор A есть изоморфизм пространства X на пространство Y.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть A^{-1} существует. Докажем справедливость требований (3.6), (3.7). Если (3.6) не верно, то $AX \subset Y$ и, значит, $\exists y_0$, $y_0 \in Y$, $y_0 \notin AX$. Так как A^{-1} существует, то $AA^{-1}y_0 = y_0$. Полагая здесь $x_0 = A^{-1}y_0$, получаем $y_0 = Ax_0 \in AX$, что противоречит выбору $y_0 \notin AX$. Поэтому не существует $y_0 \in Y$, $y_0 \notin AX$, т. е. $AX = Y$ и (3.6) доказано.

Докажем (3.7). Покажем, что если

$$Ax_1 = Ax_2, \tag{3.8}$$

то $x_1 = x_2$. Поскольку A^{-1} существует, то, применяя A^{-1} к обеим частям (3.8), получим требуемое равенство $x_1 = x_2$.

Достаточность. Пусть условия (3.6), (3.7) справедливы. Тогда для $\forall y \in Y$, $\exists!\, x$ так, что $Ax = y$. Определим линейный оператор B на пространстве Y соотношением $By = x$ и покажем, что $B = A^{-1}$. Имеем $ABy = Ax = y$ и $BAx = By = x$. Значит оператор B удовлетворяет соотношениям (3.4) и поэтому $B = A^{-1}$. Теорема доказана полностью.

Следствие. *В случае конечномерных пространств X и Y для существования обратного оператора условие* (3.7) *можно заменить на условие*

$$\dim X = \dim Y. \tag{3.9}$$

Для справедливости следствия покажем, что требования (3.6), (3.9) эквивалентны (3.6), (3.7). Действительно, если условия (3.6), (3.7) выполняются, то пространства X и Y изоморфны и, следовательно, $\dim X = \dim Y$, т. е. (3.9) верно. Пусть теперь выполняются условия (3.6), (3.9). Докажем (3.7). Если (3.7) не выполняется, то $\exists\, x_1, x_2 \in X$ такие, что $Ax_1 = Ax_2$ и $x_1 \neq x_2$. Положим $e_1 = x_1 - x_2 \neq \theta_X$ и дополним этот вектор до базиса $e_1, \ldots, e_n$ пространства X ($n = \dim X = \dim Y$). Ясно, что $Y = \mathcal{L}\{Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n\}$. Но $Ae_1 = Ax_1 - Ax_2 = \theta_Y$ и поэтому $\dim Y \leq n-1$, что противоречит (3.9). Значит, предположение о не справедливости (3.7) при выполнении (3.6), (3.9) неверно.

Если $X = Y$, то условие (3.9) выполняется автоматически и остается только одно необходимое и достаточное условие существования обратного оператора — условие (3.6) с $Y = X$.

Задание

Докажите, что при выполнении условия (3.6) условие (3.9) эквивалентно условию линейно независимости векторов $Ae_1, \ldots, Ae_n$, где $e_1, \ldots, e_n$ — базис в X.

п.3.4. Пусть X и Y — линейные пространства над полем F соответственно с базисами $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$, A — линейный оператор, $X \xrightarrow{A} Y$. Если $m \neq n$, то в силу (3.9) обратный оператор A^{-1} не существует, поэтому далее считаем $m = n$.

Пусть матрица оператора A есть $(a_{ij})_n^n$. Тогда

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i.$$

Согласно заданию п. 3.3 для существования обратного оператора A^{-1} необходимо и достаточно, чтобы вектора Ae_j были линейно независимы. А для линейной независимости n векторов Ae_j в n-мерном пространстве Y необходимо и достаточно, чтобы определитель, составленный из координат этих векторов по базису пространства Y, не равнялся нулю (см. п. 2.2, гл. I), т. е.

$$\Delta := \det \|A\| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{3.10}$$

Таким образом, обратный оператор A^{-1} существует тогда и только тогда, когда $\Delta \neq 0$.

Определение 1. *Матрица $\|A^{-1}\|$ обратного оператора называется обратной для матрицы $\|A\|$ оператора A и обозначается через $\|A\|^{-1}$.*

Поскольку

$$A^{-1}A = I_x, \quad AA^{-1} = I_Y,$$

то в силу п. 2.2

$$\|A\|^{-1}\|A\| = E \quad \text{и} \quad \|A\|\,\|A\|^{-1} = E, \tag{3.11}$$

где E — единичная матрица порядка n.

Понятие обратной матрицы можно ввести и без ссылок на обратный оператор (что и делается во многих курсах линейной алгебры):

Определение 2. *Для произвольных квадратных матриц $\|A_0\|$, $\|B_0\|$ с элементами из поля F назовем матрицу $\|B_0\|$ обратной к $\|A_0\|$ и будем писать $\|B_0\| = \|A_0\|^{-1}$, если*

$$\|B_0\|\,\|A_0\| = \|A_0\|\,\|B_0\| = E. \tag{3.12}$$

Определения 1 и 2 — эквивалентны. Действительно, пусть $\|A_0\|$ и $\|B_0\|$ — некоторые матрицы n-го порядка, удовлетворяющие (3.12). В произвольных n-мерных пространствах X и Y над полем F выберем базисы и определим операторы $A\colon X \xrightarrow{A} Y$ и $B\colon Y \xrightarrow{B} X$ так, чтобы их матрицы совпали соответственно с $\|A_0\|$ и $\|B_0\|$. Тогда в силу изоморфизма пространств матриц $K_{\text{м}}(n, n)$ и $K_{\text{оп}}(X; Y)$ будем иметь

$$AB = I_Y, \quad BA = I_X. \tag{3.13}$$

В силу (3.13) $B = A^{-1}$, а $\|B\| = \|B_0\| = \|A_0\|^{-1}$, т. е. матрица $\|B_0\|$, обратная для матрицы $\|A_0\|$, есть матрица оператора B, обратного для оператора A с матрицей $\|A_0\|$. Таким образом, эквивалентность определений 1 и 2 доказана.

п.3.5. Нахождение обратной матрицы. Из рассуждений п. 3.4 следует, что условие существования матрицы $\|A\|^{-1}$ обратной для матрицы $\|A\|$ есть условие существования обратного оператора A^{-1} для оператора A, $X \xrightarrow{A} Y$, с матрицей $\|A\|$, т. е. условие

$$\Delta := \det \|A\| \neq 0. \tag{3.14}$$

Квадратная матрица, определитель которой не равен нулю, называется не особенной. Пусть (3.14) выполнено. Положим $B = A^{-1}$ и найдем $\|B\| = \|A\|^{-1} = (b_{st})_n^n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ — базисы в пространствах X и Y. В силу (3.5)

$$ABf_s = f_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е.

$$A\sum_{j=1}^{n} b_{js}e_j = \sum_{j=1}^{n} b_{js}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i = \sum_{i=1}^{n}\Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{js}\Bigr)f_i = f_s, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.15}$$

Фиксируем индекс s. Тогда в силу линейной независимости векторов $f_1, \ldots, f_n$ из (3.15) следуют соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{js} = \delta_{is}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Таким образом, неизвестные элементы b_{js} матрицы обратного оператора A^{-1} (т. е. обратной матрицы $\|B\| = \|A\|^{-1}$) удовлетворяют линейной алгебраической системе (3.16), определитель которой $\Delta \neq 0$ в силу (3.14). Поэтому по правилу Крамера

$$b_{js} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \vdots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & \ldots & a_{s-1,j-1} & 0 & a_{s-1,j+1} & \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s1} & \ldots & a_{s,j-1} & 1 & a_{s,j+1} & \ldots & a_{sn} \\ a_{s+1,1} & \ldots & a_{s+1,j-1} & 0 & a_{s+1,j+1} & \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \Delta^{-1} =$$

$$= \frac{A_{sj}}{\Delta} = \frac{(-1)^{s+j}|A_{sj}|}{\Delta}, \tag{3.17}$$

где A_{sj} — алгебраическое дополнение элемента a_{sj} матрицы $\|A\|$, $|A_{sj}|$ — минор элемента a_{sj}.

Формулы (3.17) дают выражения для матричных элементов обратной матрицы (т. е. матрицы обратного оператора).

п.3.6. Обсудим теперь вопрос о существовании обратного оператора для произведения $C = A_1A_2\ldots A_k$ линейных операторов, действующих в линейных пространствах X_j, $j = 1, 2, \ldots, k+1$ по схеме

$$X_1 \xrightarrow{A_k} X_2 \xrightarrow{A_{k-1}} \ldots \to X_j \xrightarrow{A_{k+1-j}} X_{j+1} \to \ldots$$
$$\ldots \to X_{k-2} \xrightarrow{A_3} X_{k-1} \xrightarrow{A_2} X_k \xrightarrow{A_1} X_{k+1}.$$

Рассмотрим сначала простой случай, когда $\dim X_j = \dim X_1$, $j = 2, \ldots, k+1$.

Теорема 3.2. *Пусть $C = A_1 A_2 \ldots A_k$. Тогда если*

$$\dim X_1 = \dim X_2 = \ldots = \dim X_{k+1},$$

то для существования оператора C^{-1} необходимо и достаточно, чтобы существовали обратные операторы A_j^{-1}, $j = 1, 2, \ldots, k$. Если A_j^{-1} существуют, $j = 1, 2, \ldots, k$, то $C^{-1} = A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$.

Доказательство. *Достаточность.* Пусть операторы A_j^{-1}, $j = 1, 2, \ldots, k$ существуют. Тогда непосредственная проверка показывает, что оператор $A_k^{-1} A_{k-1}^{-1} \ldots A_1^{-1}$ есть C^{-1}.

Необходимость. Пусть оператор C^{-1} существует. Выберем в пространствах X_j произвольные базисы и заметим, что в силу условия теоремы матрицы $\|A_j\|$ операторов A_j — квадратные и имеют одинаковую размерность. Поэтому

$$\|C\| = \prod_{j=1}^{k} \|A_j\|.$$

Так как оператор C^{-1} существует, то $\det \|C\| \neq 0$. Но

$$\det \|C\| = \prod_{j=1}^{k} \det \|A_j\|,$$

и, следовательно, $\det \|A_j\| \neq 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому обратные операторы A_j^{-1}, $j = 1, \ldots, k$ существуют, т. е. необходимость условия теоремы 3.2 доказана.

Следствие. *Если матрица $\|L\|$ есть произведение квадратных матриц $\|L_j\|$, $j = 1, 2, \ldots, k$, одного и того же порядка, то для существования обратной матрицы $\|L\|^{-1}$ необходимо и достаточно, чтобы существовали обратные матрицы $\|L_j\|^{-1}$. Если они существуют, то*

$$\|L\|^{-1} = \|L_k\|^{-1} \|L_{k-1}\|^{-1} \ldots \|L_2\|^{-1} \|L_1\|^{-1}.$$

п.3.7. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть пространства X_j, операторы A_s и C — те же, что в п. 3.7, но без условия

$$\dim X_1 = \ldots = \dim X_{k+1}.$$

Положим

$$X_1' = X_1, \quad X_{j+1}' = A_{k-j+1}X_j', \quad j = 1, 2, \ldots, k-1, \quad X_{k+1}' = X_{k+1}$$

и обозначим через B_s' оператор A_s на пространстве X_{k-s+1}'. Тогда, очевидно, оператор C можно записать в виде

$$C = B_1 B_2 \ldots B_k.$$

Теорема 3.3. *Для существования обратного оператора C^{-1} необходимо и достаточно, чтобы существовали обратные операторы B_j^{-1}, $j = 1, 2, \ldots, k$. Если эти операторы существуют, то $C^{-1} = B_k^{-1}B_{k-1}^{-1}\ldots B_1^{-1}$.*

Доказательство. Достаточность условия теоремы очевидна. Действительно, пусть операторы B_s^{-1} существуют, $s = 1, 2, \ldots k$, и $D := B_k^{-1}B_{k-1}^{-1}\ldots B_1^{-1}$. Тогда, очевидно, что

$$CD = B_1B_2\ldots B_kB_k^{-1}\ldots B_2^{-1}B_1^{-1} = I_{X_{k+1}},$$
$$DC = B_k^{-1}B_{k-1}^{-1}\ldots B_2^{-1}B_1^{-1}B_1B_2\ldots B_{k-1}B_k = I_{X_1},$$

где I_{X_s} — единичный оператор в пространстве X_s.

Докажем *необходимость*. Пусть обратный оператор C^{-1} существует. Тогда в силу (3.6), (3.9) $CX_1 = X_{k+1}$ и $\dim X_1 = \dim X_{k+1}$. По построению $CX_1 = B_1X_k^1$ и значит $B_1X_1' = X_{k+1}'$. Очевидно, что для любого конечномерного пространства K и любого линейного оператора L, определенного в K, выполняется $\dim LK \le \dim K$. Поэтому

$$\dim X_{j+1}' = \dim B_{k-j+1}X_j' \le \dim X_j', \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Из написанных соотношений следует, что

$$\dim X_1' \ge \dim X_2' \ge \ldots \ge \dim X_k' \ge \dim X_{k+1}' = \dim X_1',$$

и, значит, размерности всех пространств X_j', $j = 1, 2, \ldots, k+1$ совпадают. Учитывая, что $X_{j+1}' = B_{k-j+1}X_j$ и применяя следствие теоремы 3.1, получаем существование обратных операторов B_s^{-1}, $s = 1, 2, \ldots, n$. ▲

Замечание. Для существования оператора C^{-1} в общем случае не требуется существование операторов A_j^{-1}. Пусть, например, $C = A_1A_2$, где оператор A_2 действует из K_n[1] в K_{n+1} по закону

$$A_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, 2\xi_2, \ldots, n\xi_n, \xi_n - \xi_1),$$

[1] Напомним, что $K_p = \{x \mid x = (\xi_1, \ldots, \xi_p),\ \xi_j \in F\}$.

а оператор A_1 действует из K_{n+1} в K_n по закону

$$A_1(\eta_1, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}) = (\eta_1 - \eta_2, \eta_2, \eta_3, \ldots, \eta_n).$$

Очевидно, что обратные операторы A_1^{-1} и A_2^{-1} не существуют, а C^{-1} существует, ибо C осуществляет изоморфное отображение $K_n \xrightarrow{C} K_n$:

$$C(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 - 2\xi_2, 2\xi_2, \ldots, n\xi_n).$$

Задание

Построить C^{-1}.

§ 4. ИЗМЕНЕНИЕ КООРДИНАТ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ БАЗИСА. ПОДОБНЫЕ МАТРИЦЫ

п.4.1. До сих пор мы работали с координатами векторов и матрицами операторов, отвечающими произвольно фиксированному базису в рассматриваемом конечномерном пространстве K над полем F. Однако иногда бывает полезно перейти от используемого базиса к другому. В связи с этим возникают вопросы: как связаны между собой координаты одного и того же вектора и матрицы одного и того же оператора, отвечающие разным базисам? Ответы на эти вопросы даны ниже.

п.4.2. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — два базиса в n-мерном пространстве K и пусть связь между ними дается соотношениями

$$f_j = Pe_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{4.1}$$

где P — некоторый линейный оператор, называемый оператором перехода. Матрица $\|P\| = (p_{ij})_n^n$ оператора P (в базисе e) называется матрицей перехода. С ее помощью равенства (4.1) можно записать в виде

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\, e_i. \tag{4.2}$$

Так как вектора f_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ линейно независимы, то $\det \|P\| \neq 0$. Следовательно, оператор P имеет обратный P^{-1}, который мы обозначим через Q. По определению, $\|Q\| = (q_{st})_n^n = \|P\|^{-1}$. Применяя к обеим частям соотношения (4.1) оператор Q, получим

$$e_j = Qf_j, \tag{4.3}$$

т. е.

$$e_j = \sum_{i=1}^{n} q_{ij} f_i. \tag{4.4}$$

п.4.3. Обозначим координаты произвольного вектора $x \in K$ в базисе e через $\xi_1, \ldots, \xi_n$, в базисе f — через $\eta_1, \ldots, \eta_n$. Имеем:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j. \tag{4.5}$$

Далее, если мы хотим получить выражение координат ξ_i через координаты η_s, то подставим в (4.5) выражение (4.2), а если хотим получить значения η_j через ξ_s, то надо подставить в (4.5) выражение (4.4). Сделаем и то и другое. Подставляя в (4.5) выражение f_j из (4.2), получим

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i = \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} \eta_j \Big) e_i. \tag{4.6}$$

Приравнивая друг другу i-е координаты вектора x в базисе e в обеих частях равенства (4.6), получаем:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \eta_j, \quad i = 1, 2, \ldots . \tag{4.7}$$

Или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \|P\| \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Подставим теперь в (4.5) выражения e_j из (4.4) при $j = s$:

$$x = \sum_{s=1}^{n} \xi_s e_s = \sum_{s=1}^{n} \xi_s \Big(\sum_{j=1}^{n} q_{js} f_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{n} q_{js} \xi_s \Big) f_j = \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j. \tag{4.9}$$

Приравнивая друг другу j-е координаты вектора x по базису f в последних частях (4.9), получим

$$\eta_j = \sum_{s=1}^{n} q_{js} \xi_s, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.10}$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \|Q\| \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

В (4.8) и (4.11) столбцы координат $\eta_1 \dots \eta_n$ и $\xi_1 \dots \xi_n$ мы рассматриваем как одностолбцовые матрицы. Соотношения (4.7)–(4.11) полностью решают задачу нахождения связи между координатами вектора в разных базисах.

Замечание. После вывода соотношений (4.7), (4.8) можно было не подставлять (4.4) в (4.5), а сразу получить равенство (4.11), умножив равенства (4.8) слева на матрицу $\|Q\| = \|P\|^{-1}$.

п.4.4. Рассмотрим линейный оператор A, действующий из K в K и пусть $\|A\|_e = (a_{ij})_n^n$ и $\|A\|_f = (b_{ij})_n^n$ — матрицы оператора A соответственно в базисах e и f. Установим связь между ними. Для этого найдем выражение Af_i двумя способами. Первый: сначала выразим f_i согласно (4.2), а потом применим оператор A. Второй: сначала применим оператор A к вектору f_i, а потом в полученном выражении заменим вектора f_j согласно (4.2). Первый способ дает

$$Af_i = A\sum_{s=1}^{n} p_{si}\, e_s = \sum_{s=1}^{n} p_{si} A e_s = \sum_{s=1}^{n} p_{si} \sum_{j=1}^{n} a_{js} e_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{n} a_{js} p_{si} \Big) e_j.$$

По второму способу

$$Af_i = \sum_{s=1}^{n} b_{si} f_s = \sum_{s=1}^{n} b_{si} \sum_{j=1}^{n} p_{js} e_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{s=1}^{n} p_{js} b_{si} \Big) e_j.$$

Мы получили два разложения вектора Af_i по базису e. Так как координаты вектора по базису определяются единственным образом, то

$$\sum_{s=1}^{n} a_{js} p_{si} = \sum_{s=1}^{n} p_{js} b_{si},$$

т. е.

$$\big(\|A\|_e \|P\|\big)_{ji} = \big(\|P\|\, \|A\|_f\big)_{ji}. \tag{4.12}$$

Так как j и i — произвольные, то из (4.12) следует, что

$$\|A\|_e \|P\| = \|P\|\, \|A\|_f. \tag{4.13}$$

Поскольку обратная матрица $\|P\|^{-1}$ существует, то, умножая (4.13) слева на $\|P\|^{-1}$, получим

$$\|A\|_f = \|P\|^{-1}\|A\|_e\|P\|, \tag{4.14}$$

а умножив (4.13) справа на $\|P\|^{-1}$, имеем

$$\|A\|_e = \|P\|\,\|A\|_f\|P\|^{-1}. \tag{4.15}$$

Формулы (4.14) и (4.15) дают искомые выражения матриц оператора в разных базисах друг через друга.

п.4.5. Пусть $\|A\|$ и $\|B\|$ — произвольные матрицы порядка n.

Определение. *Будем говорить, что матрица $\|B\|$ подобна матрице $\|A\|$ и писать $\|B\| \sim \|A\|$, если найдется такая неособенная матрица $\|C\|$ порядка n, что*

$$\|B\| = \|C\|^{-1}\|A\|\,\|C\|. \tag{4.16}$$

Если $\|B\| \sim \|A\|$, то и $\|A\| \sim \|B\|$ (свойство рефлексивности), так как в силу (4.16)

$$\|A\| = \|\widehat{C}\|^{-1}\|B\|\,\|\widehat{C}\|,$$

где $\|\widehat{C}\| = \|C\|^{-1}$.

Если $\|B\| \sim \|A\|$ и $\|D\| \sim \|B\|$, то $\|D\| \sim \|A\|$ (свойство транзитивности). Действительно, пусть матрицы $\|C_1\|$ и $\|C_2\|$ таковы, что

$$\|B\| = \|C_1\|^{-1}\|A\|\,\|C_1\|, \tag{4.17а}$$

$$\|D\| = \|C_2\|^{-1}\|B\|\,\|C_2\|. \tag{4.17б}$$

Подставив выражения $\|B\|$ из (4.17а) в (4.17б) получим, что

$$\|D\| = \|C_2\|^{-1}\|C_1\|^{-1}\|A\|\,\|C_1\|\,\|C_2\|. \tag{4.18}$$

Положим $\|C\| = \|C_1\|\,\|C_2\|$; тогда в силу (4.18)

$$\|D\| = \|C\|^{-1}\|A\|\,\|C\|,$$

что и требовалось доказать.

Так как свойство подобия матриц рефлексивно и транзитивно, то все квадратные матрицы порядка n можно разбить на классы без общих элементов так, что в каждый класс войдут только подобные друг другу матрицы. Покажем, что подобные матрицы можно рассматривать как матрицы одного и того же оператора, записанные в разных базисах. Пусть для матриц $\|B\|$, $\|A\|$ и $\|C\|$ выполняется равенство (4.16), т. е. $\|B\| \sim \|A\|$. Выберем в n-мерном пространстве K произвольный базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ и базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$, связанный с базисом e соотношениями

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\, e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где c_{ij} — матричный элемент матрицы $\|C\|$ из (4.16). Рассмотрим линейный оператор A, $K \xrightarrow{A} K$, матрица которого в базисе e есть $\|A\|$. Тогда матрица $\|A\|_f$ оператора A в базисе f согласно (4.14) запишется в виде

$$\|A\|_f = \|C\|^{-1} \|A\|\, \|C\|$$

и в силу (4.16)

$$\|B\| = \|A\|_f,$$

т. е. $\|B\|$ — матрица оператора A в базисе f.

§ 5. ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА. СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРА И СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

п.5.1. Пусть K — линейное пространство над полем F, A — линейный оператор, $K \xrightarrow{A} K$.

Определение. *Подпространство $H \subset K$ назовем инвариантным для оператора A, если для $\forall\, x \in H$ справедливо включение $Ax \in H$.*

Приведем примеры инвариантных подпространств. Считаем в них $F = \mathbb{R}$.

1. Пусть $K = C^2[ab]$, $H = \{P_n(t) \mid P_n(t) = \sum_{k=0}^{n} d_k t^k, \forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, d_k \in F\}$. Подпространство H инвариантно, в частности для следующих операторов A_1–A_4:

$$A_1 P_n(t) = \frac{d}{dt} P_n(t), \quad A_2 P_n(t) = t^m P_n(t),$$

m — фиксированное число, $m \in \mathbb{Z}$,

$$A_3 P_n(t) = \big(P_n(t) - P_n(0)\big)/t, \quad A_4 P_n(t) = \int_0^t P_n(s)\, ds.$$

2. Пусть $K = C[ab]$, $H = \{x(t) \mid x(t) \in K,\ x(a) = 0\}$, $Ax(t) = f(t)\,x(t)$, где $f(t)$ — фиксированная функция из K. Очевидно, что при $x(t) \in H$ функция $A\,x(t) \in H$, т. е. H — инвариантно для оператора A.

3. Пусть K — произвольное n-мерное пространство, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в K, $H = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_m\}$, $m < n$. Пространство H будет инвариантно для оператора проектирования P_H (см. п. 1.2).

Задание

Найти инвариантные подпространства в пространстве K_n (см. п. 1.1 гл. I) для операторов A_1 и A_2, действующих по формулам:

$$A_1 x = A_1(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1, \xi_2 - \xi_1 + \xi_n, \xi_3, \ldots, \xi_n),$$
$$A_2 x = A_2(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (3\xi_1 - 2\xi_2, \xi_2, \ldots, \xi_n).$$

п.5.2. Обсудим вид матрицы оператора A в конечномерном пространстве K при наличии инвариантного для A подпространства $H_1 \subset K$. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ — произвольный базис в H_1. Дополним его векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$ до базиса в K, и запишем матрицу $\|A\|$ оператора A в полученном базисе $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_n$. Так как в силу инвариантности пространства H_1 для оператора A выполняется $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$ при $j \leq m$, то в первых m столбцах матрицы $\|A\|$, начиная со строки с номером $m+1$, будут нули. Таким образом,

$$\|A\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & a_{1,m+1} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & a_{m,m+1} & \ldots & a_{mn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & a_{n,m+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если базис в H_1 может быть дополнен до базиса в K векторами $e_{m+1}, \ldots, e_n$ таким образом, что подпространство $H_2 = \mathcal{L}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$ тоже инвариантно для оператора A, то тогда $Ae_j = \sum_{i=m+1}^{n} a_{ij} e_i$, $j \geq m+1$. Поэтому в столбцах матрицы $\|A\|$ начиная с $(m+1)$-го в первых m строках будут нули и матрица $\|A\|$ примет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & & 0 & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mm} & & & \\ & & & a_{m+1,m+1} & \ldots & a_{m+1,n} \\ & 0 & & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & a_{n,m+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где большой ноль обозначает, что все матричные элементы данного блока равны нулю. Из сказанного следует, что если пространство K разбивается в прямую сумму инвариантных для оператора A подпространств H_1 и H_2, то в базисе K, состоящем из последовательно выписанных базисов пространств H_1 и H_2, матрица $\|A\|$ имеет блочно-диагональный вид (см. п. 2.4), где блоки на диагонали суть матрицы оператора $\|A\|$ в пространствах H_1 и H_2. В общем случае, если пространство K разбивается в прямую сумму $\sum_{i=1}^{p} \oplus H_i$ инвариантных для оператора A подпространств H_i, с базисами $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, p$, то в базисе $e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(p)}, \ldots, e_{k_p}^{(p)}\right)$ пространства K, составленном из выписанных подряд базисов подпространств H_i, $i = 1, 2, \ldots, p$, матрица оператора A будет иметь блочно-диагональный вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

где A_i — есть матрица оператора A в пространстве H_i в базисе $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$. При этом базисы подпространств H_i могут быть выписаны в любом порядке, а не только последовательно для $i = 1, 2, \ldots, p$. Если взять, например, в K базис

$$\left(e_1^{(i_1)}, \ldots, e_{k_{i_1}}^{(i_1)}, \ldots, e_1^{(i_p)}, \ldots, e_{k_{i_p}}^{(i_p)}\right),$$

где $i_1, \ldots, i_p$ — это числа $1, 2, \ldots, p$, переставленные в произвольном порядке, то матрица $\|A\|$ примет блочно-диагональный вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} A_{i_1} & & \mathbf{0} & \\ & A_{i_2} & & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & A_{i_p} \end{pmatrix},$$

где A_{i_j} — матрица оператора A в пространстве H_{i_j}.

п.5.3. Пусть теперь пространство K над полем F не обязательно конечномерно и линейный оператор A определен в некотором подпространстве $D_A \subseteq K$, $D_A \xrightarrow{A} K$, которое может совпадать с K. Чрезвычайно важными для приложений являются такие инвариантные для оператора A пространства U из D_A, в которых оператор действует как оператор умножения на константу, одну и ту же для $\forall\, x \in U$.

Определение. *Вектор $x \in D_A$ называется собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если*

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq \theta. \tag{5.2}$$

Пространство $U_\lambda \subseteq D_A$, состоящее из всех собственных векторов x оператора A, отвечающих собственному значению λ, и нуль-вектора, называется собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ. Таким образом,

$$U_\lambda = \{x \mid x \in D_A,\, Ax = \lambda x,\, \lambda \in F\}.$$

Замечание. Если пространство D_A состоит из функций, то собственные вектора называются собственными функциями.

Размерность собственного подпространства U_λ называют геометрической кратностью собственного значения λ. Если $\dim U_\lambda \geq 2$, *то собственное значение λ называется вырожденным.*

Задание

Докажите, что U_λ — действительно подпространство пространства D_A.

п.5.4. Приведем примеры собственных векторов и собственных подпространств, не останавливаясь пока на вопросе об их нахождении.

1. Пусть $K = C[0, l]$, $F = \mathbb{R}$, $A = -d^2/dt^2$,

$$D_A = \big\{x(t) \mid x(t) \in C^2[0, l],\; x(0) = x(l) = 0\big\}.$$

Прямая проверка показывает, что собственные значения λ_k и собственные функции $u_k(t)$ оператора A с областью определения D_A даются формулами

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad u_k = d_k \sin\frac{k\pi}{l}\lambda, \quad \forall\, d_k \in F, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

(об отсутствии других собственных функций и других собственных значений и о способе нахождения указанных в примерах 1 и 2 см. п. 6.5).

2. Пусть по-прежнему $K = C[0, l]$, $F = \mathbb{R}$ и $A = -d^2/dt^2$, но в качестве области определения оператора A возьмем

$$\widetilde{D}_A = \big\{x(t) \mid x(t) \in C^2[0, l],\; x'(0) = 0,\; x(l) = 0\big\}.$$

Тогда собственные значения $\widetilde{\lambda}_k$ и соответствующие собственные функции $\widetilde{u}_k$ суть

$$\widetilde{\lambda}_k = \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}\right)^2, \;\; \widetilde{u}_k = d_k \cos\frac{\pi(2k+1)}{2l}\, t, \;\; \forall\, d_k \in F, \;\; k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Примеры 1 и 2 показывают, что в зависимости от области определения один и тот же оператор в одном и том же пространстве может иметь различные собственные значения и собственные вектора.

3. Пусть K — конечномерное пространство над полем F, $e_1, \ldots, e_n$ — базис в K, $m \in \mathbb{N}$ — любое число, $1 \le m < n$, $H_1 = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_m\}$, $H_2 = \mathcal{L}\{e_{m+1}, \ldots, e_n\}$. Определим операторы проектирования P_{H_i}, $i = 1, 2$ согласно п. 1.2. Тогда подпространства H_1, H_2 будут собственными для обоих операторов P_{H_i}, причем для оператора P_{H_1} $\{P_{H_2}\}$ подпространство H_1 отвечает собственному значению $\lambda_1 = 1$ $\{\lambda_1 = 0\}$, а подпространство H_2 — собственному значению $\lambda_2 = 0$ $\{\lambda_2 = 1\}$.

Собственные значения и собственные вектора имеются не у любых операторов. Например, в пространстве $K = C[0, l]$ у оператора умножения на t нет собственных значений, ибо $t\,x(t) \ne \lambda\, x(t)$ при $x(t) \not\equiv 0$ ни при каких λ. Аналогично, в пространстве V_2 векторов на плоскости над вещественным полем оператор A_φ поворота на угол φ около начала координат, $0 < \varphi < \pi$, не имеет собственных векторов, ибо если $A_\varphi x = \lambda x$, $x \in V_2$, $x \ne \theta$, то вектор $A_\varphi x$ должен быть параллелен или антипараллелен вектору x, что невозможно из геометрических соображений.

п.5.5. Свойства собственных векторов. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — какие-либо различные собственные значения оператора A в пространстве K над полем F, $U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_m}$ — соответствующие собственные подпространства.

Теорема 5.1. *Собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям оператора A, линейно независимы.*

Доказательство. Пусть $x_j \in U_{\lambda_j}$ — произвольные собственные вектора, $j = 1, \ldots, m$. Покажем, что вектора x_j — линейно независимы, т. е. что равенство

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j = \theta, \quad c_j \in F \tag{5.3}$$

выполняется только при $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$. Пусть $m = 2$. Тогда (5.3) принимает вид

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \theta. \tag{5.4}$$

Применив оператор A к обеим частям (5.4), имеем

$$c_1\lambda_1 x_1 + c_2\lambda_2 x_2 = \theta. \tag{5.5}$$

Умножая (5.4) на λ_1 и вычитая из полученного соотношения равенство (5.5), получим, что

$$c_2(\lambda_1 - \lambda_2)x_2 = \theta.$$

Так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то отсюда следует, что $c_2 x_2 = \theta$, а так как $x_2 \neq \theta$, то $c_2 = 0$. Поэтому и в силу (5.4) $c_1 = 0$, т. е. вектора x_1 и x_2 — линейно независимы. Предположим, что линейная независимость векторов $x_1, \ldots, x_m$ доказана при $m = k$. Докажем, что вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы при $m = k + 1$. Пусть для некоторых $c_i \in F$

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i x_i = \theta. \tag{5.6}$$

Применяя к равенству (5.6) оператор A, получим

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i \lambda_i x_i = \theta. \tag{5.7}$$

Далее действуем аналогично предыдущему: умножим соотношение (5.6) на λ_{k+1} и вычтем из полученного соотношения равенства (5.7). Получим, что

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i)x_i = \theta.$$

Так как, по предположению индукции, вектора $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то $c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$, $i = 1, \ldots, k$. Поскольку $\lambda_{k+1} \neq \lambda_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Учитывая это в (5.6), получим $c_{k+1}x_{k+1} = \theta$ и, значит, $c_{k+1} = 0$. Таким образом, все коэффициенты c_i в (5.7) равны нулю, и, следовательно, вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы при $m = k+1$. В силу индукции, вектора $x_1, \ldots, x_m$ линейно независимы при $\forall\, m$. Теорема 5.1 доказана.

Пусть $k_j = \dim U_{\lambda_j} < +\infty$. Выберем в каждом из пространств U_{λ_j} базисы $e_1^{(j)}, \ldots, e_{k_j}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и положим

$$e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{k_2}^{(2)}, \ldots, e_1^{(m)}, \ldots, e_{k_m}^{(m)}\right).$$

Теорема 5.2. *Вектора системы e линейно независимы.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию векторов $e_i^{(j)}$ и покажем, что обращение ее в нуль-вектор возможно только при нулевых коэффициентах. Пусть

$$z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j} c_i^{(j)}\, e_i^{(j)},$$

где $c_i^{(j)} \in F$. Положим $x_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i^{(j)} e_i^{(j)}$. Тогда $z = \sum_{j=1}^{m} x_j$. Очевидно $x_j \in U_{\lambda_j}$. В силу теоремы 5.1 вектора x_j при $x_j \neq \theta$ линейно независимы и, значит, равенство $z = \theta$ возможно лишь при $x_j = \theta$ для всех j. То есть из равенства $z = \theta$ следует, что

$$x_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i^{(j)}\, e_i^{(j)} = \theta, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.8}$$

Поскольку вектора $e_1^{(j)}, e_2^{(j)}, \ldots, e_{k_j}^{(j)}$ при $\forall\, j$, $1 \le j \le m$, линейно независимы, то все коэффициенты $c_i^{(j)}$ в (5.8) равны нулю. Следовательно, вектора системы e линейно независимы.

Замечание 1. Утверждение теоремы 5.2 справедливо и в случае, когда

$$e = \left(x_1^{(1)}, \ldots, x_{p_1}^{(1)}, \ldots, x_1^{(j)}, \ldots, x_{p_j}^{(j)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_{p_m}^{(m)}\right),$$

где $x_1^{(j)}, \ldots, x_{p_j}^{(j)}$ — произвольный набор p_j линейно независимых векторов из U_{λ_j}, возможно, не связанный с базисом.

Замечание 2. Теоремы 5.1 и 5.2 и их доказательства верны как при $\dim K < +\infty$, так и при $\dim K = +\infty$.

п.5.6. Далее считаем $n = \dim K < +\infty$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — это все различные собственные значения оператора A в пространстве K и

$$S = \sum_{j=1}^{m} \dim U_{\lambda_j}. \tag{5.9}$$

Из теоремы 5.2 следует, что

$$S \le n, \tag{5.10}$$

ибо число линейно независимых векторов в пространстве K не может быть больше его размерности.

Рассмотрим теперь случай, когда

$$S = n. \tag{5.11}$$

Из теоремы 5.2 вытекает

Теорема 5.3. *Условие* (5.11) *является необходимым и достаточным для существования в пространстве K базиса из собственных векторов оператора A.*

Доказательство очевидно. Если $S = n$, то набор e из теоремы 5.2 содержит n линейно независимых векторов и, значит, e есть базис в K. С другой стороны, если в K имеется базис из собственных векторов, то число S_0 линейно независимых собственных векторов в нем равно n, а так как $S \geq S_0$, то в силу (5.10) $S = n$.

Эквивалентным условию (5.11) является условие

$$\sum_{j=1}^{m} \oplus U_{\lambda_j} = K. \tag{5.12}$$

Задание

Доказать равносильность требований (5.11) и (5.12).

Отметим, что если оператор A имеет n различных собственных значений ($m = n$), то условие (5.11) выполняется и $\dim U_{\lambda_j} = 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, в силу (5.10) и так как $\dim U_{\lambda_j} \geq 1$, имеем

$$n \geq \sum_{j=1}^{n} \dim U_{\lambda_j} \geq n,$$

откуда и следует наше утверждение.

п.5.7. Определение. *Оператор A в пространстве K над полем F назовем диагонализуемым, если в K существует базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором матрица $\|A\| = (a_{ij})$ оператора диагональна, т. е. $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$.*

Имеет место

Теорема 5.4. *Оператор A диагонализуем тогда и только тогда, когда в пространстве K есть базис из собственных векторов оператора A.*

Доказательство. Если $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в K и $Ae_i = \beta_i e_i$, $\beta_i \in F$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то матрица $\|A\|_e$ оператора A в базисе e имеет вид

$$\|A\|_e = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, если в некотором базисе $f = (f_1, \ldots, f_n)$ матрица $\|A\|_f$ оператора A имеет диагональный вид

$$\|A\|_f = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{5.13}$$

где α_i — некоторые числа из F, то, по определению матрицы оператора, $Af_i = \alpha_i f_i$, т. е. базисные вектора — собственные.

В силу теоремы 5.3 условие (5.11) (или эквивалентное ему условие (5.12)) является необходимым и достаточным для диагонализуемости оператора A. В частности, в силу п. 5.6 оператор, имеющий n различных собственных значений, диагонализуем в пространстве размерности n.

п.5.8. Интересна и полезна следующая нетривиальная

Теорема 5.5. *Если оператор A диагонализуем в пространстве K, то A — диагонализуем в любом подпространстве $H \subset K$, которое инвариантно для оператора A.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — все различные собственные значения оператора A в K и U_{λ_i} — соответствующие собственные подпространства. Положим

$$V_{\lambda_i} = U_{\lambda_i} \cap H$$

и докажем, что

$$H = \sum_{j=1}^{m} \oplus V_{\lambda_i}. \tag{5.14}$$

Поскольку подпространства V_{λ_i} состоят из (попавших в H) собственных векторов оператора A, то из (5.14) будет следовать диагонализуемость оператора A в H.

Обозначим через $e_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, k_j$, $(k_j = \dim U_{\lambda_j})$, базис в подпространстве U_{λ_j}. В силу диагонализуемости оператора A в K вектора $e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(m)}, \ldots, e_{k_m}^{(m)}\right)$ образуют базис в K. Пусть $x \in K$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{k_j} c_i^{(j)} e_i^{(j)}, \tag{5.15}$$

где $c_i^{(j)}$ — координаты вектора x в базисе e. Положим

$$x_j = \sum_{i=1}^{k_j} c_i^{(j)} e_i^{(j)}.$$

В силу (5.15)

$$x = \sum_{j=1}^{m} x_j, \tag{5.16}$$

где, очевидно, $x_j \in U_{\lambda_j}$. Докажем, что если $x \in H$, то $x_j \in V_{\lambda_j}$ и что вектора x_j определяются по x однозначно. Отсюда и будет следовать (5.14), а, значит, и утверждение теоремы 5.5.

п.5.9. Применим к равенству (5.16) операторы A^s, $s = 1, 2, \ldots, m-1$. Тогда мы получим равенства

$$A^s x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j^s x_j, \quad s = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{5.17}$$

Соотношения (5.16), (5.17) можно рассматривать как систему m линейных неоднородных уравнений относительно неизвестных векторов x_j, $j = 1, 2, \ldots, m$. Ее определитель не равен нулю (это определитель Вандермонда). Поэтому из (5.16) и (5.17) следует, что

$$x_j = \sum_{s=0}^{m-1} c_{sj} A^s x, \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.18}$$

где c_{sj} — некоторые числа из поля F, $A^\circ = I$. Так как $x \in H$ и подпространство H инвариантно для оператора A, то правые части равенств (5.18), а, значит, и вектора x_j принадлежат пространству H. Поскольку $x_j \in H$ и $x_j \in U_{\lambda_j}$, то $x_j \in V_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Покажем теперь, что составляющие x_j вектора x в (5.16) определены однозначно. Действительно, если бы существовало другое разложение

$$x = \sum_{j=1}^{m} x'_j, \quad x'_j \in U_{\lambda_j}, \tag{5.19}$$

то приравнивая (5.16) и (5.19) мы получили бы

$$\sum_{j=1}^{m} x'_j = \sum_{j=1}^{m} x_j,$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^{m} (x_j - x'_j) = \theta. \tag{5.20}$$

Но вектора $x_j - x'_j$, $j = 1, \ldots, m$ при $x_j - x'_j \neq \theta$ суть собственные вектора, отвечающие различным собственным значениям λ_j оператора A и, значит, они линейно независимы. Поэтому из (5.20) следует, что $x_j - x'_j = \theta$, т. е. $x_j = x'_j$. ▲

п.5.10. В заключение рассмотрим вопрос об одновременной диагонализуемости семейства диагонализуемых операторов $A_1, \ldots, A_p$, действующих из K в K.

Теорема 5.6. *Для одновременной диагонализуемости семейства диагонализуемых операторов* $A_1, A_2, \ldots, A_p$, $K \xrightarrow{A_j} K$, *необходимо и достаточно, чтобы они попарно коммутировали между собой*:

$$A_i A_j = A_j A_i, \quad i,j = 1, 2, \ \ldots, p.$$

Замечание. Утверждение теоремы означает, что в пространстве K существует такой базис, в котором матрицы *всех* операторов $A_1, A_2, \ldots, A_p$ диагональны.

Доказательство. Необходимость почти очевидна. Действительно, если операторы A_i одновременно диагонализируемы, то в некотором базисе их матрицы $\|A_i\|$ диагональны. Но диагональные матрицы коммутируют между собой и, значит, операторы $A_i A_j$ и $A_j A_i$ имеют одну и ту же матрицу, ибо

$$\|A_i A_j\| = \|A_i\| \, \|A_j\| = \|A_j\| \, \|A_i\| = \|A_j A_i\|.$$

Поэтому $A_i A_j = A_j A_i$ и необходимость доказана.

Докажем *достаточность*. Мы проведем рассуждения только при $p = 2$. Пусть λ_j и U_{λ_j}, $j = 1, 2, \ldots, m$, — собственные значения и соответствующие собственные подпространства оператора A_2. Так как оператор A_2 диагонализуем, то

$$K = \sum_{j=1}^{m} \oplus \, U_{\lambda_j}. \tag{5.21}$$

Докажем, что подпространства U_{λ_j} инвариантны для оператора A_1. Пусть $x \in U_{\lambda_j}$. Тогда $A_2 x = \lambda_j x$. Применяя оператор A_1 к обеим частям этого равенства и учитывая, что $A_1 A_2 = A_2 A_1$, имеем

$$A_1 A_2 x = A_2 A_1 x = \lambda_j A_1 x.$$

Следовательно, вектор $y = A_1 x$ или равен θ или является собственным вектором оператора A_2, отвечающим собственному значению λ_j. Поэтому $A_1 x \in U_{\lambda_j}$ при $\forall \, x \in U_{\lambda_j}$ и, значит, подпространство U_{λ_j} инвариантно для оператора A_1. Так как оператор A_1 диагонализуем в K, то в силу теоремы 5.5 A_1 диагонализуем в U_{λ_j}. Выберем в подпространстве U_{λ_j} диагонализующий для оператора A_2 базис $e^{(j)} = (e_1^{(j)}, \ldots, e_{k_j}^{(j)})$ и в качестве базиса e в K возьмем набор базисов $e^{(j)} := e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(m)}, \ldots, e_{k_m}^{(m)}\right)$. Тогда в базисе e оба оператора A_1 и A_2 будут иметь диагональные матрицы в K, ибо каждый из них имеет диагональные матрицы в подпространствах U_{λ_j}, а пространство K в силу (5.21) есть прямая сумма подпространств U_{λ_j}.

Задание 1

Методом математической индукции доказать теорему для $\forall p \geq 2$.

Задание 2

Объясните, каков точный смысл фразы: «коммутирующие между собой операторы имеют общую систему собственных векторов». В частности, верно ли утверждение, что если $A_1A_2 = A_2A_1$ и x — собственный вектор оператора A_1, то x — собственный вектор оператора A_2.

§ 6. ОТЫСКАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

п.6.1. Пусть K — линейное пространство над полем F и линейный оператор A действует из K в K. В настоящем параграфе мы покажем как находить собственные значения и собственные вектора для любого оператора A в случае $n = \dim K < +\infty$ (пп. 6.1–6.3), а также для некоторых операторов A в бесконечномерных пространствах (см. пп. 6.4 и 6.5). Пусть $n = \dim K$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — произвольный базис в K и $\|A\| = (a_{ij})$ — матрица оператора A в базисе e. Предположим, что λ — собственное значение оператора A, а x — соответствующий собственный вектор, т. е. что

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq \theta. \tag{6.1}$$

Разложим вектор x по базису $e_1, \ldots, e_n$ и вычислим Ax. Имеем

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, \quad Ax = \sum_{i=1}^{n} \xi_i A e_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\xi_i\Bigr) e_j.$$

Подставив выражения x и Ax в (6.1), видим, что

$$\sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\xi_i\Bigr) e_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j.$$

Приравнивая между собой коэффициенты перед базисными векторами e_j в правой и левой частях этого равенства, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\xi_i = \lambda \xi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.2}$$

Таким образом, для нахождения неизвестных координат ξ_i собственного вектора x и собственного значения λ мы получили систему n однородных линейных уравнений относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, содержащую λ в качестве параметра. Запишем систему (6.2) в виде

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n = 0 \\ a_{21}\xi_1 + (a_{22}-\lambda)\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)\xi_n = 0 \end{array}\right\}. \tag{6.3}$$

Так как собственные вектор $x \neq \theta$, то нас интересуют только не нулевые решения системы (6.3). Для их существования необходимо и достаточно, чтобы определитель $\Delta(\lambda)$ системы (6.3) равнялся нулю, т.е. чтобы

$$\Delta(\lambda) = \det\|A - \lambda E\| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

Уравнение (6.4) называется характеристическим и именно из него находятся собственные значения оператора A. Раскрывая определитель $\Delta(\lambda)$, запишем характеристическое уравнение (6.4) в виде

$$\lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \ldots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0, \tag{6.5}$$

где коэффициенты b_i выражаются через элементы матрицы $\|A\|$. Нас интересуют только те корни λ уравнения (6.5), которые принадлежат полю F.

Определение. *Алгебраической кратностью собственного значения λ называется алгебраическая кратность корня λ уравнения* (6.5).

Если уравнение (6.5) не имеет корней из поля F, то оператор A не имеет собственных значений и собственных векторов в пространстве K над полем F. В то же время над другим полем оператор A может иметь собственные значения. Например, при $F = \mathbb{C}$ — собственные значения существуют всегда.

Предположим, что характеристическое уравнение (6.5) имеет корень $\lambda \in F$. Подставим это значение λ в (6.3) и перепишем систему (6.3) в виде

$$\|A - \lambda E\| \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.6}$$

Пусть ранг матрицы $\|A - \lambda E\|$ равен p. Тогда согласно п. 2.4 гл. I система (6.6) имеет ровно $n-p$ линейно независимых решений, и, значит, оператор A имеет $n-p$ линейно независимых собственных векторов, отвечающих собственному значению λ. Другими словами, размерность собственного подпространства U_λ (т. е. геометрическая кратность собственного значения λ) равна $n-p$. Линейно независимые решения системы (6.6), т. е. базис собственного подпространства U_λ, можно найти по методике пп. 2.4, 2.5 гл. I.

п.6.2. Примеры. В конечномерном пространстве K над полем $F=\mathbb{R}$ рассматривается линейный оператор A, $K \xrightarrow{A} K$. Наша цель — найти собственные значения и собственные вектора оператора A.

Пример 1. Пусть $K = V_2$ — пространство векторов на плоскости x, y, $A = A_\varphi$ — оператор поворота на угол φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, около начала координат. Для получения матрицы $\|A_\varphi\|$ в базисе e_x, e_y, вектора которого имеют единичные длины и направлены по координатным осям x и y, находим

$$A_\varphi e_x = \cos\varphi \cdot e_x + \sin\varphi \cdot e_y, \quad A_\varphi e_y = -\sin\varphi \cdot e_x + \cos\varphi \cdot e_y.$$

Следовательно,

$$\|A_\varphi\| = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

и характеристическое уравнение (6.5) запишется в виде

$$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0. \tag{6.7}$$

При $\varphi \ne 0$, $\varphi \ne \pi$ уравнение (6.7) не имеет вещественных корней и, значит, при $\varphi \ne 0, \pi$ оператор A_φ не имеет собственных значений и собственных векторов (мы уже упоминали об этом в п. 5.3, исходя из геометрических соображений). Пусть теперь $\varphi = 0$. Тогда в силу (6.7) $\lambda = 1$ и матрица $\|A_0 - \lambda E\|$ будет нулевой. Поэтому ранг $\rho(\|A_0 - \lambda E\|) = 0$ и, значит, размерность собственного подпространства $U_\lambda = U_1$ равна $2 - 0 = 2$. Но $\dim V_2 = 2$, и, следовательно, $U_1 = V_2$, т. е. любой вектор x, $x \in V_2$, — собственный, отвечающий собственному значению $\lambda = 1$. Разумеется, это можно было бы сказать и без вычислений, ибо A_φ при $\varphi = 0$ — это тождественный оператор I, для которого $I \cdot x = x$ при $\forall\, x \in V_2$. Пусть теперь $\varphi = \pi$. Тогда из (6.7) получаем $\lambda = -1$. Как и при $\varphi = 0$, матрица $\|A_\varphi - \lambda E\| = \|A_\pi - (-1)E\|$ — нулевая, поэтому $\dim U_{-1} = 2$ и $U_{-1} = V_2$. Опять-таки, это можно было заметить сразу, ибо оператор поворота на угол π фактически есть оператор умножения на (-1).

Пример 2. Пусть

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение (6.5) есть уравнение $(1-\lambda)^3 = 0$ и, значит, матрица $\|A\|$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$; его алгебраическая кратность $q = 3$. Матрица

$$\|A - \lambda E\| = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг 2 и поэтому $\dim U_1 = 3 - 2 = 1$. Система (6.6) в данном случае примет вид

$$\begin{aligned} 2\xi_2 &= 0, \\ 3\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Значит $\xi_2 = \xi_3 = 0$, ξ_1 — произвольно и

$$U_\lambda = U_1 = \{x \mid x = (c, 0, 0),\ \forall\, c \in \mathbb{R}\}.$$

Отметим, что в данном примере геометрическая кратность $k = \dim U_1 = 1$ собственного значения $\lambda = 1$ строго меньше его алгебраической кратности $q = 3$.

Пример 3. Пусть

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда характеристическое уравнение (6.5) есть уравнение

$$\left[(2-\lambda)^2 - 1\right](1-\lambda) = 0.$$

Отсюда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Алгебраические кратности q_i корней λ_i суть $q_1 = 2$, $q_2 = 1$. Найдем собственные вектора, отвечающие этим собственным значениям. Пусть $\lambda = \lambda_1 = 1$. Тогда

$$\rho(\|A - \lambda E\|) = 1, \quad \text{и значит} \quad \dim U_{\lambda_1} = 2.$$

Система (6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} \xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ \xi_1 + \xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\xi_1 = -\xi_2$. Действуем согласно пп. 2.4, 2.5 гл. I. При $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 0$ получаем $\xi_1 = -1$. При $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 1$ получим $\xi_1 = 0$. Таким образом собственные вектора, отвечающие $\lambda = 1$, суть

$$X_1 = (-1, 1, 0), \quad X_2 = (0, 0, 1).$$

Пусть $\lambda = \lambda_2 = 3$. Тогда $\rho(\|A - \lambda I\|) = 2$. Значит, $\dim U_{\lambda_2} = 1$. Система (6.6) принимает вид

$$\begin{aligned} -\xi_1 + \xi_2 &= 0, \\ \xi_1 - \xi_2 &= 0, \\ -2\xi_3 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда $\xi_1 = \xi_2$, $\xi_3 = 0$. Значит, в качестве собственного вектора можно взять $Y_1 = (1, 1, 0)$. Задача решена полностью. Заметим, что в данном примере для обоих собственных значений геометрическая и алгебраическая кратности совпали. Кроме того, в примере 3 $\sum_{i=1}^{2} \dim U_{\lambda_i} = \dim K$ и, значит, матрица $\|A\|$ диагонализуема, в то время как в примере 2 этого нет.

п.6.3. Докажем ряд простых утверждений о геометрической и алгебраической кратностях собственных значений в конечномерных пространствах.

Лемма 6.1. *Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения не зависят от выбора базиса в пространстве K.*

Доказательство. Для геометрической кратности утверждение очевидно, ибо число линейно независимых собственных векторов оператора A, отвечающих собственному значению λ, есть свойство оператора, которое не зависит от выбора базиса. Докажем утверждение леммы 6.1 для алгебраической кратности. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базисы в K, $\|P\|$ — матрица перехода от базиса e к базису f, $\|A\|_f$ и $\|A\|_e$ — матрица оператора A в базисах f и e. Тогда в силу (4.14)

$$\|A\|_f = \|P\|^{-1} \|A\|_e \|P\|$$

и поэтому

$$\|A - \lambda E\|_f = \|P\|^{-1} \|A - \lambda E\|_e \|P\|, \tag{6.8}$$

где E — единичная матрица. В силу (6.8)

$$\det \|A - \lambda E\|_f = \det \|P\|^{-1} \det \|A - \lambda E\|_e \det \|P\| = \det \|A - \lambda E\|_e$$

и, следовательно, характеристические уравнения для матриц $\|A\|_f$ и $\|A\|_e$ совпадают. Поэтому алгебраическая кратность собственного значения не зависит от выбора базиса.

Лемма 6.2. *Геометрическая кратность собственного значения не превосходит его алгебраическую кратность.*

Доказательство. Пусть α — собственное значение оператора A, $k = \dim U_\lambda$ и $g_1, \ldots, g_k$ — базис в собственном подпространстве U_λ. Достроим этот базис векторами $g_{k+1}, \ldots, g_n$ до базиса $g = (g_1, \ldots, g_n)$ всего пространства. Тогда в базисе g матрицы $\|A\|_g$ и $\|A - \lambda E\|_g$ соответственно примут вид:

$$\|A\|_g = \left\| \begin{array}{cccccccc} \alpha & 0 & \ldots & 0 & d_{1,k+1} & \ldots & \ldots & d_{1n} \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 & d_{2,k+1} & \ldots & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \alpha & d_{k,k+1} & d_{k,k+2} & \ldots & d_{kn} \\ & & & & d_{k+1,k+1} & d_{k+1,k+2} & \ldots & d_{k+k,n} \\ & \text{\Large 0} & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & d_{n,k+1} & d_{n,k+2} & \ldots & d_{nn} \end{array} \right\|$$

и

$$\|A - \lambda E\|_g = \left\| \begin{array}{cccccccc} \alpha - v\lambda & 0 & \ldots & 0 & d_{1,k+1} & d_{1,k+2} & \ldots & d_{1n} \\ 0 & \alpha - \lambda & \ldots & 0 & d_{2,k+1} & & & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \alpha - \lambda & d_{k,k+1} & d_{k,k+2} & \ldots & d_{kn} \\ & & & & d_{k+1,k+1} - \lambda & d_{k+1,k+2} & \ldots & d_{k+1,n} \\ & \text{\Large 0} & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & d_{n,k+1} & d_{n,k+2} & \ldots & d_{nn} - \lambda \end{array} \right\|.$$

Следовательно, характеристическое уравнение

$$\det \|A - \lambda E\|_g = 0$$

запишется в виде

$$(\alpha - \lambda)^k \cdot \psi(\lambda) = 0, \tag{6.9}$$

где

$$\psi(\lambda) = \det \left\| \begin{array}{cccc} d_{k+1,k+1} - \lambda & d_{k+1,k+2} & \ldots & d_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n,k+1} & d_{n,k+2} & \ldots & d_{nn} - \lambda \end{array} \right\|.$$

Пусть $b \geq 0$ — кратность корня $\lambda = \alpha$ уравнения $\psi(\lambda) = 0$. Тогда алгебраическая кратность собственного значения $\lambda = \alpha$ оператора A в силу (6.9) равна $k + b \geq k$, что и требовалось доказать. ▲

Лемма 6.3. *Геометрическая кратность любого собственного значения диагонализуемого оператора равна его алгебраической кратности.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — все различные собственные значения оператора A в конечномерном пространстве K и $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$ — базис в собственном подпространстве U_{λ_i}, $i = 1, 2, \ldots, p$, отвечающем собственному значению λ_i. Так как оператор диагонализуем, то вектора $e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, \ldots, e_1^{(p)}, \ldots, e_{k_p}^{(p)}$ образуют базис в K. В этом базисе матрица оператора A имеет диагональный вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Large 0} & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_p & & \\ & \text{\Large 0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_p \end{pmatrix},$$

где число λ_i повторяется на диагонали k_i раз. Поэтому характеристическое уравнение $\det \|A - \lambda E\| = 0$ имеет вид

$$(\lambda_1 - \lambda)^{k_1} \ldots (\lambda_i - \lambda)^{k_i} \ldots (\lambda_p - \lambda)^{k_p} = 0.$$

Отсюда следует, что алгебраическая кратность собственного значения λ_i равна его геометрической кратности k_i, $i = 1, 2, \ldots, p$. В силу леммы 6.1 это утверждение справедливо при любом выборе базиса в K. ▲

п.6.4. В заключение рассмотрим два важных для приложений примера нахождения собственных значений и собственных векторов некоторых операторов в бесконечномерных пространствах. Пусть $K = \mathcal{L}_2[ab]$, $F = \mathbb{C}$.

1. Найдем собственные значения и собственный функции интегрального оператора

$$Af = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \int\limits_a^b \psi_i(y)\, f(y)\, dy,$$

где $\varphi_i(x), \psi_i(x) \in \mathcal{L}_2[ab]$ — известные функции и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно независимы. Пусть λ — собственное значение оператора A и f — соответствующая собственная функция. Тогда

$$Af = \lambda f,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) \int_a^b \psi_i(y)\, f(y)\, dy = \lambda f(x). \tag{6.10}$$

Легко видеть, что одно из собственных значений — это $\lambda = 0$ и что соответствующее (бесконечномерное) собственное подпространство

$$U_\lambda = U_0 = \{f(x) \mid f(x) \in \mathcal{L}_2[ab],\ (f, \psi_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Задания

1. Докажите, что подпространство U_0 содержит все собственные функции оператора A, отвечающие нулевому собственному значению.

2. Найдите U_0 в ситуации, когда функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — линейно зависимы.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Тогда из (6.10) следует, что собственная функция $f(x)$ должна иметь вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \varphi_i(x), \tag{6.11}$$

где ξ_i — неизвестные константы. Подставляя (6.11) в (6.10) и приравнивая друг другу коэффициенты перед функциями φ_j в обеих частях полученного равенства, получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, \xi_i = \lambda \xi_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.12}$$

где $a_{ji} = \int_a^b \psi_j(y)\, \varphi_i(y)\, dy$. Полученная система (6.12) совпадает с системой (6.2) и, значит, ее решения $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и собственные значения λ можно найти так, как указано в п. 6.1.

Задание

Найдите условия существования у оператора A собственных значений и собственных функций в области $D_A = C[ab]$, если в выражении Af $\varphi_1 \in C[ab]$, $\varphi_j \notin C[ab]$, $j \geq 2$.

п.6.5. В пространстве $\mathcal{L}_2[ab]$ над полем $F = \mathbb{C}$ найдем собственные значения и собственные функции дифференциального оператора

$$Af = -c_1 \frac{d^2}{dx^2} f + c_2 f \tag{6.13}$$

с постоянными вещественными коэффициентами $c_1 > 0$, c_2 в области

$$D_A = \{f(x) \mid f(x) \in C^2[0, l],\ f'(0) = 0,\ f(l) = 0\}.$$

Пусть λ — собственное значение оператора A и $f \in D_A$ — соответствующая собственная функция. Имеем

$$Af = \lambda f.$$

Отсюда следует равенство

$$\frac{d^2}{dx^2}f + \frac{\lambda - c_2}{c_1}f = 0. \tag{6.14}$$

Покажем, что величина $\widetilde{\omega} = (\lambda - c_2)c_1^{-1}$ — положительна. Умножим равенство (6.14) на $f(x)$ скалярно в $\mathcal{L}_2[0, l]$ и проведем в полученном соотношении интегрирование по частям. Получим

$$\int_0^l \left(f''\overline{f} + \widetilde{\omega}|f|^2\right)dx = -\int_0^l |f'|^2 dx + f'(x)\overline{f}(x)\Big|_0^l + \int_0^l \widetilde{\omega}|f|^2 dx =$$
$$= -\int_0^l |f'|^2 dx + \widetilde{\omega}\int_0^l |f|^2 dx = 0, \tag{6.15}$$

ибо $f'(0) = f(l) = 0$. В силу (6.15) $\widetilde{\omega} \geq 0$. Если $\widetilde{\omega} = 0$, то вследствие (6.15) выполняется $f'(x) \equiv 0$, т. е. $f(x) = \text{const}$. Но поскольку $f(x) \in D_A$, то $f(l) = 0$ и значит $f(x) \equiv 0$. Поэтому $\widetilde{\omega} > 0$. Положим $\omega^2 = \widetilde{\omega}$. Тогда из (6.14) следует, что

$$f(x) = A\sin\omega x + B\cos\omega x.$$

Так как $f \in D_A$, то $f'(0) = A\omega = 0$, откуда $A = 0$. Из условия $f(l) = 0$ имеем $\cos\omega l = 0$ и, значит, $\omega l = \pi/2 + \pi k$, $k = 0, 1, \ldots$. Таким образом, $\omega = \omega_k = \pi(1 + 2k)/(2l)$ и, следовательно,

$$\frac{\lambda - c_2}{c_1} = \omega_k^2 = \left(\frac{\pi(1 + 2k)}{2l}\right)^2,$$

откуда для собственных значений λ_k оператора A в D_A получается выражение:

$$\lambda_k = c_1\frac{\pi^2(1 + 2k)^2}{4l^2} + c_2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Соответствующие собственные функции $f_k = B_k\cos\omega_k x$, где B_k — произвольные константы. Если нас интересуют нормированные собственные функции, то из условия $\int_0^l B_k^2\cos^2\omega_k x\,dx = 1$ получаем, что

$$B_k^2\int_0^l \frac{1 - \cos 2\omega_k x}{2}\,dx = \frac{B_k^2 l}{2} = 1,$$

т. е. $B_k = \sqrt{2/l}$ и $f_k(x) = \sqrt{2/l}\,\cos\omega_k x$.

Замечание. Если оператор A рассматривался на области

$$D'_A = \{f(x) \mid f(x) \in C^2[ab],\ f'(a) = 0,\ f(b) = 0\},$$

то с помощью замены $x' = x - a$, мы получаем уже решенную задачу с $l = b - a$.

Задания

1. Найти собственные значения и нормированные собственные функции оператора $A_1 = A$ в области

$$D_{A_1} = \{f(x) \mid f(x) \in C^2[0, l],\ f'(0) = f'(l) = 0\}.$$

2. Действуя по схеме п. 6.5 убедиться, что в примере 1 п. 5.3 указаны все собственные значения и собственные функции оператора $A = -d^2/dx^2$ в области $D_A = \{f(x) \mid f(x) \in C^2[0, l],\ f(0) = f(l) = 0\}$.

ГЛАВА III

ЖОРДАНОВА НОРМАЛЬНАЯ ФОРМА МАТРИЦ

§ 1. РАНГ И ДЕФЕКТ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

п.1.1. Введем ряд важных понятий. Пусть K — линейное пространство над полем F и B — линейный оператор, действующий из K в K.

Определения

Множеством значений BK оператора B называется линейное пространство

$$BK := \{Bx \mid x \in K\}.$$

Рангом $r(B)$ оператора B называется размерность пространства BK:

$$r(B) := \dim BK.$$

Ядром $\operatorname{Ker} B$ оператора B называется его собственное подпространство, отвечающее нулевому собственному значению:

$$\operatorname{Ker} B := \{x \mid Bx = \theta,\ x \in K\}.$$

Дефектом $d(B)$ оператора B называется размерность его ядра:

$$d(B) := \dim \operatorname{Ker} B.$$

Теорема 1.1. *Пусть линейный оператор B действует из K в K, $n = \dim K$. Тогда*

$$r(B) + d(B) = n. \tag{1.1}$$

Доказательство. Пусть $d = d(B)$ и $e_1, \ldots, e_d$ — базис ядра $N = \operatorname{Ker} B$ оператора B в пространстве K. Дополним этот базис произвольным образом до базиса $e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n$ всего пространства и пусть $H_1 = \mathcal{L}\{e_{d+1}, e_{d+2}, \ldots, e_n\}$, где $\mathcal{L}\{x, y, z, \ldots\}$ — линейная оболочка элементов $x, y, z, \ldots$. Очевидно, $N = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_d\}$ и в силу п. 3.3 (гл. I) $K = N \oplus H_1$.

Так как $BN = \{\theta\}$, то

$$BK = BH_1. \tag{1.2}$$

Значит, размерности пространств BK и BH_1 совпадают. Докажем, что

$$\dim BH_1 = \dim H_1. \tag{1.3}$$

Тогда в силу (1.2)

$$r(B) = \dim H_1 = n - d(B),$$

что и требовалось доказать.

Итак, остается проверить (1.3). Для этого достаточно убедиться, что вектора $Be_{d+1}, \ldots, Be_n$ линейно независимы. Но если бы вектора Be_j, $j = d+1, \ldots, n$, были линейно зависимы, то $\exists\, c_j \in F$ такие, что

$$\sum_{j=d+1}^{n} c_j B e_j = \theta, \quad \sum_{j=d+1}^{n} |c_j| > 0,$$

т. е. что

$$B\Big(\sum_{j=d+1}^{n} c_j e_j\Big) = \theta, \tag{1.4}$$

где не все числа c_j, $j = d+1, \ldots, n$ равны нулю. Но (1.4) означает, что вектор $y = \sum_{j=d+1}^{n} c_j e_j$ принадлежит ядру, и, значит, y может быть разложен по базису ядра, т. е. для некоторых чисел $c_j \in F$, $j = 1, 2, \ldots, d$,

$$y = \sum_{j=1}^{d} c_j e_j.$$

Таким образом,

$$\sum_{j=d+1}^{n} c_j e_j = \sum_{j=1}^{d} c_j e_j. \tag{1.5}$$

В силу линейной независимости элементов базиса $e_1, \ldots, e_n$ из (1.5) следует, что все $c_j = 0$, $j = 1 \ldots n$, что невозможно для $j = d+1, \ldots, n$. Следовательно, предположение о линейной зависимости векторов Be_j, $j = d+1, \ldots, n$, ошибочно и равенство (1.3) верно. Теорема доказана.

п.1.2. Следствия.

1. Дефект оператора B равен нулю тогда и только тогда, когда $BK = K$. (Доказать самостоятельно!)

2. Чтобы оператор B был обратим, необходимо и достаточно, чтобы его дефект равнялся нулю.

Действительно, $d(B) = 0$ если и только если $r(B) = n$. Но равенство $r(B) = n$ означает, что $\dim BK = \dim K$, т. е. что $BK = K$, а это равенство есть необходимое и достаточное условие существования обратного оператора.

3. Ранг оператора равен рангу его матрицы.

Рассмотрим уравнение $Bx = \theta$. Согласно п. 2.4 (гл. I) число его линейно независимых решений равно $n - \rho(\|B\|)$, где $\|B\|$ — матрица оператора B в произвольном базисе, а $\rho(\|B\|)$ — ее ранг. С другой стороны, решения уравнения $Bx = \theta$ образуют ядро оператора B, и, следовательно, число линейно независимых решений этого уравнения равно размерности ядра, т. е. $d(B)$. Поэтому $d(B) = n - \rho(\|B\|)$, а в силу теоремы 1.1 $d(B) = n - r(B)$. Отсюда и следует равенство $\rho(\|B\|) = r(B)$.

Задание

Доказать, что подобные матрицы имеют одинаковый ранг.

п.1.3. Используя теорему 1.1, докажем очень важную лемму, которая систематически будет применяться в дальнейшем.

Пусть K — линейное пространство над полем F и линейный оператор B действует из K в K, $n = \dim K$, BK и N — множество значений и ядро оператора B. Обозначим через $\mathcal{M}$ пересечение пространств N и BK:

$$\mathcal{M} = N \cap BK. \tag{1.6}$$

Очевидно, что $\mathcal{M}$ — линейное пространство. Выберем в $\mathcal{M}$ базис $x_1, \ldots, x_m$ и дополним его сначала до базиса $x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_d$ ядра N (здесь $d = d(B)$), а потом до базиса $x_1, \ldots, x_m$, $x'_{m+1}, \ldots, x'_r$ пространства BK (здесь $r = r(B)$). Обозначим через $y_1, \ldots, y_m$ прообразы векторов $x_1, \ldots, x_m$ и через $z_{m+1}, \ldots, z_r$ — прообразы векторов $x'_{m+1}, \ldots, x'_r$ при отображении оператором B, т. е.

$$\text{а) } By_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad \text{б) } Bz_i = x'_i, \quad i = m+1, \ldots, r^{1)}. \tag{1.7}$$

[1] Вектора y_i и z_i определены не однозначно, но для нас это не существенно.

Лемма 1.1. *Вектора* $\Gamma = (x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_m, z_{m+1}, \ldots, z_r)$ *образуют базис в линейном пространстве* K.

Замечание. Словесная формулировка леммы 1.1, облегчающая ее понимание, может быть дана следующим образом. Мы строим сначала базисы ядра и множества значений оператора B, начиная каждый из них с базиса в $\mathcal{M} = N \cap BK$, а затем для базиса в BK берем прообраз — это $y_1, \ldots, y_m, z_{m+1}, \ldots, z_r$. Утверждение леммы 1.1 означает, что объединение Γ базиса N и прообраза базиса BK, построенных таким образом, дает базис в пространстве K.

п.1.4. Доказательство леммы 1.1 проще, чем ее формулировка. Действительно, общее число векторов в наборе Γ равно $d + r = n$ в силу теоремы 1.1. Поэтому для справедливости леммы достаточно установить линейную независимость векторов набора Γ. Предположим, что вектора Γ линейно зависимы, т. е. что для некоторых констант c_i, $i = 1, \ldots, d$, b_i, $i = 1, \ldots, m$, a_i, $i = m + 1, \ldots, r$, не все из которых равны нулю, выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{d} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} b_i y_i + \sum_{i=m+1}^{r} a_i z_i = \theta. \tag{1.8}$$

Применяя к обеим частям соотношения (1.8) оператор B и учитывая (1.7), получим

$$\sum_{i=1}^{m} b_i x_i + \sum_{i=m+1}^{r} a_i x_i' = \theta. \tag{1.9}$$

Но вектора $x_1, x_2, \ldots, x_m, x'_{m+1}, \ldots, x'_r$ образуют базис в пространстве BK и поэтому из (1.9) следует, что все числа b_i и a_i равны нулю. Но тогда в силу (1.8)

$$\sum_{i=1}^{d} c_i x_i = \theta,$$

откуда в силу линейной независимости векторов $x_1, \ldots, x_d$ следует, что $c_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, d$. Таким образом мы получили, что все числа c_i, b_i и a_i равны нулю, что противоречит их выбору. Поэтому предположение о линейной зависимости векторов Γ неверно и, значит, они образуют базис в K.

Задание

Провести доказательство леммы 1.1 в случаях $\mathcal{M} = \{\theta\}$, $\mathcal{M} = N$ и $\mathcal{M} = BK$.

§ 2. ТЕОРЕМА О ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

п.2.1. Рассматриваем далее только случай, когда F есть поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Пусть произвольное число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$. Назовем жордановой клеткой порядка p квадратную матрицу $\|Q_{\lambda_0}\|$ порядка p, имеющую вид

$$\|Q_{\lambda_0}\| = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

В жордановой клетке $\|Q_{\lambda_0}\|$ на главной диагонали находится одно и то же число λ_0, над главной диагональю расположена диагональ из единиц, а все остальные элементы равны нулю, т. е. если $\|Q_{\lambda_0}\| = (a_{ij})$, то $a_{ii} = \lambda_0$, $i = 1, 2, \dots, p$, $a_{i,i+1} = 1$, $i = 1, 2, \dots, p-1$, $a_{ij} = 0$ при $(i, j) \neq (i, i), (i, i+1)$. Если рассматривать жорданову клетку как матрицу некоторого линейного оператора A в произвольном базисе $e_1, \dots, e_p$ некоторого p-мерного линейного пространства K, то очевидно $Ae_1 = \lambda_0 e_1$, $Ae_2 = \lambda_0 e_2 + e_1 \dots$ и вообще $Ae_j = \lambda_0 e_j + e_{j-1}$, $j = 2, \dots, p$. Характеристический многочлен жордановой клетки, очевидно, равен $(\lambda_0 - \lambda)^p$ и, значит, оператор с матрицей $\|Q_{\lambda_0}\|$ имеет в K единственное собственное значение λ_0 и оно имеет алгебраическую кратность p и одномерное собственное подпространство (последнее утверждение следует из равенства $\rho(\|Q_{\lambda_0} - \lambda_0 E\|) = p - 1$). Поэтому при $p > 1$ жорданова клетка не может быть диагонализована ни в каком базисе.

Если матрица $\|Q\|$ состоит из жордановых клеток произвольных порядков, расположенных на диагонали, а остальные элементы $\|Q\|$ равны нулю, то говорят, что матрица $\|Q\|$ записана в жордановой нормальной форме. Другими словами, матрица в жордановой нормальной форме имеет блочно-диагональный вид

$$\|Q\| = \begin{pmatrix} Q_{\lambda_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & Q_{\lambda_2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & Q_{\lambda_s} \end{pmatrix},$$

где блоки Q_{λ_j} суть жордановы клетки каких-то порядков p_j. Отметим, что числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ в жордановых клетках не обязательно различны. Заметим также, что диагональная матрица — частный случай жордановой нормальной формы, когда все жордановы клетки одномерны.

п.2.2. Теорема 2.1 (о жордановой нормальной форме). *Матрицу любого линейного оператора A, действующего в конечномерном пространстве H над полем $F = \mathbb{C}$, можно привести к жордановой нормальной форме, выбрав в H подходящий базис.*

Доказательство теоремы о жордановой нормальной форме (ЖНФ) сводится к построению базиса, в котором матрица оператора A будет иметь ЖНФ. Этот базис называется жордановым.

Докажем теорему 2.1, т. е. построим жорданов базис — сначала в частном случае, когда оператор A имеет в H единственное собственное значение α (α — произвольное фиксированное число). Пусть $A_\alpha = A - \alpha I$ (I — тождественный оператор). Так как пространство $H_0 \equiv H$ инвариантно для оператора A, то оно инвариантно и для оператора A_α. Рассмотрим последовательность пространств $H_s = A_\alpha H_{s-1} = A_\alpha^s H_0$, $s = 1, 2, \ldots$. Почти очевидно, что

$$H_0 \supseteq H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots . \tag{2.1}$$

Действительно, поскольку $H_{s+1} = A_\alpha^s A_\alpha H_0$, $H_s = A_\alpha^s H_0$ и так как $A_\alpha H_0 \subseteq H_0$, то $H_{s+1} \subseteq H_s$, т. е. включение (2.1) доказано. Докажем, что на самом деле если $H_s \neq \{\theta\}$, то имеет место строгое включение

$$H_{s+1} \subset H_s. \tag{2.2}$$

Ранг и дефект линейного оператора B в произвольном линейном пространстве K будем обозначать соответственно через $r(B; K)$ и $d(B; K)$. По определению $r(A_\alpha, H_s) = \dim H_{s+1}$. Оператор A_α имеет в исходном пространстве H_0 единственное собственное значение — число 0, ибо оператор A имел в H_0 единственное собственное значение α. Так как поле комплексное, то при $H_s \neq \{\theta\}$ характеристический многочлен оператора A_α в H_s имеет хотя бы один корень, который обязательно равен нулю, ибо $H_s \subseteq H_0$. Следовательно, существует собственное подпространство оператора A_α в H_s, отвечающее его нулевому собственному значению, и $d(A_\alpha; H_s) \geq 1$. В силу теоремы 1.1

$$\dim H_s = r(A_\alpha; H_s) + d(A_\alpha; H_s).$$

Поэтому и так как $r(A_\alpha; H_s) = \dim H_{s+1}$, имеем

$$\dim H_s - \dim H_{s+1} = d(A_\alpha; H_s) \geq 1^{2)}. \tag{2.3}$$

---

[2] Из равенства (2.3) видно, что при переходе от H_s к H_{s+1} размерность пространства уменьшается на величину размерности ядра оператора A_α в пространстве H_s.

Отсюда и из (2.1) следует справедливость включения (2.2). Таким образом, мы получаем цепочку суживающихся вложенных друг в друга подпространств H_s. Следовательно, найдется такое $k \geq 0$, что $H_k \neq \{\theta\}$, $H_{k+1} = \{\theta\}$. Заметим, что равенство $A_\alpha H_k = \{\theta\}$, означает, что $A_\alpha^{k+1} H_0 \equiv \{\theta\}$, т. е. что A_α^{k+1} — нулевой оператор в H. Обозначим через N_s ядро оператора A_α в пространстве H_s и рассмотрим ядра $N_0, N_1, \ldots, N_k$. N_1 — ядро оператора A_α в H_1, состоит из тех векторов ядра N_0, которые оказались в $H_1 = A_\alpha H_0$. И далее — ядро N_s каждого «следующего» пространства H_s получается из ядра N_{s-1} «предыдущего» пространства H_{s-1}, если взять те вектора из N_{s-1}, которые попали в пространство H_s, т. е.

$$N_s = N_{s-1} \cap H_s. \tag{2.4}$$

Это соотношение будет базовым в дальнейших рассуждениях.

п.2.3. Переходим к построению в пространстве H базиса, из которого перегруппировкой элементов мы получим жорданов базис. Поскольку $A_\alpha H_k = \{\theta\}$, то $N_k = H_k$. Строим базис $x_1, \ldots, x_{p_1}$ в пространстве H_k и дополняем его до базиса ядра N_{k-1} «предыдущего» пространства H_{k-1}: пусть $x_1, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ — базис ядра N_{k-1} ($p_2 = \dim N_{k-1}$). Обозначим прообразы элементов $x_1, \ldots, x_{p_1}$ в H_{k-1} через $y_1, \ldots, y_{p_1}$, т. е.

$$A_\alpha y_i = x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, p_1.$$

Тогда согласно лемме 1.1 вектора

$$\Gamma_{k-1} = (x_1, \ldots, x_{p_1}, x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}, y_1, \ldots, y_{p_1})$$

образуют базис в пространстве H_{k-1}.

Пусть $H_{k-1} \neq H_0$. Построим теперь базис в H_{k-2}. Для этого дополним базис $x_1, \ldots, x_{p_2}$ ядра $N_{k-1} = N_{k-2} \cap H_{k-1}$ до базиса ядра N_{k-2}. Пусть $x_1, \ldots, x_{p_2+1}, \ldots, x_{p_3}$ — базис в N_{k-2}. Далее возьмем прообразы элементов базиса Γ_{k-1}.[3] Прообразы векторов $x_1, \ldots, x_{p_1}$ уже определены — это $y_1, \ldots, y_{p_1}$; прообразы векторов $x_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}$ обозначим через $y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_2}$, а прообразы векторов $y_1, \ldots, y_{p_1}$ — через $z_1, \ldots, z_{p_1}$, т. е.

$$A_\alpha y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, p_2, \qquad A_\alpha z_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, p_1.$$

Согласно лемме 1.1, вектора

$$\Gamma_{k-2} = (x_1, \ldots, x_{p_2+1}, \ldots, x_{p_3}, y_1, \ldots, y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_2}, z_1, \ldots, z_{p_1})$$

образуют базис в пространстве H_{k-2}.

---

[3] Прообразы векторов пространства H_s всегда берутся из пространства H_{s-1}.

Если $H_{k-2} \neq H_0$, то делаем следующий шаг аналогично предыдущим. Берем базис $x_1, \ldots, x_{p_3}$ ядра N_{k-2} и дополняем его до базиса ядра N_{k-3} «предыдущего» пространства. Пусть полученный базис — это $x_1, \ldots, x_{p_3}, x_{p_3+1}, \ldots, x_{p_4}$. Затем строим прообразы векторов базиса Γ_{k-2}. Прообразы векторов $x_1, \ldots, x_{p_2}$ и $y_1, \ldots, y_{p_1}$ уже имеются: это соответственно $y_1, \ldots, y_{p_2}$ и $z_1, \ldots, z_{p_1}$. Обозначим прообразы векторов $x_{p_2+1}, \ldots, x_{p_3}$ и $y_{p_1+1}, \ldots, y_{p_2}$ соответственно через $y_{p_2+1}, \ldots, y_{p_3}$ и $z_{p_1+1}, \ldots, z_{p_2}$, а прообразы векторов $z_1, \ldots, z_{p_1}$ — через $u_1, \ldots, u_{p_1}$, т. е. теперь

$$A_\alpha y_i = x_i, \quad i = 1, \ldots, p_3, \qquad A_\alpha z_i = y_i, \quad i = 1, \ldots, p_2,$$
$$A_\alpha u_i = z_i, \quad i = 1, \ldots, p_1.$$

Согласно лемме 1.1, вектора

$$\Gamma_{k-3} = (x_1, \ldots x_{p_3+1}, \ldots, x_{p_4}, y_1, \ldots, y_{p_2+1}, \ldots, y_{p_3},$$
$$z_1, \ldots, z_{p_1+1}, \ldots, z_{p_2}, u_1, \ldots, u_{p_1})$$

образуют базис в H_{k-3}.

При $H_{k-3} \neq H_0$ мы повторяем аналогичную процедуру построения базиса. А именно, дополняем базис $x_1, \ldots, x_{p_4}$ ядра N_{k-3} до базиса $x_1, \ldots, x_{p_4+1}, \ldots, x_{p_5}$ ядра N_{k-4}, а затем берем прообразы векторов из Γ_{k-3}, обозначая прообразы векторов x_i, y_i и z_i соответственно через y_i, z_i и u_i, а прообразы u_i — через w_i. Согласно лемме 1.1, вектора

$$\Gamma_{k-4} = (x_1, \ldots, x_{p_4+1}, \ldots, x_{p_5}, y_1, \ldots, y_{p_3+1}, \ldots, y_{p_4},$$
$$z_1, \ldots, z_{p_2+1}, \ldots, z_{p_3}, u_1, \ldots, u_{p_1+1}, \ldots, u_{p_2}, w_1, \ldots, w_{p_1})$$

образуют базис в пространстве H_{k-4}, причем по построению

$$\left.\begin{array}{llll} A_\alpha x_i = \theta, & i = 1, 2, \ldots p_5, & A_\alpha y_i = x_i, & i = 1, \ldots, p_4 \\ A_\alpha z_i = y_i, & i = 1, \ldots, p_3, & A_\alpha u_i = z_i, & i = 1, \ldots, p_2 \\ A_\alpha w_i = u_i, & i = 1, \ldots, p_1 & & \end{array}\right\}. \tag{2.5}$$

Если $H_{k-4} \neq H_0$, то, действуя аналогично, мы можем построить базис в пространстве H_{k-5} и т. д. Для простоты мы ограничимся здесь случаем $k = 4$, т. е. считаем, что $H_{k-4} = H_0$.

п.2.4. Исходя из базиса Γ_{k-4} мы строим жорданов базис Γ следующим образом:

$$\Gamma = \big(x_1, y_1, z_1, u_1, w_1, \ldots, x_{p_1}, y_{p_1}, z_{p_1}, u_{p_1}, w_{p_1},$$
$$x_{p_1+1}, y_{p_1+1}, z_{p_1+1}, u_{p_1+1}, \ldots, x_{p_2}, y_{p_2}, z_{p_2}, u_{p_2},$$
$$x_{p_2+1}, y_{p_2+1}, z_{p_2+1}, \ldots, x_{p_3}, y_{p_3}, z_{p_3},$$
$$x_{p_3+1}, y_{p_3+1}, \ldots, x_{p_4}, y_{p_4}, x_{p_4+1}, \ldots, x_{p_5}\big).$$

Этот базис состоит из p_1 наборов $(x_i, y_i, z_i, u_i, w_i)$, $i = 1, \ldots, p_1$, по пять векторов $(5 = k + 1)$, $p_2 - p_1$ наборов x_i, y_i, z_i, u_i, $i = p_1 + 1, \ldots, p_2$, по четыре вектора $(4 = k)$, $p_3 - p_2$ наборов x_i, y_i, z_i, $i = p_2 + 1, \ldots, p_3$, по три вектора $(3 = k - 1)$, $p_4 - p_3$ наборов x_i, y_i, $i = p_3 + 1, \ldots, p_4$ по два вектора $(2 = k - 2)$ и $p_5 - p_4$ наборов x_i, $i = p_4 + 1, \ldots, p_5$ по одному вектору $(1 = k - 3)$. Найдем вид матрицы оператора A_α в базисе Γ. Для этого обозначим через L_i линейную оболочку векторов, имеющих номер i (и составляющих i-й набор). Так как Γ есть базис в H_0, то

$$H_0 = \sum_{i=1}^{p_5} \oplus L_i. \tag{2.6}$$

Пусть $|L_i|$ — размерность пространства L_i. Из проведенных рассуждений следует, что

$$\begin{aligned}
|L_i| &= k + 1 = 5 && \text{при} \quad 1 \le i \le p_1, \\
|L_i| &= k = 4 && \text{при} \quad p_1 + 1 \le i \le p_2, \\
|L_i| &= k - 1 = 3 && \text{при} \quad p_2 + 1 \le i \le p_3, \\
|L_i| &= k - 2 = 2 && \text{при} \quad p_3 + 1 \le i \le p_4, \\
|L_i| &= k - 3 = 1 && \text{при} \quad p_4 + 1 \le i \le p_5.
\end{aligned}$$

Найдем матрицу оператора A_α в пространстве L_i. Пусть, например, i таково, что $|L_i| = 4$. Значит $L_i = \mathcal{L}\{x_i, y_i, z_i, u_i\}$. В базисе $e_i = (x_i, y_i, z_i, u_i)$

$$\|A_\alpha\|_{e_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|A\|_{e_i} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в пространстве L_i в базисе e_i матрица $\|A_\alpha\|_{e_i}$ оператора A_α есть жорданова клетка. В силу (2.6) матрица $\|A_\alpha\|$ в базисе Γ будет состоять из жордановых клеток, причем мы получим p_1 клеток размерности $k + 1$ $(= 5)$, $p_2 - p_1$ клеток размерности k $(= 4)$, $p_3 - p_2$ клеток размерности $k - 1$ $(= 3)$, $p_4 - p_3$ клеток размерности $k - 2$ $(= 2)$, и наконец $p_5 - p_4$ клеток размерности $k - 3$ $(= 1)$. Таким образом, теорема о ЖНФ в рассматриваемом частном случае доказана.

п.2.5. Прежде чем переходить к примерам заметим, что числа p_i могут быть найдены без особых усилий. Дело в том, что размерность каждого из пространств $H_s = A_\alpha H_{s-1}$ выражается через числа p_i. Как следует из проведенных рассуждений,

$$\dim H_k = p_1, \quad \dim H_{k-1} = p_1 + p_2, \quad \dim H_{k-2} = p_1 + p_2 + p_3,$$

и вообще

$$\dim H_{k-s} = \sum_{i=1}^{s+1} p_i, \quad s = 0, 1, \ldots, k.$$

Поэтому $p_{s+1} = \dim H_{k-s} - \dim H_{k-s+1}$, $s \geq 1$. А размерность пространства $H_t = A_\alpha H_{t-1} = A_\alpha^t H_0$ есть ранг $r(A_\alpha^t; H_0)$ оператора A_α^t в H_0, который в силу следствия 3 к теореме 1.1 совпадает с рангом $\rho\big(\|A_\alpha^t\|\big) = \rho\big(\|A_\alpha\|^t\big)$ соответствующей матрицы и поэтому легко может быть найден. Число k тоже элементарно находится, ибо k — это наименьший показатель, для которого $A_\alpha^k \neq 0$, а $A_\alpha^{k+1} = 0$. Зная k и размерности пространств H_s мы можем, не находя жорданов базис, найти ЖНФ матрицы оператора A_α.

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть матрица оператора A в некотором базисе e_1, e_2, e_3 трехмерного пространства H_0 имеет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти ЖНФ матрицы $\|A\|$ и построить жорданов базис.

Из характеристического уравнения $\det \|A - \lambda E\| = 0$ получаем, что единственное собственное значение оператора A равно 2. Полагаем $A_\alpha = A_2 = A - 2I$. Очевидно,

$$\|A_2\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем: $\rho\big(\|A_2\|\big) = 1 = \dim A_2 H_0 = \dim H_1$. Далее

$$\|A_2\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $k = 1$, $p_1 = 1$, $p_1 + p_2 = \dim H_0 = 3$ и, значит, $p_2 = 2$. Число жордановых клеток максимальной размерности $k+1=2$ равно $p_1 = 1$, число клеток размерности $k = 1$ равно $p_2 - p_1 = 1$. Таким образом, ЖНФ матрицы $\|A\|$ есть

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем жорданов базис. Мы уже знаем, что размерность пространства H_1 равна единице. Из вида матрицы $\|A_2\|$ следует, что все вектора H_1 кратны вектору $x_1 = (1, 1, 1)$, ибо $A_2 e_1 = \theta$, $A_2 e_2 = (1, 1, 1)$, $A_2 e_3 = (-1, -1, -1)$. Так как $A_2 H_1 = \{\theta\}$, то $N_1 = H_1$. За первый вектор жорданова базиса возьмем x_1 и теперь его надо дополнить до базиса ядра N_0 оператора A_2 в пространстве H_0. Для нахождения N_0 решаем уравнение

$$\|A_2\| \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — неизвестные координаты векторов из N_0. Получаем, что $\xi_2 = \xi_3$. Так как один вектор из N_0 нами уже взят (это x_1), то в качестве второго базисного вектора в N_0 можно взять любой вектор вида (a, b, b), где $a \neq b$. Положим $x_2 = (1, 0, 0)$ и таким образом мы построили базис x_1, x_2 в N_0. Теперь надо найти прообраз y_1 элемента x_1. Имеем

$$A_2 y_1 = x_1.$$

Полагая $y_1 = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ получим условие $\eta_2 - \eta_3 = 1$. Поэтому в качестве y_1 можно взять $y_1 = (0, 1, 0)$. Таким образом жорданов базис состоит из векторов (x_1, y_1, x_2).

Пример 2. Пусть матрица оператора A в некотором базисе e_1, e_2, e_3 пространства H_0 имеет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти ЖНФ матрицы $\|A\|$ и жорданов базис.

Из характеристического уравнения $\|A - \lambda E\| = 0$ получаем, что оператор A имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$. Полагаем $A_\alpha = A_1 = A - I$ и $H_s = A_1^s H_0$. Очевидно,

$$\|A_1\| = \|A - E\| = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Ранг $\rho\big(\|A_1\|\big) = 2$ и, значит, $\dim H_1 = 2$. Далее

$$\|A_1\|^2 = \begin{pmatrix} 0 & 21 & -21 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг $\rho\big(\|A_1\|^2\big) = 1$ и, значит, $\dim H_2 = 1$. Очевидно,

$$\|A_1\|^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и, стало быть, $H_3 = \{\theta\}$. Следовательно, $k = 2$, а размер наибольшей жордановой клетки равен $k + 1 = 3$. Поэтому матрица $\|A\|$ в жордановой нормальной форме будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим жорданов базис. Предварительно заметим, что поскольку $\dim H_1 - \dim H_2 = \dim H_0 - \dim H_1 = 1$, то в силу равенства (2.3) ядра оператора A_1 в H_0 и H_1 одномерны и, следовательно, совпадают. Из вида матрицы $\|A_1\|$ следует, что $A_1 e_1 = \theta$, и, следовательно, $N_0 = N_1 = N_2 = \{de_1 \mid \forall\, d \in F\}$. Поэтому мы можем взять в качестве базиса в $H_2 = N_2$, например, вектор $x_1 = (21, 0, 0)$. Этап дополнения x_1 до базиса ядра в H_1 отпадает, ибо $N_1 = N_2$. Прообраз вектора x_1, как следует из вида матрицы $\|A_1\|$, есть вектор $y_1 = (3, 3, 3)$. Таким образом, базис в пространстве H_1 есть x_1, y_1. Далее, поскольку $N_0 = N_1$, то этап дополнения базиса ядра N_1 (т. е. вектора x_1) до базиса ядра N_0 отпадает, т. е. базис в N_0 — это тот же вектор x_1. Находим прообразы векторов x_1 и y_1. Прообраз вектора x_1 есть y_1. Из вида матрицы $\|A_1\|$ следует, что прообраз y_1 есть $z_1 = e_2 = (0, 1, 0)$, ибо $A_0 z_1 = y_1$. Таким образом жорданов базис — это вектора (x_1, y_1, z_1).

§ 3. ТЕОРЕМА О ЖОРДАНОВОЙ НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

п.3.1. Перед тем, как переходить к доказательству теоремы о ЖНФ в общем случае, когда рассматриваемый оператор имеет $p > 1$ различных собственных значений, установим важную лемму. Именно на ее использовании будет основано наше доказательство.

Пусть α — собственное значение оператора A в линейном пространстве H над полем $F = \mathbb{C}$, $A_\alpha = A - \alpha I$, q — алгебраическая кратность α как корня характеристического уравнения $\det \|A - \alpha E\| = 0$, $d(A_\alpha)$ — дефект оператора A_α в H.

Лемма 3.1. *В пространстве $H' = A_\alpha H$ алгебраическая кратность q' собственного значения α оператора A есть $q - d(A_\alpha)$, а* *кратности всех остальных собственных значений оператора A в H' те же, что и в пространстве H.*

Доказательство. Пусть A — произвольный линейный оператор в пространстве H, α — какое-либо его собственное значение, $A_\alpha = A - \alpha I$, $k = d(A_\alpha; H)$ и $e_1, \ldots, e_k$ — базис ядра N_0 в $H_0 \equiv H$. Дополним базис ядра до базиса $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ всего пространства H_0. Тогда в этом базисе

$$\|A\| = \left(\begin{array}{cccc|ccc} \alpha & 0 & \ldots & 0 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1,n} \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha & a_{k,k+1} & \ldots & a_{k,n} \\ \hline 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{array}\right).$$

Характеристический многочлен $\varphi(\lambda) = \det \|A - \lambda E\|$ матрицы $\|A\|$, очевидно, имеет вид

$$\varphi(\lambda) = (\alpha - \lambda)^k \psi(\lambda), \tag{3.1}$$

где

$$\psi(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} - \lambda & a_{k+1,k+2} & \ldots & a_{k+1,n} \\ a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} - \lambda & \ldots & a_{k+2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k+1} & \alpha_{n,k+2} & \ldots & a_{n,n} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Пусть $H' = A_\alpha H_0$. Из теоремы 1.1 следует, что $r = \dim H' = n - k$. В качестве базиса в пространстве H' можно взять любые r линейно независимых векторов из набора $A_\alpha e_1, A_\alpha e_2, \ldots, A_\alpha e_n$. Но поскольку $A_\alpha e_i = \theta$, $i = 1, 2, \ldots, k$, то вектора $g_i = A_\alpha e_i$, $i = k+1, \ldots, n$ — линейно независимы. Найдем матрицу оператора A в пространстве H' в базисе g_i, $i = k+1, \ldots, n$. Имеем

$$Ag_i = AA_\alpha e_i = A_\alpha A e_i = A_\alpha \sum_{s=1}^{n} a_{si} e_s = \sum_{s=k+1}^{n} a_{si} g_s,$$

ибо $A_\alpha e_s = \theta$, $s = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, матрица оператора A в пространстве H' есть

$$\begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,k+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix},$$

а характеристический многочлен равен $\psi(\lambda)$. В силу (3.1)

$$\psi(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{(\alpha - \lambda)^k}.$$

Сравнивая теперь характеристические уравнения для нахождения собственных значений оператора A в пространствах H и H', т. е. уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ и $\psi(\lambda) = 0$, мы получаем утверждения леммы 3.1.

Следствие. *Если применить оператор A_α к векторам пространства H достаточное число раз, то мы получим пространство $\widehat{H}$, в котором ядро $\widehat{N}$ оператора A_α будет содержать лишь нуль-вектор, и поэтому $A_\alpha \widehat{H} = \widehat{H}$.*

Действительно, согласно лемме 3.1 в пространствах $A_\alpha^s H$ алгебраическая кратность собственного значения α при росте s будет последовательно уменьшаться до тех пор, пока для какого-то $s = s_0$ в пространстве $\widehat{H} = A_\alpha^{s_0} H$ оператор A не будет иметь собственного значения α (а все остальные собственные значения согласно лемме 3.1 будут иметь ту же алгебраическую кратность, что в пространстве H). Так как мы рассматриваем комплексное поле, то сумма алгебраических кратностей *всех* собственных значений оператора A равна размерности пространства H и поэтому $\dim \widehat{H} = \dim H - q$ (напомним, что q — алгебраическая кратность собственного значения α). В силу леммы 3.1 при $s > s_0$ выполняется $\dim A_\alpha^s H = n - q = \dim \widehat{H}$, и так как $A_\alpha^s H \subseteq \widehat{H}$ при $s > s_0$, то $A_\alpha^s H = \widehat{H}$ при $\forall\, s > s_0$ и, значит, $A_\alpha \widehat{H} = \widehat{H}$.

п.3.2. Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы о ЖНФ в общем случае. Пусть оператор A имеет в пространстве H собственные значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ с алгебраическими кратностями $k_1, \ldots, k_p$ соответственно. Согласно следствию леммы 3.1, укажем числа $s_1, s_2, \ldots, s_p$ так, что в пространстве $A_{\alpha_i}^{s_i} H$ ядро оператора A_{α_i} пусто[4]. Определим оператор $\mathcal{B}_i$ равенством

$$\mathcal{B}_i = A_{\alpha_1}^{s_1} A_{\alpha_2}^{s_2} \ldots A_{\alpha_{i-1}}^{s_{i-1}} A_{\alpha_{i+1}}^{s_{i+1}} \ldots A_{\alpha_p}^{s_p}. \tag{3.2}$$

В силу леммы 3.1 и следствия из нее в пространстве $\mathcal{B}_i H$ оператор A будет иметь единственное собственное значение $\lambda = \alpha_i$ и оно будет иметь ту же кратность k_i, что и в исходном пространстве H_0. Поэтому $\dim \mathcal{B}_i H = k_i$.

---

[4] Мы употребляем здесь слово «пусто» для краткости вместо слов «содержит только нуль-вектор».

Установим два важных свойства операторов $\mathcal{B}_i$:

$$\mathcal{B}_i^2 H = \mathcal{B}_i H, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{B}_j \mathcal{B}_i H = \{\theta\} \quad \forall j, j \neq i. \tag{3.4}$$

Докажем (3.3). Пусть k_i — алгебраическая кратность собственного значения α_i оператора A в пространстве H. Так как в пространствах $\mathcal{B}_i H$ и $\mathcal{B}_i^2 H$ оператор A имеет согласно лемме 3.1 единственное собственное значение α_i и оно той же кратности, что и в H, то

$$\dim \mathcal{B}_i H = \dim \mathcal{B}_i^2 H = k_i. \tag{3.5}$$

С другой стороны, поскольку $\mathcal{B}_i H \subseteq H$, то

$$\mathcal{B}_i^2 H \subseteq \mathcal{B}_i H. \tag{3.6}$$

Из (3.5), (3.6) следует (3.3). Равенство (3.4) будет вытекать из соотношения

$$A_{\alpha_i}^{s_i} \mathcal{B}_i H = \{\theta\}, \tag{3.7}$$

ибо оператор-сомножитель $A_{\alpha_i}^{s_i}$ входит в $\mathcal{B}_j$ при $j \neq i$. А справедливость (3.7) следует из того, что по определению числа s_i в пространстве $A_{\alpha_i}^{s_i} \mathcal{B}_i H = \mathcal{B}_i A_{\alpha_i}^{s_i} H$ оператор A не имеет никаких собственных значений, а это возможно лишь при выполнении (3.7), ибо поле комплексное.

Заметим, что из (3.3) в силу теоремы 1.1 следует, что

$$d(\mathcal{B}_i;\, \mathcal{B}_i H) = 0,$$

ибо $r(\mathcal{B}_i;\, \mathcal{B}_i H) = \dim \mathcal{B}_i H$. Таким образом ядро оператора $\mathcal{B}_i$ в $\mathcal{B}_i H$ пусто.

Теперь мы без труда можем закончить доказательство теоремы о ЖНФ в общем случае. По построению, в каждом из пространств $\mathcal{B}_i H$ оператор A имеет единственное собственное значение α_i. Поэтому на основании § 2 мы можем построить в каждом пространстве $\mathcal{B}_i H$ жорданов базис. Обозначим его через $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$ и покажем, что если мы выпишем подряд базисы всех пространств $\mathcal{B}_i H$, $i = 1, 2, \ldots, p$, то полученный набор векторов

$$e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{k_2}^{(2)}, \ldots, e_1^{(p)}, \ldots, e_{k_p}^{(p)}\right)$$

образует (жорданов!) базис в H.

Общее количество векторов в наборе e равно сумме $\sum_{i=1}^{p} k_i$ алгебраических кратностей k_i всех собственных значений оператора A в H и, следовательно, равно $\dim H$. Поэтому для того, чтобы убедиться, что набор e образует базис в H, нам достаточно доказать линейную независимость векторов $e_j^{(i)}$, $j = 1, \ldots, k_i$, $i = 1, \ldots, p$. Чтобы сделать это, покажем, что равенство

$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{s=1}^{k_i} c_s^{(i)} e_s^{(i)} = \theta \tag{3.8}$$

может выполняться только при $c_s^{(i)} = 0$, $s = 1, \ldots, k_i$, $i = 1, \ldots, p$. Положим $g_i = \sum_{s=1}^{k_i} c_s^{(i)} e_s^{(i)}$. Тогда (3.8) перепишется в виде

$$\sum_{i=1}^{k} g_i = \theta. \tag{3.9}$$

Применив к обеим частям (3.9) оператор $\mathcal{B}_j$, мы получим равенство

$$\mathcal{B}_j g_j = \theta, \tag{3.10}$$

поскольку $g_i \in \mathcal{B}_i H$ и так как в силу (3.3) $\mathcal{B}_j g_i = \theta$ при $i \neq j$. Далее, поскольку ядро оператора $\mathcal{B}_j$ в пространстве $\mathcal{B}_j H$ пусто, то из (3.10) следует, что $g_j = \theta$. А поскольку g_j есть линейная комбинация базисных векторов из $\mathcal{B}_j H$, то из равенства $g_j = \theta$ вытекает, что $c_s^{(j)} = 0$, $s = 1, \ldots, k_j$ при $\forall j$. Следовательно, вектора из набора e — линейно независимы и, значит, образуют базис в H. Отсюда вытекает, что

$$H = \sum_{i=1}^{p} \oplus \mathcal{B}_i H.$$

Как мы уже отмечали, матрица $\widehat{A}_i$ оператора A в пространстве $\mathcal{B}_i H$ в базисе $e_i = \left(e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}\right)$ имеет ЖНФ и поэтому матрица $\|A\|_e$ оператора A в пространстве H в базисе e будет иметь блочно-диагональный вид, а блоками будут матрицы $\widehat{A}_i$ в ЖНФ:

$$\|A\|_e = \begin{pmatrix} \widehat{A}_1 & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \widehat{A}_2 & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \widehat{A}_p \end{pmatrix}.$$

Теорема о ЖНФ доказана полностью.

п.3.3. Приведем пример. Пусть матрица $\|A\|$ оператора A в некотором базисе четырехмерного пространства H имеет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим корни характеристического многочлена $\|A-\lambda E\|=0$. Получим $\lambda_1=1$, $k_1=2$; $\lambda_2=2$, $k_2=2$ (напоминаем, k_i — алгебраическая кратность корня λ_i характеристического уравнения). Теперь построим операторы $\mathcal{B}_1=A_2^{s_2}$ и $\mathcal{B}_2=A_1^{s_1}$, где $A_\alpha=A-\alpha I$, $\alpha=1,2$, а показатели s_2 и s_1 надо найти. Очевидно

$$\|A_1\|=\|A-\lambda_1 E\|=\begin{pmatrix}-1&-2&1&2\\1&2&-1&-2\\0&2&0&-2\\0&-1&0&1\end{pmatrix}$$

и $\rho\big(\|A_1\|\big)=\dim A_1H=2$. Но 2 — это кратность собственного значения $\lambda_2=2$ и поэтому дальнейшее применение оператора A_1 к пространству A_1H не может уменьшить его размерность, т. е. $A_1^2H=A_1H$. Значит $s_1=1$ и $\mathcal{B}_2=A_1$. Далее,

$$\|A_2\|=\|A-2E\|=\begin{pmatrix}-2&-2&1&2\\1&1&-1&-2\\0&2&-1&-2\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad \rho\big(\|A_2\|\big)=3=\dim A_2H,$$

и

$$\|A_2\|^2=\begin{pmatrix}2&2&-1&-2\\-1&-1&1&2\\2&2&-1&-2\\-1&-1&1&2\end{pmatrix},\quad \rho\big(\|A_2\|^2\big)=2=\dim A_2^2H=k_1;$$

поэтому мы можем взять $s_2=2$. Заметим, что это можно было утверждать и не вычисляя $\rho\big(\|A_2\|^2\big)$. Действительно, согласно общей теории число s_2 должно быть таким, что $\dim A_2^{s_2}H=k_1=2$ (кратность собственного значения λ_1 в H). Но поскольку $\rho\big(\|A_2\|\big)=3$, то $\rho\big(\|A_2\|^2\big)=2$. Таким образом, $\mathcal{B}_1=A_2^2$. Положим $\mathcal{H}_1=A_2^2H$, $\mathcal{H}_2=A_1H$. Согласно общей теории $H=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$.

Теперь построим ЖНФ для оператора в двумерных пространствах $\mathcal{H}_i$, $i=1,2$. Для этого заметим, что поскольку

$$\dim A_1H=2=\dim H-\dim\operatorname{Ker}(A_1;H),$$

то ядро оператора A_1 в H — двумерно, т. е. A_1 имеет два линейно независимых собственных вектора в H и в $\mathcal{B}_1H$. Следовательно,

$$\|A\|_{\mathcal{B}_1H}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Размерность пространства A_2H равна трем и,значит, собственное пространство оператора A, отвечающее собственному значению $\lambda = 2$ — одномерно. Поэтому ЖНФ оператора A в пространстве $\mathcal{B}_2 = A_1^2 H$ есть

$$\|A\|_{\mathcal{B}_2 H} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и ЖНФ оператора A в H имеет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Найдем жорданов базис. Базис в пространстве $\mathcal{B}_1 H = A_2^2 H$ — это $g_1 = (2, -1, 2, -1)$ и $g_2 = (-1, 1, -1, 1)$. (Мы нашли его из вида матрицы $\|A_2^2\|$, где столбцы есть коэффициенты разложения векторов $A_2^2 e_j$ по базису e_1, e_2, e_3, e_4.) Очевидно $A_1 g_i = \theta$ и значит $A_1 \mathcal{B}_1 H = \{\theta\}$. Поэтому все пространство $\mathcal{B}_1 H$ является ядром оператора A_1 и первые два вектора жорданова базиса это $x_1 = g_1$, $x_2 = g_2$. Далее, базис в пространстве $\mathcal{B}_2 H = A_1 H$ есть $g_3 = (-1, 1, 0, 0)$, $g_4 = (-2, 2, 2, -1)$. Применяя к этим векторам оператор A_2 получим вектора $A_2 g_3 = (0, 0, 2, -1)$, $A_2 g_4 = (0, 0, 4, -2)$. Поэтому можно положить $x_3 = A_2 g_3 = (0, 0, 2, -1)$, $y_3 = g_3 = (-1, 1, 0, 0)$.

Задание

Непосредственным применением оператора A к базису x_1, x_2, x_3, y_3 проверить, что матрица $\|A\|$ в этом базисе имеет вид (3.11).

Замечание. В этой главе мы следовали [4], поскольку там доказательство теоремы о ЖНФ является максимально операторным и кроме того оно не использует результатов, не содержащихся в главах I, II данной книги.

ГЛАВА IV ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СО СКАЛЯРНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

§ 1. СОПРЯЖЕННЫЕ, ЭРМИТОВЫ И САМОСОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

п.1.1. Пусть K — линейное пространство над полем F, $F = \mathbb{R}$ или $F = \mathbb{C}$, и пусть для $\forall\, x, y \in K$ определено скалярное произведение (x, y) со значениями в F. Пусть A — линейный оператор, действующий из K в K. Будем пока предполагать, что $n = \dim K < +\infty$. Предположим, что для любого вектора $y \in K$ и всех $x \in K$ найдется такой вектор $\widetilde{y}$, что

$$(Ax, y) = (x, \widetilde{y}). \tag{1.1}$$

Тогда вектор $\widetilde{y}$ называется значением сопряженного (к A) оператора на элементе y. Оператор, сопряженный к A, обозначим через A^* и, следовательно, $\widetilde{y} = A^*y$ и (1.1) запишется в виде

$$(Ax, y) = (x, A^*y). \tag{1.2}$$

Следующая теорема отвечает на вопрос о существовании сопряженного оператора и о связи его матрицы с матрицей оператора A.

Теорема 1.1. *Для любого линейного оператора A в пространстве K существует сопряженный оператор A^*. В ортонормированном базисе матрица $\|A\| = (a_{ij})$ оператора A и матрица $\|A^*\| = (b_{st})$ оператора A^* связаны соотношением $b_{st} = \overline{a}_{ts}$, где черта означает комплексное сопряжение.*

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в K, и B — некоторый оператор в K с матрицей (b_{st}). Попробуем найти элементы b_{st} так, чтобы равенство (1.2) выполнялось с

$A^* = B$. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ — произвольные вектора из K. Очевидно,

$$(Ax, y) = \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i A e_i, \eta_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j \Big(\sum_{s=1}^{n} a_{si} e_s, e_j \Big) = \\ = \sum_{s,i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j a_{si} \delta_{sj} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j a_{ji}. \quad (1.3)$$

Аналогично

$$(x, By) = \sum_{i,j=1}^{n} (\xi_i e_i, \eta_j B e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j \Big(e_i, \sum_{s=1}^{n} b_{sj} e_s \Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j \overline{b}_{ij}. \quad (1.4)$$

Приравнивая правые части (1.3) и (1.4), мы видим, что полученное равенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j \overline{b}_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_j a_{ji}$$

выполняется при любых x, y (т. е. при любых ξ_i, η_j) тогда и только тогда, когда $a_{ji} = \overline{b}_{ij}$. ▲

Таким образом, мы одновременно доказали существование сопряженного оператора A^* и нашли вид его матрицы (в ортонормированном базисе).

п.1.2. Обсудим свойства сопряженных операторов.

1. Для оператора A сопряженный оператор — единственный.

Действительно, единственность следут из доказательства теоремы 1.1. Но мы докажем ее и по-другому. Пусть для оператора A существуют два сопряженных оператора: A_1 и A_2. Тогда в силу (1.2)

$$(Ax, y) = (x, A_1 y) \quad \text{при} \quad \forall\, x, y \in K, \quad (1.5а)$$
$$(Ax, y) = (x, A_2 y) \quad \text{при} \quad \forall\, x, y \in K, \quad (1.5б)$$

вычитая из равенства (1.5а) равенство (1.5б), имеем:

$$\big(x, (A_1 - A_2) y\big) = 0 \quad \forall\, x.$$

Взяв здесь $x = (A_1 - A_2)y$, мы получаем, что $\|(A_1 - A_2)y\|^2 = 0$ и, значит, $A_1 y = A_2 y$.

2. Оператор, сопряженный к A^*, совпадает с A.

Утверждение следует из вида матрицы $\|A^*\| = (\overline{a}_{ji})$, ибо $\|A^{**}\| = (a_{ij}) = \|A\|$. Но его можно доказать и по-другому. Имеем

$$(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)} \quad \forall\, x, y.$$

Но тогда $(A^* y, x) = \overline{(Ax, y)} = (y, Ax)$ и, по определению, $A = (A^*)^*$.

3. Оператор, сопряженный к произведению AB двух операторов, равен произведению сопряженных в измененном порядке, т. е.

$$(AB)^* = B^* A^*.$$

Действительно, полагая $x' = Bx$, $y' = A^* y$, имеем

$$(ABx, y) = (Ax', y) = (x', A^* y) = (Bx, y') = (x, B^* A^* y).$$

4. **Лемма 1.1.** *Пусть A — линейный оператор в K, H — инвариантное для A подпространство из K и*

$$H_\perp = \{y \mid y \in K,\ (y, x) = 0\ \forall\, x \in H\}.$$

Тогда подпространство $H_\perp$ инвариантно для A^*.

Доказательство. Пусть $y \in H_\perp$. Покажем, что $A^* y \in H_\perp$, т. е. что $(A^* y, x) = 0$ при $\forall\, x \in H$. Имеем

$$(A^* y, x) = (y, A^{**} x) = (y, Ax) = 0,$$

ибо $Ax \in H$ при $\forall\, x \in H$ по условию. ▲

Определение. *Оператор A, совпадающий со своим сопряженным, называется эрмитовым или эрмитово-симметричным.*

То есть условие (и определение) эрмитовости оператора A есть выполнение равенства

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall\, x, y \in K. \tag{1.6}$$

Если пространство K — евклидово ($F = \mathbb{R}$), то эрмитов оператор назовем симметричным.

Матрица $\|A^*\|$ сопряженного оператора в ортонормированном базисе называется сопряженной к матрице $\|A\|$ и обозначается через $\|A\|^*$. Вследствие теоремы 1.1

$$\|A\|^* := \|A^*\| = \overline{\|A\|}^{\mathsf{T}}.$$

Здесь и далее для любой матрицы $\|B\|$ матрица $\overline{\|B\|}^{\mathsf{T}}$ получается из $\|B\|$ транспонированием и взятием комплексного сопряжения всех элементов. Матрица эрмитова (симметричного) оператора A в ортонормированном базисе называется эрмитовой (симметричной). То есть для эрмитовой матрицы $\overline{\|A\|}^{\mathsf{T}} = \|A\|$, а для симметричной $\|A\| = \overline{\|A\|}^{\mathsf{T}} = \|A\|^{\mathsf{T}}$.

Разумеется, определения сопряженной, эрмитовой и симметричной матриц можно дать и без обращения к операторам, линейным пространствам и базисам, а используя только свойства матричных элементов. А именно, пусть $\|B\| = (b_{st})_n^n$. Матрица $\|C\| = (c_{st})$ называется сопряженной к матрице $\|B\|$ и обозначается через $\|B\|^*$, если $c_{st} = \overline{b}_{ts}$, т. е. если $\|C\| = \overline{\|B\|}^{\mathsf{T}}$. Матрица $\|B\|$ называется эрмитовой (симметричной), если $b_{st} = \overline{b}_{ts}$, т. е. если $\|B\| = \|B\|^*$ (если $b_{st} = \overline{b}_{ts} = b_{ts}$, т. е. если $\|B\| = \|B\|^{\mathsf{T}}$).

Легко видеть, что определения сопряженной, эрмитовой и симметричной матриц, введенные без помощи операторов или с их помощью — эквивалентны. Чтобы убедиться в этом достаточно в произвольном линейном пространстве K со скалярным произведением выбрать ортонормированный базис и определить оператор B так, чтобы его матрица совпала с матрицей $\|B\|$. Тогда $\|B\|^* = \|B^*\|$ и оператор B будет эрмитов (симметричен), если матрица $\|B\|$ эрмитова (симметрична).

п.1.3. Мы определили сопряженный оператор в конечномерном пространстве. Рассмотрим теперь бесконечномерный случай. В этом случае оператор A, как правило, определен не во всем пространстве, а в некоторой области $D_A \subset K$. Например, оператор $A_0 = -d^2/dt^2$ в пространстве $\mathcal{L}_2([ab])$ квадратично интегрируемых функций на отрезке $[ab]$ можно определить на множестве $D_{A_0} = \{x(t) \mid x(t) \in C^2[ab]\}$ (могут быть и другие области определения). При $\dim K = +\infty$ значение $\widetilde{y}$ сопряженного оператора на элементе y определяется формально тем же равенством (1.1), что и раньше:

$$(Ax, y) = (x, \widetilde{y}) \quad \forall\, x \in D_A, \tag{1.7}$$

но теперь его справедливость требуется только для $x \in D_A$. При выполнении (1.7) имеем $\widetilde{y} = A^*y$. Обозначим через D_{A^*} множество тех $y \in K$, для каждого из которых найдется $\widetilde{y} \in K$ так, что равенство (1.7) выполняется при $\forall\, x \in D_A$.

Можно доказать, что сопряженный оператор существует и определен однозначно, если область D_A плотна в K в норме пространства K. Оператор A называется самосопряженным, если $D_{A^*} = D_A$ и $A^*y = Ay$, $y \in D_A$. В конечномерном случае понятие самосопряженности совпадает с понятием эрмитовости (ибо $D_A = D_{A^*} = K$). В бесконечномерном случае представляется очень полезным выделить множество операторов, для которых $D_{A^*} \supseteq D_A$ и $Ay = A^*y$ при $y \in D_A$, т. е. операторы A, для которых

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad \forall\, x, y \in D_A. \tag{1.8}$$

Такие операторы мы будем называть эрмитовыми.

Приведем примеры эрмитовых и не эрмитовых операторов в бесконечномерных пространствах; некоторые из этих примеров важны для математической физики.

Пусть $\mathcal{L}_2([ab])$ — пространство квадратично интегрируемых функций $x(t)$ на отрезке $[ab]$ над полем $F = \mathbb{C}$ со скалярным произведением

$$(x, y) = \int_a^b x\,\overline{y}\,dt$$

и A — линейный оператор, определенный на некоторой области $D_A \subset K$ со значениями в K. Мы рассмотрим несколько различных операторов A и различных областей определения D_A. Для каждого случая мы будем проверять справедливость равенства (1.8) при произвольных $x, y \in D_A$, т. е. выяснять — эрмитов оператор A в D_A или нет. Заметим, что для дифференциальных операторов такая проверка в существенном сводится к m-кратному интегрированию по частям, где m — порядок дифференциального оператора.

1. $A = A_1 = i(d/dt)$, $D_A = D_{A_1} = \{x(t) \mid x(t) \in C^1[ab], x(a) = x(b) = 0\}$. При $x(t), y(t) \in D_{A_1}$ имеем

$$(Ax, y) = \int_a^b i\frac{d}{dt}x \cdot \overline{y}\,dt = ix\overline{y}\Big|_a^b - i\int_a^b x\frac{d}{dt}\overline{y} = (x, Ay).$$

Оператор A в D_{A_1} — эрмитов.

2. $A = A_2 = d/dt$, $D_{A_2} = D_{A_1}$. При $x(t), y(t) \in D_{A_1}$ имеем

$$(Ax, y) = \int_a^b \frac{d}{dt}x \cdot \overline{y}\,dt = x\overline{y}\Big|_a^b - \int_a^b x\frac{d}{dt}\overline{y}\,dt = -(x, Ay).$$

Оператор A_2 в D_{A_2} — не эрмитов. Отметим, что операторы A_1 и A_2 определены в одной и той же области и отличаются один от другого только числовым множителем. Тем не менее A_1 — эрмитов, а A_2 — нет. Причина в том, что этот множитель — чисто мнимый.

Задание

Пусть A и B — линейные операторы, определенные в некоторой области D_A, и $B = \alpha A$. Докажите, что

а) при вещественном α операторы A и B или одновременно эрмитовы, или одновременно не эрмитовы;

б) при чисто мнимом α операторы A и B не могут одновременно быть эрмитовыми.

3. $A = A_3 = -d^2/dt^2 + P(t)$, где $P(t)$ — вещественная непрерывная функция

$$D_{A_3} = \{x(t) \mid x \in C^2[ab],\ x(a) = 0,\ x'(b) = \beta x(b),\ \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Пусть $x(t), y(t) \in D_{A_2}$. Очевидно

$$\big(P(t)x, y\big) = \big(x, P(t)y\big)$$

и поэтому нам надо проверить только равенство $(A_4x, y) = (x, A_4y)$, где $A_4 = -d^2/dt^2$. Имеем

$$(A_4x, y) = -\int\limits_a^b \frac{d^2}{dt^2}x\cdot\overline{y}\,dt = -x'\overline{y}\Big|_a^b + \int\limits_a^b \frac{dx}{dt}\frac{d\overline{y}}{dt}dt = (-x'\overline{y} + x\overline{y}')\Big|_a^b - \int\limits_a^b x\frac{d^2\overline{y}}{dt^2}dt.$$

Из этих равенств видно, что для выполнения (1.8) надо, чтобы

$$(x'\overline{y} - x\overline{y}')\Big|_a^b = 0.$$

Подставив сюда $x'(b) = \beta x(b)$, $y'(b) = \beta y(b)$, $x(a) = y(a) = 0$ убеждаемся, что это равенство справедливо и, значит, оператор A_3 в D_3 эрмитов.

Задание

Пусть $A = A_3$ и $D_A = \{x(t) \mid x \in C^2[ab],\ x'(a) = \gamma x(a),\ x(b) = 0\}$. Выяснить, будет ли оператор A эрмитов а) при $\gamma = 2 + i$; б) при $\gamma = \pi$.

п.1.4. Выясним свойства эрмитовых операторов, не предполагая для свойств 1), 2) конечномерность пространства K.

1. Собственные значения эрмитова оператора вещественны.

Действительно, пусть при некотором $\lambda \in F$ и $x \neq \theta$, выполняется $Ax = \lambda x$. Умножая это равенство на x скалярно, получим

$$(Ax, x) = \lambda(x, x).$$

Но $(Ax, x) = (x, Ax)$ в силу (1.8), а $(x, Ax) = \overline{(Ax, x)}$. Таким образом,

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = \overline{(Ax, x)},$$

откуда и следует вещественность λ.

2. Собственные вектора эрмитова оператора, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Действительно, пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \in F$, $x_i \neq \theta$. Отсюда $(Ax_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$, где в силу эрмитовости оператора A

$$(Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2).$$

Следовательно, $\lambda_1(x_1, x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$ и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(x_1, x_2) = 0$.

3. Следующее свойство относится только к эрмитовым операторам в конечномерных пространствах.

Лемма 1.2. *Пусть оператор A эрмитов в пространстве K над полем F и H — инвариантное для A подпространство K, $H \neq \{\theta\}$. Тогда оператор A имеет в H по крайней мере одно собственное значение.*

Доказательство. Пусть $\|A\|_H = (a_{ij})_m^m$ — матрица оператора A в ортонормированном базисе $e_1, \ldots, e_m$ подпространства H. Для отыскания координат ξ_i собственного вектора $x_0 = \sum_{i=1}^m \xi_i e_i$ оператора A в H, отвечающего собственному значению λ, мы из равенства $Ax_0 = \lambda x_0$ получаем систему уравнений (см. § 6, гл. II)

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}\xi_j = \lambda\xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.9}$$

где число λ должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\det \|A - \lambda E\|_H = 0. \tag{1.10}$$

В силу основной теоремы высшей алгебры, уравнение (1.10) над комплексным полем имеет хотя бы один корень; обозначим его через λ_0. Покажем, что λ_0 — вещественное число и, следовательно, $\lambda_0 \in F$ и при $F = \mathbb{C}$ и при $F = \mathbb{R}$ и тем самым лемма 1.2 будет доказана. Подставим в (1.9) $\lambda = \lambda_0$, умножим i-е уравнение из (1.9) на $\overline{\xi}_i$ и просуммируем по всем i. Получим

$$Q := \sum_{i,j=1}^m a_{ij}\xi_j\overline{\xi}_i = \lambda_0 \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2. \tag{1.11}$$

Число Q — вещественно, ибо поскольку $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$, то

$$\overline{Q} = \sum_{i,j=1}^m \overline{a}_{ij}\overline{\xi}_j\xi_i = \sum_{i,j=1}^m a_{ji}\xi_i\overline{\xi}_j = Q.$$

Значит, и λ_0 — вещественно. ▲

п.1.5. Теорема 1.2. *В конечномерном пространстве K можно построить базис, состоящий из ортонормированных собственных векторов эрмитова оператора, действующего из K в K.*

Замечание. Другая формулировка теоремы 1.2. Матрица эрмитова оператора в конечномерном пространстве диагонализуема.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — все различные собственные значения эрмитова оператора A в пространстве K, U_{λ_i}

$i = 1, 2, \ldots, m$ — соответствующие собственные подпространства, $H := \sum_{i=1}^{m} \oplus U_{\lambda_i}$, $H_\perp = \{y \mid y \in K, \ (y, x) = 0 \ \forall\, x \in H\}$. В силу леммы 4.1 (гл. I) $K = H \oplus H_\perp$. Так как подпространства U_{λ_i} инвариантны для оператора A, то и подпространство H инвариантно для A. В силу леммы 1.1 пространство $H_\perp$ будет инвариантно для A^*, но так как $A^* = A$, то пространство $H_\perp$ инвариантно для A. Если $H_\perp \neq \{\theta\}$, то в силу леммы 1.2 оператор A имеет в пространстве $H_\perp$ хотя бы одно собственное значение, которое мы обозначим ν. Пусть $x_0 \in H_\perp$ — отвечающий ему собственный вектор. Поскольку набор $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ содержал все собственные значения оператора A в пространстве K, то $\exists\, j$ такое, что $\nu = \lambda_j$ и, следовательно, $x_0 \in U_{\lambda_j}$. Таким образом, с одной стороны $x_0 \in U_{\lambda_j} \subset H$, а с другой $x_0 \in H_\perp$. Поэтому вектор x_0 ортогонален к самому себе, т. е. $(x_0, x_0) = 0$ и, значит, $x_0 = \theta$, что невозможно. Противоречие возникло из-за предположения, что $H_\perp \neq \{\theta\}$. Значит, $H_\perp = \{\theta\}$ и следовательно,

$$K = \sum_{i=1}^{m} \oplus U_{\lambda_i}.$$

Выберем теперь в каждом собственном подпространстве U_{λ_i} ортонормированный базис $e_1^{(i)}, \ldots, e_{k_i}^{(i)}$, где $k_i = \dim U_{\lambda_i}$. Тогда набор векторов

$$e = \left(e_1^{(1)}, \ldots, e_{k_1}^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_{k_2}^{(2)}, \ldots, e_1^{(m)}, \ldots, e_{k_m}^{(m)}\right)$$

будет ортонормированным базисом в пространстве K (см. § 3, гл. I) и матрица оператора A в базисе e будет иметь диагональный вид:

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \text{\Large 0} & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_m & \\ & \text{\Large 0} & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}$$

Теорема доказана.

Следствие. *У эрмитовых операторов алгебраическая и геометрическая кратности собственных значений совпадают.*

Вопрос о возможности одновременной диагонализации семейства эрмитовых операторов $A_1, \ldots, A_p$ решается следующей теоремой 1.3, которая следует из теоремы 5.6 (гл. II).

Теорема 1.3. *Пусть в пространстве K над полем F определены эрмитовы операторы A_i, $i = 1,2, \ldots, p$, действующие из K в K. Тогда для существования в K базиса, в котором матрицы* ***всех*** *операторов A_i будут диагональными, необходимо и достаточно, чтобы операторы A_i попарно коммутировали друг с другом, т. е. чтобы*

$$A_iA_j = A_jA_i, \quad i,j = 1, 2, \ldots, p. \tag{1.12}$$

§ 2. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

п.2.1. Пусть K — конечномерное пространство над полем $F = \mathbb{C}$ и A — эрмитов оператор, действующий из K в K.

Определение. *Оператор A называется положительно определенным, если существует такая константа $\gamma > 0$, что для всех $x \in K$,*

$$(Ax,x) \geqslant \gamma \|x\|^2. \tag{2.1}$$

Оператор A называется положительным, если для всех $x \in K$, $x \neq \theta$,

$$(Ax, x) > 0. \tag{2.2}$$

Очевидно, что положительно определенный оператор является положительным. Однако верно и обратное: положительный оператор всегда положительно определен, т. е. множество положительных операторов совпадает с множеством положительно определенных[1]. Это утверждение вытекает из следующей простой леммы

Лемма 2.1. *Для справедливости каждого из неравенств* (2.1), (2.2) *необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора A были положительными.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть все собственные значения оператора A положительны. Так как оператор эрмитов, то в пространстве K можно построить ортонормированный базис $f_1, \ldots, f_n$, состоящий из собственных векторов оператора A. Пусть

[1] В бесконечномерных пространствах это не верно: см. п. 2.7.

λ_i — собственное значение, которому отвечает вектор f_i, $i=1, 2, \ldots, n$ и $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$ — произвольный вектор из K. Очевидно,

$$(Ax, x) = \Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i f_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \overline{\alpha}_j \delta_{ij} \lambda_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2. \qquad (2.3)$$

Пусть $\gamma = \min_i \lambda_i$. По условию, $\gamma > 0$. В силу (2.3)

$$(Ax, x) \geq \gamma \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2 = \gamma \|x\|^2,$$

т. е. неравенство (2.1) доказано. Докажем необходимость. Пусть выполняется неравенство (2.2). Тогда все собственные значения оператора A положительны, ибо в силу (2.2)

$$\lambda_i = (Af_i, f_i) > 0.$$

Лемма доказана.

Замечание. Так как для эрмитова оператора A определитель $\det \|A\|$ его матрицы равен произведению собственных значений, то для положительно определенных операторов 1) $\det \|A\| > 0$, 2) существует обратный оператор.

п.2.2. Установим необходимое и достаточное условие положительной определенности эрмитовых операторов. Пусть A —эрмитов оператор, действующий из K в K, $F = \mathbb{C}$,

$$\|A\| = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & \ldots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и

$$\triangle_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

— суть соответственно матрица оператора A в произвольном ортонормированном базисе $e = (e_1, \ldots, e_n)$ пространства K и угловой минор k-го порядка матрицы $\|A\|$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2.1. (Критерий Сильвестра). *Для того, чтобы оператор A был положительно определен, необходимо и достаточно выполнение неравенств*

$$\triangle_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.4}$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть оператор A положительно определен в пространстве K. Докажем справедливость неравенств (2.4). Пусть $H_k = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_k\}$ — линейная оболочка k первых векторов базиса e пространства K и P_k — проектор в K на подпространство H_k (т. е. при $x = \sum_{i=1}^{n} \eta_i e_i$, по определению, $P_k x = \sum_{i=1}^{k} \eta_i e_i$, или, что эквивалентно, $P_k e_i = e_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $Pe_i = \theta$ $i = k+1, \ldots, n$). Очевидно, при $x \in H_k$ выполняется $P_k x = x$. Пусть $A_k = P_k A$. Легко видеть, что матрица $\|A_k\|_{H_k}$ оператора A_k в подпространстве H_k в базисе $e_1, \ldots, e_k$ есть

$$\|A_k\|_{H_k} = \|P_k A\|_{H_k} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Оператор A_k — положительно определен на H_k. Действительно, так как оператор P_k — эрмитов, а оператор A — положительно определен, то при $x \in H_k$

$$(P_k A x, x) = (Ax, P_k x) = (Ax, x) \geqslant \gamma \|x\|^2.$$

В силу замечания к лемме 2.1 $\Delta_k = \det \|P_k A\| > 0$. Необходимость условий (2.4) доказана.

п.2.3. *Достаточность.* Пусть неравенства (2.4) выполняются. Докажем, что оператор A положительно определен. Доказательство проведем индукцией по размерности пространства K. Пусть $\dim K = 1$. Тогда оператор A есть оператор умножения на число a_{11}, т. е. $Ax = a_{11} x$ и $(Ax, x) = a_{11} \|x\|^2$. В силу (2.4) $\Delta_1 = a_{11} > 0$ и, значит, оператор A положительно определен. Таким образом, при $\dim K = 1$ достаточность условий (2.4) доказана. Пусть $n = \dim K \geq 2$. Предположим, что достаточность условий (2.4) для положительной определенности оператора A доказана для любых операторов в пространствах размерности $m = 1, 2, \ldots, n-1$, $n \geq 2$, и докажем ее для оператора A в пространстве K размерности $m = n$. Пусть $\|A\| = (a_{ij})_n^n$. Рассмотрим оператор $A_{n-1} = P_{n-1} A$ в пространстве $H_{n-1} = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_{n-1}\}$ (P_{n-1} — проектор на H_{n-1}, см. п. 2.2). Матрица оператора A_{n-1} в подпространстве H_{n-1} в базисе $e_1, \ldots, e_{n-1}$

есть

$$\|A_{n-1}\|_{H_{n-1}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Так как, по условию, для матрицы $\|A\|$ выполняются неравенства (2.4), то по предположению индукции оператор A_{n-1} положительно определен в H_{n-1} и, значит, все его собственные значения положительны. Выберем в пространстве H_{n-1} ортонормированный базис $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ из собственных векторов оператора A_{n-1} и обозначим через ν_i собственное значение, которому отвечает вектор f_i, $i = 1, 2, \dots, n-1$. В силу леммы 2.1 имеем: $\nu_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$. Пусть f_n — произвольный нормированный вектор из K, ортогональный к $f_1, \dots, f_{n-1}$. Примем систему векторов $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, f_n)$ за базис в K (вектора f образуют базис в силу леммы 2.2 гл. I). В этом базисе матрица $\|A\|_f$ примет вид

$$\|A\|_f = \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{1n} \\ 0 & \nu_2 & 0 & \dots & 0 & b_{2n} \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & 0 & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_{n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

где $b_{in} = \overline{b}_{ni}$, $i = 1, 2, \dots, n$ — координаты вектора Af_n в базисе f.

Задание

Проверить, что матрица $\|A\|_f$ имеет вид (2.5).

Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. В силу (2.5) имеем

$$Ax = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i A f_i + \alpha_n A f_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(\nu_i f_i + b_{ni} f_n) + \alpha_n \sum_{i=1}^{n} b_{in} f_i = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i \nu_i + \alpha_n b_{in}) f_i + \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ni}\Big) f_n.$$

Так как вектора $f_1, \dots, f_n$ — ортонормированы, то

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i \nu_i + \alpha_n b_{in}) \overline{\alpha}_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_{ni} \overline{\alpha}_n = \\ = \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i|^2 \nu_i + \sum_{i=1}^{n-1} (\overline{\alpha}_i \alpha_n b_{in} + \alpha_i \overline{\alpha}_n \overline{b}_{in}) + |\alpha_n|^2 b_{nn}. \tag{2.6}$$

п.2.4. Для доказательства неравенства $(Ax, x) > 0$ дополним в (2.6) содержащие α_i выражения для каждого $i = 1, 2, \ldots, n-1$ до квадрата модуля. Для этого сначала вынесем ν_i за скобки и затем добавим в полученное выражение слагаемое $|b_{in}\alpha_n|^2$ (и вычтем его для сохранения равенства в (2.6)). Получим

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i |\alpha_i + c_{in}\alpha_n|^2 + \nu_n |\alpha_n|^2,$$

где

$$\nu_n = b_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i |c_{in}|^2, \quad c_{in} = b_{in}/\nu_i.$$

Если

$$\nu_n > 0, \tag{2.7}$$

то, очевидно, $(Ax, x) \geq 0$ и равенство $(Ax, x) = 0$ возможно лишь при $\alpha_n = 0$, $|\alpha_i + c_{in}\alpha_n| = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$, т. е. при $\alpha_1 = a_2 = \ldots \ldots = a_n = 0$. Значит, при $x \neq \theta$ $(Ax, x) > 0$ и $(Ax, x) \geq \gamma\|\gamma\|^2$ для некоторого $\gamma > 0$. Таким образом, для завершения доказательства теоремы остается установить неравенство (2.7). Для этого достаточно показать, что

$$\Delta_n = \det\|A\| = \nu_1 \cdot \nu_2 \ldots \cdot \nu_{n-1} \cdot \nu_n, \tag{2.8}$$

ибо $\Delta_n > 0$ по условию, а $\nu_i > 0$ $i = 1, 2, \ldots, n-1$ по предположению индукции. Для локазательства (2.8) заметим, что $\det\|A\|$ не зависит от выбора базиса в пространстве K, и поэтому в силу (2.5) $\Delta_n = \det\|A\|_e = \det\|A\|_f$, т. е.

$$\Delta_n = \det\|A\|_f = \begin{vmatrix} \nu_1 & 0 & \ldots & 0 & b_{1n} \\ 0 & \nu_2 & \ldots & 0 & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \nu_{n-1} & b_{n-1,n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{n,n-1} & b_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.9}$$

Для вычисления Δ_n мы в определителе (2.9) последовательно вычтем из n-го столбца сначала первый, умноженный на c_{1n}, затем второй, умноженный на c_{2n} и т. д. до $(n-1)$-го столбца включительно, умноженного на $c_{n-1,n}$. Тогда получим

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \nu_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \nu_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & \nu_{n-1} & 0 \\ b_{n1} & \ldots & b_{n,n-1} & \nu_n \end{vmatrix}.$$

Откуда и следует (2.8). Достаточность условий (2.4) доказана.

Замечание. Если оператор A — симметричный ($F=\mathbb{R}$), то доказательство сохраняется с естественными упрощениями. Но для симметричных операторов будет дано и другое доказательство критерия Сильвестра, основанное на теории квадратичных форм (см. § 4 гл. V).

п.2.5. Аналогично положительно определенным и положительным операторам можно ввести отрицательно определенные и отрицательные операторы. Для этого знак неравенства в соотношениях (2.1), (2.2) надо изменить на противоположный и в (2.1) заменить γ на $(-\gamma)$, $\gamma > 0$. Очевидно. что оператор A отрицательно определен (отрицателен) тогда и только тогда, когда оператор $-A$ положительно определен (положителен). Таким образом, для отрицательной определенности оператора A необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора $-A$ были положительными, т. е. чтобы все собственные значения оператора A были отрицательными. Из критерия Сильвестра следует, что для этого необходимо и достаточно, чтобы для угловых миноров матрицы $\|A\|$ выполнялись условия: $\Delta_k < 0$ при не четном k и $\Delta_k > 0$ при четном k.

п.2.6. Приведем пример применения критерия Сильвестра. Рассмотрим систему n линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.10}$$

где $x_j(t)$ — неизвестные функции, $j = 1, 2, \ldots, n, a_{ij} = a_{ji}$ — вещественные числа. Выясним, при каких ограничениях на матрицу коэффициентов $(a_{ij})_n^n$ все решения системы (2.10) будут стремиться к нулю при $t \to \infty$. Решение системы ищется в виде $x_j = \xi_j e^{\lambda t}$, где ξ_j и λ — неизвестные числа, $j = 1, 2, \ldots, n$. Подставляя выражения для x_j в (2.10) и сокращая на $e^{\lambda t}$, получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j = \lambda\xi_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Таким образом, для существования не нулевого решения системы (2.10) надо, чтобы λ было собственным значением матрицы $(a_{ij})_n^n$. А для убывания решений (2.10) на бесконечности все λ должны быть отрицательными. Согласно критерию Сильвестра, необходимым и достаточным условием этого являются неравенства $\Delta_k < 0$ при не четных k, $\Delta_k > 0$ при четных k, где

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}.$$

п.2.7. Рассмотрим теперь положительно определенные и положительные операторы в бесконечномерном пространстве K. При $\dim K = +\infty$ оператор A чаще всего бывает задан не во всем пространстве K, а в некоторой области определения $D_A \subseteq K$. Положительно определенные и положительные операторы определяются как и раньше требованиями (2.1) и (2.2), но теперь эти неравенства должны выполняться не для $\forall x \in K$, а только при $x \in D_A$. Как и в конечномерном случае, здесь положительно определенный оператор является положительным. Однако в отличие от конечномерного случая положительный оператор в бесконечномерном пространстве может не быть положительно определенным (т. е. неравенство (2.1) не следует из (2.2)). Приведем пример такой ситуации. Пусть $K = \mathcal{L}_2[0, l]$, $x(t) \in K$ и оператор A определяется равенством

$$Ax(t) = tx(t).$$

Ясно, что $D_A = K$ и что

$$(Ax, x) = \int_0^l t|x(t)|^2\,dt > 0 \quad \text{при} \quad x(t) \not\equiv 0, \quad x(t) \in K.$$

Значит, оператор A — положительный. В то же время он не является положительно определенным. Действительно, взяв функцию $x_\alpha(t) \equiv 0$ при $\alpha < t \leq l$, где α — произвольное положительное число, мы получим

$$(Ax_\alpha, x_\alpha) = \int_0^\alpha t|x_\alpha(t)|^2 dt \leq \alpha \|x_\alpha\|^2$$

и поэтому ни при каком фиксированном $\gamma > 0$ не может выполняться

$$(Ax, x) \geq \gamma \|x\|^2 \quad \forall\, x(t) \in \mathcal{L}_2[0, l]$$

так как при $x = x_\alpha$ мы имели бы $\gamma\|x_\alpha\|^2 \leq \alpha\|x_\alpha\|^2$, где α можно взять сколь угодно малым.

Отметим еще одно отличие бесконечномерного случая от конечномерного: для положительного оператора в K обратный может не существовать. Как мы знаем (см. гл. II § 3), для существования оператора A^{-1} надо, чтобы оператор A осуществлял взаимно однозначное отображение и чтобы $AK = K$. Первое требование выполняется, ибо если $x_1 \neq x_2$, то и $Ax_1 \neq Ax_2$, так как если $Ax_1 = Ax_2$, то $x = x_1 - x_2 \neq \theta$ и $(Ax, x) = 0$ и, значит, неравенство (2.2) не имеет места. А требование $AK = K$ может не выполняться. Для рассмотренного выше оператора $Ax(t) = t \cdot x(t)$ множество AK не содержит, например, функций $x(t) = t^{\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1/2$ (проверить самостоятельно).

п.2.8. В заключение параграфа приведем пример положительно определенного оператора в бесконечномерном пространстве.

Пусть

$$K = \mathcal{L}_2[ab],\ A = -\frac{d^2}{dt^2},\ D_A = \big\{x(t)\,|\,x(t) \in C^2[ab],\ x(a) = x(b) = 0\big\}.$$

Интегрируя по частям выражение

$$(Ax, x) = -\int\limits_a^b \frac{d^2x}{dt^2}\overline{x}\,dt,$$

имеем

$$(Ax, x) = -x'(t)\,\overline{x}(t)|_a^b + \int\limits_a^b |x'(t)|^2\,dt = \int\limits_a^b |x'(t)|^2\,dt. \tag{2.11}$$

Далее по неравенству Коши–Буняковского

$$|x(t)|^2 = \Big|\int\limits_a^t x'(s)\,ds\Big|^2 \leq \Big(\int\limits_a^b |x'(s)|\,ds\Big)^2 \leq \int\limits_a^b |x'(s)|^2\,ds \cdot (b-a).$$

Интегрируя это неравенство по t, получим с учетом (2.11)

$$\int\limits_a^b |x(t)|^2\,dt \leq (b-a)^2 \cdot (Ax, x),$$

откуда и следует (2.1) с $\gamma = (b-a)^{-2}$. Таким образом, оператор A положительно определен в D_A.

Задание

Проверить, будет ли положительно определен оператор $A = -d^2/dt^2$ в области D_A, если там вместо условия $x(a) = x(b) = 0$ взять любое из условий: 1) $x'(a) = x(b) = 0$; 2) $x'(a) = x'(b) = 0$; 3) $x'(a) + \sigma x(a) = 0$, $\sigma > 0$, $x(b) = 0$.

§ 3. УНИТАРНЫЕ И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ МАТРИЦЫ

п.3.1. Пусть K — линейное конечномерное пространство над полем $F = \mathbb{C}$. Оператор U, действующий из K в K, называется унитарным, если он сохраняет скалярное произведение, т. е. если

$$(Ux, Uy) = (x, y) \quad \forall\, x, y \in K. \tag{3.1}$$

Дадим и другое определение. Оператор U называется унитарным, если он переводит ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства K в ортонормированный.

Задание

Доказать эквивалентность обоих определений.

Примеры унитарных операторов.

1. Пусть p — произвольная перестановка n элементов:

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix},$$

где $i_1, \ldots, i_n$ — различные числа из набора $1, 2, \ldots, n$. Положим

$$Ue_k = e_{i_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Оператор U унитарен по второму определению.

2. Пусть $\|B\| = (b_{ij})$ — квадратная матрица порядка n, элементы которой удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\overline{b}_{is} = \delta_{js} \; \forall\, j, s \tag{3.2}$$

и пусть $e_1, \ldots, e_n$ — произвольный ортонормированный базис в линейном пространстве K над полем $F = \mathbb{C}$. Положим

$$Ue_j = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} e_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Оператор U унитарен по второму определению.

п.3.2. Матрица унитарного оператора в ортонормированном базисе называется унитарной. Пусть $e_1, \dots, e_n$ —ортонормированный базис в K и $Ue_i = \sum_{s=1}^{n} p_{si}\, e_s$. Выясним свойства матрицы $\|U\| = (p_{ij})$. Поскольку $(Ue_i, Ue_j) = \delta_{ij}$, то

$$\Bigl(\sum_{s=1}^{n} p_{si} e_s, \sum_{t=1}^{n} p_{tj} e_t\Bigr) = \delta_{ij}.$$

Отсюда, учитывая, что $(e_s, e_t) = \delta_{st}$, мы получаем равенство

$$\sum_{s=1}^{n} p_{si} \overline{p}_{sj} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \tag{3.3}$$

Таким образом, у унитарной матрицы столбцы являются ортонормированными векторами.

Разумеется, определение унитарной матрицы можно дать не обращаясь к операторам, линейным пространствам и базису:

Определение. *Матрица $\|W\| = (p_{si})_n^n$ называется унитарной, если ее матричные элементы p_{si} удовлетворяют условиям* (3.3).

Это определение эквивалентно предыдущему. Действительно, выберем в произвольном n-мерном пространстве со скалярным произведением произвольный ортонормированный базис и определим оператор U так, чтобы $\|U\| = \|W\|$. Тогда оператор U будет унитарным (см. п. 3.1) и, значит, его матрица $\|U\| = \|W\|$ унитарна по определению п. 3.2.

Заметим, что поскольку $UK \subseteq K$ и $\dim UK = \dim K$, то $UK = K$. Отсюда, в частности, следует существование для унитарного оператора U обратного оператора U^{-1} и для матрицы $\|U\|$ — обратной матрицы $\|U\|^{-1} = \|U^{-1}\|$.

п.3.3. Рассмотрим теперь случай бесконечномерных пространств. Если мы определим унитарный оператор U так же, как в конечномерном случае, то обратный оператор U^{-1} может не существовать. Действительно, рассмотрим, например, пространство

$$\ell_2 = \Bigl\{x \mid x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots),\ \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 < +\infty\Bigr\},$$

в котором скалярное произведение элементов $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ и $y = (\eta_1, \dots, \eta_n, \dots)$ определяется равенством

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i \overline{\eta}_i. \tag{3.4}$$

Пусть оператор U задается соотношением

$$Ux = (0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots).$$

Тогда, очевидно, $(Ux, Uy) = (x, y)$ при $\forall\, x, y$. В то же время в силу теоремы 3.1 (гл. II) оператор U^{-1} не существует, поскольку множество значений $\{Ux \mid x \in \ell_2\} \neq \ell_2$, ибо оно не содержит векторов $z = (\alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots)$, у которых $\alpha_1 \neq 0$.

Поэтому, если мы хотим, чтобы в бесконечномерном пространстве K унитарный оператор обладал свойствами, аналогичными случаю $\dim K < +\infty$, то мы должны кроме требования (3.4) наложить дополнительное ограничение. Мы запишем его в виде $UK = K$. Это условие вместе с (3.1) обеспечивает существование обратного оператора U^{-1}.

Задание

Докажите, что если оператор U обладает свойством (3.1) и если кроме того $UK = K$, то U^{-1} существует.

п.3.4. Свойства унитарных операторов.

1. Основное свойство унитарных операторов: сопряженный к унитарному оператору существует и равен обратному.

Действительно, пусть $y \in K$, U — унитарный оператор, $K \xrightarrow{U} K$ и $z = U^{-1}y$. Тогда

$$(Ux, y) = (Ux, Uz) = (x, z) = (x, U^{-1}y) \quad \forall\, x, y,$$

что и доказывает свойство 1.

Иногда свойство 1 используется как определение унитарного оператора. А именно, пусть у оператора U, действующего из K в K, существуют обратный U^{-1} и сопряженный U^*. Тогда если $U^* = U^{-1}$, то оператор U — унитарный.

Действительно, из существования U^{-1} следует, что $UK = K$. Далее

$$(Ux, Uy) = (x, U^*Uy) = (x, U^{-1}Uy) = (x, y)$$

и, значит, оператор U — унитарный.

Если $\dim K < +\infty$, то существование U^* предполагать не нужно, ибо U^* существует по теореме 1.1.

2. Обратный оператор к унитарному является унитарным.

Пусть $x, y \in K$. Имеем $(U^{-1}x, U^{-1}y) = (UU^{-1}x, UU^{-1}y) = (x, y)$. В бесконечномерном пространстве мы должны добавить, что из равенства $UK = K$ и существования обратного оператора U^{-1} следует, что $K = U^{-1}K$, т. е. для U^{-1} выполнены *оба* условия унитарности.

3. Произведение унитарных операторов есть унитарный оператор (проверить самостоятельно).

4. Собственные значения унитарных операторов по модулю равны единице.

Действительно, если $Ux = \lambda x$, то $(Ux, Ux) = |\lambda|^2(x, x)$. Но $(Ux, Ux) = (x, x)$ и, значит, $(x, x) = |\lambda|^2(x, x)$, откуда $|\lambda| = 1$.

5. Собственные вектора унитарных операторов, отвечающие различным собственным значениям, взаимно ортогональны.

Пусть λ_j, $j = 1, 2$, — произвольные собственные значения унитарного оператора U, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и x_j — соответствующие собственные вектора. Так как $|\lambda_j| = 1$, то можно указать такие углы φ_1, φ_2, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_j \in [0, 2\pi)$, что $\lambda_j = e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2$.

Имеем $Ux_1 = \lambda_1 x_1$, $Ux_2 = \lambda_2 x_2$. Перемножая эти равенства скалярно, получаем, что $(Ux_1, Ux_2) = \lambda_1\overline{\lambda}_2(x_1, x_2)$. Отсюда в силу унитарности оператора U

$$(Ux_1, Ux_2) = (x_1, x_2) = \lambda_1\overline{\lambda}_2(x_1, x_2)$$

и, значит,

$$(x_1 x_2)(1 - \lambda_1\overline{\lambda}_2) = 0.$$

Но $\lambda_1\overline{\lambda}_2 = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \neq 1$; следовательно, $(x_1, x_2) = 0$.

6. Следующее свойство относится к унитарным операторам только в конечномерных пространствах.

Теорема 3.1. *В конечномерном пространстве K можно указать ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов унитарного оператора, действующего из K в K.*

Замечание. Другая формулировка теоремы 3.1. Матрица унитарного оператора в конечномерном пространстве диагонализуема.

Доказательство теоремы 3.1 следует схеме и идеям доказательства теоремы 1.2. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — все различные собственные значения оператора U в пространстве K, U_{λ_i} — соответствующие собственные подпространства,

$$H = \sum_{i=1}^{m} \oplus U_{\lambda_i}, \quad H_\perp = \{y \,|\, y \in K, (y, x) = 0 \ \forall\, x \in H\}.$$

В силу леммы 4.1 (гл. I), $K = H \oplus H_\perp$. Если $x \in U_{\lambda_i}$, то $U^{-1}x = \lambda_i^{-1}x$ (здесь важно, что $\lambda_i \neq 0$). Следовательно, подпространства U_{λ_i}, а значит и их сумма H, будут инвариантны для оператора U^{-1}. В силу леммы 1.1, примененной к оператору U^{-1}, подпространство $H_\perp$

будет инвариантно для оператора $(U^{-1})^* = U$. Если $H_\perp \neq \{\theta\}$, то поскольку поле $F = \mathbb{C}$, оператор U имеет в $H_\perp$ хотя бы одно собственное значение; обозначим его через ν, а отвечающий ему собственный вектор через x_0. Дальнейшее доказательство дословно повторяет вторую часть доказательства теоремы 1.2 и мы его опускаем. ▲

Далее совершенно аналогично п. 1.5 устанавливаются свойства.

7. Для унитарного оператора алгебраическая кратность собственного значения совпадает с геометрической.

8. Семейство унитарных операторов можно диагонализовать одновременно тогда и только тогда, когда операторы этого семейства попарно коммутируют между собой.

п.3.5. Установленные в п. 3.4 свойства 1–8 унитарных операторов порождают аналогичные свойства унитарных матриц. Чтобы получить соответствующие формулировки достаточно всюду в п. 3.4 вместо слова «оператор» записать слово «матрица».

Задание

На основе п. 3.4 описать свойства унитарных матриц и их собственных значений и векторов и доказать справедливость соответствующих утверждений.

Мы остановимся только на свойстве 1 ввиду его важности. Итак, для унитарных операторов $U^* = U^{-1}$ и, значит, для унитарных матриц $\|U\|^* = \|U\|^{-1}$. Но $\|U\|^* = \overline{\|U\|}^{\mathsf{T}}$, и поэтому $\|U\|^{-1} = \overline{\|U\|}^{\mathsf{T}}$.

Таким образом, для нахождения обратной матрицы $\|U\|^{-1}$ для произвольной унитарной матрицы $\|U\|$ достаточно ее транспонировать и заменить все элементы на комплексно-сопряженные.

п.3.6. Ортогональные операторы и их матрицы. Рассмотрим теперь линейное пространство K над вещественным полем $F = \mathbb{R}$. Если $\dim K < +\infty$, то линейный оператор A, $K \xrightarrow{A} K$, назовем ортогональным, если он сохраняет скалярное произведение. Если $\dim K = +\infty$, то к этому требованию надо добавить условие $AK = K$. При $\dim K < +\infty$ матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе называется ортогональной.

Ортогональные операторы и матрицы обладают теми же свойствами, что и унитарные, кроме свойств 6–8. Причина этого состоит в том, что операторы в пространствах над вещественным полем могут вообще не иметь собственных значений. Например, оператор A_φ вращения на угол φ $(0 < \varphi < 2\pi,\ \varphi \neq \pi)$ в пространстве $K = V_2$ векторов на плоскости не имеет собственных векторов.

Таким образом, ортогональный оператор не обязательно диагонализуем. В то же время, если ортогональный оператор диагонализуем, то алгебраическая и геометрическая кратности каждого собственного значения совпадают. Для диагонализуемости семейства ортогональных операторов $A_1, \ldots, A_p$, кроме требования коммутации ($A_iA_j = A_jA_i$) необходима диагонализуемость каждого из операторов A_i (в случае унитарных операторов это условие выполняется автоматически в силу теоремы 3.1).

Разумеется, при переформулировании результатов пп. 3.1–3.5 для ортогональных операторов и их матриц мы должны везде убрать черту — знак комплексного сопряжения, ибо поле вещественно. Кроме того, унимодулярность ($|\lambda| = 1$) собственных значений, если они существуют, означает теперь, что $\lambda = \pm 1$.

п.3.7. Для приложений часто представляет интерес множество ортогональных операторов $O(3)$ в пространстве R^3.

При $A \in O(3)$, очевидно, $AA^* = I$, и так как $\det \|A\| = \det \|A^*\|$, то $(\det \|A\|)^2 = 1$ и $\det \|A\| = \pm 1$.

Пусть $O^+(3) = \{A \mid A \in O(3),\ \det \|A\| = +1\}$.

Теорема 3.2. *Множество $O^+(3)$ — это множество всех вращений в R^3 относительно любых осей, проходящих через начало координат.*

Доказательство. Пусть A — произвольное вращение на угол φ, $0 \le \varphi < 2\pi$, около оси a. Выберем правую ортогональную систему координат так, чтобы ось z совпала с a. Тогда матрица оператора A в ортонормированном базисе, образованном ортами выбранных координатных осей, примет вид

$$\|A\| = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица — ортогональная, значит, оператор A — ортогональный. Кроме того $\det \|A\| = 1$ и, значит, $A \in O^+(3)$.

Пусть теперь $A \in O^+(3)$. Докажем, что A — вращение около некоторой оси. Пусть e_1, e_2, e_3 — ортонормированный базис в R^3 и $\|A\| = (a_{ij})_3^3$. Характеристическое уравнение для нахождения собственных значений оператора A имеет вид

$$(-\lambda)^3 + \beta_1\lambda^2 + \beta_2\lambda + \beta_3 = 0, \tag{3.5}$$

где $\beta_3 = \det \|A\| = 1$. Так как уравнение (3.5) кубическое, то оно заведомо имеет хотя бы один вещественный корень λ_1, $\lambda_1 = +1$ или

$\lambda_1 = -1$ и кроме того еще два корня λ_2, λ_3, которые или вещественны (и равны ± 1) или комплексные и $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$.

Из уравнения (3.5) следует, что

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1. \tag{3.6}$$

Если $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$, то поскольку $|\lambda_i| = 1$, то $\lambda_2 \lambda_3 = 1$ и в силу (3.6) $\lambda_1 = +1$. Если все λ_i вещественны (и значит равны ± 1), то хотя бы один корень λ_i должен равняться $+1$. Обозначим этот корень через λ_1. Пусть x_1 — собственный вектор, отвечающий λ_1. Выберем новую (правую) ортогональную систему координат, направив ось z по направлению вектора x_1. Тогда в новом базисе f_1, f_2, f_3, образованном ортами координатных осей, матрица оператора A примет вид

$$\|A\|_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как матрица $\|A\|_f$ — ортогональная, то ее столбцы

$$d_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \qquad d_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

суть ортонормированные вектора, т. е. $(d_i, d_j) = \delta_{ij}$. Значит

$$c_i = (d_i, d_3) = 0, \quad i = 1, 2$$

и, следовательно,

$$a_i a_j + b_i b_j = \delta_{ij}. \tag{3.7}$$

В силу (3.7) можно указать углы φ и ψ, $0 \leq \varphi$, $\psi < 2\pi$ так, что

$$a_1 = \cos\varphi, \quad b_1 = \sin\varphi, \quad a_2 = \sin\psi, \quad b_2 = \cos\psi.$$

и

$$\cos\varphi \, \sin\psi + \sin\varphi \, \cos\psi = 0,$$

т. е. $\sin(\psi + \varphi) = 0$. Следовательно, или $\psi = -\varphi$ или $\psi = -\varphi + \pi$. Второй вариант отпадает, ибо при нем $\det \|A\|_f = -1$, что невозможно. Значит $\psi = -\varphi$ и

$$\|A\|_f = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е. $\|A\|_f$ — матрица вращения на угол φ около оси z (около вектора x_1). Значит, оператор A есть вращение и теорема 3.2 доказана.

п.3.8. Рассмотрим теперь произвольный оператор A_0 из $O(3)$, не принадлежащий $O^+(3)$, т. е. A_0 — ортогональный оператор, для которого $\det\|A_0\| = -1$. Пусть $i = (-1)I$, где I — тождественный оператор. Оператор i называют инверсией, ибо $ir = -r$ для $\forall\, r \in R^3$. Очевидно, $i \in O(3)$ и $\det\|i\| = -1$. Поэтому оператор $B_0 := A_0 i$ — ортогональный и

$$\det\|B_0\| = \det\bigl(\|A_0\| \cdot \|i\|\bigr) = +1.$$

Значит, $B_0 \in O^+(3)$. Очевидно, $A_0 = B_0 i$. Таким образом, любой оператор A_0 из $O(3)$, $A_0 \notin O^+(3)$, есть произведение некоторого оператора из $O^+(3)$ на инверсию.

Итак, мы установили состав множества $O(3)$: показано, что ортогональные операторы в R^3 — это вращения из $O^+(3)$ и произведения всех этих вращений на инверсию.

ГЛАВА V. ЛИНЕЙНЫЕ, БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ И БИЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

п.1.1. Пусть K — произвольное конечномерное линейное пространство над вещественным полем $F = \mathbb{R}$ и $K' = \mathbb{R}$. Линейный оператор L, действующий из K в K' называется линейной формой. Как мы знаем (§ 1 гл. II), для задания линейного оператора достаточно задать его значения на базисных векторах. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ —базис в K и $l_i = L(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для $\forall x \in K$, $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, очевидно,

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i l_i. \tag{1.1}$$

Формула (1.1) дает общий вид линейной формы. Любой набор вещественных чисел $l_1, l_2, \ldots, l_n$ в формуле (1.1) определяет линейную форму, для которой $L(e_i) = l_i$. Действительно, взяв $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с $\xi_i = 1$, $\xi_j = 0, j \neq i$, мы получим $x = e_i$ и $L(e_i) = l_i$.

Приведем примеры линейных форм. Пусть K — предгильбертово конечномерное пространство, C, D — линейные операторы, действующие из K в K, $F = \mathbb{R}$. Тогда для $\forall x, y \in K$ скалярное произведение (Cx, Dy) — есть линейная форма по x (по y) при фиксированном y (x) для любых операторов C и D. Простейший случай: $C = D = I$ — единичный оператор и тогда $(Cx, Dy) = (x, y)$.

Задание

Доказать, что множество линейных форм над полем $\mathbb{R}$ образует линейное пространство по сложению и найти его размерность.

п.1.2. Билинейные формы

Определение. *Билинейной формой называется такая числовая функция $B(x,y)$, определенная на парах элементов x,y из K, которая является линейной формой по x при фиксированном y и линейной формой по y при фиксированном x.*

Примером билинейной формы может служить рассмотренное выше скалярное произведение (Cx, Dy) (конечно без фиксации x или y). Билинейной формой является и произведение двух любых линейных форм $L_1(x)L_2(y)$. Найдем общий вид билинейной формы. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в K, $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j$ — любые вектора из K. Тогда, используя сначала линейность формы $B(x, y)$ по первому аргументу при фиксированном втором, а потом линейность по второму аргументу при фиксированном первом, мы получим

$$B(x, y) = B\Big(\sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i, y\Big) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i B\Big(e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j e_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j B(e_i, e_j). \tag{1.2}$$

Положим $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. Тогда общий вид билинейной формы (1.2) запишется так:

$$B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j b_{ij}. \tag{1.3}$$

С другой стороны, пусть b_{ij}^0 — произвольные вещественные числа и задана функция

$$B^0(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j b_{ij}^0.$$

Легко видеть, что $B^0(x, y)$ — билинейная форма в пространстве K и $b_{ij}^0 = B^0(e_i, e_j)$. Таким образом, любая билинейная форма в K имеет вид (1.3), где $b_{ij} = B(e_i, e_j)$. Числа b_{ij} образуют матрицу билинейной формы, которую мы будем обозначать через B или через B_e, если надо указать, в каком базисе записана форма $B(x, y)$, т. е.

$$B = B_e = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Билинейная форма называется симметричной, если $B(x,y)=B(y,x)$ при $\forall x,y\in K$. Отсюда следует, что у симметричной билинейной формы

$$b_{ij}=B(e_i,e_j)=B(e_j,e_i)=b_{ji}, \tag{1.4}$$

т. е. матрица симметричной билинейной формы симметрична. С другой стороны, если матрица B симметрична, то

$$b_{ij}=B(e_i,e_j)=b_{ji}=B(e_j,e_i)$$

и поэтому

$$B(x,y)=B(y,x)\quad \forall x,y\in K.$$

Так как справедливость равенства $B(x,y)=B(y,x)$ не зависит от выбора базиса пространства K, то матрица симметричной билинейной формы будет симметрична в любом базисе.

п.1.3. Выясним, как меняется матрица $B=B_e$ билинейной формы $B(x,y)$ при переходе в пространстве K от базиса $e=(e_1,\ldots,e_n)$ к базису $f=(f_1,\ldots,f_n)$, определенному с помощью какой-либо матрицы перехода $P=(p_{ij})_n^n$:

$$f_j=\sum_{s=1}^n p_{sj}e_s\quad j=1,2,\ldots,n. \tag{1.5}$$

Пусть $B_f=(\widetilde{b}_{st})_n^n$ — матрица билинейной формы $B(x,y)$ в базисе f, $x=\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, y=\sum_{j=1}^n \beta_j f_j$. Тогда $B(x,y)=\sum_{i,j=1}^n \alpha_i\beta_j\widetilde{b}_{ij}$, где $\widetilde{b}_{ij}=B(f_i,f_j)$. В силу (1.5)

$$\widetilde{b}_{ij}=B\Big(\sum_{s=1}^n p_{si}e_s,\sum_{t=1}^n p_{tj}e_t\Big)=\sum_{s,t=1}^n p_{si}p_{tj}B(e_s,e_t)=\sum_{s,t=1}^n p_{si}p_{tj}b_{st}.$$

Обозначим транспонированную к $P=(p_{ij})_n^n$ матрицу через $P^T=(p_{ij}^T)$, где $p_{ij}^T=p_{ji}$. Тогда

$$\widetilde{b}_{ij}=(B_f)_{ij}=\sum_{s,t=1}^n p_{is}^T b_{st}p_{tj}=(P^TB_eP)_{ij}. \tag{1.6}$$

Так как равенство (1.6) верно для $\forall i,j$, то оно означает, что

$$B_f=P^TB_eP. \tag{1.7}$$

Это и есть искомая формула, связывающая матрицы B_f и B_e билинейной формы $B(x, y)$ в базисах f и e.

п.1.4. Сравним формулу (1.7) с формулой, дающей связь матриц A_f и A_e линейного оператора A в базисах f и e (см. (4.14) гл. II):

$$A_f = P^{-1} A_e P, \tag{1.8}$$

Мы видим, что матрицы операторов и билинейных форм при изменении базиса в общем случае преобразуются по разному. Однако, если матрица перехода P — ортогональная (это имеет место, если оба базиса e и f — ортонормированы), то $P^T = P^{-1}$ (см. § 3 гл. IV) и формула (1.7) принимает вид

$$B_f = P^{-1} B_e P, \tag{1.9}$$

аналогичный (1.8).

Это обстоятельство наводит на мысль, что может существовать какая-то связь между билинейными формами и операторами. И такая связь действительно существует. Найдем ее. Пусть в конечномерном предгильбертовом пространстве K с ортонормированным базисом $e = (e_1, \ldots, e_n)$ задана билинейная форма $B(x, y)$ и пусть $B = (b_{st})_n^n$ — матрица формы $B(x, y)$. Тогда для оператора C, действующего из K в K с матрицей $\|C\| = B^T$ выполняется равенство

$$B(x, y) = (Cx, y) \quad \forall x, y \in K. \tag{1.10}$$

Действительно, пусть $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$. Обозначим матричные элементы матрицы $\|C\|$ через c_{ij}. Тогда

$$\begin{aligned}(Cx, y) = \Big(\sum_{i=1}^n \xi_i C e_i, \sum_{j=1}^n \eta_j e_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j \Big(\sum_{s=1}^n c_{si} e_s, e_j\Big) = \\ = \sum_{i,j,s=1}^n \xi_i \eta_j c_{si} (e_s, e_j) = \sum_{i,j,s=1}^n \xi_i \eta_j c_{si} \delta_{sj} = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j c_{ji}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Для выполнения равенства $B(x, y) = (Cx, y)$ при любых x, y в силу (1.3) и (1.11) необходимо и достаточно, чтобы $c_{ji} = b_{ij}$, т. е. чтобы $\|C\| = B^T$.

Замечание. Если билинейная форма симметрична, то при $\|C\| = B^T = B$ равенство (1.10) можно записать в виде

$$B(x, y) = (Bx, y). \tag{1.12}$$

§ 2. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ БИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

п.2.1. Будем говорить, что билинейная форма $B(x, y)$ диагонализуема в пространстве K, если в K существует такой базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$, в котором матрица B_f формы $B(x, y)$ будет диагональной, т. е. такой, что $\widetilde{b}_{ij} := B(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$. Поэтому в базисе f при $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$ будем иметь

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \widetilde{b}_{ii}, \tag{2.1}$$

где $\widetilde{b}_{ii} = B(f_i, f_i)$. Вид (2.1) билинейной формы $B(x, y)$ называется диагональным, а базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$, в котором форма $B(x, y)$ принимает вид (2.1), называется диагонализуюшим. Как мы уже говорили, базис $f_1, \ldots, f_n$ —диагонализующий, если

$$B(f_k, f_j) = 0, \quad k \neq j. \tag{2.2}$$

Покажем, что любая симметричная билинейная форма диагонализуема. Не ограничивая общности, считаем, что базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$, в котором задана билинейная форма, ортонормирован (если бы это было не так, то мы предварительно перешли бы к ортонормированному базису; при этом матрица билинейной формы осталась бы симметричной (см. § 1)). Далее, в пространстве K построим ортонормированный базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ из собственных векторов матрицы $B = B_e$ билинейной формы $B(x, y)$ и пусть P — матрица перехода от базиса e к базису f. По определению, матрица P — ортогональна, и, значит, $P^T = P^{-1}$. Поэтому формула (1.7) примет вид

$$B_f = P^{-1} B_e P. \tag{2.3}$$

B_f — матрица B в базисе из собственных векторов и поэтому она диагональна и на диагонали находятся собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, которым отвечают собственные вектора $f_1, \ldots, f_n$. Поэтому для любых

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$$

выполняется

$$B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \lambda_i.$$

Таким образом, симметричная билинейная форма $B(x, y)$ диагонализована.

Описанный метод диагонализации билинейных форм называется методом ортогонального преобразования (иногда — методом приведения к главным осям).

Замечание. После выбора ортонормированного базиса из собственных векторов матрицы B можно было закончить доказательство по другому. А именно, так как матрица B_e — симметрична, то в силу (1.12) $B(x,y)=(Bx,y)$. Взяв $x=f_i$, $y=f_j$ мы получим, что

$$\widetilde{b}_{ij}=B(f_i,f_j)=(Bf_i,f_j)=\lambda_i(f_i,f_j)=\lambda_i\delta_{ij}$$

и, значит, базис $f_1,\ldots,f_n$ — диагонализующий.

п.2.2. Здесь и в п. 2.3 мы приведем примеры диагонализации билинейных форм методом ортогонального преобразования. Пусть в двумерном пространстве K с ортонормированным базисом $e=(e_1,e_2)$

$$x=\sum_{i=1}^{2}\xi_i e_i,\quad y=\sum_{j=1}^{2}\eta_j e_j$$

— произвольные вектора и

$$B(x,y)=2\xi_1\eta_1+\sqrt{15}\,\xi_1\eta_2+\sqrt{15}\,\xi_2\eta_1+4\xi_2\eta_2.$$

Матрица B_e формы $B(x,y)$ есть

$$B_e=B=\begin{pmatrix}2 & \sqrt{15}\\ \sqrt{15} & 4\end{pmatrix}$$

и собственные значения матрицы B находятся из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & \sqrt{15}\\ \sqrt{15} & 4-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

т. е. из уравнения

$$\lambda^2-6\lambda-7=0.$$

Отсюда $\lambda_1=7$, $\lambda_2=-1$. Таким образом, диагональный вид формы $B(x,y)$ есть

$$B(x,y)=7\alpha_1\beta_1-\alpha_2\beta_2,$$

где (α_1,α_2) и (β_1,β_2) — координаты векторов x и y в ортонормированном базисе f_1,f_2 из собственных векторов матрицы B. Найдем их. Ищем вектора f_i в виде $f_i = \sum_{s=1}^{2} \gamma_{si} e_s$, $i = 1, 2$ и тогда (см. (6.3), гл. II)

$$\left.\begin{aligned} (2-\lambda_i)\gamma_{1i} + \sqrt{15}\,\gamma_{2i} = 0 \\ \sqrt{15}\,\gamma_{1i} + (4-\lambda_i)\gamma_{2i} = 0 \end{aligned}\right\}, \quad i = 1, 2.$$

Находим отсюда γ_{si} и нормируем полученные вектора f_i. Получим вектора диагонализующего базиса

$$f_1 = \left(\frac{3}{\sqrt{24}}, \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{24}}\right), \quad f_2 = \left(\frac{-5}{\sqrt{40}}, \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}}\right).$$

Таким образом, матрица перехода

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{\sqrt{24}} & \dfrac{-5}{\sqrt{40}} \\ \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{24}} & \dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{40}} \end{pmatrix}$$

и

$$B_f = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = P^{-1} B_e P.$$

п.2.3. Рассмотрим еще один пример. Пусть K — трехмерное пространство над вещественным полем $\mathbb{R}$, $e = (e_1, e_2, e_3)$ — ортонормированный базис в K, $x = \sum_{i=1}^{3} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{3} \eta_j e_j$ — произвольные вектора из K и билинейная форма $B(x, y)$ задается равенством

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_3 + \xi_3\eta_2 + \xi_1\eta_3 + \xi_3\eta_1).$$

Матрица $B = B_e$ этой формы

$$B_e = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Собственные значения матрицы B_e находятся из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. из уравнения

$$-\lambda\Big(\lambda^2-\frac{1}{4}\Big)-\frac{1}{2}\Big(-\frac{\lambda}{2}-\frac{1}{4}\Big)+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{4}+\frac{\lambda}{2}\Big)=0.$$

Откуда $\lambda_1=-1/2,\ \lambda_2=\lambda_1=-1/2,\ \lambda_3=1$. Пусть $f=(f_1,f_2,f_3)$ — ортонормированный базис из собственных векторов матрицы B_e, где f_i отвечает собственному значению λ_i. Тогда для произвольных $x=\sum_{i=1}^3\alpha_if_i$, $y=\sum_{j=1}^3\beta_jf_j$ из K

$$B(x,y)=-\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1-\frac{1}{2}\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3.$$

Найдем собственные вектора f_i. Пусть $f_i=\sum_{i=1}^3\gamma_{ji}e_j$. При $\lambda=\lambda_1=-1/2$ ранг матрицы $B-\lambda E$ равен 1 и поэтому из системы $(B-\lambda_1 I)f_i=0$ (см. (6.3), гл. II) мы должны взять лишь одно уравнение

$$\gamma_{11}+\gamma_{21}+\gamma_{31}=0.$$

Отсюда находим два линейно независимых решения, ортогонализуем и нормируем их и подставляем в выражения для f_1 и f_2. Получим

$$f_1=\frac{e_1-e_2}{\sqrt{2}},\quad f_2=\frac{e_1+e_2-2e_3}{\sqrt{6}}.$$

При $\lambda=\lambda_3=1$ ранг матрицы $B-\lambda E$ равен двум, поэтому в системе $(B-\lambda_3 I)f_3=0$ (см. (6.3), гл. II) берем два уравнения

$$-\gamma_{13}+\gamma_{23}/2+\gamma_{33}/2=0,\quad \gamma_{13}/2-\gamma_{23}+\gamma_{33}/2=0.$$

Отсюда находим γ_{13}, γ_{23}, γ_{33}, нормируем вектор $(\gamma_{13},\gamma_{23},\gamma_{33})$ и подставим его компоненты в выражение для f_3. Тогда получим

$$f_3=\frac{e_1+e_2+e_3}{\sqrt{3}}.$$

Таким образом, диагонализующий базис найден. Матрица перехода P от базиса e к базису f есть

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Задание

Проверить прямым вычислением, что

$$B_f = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P^{-1} B_e P.$$

п.2.4. Метод ортогонального преобразования является универсальным методом диагонализации симметричных билинейных форм. Однако он требует нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы билинейной формы, а это при $\dim K \geqslant 4$ в общем случае возможно лишь численно.

Ниже рассматривается другой метод диагонализации билинейных форм — метод Якоби, который требует для своего применения только решения систем линейных алгебраических уравнений и вычисления определителей. Однако этот метод применим не всегда.

Метод Якоби. Пусть K — линейное пространство над полем $F=\mathbb{R}$, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в K, $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^n \eta_j e_j$ — произвольные вектора из K, $B(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \eta_j b_{ij}$ — билинейная форма на K. Обозначим угловые миноры матрицы B через Δ_k:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Теорема 2.1. *Пусть $\Delta_k \neq 0$, $k = 1,2, \ldots, n-1$. Тогда*

1) *можно найти диагонализующий базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$, полагая $f_1 = e_1$ и решая для нахождения каждого f_k при $k \geqslant 2$ систему из $(k-1)$ линейных уравнений;*

2) *в этом базисе диагональные элементы $B(f_m,f_m)$ матрицы B_f равны*

$$\Delta_m/\Delta_{m-1}, \quad m = 2,3, \ldots, n, \quad B(f_1,f_1) = B(e_1,e_1) = \Delta_1 = b_{11}.$$

Доказательство. Вектора диагонализующего базиса

$$f = (f_1, \ldots, f_n)$$

должны удовлетворять (по определению) требованиям (2.2):

$$B(f_k, f_j) = 0, \quad k \neq j.$$

Так как билинейная форма симметрична, то нам достаточно для каждого $k \geqslant 2$ рассмотреть только случай $j < k$, т. е. $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Будем искать вектора f_k в виде линейных комбинаций векторов $e_1, \ldots, e_k$ с неопределенными коэффициентами p_{sk}:

$$f_1 = e_1, \quad f_k = e_k + \sum_{s=1}^{k-1} p_{sk} e_s, \quad k = 2, 3, \ldots, n, \tag{2.4}$$

где числа p_{sk} должны обеспечивать выполнение (2.2) при $j < k$. Фиксируем далее какое-либо значение $k, k \geqslant 2$. Так как каждый вектор f_j зависит только от векторов e_s с номерами, не превосходящими j, то равенства (2.2) будут вытекать из равенств

$$B(f_k, e_j) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.5}$$

Подставляя выражение вектора f_k из (2.4) в формулу (2.5), получим

$$B\Big(e_k + \sum_{s=1}^{k-1} p_{sk} e_s, e_j\Big) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

откуда следует, что

$$b_{kj} + \sum_{s=1}^{k-1} p_{sk} b_{sj} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.6}$$

Учитывая, что $b_{sj} = b_{js}$ и перенося свободные члены b_{kj} в правые части уравнений (2.6), получим итоговую систему $(k-1)$ уравнений с $(k-1)$ неизвестными p_{sk}, $s = 1, 2, \ldots, k-1$:

$$\sum_{s=1}^{k-1} p_{sk} b_{js} = -b_{kj}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.7}$$

По условию теоремы определитель этой системы Δ_{k-1} не равен нулю и поэтому из нее мы можем найти числа p_{sk}, а, значит, можем построить вектор f_k диагонализующего базиса согласно (2.4). Полагая $k = 2, 3, \ldots, n$, получаем диагонализующий базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Диагональные элементы λ_k матрицы B_e определяются формулами $\lambda_k = B(f_k, f_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, утверждение 1) теоремы 2.1 доказано.

п.2.5. Докажем утверждение 2). Пусть число m фиксировано и $H_m = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_m\}$ — линейная оболочка первых m векторов базиса e пространства K. Обозначим через $B^{(m)}(x, y)$ билинейную форму $B(x, y)$ на векторах пространства H_m. При

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{m} \eta_j e_j,$$

очевидно,

$$B^{(m)}(x, y) = B(x, y) = \sum_{i,j=1}^{m} \xi_i \eta_j b_{ij}$$

и, значит,

$$b_{ij}^{(m)} = B^{(m)}(e_i, e_j) = B(e_i, e_j) = b_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Поэтому матрица $B^{(m)}$ билинейной формы $B^{(m)}(x, y)$ есть

$$B^{(m)} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & \ldots & b_{mm} \end{pmatrix}. \tag{2.8}$$

Так как для матрицы $B^{(m)}$ выполняются условия теоремы, то мы можем диагонализовать форму $B^{(m)}(x, y)$, построив диагонализующий базис

$$f^{(m)} = \left(f_1^{(m)}, f_2^{(m)}, \ldots, f_m^{(m)}\right)$$

так же, как мы строили базис $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ для матрицы B. Полагаем

$$f_1^{(m)} = e_1, \quad f_k^{(m)} = e_k + \sum_{s=1}^{k-1} p_{sk}^{(m)} e_s, \quad k = 2, 3, \ldots, m, \tag{2.9}$$

где $p_{sk}^{(m)}$ — неизвестные коэффициенты, которые для каждого k, $k = 2, \ldots, m$ определяются из условий

$$B^{(m)}\left(f_k^{(m)}, e_j\right) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Отсюда, подставляя выражение $f_k^{(m)}$ из (2.9), мы аналогично предыдущему получим систему уравнений относительно $p_{sk}^{(m)}$

$$\sum_{s=1}^{k-1} p_{sk}^{(m)} b_{js}^{(m)} = -b_{kj}^{(m)}, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1. \tag{2.10}$$

Так как $b_{ij}^{(m)} = b_{ij}$ при $1 \le i,\ j \le m$, то система (2.10) при фиксированном k совпадает с системой (2.7). Поэтому решения $p_{sk}^{(m)}$ системы (2.10) совпадают с решениями p_{sk} системы (2.7), а значит, в силу (2.4) и (2.7) выполняется $f_k^{(m)} = f_k$ при любом $k \le m$ и любом $m \le n$. Так как $f_k \in H_m$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то

$$B^{(m)}(f_k, f_k) = B(f_k, f_k) = \lambda_k,$$

и поэтому матрица $B_f^{(m)}$ имеет вид

$$B_f^{(m)} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Обозначим через P_m матрицу перехода от базиса $e = (e_1, \dots, e_m)$ к базису $f = (f_1, \dots, f_m)$. Тогда в силу (1.7)

$$B_f^{(m)} = P_m^T B^{(m)} P_m. \tag{2.11}$$

Из системы (2.9) видно, что матрица P_m — верхняя треугольная с единицами на главной диагонали. Поэтому $\det P_m = \det P_m^T = 1$ и в силу (2.11)

$$\det B_f^{(m)} = \det P_m^T \det B^{(m)} \det P_m = \det B^{(m)} = \Delta_m,$$

т. е.

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m = \Delta_m.$$

Отсюда $\lambda_1 = \Delta_1$ и $\lambda_m = \Delta_m / \Delta_{m-1}$, $m = 2, 3, \dots, n$.

Теорема 2.1 доказана полностью.

п.2.6. Приведем пример диагонализации билинейных форм методом Якоби. Рассмотрим ту же билинейную форму $B(x, y)$, что и в п. 2.2:

$$B(x, y) = 2\xi_1\eta_1 + \sqrt{15}\,\xi_1\eta_2 + \sqrt{15}\,\xi_2\eta_1 + 4\xi_2\eta_2.$$

Так как $\Delta_1 = b_{11} = 2 \neq 0$, то метод Якоби применим. Очевидно, $\Delta_2 = -7$ и поэтому диагональный вид формы $B(x, y)$ есть

$$B(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 - 3{,}5\alpha_2\beta_2,$$

где α_1, α_2 и β_1, β_2 — координаты векторов x и y в якобиевом диагонализующем базисе f_1, f_2. Найдем его. Полагаем

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_2 + p_{12}e_1,$$

где константа p_{12} находится из условия

$$B(f_2, f_1) = B(e_2 + p_{12}e_1, e_1) = b_{21} + p_{12}b_{11} = 0.$$

Отсюда $p_{12} = -b_{21}/b_{11} = -\sqrt{15}/2$. Поэтому

$$f_1 = e_1, \quad f_2 = e_2 - \sqrt{15}e_1/2.$$

п.2.7. Обсудим вопрос об одновременной диагонализации нескольких билинейных форм. Пусть $B_i(x, y)$ $i = 1, 2, \ldots, p$ — симметричные билинейные формы и B_i $i = 1, 2, \ldots, p$ — их матрицы в каком-либо ортонормированном базисе $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ пространства K.

Теорема 2.2. *Билинейные формы $B_i(x,y)$ можно диагонализовать одновременно, если матрицы $B_1, \ldots, B_p$ попарно коммутируют.*

Доказательство следует из аналогичного утверждения для операторов — из теоремы 5.6 гл. II. В силу этой теоремы в пространстве K можно построить ортонормированный базис f из векторов $f_1, \ldots, f_n$, каждый из которых является собственным для всех матриц B_i. Очевидно, что все матрицы $B_{i,f}$ в этом базисе — диагональны, а так как оба базиса — и $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1 \ldots f_n$ — ортонормированы, то в силу (2.3) матрицы $B_{i,f}$ и будут матрицами билинейных форм $B_i(x, y)$ в базисе f. Теорема 2.2 доказана.

§ 3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ И ИХ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ

п.3.1. Определение. *Квадратичной формой $A(x)$ называется билинейная форма $B(x,y)$ с совпадающими аргументами, т. е. $A(x) = B(x,x)$.*

Таким образом, если $e_1, \ldots, e_n$ — базис в пространстве K,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,$$

то общий вид квадратичной формы до приведения подобных членов есть

$$A(x) = B(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\xi_i\xi_j, \tag{3.1}$$

а после приведения

$$A(x) = \sum_{\substack{i,j=1\\ i\le j}}^{n} a_{i,j}\xi_i\xi_j, \tag{3.2}$$

где

$$a_{ij} = b_{ij} + b_{ji} \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad a_{ii} = b_{ii} \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Из формул (3.3) видно, что однозначное нахождение билинейной формы $B(x, y)$, порождающей при $y = x$ данную квадратичную, невозможно без дополнительных ограничений на форму $B(x, y)$. Далее всегда считается, что квадратичная форма порождается симметричной билинейной формой и поэтому в силу (3.3) коэффициенты порождающей формы $B(x, y)$ определяются равенствами

$$b_{ij} = b_{ji} = a_{ij}/2 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad b_{ii} = a_{ii}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.4}$$

Матрицей A произвольной квадратичной формы (3.2) мы будем называть матрицу порождающей билинейной формы, т. е. матрицу B с элементами (3.4).

п.3.2. Диагонализация квадратичных форм.

Определение. *Говорят, что квадратичная форма $A(x)$ записана в диагональном виде, если для $\forall x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in K$ выполняется $A(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \nu_i$, где ν_i — некоторые числа. Базис, в котором форма $A(x)$ имеет диагональный вид, называется диагонализующим.*

Так как для порождающей билинейной формы $B(x, y)$ выполняется $A(x) = B(x, x)$, то для приведения квадратичной формы к диагональному виду достаточно привести к диагональному виду порождающую билинейную форму $B(x, y)$ и потом положить $y = x$. Это приведение можно сделать, например, методом ортогонального преобразования (см. п. 2.1), или, если $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, методом Якоби (см. п. 2.4). Приведем примеры.

Пример 1. Рассмотрим квадратичную форму

$$A(\xi) = 2\xi_1^2 + 2\sqrt{15}\,\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2.$$

Порождающая ее симметричная билинейная форма есть

$$B(x, y) = 2\xi_1\eta_1 + \sqrt{15}\,\xi_1\eta_2 + \sqrt{15}\,\xi_2\eta_1 + 4\xi_2\eta_2. \tag{3.5}$$

А эту форму мы уже приводили к диагональному виду методом ортогонального преобразования в п. 2.2. Получили, что диагонализующий базис f_1, f_2 задается равенствами

$$f_1 = \frac{3e_1}{\sqrt{24}} + \frac{\sqrt{15}e_2}{\sqrt{24}}, \quad f_2 = -\frac{5e_1}{\sqrt{40}} + \frac{\sqrt{15}e_2}{\sqrt{40}}$$

и что диагональный вид формы $B(x, y)$ при

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$$

есть

$$B(x, y) = 7\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2.$$

Значит, диагональный вид квадратичной формы $A(x)$ при диагонализации методом ортогонального преобразования дается равенством

$$A(x) = 7\alpha_1^2 - \alpha_2^2.$$

Теперь приведем ту же квадратичную форму $A(x)$ к диагональному виду методом Якоби. Для этого надо диагонализовать методом Якоби форму (3.5). Но это было сделано в п. 2.6. Диагонализующий по Якоби базис — это $f_1 = e_1$, $f_2 = e_2 - \sqrt{15}e_1/2$, диагональный вид формы (3.5) в этом базисе

$$B(x, y) = 2\alpha_1\beta_1 - 3{,}5\alpha_2\beta_2.$$

Значит, диагональный вид квадратичной формы $A(x)$ при диагонализации методом Якоби дается равенством

$$A(x) = 2\alpha_1^2 - 3{,}5\alpha_2^2.$$

Пример 2. Пусть в линейном пространстве K с ортонормированнымм базисом $e = (e_1, e_2, e_3)$, $x = \sum_{i=1}^3 \xi_i e_i$ — любой вектор из K, квадратичная форма $A(x)$ задается равенством

$$A(x) = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3.$$

Порождающая ее билинейная форма

$$B(x, y) = \frac{1}{2}\xi_1\eta_2 + \frac{1}{2}\xi_2\eta_1 + \frac{1}{2}\xi_2\eta_3 + \frac{1}{2}\xi_3\eta_2 + \frac{1}{2}\xi_1\eta_3 + \frac{1}{2}\xi_3\eta_1.$$

Но форму $B(x, y)$ мы уже диагонализовали методом ортогонального преобразования в п. 2.3. Мы получили, что в диагонализующем базисе

$$f_1 = \frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}}, \quad f_2 = \frac{e_1 + e_2 - 2e_3}{\sqrt{6}}, \quad f_3 = \frac{e_1 + e_2 + e_3}{\sqrt{3}}$$

при $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i f_i$, $y = \sum_{j=1}^3 \beta_j f_j$ выполняется

$$B(x, y) = -\frac{1}{2}\alpha_1\beta_1 - \frac{1}{2}\alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3,$$

и, значит,

$$A(x) = -\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

п.3.3. Наряду с методами диагонализации квадратичных форм, основанными на построении диагонализующего базиса порождающей билинейной формы, существует метод, в котором диагонализация проводится непосредственным построением диагонализующих координат. Это — метод Лагранжа (метод дополнения до полного квадрата), к описанию которого мы переходим.

Метод Лагранжа. Рассмотрим произвольную квадратичную форму (3.2) и пусть значение i таково, что $a_{ii} \neq 0$ (случай, когда $a_{ss} = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$ будет рассмотрен позже). Не ограничивая общности, можно считать $i = 1$. Перепишем равенство (3.2), выделяя в форме $A(x)$ члены, содержащие ξ_1 и вынося в них a_{11} за скобки. Тогда

$$A(x) = a_{11}\Big(\xi_1^2 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}a_{11}^{-1}\xi_1\xi_j\Big) + \sum_{\substack{i,j=2\\ i\leq j}}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j. \tag{3.6}$$

Дополним выражение в скобках до полного квадрата, добавляя (и вычитая — для сохранения равенства) подходящие члены. Получим

$$\xi_1^2 + \xi_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}a_{11}^{-1}\xi_j = \xi_1^2 + 2\xi_1\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j/2a_{11} + \\ + \Big(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\Big)^2 \Big/ 4a_{11}^2 - \Big(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\Big)^2 \Big/ 4a_{11}^2 = \\ = \Big(\xi_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j/2a_{11}\Big)^2 - \Big(\sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j\Big)^2 \Big/ 4a_{11}^2.$$

Подставляя это выражение в (3.6) и приводя подобные члены, имеем

$$A(x) = a_{11}\Big(\xi_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_j/2a_{11}\Big)^2 + \sum_{\substack{i,j=2\\ i\leq j}}^{n} a_{ij}^{(1)}\xi_i\xi_j,$$

где $a_{ij}^{(1)}$ — известные коэффициенты.

Положим $\eta_1 = \xi_1 + \sum_{j=2}^{n} a_{1j}\xi_i/2a_{11}$, $\eta_s = \xi_s$, $s = 2, 3, \ldots, n$. Тогда квадратичную форму $A(x)$ можно записать в виде

$$A(x) = a_{11}\eta_1^2 + A_1(x), \tag{3.7}$$

где

$$A_1(x) = \sum_{\substack{i,j=2\\ i\leq j}}^{n} a_{ij}^{(1)}\eta_i\eta_j. \tag{3.8}$$

Таким образом, мы перешли от задачи диагонализации квадратичной формы $A(x)$ от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ к задаче диагонализации квадратичной формы $A_1(x)$ от $(n-1)$ переменных $\eta_2, \ldots, \eta_n$. Прежде, чем продолжить процесс диагонализации, применяя описанный выше метод к форме $A_1(x)$, рассмотрим случай, когда в исходной квадратичной форме $A(x)$ выполняется $a_{11}=a_{22}=\ldots=a_{nn}=0$ и, следовательно, наш подход не применим. В этой ситуации надо с самого начала сделать промежуточную замену переменных. А именно, находим в (3.2) коэффициент $a_{i_0j_0}\neq 0$ и полагаем

$$\xi_{i_0}=\widetilde{\xi}_{i_0},\quad \xi_{j_0}=\widetilde{\xi}_{i_0}+\widetilde{\xi}_{j_0},\quad \xi_s=\widetilde{\xi}_s,\quad s\neq i_0,j_0.$$

Тогда квадратичная форма (3.2) запишется в виде

$$\widetilde{A}(x)=\sum_{\substack{i,j=1\\ i\leq j}}^{n}\widetilde{a}_{ij}\widetilde{\xi}_i\widetilde{\xi}_j,$$

в котором $\widetilde{a}_{i_0i_0}=a_{i_0j_0}\neq 0$, и к которому, следовательно, наш подход применим (пример такой ситуации разобран в п. 3.7).

п.3.4. Возвратимся теперь к квадратичной форме $A_1(x)$ (см. (3.8)). Находим такое j, $j\geq 2$, что $a_{jj}^{(1)}\neq 0$ (если все $a_{tt}^{(1)}=0$, $t=2,3,\ldots,n$, то сначала делаем промежуточную замену переменных аналогично описанной в п. 3.3). Не ограничивая общности, можно считать, что $j=2$. После этого выделяем в форме $A_1(x)$ члены, содержащие η_2, выносим за скобки $a_{22}^{(1)}$ и дополняем полученное выражение до полного квадрата аналогично п. 3.3. Получим

$$A_1(x)=a_{22}^{(1)}\left(\eta_2+\sum_{j=3}^{n}a_{2j}^{(1)}\eta_j/2a_{22}^{(1)}\right)^2+\sum_{\substack{i,j=3\\ i\leq j}}^{n}a_{ij}^{(2)}\eta_i\eta_j,\qquad(3.9)$$

где коэффициенты $a_{ij}^{(2)}$ известны.

Положим

$$\gamma_1=\eta_1,\quad \gamma_2=\eta_2+\sum_{j=3}^{n}a_{2j}^{(1)}\eta_j/2a_{22}^{(1)},\quad \gamma_p=\eta_p,\quad p\geq 3.$$

Тогда в силу (3.7)–(3.9)

$$A(x)=a_{11}\gamma_1^2+a_{22}^{(1)}\gamma_2^2+A_2(x),$$

где

$$A_2(x)=\sum_{\substack{i,j=3\\ i\leq j}}^{n}a_{ij}^{(2)}\gamma_i\gamma_j.$$

Таким образом, задача диагонализации исходной формы $A(x)$ от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ сведена к аналогичной задаче для формы $A_2(x)$ от $(n-2)$ переменных.

Действуя описанным методом, мы за конечное число шагов приведем форму $A(x)$ к диагональному виду

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \beta_k^2, \tag{3.10}$$

где d_k — известные коэффициенты (некоторые, может быть, нулевые), а $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — координаты вектора x в неизвестном пока диагонализующем базисе $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

п.3.5. Установим, в каком базисе f форма $A(x)$ имеет вид (3.10). Для этого сначала выразим «последние» координаты $\beta_1, \ldots, \beta_n$ вектора x через его координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ в исходном базисе $e_1, \ldots, e_n$. Получим

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\xi_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.11}$$

где q_{ij} — известные числа. Пусть

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \ldots & q_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{n1} & q_{n2} & \ldots & q_{nn} \end{pmatrix}, \quad P = Q^{-1} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \ldots & p_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{n1} & p_{n2} & \ldots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу (3.11)

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ji}\beta_i, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.12}$$

Но в силу соотношений (4.8) и (4.2) § 4 гл. II, матрица P есть матрица перехода от базиса $e = (e_1, \ldots, e_n)$, в котором $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$, к базису $f = (f_1, \ldots, f_n)$, в котором $x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j$. Поэтому диагонализующий базис f связан с исходным базисом e равенствами

$$f_s = \sum_{t=1}^{n} p_{ts} e_t \quad s = 1, 2, \ldots, n.$$

п.3.6. Рассмотрим примеры применения метода Лагранжа.

Пример 1. Начнем с квадратичной формы

$$A(x) = 2\xi_1^2 + 2\sqrt{15}\xi_1\xi_2 + 4\xi_2^2,$$

которую мы раньше диагонализовали другими методами. Выделяя слагаемые, содержащие ξ_1, имеем

$$2\xi_1^2+2\sqrt{15}\xi_1\xi_2=2\left(\xi_1^2+\sqrt{15}\xi_1\xi_2+\frac{15}{4}\xi_2^2\right)-7{,}5\xi_2^2=2\left(\xi_1+\frac{\sqrt{15}}{2}\xi_2\right)^2-7{,}5\xi_2^2.$$

Подставляя это выражение в форму $A(x)$ и полагая

$$\eta_1=\xi_1+\frac{\sqrt{15}}{2}\xi_2,\quad \eta_2=\xi_2,$$

получим

$$A(x)=2\eta_1^2-7{,}5\eta_2^2+4\eta_2^2=2\eta_1^2-3{,}5\eta_2^2.$$

Для нахождения диагонализующего базиса выразим ξ_1,ξ_2 через η_1,η_2:

$$\xi_1=\eta_1-\frac{\sqrt{15}}{2}\eta_2,\quad \xi_2=\eta_2.$$

Поэтому матрица перехода от базиса e_1,e_2 к диагонализующему базису f_1,f_2 равна

$$P=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{15}}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

и, значит,

$$f_1=e_1,\quad f_2=e_2-\frac{\sqrt{15}}{2}e_1.$$

Отметим, что этот диагонализующий базис случайно совпал с диагонализующим базисом, полученным по методу Якоби.

п.3.7. Пример 2. Пусть в трехмерном пространстве K выбран какой-либо базис $e=(e_1,e_2,e_3)$, $x=\sum_{j=1}^{3}\xi_ie_i$ — любой вектор из K и квадратичная форма $A(x)$ задается равенством

$$A(x)=\xi_1\xi_2+\xi_2\xi_3+\xi_1\xi_3. \tag{3.13}$$

Так как $a_{11}=a_{22}=a_{33}=0$, то необходима предварительная замена переменных. Полагаем

$$\xi_1=\widetilde{\xi}_1,\quad \xi_2=\widetilde{\xi}_1+\widetilde{\xi}_2,\quad \xi_3=\widetilde{\xi}_3.$$

Тогда в переменных $\widetilde{\xi}_i$

$$A(x)=\widetilde{\xi}_1^2+\widetilde{\xi}_1(\widetilde{\xi}_2+2\widetilde{\xi}_3)+\widetilde{\xi}_2\widetilde{\xi}_3.$$

Дополняем члены, содержащие $\widetilde{\xi}_1$, до полного квадрата, добавляя (и вычитая) $(\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3)^2/4$. Получим, что

$$A(x) = \widetilde{\xi}_1^2 + \widetilde{\xi}_1(\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3) + (\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3)^2/4 - (\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3)^2/4 + \widetilde{\xi}_2\widetilde{\xi}_3 = \\ = (\widetilde{\xi}_1 + (\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3)/2)^2 - \widetilde{\xi}_2^2/4 - \widetilde{\xi}_3^2.$$

Полагая

$$\eta_1 = \widetilde{\xi}_1 + (\widetilde{\xi}_2 + 2\widetilde{\xi}_3)/2, \quad \eta_2 = \widetilde{\xi}_2, \quad \eta_3 = \widetilde{\xi}_3,$$

имеем

$$A(x) = {\eta_1}^2 - {\eta_2}^2/4 - {\eta_3}^2.$$

Таким образом, мы диагонализовали квадратичную форму (3.13) методом Лагранжа. Для нахождения диагонализующего базиса $f = (f_1, f_2, f_3)$ согласно общей теории выразим сначала координаты η_1, η_2, η_3 через исходные координаты ξ_1, ξ_2, ξ_3. Получим

$$\eta_1 = \widetilde{\xi}_1 + \widetilde{\xi}_2/2 + \widetilde{\xi}_3 = \xi_1 + (\xi_2 - \xi_1)/2 + \xi_3 = \xi_1/2 + \xi_2/2 + \xi_3, \\ \eta_2 = \widetilde{\xi}_2 = \xi_2 - \xi_1, \quad \eta_3 = \xi_3.$$

Отсюда

$$\xi_1 = \eta_1 - \eta_2/2 - \eta_3, \quad \xi_2 = \eta_1 + \eta_2/2 - \eta_3, \quad \xi_3 = \eta_3.$$

Следовательно, матрица перехода P есть

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и диагонализующий базис f задается равенствами

$$f_1 = e_1 + e_2, \quad f_2 = -e_1/2 + e_2/2, \quad f_3 = -e_1 - e_2 + e_3.$$

Задание

Непосредственным вычислением проверить, что базис f_1, f_2, f_3 будет диагонализующим для порождающей форму $A(x)$ билинейной формы $B(x, y)$.

п.3.8. Сравним результаты диагонализации квадратичных форм разными методами. Для формы (3.5) — методами ортогонального преобразования и Якоби (п. 3.2), для формы (3.13) — методами ортогонального преобразования (п. 3.2) и Лагранжа (п. 3.7). Мы видим, что в рассмотренных примерах диагонализующие базисы и соответственно диагональный вид одной и той же квадратичной формы зависят от метода диагонализации. Этот факт не является неожиданным уже потому, что если вектора любого диагонализующего базиса $f = (f_1, \ldots, f_n)$ умножить на произвольные вещественные константы $d_i, d_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, то полученный базис $g = (d_1 f_1, d_2 f_2, \ldots, d_n f_n)$, во-первых, как и f, будет диагонализующим, ибо $B(d_i f_i, d_j f_j) = d_i d_j B(f_i, f_j) = 0$ при $i \neq j$, и, во-вторых, в этом базисе коэффициенты в диагональном виде формы $A(x) = B(x, x)$ будут отличаться от соответствующих коэффициентов в базисе f множителями d_i^2.

В то же время во всех разобранных случаях число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в диагональном виде квадратичной формы не зависело от выбранных базисов. Этот факт не является случайным. Имеет место

Теорема 3.1. *Число положительных (n_+), отрицательных (n_-) и нулевых (n_0) коэффициентов в диагональном виде квадратичной формы определяется только самой квадратичной формой и не зависит от диагонализующего базиса.*

Замечание. Числа n_+, n_-, n_0 называются соответственно положительным, отрицательным, и нулевым индексами инерции квадратичной формы, а теорема 3.1 — законом инерции квадратичных форм.

п.3.9. Доказательство. Пусть для произвольной квадратичной формы $A(x)$, определенной в пространстве K с базисом $e = (e_1, \ldots, e_n)$, базисы $f = (f_1, \ldots, f_n)$ и $g = (g_1, \ldots, g_n)$ — диагонализующие. Тогда для любого вектора $x \in K$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j$$

выполняется

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \nu_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 \mu_j. \tag{3.14}$$

Обозначим через p_+, p_-, p_0 и q_+, q_-, q_0 соответственно число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов ν_i и μ_i в (3.14). Надо доказать, что $p_+ = q_+$, $p_- = q_-$, $p_0 = q_0$. Установим сначала, что $p_+ = q_+$. Не ограничивая общности, будем считать, что положительные коэффициенты ν_i имеют номера $1, 2, \ldots, p_+$, отрицательные $p_+ + 1, p_+ + 2, \ldots, p_+ + p_-$, аналогично, пусть положительные числа μ_i имеют номера $1, 2, \ldots, q_+$, отрицательные $q_+ + 1, q_+ + 2, \ldots, q_+ + q_-$ (этого можно добиться перенумеровав при необходимости базисные вектора $f_1, \ldots, f_n$ и $g_1, \ldots, g_n$). Перепишем равенство (3.14) в виде:

$$\sum_{i=1}^{p_+} \alpha_i^2 \nu_i + \sum_{i=p_++1}^{p_++p_-} \alpha_i^2 \nu_i = \sum_{i=1}^{q_+} \beta_i^2 \mu_i + \sum_{i=q_++1}^{q_++q_-} \beta_i^2 \mu_i. \qquad (3.15)$$

Перенесем в (3.15) сумму с отрицательными ν_i в правую часть равенства, а сумму с отрицательными μ_i — в левую. Получим соотношение

$$\sum_{i=1}^{p_+} \alpha_i^2 \nu_i + \sum_{i=q_++1}^{q_++q_-} \beta_i^2 (-\mu_i) = \sum_{i=1}^{q_+} \beta_i^2 \mu_i + \sum_{i=p_++1}^{p_++p_-} \alpha_i^2 (-\nu_i), \qquad (3.16)$$

где каждая из сумм не отрицательна. Предположим, что $p_+ < q_+$ и покажем, что это невозможно. Попробуем найти такой вектор $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \in K, x \neq \theta$, у которого в базисе f равны нулю первые p_+ координат α_i, а в базисе g — координаты β_j, начиная с $j = q_+ + 1$, т. е. такой вектор x, у которого

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p_+} = 0, \quad \beta_{q_++1} = \beta_{q_++2} = \ldots = \beta_n = 0. \quad (3.17)$$

Так как координаты α_i и β_j являются линейными комбинациями исходных координат ξ_s, то требования (3.17) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \sum_{s=1}^{n} c_{is} \xi_s = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, p_+, \\ \beta_j &= \sum_{t=1}^{n} d_{jt} \xi_t = 0, \quad j = q_+ + 1, \ldots, n, \end{aligned} \qquad (3.18)$$

где c_{is}, d_{jt} — некоторые числа. Таким образом, координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ искомого вектора x должны удовлетворять системе (3.18) из $p_+ + (n - q_+)$ однородных линейных уравнений. Так как $p_+ < q_+$, то число уравнений $p_+ + n - q_+$ меньше числа n неизвестных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Следовательно, у системы (3.18) существует не нулевое решение $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, т. е. вектор $x, x \neq \theta$ с требуемыми свойствами (3.18) может быть найден. Подставим его координаты в равенство (3.16). Тогда левая часть (3.16) (а значит и правая) обратится в ноль. Но каждая из сумм в правой части (3.16) не отрицательна, и поэтому каждая равна нулю. Для нас важно, что

$$\sum_{i=1}^{q_+} \beta_i^2 \mu_i = 0. \qquad (3.19)$$

Так как $\mu_i > 0$ $i = 1, 2, \ldots, q_+$, то в силу (3.19) $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{q_+} = 0$. Таким образом, у не нулевого вектора x все координаты $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ в базисе g равны нулю, что невозможно. Значит неравенство $p_+ < q_+$ не верно. Невозможность противоположного неравенства $p_+ > q_+$ доказывается аналогично. (Надо найти вектор x, для которого $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, q_+$ и $\alpha_i = 0$, $i = p_+ + 1, \ldots, n$; координаты $\xi_1, \ldots, \xi_n$ этого вектора будут удовлетворять системе $q_+ + (n - p_+) < n$ однородных уравнений и т. д.) Следовательно, мы доказали, что число $n_+ = p_+ = q_+$ положительных коэффициентов в диагональном виде формы $A(x)$ не зависит от выбора диагонализующего базиса, т. е. является инвариантом квадратичной формы.

Чтобы доказать равенство $p_- = q_-$ рассмотрим квадратичную форму $A_-(x) = -A(x)$. Для формы $A_-(x)$ число положительных коэффициентов в диагональном виде при диагонализации в базисах f и g есть соответственно p_- и q_-. По доказанному, $p_- = q_-$. Наконец, так как $p_+ = q_+$ и $p_- = q_-$, то

$$p_0 = n - p_+ - p_- = q_0 = n - q_+ - q_-.$$

Теорема 3.1 доказана полностью.

п.3.10. Закону инерции квадратичных форм можно придать простой геометрический смысл. Пусть в пространстве K с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ задана квадратичная форма

$$A(x) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \le j}}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j.$$

Равенство $A(x) = 1$ задает поверхность в пространстве переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Тип этой поверхности определяется индексами инерции формы $A(x)$ и не может зависеть от выбора базиса. Так, например, квадратичная форма

$$A(x) = \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3 \quad \text{в} \quad R^3$$

после приведения к диагональному виду имеет вид (см. п. 3.3)

$$A(x) = -\frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3^2.$$

А это значит, что поверхность $A(x) = 1$ — это двухполостной гиперболоид ($n_- = 2, n_+ = 1$) и никаким выбором базиса мы не превратим поверхность $A(x) = 1$ в другую поверхность, например, в эллипсоид ($n_+ = 3$).

§ 4. ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

п.4.1. Определение. *Квадратичная форма $A(x)$ называется положительно определенной, если*

$$A(x) > 0 \quad \forall x \in K, \quad x \neq \theta. \tag{4.1}$$

Так же, как для положительно определенных операторов (см. § 2 гл. IV), необходимым и достаточным условием положительной определенности квадратичной формы $A(x)$ является положительность всех собственных значений ее матрицы. Докажем это. Приведем форму $A(x)$ к диагональному виду методом ортогонального преобразования. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — базис в K, состоящий из ортонормированных собственных векторов матрицы $\mathcal{A}$ и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие собственные значения. Тогда при $x \in K$ имеем $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$ и

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \lambda_i,$$

где $\lambda_i = A(f_i)$. Ясно, что если все $\lambda_i > 0$, то $A(x) > 0$ при $x \neq \theta$. С другой стороны, если $A(x) > 0$, то $\lambda_i = A(f_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Утверждение доказано. Необходимые и достаточные условия положительности собственных значений матрицы нам известны. Они даются критерием Сильвестра, доказанным нами на языке операторов в § 2 гл. IV. Здесь мы повторим формулировку этого критерия, но доказательство дадим другое — на языке квадратичных форм.

п.4.2. Пусть

$$\mathcal{A} = B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} & \ldots & b_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nk} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta_k = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

— соответственно матрица квадратичной формы $A(x)$[1] и ее угловой минор k-го порядка.

[1] Напоминаем, что матрица $\mathcal{A}$ квадратичной формы $A(x)$ — это матрица B порождающей симметричной билинейной формы $B(x, y)$, см. п. 3.1.

Критерий Сильвестра. *Для положительности собственных значений матрицы A необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства*

$$\Delta_k > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Так как $\Delta_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то применим метод Якоби диагонализации квадратичной формы $A(x)$. Согласно ему (см. п. 3.2), в диагональном виде

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \nu_i,$$

где числа $\nu_i = \Delta_i/\Delta_{i-1}$, $i \geqslant 2$, $\nu_1 = \Delta_1 = b_{11}$. В силу (4.2) $\nu_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, форма $A(x)$ положительно определена и, значит, собственные значения матрицы A — положительны. Достаточность условий (4.2) доказана.

Необходимость. Пусть все собственные значения матрицы A положительны. Тогда квадратичная форма $A(x)$ положительно определена в пространстве K а, следовательно, и в любом подпространстве $H \subset K$. Пусть $e = (e_1, \ldots, e_n)$ — базис в K и $H_k = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_k\}$ — линейная оболочка первых k векторов базиса e. Матрица $A^{(k)}$ квадратичной формы $A(x)$ в пространстве H_k есть

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{k1} & \ldots & b_{kk} \end{pmatrix}.$$

Так как квадратичная форма $A(x)$ положительно определена в пространстве H_k, то собственные значения $\lambda_1^{(k)}, \ldots, \lambda_k^{(k)}$ матрицы $A^{(k)}$ — положительны. Но $\Delta_k = \det A^{(k)} = \lambda_1^{(k)} \cdot \lambda_2^{(k)} \cdot \ldots \cdot \lambda_k^{(k)}$ и, значит, $\Delta_k > 0$. Необходимость доказана.

Замечание. Приведенное доказательство безусловно проще, чем данное в пп. 2.2–2.4 гл. IV доказательство критерия Сильвестра на языке операторов. Однако надо понимать, что эта простота достигнута за счет использования разобраного ранее метода Якоби диагонализации квадратичных форм. Отметим также, что доказательство критерия Сильвестра в § 2 гл. IV работает и при $F = \mathbb{C}$ и при $F = \mathbb{R}$, в то время как доказательство на основе теории квадратичных форм предполагает $F = \mathbb{R}$.

п.4.3. Аналогично положительно определенным квадратичным формам мы можем ввести отрицательно определенные, потребовав для них выполнение неравенства

$$A(x) < 0 \quad \forall x \in K, \quad x \neq \theta. \tag{4.3}$$

Если форма $A(x)$ отрицательно определена, т. е. верно (4.3), то форма $-A(x)$ — положительно определена и, значит, у матрицы $-A$ все собственные значения положительны. Поэтому, если

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

то, чтобы форма $-A(x)$ была положительно определена, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{vmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \dots & -b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_{k1} & -b_{k2} & \dots & -b_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

т. е. чтобы

$$(-1)^k \begin{vmatrix} b_{11} & \dots & b_{1k} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{k1} & \dots & b_{kk} \end{vmatrix} = (-1)^k \Delta_k > 0.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие отрицательности квадратичной формы (оно же — условие отрицательности собственных значений матрицы A) можно записать так:

$$\Delta_k > 0 \text{ при четном } k, \quad \Delta_k < 0, \text{ если } k \text{ не четно}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

п.4.4. В заключение рассмотрим вопрос об одновременном приведении к диагональному виду двух квадратичных форм, одна из которых положительно определена.

Пусть $e=(e_1, \dots, e_n)$ — произвольный базис в K, $x=\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \in K$, $A(x)>0$ — положительно определенная квадратичная форма, $B(x,y)$ — порождающая для $A(x)$ билинейная форма, $C(x)$ — произвольная квадратичная форма, C_e — ее матрица в базисе e (т. е. матрица порождающей билинейной формы). Введем в пространстве K скалярное произведение

$$(x, y)_1 := B(x, y). \tag{4.4}$$

Так как билинейная форма $B(x,y)$ линейна по каждому из аргументов и $B(x,x) > 0$ при $x \neq \theta$, то определение (4.4) скалярного произведения корректно. Пусть $f = (f_1, \dots, f_n)$ — ортонормированный в скалярном произведении $(\cdot\,,\cdot)_1$ базис в K. Тогда, если

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i, \quad y = \sum_{j=1}^n \beta_j f_j,$$

то

$$B(x,y) = (x,y)_1 = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j f_j\Big)_1 = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (f_i, f_j)_1 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i.$$

Таким образом, в любом ортонормированном $(\cdot\,,\cdot)_1$ базисе билинейная форма $B(x,y)$, а значит, и квадратичная форма $A(x) = B(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2$ имеют диагональный вид. Пусть $P = (p_{st})_n^n$ — матрица перехода от базиса e к базису f: $f_i = \sum_{s=1}^{n} p_{si} e_s$. В базисе f согласно (1.7)

$$C_f = P^T C_e P.$$

Матрица C_f — симметрична, ибо симметрична матрица C_e. Выберем теперь в пространстве K ортонормированный $(\cdot\,,\cdot)_1$ базис $g_1, \ldots, g_n$ из собственных векторов матрицы C_f. В этом базисе матрица C_f диагональна, а, значит, и квадратичная форма $C(x)$ примет диагональный вид. В то же время при

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i, \quad y = \sum_{j=1}^{n} d_j g_j,$$

$$B(x,y) = (x,y)_1 = \sum_{i,j=1}^{n} c_i d_j (g_i, g_j)_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$$

и, значит,

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2.$$

Таким образом, обе квадратичные формы $A(x)$ и $C(x)$ диагонализованы.

п.4.5. Рассмотрим пример. Пусть в двумерном пространстве K с базисом $e = (e_1, e_2)$ заданы произвольные вектора

$$x = \sum_{i=1}^{2} \xi_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^{2} \eta_j e_j,$$

и квадратичные формы

$$A(x) = 4\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 + \xi_2^2, \quad C(x) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2.$$

Очевидно, форма $A(x)$ положительно определена. Обозначим через $B(x,y)$ и $C(x,y)$ билинейные формы, порождающие соответственно квадратичные формы $A(x)$ и $C(x)$. Тогда

$$B(x,y) = 4\xi_1\eta_1 + \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 + \xi_2\eta_2, \quad C(x,y) = \xi_1\eta_1 - \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Введем в пространстве K скалярное произведение

$$(x, y)_1 := B(x, y).$$

Тогда $\|x\|_1^2 = B(x, x) = A(x)$. Строим ортонормированный в скалярном произведении $(\cdot\,,\cdot)_1$ базис в K по рецепту п. 4.4 гл. I. Имеем

$$\widetilde{f}_1 = e_1, \quad f_1 = \frac{\widetilde{f}_1}{\|\widetilde{f}_1\|_1}, \quad \text{т. е.} \quad \widetilde{f}_1 = (1, 0),$$
$$\|\widetilde{f}_1\|_1^2 = 4 \quad \text{и} \quad f_1 = \frac{e_1}{2} = (1/2, 0).$$

Далее

$$\widetilde{f}_2 = e_2 - (e_2, f_1)_1 f_1, \quad \text{где} \quad e_2 = (0, 1), \quad (e_2, f_1)_1 = B(e_2, e_1/2) = 1/2.$$

Значит

$$\widetilde{f}_2 = e_2 - 1/2 f_1 = e_2 - 1/4 e_1 = (-1/4, 1), \quad \text{и} \quad \|\widetilde{f}_2\|_1^2 = A_1(\widetilde{f}_2) = 3/4.$$

Поэтому $f_2 = \dfrac{\widetilde{f}_2}{\|\widetilde{f}_2\|_1} = \left(-\dfrac{1}{2\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. В базисе $f = (f_1, f_2)$

$$x = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \quad y = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2,$$
$$B(x, y) = (x, y)_1 = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2, \quad A(x) = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Найдем теперь вид матрицы C_f билинейной формы $C(x, y)$ в базисе f_1, f_2. Согласно (1.7)

$$C_f = P^T C P, \tag{4.5}$$

где P — матрица перехода от базиса e к базису f, C — матрица квадратичной формы $C(x)$ в базисе e:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -(2\sqrt{3})^{-1} \\ 0 & 2(\sqrt{3})^{-1} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу (4.5)

$$C_f = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -5(4\sqrt{3})^{-1} \\ -5(4\sqrt{3})^{-1} & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

и, значит,

$$C_f(x, y) = \alpha_1\beta_1/4 - 5\alpha_1\beta_2/4\sqrt{3} - 5\alpha_2\beta_1/4\sqrt{3} + 3\alpha_2\beta_2/4.$$

Диагонализуем форму $C_f(x, y)$ методом ортогонального преобразования. Для этого находим собственные значения матрицы C_f $\lambda_{1,2}$ и соответствующие нормированые собственные вектора g_1 и g_2. Тогда при $x = \gamma_1 g_1 + \gamma_2 g_2$ мы получим

$$C(x) = \lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2,$$

а так как вектора g_1, g_2 — ортонормированы, то

$$A(x) = B(x, x) = \gamma_1^2 + \gamma_2^2.$$

Таким образом, обе квадратичные формы $A(x)$ и $C(x)$ диагонализованы одновременно.

Задание

Найти λ_1, λ_2, g_1, g_2.

ПРИЛОЖЕНИЕ

п.1. *Почему для матрицы $\alpha = (\alpha_{ij})_n^n$, у которой для элементов s-й строки и каких-то чисел β_j и γ_j выполняется $\alpha_{sj} = \beta_j + \gamma_j$, $j = 1{,}2, \ldots, n$, определитель α равен сумме определителей матриц α_β и α_γ, полученных из матрицы α соответственно при $\alpha_{sj} = \beta_j$ (для α_β) и при $\alpha_{sj} = \gamma_j$ (для α_γ), $j = 1{,}2, \ldots, n$?*

Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$,

$$\alpha = \alpha(\beta; \gamma) = \begin{Vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{s-1,1} & \alpha_{s-1,2} & \ldots & \alpha_{s-1,n} \\ \beta_1 + \gamma_1 & \beta_2 + \gamma_2 & \ldots & \beta_n + \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{Vmatrix},$$

$\alpha_\beta = \alpha(\beta; 0, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_\gamma = \alpha(0, 0, \ldots, 0; \gamma)$.

Утверждается, что

$$\det \alpha = \det \alpha_\beta + \det \alpha_\gamma. \tag{П.1}$$

Действительно, пусть A_{sj} — алгебраическое дополнение элементов α_{sj}, β_j и γ_j соответственно в матрицах α, α_β и α_γ (оно одно и то же). Тогда, разлагая $\det \alpha$, $\det \alpha_\beta$ и $\det \alpha_\gamma$ по элементам s-й строки, мы получим в левой части равенства (П.1) $\sum_{j=1}^n (\beta_j + \gamma_j) A_{sj}$, а в правой $\sum_{j=1}^n \beta_j A_{sj} + \sum_{j=1}^n \gamma_j A_{sj}$. Значит, равенство (П.1) верно.

п.2. *Почему определитель матрицы не меняется, если к любой ее строке добавить другую, умноженную на произвольную константу?*

Пусть s, t — фиксированные числа, $s \neq t$, $s, t \in [1, 2, \ldots, n]$,

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s,1} & \ldots & a_{s,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \ldots & a_{s-1,n} \\ a_{s1} + pa_{t1} & a_{s2} + pa_{t2} & \ldots & a_{sn} + pa_{tn} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Утверждается, что

$$\det B = \det A. \tag{П.2}$$

Равенство (П.2) следует из (П.1). Действительно, пусть

$$C = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s-1,1} & a_{s-1,2} & \ldots & a_{s-1,n} \\ pa_{t1} & pa_{t2} & \ldots & pa_{tn} \\ a_{s+1,1} & a_{s+1,2} & \ldots & a_{s+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тогда в силу (П.1) с $\alpha = B$, $\alpha_\beta = A$, $\alpha_\gamma = C$, т. е. при $\alpha_{sj} = a_{sj} + pa_{tj}$, $\beta_j = a_{sj}$, $\gamma_j = pa_{tj}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ имеем

$$\det B = \det A + \det C. \tag{П.3}$$

В матрице C две строки отличаются только множителем p: одна — это строка с номером t, а другая — строка с номером s, состоящая из элементов $pa_{t1}, pa_{t2}, \ldots, pa_{tn}$. Поэтому $\det C = 0$ и (П.2) следует из (П.3).

Замечание. Так как при транспонировании матрицы ее определитель не меняется, то из проведенных рассуждений следует, что определитель матрицы не меняется, если к любому ее столбцу добавить другой столбец, умноженный на произвольную константу.

п.3. *Почему определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц?*

Пусть $A = (a_{tj})_n^n$, $B = (b_{jk})_n^n$, $C = (c_{tk})_n^n = A \cdot B$.

Утверждается, что

$$\det C = \det A \cdot \det B. \tag{П.4}$$

Доказательство. Согласно п.2.3 главы II

$$c_{tk} = \sum_{s=1}^{n} a_{ts} b_{sk}, \quad t, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{П.5}$$

Фиксируем любое значение $t = i$ и подставим c_{ik}, $k = 1, 2, \ldots, n$ в i-ю строчку матрицы C. Получим

$$C = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i-1,1} & c_{i-1,2} & \ldots & c_{i-1,n} \\ \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{s1} & \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{s2} & \ldots & \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sn} \\ c_{i+1,1} & c_{i+1,2} & \ldots & c_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П}.6)$$

Обозначим через $B(s)$ и $C(t)$ строки с номерами s и t соответственно матриц B и C, $1 \le s,\ t \le n$. Тогда в силу (П.5) строка $C(t)$ есть линейная комбинация строк $B(s)$ с коэффициентами a_{ts}:

$$C(t) = \sum_{s=1}^{n} a_{ts} B(s) = \sum_{s_t=1}^{n} a_{ts_t} B(s_t). \qquad (\text{П}.7)$$

Здесь мы переобозначили индекс суммирования, взяв s_t вместо s, и тем самым «привязав» его к номеру t строки, для которой написано разложение (П.7)[2)]. В силу (П.7) с $t = i$ мы можем применить для нахождения $\det C$ равенство (П.1). Сделав это, получим

$$\det C = \sum_{s_i=1}^{n} a_{is_i} \det \begin{Vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{i-1,1} & \ldots & c_{i-1,n} \\ b_{s_i,1} & \ldots & b_{s_i,n} \\ c_{i+1,1} & \ldots & c_{i+1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П}.8)$$

Применим теперь аналогичный подход последовательно для всех остальных строк определителей в (П.8), подставляя в них разложение (П.5) и используя затем равенство (П.7) при $t = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$. Тогда получим

$$\det C = \sum_{s_1,\ldots,s_n=1}^{n} a_{1s_1} a_{2s_2} \ldots a_{ns_n} \det \begin{Vmatrix} b_{s_1,1} & \ldots & b_{s_1,n} \\ b_{s_2,1} & \ldots & b_{s_2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s_i,1} & \ldots & b_{s_i,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s_n,1} & \ldots & b_{s_n,n} \end{Vmatrix}. \qquad (\text{П}.9)$$

[2)] Переобозначение сделано чтобы избежать путаницы с индексами суммирования, так как при рассмотрении других строк определителя появятся аналогичные суммы.

Так как каждый из индексов s_j пробегает значения $1, 2, \ldots, n$, то в сумме в (П.9) есть слагаемые, в которых $s_j = s_p$ для каких-то j и p. Но в таких слагаемых определитель равен нулю, так как он содержит две одинаковые строки: $B(s_j)$ и $B(s_p)$. Поэтому можно считать, что в каждом слагаемом суммы (П.9) числа $s_1, s_2, \ldots, s_n$ различны. А так как $1 \leq s_1, s_2, \ldots, s_n \leq n$, то каждый такой набор $s_1, s_2, \ldots, s_n$ в (П.9) получается из набора $1, 2, \ldots, n$ с помощью перестановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $N(s)$ число транспозиций, переводящих набор $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ в набор $(1, 2, \ldots, n)$. Так как при каждой перестановке строк $B(s_j) \leftrightarrow B(s_p)$ определитель меняет знак, то

$$\begin{vmatrix} b_{s_1,1} & \ldots & b_{s_1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{s_n,1} & \ldots & b_{s_n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{N(s)} \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{N(s)} \det B.$$

Подставляя это выражение в (П.9), получим

$$\det C = \sum_s (-1)^{N(s)} a_{1s_1} a_{2s_2} \ldots a_{ns_n} \det B = \det A \det B,$$

так как здесь суммирование идет по всем наборам $s = (s_1, \ldots, s_n)$, полученным из набора $(1, 2, \ldots, n)$ всевозможными перестановками. Утверждение (П.4) доказано.

п.4. *Почему у системы n линейных уравнений с ненулевым определителем существует единственное решение и как его найти?*

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right\}, \qquad (\text{П.10})$$

где a_{ij} и b_i, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — известные числа. Пусть

$$\Delta = \det \left\| \begin{matrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{matrix} \right\| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (\text{П.11})$$

Для решения системы (П.10) применим хорошо известный метод Гаусса. Выберем в первом уравнении (П.10) коэффициент a_{1j} не равный нулю. Для простоты считаем, что это a_{11}. После этого первое уравнение (П.10) умножим на a_{21}/a_{11} и вычитаем из второго, затем его же умножим на a_{31}/a_{11} и вычитаем из третьего уравнения системы и т. д. до n-го уравнения включительно. Тогда система (П.10) перейдет в систему

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)} \end{aligned}\right\}, \tag{П.12}$$

где $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{1j}a_{i1}/a_{11}$, $b_i^{(1)} = b_i - (a_{i1}/a_{11})b_1$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$. Далее во втором уравнении системы (П.12) выберем коэффициент $a_{2j}^{(1)} \neq 0$. Для простоты предположем, что это $a_{22}^{(1)}$. После этого последовательно умножим второе уравнение сначала на $a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и вычтем из третьего уравнения (П.12), затем умножим на $a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ и вычтем из 4-го уравнения и т. д. до n-го уравнения включительно. Тогда получим систему

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n &= b_n^{(2)} \end{aligned}\right\}, \tag{П.13}$$

где $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{2j}^{(1)}a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$, $b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - (a_{i2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})b_2^{(1)}$, $i, j = 3, 4, \ldots, n$.

Продолжая действовать аналогично, мы в итоге придем к системе

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)} \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad &\ldots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\}, \tag{П.14}$$

где все коэффициенты $a_{ij}^{(s)}$, $b_i^{(s)}$, $i, j = 2, 3, \ldots, n$; $s = 1, 2, \ldots, n-1$ известны.

Прежде чем решать систему (П.14) отметим, что определители систем (П.12)–(П.14) совпадают с определителем $\Delta \neq 0$ исходной системы (П.10). Это следует из того, что матрица каждой следующей системы получается из матрицы предыдущей вычитанием из некоторых строк одной, умноженной на какие-то константы. А такое преобразование в силу п.2 не меняет определитель матрицы. Отсюда вытекают два важных следствия.

1. Ни на одном шаге мы не можем столкнуться с ситуацией, когда все коэффициенты $a_{kt}^{(k-1)} = 0$, $t = k, k+1, \ldots, n$; $k = 2, 3, \ldots, n$, ибо это привело бы к равенству нулю определителя системы.

2. Величина

$$a_{11} \cdot a_{22}^{(1)} \cdot a_{33}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{nn}^{(n-1)} = \Delta \neq 0$$

и, значит, $a_{tt}^{(t-1)} \neq 0$, $t = 2, 3, \ldots, n$.

В силу сказанного из системы (П.14) неизвестные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ легко находятся: из n-го уравнения находим x_n, затем подставляем найденное значение x_n в $(n-1)$-е уравнение и оттуда находим x_{n-1}, затем, подставив найденные значения x_n и x_{n-1} в $(n-2)$-е уравнение, находим оттуда x_{n-2} и т. д. (Здесь важно, что $a_{tt}^{(t-1)} \neq 0$.) Таким образом, мы дали способ отыскания решения системы (П.10) и одновременно доказали его существование и единственность.

п.5. *Как выглядит формула для решения системы* (П.10)?

Зная, что решение системы (П.10) существует, выведем формулу для его нахождения, не проводя процедуру п.4.

Пусть $\Delta(k)$ — это определитель Δ системы (П.10), в котором k-й столбец заменен столбцом свободных членов системы:

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,k-1} & b_2 & a_{2,k+1} \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что

$$x_k = \frac{\Delta(k)}{\Delta}. \tag{П.15}$$

Существует изящное доказательство формулы (П.15). Приведем его. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — решение системы (П.10). Очевидно,

$$x_k\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1k}x_k & a_{1,k+1} \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & a_{nk}x_k & a_{n,k+1} \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{П.16}$$

Обозначим через A_j и B_j j-е столбцы соответственно определителей (П.11) и (П.16), $j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно $B_j = A_j$, $j \neq k$, и $B_k = x_k A_k$. Прибавим к k-му столбцу определителя (П.16) линейную комбинацию $\sum_{j=1, j\neq k}^{n} x_j A_j$ остальных столбцов. Тогда в полученном определителе k-й столбец будет равен $\sum_{j=1}^{n} x_j A_j$. Элементы этого столбца совпадают с левыми частями уравнений (П.10) и, следовательно, с правыми частями, т. е. соответственно с числами $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Поэтому определитель в правой части (П.16) равен $\Delta(k)$ и из равенства $x_k\Delta = \Delta(k)$ мы получим формулу (П.15).

п.6. *Почему определитель Вандермонда не равен нулю*?

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — n различных чисел, $n \geq 2$ и

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{П.17}$$

Определитель $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ называется определителем Вандермонда. Покажем, что $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$, если все числа λ_j различны. Доказательство проведем по индукции. При $n = 2$

$$V(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0.$$

Пусть $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ для любых различных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ при $n = 2, 3, \ldots, m$ и докажем, что $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0$ для различных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ при $n = m+1$. Фиксируем $\lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ и рассмотрим $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$ как функцию от λ_1. Раскладывая определитель (П.17) при $n = m+1$ по элементам первого столбца, получим

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) = (-1)^{m+1}\lambda_1^m d_1 + \lambda_1^{m-1} d_2 + \ldots + d_{m+1},$$

где $d_1 = V(\lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1})$.

По предположению индукции $d_1 \neq 0$, тогда $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1})$ — это полином степени m относительно λ_1. Он не может иметь больше m корней. Но мы знаем, что $V(\lambda_1, \ldots, \lambda_{m+1}) = 0$ при $\lambda_1 = \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, m, m+1$, т. е. m корней известны. Следовательно, никаких других корней нет и поэтому, если $\lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}$ различны и $\lambda_1 \neq \lambda_j$, $j = 2, 3, \ldots, m+1$, то $V(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m+1}) \neq 0$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Можно доказать, что

$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i,j,i<j}^{1,n} (\lambda_j - \lambda_i),$$

но этот результат нами не используется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин В. А.*, *Позднякк Э. Г.* Линейная алгебра. — М.: Наука, 1999. — 296 с.
2. *Беклемищев Д. В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 376 с.
3. *Апатёнок Р. Ф. и др.* Элементы линейной алгебры. — М.: Наука, 1987. — 273 с.
4. *Головина Л. И.* Линейная алгебра и некоторые ее приложения. — М.: Наука, 1985. — 392 с.
5. *Крутицкая Н.*, *Шишкин А.* Линейная алгебра в вопросах и задачах. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 248 с.
6. *Канатников А. Н.*, *Крищенко А. П.* Линейная алгебра. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Баумана, 2006. — 335 с.
7. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.