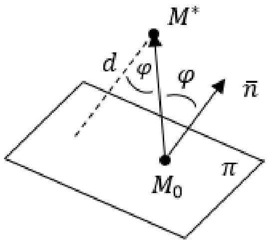


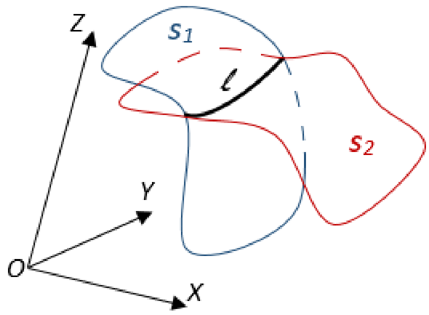
Рассмотрим на плоскости π некоторую точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Тогда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \Rightarrow D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Искомое расстояние d есть: $d = |M_0M^* \cos\varphi| = \dfrac{|(\overline{M_0M^*}, \bar{n})|}{|\bar{n}|}$.

Т.к. $\overline{M_0M^*} = \{x^* - x_0, y^* - y_0, z^* - z_0\}$, то

$$d = \frac{|A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0) + C(z^* - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + (-Ax_0 - By_0 - Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + Cz^* + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

2.5 Задание линии в пространстве. Уравнение прямой в пространстве



Пусть в системе $OXYZ$ поверхности заданы уравнениями
$s_1\colon F_1(x, y, z) = 0$,
$s_2\colon F_2(x, y, z) = 0$.

Если $l = s_1 \cap s_2$ есть линия пересечения этих плоскостей (см. рис.), то её уравнение:

$$l\colon \begin{cases} F_1(x, y, z) = 0 \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Пусть $s_1 = \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $s_2 = \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть две плоскости. Если $\pi_1 \nparallel \pi_2$, то $l = \pi_1 \cap \pi_2$ есть прямая в пространстве. По доказанному ранее:

$$\pi_1 \nparallel \pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \text{ и/или } \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \text{ и/или } \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \qquad (*)$$

Неравенство $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$ выполнено тогда и только тогда, когда $A_1B_2 \neq A_2B_1$, т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Аналогично, два последующих неравенства $(*)$ можно задать как $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$ и $\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Группу неравенств $(*)$ можно задать одним неравенством:

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0$$

Из свойств определителей $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}$, следовательно, $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2$ и последнее неравенство нам будет удобно записать в виде

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0 \qquad (**)$$

Таким образом, уравнение прямой в пространстве можно задать как

$$l\colon \begin{cases} \pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}^2 \neq 0 \ (\pi_1 \nparallel \pi_2) \end{cases} \qquad (1)$$

Определение 2.13. Формулу (1) называют заданием прямой КАК ПЕРЕСЕЧЕНИЕ двух плоскостей. Иногда (1) называют общим уравнением прямой в пространстве.

Наряду с (1) так же рассматривают и другие уравнения прямых в пространстве. Если точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in l$ и вектор $\bar{a} = \{p, q, r\}$ есть направляющий вектор этой прямой, то её уравнение есть

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + tp \\ y &= y_0 + tq \\ z &= z_0 + tr \end{aligned}\right\} \text{ – параметрическое уравнение прямой} \quad (2)$$

Или
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r} \text{ – каноническое уравнение прямой} \quad (3)$$

Если даны две различные точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1) \in l$ $(M_0 \neq M_1)$, то уравнение прямой через них проходящей.

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \text{ – уравнение прямой «через 2 точки»} \quad (4)$$

Вывод этих уравнений аналогичен выводу одноименных уравнений на плоскости.

Поставим задачу: Если дано уравнение прямой (1), то каким образом можно найти координаты её направляющего вектора $\bar{a}$?

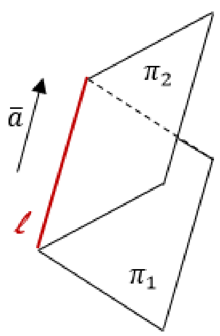
Ответом на этот вопрос является.

Утверждение 2.3. В качестве направляющего вектора прямой (1) можно взять вектор

$$\bar{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Замечание 2.8. «Подсказкой» для такого задания координат вектора $\bar{a}$ является условие $\pi_1 \nparallel \pi_2$, записанное в виде (∗∗). Именно поэтому мы перешли от записи (∗) к (∗∗).

Доказательство. Отметим, во-первых, что из (∗∗) следует, что $\bar{a} \neq \bar{0}$, т.е. этот вектор будет направляющим вектором некоторой прямой. Для плоскости $\pi_1\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ зададим векторы $\bar{p}_1 = \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \parallel \pi_1$ и $\bar{p}_2 = \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \parallel \pi_2$.
Согласно лемме из предыдущей лекции
$\bar{p}_1 \parallel \pi_1 \Leftrightarrow A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 = 0$,
$\bar{p}_2 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow A_2\alpha_2 + B_2\beta_2 + C_2\gamma_2 = 0$.
Т.к. $\bar{a} \parallel \pi_1$ и $\bar{a} \parallel \pi_2$ (см. рис.), то координаты $\bar{a}$ должны удовлетворять условию леммы. Проверка:



(1) $\bar{a} \parallel \pi_1 \Leftrightarrow A_1 \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} + B_1 \begin{vmatrix} A_2 & A_1 \\ C_2 & C_1 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} = 0$

Справедливость этого равенства устанавливается проверкой:
$A_1(B_1C_2 - B_2C_1) + B_1(A_2C_1 - A_1C_2) + C_1(A_1B_2 - A_2B_1) =$
$A_1B_1C_2 - A_1B_2C_1 + B_1A_2C_1 - B_1A_1C_2 + C_1A_1B_2 - C_1A_2B_1 = 0$

(2) $\bar{a} \parallel \pi_2$. Аналогично. □

Замечание 2.9. Утверждение справедливо для произвольной декартовой системы координат.

Некоторые задачи о прямых и плоскостях в ПРЯМОУГОЛЬНОЙ системе координат

Пусть в пространстве задан репер $\{O,\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ или прямоугольная система координат $OXYZ$. Плоскость задаем общим уравнением $\pi\colon Ax+By+Cz+D=0$, а прямую l – каноническим уравнением $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$, где $\bar{a}=\{p,q,r\}$ – направляющий вектор прямой l и точка $M_0(x_0,y_0,z_0)\in l$.

Задача 1. Угол между прямыми и расстояние от точки до прямой.

Очевидно, что угол φ между прямыми l_1 и l_2 есть угол между направляющими векторами $\bar{a}_1=\{p_1,q_1,r_1\}$ и $\bar{a}_2=\{p_2,q_2,r_2\}$ (с точностью до дополнительного угла) и

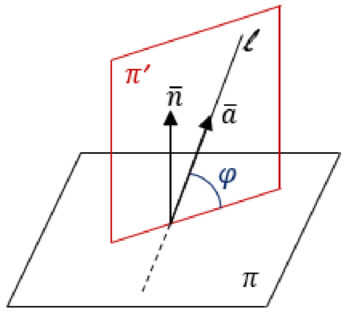
$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a}_1,\bar{a}_2)}{|\bar{a}_1||\bar{a}_2|}=\frac{p_1p_2+q_1q_2+r_1r_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2+r_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2+r_2^2}}$$

Формула для расстояния d от точки $M^*(x^*,y^*,z^*)$ до прямой $\dfrac{x-x_0}{p}=\dfrac{y-y_0}{q}=\dfrac{z-z_0}{r}$ выводится аналогично случаю прямой на плоскости (стр. 44)

$$d=\frac{|[\bar{a},\overline{M_0M^*}]|}{|\bar{a}|}=\frac{\sqrt{\begin{vmatrix} p & q \\ x^*-x_0 & y^*-y_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} p & r \\ x^*-x_0 & z^*-z_0\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} q & r \\ y^*-y_0 & z^*-z_0\end{vmatrix}^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

Задача 2. Исследовать взаиморасположение прямой и плоскости.

Здесь будем выделять три случая.



(1) Пусть $l\nparallel\pi$, т.е. прямая и плоскость пересекаются. Найдем угол между прямой и плоскостью. Т.к. система $OXYZ$ прямоугольная, то вектор нормали к плоскости π есть $\bar{n}=\{A,B,C\}$ и $\cos(\widehat{\bar{n},\bar{a}})=\dfrac{(\bar{n},\bar{a})}{|\bar{n}||\bar{a}|}$.

Пусть π' – плоскость, приходящаяся через векторы $\bar{n},\bar{a}$ (см. рис.).

Искомый угол $\varphi=\frac{\pi}{2}-(\widehat{\bar{n},\bar{a}})$. Тогда $\sin\varphi=\cos(\widehat{\bar{n},\bar{a}})$ и, следовательно,

$$\sin\varphi=\frac{(\bar{n},\bar{a})}{|\bar{n}||\bar{a}|}=\frac{Ap+Bq+Cr}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

(2) Как частный случай $\varphi=0$ получаем условие:

$$l\parallel\pi\Leftrightarrow Ap+Bq+Cr=0$$

(3) Условие перпендикулярности прямой и плоскости. Если $l\perp\pi$, то $l\parallel\bar{n}$ и из критерия коллинеарности векторов в координатной форме следует

$$l\perp\pi\Leftrightarrow\frac{A}{p}=\frac{B}{q}=\frac{C}{r}$$

Задача 3. Расстояние между скрещивающимися прямыми.

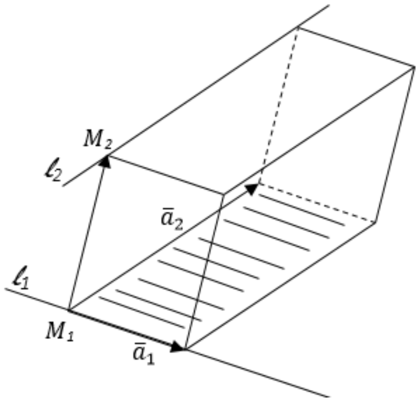
Пусть точка $M_1(x_1,y_1,z_1)\in l_1$, $M_2(x_2,y_2,z_2)\in l_2$. Пусть $\bar{a}_1=\{p_1,q_1,r_1\}$ и $\bar{a}_2=\{p_2,q_2,r_2\}$ – направляющие векторы l_1 и l_2. Тогда $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$ и

$l_1\colon\dfrac{x-x_1}{p_1}=\dfrac{y-y_1}{q_1}=\dfrac{z-z_1}{r_1}$,

$l_2\colon\dfrac{x-x_2}{p_2}=\dfrac{y-y_2}{q_2}=\dfrac{z-z_2}{r_2}$.

На векторах $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$ строим параллелепипед объема $V = |(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|$.

В качестве основания выбираем нижнюю часть параллелепипеда. На рис. Она отмечена штриховкой. Его площадь $S = |[\bar{a}_1, \bar{a}_2]|$. Расстояние h между скрещивающимися прямыми выражается через объем V и площадь S как:



$h = \dfrac{V}{S} = \dfrac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|[\bar{a}_1, \bar{a}_2]|}$.

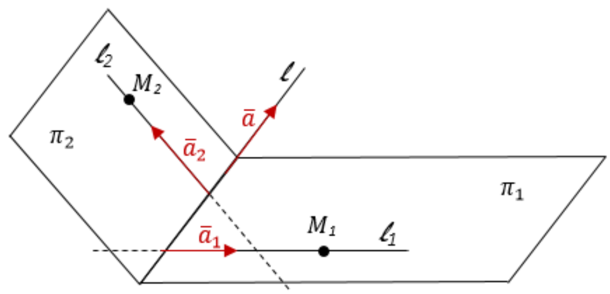
Или в развернутой форме

$$h = \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix}^2}}$$

Задача 4. Написать уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым.

$l_1\colon \dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1} = \dfrac{z - z_1}{r_1}$,

$l_2\colon \dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2} = \dfrac{z - z_2}{r_2}$.



Пусть $\bar{a}$ есть направляющий вектор l. В качестве $\bar{a}$ можно взять, например, $\bar{a} = [\bar{a}_1, \bar{a}_2]$. Действительно, из определения векторного произведения следует, что $\bar{a} \perp \bar{a}_1$ и $\bar{a} \perp \bar{a}_2$.

Пусть π_1 – плоскость, проходящая через прямые l и l_1 (см.рис.).

Для любой точки $M(x, y, z) \in \pi_1$ векторы $\overline{M_1M}$, $\bar{a}$, $\bar{a}_1$ компланарны. Согласно критерию компланарности векторов (равенство нулю смешанного произведения) это равносильно

$\pi_1\colon (\overline{M_1M}, \bar{a}, \bar{a}_1) = 0$ – уравнение плоскости π_1.

Аналогично, для произвольной точки $M(x, y, z) \in \pi_2$

$\pi_2\colon (\overline{M_2M}, \bar{a}, \bar{a}_2) = 0$ – уравнение плоскости π_2.

Общий перпендикуляр l есть $l = \pi_1 \cap \pi_2$. Тогда

$$l\colon \begin{cases} (\overline{M_1M}, \bar{a}, \bar{a}_1) = 0 \\ (\overline{M_2M}, \bar{a}, \bar{a}_2) = 0 \end{cases} \quad \text{– уравнение общего перпендикуляра}$$