Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского
Высшая школа общей и прикладной физики

Г. М. Королев

Сборник индивидуальных заданий по курсу аналитической геометрии

(для студентов-физиков)

Нижний Новгород 2008

В сборнике использованы задачи из задачников Л. А. Кузнецова; О. Н. Цубербиллер; Д. В. Клетеника и других задачников по аналитической геометрии.

Однородные по сложности задачи представлены в 30 вариантах и собраны в задания, соответствующие материалу первого семестра ВШОПФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. — М.: Наука, 1968.

2. Моденов П. С. Аналитическая геометрия. — М.: Изд-во Московского ун-та, 1969.

3. Привалов И. И. Аналитическая геометрия. — М.: ГИТТЛ, 1956.

4. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия. — М.: Учпедгиз, 1962.

I. Векторная алгебра

1. Основные сведения

1.1. Вектором называют упорядоченную пару точек A, B, т. е. точка A — начало, точка B — конец. Обозначают $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. Длина отрезка AB называется модулем вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, или $|\vec{a}|$, или a.

Если модуль вектора равен единице, то этот единичный вектор называется орт.

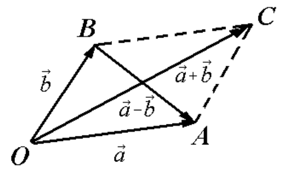
Векторы называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых.

Векторы называются компланарными, если они расположены на одной или параллельных плоскостях.

1.2. Суммой векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называют вектор, построенный следующим образом: от произвольной точки B откладывают вектор $\vec{a}_1$, от его конца A_1 откладывают вектор $\vec{a}_2$ и т. д. Точку B соединяют с точкой A_n, которая является концом вектора $\vec{a}_n$.

$$\overrightarrow{BA_n} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n.$$

В частности, если вектора два $\vec{a}$, $\vec{b}$, то $\vec{a}+\vec{b}$ совпадает с диагональю $\overrightarrow{OC}$ параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$. Сложение векторов подчиняется переместительному ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$) и сочетательному $\big((\vec{a} + \vec{b}\,) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}\,)\big)$ законам.



1.3. Под разностью $\vec{a}-\vec{b}$ двух векторов понимают такой вектор, который будучи сложенным с вектором $\vec{b}$, даст в сумме вектор $\vec{a}$, т. е. он совпадает со второй диагональю $\overrightarrow{BA}$ параллелограмма.

1.4. Под произведением $\bar{a}\lambda$ вектора $\bar{a}$ на скаляр $\lambda \neq 0$ понимают вектор $\vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

а) $|\vec{b}| = |\lambda|\,|\vec{a}|$;

б) имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$;

в) имеет направление противоположное вектору $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Удовлетворяет переместительному ($\lambda\vec{a} = \vec{a}\lambda$), сочетательному $\big(\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})\big)$, распределительным $\big((\lambda+\mu)a = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a};\ \lambda(\vec{a}+\vec{b}\,) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}\big)$ законам.

1.5. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно зависимыми, если существуют такие числа (скаляры) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, среди которых есть хотя бы одно отличное от нуля, что выполняется равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n = 0.$$

В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно независимыми.

Для того чтобы два вектора были коллинеарны необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Для того чтобы три вектора были компланарны необходимо и достаточно, чтобы они были линейно зависимы.

Любые четыре вектора линейно зависимы.

1.6. Скалярным произведением $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{b}\,)$ двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется число (скаляр) равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между векторами, т. е.

$$\vec{a}\,\vec{b} = (\vec{a}\,\vec{b}\,) = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\,).$$

Для скалярного произведения справедливы переместительный $(\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\,)$, распределительный $\big((\vec{a}+\vec{b}\,)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}\,\big)$ законы и сочетательный относительно числового множителя $\big((\lambda\vec{a}\,)\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\,\vec{b}\,)\big)$.

Поскольку $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = a^2$, то

$$a = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ является $(\vec{a}\,\vec{b}\,) = 0$.

1.7. Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b} = [\vec{a}\,\vec{b}\,]$ двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, удовлетворяющий следующим условиям:

а) $|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\,)$, т. е. площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$;

б) $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$, т. е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, содержащей векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$;

в) образует правую тройку с векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, т. е. с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ происходит против часовой стрелки.

Для векторного произведения выполняются антикоммутативный ($\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}\,$), распределительный $\big([(\vec{a}+\vec{b}\,)\vec{c}\,] = [\vec{a}\,\vec{c}\,] + [\vec{b}\,\vec{c}\,]\big)$ законы и сочетательный относительно числового множителя $\big(\lambda\vec{a}\,)\times\vec{b} = \lambda[\vec{a}\,\vec{b}\,]\big)$.

Необходимым и достаточным условием коллинеарности (линейной зависимости) двух векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ является $[\vec{a}\,\vec{b}\,] = 0$.

1.8. Смешанным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется $\big([\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,\big)$, т. е. скаляр равный объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ левая.

Отсюда следует, что $\big([\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,\big) = \big(\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]\big)$. Поэтому смешанное произведение обозначают

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \quad \text{или} \quad (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}).$$

Необходимым и достаточным условием компланарности (линейной зависимости) трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ является $(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = 0$.

1.9. Двойным векторным произведением трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называют векторы

$$\big[[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,\big] \quad \text{или} \quad \big[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]\big].$$

Для них справедливы формулы

$$\big[[\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,\big] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,) - \vec{a}\,(\vec{b}\,\vec{c}\,); \qquad \big[\vec{a}\,[\vec{b}\,\vec{c}\,]\big] = \vec{b}\,(\vec{a}\,\vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}\,\vec{b}\,).$$

1.10. Если в пространстве введена аффинная система координат с базисом $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c}(c_x, c_y, c_z)$, то

$$\begin{aligned}(\vec{a}\,\vec{b}\,) \;=\; & b_x\{a_x(\vec{e}_1\vec{e}_1) + a_y(\vec{e}_2\vec{e}_1) + a_z(\vec{e}_3,\vec{e}_1)\} + \\ & + b_y\{a_x(\vec{e}_1\vec{e}_2) + a_y(\vec{e}_2\vec{e}_2) + a_z(\vec{e}_3,\vec{e}_2)\} + \\ & + b_z\{a_x(\vec{e}_1\vec{e}_3) + a_y(\vec{e}_2\vec{e}_3) + a_z(\vec{e}_3,\vec{e}_3)\},\end{aligned}$$

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] = \begin{vmatrix} [\vec{e}_2\vec{e}_3] & [\vec{e}_3\vec{e}_1] & [\vec{e}_1\vec{e}_2] \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}(\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3),$$

В частном случае, когда система прямоугольная, то

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad [\vec{a}\,\vec{b}\,] = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \quad (\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

1.11. Литература

[1] с. 46–83

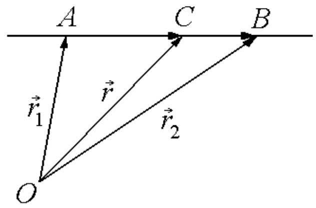
[2] с. 90–112; 121–125

[3] с. 188–216

[4] с. 37–53; 203–224

2. Примеры

2.1. Пусть две точки $A(\vec{r}_1)$, $B(\vec{r}_2)$ заданы своими радиус-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$. Проведем прямую AB и выберем на ней направление от A к B. На прямой AB возьмем произвольно точку C (не совпадающую с B). Будем говорить, что точка C делит отрезок AB в отношении $\lambda = \dfrac{AC}{CB}$, где AC и CB берутся со знаком (учитывая направление на AB). Если C между A и B, то внутренним образом; если C вне AB, то внешним образом. Найти радиус-вектор точки C.



Решение.

По условию $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$, но $\overrightarrow{AC} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{CB} = \vec{r}_2 - \vec{r}$. Тогда $\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r})$, т. е.

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda\vec{r}_2}{1+\lambda}\,, \quad \text{где} \quad \lambda \neq -1.$$

2.2. Даны четыре вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, причем векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ некомпланарны. Точка M — точка пересечения прямой OD с плоскостью ABC. Найти вектор OM.

Решение.

Поскольку $\overrightarrow{OM}$ коллинеарен $\vec{d}$, то $\overrightarrow{OM} = \lambda\vec{d}$. Тогда

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \vec{a} = \lambda\vec{d} - \vec{a}, \qquad \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{OM} - \vec{b} = \lambda\vec{d} - \vec{b}, \qquad CM = \lambda\vec{d} - \vec{c}.$$

Но эти три вектора компланарны, т. е.

$$(\lambda\vec{d} - \vec{a}\,)\cdot(\lambda\vec{d} - \vec{b}\,)\cdot(\lambda\vec{d} - \vec{c}\,) = 0.$$

Так как

$$\begin{aligned}
(\lambda\vec{d} - \vec{a}\,)\cdot(\lambda\vec{d} - \vec{b}\,)\cdot(\lambda\vec{d} - \vec{c}\,) &= \big((\lambda\vec{d} - \vec{a}\,)\times(\lambda\vec{d} - \vec{b}\,)\lambda\vec{d} - \vec{c}\,\big) = \\
&= \big(-\lambda[\vec{a}\,\vec{d}\,] - \lambda[\vec{d}\,\vec{b}\,] + [\vec{a}\,\vec{b}\,]\big)\cdot(\lambda\vec{d} - \vec{c}\,) = \\
&= \lambda([\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{d}\,) + \lambda([\vec{a}\,\vec{d}\,]\vec{c}\,) + \lambda([\vec{d}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,) - ([\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,) = \\
&= \lambda\{(\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b}\,) + (\vec{d}\,\vec{c}\,\vec{a}\,) + (\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)\} - (\vec{a}\beta\,\vec{c}\,),
\end{aligned}$$

то

$$\lambda = \frac{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)}{(\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b}\,) + (\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) + (\vec{d}\,\vec{c}\,\vec{a}\,)}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)}{(\vec{d}\,\vec{a}\,\vec{b}\,) + (\vec{d}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) + (\vec{d}\,\vec{c}\,\vec{a}\,)}\,\vec{d}.$$

2.3. Даны произвольные векторы $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\vec{n}$. Доказать, что векторы $\vec{a} = [\vec{p}\,\vec{n}\,]$, $\vec{b} = [\vec{q}\,\vec{n}\,]$, $\vec{c} = [\vec{r}\,\vec{n}\,]$ компланарны.

Решение.

$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,) = ([\vec{a}\,\vec{b}\,]\vec{c}\,) = \big(\big[[\vec{p}\,\vec{n}\,]\,[\vec{q}\,\vec{n}\,]\big][\vec{r}\,\vec{n}\,]\big) = \big(\vec{n}\,(\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{n}\,) - \vec{p}\,(\vec{n}\,\vec{q}\,\vec{n}\,)\big)\cdot[\vec{r}\,\vec{n}\,] = (\vec{p}\,\vec{q}\,\vec{n}\,)\cdot(\vec{n}\,\vec{r}\,\vec{n}\,) = 0$, т. е. доказано.

Работа №1

1) Вычислить определитель

1.1. $$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

1.2. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & y & 1 & 0 \\ 0 & -1 & y & 1 \\ 0 & 0 & -1 & x \end{vmatrix}$$

1.3. $$\begin{vmatrix} 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \\ 5^2 & 6^2 & 7^2 & 8^2 \\ 6^2 & 7^2 & 8^2 & 9^2 \\ 7^2 & 8^2 & 9^2 & (10)^2 \end{vmatrix}$$

1.4. $$\begin{vmatrix} 0 & b & 1 & d \\ b & 0 & d & 1 \\ 1 & d & 0 & b \\ d & 1 & b & 0 \end{vmatrix}$$

1.5. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & y \\ 1 & x & y & 0 \\ 0 & y & x & 1 \\ y & 0 & 1 & x \end{vmatrix}$$

1.6. $$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & d \\ d & a & 1 & 0 \\ 0 & d & a & 1 \\ 1 & 0 & d & a \end{vmatrix}$$

1.7. $$\begin{vmatrix} x & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

1.8. $$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ b & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & b \end{vmatrix}$$

1.9. $$\begin{vmatrix} 1^2 & 3^2 & 5^2 & 7^2 \\ 3^2 & 5^2 & 7^2 & 9^2 \\ 5^2 & 7^2 & 9^2 & 11^2 \\ 7^2 & 9^2 & 11^2 & 13^2 \end{vmatrix}$$

1.10. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y \\ 1 & 0 & y & x \\ x & y & 0 & 1 \\ y & x & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

1.11. $$\begin{vmatrix} 1 & b & 2 & d \\ b & 1 & d & 2 \\ 2 & d & 1 & b \\ d & 2 & b & 1 \end{vmatrix}$$

1.12. $$\begin{vmatrix} 1 & x & y & 2 \\ 2 & 1 & x & y \\ y & 2 & 1 & x \\ x & y & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

1.13. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 2a & a^2 & b^2 & c^2 \\ 3a^2 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

1.14. $$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix}$$

1.15. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & d & 0 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & b \\ d & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

1.16. $$\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 \\ (a+3)^2 & (a+4)^2 & (a+5)^2 & (a+6)^2 \end{vmatrix}$$

1.17. $\begin{vmatrix} 0 & b & c & 2 \\ b & 0 & 2 & c \\ c & 2 & 0 & b \\ 2 & c & b & 0 \end{vmatrix}$

1.18. $\begin{vmatrix} x & y & 1 & 2 \\ y & x & 2 & 1 \\ 1 & 2 & x & y \\ 2 & 1 & y & x \end{vmatrix}$

1.19. $\begin{vmatrix} a & b & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & 0 & a & b \\ b & 1 & 0 & a \end{vmatrix}$

1.20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1+y & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \end{vmatrix}$

1.21. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & b \\ a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & a & 1 \end{vmatrix}$

1.22. $\begin{vmatrix} 1^2 & 4^2 & 7^2 & 10^2 \\ 4^2 & 7^2 & 10^2 & 13^2 \\ 7^2 & 10^2 & 13^2 & 16^2 \\ 10^2 & 13^2 & 16^2 & 19^2 \end{vmatrix}$

1.23. $\begin{vmatrix} b & c & b & 0 \\ c & b & 0 & b \\ b & 0 & b & c \\ 0 & b & c & b \end{vmatrix}$

1.24. $\begin{vmatrix} x & y & 1 & y \\ y & x & y & 1 \\ 1 & y & x & y \\ y & 1 & y & x \end{vmatrix}$

1.25. $\begin{vmatrix} a & 1 & a & b \\ b & a & 1 & a \\ a & b & a & 1 \\ 1 & a & b & a \end{vmatrix}$

1.26. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$

1.27. $\begin{vmatrix} 0 & b & -1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & b \\ 0 & 1 & a & -1 \end{vmatrix}$

1.28. $\begin{vmatrix} 0 & b & b & c \\ b & c & 0 & b \\ c & b & b & 0 \\ b & 0 & c & b \end{vmatrix}$

1.29. $\begin{vmatrix} y & y & x & 1 \\ 1 & x & y & y \\ y & y & 1 & x \\ x & 1 & y & y \end{vmatrix}$

1.30. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & a \\ a & b & a & 1 \\ a & 1 & a & b \\ b & a & 1 & a \end{vmatrix}$

2) Решить систему

2.1. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 2 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 1 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-4x_4=1\\ 3x_1+7x_2-2x_3-x_4=4\\ 2x_1+5x_2+x_3+3x_4=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+x_2+10x_3+x_4-x_5=0\\ 5x_1-x_2+8x_3-2x_4+2x_5=0\\ 3x_1-3x_2-12x_3-4x_4+4x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3+4x_4=1\\ 4x_1-7x_2+2x_3+x_4=3\\ 3x_1+x_2-x_3-3x_4=1\\ 5x_1-8x_2-5x_3-10x_4=0 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3+4x_4=4\\ 2x_1-9x_2+2x_3+x_5=7\\ x_1-4x_2-x_3-4x_4+x_5=3 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_1-9x_2+21x_3-3x_4-12x_5=0\\ -4x_1+6x_2-14x_3+2x_4+8x_5=0\\ 2x_1-3x_2+7x_3-x_4-4x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-3x_2+x_3+2x_4=4\\ 2x_1-5x_2+4x_3=7\\ x_1-2x_2+3x_3+x_4=2\\ x_1-x_2+5x_3-6x_4=0 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3-2x_4=1\\ 2x_1+7x_2-4x_3-3x_4=3\\ x_1+4x_2-3x_3-x_4=2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1-x_2+2x_3-x_4+x_5=0\\ x_1+10x_2-3x_3-2x_4-x_5=0\\ 4x_1+19x_2-4x_3-5x_4-x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+4x_4=0\\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_4=1\\ 2x_1-2x_2-2x_3-2x_4=3\\ 5x_1-3x_2-7x_3-8x_4=4 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} x_1+x_2+4x_3+2x_5=0\\ 3x_1+4x_2+x_3+3x_4=1\\ 2x_1+3x_2-3x_3+3x_4-2x_5=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x_1-2x_2+9x_3-4x_4-x_5=0\\ x_1+4x_2+2x_3+2x_4-5x_5=0\\ 6x_1+2x_2+11x_3-2x_4-6x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0\\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1\\ 2x_1-2x_2-x_3+4x_4=0\\ 3x_1-4x_2-4x_3+8x_4=5 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0\\ 2x_1-3x_2+x_3+4x_4=1\\ 3x_1-5x_2+3x_3+7x_4=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 12x_1-x_2+7x_3+11x_4-x_5=0\\ 24x_1-2x_2+14x_3+22x_4-2x_5=0\\ x_1+x_2+x_3-x_4+2x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=0\\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1\\ 2x_1-3x_2-x_3+3x_4=2\\ 3x_1-4x_2-4x_3+8x_4=1 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_5=1\\ 2x_1-x_2-3x_3-3x_4+2x_5=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4-5x_5=0\\ x_1+3x_2-x_3+6x_4-x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_4=2\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5\\ 2x_1-5x_2-3x_3+x_4=2\\ 3x_1-7x_2-10x_3-5x_4=2 \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0\\ 3x_1-5x_2+x_3+4x_4=1\\ 2x_1-3x_2-x_3+x_4=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1+3x_2+3x_3-3x_4-x_5=0\\ x_1+6x_2-x_3+x_4+2x_5=0\\ x_1+16x_2-6x_3+6x_4+7x_5=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3+3x_4=0\\ 2x_1-3x_2+x_3=1\\ 3x_1-5x_2+x_3+3x_4=2\\ x_1-5x_3-9x_4=1 \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} x_1-3x_2+4x_3+3x_5=2\\ 3x_1-8x_2+x_3+2x_4=5\\ 2x_1-5x_2-3x_3+2x_4-3x_5=3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4-x_5=0\\ x_1+x_2+2x_3-x_4+x_5=0\\ 2x_1+3x_2+x_3=0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1-x_2+4x_3+3x_4=0\\ 3x_1-2x_2+x_3+2x_4=1\\ 2x_1+x_2-3x_3-x_4=2\\ 3x_1-x_2-10x_3-5x_4=3 \end{cases}$

2.11. $$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 0 \end{cases}$$

2.12. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_5 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 = 6 \end{cases}$$

2.13. $$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 3 \end{cases}$$

2.14. $$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 10x_4 = 0 \end{cases}$$

2.15. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 4 \end{cases}$$

2.16. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 - x_5 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 1 \end{cases}$$

2.17. $$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 10x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 5x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 0 \end{cases}$$

2.18. $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 = 9 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 - 10x_4 = 1 \end{cases}$$

2.19. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 - x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 34x_3 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 5x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 + x_5 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 2 \\ 5x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_5 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

2.23. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0 \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - 7x_2 - 10x_3 + 4x_4 = 1 \end{cases}$

2.24. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_5 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 0 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$

2.26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 1 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \\ x_1 - 5x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$

2.28. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 + 3x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 5x_2 - 5x_3 = 2 \end{cases}$

2.29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 2x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 - 4x_4 = 2 \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 1 \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_5 = 2 \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 1 \\ 3x_1 + 7x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 10x_4 = 5 \end{cases}$

3) Пусть $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{AX} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{BX} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_2 \\ 2\boldsymbol{x}_3 \\ \boldsymbol{x}_1 \end{pmatrix}$, где $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ — постоянные матрицы. Найти

3.1. ABX	3.2. A^2X	3.3. $(A^2 - B)X$
3.4. B^4X	3.5. B^2X	3.6. $(2A + 3B^2)X$
3.7. $(A^2 + B^2)X$	3.8. $(B^2 + A)X$	3.9. BAX
3.10. $B(2A - B)X$	3.11. $A(2B - A)X$	3.12. $2(AB + 2A)X$
3.13. $(A - B)^2$	3.14. $(B - 2A^2)X$	3.15. BA^2X
3.16. $(3A^2 + B)X$	3.17. $(A^2 + B)X$	3.18. $(A^2 - B^2)X$
3.19. $(2B - A^2)X$	3.20. B^3X	3.21. $(B^2 - 2A)X$
3.22. $\big(A(B + A)\big)X$	3.23. $(AB^2)X$	3.24. $\big(A(B - A)\big)X$
3.25. $2(B + 2A^2 + B^2)X$	3.26. $\big((A - B)\big)X$	3.27. $(3B + 2A^2)X$
3.28. $\big(B(A + B)\big)X$	3.29. $(A + BA - B)X$	3.30. $(3B + 2A^2)X$

4) Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ неколлинеарны?

4.1. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 4\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$	4.2. $\vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b}$
4.3. $\vec{c}_1 = 5\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - \vec{b}$	4.4. $\vec{c}_1 = 4\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 8\vec{a} - \vec{b}$
4.5. $\vec{c}_1 = \vec{b} - 2\vec{a}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$	4.6. $\vec{c}_1 = \vec{a} + \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{a} + 2\vec{b}$
4.7. $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$	4.8. $\vec{c}_1 = 6\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$
4.9. $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 9\vec{b}$; $\vec{c}_2 = -\vec{a} - 3\vec{b}$	4.10. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - 6\vec{a}$

4.11. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{b} - \vec{a}$

4.12. $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$

4.13. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

4.14. $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$

4.15. $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$

4.16. $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{b} - \vec{a}$

4.17. $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 10\vec{a}$

4.18. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 2\vec{b} - 4\vec{a}$

4.19. $\vec{c}_1 = 4\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$

4.20. $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 2\vec{a}$

4.21. $\vec{c}_1 = 3\vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 5\vec{a} - 7\vec{b}$

4.22. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$

4.23. $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{b} - 6\vec{a}$

4.24. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - \vec{b}$; $\vec{c}_2 = 3\vec{a} + 5\vec{b}$

4.25. $\vec{c}_1 = 3\vec{a} - 4\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 12\vec{b} - 9\vec{a}$

4.26. $\vec{c}_1 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$

4.27. $\vec{c}_1 = 4\vec{b} - 3\vec{a}$; $\vec{c}_2 = 4\vec{a} - 3\vec{b}$

4.28. $\vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}$; $\vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$

4.29. $\vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 6\vec{b} - 2\vec{a}$

4.30. $\vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}$; $\vec{c}_2 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$

5) Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	p	q	$\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)$	№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	p	q	$\left(\widehat{\vec{p},\vec{q}}\right)$
5.1.	$\vec{p}+2\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$	5.2.	$3\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-2\vec{q}$	4	1	$\frac{\pi}{4}$
5.3.	$\vec{p}-3\vec{q}$	$\vec{p}+2\vec{q}$	$\frac{1}{5}$	1	$\frac{\pi}{2}$	5.4.	$3\vec{p}-2\vec{q}$	$\vec{p}+5\vec{q}$	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
5.5.	$\vec{p}-2\vec{q}$	$2\vec{p}+2\vec{q}$	2	3	$\frac{3\pi}{4}$	5.6.	$\vec{p}+3\vec{q}$	$\vec{p}-2\vec{q}$	2	3	$\frac{\pi}{3}$
5.7.	$2\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+3\vec{q}$	3	2	$\frac{\pi}{2}$	5.8.	$4\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-\vec{q}$	7	2	$\frac{\pi}{4}$
5.9.	$\vec{p}-4\vec{q}$	$3\vec{p}+\vec{q}$	1	2	$\frac{\pi}{6}$	5.10.	$\vec{p}+4\vec{q}$	$2\vec{p}-\vec{q}$	7	2	$\frac{\pi}{3}$
5.11.	$3\vec{p}+2\vec{q}$	$\vec{p}-\vec{q}$	10	1	$\frac{\pi}{2}$	5.12.	$4\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+2\vec{q}$	5	4	$\frac{\pi}{4}$
5.13.	$2\vec{p}+3\vec{q}$	$\vec{p}-2\vec{q}$	6	7	$\frac{\pi}{3}$	5.14.	$3\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+2\vec{q}$	3	4	$\frac{\pi}{3}$
5.15.	$2\vec{p}+3\vec{q}$	$\vec{p}-2\vec{q}$	2	3	$\frac{\pi}{4}$	5.16.	$2\vec{p}-3\vec{q}$	$3\vec{p}+\vec{q}$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.17.	$5\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-3\vec{q}$	1	2	$\frac{\pi}{3}$	5.18.	$7\vec{p}-2\vec{q}$	$\vec{p}+3\vec{q}$	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{\pi}{2}$
5.19.	$6\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+\vec{q}$	3	4	$\frac{\pi}{4}$	5.20.	$10\vec{p}+\vec{q}$	$3\vec{p}-2\vec{q}$	4	1	$\frac{\pi}{6}$
5.21.	$6\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+2\vec{q}$	8	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	5.22.	$3\vec{p}+4\vec{q}$	$\vec{q}-\vec{p}$	$\frac{5}{2}$	2	$\frac{\pi}{2}$
5.23.	$\vec{p}+3\vec{q}$	$3\vec{p}-\vec{q}$	3	5	$\frac{2\pi}{3}$	5.24.	$3\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-3\vec{q}$	7	2	$\frac{\pi}{4}$
5.25.	$5\vec{p}-\vec{q}$	$\vec{p}+\vec{q}$	5	3	$\frac{5\pi}{6}$	5.26.	$3\vec{p}-4\vec{q}$	$\vec{p}+3\vec{q}$	2	3	$\frac{\pi}{4}$
5.27.	$7\vec{p}+\vec{q}$	$\vec{p}-3\vec{q}$	3	1	$\frac{3\pi}{4}$	5.28.	$6\vec{p}-\vec{q}$	$5\vec{q}+\vec{p}$	$\frac{1}{2}$	4	$\frac{5\pi}{6}$
5.29.	$2\vec{p}+3\vec{q}$	$\vec{p}-2\vec{q}$	2	1	$\frac{\pi}{3}$	5.30.	$2\vec{p}-3\vec{q}$	$5\vec{p}+\vec{q}$	2	3	$\frac{\pi}{2}$

6) Решить задачи

6.1. В параллелепипеде известны длины ребер $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и углы $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Найти длину диагонали OD параллелепипеда и углы между диагональю OD и ребрами OA, OB, OC.

6.2. Вычислить внутренние двугранные углы трехгранного угла, плоские углы которого α, β, γ.

6.3. Доказать тождество

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,] \cdot [\vec{x}\,\vec{y}\,] = (\vec{a}\,\vec{x}\,)(\vec{b}\,\vec{y}\,) - (\vec{a}\,\vec{y}\,)(\vec{b}\,\vec{x}\,).$$

6.4. Найти векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если известно:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \neq \vec{0} \\ (\vec{x}\,\vec{y}\,) = p \\ [\vec{x}\,\vec{y}\,] = \vec{b} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

причем $(\vec{a}\,\vec{b}\,) = 0$ и $a^4 < 4(b^2 + pa^2)$.

6.5. Даны три вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Пусть H — проекция точки C на плоскость AOB. Найти вектор $\overrightarrow{CH}$.

6.6. Доказать тождество

$$\big[[\vec{a}\,\vec{b}\,][\vec{x}\,\vec{y}\,]\big] = \vec{x}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{y}\,) - \vec{y}(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{x}\,) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{x}\,\vec{y}\,) - \vec{a}(\vec{b}\,\vec{x}\,\vec{y}\,).$$

6.7. Доказать тождество

$$(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,)(\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}\,) = \begin{vmatrix} (\vec{a}\,\vec{x}\,) & (\vec{a}\,\vec{y}\,) & (\vec{a}\,\vec{z}\,) \\ (\vec{b}\,\vec{x}\,) & (\vec{b}\,\vec{y}\,) & (\vec{b}\,\vec{z}\,) \\ (\vec{c}\,\vec{x}\,) & (\vec{c}\,\vec{y}\,) & (\vec{c}\,\vec{z}\,) \end{vmatrix}.$$

6.8. Найти векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если известно:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \neq \vec{0} \\ (\vec{x}\,\vec{y}\,) = p \\ [\vec{x}\,\vec{y}\,] = \vec{b} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

причем $(\vec{a}\,\vec{b}\,) = 0$ и $a^4 = 4(b^2 + pa^2)$.

6.9. Даны два неколлинеарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Окружность с центром в точке S касается прямых OB и OA, причем с прямой OA касается в точке A. Найти вектор $\overrightarrow{OS}$.

6.10. Даны три компланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Пусть M — точка пересечения прямых AB и OC. Найти вектор $\overrightarrow{OM}$.

6.11. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Пусть S — центр сферы, проходящей через точки O, A, B, C. Найти вектор $\overrightarrow{OS}$.

6.12. Даны три вектора $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, причем $\vec{b}$ и $\vec{c}$ неколлинеарны. Пусть H — проекция точки A на плоскость BOC. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$.

6.13. Найти векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если известно:

$$\begin{cases} \vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \neq \vec{0} \\ (\vec{x}\,\vec{y}\,) = p \\ [\vec{x}\,\vec{y}\,] = \vec{b} \neq \vec{0}, \end{cases}$$

причем $(\vec{a}\,\vec{b}\,) = 0$ и $a^4 > 4(b^2 + pa^2)$.

6.14. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющий одновременно двум уравнениям

$$(\vec{x}\,\vec{a}\,) = \alpha; \quad [\vec{x}\,\vec{b}\,] = \vec{c},$$

где $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, α — данные величины, причем $\vec{c} \perp \vec{b}$, $(\vec{a}\,\vec{b}\,) \neq 0$.

6.15. Доказать тождество

$$[\vec a\,\vec c](\vec b\,\vec d) - [\vec a\,\vec d](\vec b\,\vec c) = \vec b(\vec a\,\vec c\,\vec d) - (\vec a\,\vec b)[\vec c\,\vec d].$$

6.16. Найти вектор $\vec x$, если известно

$$\begin{cases} (\vec x\,\vec a) = \alpha \\ (\vec x\,\vec b) = \beta \\ (\vec x\,\vec c) = \gamma, \end{cases}$$

где $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, α, β, γ — известные величины, $(\vec a\,\vec b\,\vec c) \neq 0$.

6.17. Найти угол между векторами $\vec a$ и $\vec b$, если
вектор $\vec a + 3\vec b$ перпендикулярен вектору $7\vec a - 5\vec b$;
вектор $\vec a - 4\vec b$ перпендикулярен вектору $7\vec a - 2\vec b$.

6.18. Доказать тождество

$$[\vec a\,\vec b] \cdot [\vec b\,\vec c] \cdot [\vec c\,\vec a] = (\vec a\,\vec b\,\vec c)^2.$$

6.19. Доказать, что если $\vec x$ удовлетворяет уравнениям $[\vec a_1\,\vec x] = \vec b_1$, $[\vec a_2\,\vec x] = \vec b_2$, то $(\vec a_1\,\vec b_2) + (\vec a_2\,\vec b_1) = 0$.

6.20. При каком взаимном расположении ненулевых векторов $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ справедливо равенство

$$\big[\vec a\,[\vec b\,\vec c]\big] = \big[[\vec a\,\vec b]\vec c\big]?$$

6.21. Доказать тождество

$$[\vec a\,\vec b]^2[\vec a\,\vec c]^2 - \big([\vec a\,\vec b][\vec a\,\vec c]\big)^2 = a^2(\vec a\,\vec b\,\vec c)^2.$$

6.22. Доказать тождество

$$\big((\vec a + \vec b)(\vec b + \vec c)(\vec c + \vec a)\big) = 2(\vec a\,\vec b\,\vec c).$$

6.23. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \vec a$, $\overrightarrow{OB} = \vec b$, $\overrightarrow{OC} = \vec c$. Доказать, что плоскость, проходящая через точки A, B, C, перпендикулярна вектору $[\vec a\,\vec b] + [\vec b\,\vec c] + [\vec c\,\vec a]$.

6.24. Доказать тождество

$$\big[[\vec a\,\vec b]\,[\vec b\,\vec c]\big] \cdot \big[[\vec b\,\vec c]\,[\vec c\,\vec a]\big] \cdot \big[[\vec c\,\vec a]\,[\vec a\,\vec b]\big] = (\vec a\,\vec b\,\vec c)^4.$$

6.25. Векторы $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, $\vec d$ связаны соотношениями $[\vec a\,\vec b] = [\vec c\,\vec d]$, $[\vec a\,\vec c] = [\vec b\,\vec d]$. Доказать коллинеарность векторов $\vec a - \vec d$, $\vec b - \vec c$.

6.26. Доказать тождество

$$[\vec a\,\vec b]\,[\vec c\,\vec d] + [\vec a\,\vec c]\,[\vec d\,\vec b] + [\vec a\,\vec d]\,[\vec b\,\vec c] = 0.$$

6.27. Доказать тождество

$$(\vec a\,\vec b)\,[\vec c\,\vec d] + (\vec a\,\vec c)\,[\vec d\,\vec b] + (\vec a\,\vec d)\,[\vec b\,\vec c] = \vec a\,(\vec b\,\vec c\,\vec d).$$

6.28. Доказать, что

$$\Big[\vec a\,\Big[\vec a\,\big[\vec a\,[\vec a\,\vec b]\big]\Big]\Big] = a^4\vec b, \quad \text{если} \quad \vec a \perp \vec b.$$

6.29. В $\triangle\, ABC$: $AC = b$, $AB = c$, $\angle BAC = \alpha$. Найти длину биссектрисы AD.

6.30. Доказать тождество

$$(\vec a\,\vec b\,\vec c)(\vec a\,\vec x\,\vec y) = \begin{vmatrix} (\vec a\,\vec b\,\vec x) & (\vec a\,\vec b\,\vec y) \\ (\vec a\,\vec c\,\vec x) & (\vec a\,\vec c\,\vec y) \end{vmatrix}.$$

Работа №2

1) Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $(\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, если $\vec{x}$ задан в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$

1.1. $\vec{x} = \{6, -1, 3\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

1.2. $\vec{x} = \{1, 2, 4\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{3}{2}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

1.3. $\vec{x} = \{1, 3, 6\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{4}{3}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.4. $\vec{x} = \{2, 4, 1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{3}{2}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.5. $\vec{x} = \{6, 3, 1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{4}{3}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.6. $\vec{x} = \{1, 4, 8\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{5}{4}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.7. $\vec{x} = \{8, 4, 1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{5}{4}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.8. $\vec{x} = \{2, 5, 10\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 6\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{6}{5}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.9. $\vec{x} = \{10, 5, 1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{5}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.10. $\vec{x} = \{1, 6, 12\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 7\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{7}{6}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.11. $\vec{x} = \{-12, 6, 1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \dfrac{7}{6}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = 7\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.12. $\vec{x} = \{-1, 7, 14\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{8}{7}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.13. $\vec{x} = \{-3, 2, 4\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{1}{2}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.14. $\vec{x} = \{2, 4, 3\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{1}{2}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.15. $\vec{x} = \{2, 6, 3\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{2}{3}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.16. $\vec{x} = \{12, 3, -1\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{2}{3}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.17. $\vec{x} = \{1, -4, 8\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{3}{4}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.18. $\vec{x} = \{1, 4, -8\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 3\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{3}{4}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.19. $\vec{x} = \{7, -5, 10\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{4}{5}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.20. $\vec{x} = \{5, -5, 4\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{4}{5}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.21. $\vec{x} = \{1, -6, 6\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 5\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{5}{6}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.22. $\vec{x} = \{6, 6, 2\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{5}{6}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -5\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.23. $\vec{x} = \{1, 7, -7\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 6\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{6}{7}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.24. $\vec{x} = \{7, 7, 2\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{6}{7}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -6\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.25. $\vec{x} = \{3, -8, 8\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 7\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{7}{8}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.26. $\vec{x} = \{1, -9, 9\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 8\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{8}{9}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.27. $\vec{x} = \{9, 9, 2\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{8}{9}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -8\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.28. $\vec{x} = \{3, -10, 10\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - 9\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{9}{10}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.29. $\vec{x} = \{10, 10, 7\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \dfrac{9}{10}\,\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = -9\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

1.30. $\vec{x} = \{1, 9, 18\}$
$$\begin{cases} \vec{e}_1' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 10\vec{e}_3 \\ \vec{e}_2' = \dfrac{10}{9}\,\vec{e}_1 - \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3' = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

2) Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$

№	$\vec{x}$	$\vec{p}$	$\vec{q}$	$\vec{r}$
2.1.	$\{-2, 4, 7\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{1, 0, 1\}$	$\{-1, 2, 4\}$
2.2.	$\{6, 12, -1\}$	$\{1, 3, 0\}$	$\{2, -1, 1\}$	$\{0, -1, 2\}$
2.3.	$\{1, -4, 4\}$	$\{2, 1, -1\}$	$\{0, 3, 2\}$	$\{1, -1, 1\}$
2.4.	$\{-9, 5, 5\}$	$\{4, 1, 1\}$	$\{2, 0, -3\}$	$\{-1, 2, 1\}$
2.5.	$\{-5, -5, 5\}$	$\{-2, 0, 1\}$	$\{1, 3, -1\}$	$\{0, 4, 1\}$
2.6.	$\{13, 2, 7\}$	$\{5, 1, 0\}$	$\{2, -1, 3\}$	$\{1, 0, -1\}$
2.7.	$\{-19, -1, 7\}$	$\{0, 1, 1\}$	$\{-2, 0, 1\}$	$\{3, 1, 0\}$
2.8.	$\{3, -3, 4\}$	$\{1, 0, 2\}$	$\{0, 1, 1\}$	$\{2, -1, 4\}$
2.9.	$\{3, 3, -1\}$	$\{3, 1, 0\}$	$\{-1, 2, 1\}$	$\{-1, 0, 2\}$
2.10.	$\{-1, 7, -4\}$	$\{-1, 2, 1\}$	$\{2, 0, 3\}$	$\{1, 1, -1\}$
2.11.	$\{6, 5, -14\}$	$\{1, 1, 4\}$	$\{0, -3, 2\}$	$\{2, 1, -1\}$
2.12.	$\{6, -1, 7\}$	$\{1, -2, 6\}$	$\{-1, 1, 3\}$	$\{1, 0, 4\}$
2.13.	$\{5, 15, 0\}$	$\{1, 0, 5\}$	$\{-1, 3, 2\}$	$\{0, -1, 1\}$
2.14.	$\{2, -1, 11\}$	$\{1, 1, 0\}$	$\{0, 1, -2\}$	$\{1, 0, 3\}$
2.15.	$\{11, 5, -3\}$	$\{1, 0, 2\}$	$\{-1, 0, 1\}$	$\{2, 5, 3\}$
2.16.	$\{8, 0, 5\}$	$\{2, 0, 1\}$	$\{1, 1, 0\}$	$\{4, 1, 2\}$
2.17.	$\{3, 1, 8\}$	$\{0, 1, 3\}$	$\{1, 2, -1\}$	$\{2, 0, -1\}$
2.18.	$\{8, 1, 12\}$	$\{1, 2, -1\}$	$\{3, 0, 2\}$	$\{-1, 1, 1\}$
2.19.	$\{-9, -8, -3\}$	$\{1, 4, 1\}$	$\{-3, 2, 0\}$	$\{1, -1, 2\}$
2.20.	$\{-5, 9, -13\}$	$\{0, 1, -2\}$	$\{3, -1, 1\}$	$\{4, 1, 0\}$
2.21.	$\{-15, 5, 6\}$	$\{0, 5, 1\}$	$\{3, 2, -1\}$	$\{-1, 1, 0\}$
2.22.	$\{8, 9, 4\}$	$\{1, 0, 1\}$	$\{0, -2, 1\}$	$\{1, 3, 0\}$
2.23.	$\{23, -14, -30\}$	$\{2, 1, 0\}$	$\{1, -1, 0\}$	$\{-3, 2, 5\}$
2.24.	$\{3, 1, 3\}$	$\{2, 1, 0\}$	$\{1, 0, 1\}$	$\{4, 2, 1\}$
2.25.	$\{-1, 7, 0\}$	$\{0, 3, 1\}$	$\{1, -1, 2\}$	$\{2, -1, 0\}$
2.26.	$\{11, -1, 4\}$	$\{1, -1, 2\}$	$\{3, 2, 0\}$	$\{-1, 1, 0\}$
2.27.	$\{-13, 2, 18\}$	$\{1, 1, 4\}$	$\{-3, 0, 2\}$	$\{1, 2, -1\}$
2.28.	$\{0, -8, 9\}$	$\{0, -2, 1\}$	$\{3, 1, -1\}$	$\{4, 0, 1\}$
2.29.	$\{8, -7, -13\}$	$\{0, 1, 5\}$	$\{3, -1, 2\}$	$\{-1, 0, 1\}$
2.30.	$\{2, 7, 5\}$	$\{1, 0, 1\}$	$\{1, -2, 0\}$	$\{0, 3, 1\}$

3) Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (система координат прямоугольная)

3.1. $A(1,-2,3)$, $B(0,-1,2)$, $C(3,-4,5)$

3.2. $A(0,-3,6)$, $B(-12,-3,-3)$, $C(-9,-3,-6)$

3.3. $A(3,3,-1)$, $B(5,5,-2)$, $C(4,1,1)$

3.4. $A(-1,2,-3)$, $B(3,4,-6)$, $C(1,1,-1)$

3.5. $A(-4,-2,0)$, $B(-1,-2,4)$, $C(3,-2,1)$

3.6. $A(5,3,-1)$, $B(5,2,0)$, $C(6,4,-1)$

3.7. $A(-3,-7,-5)$, $B(0,-1,-2)$, $C(2,3,0)$

3.8. $A(2,-4,6)$, $B(0,-2,4)$, $C(6,-8,10)$

3.9. $A(0,1,-2)$, $B(3,1,2)$, $C(4,1,1)$

3.10. $A(3,3,-1)$, $B(1,5,-2)$, $C(4,1,1)$

3.11. $A(2,1,-1)$, $B(6,-1,-4)$, $C(4,2,1)$

3.12. $A(-1,-2,1)$, $B(-4,-2,5)$, $C(-8,-2,2)$

3.13. $A(6,2,-3)$, $B(6,3,-2)$, $C(7,3,-3)$

3.14. $A(0,0,4)$, $B(-3,-6,1)$, $C(-5,-10,-1)$

3.15. $A(2,-8,-1)$, $B(4,-6,0)$, $C(-2,-5,-1)$

3.16. $A(3,-6,9)$, $B(0,-3,6)$, $C(9,-12,15)$

3.17. $A(0,2,-4)$, $B(8,2,2)$, $C(6,2,4)$

3.18. $A(3,3,-1)$, $B(5,1,-2)$, $C(4,1,1)$

3.19. $A(-4,3,0)$, $B(0,1,3)$, $C(-2,4,-2)$

3.20. $A(1,-1,0)$, $B(-2,-1,4)$, $C(8,-1,1)$

3.21. $A(7,0,2)$, $B(7,1,3)$, $C(8,-1,2)$

3.22. $A(2,3,2)$, $B(-1,-3,-1)$, $C(-3,-7,-3)$

3.23. $A(2,2,7)$, $B(0,0,6)$, $C(-2,5,7)$

3.24. $A(-1,2,-3)$, $B(0,1,-2)$, $C(-3,4,-5)$

3.25. $A(0,3,-6)$, $B(9,3,6)$, $C(12,3,3)$

3.26. $A(3,3,-1)$, $B(5,1,-2)$, $C(4,1,-3)$

3.27. $A(-2,1,1)$, $B(2,3,-2)$, $C(0,0,3)$

3.28. $A(1,4,-1)$, $B(-2,4,-5)$, $C(8,4,0)$

3.29. $A(0,1,0)$, $B(0,2,1)$, $C(1,2,0)$

3.30. $A(-4,0,4)$, $B(-1,6,7)$, $C(1,10,9)$

4) Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$?

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
4.1.	$\{2,3,1\}$	$\{-1,0,-1\}$	$\{2,2,2\}$
4.2.	$\{3,2,1\}$	$\{2,3,4\}$	$\{3,1,-1\}$
4.3.	$\{1,5,2\}$	$\{-1,1,-1\}$	$\{1,1,1\}$
4.4.	$\{1,1,-3\}$	$\{3,2,1\}$	$\{2,3,4\}$
4.5.	$\{3,3,1\}$	$\{1,-2,1\}$	$\{1,1,1\}$
4.6.	$\{3,1,-1\}$	$\{-2,-1,0\}$	$\{5,2,-1\}$
4.7.	$\{4,3,1\}$	$\{1,-2,1\}$	$\{2,2,2\}$
4.8.	$\{4,3,1\}$	$\{6,7,4\}$	$\{2,0,-1\}$
4.9.	$\{3,2,1\}$	$\{1,-3,-7\}$	$\{1,2,3\}$
4.10.	$\{3,7,2\}$	$\{-2,0,-1\}$	$\{2,2,1\}$
4.11.	$\{1,-2,6\}$	$\{1,0,1\}$	$\{2,-6,17\}$
4.12.	$\{6,3,4\}$	$\{-1,-2,-1\}$	$\{2,1,2\}$
4.13.	$\{7,3,4\}$	$\{-1,-2,-1\}$	$\{4,2,4\}$
4.14.	$\{2,3,2\}$	$\{4,7,5\}$	$\{2,0,-1\}$
4.15.	$\{5,3,4\}$	$\{-1,0,-1\}$	$\{4,2,4\}$
4.16.	$\{3,10,5\}$	$\{-2,-2,-3\}$	$\{2,4,3\}$
4.17.	$\{-2,-4,-3\}$	$\{4,3,1\}$	$\{6,7,4\}$
4.18.	$\{3,1,-1\}$	$\{1,0,-1\}$	$\{8,3,-2\}$
4.19.	$\{4,2,2\}$	$\{-3,-3,-3\}$	$\{2,1,2\}$
4.20.	$\{4,1,2\}$	$\{9,2,5\}$	$\{1,1,-1\}$
4.21.	$\{5,3,4\}$	$\{4,3,3\}$	$\{9,5,8\}$
4.22.	$\{3,4,2\}$	$\{1,1,0\}$	$\{8,11,6\}$
4.23.	$\{4,-1,-6\}$	$\{1,-3,-7\}$	$\{2,-1,-4\}$
4.24.	$\{3,1,0\}$	$\{-5,-4,-5\}$	$\{4,2,4\}$
4.25.	$\{3,0,3\}$	$\{8,1,6\}$	$\{1,1,-1\}$
4.26.	$\{1,-1,4\}$	$\{1,0,3\}$	$\{1,-3,8\}$
4.27.	$\{6,3,4\}$	$\{-1,-2,-1\}$	$\{2,1,2\}$
4.28.	$\{4,1,1\}$	$\{-9,-4,-9\}$	$\{6,2,6\}$
4.29.	$\{-3,3,3\}$	$\{-4,7,6\}$	$\{3,0,-1\}$
4.30.	$\{-7,10,-5\}$	$\{0,-2,-1\}$	$\{-2,4,-1\}$

5) Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$ (система координат прямоугольная)

№	A_1	A_2	A_3	A_4
5.1.	$(1, 3, 6)$	$(2, 2, 1)$	$(-1, 0, 1)$	$(-4, 6, -3)$
5.2.	$(-4, 2, 6)$	$(2, -3, 0)$	$(-10, 5, 8)$	$(-5, 4, -4)$
5.3.	$(7, 2, 4)$	$(7, -1, -2)$	$(3, 3, 1)$	$(-4, 2, 1)$
5.4.	$(2, 1, 4)$	$(-1, 5, -2)$	$(-7, -3, 2)$	$(-6, -3, -6)$
5.5.	$(-1, -5, 2)$	$(-6, 0, -3)$	$(3, 6, -3)$	$(-10, 6, 7)$
5.6.	$(0, -1, -1)$	$(-2, 3, 5)$	$(1, -5, -9)$	$(-1, -6, 3)$
5.7.	$(5, 2, 0)$	$(2, 5, 0)$	$(1, 2, 4)$	$(-1, 1, 1)$
5.8.	$(2, -1, -2)$	$(1, 2, 1)$	$(5, 0, -6)$	$(-10, 9, -7)$
5.9.	$(-2, 0, -4)$	$(-1, 7, 1)$	$(4, -8, -4)$	$(1, -4, 6)$
5.10.	$(14, 4, 5)$	$(-5, -3, 2)$	$(-2, -6, -3)$	$(-2, 2, -1)$
5.11.	$(1, 2, 0)$	$(3, 0, -3)$	$(5, 2, 6)$	$(8, 4, -9)$
5.12.	$(2, -1, 2)$	$(1, 2, -1)$	$(3, 2, 1)$	$(-4, 2, 5)$
5.13.	$(1, 1, 2)$	$(-1, 1, 3)$	$(2, -2, 4)$	$(-1, 0, -2)$
5.14.	$(2, 3, 1)$	$(4, 1, -2)$	$(6, 3, 7)$	$(7, 5, -3)$
5.15.	$(1, 1, -1)$	$(2, 3, 1)$	$(3, 2, 1)$	$(5, 9, -8)$
5.16.	$(1, 5, -7)$	$(-3, 6, 3)$	$(-2, 7, 3)$	$(-4, 8, -12)$
5.17.	$(-3, 4, -7)$	$(1, 5, -4)$	$(-5, -2, 0)$	$(2, 5, 4)$
5.18.	$(-1, 2, -3)$	$(4, -1, 0)$	$(2, 1, -2)$	$(3, 4, 5)$
5.19.	$(4, -1, 3)$	$(-2, 1, 0)$	$(0, -5, 1)$	$(3, 2, -5)$
5.20.	$(1, -1, 1)$	$(-2, 0, 3)$	$(2, 1, -1)$	$(2, -2, -4)$
5.21.	$(1, 2, 0)$	$(1, -1, 2)$	$(0, 1, -1)$	$(-3, 0, 1)$
5.22.	$(1, 0, 2)$	$(1, 2, -1)$	$(2, -2, 1)$	$(2, 1, 0)$
5.23.	$(1, 2, -3)$	$(1, 0, 1)$	$(-2, -1, 6)$	$(0, -5, -4)$
5.24.	$(3, 10, -1)$	$(-2, 3, -5)$	$(-6, 0, -3)$	$(1, -1, 2)$
5.25.	$(-1, 2, 4)$	$(-1, -2, -4)$	$(3, 0, -1)$	$(7, -3, 1)$
5.26.	$(0, -3, 1)$	$(-4, 1, 2)$	$(2, -1, 5)$	$(3, 1, -4)$
5.27.	$(1, 3, 0)$	$(4, -1, 2)$	$(3, 0, 1)$	$(-4, 3, 5)$
5.28.	$(-2, -1, -1)$	$(0, 3, 2)$	$(3, 1, -4)$	$(-4, 7, 3)$
5.29.	$(-3, -5, 6)$	$(2, 1, -4)$	$(0, -3, -1)$	$(-5, 2, -8)$
5.30.	$(2, -4, -3)$	$(5, -6, 0)$	$(-1, 3, -3)$	$(-10, -8, 7)$

6) Исследовать на линейную зависимость систему трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

№	$\vec{a}$	$\vec{b}$	$\vec{c}$
6.1.	$\{1,4,6\}$	$\{1,-1,1\}$	$\{1,1,3\}$
6.2.	$\{2,-3,1\}$	$\{3,-1,5\}$	$\{1,-4,3\}$
6.3.	$\{5,4,3\}$	$\{3,3,2\}$	$\{8,1,3\}$
6.4.	$\{1,1,1\}$	$\{0,1,1\}$	$\{0,0,1\}$
6.5.	$\{1,-1,2\}$	$\{-1,1,-1\}$	$\{2,-1,1\}$
6.6.	$\{1,2,3\}$	$\{4,5,6\}$	$\{7,8,9\}$
6.7.	$\{1,1,1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{1,3,6\}$
6.8.	$\{3,4,-5\}$	$\{8,7,-2\}$	$\{2,-1,8\}$
6.9.	$\{3,2,-4\}$	$\{4,1,-2\}$	$\{5,2,-3\}$
6.10.	$\{0,1,1\}$	$\{1,0,1\}$	$\{1,1,0\}$
6.11.	$\{5,-6,1\}$	$\{3,-5,-2\}$	$\{2,-1,3\}$
6.12.	$\{7,1,-3\}$	$\{2,2,-4\}$	$\{3,-3,5\}$
6.13.	$\{1,2,3\}$	$\{6,5,9\}$	$\{7,8,9\}$
6.14.	$\{2,1,0\}$	$\{-5,0,3\}$	$\{3,6,3\}$
6.15.	$\{2,0,2\}$	$\{1,-1,0\}$	$\{0,-1,-2\}$
6.16.	$\{-2,1,5\}$	$\{4,-3,0\}$	$\{0,-1,10\}$
6.17.	$\{3,1,2\}$	$\{4,-1,6\}$	$\{0,5,8\}$
6.18.	$\{-1,3,7\}$	$\{2,5,1\}$	$\{3,0,2\}$
6.19.	$\{2,1,5\}$	$\{3,-1,4\}$	$\{-3,3,1\}$
6.20.	$\{2,1,0\}$	$\{-1,2,1\}$	$\{-3,0,8\}$
6.21.	$\{1,6,2\}$	$\{-3,2,1\}$	$\{0,5,4\}$
6.22.	$\{0,1,-2\}$	$\{3,5,2\}$	$\{-3,1,1\}$
6.23.	$\{2,-1,-3\}$	$\{3,6,9\}$	$\{2,0,8\}$
6.24.	$\{3,-1,0\}$	$\{6,5,4\}$	$\{2,1,0\}$
6.25.	$\{0,8,3\}$	$\{-2,5,1\}$	$\{9,0,1\}$
6.26.	$\{1,3,5\}$	$\{2,4,-2\}$	$\{3,1,6\}$
6.27.	$\{2,1,1\}$	$\{3,2,1\}$	$\{7,8,0\}$
6.28.	$\{1,2,3\}$	$\{5,4,3\}$	$\{1,0,-1\}$
6.29.	$\{5,4,2\}$	$\{1,3,6\}$	$\{2,3,4\}$
6.30.	$\{3,1,3\}$	$\{1,2,5\}$	$\{6,3,2\}$

II. Прямая на плоскости

1. Основные сведения

1.1. Пусть в аффинной системе координат имеем точку $M_0(\vec{r}_0)$, заданную своим радиус-вектором $\vec{r}_0(x_0, y_0)$, и направляющий вектор $\vec{V}(\ell, m)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку M_0 в направлении вектора $\vec{V}$ запишется

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t, \tag{2.1}$$

или в координатах

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \tag{2.2}$$

или каноническое уравнение

$$\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m}\,. \tag{2.3}$$

1.2. Общее уравнение прямой имеет вид

$$ax + by + c = 0, \tag{2.4}$$

где $\vec{P}(a, b)$ называется главным вектором прямой. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой (2.4), тогда

$$ax_1 + by_1 + c = 0. \tag{2.5}$$

Из (2.4) и (2.5) имеем

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0,$$

или

$$\frac{x - x_1}{b} = \frac{y - y_1}{-a}\,, \quad \text{т. е. каноническое уравнение.}$$

Следовательно, $\vec{V}(b, -a)$ есть направляющий вектор прямой (2.4).

1.3. Если имеем точку $M_0(\vec{r}_0)$ прямой и вектор $\vec{N}$, перпендикулярный прямой, то уравнение прямой будет

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{N} = 0 \ \text{ или } \ (\vec{r}\,\vec{N}\,) - (\vec{r}_0\,\vec{N}\,) = 0. \tag{2.6}$$

Уравнение прямой с вектором нормали $\vec{N}$ можно записать в виде

$$(\vec{r}\,\vec{N}\,) + C = 0. \tag{2.7}$$

Если $|\vec{N}| = 1$, то уравнение (2.7) называется нормальным (нормированным). Если же $|\vec{N}| \neq 1$, то уравнение (2.7) можно нормировать

$$\pm\frac{(\vec{r}\,\vec{N}\,) + C}{|\vec{N}\,|} = 0. \tag{2.8}$$

1.4. Если имеем две точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ прямой, то уравнение прямой запишется

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t \ \text{ или } \ \vec{r} = \vec{r}_2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)t, \tag{2.9}$$

или в координатах

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t \\ y = y_1 + \ (y_2 - y_1)t, \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,. \tag{2.10}$$

Последнее уравнение можно преобразовать к виду

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.11}$$

В частном случае, если M_1 лежит на оси Ox, а точка M_2 на оси Oy, т. е. $M_1(a, 0)$, $M_2(0, b)$, где $a \cdot b \neq 0$, то уравнение (2.11) примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ — уравнение в отрезках.}$$

1.5. Отношение ординаты m направляющего вектора $\vec{V}$ к его абсциссе ℓ называется угловым коэффициентом прямой

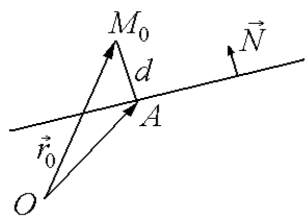
$$k = \frac{m}{\ell}\,,$$

т. е. уравнение прямой можно записать

$$y = kx + b,$$

где k — угловой коэффициент, b — начальная ордината.

1.6. Пусть имеем точку $M_0(\vec{r}_0)$ и прямую, заданную уравнением с вектором нормали $(\vec{r}, \vec{N}\,) + C = 0$. Из M_0 опустим перпендикуляр M_0A на прямую. Тогда



$$\overrightarrow{OA} = \vec{r}_0 + \overrightarrow{M_0A} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{N}.$$

Но $\overrightarrow{OA}$ удовлетворяет уравнению прямой

$$(\vec{r}_0 + \lambda\vec{N}\,) \cdot \vec{N} + C = 0, \quad \text{т. е.} \quad \lambda = -\frac{(\vec{r}_0\,\vec{N}) + C}{N^2}\,.$$

Тогда

$$\overrightarrow{M_0A} = -\frac{(\vec{r}_0\vec{N}\,) + C}{N^2}\,\vec{N}.$$

Следовательно,

$$d = \frac{\big|(\vec{r}_0\vec{N}\,) + C\big|}{N}\,,$$

т. е. для нахождения расстояния от точки до прямой нужно записать уравнение прямой в нормальном виде, подставить в левую часть уравнения точку M_0 и взять абсолютную величину этого выражения.

1.7. Пусть имеем две прямые

$$\begin{matrix} (\vec{r}\,\vec{N}_1) + C_1 = 0 \\ (\vec{r}\,\vec{N}_2) + C_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t \\ \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0. \end{matrix}$$

Для того чтобы две прямые были перпендикулярны необходимо и достаточно, чтобы $(\vec{N}_1\,\vec{N}_2) = 0$ (для первой пары); $(\vec{V}_1\,\vec{V}_2) = 0$ (для второй и третьей пары).

Необходимым и достаточным условием параллельности (в том числе и совпадения) двух прямых являются условия $[\vec{N}_1\,\vec{N}_2] = 0$ (для первой пары); $[\vec{V}_1\,\vec{V}_2] = 0$ (для второй и третьей пары).

1.8. Множество всех прямых плоскости, проходящих через одну общую точку S (центр пучка), называется пучком прямых.

Если центр пучка задан координатами $S(x_0, y_0)$, то уравнение пучка запишется

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

Если же центр S задан как пересечение двух прямых $a_1x+b_1y+c_1=0$, $a_2x+b_2y+c_2=0$, то уравнение пучка имеет вид

$$\alpha(a_1x+b_1y+c_1)+\beta(a_2x+b_2y+c_2)=0,$$

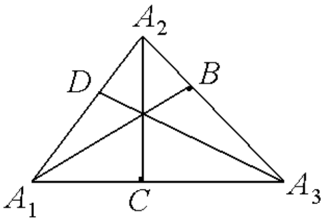
где α, β — произвольные числа.

1.9. Литература

[1] с. 109–126
[2] с. 138–156
[3] с. 46–68
[4] с. 54–75

2. Примеры

2.1. В треугольнике $A_1A_2A_3$ дана вершина $A_3(-1,-1)$ и две высоты (h_1): $x-4y+1=0$ (опущенная из A_1); (h_2): $2x+y+1=0$ (опущенная из A_2). Найти длину третьей высоты. (Координаты прямоугольные.)



Решение.

$$(a_1)\colon\ \frac{x+1}{1}=\frac{y+1}{-4}\,,\quad \text{т. е.}\quad 4x+y+5=0$$

(так как (a_1), т. е. A_2A_3, проходит через точку $A_3(-1,-1)$, и вектор нормали $(1,-4)$ высоты (h_1), т. е. A_1B, есть направляющий вектор для A_2A_3). Аналогично

$$(a_2)\colon\ \frac{x+1}{2}=\frac{y+1}{1}\,,\quad \text{т. е.}\quad x-2y-1=0.$$

Тогда пучок прямых через A_2:

$$\alpha(2x+y+1)+\beta(4x+y+5)=0$$
$$(2\alpha+4\beta)x+(\alpha+b)y+(\alpha+5\beta)=0,$$

пучок прямых через A_1:

$$\gamma(x-4y+1)+\delta(x-2y-1)=0$$
$$(\gamma+\delta)x+(-4\gamma-2\delta)y+(\gamma-\delta)=0.$$

A_1A_2 — прямая, принадлежащая обоим пучкам. Значит,

$$\frac{2\alpha+4\beta}{\gamma+\delta}=\frac{\alpha+\beta}{-4\gamma-2\delta}=\frac{\alpha+5\beta}{\gamma-\delta}\,.$$

Отсюда

$$\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{4}{9}\,;\quad \frac{\delta}{\gamma}=-\frac{13}{9}\,,$$

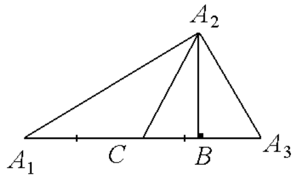
т. е.

$$(A_1A_2)\colon\ 2x+5y-11=0.$$

Тогда расстояние от A_3 до A_1A_2 (третья высота)

$$A_3D=\frac{|2\cdot(-1)+5\cdot(-1)-11|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\frac{18\sqrt{29}}{29}\,.$$

2.2. $A_1(\vec{r}_1)$; (m_2): $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$; (h_2): $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$. Найти $A_3(\vec{r}_3)$; уравнение (a_1).
Решение.



Так как вектор нормали $\vec{N}_2$ высоты A_2B является направляющим вектором стороны A_1A_3, то

$$(A_1A_3):\ \vec{r}=\vec{r}_1+\vec{N}_2t.$$

Тогда

$$C:\ \begin{cases}\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{N}_2t\\ (\vec{r}\,\vec{N}_1)+C_1=0,\end{cases}\qquad \text{отсюда}\ \ \vec{r}_c=\vec{r}_1-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,\vec{N}_2.$$

Но точка C делит отрезок A_1A_3 пополам. Значит,

$$\vec{r}_3=2\vec{r}_c-\vec{r}_1,\quad \text{т. е.}\ \ \vec{r}_3=\vec{r}_1-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,\vec{N}_2.$$

Пучок прямых через точку A_2:

$$\alpha[(\vec{r}\,\vec{N}_1)+C_1]+\beta[(\vec{r}\,\vec{N}_2)+C_2]=0. \tag{$*$}$$

Из него выберем прямую, проходящую через A_3. Для этого в это уравнение подставим радиус-вектор $\vec{r}_3$ точки A_3

$$\alpha\left[(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,(\vec{N}_2\,\vec{N}_1)+C_1\right]+\beta\left[(\vec{r}_1\,\vec{N}_2)-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,N_2^2+C_2\right]=0,$$

$$\alpha\,[(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1]=\beta\left[(\vec{r}_1\,\vec{N}_2)+C_2-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,N_2^2\right],$$

т. е.

$$\alpha=(\vec{r}_1\,\vec{N}_2)+C_2-2\,\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,N_2^2;\quad \beta=(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1.$$

Подставив найденные α и β в уравнение пучка $(*)$, получим уравнение стороны (a_1):

$$\vec{r}\cdot\left(\big[\vec{r}_1[\vec{N}_1\,\vec{N}_2]\big]+\frac{2}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\Big\{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)\big[[\vec{N}_1\,\vec{N}_2]\,\vec{N}_2\big]-C_1\,N_2^2\,\vec{N}_1\Big\}\right)+$$
$$+\vec{r}_1\cdot(C_1\vec{N}_2+C_2\vec{N}_1)+2C_1\left\{C_2-\frac{(\vec{r}_1\,\vec{N}_1)+C_1}{(\vec{N}_1\,\vec{N}_2)}\,N_2^2\right\}=0.$$

2.3. В косоугольной системе координат с координатным углом $\omega=\dfrac{\pi}{3}$ найти уравнение биссектрисы острого угла между прямыми $x+2y-1=0$, $2x-2y+3=0$.
Решение.

Направляющие векторы прямых $\vec{V}_1(2,-1)$, $\vec{V}_2(2,2)$. Поскольку

$$\begin{aligned}(\vec{V}_1\vec{V}_2)\ &=\ (2\vec{e}_1-\vec{e}_2)\cdot(2\vec{e}_1+2\vec{e}_2)=4e_1^2-2(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)+4(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)-2e_2^2=\\ &=\ 4-2\cos\frac{\pi}{3}+4\cos\frac{\pi}{3}-2=3>0,\end{aligned}$$

то угол между $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, т. е. между данными прямыми, острый.

$$V_1=\sqrt{(2\vec{e}_1-\vec{e}_2)^2}=\sqrt{4e_1^2-4(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)+e_e^2}=\sqrt{4-2+1}=\sqrt{3},$$
$$V_2=\sqrt{(2\vec{e}_1+2\vec{e}_2)^2}=\sqrt{4e_1^2+8(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)+4e_e^2}=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}.$$

Пучок прямых, определяемый данными прямыми, имеет уравнение

$$(\alpha+2\beta)x+(2\alpha-2\beta)y+(3\beta-a)=0, \quad \vec V(2\beta-2\alpha,\alpha+2\beta).$$

Из него выберем прямую, которая с данными прямыми образует одинаковые углы, т. е.

$$\frac{(\vec V_1\,\vec V)}{V_1V}=\frac{(\vec V\,\vec V_2)}{VV_2} \quad \text{или} \quad \frac{(\vec V_1\,\vec V)}{V_1}=\frac{(\vec V\,\vec V_2)}{V_2}, \tag{$**$}$$

но

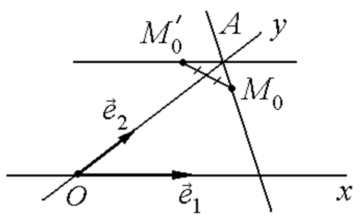
$$\begin{aligned}
(\vec V_1\,\vec V) &= (2\vec e_1-\vec e_2)\cdot\big((2\beta-2\alpha)\,\vec e_1+(\alpha+2\beta)\,\vec e_2\big)=\\
&= 4\beta-4\alpha-\beta+\alpha+\alpha+2\beta-\alpha-2\beta=3\beta-3\alpha,\\
(\vec V\,\vec V_2) &= \big((2\beta-2\alpha)\,\vec e_1+(\alpha+2\beta)\,\vec e_2\big)\cdot(2\vec e_1+2\vec e_2)=\\
&= 4\beta-4\alpha+\alpha+2\beta+2\beta-2\alpha+2\alpha+4\beta=12\beta-3\alpha.
\end{aligned}$$

Тогда равенство $(**)$ запишется

$$\frac{3\beta-3\alpha}{\sqrt3}=\frac{12\beta-3\alpha}{2\sqrt3}, \quad \text{т. е.} \quad \alpha=2, \quad \beta=-1.$$

Подставив их в уравнение пучка, получим уравнение биссектрисы $6y-5=0$.

2.4. В аффинной системе координат найти уравнение прямой, симметричной прямой $\vec r=\vec r_0+\vec Vt$ относительно оси Oy. Причем $[\vec V\,\vec e_2]\neq 0$.



Решение.

Точка пересечения данной прямой с осью Oy

$$\begin{cases}\vec r=\vec r_0+\vec Vt\\ \vec r=\vec e_2\,\tau,\end{cases} \quad \text{т. е.} \quad \vec r_A=\frac{[\vec r_0\,\vec V\,]\cdot[\vec e_2\,\vec V\,]}{[\vec V\,\vec e_2]^2}\,\vec e_2.$$

Точка M_0', симметричная точке M_0 относительно оси Oy имеет радиус-вектор

$$\vec r_0{}'=-\vec r_0+2\,\frac{(\vec r_0\,\vec e_2)}{e_e^2}\,\vec e_2.$$

Тогда уравнение искомой прямой будет

$$\vec r=\vec r_0{}'+(\vec r_A-\vec r_0{}')\,t,$$

т. е.

$$\vec r=-\vec r_0+2\,\frac{(\vec r_0\,\vec e_2)}{e_2^2}\,\vec e_2+\left\{\vec r_0+\left(\frac{[\vec r_0\,\vec V\,]\cdot[\vec e_2\,\vec V\,]}{[\vec V\,\vec e_2]^2}-2\,\frac{(\vec r_0\,\vec e_2)}{e_2^2}\right)\vec e_2\right\}t.$$

Работа №3

1) Найти (в плоскости введена прямоугольная система координат):

1.1. Вектор нормали прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{4}$.

1.2. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,-1)$ перпендикулярно прямой $x+2y-3=0$.

1.3. Проекцию точки $A(-2,1)$ на прямую $y=3x-1$.

1.4. Точку, симметричную точке $A(1,2)$ относительно прямой $3x+y-6=0$.

1.5. Уравнение прямой, симметричной прямой $2x+3y-6=0$ относительно оси Ox.

1.6. Уравнение прямой, симметричной прямой $\begin{cases} x=2-3t \\ y=3+t \end{cases}$ относительно оси Oy.

1.7. Расстояние от точки $M_0(-2,1)$ до прямой, проходящей через точки $A(2,-3)$, $B(3,2)$.

1.8. Уравнения прямых, отстоящих от прямой $y=3x-2$ на 5 единиц.

1.9. Уравнения прямых, проходящих через точку $A(6,9)$ под углом 45° к прямой $2x-5y+4=0$.

1.10. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2,3)$ параллельно прямой $3x-7y+10=0$.

1.11. Угол между прямыми $3x+y-5=0$, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{5}$.

1.12. Уравнения перпендикуляров к прямым $3x+y-2=0$, $2x-3y-5=0$ в точке пересечения этих прямых.

1.13. Уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x+7y-6=0$, $5x-5y+1=0$.

1.14. Уравнение прямой, проходящей на расстоянии 6 единиц от точки $A(2,-3)$ и 4 единицы от $B(5,-1)$.

1.15. Уравнение прямой, проходящей через точку $P(0,1)$ так, чтобы её отрезок, заключенный между прямыми $x-3y+10=0$, $2x+y-8=0$, делился в точке P пополам.

1.16. Условие на коэффициенты a, b, чтобы прямые $ax+by+1=0$, $2x-3y+5=0$, $x-1=0$ проходили через одну и ту же точку.

1.17. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(3,-1)$ перпендикулярно прямой $3x+2y+7=0$.

1.18. Проекцию точки $A(-2,1)$ на прямую $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{5}$.

1.19. Точку, симметричную точке $A(1,2)$ относительно прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-2}{3}$.

1.20. Уравнение прямой, симметричной прямой $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \end{cases}$ относительно оси Ox.

1.21. Уравнение прямой, симметричной прямой $5x+2y+10=0$ относительно оси Oy.

1.22. Длину перпендикуляра, опущенного из точки $P(4,-1)$ на прямую $12x-5y-27=0$.

1.23. Уравнение прямой, параллельной прямым $4x-6y-3=0$, $2x-3y+7=0$ и проходящей посередине между ними.

1.24. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-1)$ и составляющей с осью Ox угол, вдвое больше угла, составляемого с осью Ox прямой $x=3y-4$.

1.25. Уравнение прямой, параллельной прямой $8x-15y+15=0$ и проходящей от точки $A(6,-2)$ на расстоянии 4 единицы.

1.26. Угол между прямыми $y=2x-1$, $\begin{cases} x=1+3t \\ y=2-5t\,. \end{cases}$

1.27. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $7x-y+3=0$, $3x+5y-4=0$ и точку $A(2,-1)$.

1.28. Уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $2x - 9y + 18 = 0$, $6x + 7y - 21 = 0$.
1.29. Условие, при котором прямые $3ax - 8y + 13 = 0$, $(a+1)x - 2ay - 21 = 0$ будут параллельны.
1.30. Условие, при котором прямые $(3a+2)x + (1-4a)y + 8 = 0$, $(5a-2)x + (a+4)y - 7 = 0$ будут перпендикулярны.

2) На плоскости, где введена прямоугольная система координат, по заданным элементам треугольника требуется узнать некоторые из остальных элементов треугольника

Обозначения: A_i — вершины; (a_i) — уравнения сторон, противолежащих вершинам A_i; (h_i), (m_i), (b_i) — уравнения соответственно высоты, медианы, биссектрисы, проведенных из вершины A_i; H, M, B — точки пересечения соответственно высот, медиан, биссектрис треугольника; S — площадь треугольника.

№	Дано	Найти
2.1.	$(a_1)\ 2x - y = 0$; $(a_2)\ 5x - y = 6$; $(m_1)\ 3x - y = 0$	A_1, A_2
2.2.	$(h_1)\ 5x - 4y - 15 = 0$; $(h_2)\ 2x + 2y - 9 = 0$; $(a_3)\ 4x + y - 12 = 0$	(a_1)
2.3.	$(a_1)\ 5x - 4y - 15 = 0$; $(a_2)\ 4x + y - 9 = 0$; $M(0,2)$	(a_3)
2.4.	$(m_1)\ 4x + y - 6 = 0$; $(m_2)\ 2x + y - 2 = 0$; $(m_3)\ x - 2 = 0$; $S = 184$	(A_1)
2.5.	$(m_1)\ x + y - 5 = 0$; $(m_2)\ 2x + y - 11 = 0$; $(a_3)\ x - 2y + 7 = 0$	A_1, A_2
2.6.	$A_1(-6,2)$; $A_2(2,-2)$; $H(1,2)$	A_3
2.7.	$A_1(-4,2)$; $(m_2)\ 3x - 2y + 2 = 0$; $(m_3)\ 3x + 5y - 12 = 0$	(a_1), (a_2)
2.8.	$(b_1)\ x + 2y - 13 = 0$; $(b_2)\ x - y - 5 = 0$; $A_3(7,8)$	(a_1), (a_3)
2.9.	$(h_1)\ x + y - 2 = 0$; $(h_2)\ 9x - 3y - 4 = 0$; $A_3(2,2)$	(a_1), (a_3)
2.10.	$(a_1)\ 3x - 2y + 1 = 0$; $(a_2)\ x - y + 1 = 0$; $(m_2)\ 2x - y - 1 = 0$	A_1, A_3
2.11.	$(a_1)\ x + y - 4 = 0$; $(a_2)\ 2x + y - 1 = 0$; $M(0,0)$	A_1
2.12.	$A_1(2,-5)$; $(m_2)\ 4x + 5y = 0$; $(m_3)\ x - 3y = 0$	A_2
2.13.	$A_1(3,-4)$; $(h_2)\ 7x - 2y - 1 = 0$; $(h_3)\ 2x - 7y - 6 = 0$	A_2
2.14.	$A_1(3,-1)$; $A_2(1,4)$; $M(0,2)$	(a_1)
2.15.	$H(-3,2)$; $(a_1)\ 2y = 2x$; $(a_2)\ y = 3 - x$	(a_3)
2.16.	$A_1(2,-3)$; $A_2(5,1)$; $(a_1)\ x + 2y - 7 = 0$; $(m_1)\ 5x - y - 13 = 0$	(h_3)
2.17.	$(h_1)\ x + 5y - 3 = 0$; $(h_2)\ x + y - 1 = 0$; $(a_3)\ x + 3y - 1 = 0$	(a_1)
2.18.	$(b_1)\ x + 4 = 0$; $(b_2)\ 4x + 7y + 5 = 0$; $(a_3)\ 3x + 4y = 0$	(a_1)
2.19.	$A_1(1,3)$; $(m_2)\ x - 2y + 1 = 0$; $(m_3)\ y - 1 = 0$	(a_3)
2.20.	$A_1(2,-7)$; $(h_2)\ 3x + y + 11 = 0$; $(m_3)\ x + 2y + 7 = 0$	(a_1)
2.21.	$A_1(-2,1)$; $A_2(3,-4)$; $H(5,1)$	A_3
2.22.	$A_1(2,-1)$; $(h_2)\ x + y + 1 = 0$; $(b_3)\ 3x - 2y + 5 = 0$	(a_1)
2.23.	$(a_1)\ 3x + y - 3 = 0$; $(a_2)\ 3x + 4y = 0$; $(b_2)\ x - y + 5 = 0$	(a_3)
2.24.	$A_1(1,1)$; $(m_2)\ x + y = 3$; $(m_3)\ 2x + 3y + 1 = 0$	(a_3)
2.25.	$(b_1)\ x + 2y - 13 = 0$; $(b_2)\ x - y - 5 = 0$; $A_3(7,8)$	A_2
2.26.	$(a_1)\ x + 7y - 6 = 0$; $(b_2)\ x + y - 2 = 0$; $(b_3)\ x - 3y - 6 = 0$	A_1
2.27.	$A_1(3,-1)$; $(b_2)\ x - 4y + 10 = 0$; $(m_3)\ 6x + 10y - 59 = 0$	A_3
2.28.	$A_1(2,-1)$; $A_2(1,5)$; $B(3,0)$	A_3
2.29.	$(m_1)\ x + y - 5 = 0$; $(m_2)\ 3x + y - 7 = 0$; $(a_3)\ 2x + y - 5 = 0$	A_3
2.30.	$(a_1)\ x + 2y - 3 = 0$; $(a_2)\ 9x + 10y + 5 = 0$; $M(-3,2)$	A_1

3) На плоскости по заданным элементам треугольника требуется найти некоторые из остальных элементов треугольника

К введенным ранее обозначениям добавляются: $\vec{r}_h$, $\vec{r}_m$, $\vec{r}_b$ — радиус-векторы точек H, M, B; $\vec{r}_i$ — радиус-вектор вершины A_i; $\vec{r}_c$ — радиус-вектор центра описанной около треугольника окружности.

№	Дано	Найти
3.1.	$A_3(\vec{r}_3)$; $\quad (m_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (m_2)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$
3.2.	$(a_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (a_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad (m_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$
3.3.	$(a_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (a_2)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad M(\vec{r}_m)$	(a_3), $A_2(\vec{r}_2)$
3.4.	$(a_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (a_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_1)\ (\vec{r}\,\vec{m}) = \beta$	$A_2(\vec{r}_2)$
3.5.	$(a_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (h_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (h_3)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	$A_1(\vec{r}_1), (a_3)$
3.6.	$(a_3)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_1)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad (b_2)\ (\vec{r}\,\vec{p}\,) = \gamma$	$A_3(\vec{r}_3)$
3.7.	$(h_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (h_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad (a_3)\ (\vec{r}\,\vec{p}\,) = \gamma$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.8.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad A_2\ (\vec{r}_2)$; $\quad B(\vec{r}_b)$	$A_3(\vec{r}_3)$
3.9.	$(h_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (h_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad A_3(\vec{r}_3)$	$A_1(\vec{r}_1)$
3.10.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad (m_3)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_2)(\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	$A_2(\vec{r}_2)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.11.	$(b_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_3)(\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad A_1(\vec{r}_1)$	$A_2(\vec{r}_2)$
3.12.	$A_2(\vec{r}_2)$; $\quad (m_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (m_3)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$	(a_1), (a_2)
3.13.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad A_2\ (\vec{r}_2)$; $\quad H(\vec{r}_h)$	$A_3(\vec{r}_3)$
3.14.	$(a_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (m_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (m_3)(\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$
3.15.	$H(\vec{r}_h)$; $\quad (a_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (a_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	(a_3)
3.16.	$(a_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (a_2)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad M(\vec{r}_m)$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_2(\vec{r}_2)$
3.17.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad A_2\ (\vec{r}_2)$; $\quad A_3(\vec{r}_3)$	$C(\vec{r}_c)$
3.18.	$(m_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (m_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$; $\quad (a_3)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	(a_1), $A_3(\vec{r}_3)$
3.19.	$(a_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (a_2)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (m_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}) = \beta$	$A_1(\vec{r}_1)$, (a_1)
3.20.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad (h_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_2)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	$A_2(\vec{r}_2)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.21.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad A_2\ (\vec{r}_2)$; $\quad A_3(\vec{r}_3)$	$B(\vec{r}_b)$
3.22.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad (h_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (m_3)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	$A_2(\vec{r}_2)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.23.	$A_1(\vec{r}_1)$; $A_2(\vec{r}_2)$; $(a_1)\ (\vec{r} - \vec{r}_2, \vec{n}\,) = 0$; $(m_1)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$	$A_3(\vec{r}_3)$
3.24.	$(a_3)\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$; $\quad (h_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (h_2)(\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.25.	$A_1(\vec{r}_1)$; $\quad A_2\ (\vec{r}_2)$; $\quad A_3(\vec{r}_3)$	(b_1)
3.26.	$A_1(\vec{r}_1)$; $A_3(\vec{r}_3)$; $(a_1)\ (\vec{r} - \vec{r}_3, \vec{n}\,) = 0$; $(m_1)\ (\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{m}\,) = 0$	$A_2(\vec{r}_2)$
3.27.	$(m_2)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (m_3)\ (\vec{r}\,\vec{m}) = \beta$; $\quad A_1(\vec{r}_1)$	$A_2(\vec{r}_2)$
3.28.	$A_2(\vec{r}_2)$; $\quad (h_3)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $\quad (b_3)(\vec{r}\,\vec{m}\,) = \beta$	$A_1(\vec{r}_1)$, $A_3(\vec{r}_3)$
3.29.	$A_2(\vec{r}_2)$; $\quad A_3\ (\vec{r}_3)$; $\quad M(\vec{r}_m)$	$S_{\triangle A_1A_2A_3}$
3.30.	$(m_1)\ (\vec{r}\,\vec{n}\,) = \alpha$; $(m_2)\ (\vec{r}\,\vec{m}) = \beta$; $(m_3)\ (\vec{r}\,\vec{p}\,) = \gamma$; $S_{\triangle A_1A_2A_3} = S$	$A_1(\vec{r}_1)$

4) В косоугольной системе координат с координатным углом ω найти:

4.1. Точку, симметричную точке $A(2,3)$ относительно прямой $3x+2y-5=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.2. Уравнение прямой, симметричной прямой $\begin{cases} x=2+3t \\ y=1-2t \end{cases}$ относительно оси Ox. $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

4.3. Уравнение прямой, симметричной прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+4}{3}$ относительно оси Oy. $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

4.4. Расстояние от точки $P(0,5)$ до прямой $y=\sqrt{8}\,x+7$. $\omega=\dfrac{5\pi}{6}$.

4.5. Уравнения прямых, отстоящих от прямой $2x+2y-7=0$ на 5 единиц. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.6. Уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1,-3)$ и образующих с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{6}$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.7. Уравнения прямых, проходящих через точку $A(2,-3)$ и образующих с осью Oy угол $\dfrac{\pi}{3}$. $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

4.8. Угол между прямыми $y=-x+5$, $x+2y+14=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.9. Вектор нормали прямой $2x-6y+13=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.10. Уравнение прямой, прохдящей через точку $A(-1,4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-2}{3}=$ $=\dfrac{y-7}{5}$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.11. Проекцию точки $A(-2,1)$ на прямую $3x+y-2=0$. $\omega=\arccos\dfrac{1}{3}$.

4.12. Точку, симметричную точке $A(-1,-3)$ относительно прямой $\begin{cases} x=1+2t \\ y=3-t \end{cases}$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.13. Уравнение прямой, симметричной прямой $3x-2y+8=0$ относительно оси Ox. $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

4.14. Уравнение прямой, симметричной прямой $y=3x-7$ относительно оси Oy. $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

4.15. Расстояние от точки $A(-2,1)$ до прямой $\begin{cases} x=2+3t \\ y=-2t \end{cases}$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

4.16. Уравнения прямых, отстоящих от прямой $\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y+1}{3}$ на 5 единиц. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.17. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-5)$ и образующей с прямой $4x-3y+1=0$ угол $\arccos\dfrac{1}{3}$. $\omega=\arccos\dfrac{1}{3}$.

4.18. Угол между прямыми $4x-5y+7=0$, $9x+4y-11=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.19. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(6,-2)$ и образующей с осями координат равносторонний треугольник. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.20. Вектор нормали прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-7}{5}$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.21. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(3,1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \end{cases}$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.22. Проекцию точки $A(3,5)$ на прямую $\left\{\begin{array}{l} x=-1+2t \\ y=\quad 2+t \end{array}\right.$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{3}{4}\right)$.

4.23. Точку, симметричную точке $A(-2,5)$ относительно прямой $y=3x+4$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.24. Уравнение прямой, симметричной прямой $y=8x-3$ относительно оси Ox. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.25. Уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+y=6$, $2x-y=3$ и образующую с прямой $3x-5=0$ угол $\dfrac{\pi}{6}$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

4.26. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,2)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(4,3)$, $C(-2,1)$. $\omega=\arccos\dfrac{1}{3}$.

4.27. Расстояние от точки $A(3,-4)$ до прямой, проходящей через точки $B(1,2)$, $C(-3,3)$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.28. Уравнения прямых, отстоящих от прямой $\left\{\begin{array}{l} x=\quad 3+t \\ y=-2+3t \end{array}\right.$ на $\sqrt{35}$ единиц. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{6}\right)$.

4.29. Уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1,-3)$ и образующей с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$. $\omega=\dfrac{2\pi}{3}$.

4.30. Угол между прямыми $4x+3y-13=0$, $3x-4y+2=0$. $\omega=\arccos\dfrac{5}{6}$.

5) В аффинной системе координат найти:

5.1. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$ и образующую с осью Oy угол β.

5.2. Угол между прямыми $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{V}$, $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$.

5.3. Вектор нормали прямой $\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \end{array}\right.$.

5.4. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$, перпендикулярно прямой $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

5.5. Проекцию точки $M_1(\vec{r}_1)$ на прямую $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$.

5.6. Точку, симметричную точке $M_1(\vec{r}_1)$ относительно прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$.

5.7. Уравнение прямой, симметричной прямой $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}$ относительно оси Ox.

5.8. Уравнение прямой, симметричной прямой $ax+by+c=0$ относительно оси Oy.

5.9. Расстояние от точки $M_1(x_1,y_1)$ до прямой $\left\{\begin{array}{l} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \end{array}\right.$.

5.10. Уравнение прямой, отстоящей от прямой $y=kx+b$ на d единиц.

5.11. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ и образующей с осью Ox угол α.

5.12. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ и образующей с осью Oy угол β.

5.13. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$, перпендикулярно прямой $y=kx+b$.

5.14. Проекцию точки $M_1(\vec{r}_1)$ на прямую $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{V}$.

5.15. Точку, симметричную точке $M_1(\vec{r}_1)$ относительно прямой $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$.

5.16. Уравнение прямой, симметричной прямой $ax+by+c=0$ относительно оси Ox.

5.17. Уравнение прямой, симметричной прямой $\begin{cases} x=x_0+\ell t \\ y=y_0+mt \end{cases}$ относительно оси Oy.

5.18. Направляющий вектор прямой $(\vec{r}-\vec{r}_0\,\vec{N}\,)=0$.

5.19. Расстояние от точки $M_1(\vec{r}_1)$ до прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{V}$.

5.20. Уравнение прямой, отстоящей от прямой $\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{V}$ на d единиц.

5.21. Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

5.22. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1,y_1)$ и образующей с осью Ox угол α.

5.23. Проекцию точки $M_1(x_1,y_1)$ на прямую $y=kx+b$.

5.24. Точку, симметричную точке $M_1(x_1,y_1)$ относительно прямой $\dfrac{x-x_0}{\ell}=\dfrac{y-y_0}{m}$.

5.25. Уравнение прямой, симметричной прямой $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$ относительно оси Ox.

5.26. Уравнение прямой, симметричной прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ относительно оси Oy.

5.27. Уравнение прямой, отстоящей от прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ на d единиц.

5.28. Проекцию точки $M_1(x_1,y_1)$ на прямую $\dfrac{x-x_0}{\ell}+\dfrac{y-y_0}{m}$.

5.29. Точку, симметричную точке $M_1(x_1,y_1)$ относительно прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

5.30. Уравнение прямой, симметричной прямой $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ относительно оси Ox.

6) Найти условия:

6.1. Совпадения всех трех прямых: $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_3)+c_3=0$.

6.2. Пересечения трех прямых $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$, $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$ в одной точке.

6.3. Параллельности двух прямых $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$, $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$.

6.4. Попарного пересечения трех прямых $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$, $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_3t$.

6.5. Параллельности всех трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$, $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$ (без совпадения).

6.6. Пересечения прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$.

6.7. Параллельности всех трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$, $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$.

6.8. Совпадения всех трех прямых $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$, $\vec{r}=\vec{r}_3+\vec{V}_3t$.

6.9. Пересечения прямых $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$.

6.10. Совпадения двух и параллельности им третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$, $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$.

6.11. Совпадения всех трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$, $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$.

6.12. Пересечения прямых $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$, $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$.

6.13. Параллельности двух прямых и пересечения их третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}_1)+c_1=0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2)+c_2=0$, $\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{V}t$.

6.14. Совпадения двух прямых и параллельности им третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}\,)+c=0$, $\vec{r}=\vec{r}_1+\vec{V}_1t$, $\vec{r}=\vec{r}_2+\vec{V}_2t$.

6.15. Параллельности прямых $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$.

6.16. Параллельности всех трех прямых $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$, $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{V}_3 t$ (без совпадения).

6.17. Параллельности двух прямых и пересечения их третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + c = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$.

6.18. Параллельности прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + c_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + c_2 = 0$.

6.19. Параллельности двух прямых и пересечения их третьей прямой $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$, $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{V}_3 t$.

6.20. Пересечения трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + c_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + c_2 = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t$ в одной точке.

6.21. Совпадения прямых $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$.

6.22. Совпадения двух прямых и параллельности им третьей прямой $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$, $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{V}_3 t$.

6.23. Совпадения двух прямых и пересечения их третьей прямой $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$, $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{V}_3 t$.

6.24. Совпадения прямых $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t$, $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + c = 0$.

6.25. Совпадения двух прямых и пересечения их третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + c_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + c_2 = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t$.

6.26. Попарного пересечения трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + c = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$.

6.27. Совпадения прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + c_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + c_2 = 0$.

6.28. Попарного пересечения трех прямых $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + c_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + c_2 = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V} t$.

6.29. Совпадения двух прямых и пересечения их третьей прямой $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + c = 0$, $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$.

6.30. Пересечения всех трех прямых $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 t$, $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{V}_3 t$ в одной точке.

III. Кривые на плоскости

1. Основные сведения

1.1. Окружность есть геометрическое место точек, равноудаленных от одной и той же точки, называемой центром окружности.

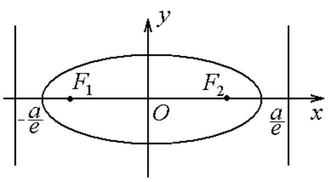
Если центр имеет координаты (a, b), а радиус равен R, то уравнение окружности в прямоугольной системе координат запишется

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Перенеся начало координат системы в центр окружности, получим уравнение в виде

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

1.2. Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух постоянных точек F_1, F_2 — фокусов эллипса — есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние $F_1F_2 = 2c$.



Выбрав прямую F_1F_2 за ось абсцисс, середину отрезка F_1F_2 за начало координат, получим в прямоугольных координатах каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad b^2 = a^2 - c^2.$$

При таком выборе системы координат оси координат совпадают с осями симметрии эллипса (осями эллипса), а начало координат — с центром симметрии эллипса (центром эллипса).

Эксцентриситетом эллипса называется величина

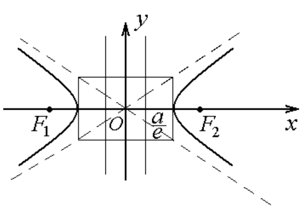
$$e = \frac{c}{a}.$$

Очевидно, что $0 < e < 1$.

Директрисами эллипса называются две прямые параллельные малой оси эллипса (оси на которой нет фокусов) и отстоящие от нее на расстоянии $\dfrac{a}{e}$, т. е. их уравнения $x = \pm\,\dfrac{a}{e}$.

Теорема. *Для того чтобы точка плоскости лежала на эллипсе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса эллипса к расстоянию от этой же точки до соответствующей директрисы было равно эксцентриситету эллипса.*

1.3. Гипербола есть геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух данных точек F_1, F_2 — фокусов гиперболы — есть величина постоянная, равная $2a$. Расстояние $F_1F_2 = 2c$.



Выбрав прямоугольную систему координат, как у эллипса, получим каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

При таком выборе системы оси координат совпадают с осями симметрии гиперболы (осями гиперболы), а начало координат — с центром симметрии гиперболы (центром гиперболы).

Эксцентриситетом гиперболы называется величина $e = \dfrac{c}{a}$. Очевидно, что $e > 1$.

Директрисами гиперболы называются две прямые, перпендикулярные действительной оси гиперболы (оси, на которой находятся фокусы) и отстоящие от центра на расстоянии $\dfrac{a}{e}$, т. е. уравнение директрис $x = \pm\dfrac{a}{e}$.

Асимптотами гиперболы являются прямые

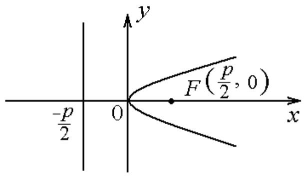
$$y = \pm\frac{b}{a}\,x,$$

служащие диагоналями прямоугольника, центр которого находится в центре гиперболы, а стороны, равные $2a$ и $2b$, параллельны соответственно действительной и мнимой оси гиперболы.

Теорема. *Для того чтобы точка плоскости лежала на гиперболе, необходимо и достаточно, чтобы отношение расстояния от этой точки до фокуса гиперболы к расстоянию от этой же точки до соответствующей директрисы было равно эксцентриситету гиперболы.*

1.4. Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки F — фокуса параболы — и данной прямой — директрисы параболы.

Если за ось абсцисс принять перпендикуляр, опущенный из фокуса F на директрису, а за начало координат середину отрезка между фокусом и директрисой, то в прямоугольной системе координат получим каноническое уравнение параболы



$$y^2 = 2px,$$

где p — расстояние от фокуса до директрисы. Тогда $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$, а уравнение директрисы $x = -\dfrac{p}{2}$.

1.5. Кривой второго порядка называют геометрическое место точек, декартовы координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени.

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{3.1}$$

в котором $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Порядок, в котором расположены индексы коэффициентов не играют роли, т. е. $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$.

а) Проведя параллельный перенос прямоугольной системы координат

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

и приравняв коэффициенты при x', y' нулю, получим систему двух уравнений

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13} = 0 \\ a_{21}a + a_{22}b + a_{23} = 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Если эта система имеет единственное решение, то уравнение кривой в новой системе координат $x'O'y'$ запишется

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + a'_{33} = 0. \tag{3.3}$$

Ясно, что кривая (3.3) имеет центром симметрии точку O'. Этот центр симметрии называют центром кривой второго порядка, а саму кривую называют центральной.

б) Поворачивая прямоугольную систему координат вокруг начала координат на угол φ, т. е. совершая преобразование

$$\begin{cases} x = x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = x'\sin\varphi + y'\cos\varphi, \end{cases} \tag{3.4}$$

приравняем нулю коэффициент a'_{12} при $x'y'$. Тогда получим уравнение

$$-a_{11}\sin\varphi\,\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + a_{22}\sin\varphi\,\cos\varphi = 0. \tag{3.5}$$

Откуда

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}\,,$$

т. е. за счет выбора угла поворота всегда можно уничтожить член с произведением $x'y'$.

в) Величины

$$J_1 = a_{11} + a_{22}, \quad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами кривой второго порядка (3.1) относительно общего преобразования прямоугольных координат

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi \\ y = b + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi. \end{cases}$$

Величина

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

есть инвариант кривой второго порядка (3.1) относительно поворота (3.4).

Общее уравнение (3.1) кривой второго порядка преобразованием прямоугольных декартовых координат приводится к одному из следующих трех видов

$$\begin{aligned} &\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \frac{J_3}{J_2} = 0, && \text{если} \quad J_2 \neq 0; \\ &\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\frac{J_3}{J_1}}\,Y = 0, && \text{если} \quad J_2 = 0, J_3 \neq 0; \\ &\lambda_1 X^2 + \frac{K_2}{J_1} = 0, && \text{если} \quad J_2 = J_3 = 0; J_1 \neq 0, \end{aligned}$$

где λ_1, λ_2 — ненулевые корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - J_1\lambda + J_2 = 0. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.5) можно записать в виде

$$\frac{a_{11}\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{a_{21}\cos\varphi + a_{22}\sin\varphi}{\sin\varphi} = S$$

или

$$\begin{cases} (a_{11} - S)\cos\varphi + a_{12}\sin\varphi = 0 \\ a_{21}\cos\varphi + (a_{22} - S)\sin\varphi = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Но эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - S \end{vmatrix} = 0$$

или

$$S^2 - (a_{11} + a_{22})S + (a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}) = 0,$$

т. е. характеристическое уравнение (3.6). Значит, из (3.7) по корням характеристического уравнения (3.6) можем записать направление новых осей (угол, составленный с осью Ox)

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_1 - a_{22}}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda_2 - a_{22}}\,.$$

1.6. Литература

[1] с. 83–87; 144–163, 172–187

[2] с. 214–218; 219–223; 230–238; 247–256; 261–264; 339–360

[3] с. 73–82; 107–111; 144–163

[4] с. 78–82; 86–110; 134–178

2. Примеры

2.1. Исследовать и построить кривую

$$x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0.$$

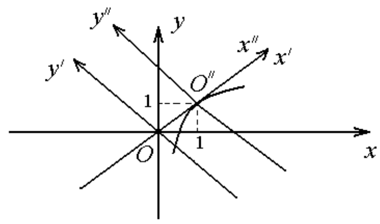
Решение.

Сделав поворот по формулам (3.4), получим

$$(\cos^2\varphi + 2\sin\varphi\,\cos\varphi + \sin^2\varphi)\,{x'}^2 + 2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\,x'y' +$$
$$+ (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi - 2\sin\varphi\,\cos\varphi)\,{y'}^2 - 8x'\cos\varphi + 8y'\sin\varphi + 4 = 0.$$

Приравняв коэффициент при $x'y'$ нулю, найдем

$$\cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}\,.$$



Тогда уравнение примет вид

$$2{x'}^2 - 4\sqrt{2}\,x' + 4\sqrt{2}\,y' + 4 = 0$$

или

$$(x' - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\,y' = 0.$$

Совершив параллельный перенос

$$\begin{cases} x' = \sqrt{2} + x'' \\ y' = y'', \end{cases}$$

получаем

$$x''^2 + 2\sqrt{2}\,y'' = 0 \text{ — парабола.}$$

2.2. Найти фокусы и директрисы кривой

$$6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0.$$

Решение.

$J_1 = 8$, $J_2 = -9$, $J_3 = 81$, $\lambda^2 - 8\lambda - 9 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\lambda = 9$, т. е. уравнение кривой запишется

$$-X^2 + 9Y^2 - \frac{81}{9} = 0$$

$$-\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{1} = 1 \text{ — гипербола.}$$

В системе $xO'y$: фокусы $F_1(0, -\sqrt{10})$, $F_2(0, \sqrt{10})$.

Уравнения директрис $Y = \pm\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ (т. к. $a^2 = 1$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 + b^2 = 10$).

Центр кривой (гиперболы):

$$\begin{cases} 3b - \ \ 6 = 0 \\ 3a + 8b - 13 = 0 \end{cases} \quad \text{т. е.} \quad O'(-1, 2).$$

Угол поворота:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-1+0}{3} = -\frac{1}{3}\,.$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ и общее преобразование запишется

$$\begin{cases} x = -1 + \frac{3}{\sqrt{10}}X + \frac{1}{\sqrt{10}}Y \\ y = 2 - \frac{1}{\sqrt{10}}X + \frac{3}{\sqrt{10}}Y. \end{cases}$$

Подставляя сюда координаты F_1, F_2, получим их координаты в исходной системе xOy

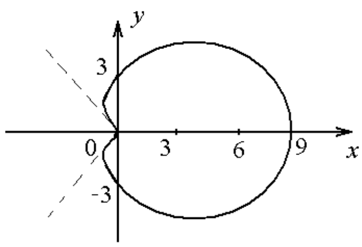
$$F_1(-2, -1), \quad F_2(0, 5).$$

Подставив уравнения директрис, получим их уравнения в системе xOy:

$$x + 3y - 6 = 0, \quad x + 3y - 4 = 0.$$

2.3. Построить кривую, заданную в прямоугольной системе координат уравнением

$$x^2 + y^2 - 6x = 3\sqrt{x^2 + y^2}\,.$$



Решение.
$x^2 + y^2 - 6x = 3\sqrt{x^2 + y^2}$,
$x^2 + y^2 - 6x \geq 0$,
$(x-3)^2 + y^2 \geq 9$,
т. е. кривая должна лежать вне круга радиуса 3 с центром в точке $(3; 0)$.

Перейдем к полярным координатам с полюсом в точке O и полярной осью по оси Ox. Тогда уравнение кривой запишется

$$\rho = 3 + 6\cos\varphi,$$

где $\rho \geq 0$. Значит кривая будет для $3 + 6\cos\varphi \geq 0$, т. .е. $-\dfrac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \dfrac{2\pi}{3}$.

2.4. Найти все аффинные преобразования, переводящие эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ в себя.

Решение.

Аффинное преобразование должно быть

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' \\ y = a_{21}x' + a_{22}y', \end{cases}$$

т. е. без переноса начала координат. Тогда уравнение

$$\left(\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{21}^2}{b^2}\right) x'^2 + 2\left(\frac{a_{11}\,a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}\,a_{22}}{b^2}\right) x'y' + \left(\frac{a_{12}^2}{a^2} + \frac{a_{22}^2}{b^2}\right) y'^2 = 1.$$

Значит,

$$\begin{cases} \dfrac{a_{11}^2}{a^2} + \dfrac{a_{21}^2}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} \\[2ex] \dfrac{a_{11}\,a_{12}}{a^2} + \dfrac{a_{21}\,a_{22}}{b^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{a_{12}^2}{a^2} + \dfrac{a_{22}^2}{b^2} = \dfrac{1}{b^2} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_{11}^2 + \left(\dfrac{a}{b}\,a_{21}\right)^2 = 1 \\[2ex] a_{11}\left(\dfrac{b}{a}\,a_{12}\right) + a_{22}\left(\dfrac{a}{b}\,a_{21}\right) = 0 \\[2ex] \left(\dfrac{b}{a}\,a_{12}\right)^2 + a_{22}^2 = 1. \end{cases}$$

Поскольку $|a_{11}| \le 1$, $\left|\frac{a}{b}\,a_{21}\right| \le 1$, то положим

$$a_{11} = \cos t, \quad \frac{a}{b}\,a_{21} = \sin t.$$

Тогда из второго уравнения имеем

$$\frac{b}{a}\,a_{12} = \pm\sin t, \quad a_{22} = \mp\cos t,$$

причем третье уравнение обращается в тождество.

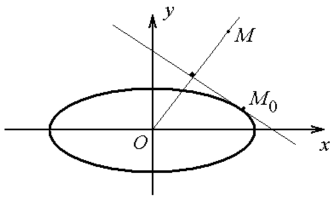
Следовательно, $a_{11} = \cos t$, $a_{21} = \frac{b}{a}\sin t$, $a_{12} = \pm\frac{a}{b}\sin t$, $a_{22} = \mp\cos t$, т. е. аффинные преобразования будут

$$\begin{cases} x = x'\cos t + \dfrac{a}{b}\,y'\sin t \\ y = \dfrac{b}{a}\,x\sin t - y'\cos t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x'\cos t - \dfrac{a}{b}\,y'\sin t \\ y = x'\,\dfrac{b}{a}\sin t + y'\cos t, \end{cases}$$

где t — любое действительное число.

2.5. Найти геометрическое место точек, симметричных с центром эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно его касательных (система прямоугольная).

Решение.



Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0)$ на эллипсе, т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1. \qquad (*)$$

Уравнение касательной к эллипсу запишется

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \quad \text{или} \quad b^2 x_0\,x + a^2 y_0\,y - a^2b^2 = 0.$$

Тогда координаты точки, симметричной центру эллипса относительно касательной, запишутся

$$x = \frac{2a^2b^4x_0}{a^4y_0^2 + b^4x_0^2}\,, \quad y = \frac{2a^4b^2y_0}{a^4y_0^2 + b^4x_0^2}\,. \qquad (**)$$

Исключая из трех равенств $(*)$, $(**)$ параметры x_0, y_0, получим

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = 4(a^2x^2 + b^2y^2)$$

уравнение искомого геометрического места точек.

2.6. Через точку $A(0; 2)$ провести касательные к кривой $x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10 = 0$.

Решение.

Поскольку прямая $x = 0$ не является касательной к данной кривой, то обозначим пучок прямых, проходящих через точку $A(0; 2)$ через

$$y = 2 + kx.$$

Тогда точки пересечения находятся из системы

$$\begin{cases} y = 2 + kx \\ x^2 + 2xy + 2y^2 - 4x - 4y + 10 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$(2k^2 + 2k + 1)x^2 + 4(k+2)x + 10 = 0, \quad x = \frac{-2(k+2) \pm \sqrt{4(k+2)^2 - 10(2k^2 + 2k + 1}}{2k^2 + 2k + 1}\,.$$

Прямая будет касательной тогда и только тогда, когда точка пересечения будет кратная. А это возможно лишь при

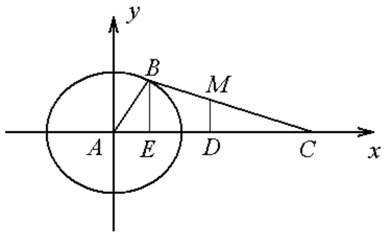
$$4(k+2)^2 - 10(2k^2+2k+1) = 0, \quad 8k^2+2k-3=0, \quad k_1 = \frac{1}{2}, \quad k_2 = -\frac{3}{4}.$$

Следовательно, через точку $A(0;2)$ проходят две касательные

$$x - 2y + 4 = 0, \quad 3x + 4y - 8 = 0$$

к данной кривой.

2.7. Найти траекторию точки M шатуна. $AB = r$, $BC = e$, $BM = d$.



Решение.

Введем прямоугольную систему координат с началом в точке A. Тогда

$$\begin{cases} x = AE + ED = r\cos\varphi + d\cos\psi \\ y = MD = (e-d)\sin\psi. \end{cases}$$

Но в $\triangle ABC$

$$\frac{\sin\varphi}{e} = \frac{\sin\psi}{r} = t, \quad \text{т. е.} \quad \sin\varphi = et, \ \sin\psi = rt.$$

Тогда

$$\begin{cases} x = r\sqrt{1-e^2t^2} + d\sqrt{1 = r^2t^2} \\ y = (e-d)rt. \end{cases}$$

Исключая отсюда t, получим

$$\left[(x^2 - r^2 - d^2)(e-d)^2 + (e^2+d^2)y^2\right]^2 - 4d^2\left[(e-d)^2r^2 - e^2y^2\right]\left[(e-d)^2 - y^2\right] = 0.$$

Работа №4

1) Найти каноническое уравнение эллипса (варианты 1–9), гиперболы (варианты 10–18), параболы (варианты 19–21), эксцентриситет эллипса (варианты 22–28) или гиперболы (варианты 29–30), если известно:

1.1. Расстояние между вершинами, лежащими на большой оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10.

1.2. Хорда, соединяющая две вершины, равна 5 и наклонена к большой оси под углом $\arcsin 0{,}6$.

1.3. Фокусы $(\pm 1, 0)$, а точка $A\left(\sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ принадлежит эллипсу.

1.4. Фокусы $(\pm 2, 0)$, а уравнения директрис $x = \pm 18$.

1.5. Расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на малой оси, равно 8.

1.6. Треугольник с вершинами в фокусах и в конце малой оси — правильный. Диаметр окружности, проходящей через центр эллипса и две его вершины, равен 7.

1.7. Отрезок большой оси между фокусом F_1 и дальней вершиной A делится вторым фокусом F_2 пополам. Расстояние от F_2 до прямой, проходящей через A и вершину малой оси, равно $\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

1.8. Директрисами служат прямые $x = \pm 4$, а четырехугольник с вершинами в фокусах и концах малой оси — квадрат.

1.9. Эксцентриситет равен $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$, а четырехугольник, вершинами которого являются вершины эллипса, описан около окружности радиуса 4,8.

1.10. Расстояние между вершинами 10, а между фокусами 12.

1.11. Вещественная ось 1, а точка $M_0(1, 3)$ принадлежит гиперболе.

1.12. Директрисы $x = \pm\sqrt{\dfrac{5}{6}}$, а точка $M_0(-9, 4)$ принадлежит гиперболе.

1.13. Мнимая полуось 1, а вершина делит отрезок между фокусами в отношении 4 : 1.

1.14. Эксцентриситет равен 1,4, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2.

1.15. Точка $M_0(7, -2\sqrt{3})$ гиперболы удалена от левого фокуса на $4\sqrt{7}$.

1.16. Угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 60°, а расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно $\dfrac{3(2-\sqrt{3})}{2}$.

1.17. $A\left(-\dfrac{5}{4}, \dfrac{3}{2}\right)$ — точка гиперболы, а асимптоты $y = \pm 2x$.

1.18. $B(-1, 3)$ — точка гиперболы, а асимптоты $y = \pm 2x$.

1.19. $M_0(5, -5)$ — точка, принадлежащая параболе.

1.20. Расстояние от фокуса до директрисы равно 12.

1.21. Длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

1.22. Расстояние между фокусами равно среднему арифметическому длин осей.

1.23. Отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси делится вторым фокусом в отношении $2:1$.

1.24. Расстояние от фокуса до дальней вершины большой оси в 1,5 раза больше расстояния до вершины малой оси.

1.25. Отрезок между фокусами виден из конца малой оси под прямым углом.

1.26. Большая ось видна из конца малой оси под углом 120°.

1.27. Отрезок между фокусом и дальней вершиной большой оси виден под прямым углом из конца малой оси.

1.28. Стороны квадрата, вписанного в эллипс, проходят через фокусы эллипса.

1.29. Расстояния от точки $M_0(5,-4)$ гиперболы до директрис относятся как $2:1$.

1.30. Угол между асимптотами, содержащий фокус, равен 120°.

2) Используя преобразование параллельного переноса, привести уравнения кривых второго порядка к каноническому виду и построить их в исходной системе координат

2.1. а) $4x^2+5y^2+8x-20y+4=0$ в) $2x^2-4x+y+5=0$
б) $4x^2-9y^2-16x-18y+43=0$ г) $3x+y^2-4y-5=0$

2.2. а) $4x^2+3y^2-16x-24y+52=0$ в) $5x-y^2-2y-11=0$
б) $5x^2-y^2+10x+10y-30=0$ г) $3x^2+30x-y+77=0$

2.3. а) $10x^2+3y^2-100x+6y+223=0$ в) $5x-y^2+2y+4=0$
б) $5x^2-3y^2+40x-6y+92=0$ г) $4x^2-8x+y+2=0$

2.4. а) $5x^2+9y^2+10x-36y-4=0$ в) $4x-y^2-2y-5=0$
б) $4x^2-y^2+16x-6y+11=0$ г) $3x^2+12x-y+17=0$

2.5. а) $4x^2+9y^2-24x-36y+36=0$ в) $3x-y^2-2y-4=0$
б) $5x^2-y^2+10x-2y+29=0$ г) $4x^2+8x-y-1=0$

2.6. а) $x^2+5y^2+4x-10y+4=0$ в) $x^2-8x-y+1=0$
б) $9x^2-4y^2-18x-24y+9=0$ г) $3x-y^2-2y-16=0$

2.7. а) $2x^2+y^2-8x-2y+7=0$ в) $x^2+2x-4y-11=0$
б) $3x^2-y^2+24x+10y+20=0$ г) $4x+y^2-2y+3=0$

2.8. а) $x^2+4y^2+10x-8y+25=0$ в) $4x-y^2+2y+11=0$
б) $x^2-3y^2+4x+6y+4=0$ г) $2x^2+4x+y+3=0$

2.9. а) $4x^2+5y^2+8x-20y+4=0$ в) $2x^2-4x-y=0$
б) $9x^2-2y^2+36x-4y+16=0$ г) $x+y^2-2y+2=0$

2.10. а) $4x^2+3y^2+8x-12y+4=0$ в) $4x^2+8x+y+6=0$
б) $x^2-5y^2+4x+30y-46=0$ г) $x-y^2-2y-5=0$

2.11. а) $x^2+5y^2+8x-10y+16=0$ в) $x+y^2-2y+3=0$
б) $4x^2-y^2-8x-6y-1=0$ г) $4x^2-8x-y+1=0$

2.12. а) $4x^2 + 2y^2 - 8x + 8y + 11 = 0$ в) $x + y^2 - 8y + 21 = 0$
б) $x^2 - 9y^2 + 4x + 18y + 4 = 0$ г) $3x^2 - 6x - y + 1 = 0$

2.13. а) $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ в) $4x^2 - 8x - y + 1 = 0$
б) $x^2 - 9y^2 + 6x - 18y - 9 = 0$ г) $x + y^2 - 4y + 9 = 0$

2.14. а) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$ в) $2x^2 + 20x - y + 48 = 0$
б) $2x^2 - y^2 + 2y + 4x + 5 = 0$ г) $x + y^2 + 2y + 3 = 0$

2.15. а) $4x^2 + y^2 + 8x - 10y + 25 = 0$ в) $x^2 - 3y^2 - 16x - 6y + 1 = 0$
б) $4x^2 - 8x + y + 1 = 0$ г) $x - y^2 + 2y + 3 = 0$

2.16. а) $4x^2 + 9y^2 - 40x - 18y + 73 = 0$ в) $4x^2 - 8x - y + 2 = 0$
б) $2x^2 - 9y^2 - 16x - 18y + 43 = 0$ г) $5x - y^2 - 2y - 11 = 0$

2.17. а) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y + 4 = 0$ в) $2x^2 - 16x + y + 35 = 0$
б) $x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ г) $x + y^2 - 2y + 3 = 0$

2.18. а) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 12 = 0$ в) $3x + y^2 + 2y + 7 = 0$
б) $x^2 - 5y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ г) $x^2 + 4x + y + 9 = 0$

2.19. а) $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 4 = 0$ в) $3x^2 - 12x - y + 11 = 0$
б) $10x^2 - y^2 - 20x - 2y - 1 = 0$ г) $x + y^2 - 2y + 5 = 0$

2.20. а) $4x^2 + 3y^2 - 8x - 12y + 4 = 0$ в) $2x + y^2 + 2y + 7 = 0$
б) $2x^2 - y^2 + 12x - 10y - 5 = 0$ г) $x^2 + 2x + y + 3 = 0$

2.21. а) $4x^2 + y^2 + 8x - 4y + 4 = 0$ в) $4x - y^2 + 4y + 16 = 0$
б) $5x^2 - 3y^2 + 20x - 6y + 92 = 0$ г) $2x^2 + 4x + y + 6 = 0$

2.22. а) $x^2 + 16y^2 - 4x - 32y + 4 = 0$ в) $x - y^2 + 2y + 4 = 0$
б) $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$ г) $x^2 - 2x - y - 1 = 0$

2.23. а) $4x^2 - 3y^2 + 8x - 12y + 4 = 0$ в) $4x - y^2 - 2y + 7 = 0$
б) $x^2 + 2y^2 + 10x + 4y + 25 = 0$ г) $2x^2 - 16x - y + 35 = 0$

2.24. а) $x^2 + 4y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$ в) $4x - y^2 - 4y + 4 = 0$
б) $x^2 - 3y^2 - 6x - 12y = 0$ г) $2x^2 - 12x - y + 17 = 0$

2.25. а) $4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ в) $5x^2 + 10x + y + 4 = 0$
б) $2x^2 - 5y^2 + 4x + 30y - 46 = 0$ г) $3x - y^2 - 8y - 19 = 0$

2.26. а) $x^2 + 9y^2 - 54y + 2x + 1 = 0$ в) $4x^2 + 16x + y + 17 = 0$
б) $3x^2 - 5y^2 + 6x + 20y - 2 = 0$ г) $2x - y^2 + 6y - 7 = 0$

2.27. а) $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y - 5 = 0$ в) $x^2 + 10x + y + 27 = 0$
б) $2x^2 - y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$ г) $y^2 - 6y - 3x + 6 = 0$

2.28. а) $2x^2 + 9y^2 - 40x + 18y + 73 = 0$ в) $3x - y^2 - 2y + 5 = 0$
б) $4x^2 - 3y^2 + 8x + 6y + 13 = 0$ г) $4x^2 + 8x + y + 2 = 0$

2.29. а) $x^2 + 4y^2 + 2x - 24y + 33 = 0$ в) $2x - y^2 + 2y + 1 = 0$
б) $4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 11 = 0$ г) $5x^2 + 10x + y + 8 = 0$

2.30. а) $3x^2 + 4y^2 - 6x + 16y + 7 = 0$ в) $4x^2 - 8x + y + 6 = 0$
б) $3x^2 - y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$ г) $2x - y^2 - 4y = 0$

3) С помощью поворота системы координат привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду и построить её в исходной системе координат

3.1. $4x^2 - 6xy + 4y^2 = 7$	3.2. $4xy + 3y^2 = 16$
3.3. $5x^2 + 2\sqrt{3}\,xy + 3y^2 = 6$	3.4. $5x^2 + 2\sqrt{6}\,xy = 6$
3.5. $5x^2 + 4\sqrt{2}\,xy + 7y^2 = 27$	3.6. $9x^2 - 4xy + 6y^2 = 20$
3.7. $4x^2 + 24xy + 11y^2 = 20$	3.8. $9x^2 - 2\sqrt{5}\,xy - y^2 = 8$
3.9. $2x^2 - 4xy - y^2 + 6 = 0$	3.10. $x^2 - 4\sqrt{3}\,xy + 5y^2 = 7$
3.11. $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$	3.12. $x^2 + 4\sqrt{2}\,xy - y^2 = 3$
3.13. $3x^2 + 10xy + 3y^2 = 8$	3.14. $5x^2 + 12xy = 36$
3.15. $x^2 + 2\sqrt{5}\,xy - 3y^2 = 2$	3.16. $2x^2 - 2\sqrt{3}\,xy + 9 = 0$
3.17. $3x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 2y^2 = 4$	3.18. $4xy - 3y^2 + 1 = 0$
3.19. $x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$	3.20. $2x^2 + 2\sqrt{6}\,xy - 3y^2 = 12$
3.21. $3x^2 + 2\sqrt{5}\,xy + 7y^2 = 8$	3.22. $3x^2 - 4xy - 4 = 0$
3.23. $3x^2 + 3y^2 - 2xy = 4$	3.24. $3x^2 - y^2 - 8xy = 5$
3.25. $5x^2 - 5y^2 - 4\sqrt{6}\,xy = 14$	3.26. $5y^2 - 2\sqrt{6}\,xy = 6$
3.27. $4x^2 + 2\sqrt{5}\,xy = 5$	3.28. $5x^2 - 2\sqrt{2}\,xy + 4y^2 = 6$
3.29. $3x^2 + 4y^2 + 2\sqrt{2}\,xy = 10$	3.30. $7x^2 - 2\sqrt{6}\,xy + 2y^2 = 16$

4) Исследовать кривую 2-го порядка и построить её в исходной системе координат

4.1. $x^2 + y^2 - 4xy - 2x + 4y - 1 = 0$	4.2. $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 6x + 2y + 1 = 0$
4.3. $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$	4.4. $5x^2 + 12xy + 10y^2 + 6x + 6y - 1 = 0$
4.5. $-4xy + 2x^2 + 5y^2 + 8x - 2y + 9 = 0$	4.6. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 7 = 0$
4.7. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 3 = 0$	4.8. $8x^2 + 34xy + 8y^2 + 18x - 18y - 17 = 0$
4.9. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 2 = 0$	4.10. $5x^2 + 5y^2 - 2xy + 10x - 2y + 1 = 0$
4.11. $9x^2 + 16y^2 - 24xy - 8x + 19y - 6 = 0$	4.12. $2x^2 + 2y^2 + 4xy + 8x + 8y + 1 = 0$
4.13. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 2 = 0$	4.14. $25x^2 - 30xy + 9y^2 + 68x + 19 = 0$
4.15. $4x^2 + 4y^2 - 2xy - 10x + 10y - 1 = 0$	4.16. $2x^2 + 2y^2 - 4xy - 8x + 8y + 1 = 0$
4.17. $x^2 - xy + y^2 + x + y = 0$	4.18. $3x^2 + 3y^2 + 2xy - 12x - 4y + 1 = 0$
4.19. $x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 8y + 1 = 0$	4.20. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 1 = 0$
4.21. $x^2 + y^2 + 4xy - 8x - 4y + 1 = 0$	4.22. $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 6 = 0$
4.23. $x^2 + y^2 - 2xy - 2x + 2y - 7 = 0$	4.24. $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 5 = 0$
4.25. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$	4.26. $8x^2 + 6xy + 6x + 3y + 1 = 0$
4.27. $4x^2 + 4y^2 + 2xy + 12x + 12y + 1 = 0$	4.28. $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y + 1 = 0$
4.29. $3x^2 + 3y^2 + 4xy + 8x + 12y + 1 = 0$	4.30. $x^2 + y^2 - 4xy + 4x - 2y + 1 = 0$

5) Решить графически систему уравнений

5.1. $\begin{cases} 2x+y+13=0 \\ 4x^2+9y^2+20x+64y+111=0 \end{cases}$

5.2. $\begin{cases} 2x+y-1=0 \\ y^2+2x^2-7y+4x+14=0 \end{cases}$

5.3. $\begin{cases} x-3y-9=0 \\ x^2-4y^2+x-27y-45=0 \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 2x+5y-10=0 \\ 9x^2+16y^2-36x+32y-789=0 \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} 4x+y-8=0 \\ 16x^2+y^2-28x+y-8=0 \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} 6x-y-29=0 \\ 4x^2-9y^2-12x-40y+9=0 \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} 3x+2y+5=0 \\ 4x^2+9y^2+11x+20y+18=0 \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 5x+y-25=0 \\ 4x^2+y^2-36x-5y+80=0 \end{cases}$

5.9. $\begin{cases} 2x-y+6=0 \\ x^2-9y^2+4x-51y-66=0 \end{cases}$

5.10. $\begin{cases} 3x-2y+23=0 \\ x^2+4y^2+13x-34y+112=0 \end{cases}$

5.11. $\begin{cases} 4x+y-15=0 \\ 3y^2+4x+7y-12=0 \end{cases}$

5.12. $\begin{cases} 7x-y+23=0 \\ x^2-4y^2+28x-15y+121=0 \end{cases}$

5.13. $\begin{cases} 3x-4y+13=0 \\ 9x^2+y^2+57x-6y+95=0 \end{cases}$

5.14. $\begin{cases} x-4y-4=0 \\ 9x^2-y^2-67x-6y+280=0 \end{cases}$

5.15. $\begin{cases} x+2y-7=0 \\ 9x^2-y^2-2x+3y-7=0 \end{cases}$

5.16. $\begin{cases} 5x-y-8=0 \\ 4x^2-9y^2-11x+17y+8=0 \end{cases}$

5.17. $\begin{cases} 4x+y-1=0 \\ x^2+16y^2-17x+28y-44=0 \end{cases}$

5.18. $\begin{cases} 2x-3y+4=0 \\ 4x^2+y^2+18x-3y+20=0 \end{cases}$

5.19. $\begin{cases} 4x+y+12=0 \\ x^2+9y^2+23x-32y+60=0 \end{cases}$

5.20. $\begin{cases} 3x-2y-1=0 \\ x^2-9y^2+x+16y-9=0 \end{cases}$

5.21. $\begin{cases} 4x+y+9=0 \\ x^2-9y^2-13x-58y-79=0 \end{cases}$

5.22. $\begin{cases} 3x-2y+12=0 \\ 16x^2+y^2+125x+4y+165=0 \end{cases}$

5.23. $\begin{cases} 4x+3y+7=0 \\ x^2+9y^2+4x-36y+27=0 \end{cases}$

5.24. $\begin{cases} x+y+6=0 \\ x^2+11y^2+2y+32=0 \end{cases}$

5.25. $\begin{cases} 3x+y-7=0 \\ 4x^2-y^2-17x+19=0 \end{cases}$

5.26. $\begin{cases} 2x+y-9=0 \\ xy-x-2y+2=0 \end{cases}$

5.27. $\begin{cases} 5x+4y-20=0 \\ x^2+16y^2-14x+96y+188=0 \end{cases}$

5.28. $\begin{cases} 2x-y-11=0 \\ 9x^2+y^2-49x+y+46=0 \end{cases}$

5.29. $\begin{cases} 3x+5y-14=0 \\ 2x^2-9x+5y+4=0 \end{cases}$

5.30. $\begin{cases} 2x-y+6=0 \\ x^2+7x-2y+14=0 \end{cases}$

6) Убедиться, что линии, заданные уравнениями, не пересекаются. Найти наименьшее расстояние между ними. Сделать чертеж

6.1. $x-y-2=0, \quad y=x^2$

6.2. $2x+y=5, \quad \dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}=1$

6.3. $2x-y+2\sqrt{2}=0, \quad \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$

6.4. $2x+3y+6=0, \quad x=y^2-1$

6.5. $2x - y + (7\sqrt{2} - 6) = 0, \quad x^2 + 2y^2 - 6x = 0$

6.6. $x - 2y + (4 - 5\sqrt{2}\,) = 0, \quad 2x^2 + y^2 - 4y = 0$

6.7. $3x - y + \sqrt{3} = 0, \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

6.8. $2x - 5y = 0, \quad \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

6.9. $2x - y - 5 = 0, \quad \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6.10. $2x + y - 4 = 0, \quad y = 2 - 3x^2$

6.11. $4x - y + (1 - \sqrt{55}\,) = 0, \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

6.12. $x - 3y + (10 - 3\sqrt{3}\,) = 0, \quad \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

6.13. $x + 2y + (4 + \sqrt{17}\,) = 0, \quad 4x^2 + y^2 = 4$

6.14. $4x - 4y - 7 = 0, \quad y = x^2 - 2x + 1$

6.15. $x - 3y + (11 + 3\sqrt{3}\,) = 0, \quad \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{(x+1)^2}{9} = 1$

6.16. $x - 2y + 6\sqrt{17} = 0, \quad 4x^2 + y^2 = 4$

6.17. $8x - 2y + (1 + 2\sqrt{55}\,) = 0, \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

6.18. $24x + 16y + 3 = 0, \quad 3x^2 - 6x + 7 = y$

6.19. $16x + 24y + 25 = 0, \quad x = y^2 - 6y + 10$

6.20. $x - y - 3 = 0, \quad y = x^2 - 2x$

6.21. $x + y - 3\sqrt{13} = 0, \quad \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6.22. $4x - y + (\sqrt{55} - 1) = 0, \quad \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

6.23. $2x - y - 3 = 0, \quad \dfrac{(x+1)^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6.24. $48x - 16y + 25 = 0, \quad y = -4x^2 - 1$

6.25. $4x + 4y + 5 = 0, \quad y = x^2 - 2x + 1$

6.26. $x + y + \sqrt{13} = 0, \quad \dfrac{(x-2)^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

6.27. $x - y + 1 = 0, \quad x = y^2$

6.28. $2x - y + (5 + \sqrt{13}\,) = 0, \quad 9x^2 + y^2 = 9$

6.29. $24x + 16y + 3 = 0, \quad y = 3x^2 + 4$

6.30. $x - 3y = 0, \quad \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

7) Изобразить области, ограниченные заданными линиями. Перейти к заданию области с помощью неравенств

7.1. $x = \sqrt{36 - y^2}, \quad x = 6 - \sqrt{36 - y^2}$

7.2. $x^2 + y^2 = 12, \quad -\sqrt{6}\, y = x^2 \quad (y \le 0)$

7.3. $y = \sqrt{12 - x^2}, \quad y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2}, \quad x = 0 \quad (x \ge 0)$

7.4. $y = \sqrt{24 - x^2}, \quad 2\sqrt{3}\, y = x^2, \quad x = 0 \quad (x \ge 0)$

7.5. $y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad x = \sqrt{3}\, y, \quad y = \sqrt{3}\, x$

7.6. $x = 8 - y^2, \quad x = -2y$

7.7. $y^2 - 6x + x^2 = 0, \quad y^2 - 8x + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x, \quad x = \sqrt{3}\, y$

7.8. $x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = x$

7.9. $2y = \sqrt{x}, \quad 2xy = 1, \quad x = 16$

7.10. $x = 5 - y^2, \quad x = -4y$

7.11. $y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0$

7.12. $x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad x^2 - 10x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x$

7.13. $2y = 3\sqrt{x}, \quad 2xy = 3, \quad x = 9$

7.14. $y = 20 - x^2, \quad y = -8x$

7.15. $y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x, \quad x = 0$

7.16. $y = 3\sqrt{4}, \quad xy = 3, \quad x = 4$

7.17. $y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x, \quad x = 0$

7.18. $x = 2, \quad y = 0, \quad y^2 = 2x \quad (y \ge 0)$

7.19. $x = 2, \quad y = 0, \quad 2y^2 = x \quad (y \ge 0)$

7.20. $y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0$

7.21. $x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad x^2 - 8x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x$

7.22. $y = 32 - x^2, \quad y = -4x$

7.23. $y = \sqrt{x}, \quad xy = 1, \quad x = 16$

7.24. $y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}\, x, \quad x = 0$

7.25. $x = 27 - y^2, \quad x = 6y$

7.26. $y = 11 - x^2, \quad y = -10x$

7.27. $y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 10y + x^2 = 0, \quad \sqrt{3}\, y = x, \quad x = 0$

7.28. $2y = 3\sqrt{x}, \quad 2xy = 3, \quad x = 4$

7.29. $y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0$

7.30. $x^2 + 2x + y^2 = 2(1 + y), \quad x^2 + 2x + y^2 = 7 + 2y, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (x \le -1,\ y \ge 1)$

8) Перейдя к полярной системе координат, наложенной на исходную прямоугольную декартову систему, построить кривую, заданную уравнением

8.1.	$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$	8.2.	$(x^2+y^2)^3 = (x^2-y^2)^2$
8.3.	$(x^2+y^2)^2 = x(x^2-3y^2)$	8.4.	$x^2+y^2-2x = 2\sqrt{x^2+y^2}$
8.5.	$(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$	8.6.	$(x^2+y^2)^2 = (x+y)^2$
8.7.	$(x^2+y^2+4x)^2 = 4(x^2+y^2)$	8.8.	$(x^2+y^2)^4 = x^2(x^2-3y^2)^2$
8.9.	$(x^2+y^2)^{3/2} = 2xy$	8.10.	$(x^2+y^2)^2 = y(3x^2-y^2)$
8.11.	$x^2+y^2+2x = 2\sqrt{x^2+y^2}$	8.12.	$(x^2+y^2+2x)^2 = 3(x^2+y^2)$
8.13.	$(x^2+y^2)^2 = -x(x^2-3y^2)$	8.14.	$(x^2+y^2)^{3/2} = -2xy$
8.15.	$(x^2+y^2=4x)^2 = 16(x^2+y^2)$	8.16.	$x^2+y^2+y = \sqrt{x^2+y^2}$
8.17.	$(x^2+y^2)^{3/2} = y^2-x^2$	8.18.	$(x^2+y^2-4x)^2 = 4(x^2+y^2)$
8.19.	$(x^2+y^2)^2 = -y(3x^2-y^2)$	8.20.	$(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2$
8.21.	$x^2+y^2-y = \sqrt{x^2+y^2}$	8.22.	$(x^2+y^2)^{3/2} = x^2-y^2$
8.23.	$(x^2+y^2)^2 = 2(y^2-x^2)$	8.24.	$(x^2+y^2)^4 = y^2(3x^2-y^2)^2$
8.25.	$(x^2+y^2-4y)^2 = 4(x^2+y^2)$	8.26.	$x^2+y^2-2y = \sqrt{3(x^2+y^2)}$
8.27.	$x^2+y^2+2x = \sqrt{x^2+y^2}$	8.28.	$(x^2+y^2+4y)^2 = 4(x^2+y^2)$
8.29.	$(x^2+y^2-2y)^2 = 2(x^2+y^2)$	8.30.	$x^4+y^4 = x^2+y^2$

IV. Прямая и плоскость в пространстве

1. Основные сведения

1.1. Уравнения плоскости.

а) Пусть в аффинной системе координат имеется точка $M_0(\vec{r}_0)$, заданная своим радиус-вектором $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, и два неколлинеарных вектора $\vec{U}(\ell_1, m_1, n_1)$, $\vec{V}(\ell_2, m_2, n_2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 компланарно (параллельно) векторам $\vec{U}$, $\vec{V}$, записывается

$$(\vec{r} - \vec{r}_0\,\vec{U}\,\vec{V}\,) = 0, \tag{4.1}$$

или в координатах

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \ell_1 & m_1 & n_1 \\ \ell_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{4.2}$$

Раскрыв определитель, получим уравнение плоскости в виде

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{4.3}$$

которое называется общим уравнением плоскости.

Вектор $\vec{P}(A, B, C)$ называется главным вектором плоскости. Для того чтобы вектор $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ был компланарен (параллелен) плоскости (4.3), необходимо и достаточно, чтобы

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0. \tag{4.4}$$

Поскольку $(\vec{r} - \vec{r}_0\,\vec{U}\,\vec{V}\,) = (\vec{r} - \vec{r}_0[\vec{U}\,\vec{V}\,])$, где $[\vec{U}\,\vec{V}\,] = \vec{N}$, перпендикулярен $\vec{U}$, $\vec{V}$, т. е. плоскости, то уравнение плоскости запишется

$$(\vec{r} - \vec{r}_0\,\vec{N}\,) = 0,$$

где $\vec{N}$ — вектор нормали плоскости. Это уравнение можно переписать в виде

$$(\vec{r}\,\vec{N}\,) + D = 0. \tag{4.5}$$

Если $|\vec{N}\,| = 1$, то уравнение (4.5) называется нормальным (нормированным) уравнением плоскости.

Если $|\vec{N}\,| \neq 1$, то уравнение (4.5) можно нормировать, записав

$$\pm\frac{(\vec{r}\,\vec{N}\,) + D}{|\vec{N}\,|} = 0.$$

Уравнение (4.1) означает, что векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{U}$, $\vec{V}$ — линейно зависимые, т. е.

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{U}t + \vec{V}\tau$$

— параметрическое уравнение плоскости. В координатах

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell_1 t + \ell_2\tau \\ y = y_0 + m_1 t + m_2\tau \\ z = z_0 + n_1 t + n_2\tau. \end{cases}$$

б) Если имеются три точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$, $M_3(\vec{r}_3)$, заданные в аффинной системе координат своими радиус-векторами $\vec{r}_1(z_1, y_1, z_1)$, $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$, $\vec{r}_3(x_3, y_3, z_3)$, то уравнение плоскости, проходящей через эти точки

$$(\vec{r} - \vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0,$$

а в координатах

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Если три точки лежат на различных осях координат, т. е. $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$, где $a \cdot b \cdot c \neq 0$, то уравнение плоскости примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

— уравнение плоскости в отрезках.

в) Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух плоскостей $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + D_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + D_2 = 0$ является условие $(\vec{N}_1\,\vec{N}_2) = 0$.

Необходимым и достаточным условием параллельности (в том числе и совпадение) плоскостей $(\vec{r}\,\vec{N}_1) + D_1 = 0$, $(\vec{r}\,\vec{N}_2) + D_2 = 0$ является условие $[\vec{N}_1\,\vec{N}_2] = 0$.

г) Если имеется точка $M_0(\vec{r}_0)$ и плоскость $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + D = 0$, то расстояние от данной точки до данной плоскости находится по формуле

$$d = \frac{|(\vec{r}_0\,\vec{N}\,) + D|}{|\vec{N}\,|}\,,$$

т. е. записать уравнение плоскости в нормальном виде; подставить в левую часть уравнения координаты точки и взять абсолютную величину.

1.2. Уравнения прямой. Пусть в аффинной системе координат имеется точка $M_0(\vec{r}_0)$, заданная своим радиус-вектором $\vec{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, и направляющий вектор $\vec{V}(\ell, m, n)$. Тогда уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{V}$, запишется

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t \tag{4.6}$$

или в координатах

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell t \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

— параметрические уравнения прямой. Из них непосредственно следует каноническое уравнение прямой

$$\frac{x-x_0}{\ell} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}\,.$$

Соотношение (4.6) означает, что векторы $\vec{r} - \vec{r}_0$, $\vec{V}$ коллинеарны, но тогда уравнение прямой можно записать

$$[\vec{r} - \vec{r}_0\,\vec{V}] = 0$$

или

$$[\vec{r}\,\vec{V}] = \vec{a}, \quad \text{где} \quad (\vec{a}\,\vec{V}\,) = 0.$$

Прямую можно также задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей. Например:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{4.7}$$

где главные векторы $\vec{P}_1(A_1, B_1, C_1)$, $\vec{P}_2(A_2, B_2, C_2)$ неколлинеарны, т. е. $[\vec{P}_1\,\vec{P}_2] \neq 0$.

1.3. Пучком плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну общую прямую. Если прямая задана пересечением двух плоскостей, т. е. в виде (4.7) (например), то уравнение пучка будет

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α, β — любые действительные числа, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$.

Связкой плоскостей называется множество всех плоскостей, проходящих через одну общую точку S (центр связки).

Если $S(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение связки будет

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Если же точка S задана как пересечение трех плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0$, $A_3x+B_3y+C_3z+D_3 = 0$, для которых $(\vec{P}_1\,\vec{P}_2\,\vec{P}_3) \neq 0$, то уравнение связки запишется

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где α, β, γ — любые действительные числа, $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$.

1.4. Необходимым и достаточным условием:

перпендикулярности прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$ и плоскости $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + D = 0$ является $[\vec{N}\,\vec{V}\,] = 0$;

параллельности прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$ и плоскости $(\vec{r}\,\vec{N}\,) + D = 0$ — условие $(\vec{N}\,\vec{V}\,) = 0$ (в том числе и принадлежности прямой плоскости).

Если имеются две прямые $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2t$, то необходимым и достаточным условием их перпендикулярности является $(\vec{V}_1\,\vec{V}_2) = 0$; а условием параллельности (в том числе и совпадения) — $[\vec{V}_1\,\vec{V}_2] = 0$.

1.5. Если имеется точка $M_1(\vec{r}_1)$ и прямая $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}t$, то расстояние от точки M_1 до данной прямой находится по формуле:

$$d = \frac{\big|[\vec{r}_1 - \vec{r}_0\,\vec{V}\,]\big|}{|\vec{V}|}\,.$$

1.6. Литература

[1] с. 126–144
[2] с. 170–203
[3] с. 224–261
[4] с. 229–254

2. Примеры

2.1. В прямоугольной системе координат дана прямая $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}$ и плоскость $26x - y - 11z - 5 = 0$. Через точку их пересечения проведен перпендикуляр к данной прямой, лежащий в данной плоскости. Найти его уравнение.

Решение.

Точка пересечения данной прямой с данной плоскостью

$$\left\{\begin{array}{l} 26x - y - 11z - 5 = 0 \\ x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \\ z = 3 + t \end{array}\right. \longrightarrow A(1, -1, 2).$$

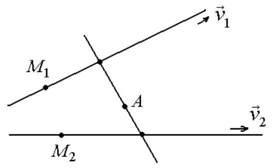
Направляющий вектор данной прямой $\vec{V}(2,3,1)$. Вектор нормали данной плоскости $\vec{N}(26,-1,-11)$. Тогда $\vec{V}_1 = [\vec{V}\,\vec{N}\,]$, перпендикулярен к $\vec{V}$ и $\vec{N}$, т.е. лежит в данной плоскости. Значит, это направляющий вектор искомой прямой

$$\vec{V}_1 = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 26 & -1 & -11 \end{vmatrix} = 32\vec{\imath} + 48\vec{\jmath} - 80\vec{k}.$$

Тогда уравнение искомого перпендикуляра

$$\frac{x-1}{-32} = \frac{y+1}{48} = \frac{z-1}{-80} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{5}\,.$$

2.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,1,0)$ и пересекающей две прямые $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$, $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{1}$.



Решение.

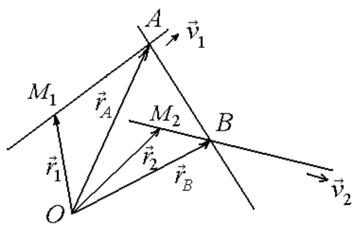
Уравнение плоскости, проходящей через точку A и первую прямую $(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot(\vec{r}_1-\vec{r}_A)\cdot\vec{V}_1 = 0$, или $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $3y - z - 3 = 0$.

Уравнение плоскости, прохдящей через точку A и вторую прямую $(\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot(\vec{r}_2-\vec{r}_A)\cdot\vec{V}_2 = 0$, или $\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 0 & -3 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$, т.е. $x - 3z - 2 = 0$.

Следовательно, искомая прямая запишется

$$\begin{cases} 3y - z - 3 = 0 \\ x - 3z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{x-2}{9} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{3}\,.$$

2.3. Даны две непараллельные прямые $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t$, $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{V}_2\tau$. Найти точки пересечения этих прямых с общим перпендикуляром к этим прямым.



Решение.

Поскольку A лежит на первой прямой, а B — на второй прямой, то

$$\vec{r}_A = \vec{r}_1 + \vec{V}_1 t_0$$
$$\vec{r}_B = \vec{r}_2 + \vec{V}_2 \tau_0.$$

Тогда $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 + \vec{V}_2\tau_0 - \vec{V}_1 t_0$. Но $\overrightarrow{AB}\perp\vec{V}_1$ и $\overrightarrow{AB}\perp\vec{V}_2$, т.е. $(\overrightarrow{AB}\,\vec{V}_1) = 0$, $(\overrightarrow{AB}\,\vec{V}_2) = 0$,

$$\begin{cases} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\vec{V}_1 + (\vec{V}_1\,\vec{V}_2)\tau_0 - V_1^2 t_0 = 0 \\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot\vec{V}_2 + V_2^2\tau_0 - (\vec{V}_1\,\vec{V}_2)t_0 = 0. \end{cases}$$

Отсюда, так как $[\vec{V}_1\,\vec{V}_2] \neq 0$ (по условию),

$$t_0 = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]\cdot\vec{V}_2}{[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]^2}\,, \quad \tau_0 = \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]\cdot\vec{V}_1}{[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]^2}\,.$$

Тогда радиус-векторы точек пересечения A и B будут

$$\vec{r}_A = \vec{r}_1 + \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]\cdot\vec{V}_2}{[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]^2}\,\vec{V}_1; \quad \vec{r}_B = \vec{r}_2 + \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\cdot[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]\cdot\vec{V}_1}{[\vec{V}_1\,\vec{V}_2]^2}\,\vec{V}_2.$$

2.4. При каком значении A прямые $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{1}$, $\begin{cases} Ax+3y-z=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ составляют угол $\arccos\dfrac{\sqrt{7}}{14}$. Система координат аффинная: $e_1=e_2=e_3=1$; $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=\dfrac{2\pi}{3}$; $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_3})=(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}_3})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.

Направляющий вектор первой прямой $\vec{V}_1(2,1,1)$

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{\vec{V}_1^2}=\sqrt{(2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)^2}=\sqrt{4e_1^2+e_2^2+e_3^2+4(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)+4(\vec{e}_1\,\vec{e}_3)+2(\vec{r}_2\,\vec{e}_3)}= \\ &= \sqrt{4+1+1+4\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{2\pi}{3}+4\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}+2\cdot1\cdot1\cos\frac{\pi}{3}}=\sqrt{7}. \end{aligned}$$

Направляющий вектор второй прямой

$$\vec{V}_2=\left\{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & A \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right\}=\{-1,\ A-1,\ 2A-3\},$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \sqrt{\vec{V}_2^2}=\sqrt{\big(-\vec{e}_1+(A-1)\vec{e}_2+(2A-3)\vec{e}_3\big)^2}= \\ &= \sqrt{1+(A-1)^2+(2A-3)^2-2(A-1)(\vec{e}_1\,\vec{e}_2)-2(2A-3)(\vec{e}_1\,\vec{e}_3)+2(A-1)(2A-3)(\vec{e}_2\,\vec{e}_3)}= \\ &= \sqrt{1+A^2-2A+1+4A^2-12A+9+A-1-2A+3+2A^2-2A-3A+3}= \\ &= \sqrt{7A^2-20A+16}, \end{aligned}$$

$$(\vec{V}_1\,\vec{V}_2)=(2\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3)\cdot\big(-\vec{e}_1+(A-1)\vec{e}_2+(2A-3)\vec{e}_3\big)=\frac{11}{2}\,A-10.$$

Но $(\vec{V}_1\,\vec{V}_2)=V_1\cdot V_2\cos\varphi$, т. е.

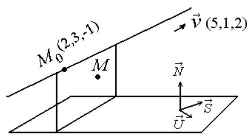
$$\frac{11}{2}\,A-10=\sqrt{7}\cdot\sqrt{7A^2-20A+16}\cdot\frac{\sqrt{7}}{14}\,.$$

Отсюда

$$A_1=2,\quad A_2=\frac{32}{19}\,.$$

2.5. Через прямую $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x+4y-3z+7=0$. Система координат аффинная: $e_1=3$, $e_2=2$, $e_3=1$, $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=\dfrac{\pi}{2}$, $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_3})=\dfrac{2\pi}{3}$, $(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}_3})=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение.



Поскольку векторы $\vec{U}(4,-1,0)$, $\vec{S}(3,0,1)$ компланарны данной плоскости, то её вектор нормали

$$\vec{N}=[\vec{U}\,\vec{S}\,]=\begin{vmatrix} [\vec{e}_2\,\vec{e}_3] & [\vec{e}_3\,\vec{e}_1] & [\vec{e}_1\,\vec{e}_2] \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=3[\vec{e}_1\,\vec{e}_2]-4[\vec{e}_3\,\vec{e}_1]-[\vec{e}_2\,\vec{e}_3].$$

Тогда уравнение искомой плоскости запишется

$$(\overrightarrow{M_0M}\,\vec{V}\,\vec{N}\,)=0. \tag{4.8}$$

Так как $(\overrightarrow{M_0M}\,\vec V\,\vec N\,) = ([\overrightarrow{M_0M}\,\vec V\,]\vec N)$,

$$\begin{aligned}
[\overrightarrow{M_0M}\,\vec V\,] &= \big((x-2)\vec e_1 + (y-3)\vec e_2 + (z+1)\vec e_3\big)\times(5\vec e_1+\vec e_2+2\vec e_3) = \\
&= 5(y-3)[\vec e_2\,\vec e_1] + 5(z+1)[\vec e + 3\,\vec e_1] + (x-2)[\vec e_1\,\vec e_2] + (z+1)[\vec e_3\,\vec e_2] + \\
&\quad + 2(x-2)[\vec e_1\,\vec e_3] + 2(y-3)[\vec e_2\,\vec e_3] = \\
&= (x-5y+13)[\vec e_1\,\vec e_2] + (5z-2x+9)[\vec e_3\,\vec e_1] + (2y-z-7)[\vec e_2\,\vec e_3],
\end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned}
(\overrightarrow{M_0M}\,\vec V\,\vec N\,) &= \big((x-5y+13)[\vec e_1\,\vec e_2] + (5z-2x+9)[\vec e_3\,\vec e_1] + (2y-z-7)[\vec e_2\,\vec e_3]\big)\times \\
&\quad \times\big(3[\vec e_1\,\vec e_2] - 4[\vec e_3\,\vec e_1] - [\vec e_2\,\vec e_3]\big) = \\
&= (3x-15y+39)[\vec e_1\,\vec e_2]^2 + (8x-20z-36)[\vec e_3\,\vec e_1]^2 + (z-2y+7)[\vec e_2\,\vec e_3]^2 + \\
&\quad + (20y-10x+15z-25)\big([\vec e_1\,\vec e_2]\cdot[\vec e_3\,\vec e_1]\big) + \\
&\quad + (11y-x-3z-34)\big([\vec e_1\,\vec e_2]\cdot[\vec e_2\,\vec e_3]\big) + (2x-8y-z+19)\big([\vec e_2\,\vec e_3]\cdot[\vec e_3\,\vec e_1]\big) = \\
&= (3x-15y+39)[\vec e_1\,\vec e_2]^2 + (8x-20z-36)[\vec e_3\,\vec e_1]^2 + (z-2y+7)[\vec e_2\,\vec e_3]^2 + \\
&\quad + (20y-10x+15z-25)\{(\vec e_1\,\vec e_3)(\vec e_1\,\vec e_2) - e_1^2(\vec e_2\,\vec e_3)\} + \\
&\quad + (11y-x-3z-34)\{(\vec e_1\,\vec e_2)(\vec e_2\,\vec e_3) - e_2^2(\vec e_1\,\vec e_3)\} + \\
&\quad + (2x-8y-z+19)\{(\vec e_2\,\vec e_3)(\vec e_1\,\vec e_3) - e_3^2(\vec e_1\,\vec e_2)\} = \\
&= (3x-15y+39)\,36 + (8x-20z-36)\,\frac{27}{4} + (z-2y+7)\,3 + \\
&\quad + (20y-10x+15z-25)\left\{\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot 0 - 9\cdot 1\right\} + \\
&\quad + (11y-x-3z-34)\left\{0\cdot 1 - 4\left(-\frac{3}{2}\right)\right\} + \\
&\quad + (2x-8y-z+19)\left\{1\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 4\cdot 0\right\} = 243x - 648y - \frac{567}{2}\,z + \frac{2349}{2}\,.
\end{aligned}$$

Тогда уравнение (4.8) плоскости будет

$$243x = 648y - \frac{567}{2}\,z + \frac{2349}{2} = 0$$

или

$$6x - 16y - 7z + 29 = 0.$$

Работа №5

1) Решить следующие задачи в прямоугольных декартовых координатах

1.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2,-5,3)$ параллельно плоскости $x+2y-z+1=0$.

1.2. Составить уравнение плоскости, расстояние которой от каждой из точек $A(1,-2,-3)$, $B(5,1,-1)$, $C(-10,9,9)$ равно 3.

1.3. Найти расстояние от плоскости $15x-10y+6z-19=0$ до начала координат.

1.4. На оси Oz найти точку, равноудаленную от плоскостей $x+4y-3z-2=0$, $5x+z+8=0$.

1.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $A(-3,1,2)$.

1.6. Найти расстояние между плоскостями

$$11x-2y-10z+15=0, \quad 11x-2y-10z-45=0.$$

1.7. Через точку $(7,-5,1)$ провести плоскость, которая отсекает на осях координат равные положительные отрезки.

1.8. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ провести плоскость, содержащую начало координат.

1.9. Найти угол между плоскостями xOy и $3x+4y+7z+8=0$.

1.10. Написать уравнение плоскости, ортогональной плоскости $5x-y+3z-2=0$ и пересекающей её по прямой, принадлежащей плоскости xOy.

1.11. Найти расстояние от точки $A(4,3,-2)$ до плоскости $3x-y+5z+1=0$.

1.12. В пучке $x+3y-5z+k(x-y-2z+4)=0$ найти плоскость, отсекающую равные отрезки на осях Ox и Oy.

1.13. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,2,3)$ параллельно плоскости $x+y+z+1=0$.

1.14. Какая из координатных плоскостей принадлежит пучку $4x-y+2z-6+k(6x+5y+ +3z-9)=0$?

1.15. Найти угол между плоскостями $3x-y+2z+15=0$, $5x+9y-3z-1=0$.

1.16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $A(0,0,1)$, $B(3,0,0)$ под углом $\dfrac{\pi}{3}$ к плоскости xOy.

1.17. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4,0,-2)$, $B(5,1,7)$ параллельно оси Ox.

1.18. Написать уравнения плоскостей делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x-y+7z-4=0$, $5x+3y-5z+2=0$.

1.19. Через ось Ox провести плоскость, образующую с плоскостью $2x+\sqrt{3}\,y-z-7=0$ угол $\dfrac{\pi}{3}$.

1.20. Написать уравнение плоскости, отстоящей от плоскости $\sqrt{3}\,x-2y+3z+1=0$ на расстоянии 3.

1.21. Через точку $B(7,-4,4)$ провести плоскость, ортогональную отрезку AB, где $A(1,3,-2)$.

1.22. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ и точку $A(1,1,1)$ провести плоскость.

1.23. Через линию пересечения плоскостей $x+5y+z=0$, $x-z+4=0$ провести плоскость под углом $\frac{\pi}{4}$ к плоскости $x-4y-8z+12=0$.

1.24. В пучке плоскостей $3x+y-2z-6=0$, $x-2y+5z-1=0$ найти плоскости, ортогональные данным.

1.25. Найти плоскость, зная, что точка $P(3,-6,2)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного на нее из начала координат.

1.26. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ провесим плоскость, параллельную оси Oy.

1.27. Являются ли плоскости $2x-2y+z+3=0$, $3x-6z+1=0$, $4x+5y+2z=0$ попарно ортогональными?

1.28. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $6x+2y-9z+121=0$.

1.29. В пучке плоскостей $x+3y-5z+k(x-y-2z+4)=0$ найти плоскость, отсекающую равные отрезки на осях Oz и Oy.

1.30. Через линию пересечения плоскостей $4x-y+3z-1=0$, $x+5y-z+2=0$ провести плоскость, ортогональную плоскости $2x-y+5z-3=0$.

2) Решить следующие задачи в прямоугольной системе координат

2.1. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-12}{4}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-1}{1}$ с плоскостью $3x+5y-z-2=0$.

2.2. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-9}{4}=\frac{y+2}{-3}=\frac{2}{1}$, $\frac{x}{-2}=\frac{y+7}{4}=\frac{z-2}{2}$.

2.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $2x+y-3z+1=0$ с прямыми $\frac{x-3}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z+1}{2}$, $\frac{x-5}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{-3}$.

2.4. Найти параметрические уравнения прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0 \\ x+3y-2z+3=0. \end{cases}$

2.5. При каком значении a плоскость $ax+3y-5z+1=0$ параллельна прямой $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{1}$?

2.6. На прямой $\begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 3x-y+4z-29=0 \end{cases}$ найти точку, одинаково удаленную от точек $A(3,11,4)$, $B(-5,-13,-21)$.

2.7. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,-3,-4)$ параллельно прямой $\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x-y+2z-1=0. \end{cases}$

2.8. Лежит ли прямая $\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z+2}{5}$ в плоскости $4x+3y-z+3=0$?

2.9. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $B(-1, 0, 5)$ параллельно прямой $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x + z + 1 = 0. \end{cases}$

2.10. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3, 1, -2)$ и прямую $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

2.11. Написать уравнение одной из прямых, пересекающих прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+4}{-2}$ под прямым углом.

2.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ ортогонально плоскости $x + 4y - 3z + 7 = 0$.

2.13. Найти плоскость, проходящую через начало координат и прямую $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = \sqrt{2}\, t \\ z = 5 - t. \end{cases}$

2.14. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямые $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-2}{4}$, $\dfrac{x-8}{3} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-6}{-2}$.

2.15. Написать уравнение одной из прямых, проходящих через начало координат и пересекающих прямую $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+4}{-2}$.

2.16. Провести плоскость через перпендикуляры, опущенные из точки $A(-3, 2, 5)$ на плоскости $4x + y - 3z + 13 = 0$, $x - 2y + z - 11 = 0$.

2.17. Найти уравнение одной из прямых, пересекающих две прямые $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+3}{-3} = \dfrac{z+4}{-2}$, $\dfrac{x-5}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-1}{-2}$.

2.18. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямые $\dfrac{x}{7} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-1}{5}$, $\dfrac{x-1}{7} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+2}{5}$.

2.19. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(4, -3, 1)$ параллельно прямым $\dfrac{x}{6} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{-3}$, $\dfrac{x+1}{5} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}$.

2.20. Определить угол между прямыми $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ \phantom{4x + {}} y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

2.21. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y+4}{1} = \dfrac{z-2}{-3}$ параллельно прямой $\dfrac{x+5}{4} = \dfrac{y-2}{7} = \dfrac{z-1}{2}$.

2.22. Найти точку пересечения прямых $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z}{-2}$, $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y+11}{2} = \dfrac{z+6}{1}$.

2.23. Через прямую $\dfrac{x-7}{4} = \dfrac{y-5}{3} = \dfrac{z-1}{6}$ провести плоскость параллельно плоскости $2x + y - 7z + 1 = 0$.

2.24. При каком значении a прямые $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z}{3}$, $\begin{cases} ax + y - 5z + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 8z + 3 = 0 \end{cases}$ взаимно перпендикулярны.

2.25. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1,0,7)$ параллельно плоскости $3x - y + 2z - 12 = 0$ и пересекающей прямую $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

2.26. Найти угол между прямыми $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 6t. \end{cases}$

2.27. Найти расстояние от точки $A(7,9,7)$ до прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

2.28. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $B(2,3,1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z-2}{3}$.

2.29. На прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z-3}{-3}$ найти точку, ближайшую к точке $A(3,2,6)$.

2.30. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $B(1,2,-1)$ на прямую $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0 \\ \phantom{4x+{}} y - 3z + 2 = 0. \end{cases}$

3) Решить следующие задачи в прямоугольных декартовых координатах

3.1. Найти точку, симметричную точке $A(3,-1,1)$ относительно плоскости $x + 2y + 2z + 6 = 0$.

3.2. Найти уравнение проекции прямой $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x + y + 3z + 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $4x + 4y - 7z + 1 = 0$.

3.3. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-1}{4}$ перпендикулярно плоскости $x + 3y - z + 2 = 0$.

3.4. Найти точку, симметричную точке $B(3,-1,1)$ относительно плоскости $2x + 3y + 6z + 40 = 0$.

3.5. Написать уравнение проекции прямой $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$ на плоскость $x + 5y - z - 25 = 0$.

3.6. Найти точку, симметричную точке $A(1,2,-1)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{-1}$.

3.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,3,1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 4 = 0. \end{cases}$

3.8. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости $x + 3y - z + 2 = 0$.

3.9. Написать уравнение проекции прямой $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{5} = \dfrac{z-1}{-1}$ на плоскость $x + 5y - z - 25 = 0$.

3.10. Найти точку, симметричную точке $B(3,1,-1)$ относительно прямой $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

3.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x + 2y - 3z + 5 = 0 \\ 4x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}$ перпендикулярно плоскости, проходящей через эту же прямую и точку $A(1, 3, 1)$.

3.12. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z-2}{4}$ на плоскость $5x-y+z-4 = 0$.

3.13. Найти точку, симметричную точке $B(1, 2, -1)$ относительно прямой $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 3t. \end{cases}$

3.14. На прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-5}$ найти точку, равноотстоящую от точки $B(0, 1, 1)$ и плоскости $2x - y + 2z + 1 = 0$.

3.15. Через точку $A(1, 3, 1)$ провести плоскость, перпендикулярную прямой $\begin{cases} x - y + 2z - 1 = 0 \\ 3x - y + 2z + 2 = 0. \end{cases}$

3.16. Найти уравнение проекции прямой $\dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3}$ на плоскость $x+5y-z-25 = 0$.

3.17. На прямой $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z-1}{-1}$ найти точку, равноудаленную от точек $B(3, 0, -2)$, $C(-1, 1, 5)$.

3.18. Через точку $A(2, 1, -1)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскостям $x - y + 5z + 1 = 0,\ 2x + y - 3 = 0$.

3.19. Найти точку, симметричную точке $A(3, -1, 3)$ относительно плоскости $x + 2y + {}$ ${} + 2z + 6 = 0$.

3.20. Через точку $A(1, 3, 1)$ провести плоскость, перпендикулярную прямой $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 2x + 3y + z - 1 = 0. \end{cases}$

3.21. Найти точку, симметричную точке $B(2, -1, 1)$ относительно прямой $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y}{2} =$ $= \dfrac{z-1}{2}$.

3.22. Через прямую $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{2}$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $2x + y - z + 3 = 0$.

3.23. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1, 2, 3)$ перпендикулярно плоскостям $2x + y - z + 1 = 0,\ 3x - y + z + 2 = 0$.

3.24. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, 3, 2)$ на прямую $\begin{cases} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y + 5z + 4 = 0. \end{cases}$

3.25. На прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 1 - 6t \end{cases}$ найти точку, одинаково удаленную от точек $A(2, 3, 1)$, $B(1, -1, 3)$.

3.26. Найти точку пересечения прямых $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-5}{1}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-1}{3}$.

3.27. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(1, -1, 0)$ параллельно плоскости $x - y + z + 3 = 0$ и пересекающей прямую $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}$.

3.28. Найти точку, симметричную точке $A(1,2,-1)$ относительно прямой
$\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0 \\ 2x + \ \ y - 2z = 0. \end{cases}$

3.29. Написать уравнение проекции прямой $\begin{cases} x + 2y + \ \ z - \ \ 1 = 0 \\ 3x - \ \ y + 4z - 29 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x + y + $ $+ 3z - 1 = 0$.

3.30. Найти точку пересечения прямых $\begin{cases} 4x - y - \ \ z - \ \ 4 = 0 \\ x - y + 2z - 13 = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y - z - 1 = 0 \\ x + y - z + 3 = 0. \end{cases}$

4) Решить следующие задачи в прямоугольной системе координат

4.1. Найти радиус окружности, вписанной в $\triangle ABC$, где $A(1,2,3)$, $B(1,5,-1)$, $C(5,3,-5)$.

4.2. Найти радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, где $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$, $C(5,0,7)$, $D(3,4,2)$.

4.3. Найти уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного плоскостями $x - z - 5 = 0$, $3x + 5y + 4z = 0$.

4.4. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны вершина $C_1(6,-5,1)$ и уравнения граней $2x + 3y + 4z + 8 = 0$ $(ABCD)$, $x + 3y - 6 = 0$ (ABB_1A_1), $z + 5 = 0$ (ADD_1A_1). Найти угол между плоскостями BDD_1 и ACC_1.

4.5. Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым $\dfrac{x-6}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-10}{-1}$, $\dfrac{x+4}{-7} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-4}{3}$.

4.6. Найти уравнение оси кругового цилиндра, описанного около призмы с гранями $x - 2y + 2z + 3 = 0$, $2x + 2y + z - 6 = 0$, $5x + 14y - 2z - 21 = 0$.

4.7. Найти центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, где $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$, $C(5,0,7)$, $D(3,4,2)$.

4.8. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от вершины D до ребра AB, если $C_1(6,-5,1)$, $2x + 3y + 4z + 8 = 0$ $(ABCD)$, $x + 3y - 6 = 0$ (ABB_1A_1), $z + 5 = 0$ (ADD_1A_1).

4.9. Найти уравнение оси круговой цилиндрической поверхности, вписанной в призму с гранями $2x + 2y + z - 6 = 0$, $x - 2y + 2z + 3 = 0$, $5x + 14y - 2z - 21 = 0$.

4.10. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние между прямыми AC_1, CD_1.

4.11. Найти центр сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, где $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$ $C(5,0,7)$, $D(3,4,2)$.

4.12. Найти расстояние между ребрами AC и A_1C_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1(6,-5,1)$, $2x + 3y + 4z + 8 = 0$ $(ABCD)$, $x + 3y - 6 = 0$ (ABB_1A_1), $z + 5 = 0$ (ADD_1A_1).

4.13. Найти высоту грани ABC тетраэдра $ABCD$, опущенную из вершины C, если $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$, $D(2,1,-4)$.

4.14. Найти радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$, если $A(1,2,3)$, $B(1,5,-1)$, $C(5,3,-5)$.

4.15. Найти уравнение прямой, расположенной во внутреннем трехгранном угле тетраэдра, точки которой равноудалены от первых трех граней. Уравнения граней: $x + 2y - 2z + 3 = 0$, $4x - 4y + 7z - 9 = 0$, $8x + 4y + z - 3 = 0$, $y - z = 0$.

4.16. Найти длину высоты из вершины D тетраэдра $ABCD$, если $A(-1,-3,1)$, $B(5,3,8)$, $C(-1,-3,5)$, $D(2,1,-4)$.

4.17. Найти центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, если $A(1,2,3)$, $B(1,5,-1)$, $C(5,3,-5)$.

4.18. Найти расстояние между ребрами AA_1 и BC в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1(6,-5,1)$, $2x+3y+4z+8=0$ $(ABCD)$, $x+3y-6=0$ (ABB_1A_1), $z+5=0$ (ADD_1A_1).

4.19. Найти радиус круговой цилиндрической поверхности, вписанной в призму с гранями $x-2y+2z+3=0,\ \ 2x+2y+z-6=0,\ \ 5x+14y-2z-21=0$.

4.20. Найти уравнение биссекторной плоскости внутреннего двугранного угла между первыми двумя гранями тетраэдра. Уравнения граней $x+2y-2z+3=0$, $4x-4y+7z-9=0$, $8x+4y+z-3=0$, $y-z=0$.

4.21. Найти уравнение общего перпендикуляра к прямым
$\begin{cases} 2x+7y-13=0 \\ 3x-2z-\ \ 1=0, \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x+y-8=0 \\ 2x+y-z=0. \end{cases}$

4.22. Найти расстояние от вершины A_1 до грани B_1BD в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1(6,-5,1)$, $2x+3y+4z+8=0$ $(ABCD)$, $x+3y-6=0$ (ABB_1A_1), $z+5=0$ (ADD_1A_1).

4.23. Найти центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, если $A(1,2,3)$, $B(1,5,-1)$, $C(5,3,-5)$.

4.24. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти расстояние от вершины A до плоскости B_1CD.

4.25. Найти угол между AC и C_1D в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1(6,-5,1)$, $2x+3y+4z+8=0$ $(ABCD)$, $x+3y-6=0$ (ABB_1A_1), $z+5=0$ (ADD_1A_1).

4.26. Найти центр сферы, проходящей через точку $A(0,1,0)$ и касающейся плоскостей $x+y=0$, $x-y=0$, $x+y+4z=0$.

4.27. Найти угол между прямой CA_1 и плоскостью DCC_1 в параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если $C_1(6,-5,1)$, $2x+3y+4z+8=0$ $(ABCD)$, $x+3y-6=0$ (ABB_1A_1), $z+5=0$ (ADD_1A_1).

4.28. Найти радиус сферы, вписанной в тетраэдр $ABCD$, если $A(1,2,3)$, $B(-2,8,9)$, $C(5,0,7)$, $D(3,4,2)$.

4.29. Найти радиус кругового цилиндра, описанного около призмы с гранями $x-2y+$ $+2z+3=0,\ \ 2x+2y+z-6=0,\ \ 5x+14y-2z-21=0$.

4.30. Найти радиус сферы, проходящей через точку $A(0,1,0)$ и касающейся плоскостей $x+y=0,\ \ x-y=0,\ \ x+y+4z=0$.

5) Решить следующие задачи в аффинных координатах, где $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$, $(\widehat{\vec{e}_1,\vec{e}_2})=(\widehat{\vec{e}_2,\vec{e}_3})=(\widehat{\vec{e}_3,\vec{e}_1})=\omega$.

5.1. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1,3,1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z+2}{21}$. $\ \omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.2. Через точку $A(1,-1,2)$ провести прямую перпендикулярно плоскости $x-3y+2z+1=0$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{2}{5}\right)$.

5.3. Через линию пересечения плоскостей $3x+y-2z-6=0$, $x-2y+5z-1=0$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $3x+y-2z-6=0$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.4. Через точку $B(7,-4,4)$ провести плоскость, ортогональную отрезку AB, где $A(1,3,-2)$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{2}$ перпендикулярно плоскости $x+4y-3z+7=0$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

5.6. Через перпендикуляры, опущенные из точки $A(-3,2,5)$ на плоскости $4x+y-3z+13=0$, $x-2y+z-11=0$, провести плоскость. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

5.7. На прямой $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ найти точку, ближайшую к точке $B(3,2,6)$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.8. Найти точку, симметричную началу координат относительно плоскости $6x+2y-9z-$ $-122=0$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

5.9. Найти точку, симметричную точке $P(4,3,10)$ относительно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=$ $=\dfrac{z-3}{5}$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.10. При каком значении a прямые $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{3}$, $\begin{cases} ax+\ \ y-5z+1=0\\ 2x=3y-8z=3=0\end{cases}$ взаимно перпендикулярны? $\omega=\arccos\dfrac{1}{4}$.

5.11. Найти проекцию начала координат на плоскость $6x+2y-9z-122=0$. $\omega=\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)$.

5.12. Из всех прямых, пересекающих две прямые $\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{y-5}{3}=\dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x-10}{5}=\dfrac{y+7}{4}=\dfrac{z}{1}$, выбрать параллельную прямой $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y-1}{7}=\dfrac{z-3}{1}$. $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

5.13. Через точку $P(1,0,7)$ параллельно плоскости $3x-y+2z-15=0$ провести прямую, пересекающую прямую $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z}{1}$. $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

5.14. Через точку $A(4,0,-1)$ провести прямую, пересекающую прямые $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{4}=$ $=\dfrac{z-5}{3}$, $\dfrac{x}{5}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z+1}{2}$. $\omega=\dfrac{\pi}{8}$.

5.15. Через точку $A(2,1,1)$ провести прямую перпендикулярно плоскости $x+2y-3z+1=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.16. Написать уравнение плоскости, ортогональной плоскости $5x-y+3z-2=0$ и пересекающей её по прямой, принадлежащей плоскости xOy. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.17. Найти проекцию точки $A(4,3,10)$ на прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-3}{5}$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.18. Через точку $A(8,-2,4)$ провести плоскость, перпендикулярную отрезку AB, где $B(1,2,-2)$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.19. Найти уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1,1,1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z+2}{1}$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.20. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x-8}{6}=\dfrac{y-8}{1}=\dfrac{z+2}{2}$ перпендикулярно плоскости $3x+4y-8z+7=0$. $\omega=\arccos\dfrac{2}{3}$.

5.21. Через перпендикуляры, опущенные из точки $A(-8,2,5)$ на плоскости $4x+y-8z+{}+13=0$, $3x-2y+z-11=0$, провести плоскость. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.22. На прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+7}{2}=\dfrac{z-3}{-1}$ найти точку, ближайшую к точке $A(2,-1,-2)$. $\omega=\arccos\dfrac{3}{4}$.

5.23. Найти точку, симметричную точке $A(2,1,-1)$ относительно плоскости $x+y+z-5=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.24. При каком значении a прямые $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{-3}$, $\begin{cases} ax+\ \ y-5z+1=0 \\ 2x+3y-8x+3=0 \end{cases}$ взаимно перпендикулярны? $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.25. Через точку $A(3,-1,4)$ провести прямую, пересекающую прямые $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{2}={}=\dfrac{z-2}{1}$, $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{-1}$. $\omega=\dfrac{\pi}{8}$.

5.26. Найти точку, симметричную точке $P(1,2,-1)$ относительно прямой $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}={}=\dfrac{z-1}{-2}$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.27. Из всех прямых, пересекающих две прямые $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{1}$, $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{2}={}=\dfrac{z-3}{-1}$, выбрать параллельную прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{2}$. $\omega=\dfrac{\pi}{6}$.

5.28. Найти проекцию точки $A(2,1,-1)$ на плоскость $x+y+z-5=0$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

5.29. Чере точку $P(1,1,-1)$ параллельно плоскости $2x+y-3z+11=0$ провести прямую, пересекающую прямую $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z+1}{4}$. $\omega=\dfrac{\pi}{4}$.

5.30. Найти проекцию точки $A(1,2,-1)$ на прямую $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{-2}$. $\omega=\dfrac{\pi}{3}$.

6) Найти:

6.1. Проекцию точки $M_0(\vec r_0)$ на плоскость $\vec r=\vec r_1+\vec U t+\vec V\tau$.

6.2. Расстояние от точки $M_0(\vec r_0)$ до прямой $[\vec r\,\vec V\,]=\vec a$, где $(\vec a\,\vec V\,)=0$.

6.3. Уравнение перпендикуляра из точки $M_0(\vec r_0)$ на плоскость $\vec r=\vec r_1+\vec U t+\vec V\tau$.

6.4. Точку, симметричную точке $M_1(\vec r_1)$ относительно прямой $\vec r=\vec r_0+\vec V t$.

6.5. Уравнение перпендикуляра к двум непараллельным прямым $\vec r=\vec r_0+\vec V_0 t$ и $[\vec r\,\vec V_1]=\vec a_1$, где $(\vec a_1\,\vec V_1)=0$.

6.6. Проекцию точки $M_1(\vec r_1)$ на прямую $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$.

6.7. Точку, симметричную точке $M_0(\vec r_0)$ относительно плоскости $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.8. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(\vec r_1)$ на прямую $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$.

6.9. Расстояние между скрещивающимися прямыми $\vec r = \vec r_0 + \vec V_0 t$, $[\vec r\, \vec V_1] = \vec a_1$, где $(\vec a_1\, \vec V_1) = 0$.

6.10. Точку пересечения прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ с плоскостью $\vec r = \vec r_1 + \vec V t + \vec U \tau$.

6.11. Уравнение общего перпендикуляра к двум непараллельным прямым $[\vec r\, \vec V_1] = \vec a_1$, $[\vec r\, \vec V_2] = \vec a_2$, где $(\vec a_1\, \vec V_1) = 0$, $(\vec a_2\, \vec V_2) = 0$.

6.12. Параметрическое уравнение проекции прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$ на плоскость $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.13. Точку пересечения прямых $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$, $[\vec r\, \vec U\,] = \vec a$, где $(\vec U\, \vec a\,) = 0$.

6.14. Точку, симметричную точке $M_1(\vec r_1)$ относительно плоскости $\vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau$.

6.15. Расстояние между скрещивающимися прямыми $[\vec r\, \vec V_1] = \vec a_1$, $[\vec r\, \vec V_2] = \vec a_2$, где $(\vec a_1\, \vec V_1) = 0$, $(\vec a_2\, \vec V_2) = 0$.

6.16. Проекцию точки $M_0(\vec r_0)$ на прямую $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$.

6.17. Точку пересечения прямой $[\vec r\, \vec S\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec S\,) = 0$, и плоскости $\vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau$.

6.18. Точку, симметричную точке $M_0(\vec r_0)$ относительно прямой $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$.

6.19. Уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\vec r_0)$ на прямую $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$.

6.20. Точку пересечения прямой $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$, и плоскости $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.21. Точку пересечения прямых $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$, $\begin{cases} (\vec r\, \vec N_1) + D_1 = 0 \\ (\vec r\, \vec N_2) + D_2 = 0, \end{cases}$ где $[\vec N_1\, \vec N_2] \neq 0$.

6.22. Параметрическое уравнение проекции прямой $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$, на плоскость $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.23. Прямую, симметричную прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$ относительно плоскости $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.24. Прямую, симметричную прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$ относительно прямой $\vec r = \vec r_1 + \vec U t$.

6.25. Параметрическое уравнение проекции прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ на плоскость $\vec r = \vec r_1 + \vec U t + \vec V \tau$.

6.26. Прямую, симметричную прямой $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec V\,) = 0$, относительно плоскости $(\vec r\, \vec N\,) + D = 0$.

6.27. Прямую, симметричную прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec V t$ относительно прямой $[\vec r\, \vec U\,] = \vec a$, где $(\vec a\, \vec U\,) = 0$.

6.28. Параметрическое уравнение проекции прямой $[\vec r\, \vec S] = \vec a$, где $(\vec S\, \vec a\,) = 0$, на плоскость $\vec r = \vec r_0 + \vec U t + \vec V \tau$.

6.29. Прямую, симметричную прямой $[\vec r\, \vec S\,] = \vec a$, где $(\vec S\, \vec a\,) = 0$, относительно плоскости $\vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau$.

6.30. Прямую, симметричную прямой $[\vec r\, \vec V\,] = \vec a$, где $(\vec V\, \vec a\,) = 0$, относительно прямой $[\vec r\, \vec U\,] = \vec b$, где $(\vec U\, \vec b\,) = 0$.

7) Найти условия:

7.1. Параллельности плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0.$

7.2. Пересечения прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ и плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec V t + \vec U \tau.$

7.3. Скрещивающихся прямых $\vec r = \vec r_0 + \vec V_0 t$, $[\vec r\,\vec V_1] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V_1) = 0.$

7.4. Перпендикулярности плоскостей $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0,\ \ \vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau.$

7.5. Пересечения плоскостей $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0,\ \ \vec r + \vec V t + \vec U \tau.$

7.6. Принадлежности прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V\,) = 0$, плоскости $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0.$

7.7. Параллельности прямых $\vec r = \vec r_0 + \vec V_0 t,\ \ [\vec r\,\vec V_1] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V_1) = 0.$

7.8. Перпендикулярности прямой $[\vec r\,\vec S\,] = \vec a$, где $(\vec S\,\vec a\,) = 0$, и плоскости $\vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau.$

7.9. Совпадения плоскостей $\vec r = \vec r_1 + \vec V_1 t + \vec U_1 \tau,\ \ \vec r = \vec r_2 + \vec V_2 t + \vec U_2 \tau.$

7.10. Параллельности прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec v\,\vec A\,) = 0$, и плоскости $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0.$

7.11. Пересечения прямых $\vec r = \vec r_1 + \vec V_1 t,\ \ [\vec r\,\vec V_2] = \vec a$, где $(\vec V_2\,\vec a\,) = 0.$

7.12. Перпендикулярности плоскостей $\vec r = \vec r_1 + \vec U_1 t + \vec V_1 \tau,\ \ \vec r = \vec r_2 + \vec U_2 t + \vec V_2 \tau.$

7.13. Совпадения плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0.$

7.14. Параллельности прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ и плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec U t + \vec V \tau.$

7.15. Совпадения прямых $\vec r = \vec r_1 + \vec V_1 t,\ \ [\vec r\,\vec V_2] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V_2) = 0.$

7.16. Перпендикулярности прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ и плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec U t + \vec V \tau.$

7.17. Параллельности плоскостей $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0,\ \ \vec r = \vec r_0 + \vec V t + \vec U \tau.$

7.18. Пересечения прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V\,) = 0$ и плоскости $(\vec r\,\vec N\,) = 0.$

7.19. Параллельности плоскостей $\vec r = \vec r_1 + \vec U_1 t + \vec V_1 \tau,\ \ \vec r = \vec r_2 + \vec U_2 t + \vec V_2 \tau.$

7.20. Принадлежности прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec V\,\vec a\,) = 0$, плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec V_1 t + \vec U_1 \tau.$

7.21. Пересечения трех плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0$, $(\vec r\,\vec N_3) + D_3 = 0$ в одной точке.

7.22. Пересечения плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0.$

7.23. Принадлежности прямой $\vec r = \vec r_0 + \vec S t$ плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec U t + \vec V \tau.$

7.24. Совпадения плоскостей $(\vec r\,\vec N\,) + D = 0,\ \ \vec r = \vec r_0 + \vec U t + \vec V \tau.$

7.25. Параллельности прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V\,) = 0$, и плоскости $\vec r = \vec r_0 + \vec U t + \vec S \tau.$

7.26. Пересечения плоскостей $\vec r = \vec r_1 + \vec U_1 t + \vec V_1 \tau,\ \ \vec r = \vec r_2 + \vec U_2 t + \vec V_2 \tau.$

7.27. Пересечения прямой $[\vec r\,\vec V\,] = \vec a$, где $(\vec a\,\vec V\,) = 0$, и плоскости $\vec r = \vec r_1 + \vec S t + \vec U \tau.$

7.28. Пересечения трех плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0,\ \ \vec r = \vec r_0 + \vec U t + \vec V \tau$ в одной точке.

7.29. Пересечения трех плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_3) + D_3 = 0$ по одной прямой.

7.30. Пересечения трех плоскостей $(\vec r\,\vec N_1) + D_1 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_2) + D_2 = 0,\ \ (\vec r\,\vec N_3) + D_3 = 0$ по трем параллельным прямым.

V. Поверхности

1. Основные сведения

1.1. Под поверхностью второго порядка понимают геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлтворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (5.1)$$

причем $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Порядок индексов у коэффициентов уравнения безразличен, т. е. $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{14} = a_{41}$, $a_{24} = a_{42}$, $a_{34} = a_{43}$.

Сделав параллельный перенос прямоугольной декартовой системы координат

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c \quad (5.2)$$

и приравняв нулю коэффициенты нового уравнения при x', y', z', получим систему

$$\begin{cases} a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c + a_{14} = 0 \\ a_{21}a + a_{22}b + a_{23}c + a_{24} = 0 \\ a_{31}a + a_{32}b + a_{33}c + a_{34} = 0 \end{cases} \quad (5.3)$$

относительно a, b, c.

Если эта система имеет единственное решение, то уравнение поверхности запишется

$$a_{11}x'^2 + a_{22}y'^2 + a_{33}z'^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + a'_{44} = 0. \quad (5.4)$$

Очевидно, что поверхность имеет центр симметрии, который называется центром поверхности, а поверхность называется центральной.

1.2. Сделав поворот прямоугольной системы координат около начала координат, т. е. совершив преобразование

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3, \end{cases} \quad (5.5)$$

где α_1, β_1, γ_1 — углы, образованные осью Ox' с осями Ox, Oy, Oz; α_2, β_2, γ_2 — углы, образованные осью Oy' с осями Ox, Oy, Oz; α_3, β_3, γ_3 — углы, образованные осью Oz' с осями Ox, Oy, Oz.

Приравняем нулю два коэффициента (из трех) при произведении координат. Пусть это будут a'_{13}, a'_{23}. Тогда получим систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha_3 + a_{12}\cos\beta_3 + a_{13}\cos\gamma_3 = 0 \\ a_{21}\cos\alpha_3 + (a_{22} - \lambda)\cos\beta_3 + a_{23}\cos\gamma_3 = 0 \\ a_{31}\cos\alpha_3 + a_{32}\cos\beta_3 + (a_{33} - \lambda)\cos\gamma_3 = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Поскольку эта система имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда её определитель равен нулю, то получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & (a_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.7)$$

которое называется характеристическим. Оно имеет только действительные корни. Подставляя их в систему (5.6), находим направляющие косинусы одного (или нескольких) базисного орта новой системы координат.

Таким образом, с помощью преобразования (5.5) можно уничтожить в уравнении поверхности второго порядка все три члена с произведениями переменных.

1.3. Величины

$$J_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \qquad J_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad J_4 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

являются инвариантами уравнения поверхности второго порядка относительно любого преобразования прямоугольной системы координат.

Величины

$$K_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$K_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

есть инварианты уравнения поверхности второго порядка относительно преобразования (5.5) прямоугольной системы координат.

Характеристическое уравнение (5.7) теперь можно записать

$$\lambda^3 - J_1\lambda^2 + J_2\lambda - J_3 = 0. \tag{5.7$'$}$$

С помощью преобразований прямоугольной системы координат уравнение (5.1) поверхности второго порядка можно привести к одному из следующих пяти видов:

$$\begin{array}{ll}
\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \lambda_3 Z^2 + \dfrac{J_4}{J_3} = 0, & \text{если} \quad J_3 \neq 0 \\
\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 \pm \sqrt{-\dfrac{J_4}{J_2}}\, Z = 0, & \text{если} \quad J_3 = 0, \;\; J_4 \neq 0 \\
\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + \dfrac{K_3}{J_2} = 0, & \text{если} \quad J_3 = J_4 = 0, \;\; J_2 \neq 0 \\
\lambda_1 X^2 \pm 2\sqrt{-\dfrac{K_3}{J_1}}\, Y = 0, & \text{если} \quad J_3 = J_4 = J_2 = 0, \;\; K_3 \neq 0 \\
\lambda_1 X^2 + \dfrac{K_2}{J_1} = 0, & \text{если} \quad J_3 = J_4 == J_2 = K_3 0, \;\; J_1 \neq 0,
\end{array}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — ненулевые корни характеристического уравнения (5.7$'$).

1.4. а) Цилиндрическая поверхность есть поверхность, образованная параллельными между собой прямыми, которые называются образующими цилиндрической поверхности.

Если какая-либо плоскость, пересекающая все образующие, пересекает цилиндрическую поверхность по линии C, то эта линия C называется направляющей цилиндрической поверхности.

Теорема. *Если уравнение*

$$F(x, y) = 0$$

в плоскости xOy определяет некоторую линию C, то в пространстве это уравнение определяет цилиндрическую поверхность с направляющей линией C и образующими, параллельными оси Oz.

б) Конической поверхностью называется поверхность, образованная множеством прямых, проходящих через одну точку S, называемую вершиной этой поверхности. Прямые называются образующими конической поверхности.

Если какая-либо плоскость, не проходящая через вершину S, пересекающая все образующие конической поверхности, пересекает её по линии C, то эта линия C называется направляющей конической поверхности.

Теорема. *Уравнение*

$$F(x, y, z) = 0,$$

где $F(x, y, z)$ — однородная функция любой степени, определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат.

в) Поверхностью вращения с осью вращения d называется поверхность, образованная вращением некоторой линии C вокруг неподвижной прямой d.

Теорема. *Если в прямоугольной системе координат задана линия*

$$F(x, z) = 0,$$

тогда уравнение поверхности вращения этой линии вокруг оси Oz будет

$$F\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}\,, z\right) = 0.$$

Замечание. В последнем уравнении иногда можно взять лишь один знак.

1.5. Литература

[1] с. 188–210; 87–92

[2] с. 284–313; 402–438; 223–230

[3] с. 266–280

[4] с. 255–277; 283–318; 277-283

2. Примеры

2.1. Привести уравнение поверхности

$$x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y + 2z = 0$$

к каноническому виду. Записать преобразование координат.

Решение.

$$J_1 = 7, \quad J_2 = 0, \quad J_3 = -36, \quad J_4 = 36, \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0.$$

Поскольку $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -2$, то уравнение будет

$$4X^2 + 6Y^2 - 2Z^2 - 1 = 0$$

или

$$\frac{X^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right)^2} - \frac{Z^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \text{ — однополостный гиперболоид.}$$

Координаты центра (система (5.3))

$$\begin{cases} a+b+3c-1=0\\ a+5b+c+3=0\\ 3a+b+c+1=0 \end{cases} \longrightarrow O'\left(-\frac{1}{3}\,,\ -\frac{2}{3}\,,\ \frac{2}{3}\right).$$

Подставив $\lambda_1=3$ в систему (5.6), получим

$$\begin{cases} 2\cos\alpha_1-\cos\beta_1-3\cos\gamma_1=0\\ \cos\alpha_1+2\cos\beta_1+\cos\gamma_1=0\\ 3\cos\alpha_1+\cos\beta_1-2\cos\gamma_1=0. \end{cases}$$

Третье уравнение есть следствие первых двух, т. е.

$$\begin{cases} 2\cos\alpha_1-\cos\beta_1-3\cos\gamma_1=0\\ \cos\alpha_1+2\cos\beta_1+\cos\gamma_1=0 \end{cases} \tag{*}$$

Но так как $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$ — направляющие косинусы единичного вектора, то

$$\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=1. \tag{**}$$

Из (*), (**) находим

$$\cos\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \cos\beta_1=-\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \cos\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\,,\quad \text{т. е. } \vec{\imath}\,'.$$

Аналогично по следующим корням $\lambda_2=6$, $\lambda_3=-2$ находим:

$$\cos\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\quad \cos\beta_2=\frac{2}{\sqrt{6}}\,,\quad \cos\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\quad \text{т. е. } \vec{\jmath}\,',$$

$$\cos\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \cos\beta_3=0,\quad \cos\gamma_3=-\frac{1}{\sqrt{2}}\,,\quad \text{т. е. } \vec{k}\,'.$$

Тогда общее преобразование координат запишется

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,X+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,Y+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,Z\\ y=-\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,X+\dfrac{2}{\sqrt{6}}\,Y\\ z=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\,X+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\,Y-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\,Z\,. \end{cases}$$

2.2. Найти уравнение поверхности, полученной вращением кривой $4x^2-8x+y^2=0$ вокруг оси Oy.

Решение.

Уравнение поверхности будет

$$4\Big(\pm\sqrt{x^2+z^2}\Big)^2\mp 8\sqrt{x^2+z^2}+y^2=0$$

или

$$\big(4x^2+y^2+4z^2\big)^2=64(x^2+y^2) \text{ — замкнутый тор.}$$

2.3. Найти уравнение поверхности, полученной вращением прямой $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$ около прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

Решение.

Поскольку обе прямые проходят через точку $A(3,1,2)$, то поверхностью вращения будет круговой конус с вершиной в точке A, осью $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$ и одной из образующих $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{1}$. Тогда любая образующая составляет с осью такой же угол, как и данная, т. е.

$$\cos\varphi=\frac{(\vec{V}_1\vec{V}_2)}{V_1\cdot V_2}=\frac{1\cdot 2+1\cdot(-1)+1\cdot 1}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Уравнение произвольной образующей косинуса

$$\frac{x-3}{x_0-3}=\frac{y-1}{y_0-1}=\frac{z-2}{z_0-2},$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — любая точка конуса (но не вершина). Её направляющий вектор $\vec{V}(x_0-3,\ y_0-1,\ z_0-2)$. Тогда, так как

$$\frac{(\vec{V}\,\vec{V}_2)}{V\cdot V_2}=\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

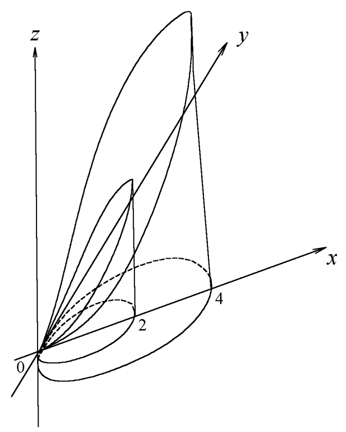
то

$$\frac{(x_0-3)\,2+(y_0-1)(-1)+(z_0-2)\cdot 1}{\sqrt{(x_0-3)^2+(y_0-1)^2+(z_0-2)^2}\cdot\sqrt{4+1+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда получаем уравнение конуса (сняв с переменных индекс)

$$10x^2+y^2+z^2-4xy+4xz-2yz-72x+46y-34z+119=0.$$

2.4. Изобразить область, ограниченную поверхностями $\rho=2\cos\varphi$, $z=\rho^2$, $\rho=4\cos\varphi$, $z=0$, заданными в цилиндрических координатах.



Решение.

Воспользуемся формулами перехода между цилиндрическими и специально выбранными прямоугольными декартовыми координатами

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, & \rho\ge 0\\ y=\rho\sin\varphi, & 0\le\varphi<2\pi\\ z=z. \end{cases}$$

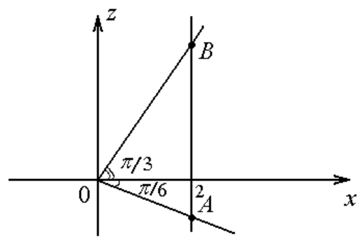
В плоскости $z=0$ уравнения $\rho=2\cos\varphi$, $\rho=4\cos\varphi$ определяют окружности $(x-1)^2+y^2=1$, $(x-2)^2+$ $+y^2=4$. Значит, в пространстве это два круговых цилиндра с образующими, параллельными оси Oz, которые ограничивают тело с “боков”. Снизу тело ограничено плоскостью $z=0$.

В полуплоскости $\varphi=0$ линия $z=\rho^2$ — полупарабола, т. е. в пространстве $z=\rho^2$ — параболоид вращения этой полупараболы около оси z. Он ограничивает тело сверху.

2.5. Изобразить область, ограниченную поверхностями $r\cos\theta = 2$, $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$, заданными в сферических координатах.

Решение.

Воспользуемся формулами, связывающими сферические координты и специально выбранные прямоугольные декартовы координаты



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\,\cos\theta, & \rho \geq 0 \\ y = r\sin\varphi\,\cos\theta, & 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z = r\sin\theta, & |\theta| \leq \frac{\pi}{2}\,. \end{cases}$$

В полуплоскости $\varphi = 0$ (т.е. в полуплоскости zOx, где $x \geq 0$) уравнения $r\cos\theta = 2$, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$ задают: прямую $x = 2$, луч $\theta = \dfrac{\pi}{3}$, луч $\theta = -\dfrac{\pi}{6}$.

Значит поверхности будут являться поверхностями вращения этих линий около оси Oz. А тело, ограниченоое этими поверхностями есть тело, получаемое вращением $\triangle OAB$ около оси Oz, т.е. круговой цилиндр $\left(\text{радиуса 2, высотой } \dfrac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ с вырезанными круговыми конусами $\left(\text{верхний — высотой } 2\sqrt{3}\text{; нижний — высотой } \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

2.6. Найти геометрическое место прямых, перпендикулярных прямой $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{0}$, и пересекающих прямые $\dfrac{x-6}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{}$, $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-8}{2} = \dfrac{z+4}{-2}$. Система координат прямоугольная.

Решение.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка искомой прямой, а $\vec{V}(\ell, m, n)$ — её направляющий вектор. Тогда условия перпендикулярности первой прямой и пересечения со второй и с третьей прямой запишутся

$$2\ell + 3m = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 - 6 & y_0 & z_0 - 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_0 & y_0 - 8 & z_0 + 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ \ell & m & n \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{cases} \ell \cdot 2 & - m(-3) & & = 0 \\ \ell(y_0 - 2z_0 + 2) & - m(x_0 - 3z_0 - 3) & + n(2x_0 - 3y_0 - 12) & = 0 \\ \ell(8 - 2y_0 - 2z_0) & - m(-2x_0 - 3z_0 - 12) & + n(2x_0 - 3y_0 + 24) & = 0. \end{cases}$$

Поскольку $\ell^2 + m^2 + n^2 \neq 0$, то

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ y_0 - 2z_0 + 2 & x_0 - 3z_0 - 3 & 2x_0 - 3y_0 - 12 \\ 8 - 2y_0 - 2z_0 & -2x_0 - 3z_0 - 12 & 2x_0 - 3y_0 + 24 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $\dfrac{x_0^2}{36} - \dfrac{y_0^2}{16} = z_0$ или так как точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ была произвольная, то

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = Z \text{ — гиперболический параболоид.}$$

2.7. При каком D плоскость $x-2y-2z+D=0$ касается эллипсоида $\dfrac{x^2}{144}+\dfrac{y^2}{36}+\dfrac{z^2}{9}=1$?
Решение.
Линия пересечения данной плоскости и эллипсоида

$$\begin{cases} x-2y-2z+D=0 \\ x^2+9y^2+16z^2=144 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x-2y-2z+D=0 \\ 8y^2+8yz+20z^2-4Dy-4Dz+(D^2-144)=0, \end{cases}$$

т. е. кривая 2-го порядка, лежащая в данной плоскости. Эта кривая на плоскость yOz проектируется в кривую второго порядка

$$8y^2+8yz+20z^2-4Dy-4Dz+(D^2-144)=0$$

эллиптического типа, так как $J_2=\begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 20 \end{vmatrix}=144>0.$

Для того чтобы данная плоскость касалась эллипсоида нужно, чтобы была только одна точка пересечения. Это возможно тогда и только тогда, когда кривая эллиптического типа будет распадаться на две мнимые пересекающиеся прямые, т. е. $J_3=0$

$$J_3\equiv\begin{vmatrix} 8 & 4 & -2D \\ 4 & 20 & -2D \\ -2D & -2D & D^2-144 \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда получаем $D=\pm 18$. Следовательно, получаем две касательные плоскости

$$x-2y-2z\pm 18=0.$$

Работа №6

1) Привести данное уравнение 2-го порядка к каноническому виду, записав преобразование координат, и определить тип поверхности. Построить схематически линии пересечения поверхности с координатными плоскостями и саму поверхность (система координат прямоугольная).

1.1. $157 - 16x + 16y^2 + 2z + 4x^2 + 96y + z^2 = 0$

1.2. $4z + 3x^2 - 4y + z^2 + 8 + 6x + y^2 = 0$

1.3. $-36x + 3 + 4z^2 - 48y - 36x^2 + 12y^2 = 0$

1.4. $8x - 14 - y^2 + 8z + 4z^2 - 8x^2 = 0$

1.5. $-8x - z^2 + 10z - y^2 - 24 - 2y + 4x^2 = 0$

1.6. $-12y + x^2 + 5 + 8x + z^2 - 2z - 3y^2 = 0$

1.7. $-24x + 2y^2 + 41 + z^2 - 8y + 6z = 0$

1.8. $-16y - 10z + 2x^2 - 4x - z^2 + 25 = 0$

1.9. $-12y + 4z + 2y^2 + z^2 + 12 = 0$

1.10. $-9 - 2z^2 - 6x + x^2 - 8z = 0$

1.11. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y = 0$

1.12. $x^2 + 4y^2 - 40z^2 + 4x - 8y - 16z - 12 = 0$

1.13. $x^2 + 2y^2 - 3z^2 - 2x + 4y - 6z = 0$

1.14. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 4x - 6y - 8z + 20 = 0$

1.15. $x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x - 4y + 2z + 1 = 0$

1.16. $3y^2 + 4z^2 + 24x + 12y - 72z + 260 = 0$

1.17. $x^2 + y^2 - z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$

1.18. $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2x - 4y - 12z + 8 = 0$

1.19. $9x^2 + 36y^2 - 4z^2 + 72x - 24z + 144 = 0$

1.20. $30x^2 + 24y^2 + 20z^2 - 60x - 96y - 120z + 186 = 0$

1.21. $3x^2 - 2y^2 + 6z^2 + 18x - 48z + 117 = 0$

1.22. $-2x^2 - 4y^2 + 8z^2 + 4x - 24y - 80z + 154 = 0$

1.23. $x^2 + 3y^2 - z^2 - 8x + 12y - 2z + 27 = 0$

1.24. $9x^2 + z^2 + 18x - 6y - 4z + 31 = 0$

1.25. $3y^2 - 8z^2 - 48x + 12y - 16z + 148 = 0$

1.26. $4x^2 + 9y^2 + 16x - 90y + 205 = 0$

1.27. $y^2 + 8y - 14z + 22 = 0$

1.28. $y^2 - 24z^2 + 8y + 240z - 592 = 0$

1.29. $x^2 + 36y^2 + z^2 - 6x + 72y + 4z + 48 = 0$

1.30. $6x^2 - y^2 - z^2 + 12x + 8y - 8z - 27 = 0$

2) Изобразить область, ограниченную данными поверхностями, и её проекцию на одну из координатных плоскостей. Перейти к заданию области с помощью неравенств (система — прямоугольная).

2.1. $x^2 + y^2 = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad z = 30y, \quad x = 0, \quad z = 0$

2.2. $x = 19\sqrt{2y}, \quad x = 4\sqrt{2y}, \quad z + y = 2, \quad z = 0$

2.3. $x = 7\sqrt{3y}, \quad x = 2\sqrt{3y}, \quad z + y = 3, \quad z = 0$

2.4. $x = 16\sqrt{2y}, \quad x = \sqrt{2y}, \quad z + y = 2, \quad z = 0$

2.5. $2x = 5\sqrt{y}, \quad 6x = 5y, \quad 6z = 5\left(3 + \sqrt{y}\right), \quad z = 0$

2.6. $6x = 5\sqrt{y}, \quad 18x = 5y, \quad 18z = 5\left(3 + \sqrt{y}\right), \quad z = 0$

2.7. $3x = 5\sqrt{y}, \quad 9x = 5y, \quad 9z = 5\left(3 + \sqrt{y}\right), \quad x = 0$

2.8. $x^2 + y^2 = 50, \quad x = \sqrt{5y}, \quad 11z = 6y, \quad x = 0, \quad z = 0$

2.9. $x + y = 2, \quad x = \sqrt{y}, \quad 5z = 12x, \quad z = 0$

2.10. $y = 6\sqrt{3x}, \quad y = \sqrt{3x}, \quad x + z = 3, \quad z = 0$

2.11. $x^2 + y^2 = 50, \quad y = \sqrt{5x}, \quad 11z = 3x, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.12. $x + y = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 12y, \quad z = 0$

2.13. $x + y = 4, \quad x = \sqrt{2y}, \quad 5z = 3x, \quad z = 0$

2.14. $x + y = 8, \quad y = \sqrt{4x}, \quad z = 3y, \quad z = 0$

2.15. $y = 17\sqrt{2x}, \quad y = 2\sqrt{2x}, \quad 2(x + z) = 1, \quad z = 0$

2.16. $x + y = 6, \quad y = \sqrt{3x}, \quad z = 4y, \quad z = 0$

2.17. $y = 5\sqrt{x}, \quad 3y = 5x, \quad 3z = 15 + 5\sqrt{x}, \quad z = 0$

2.18. $6y = 5\sqrt{x}, \quad 18y = 5x, \quad 18z = 5\,(3 + \sqrt{x}\,), \quad z = 0$

2.19. $y = 16\sqrt{2x}, \quad y = 4\sqrt{2x}, \quad x + z = 2, \quad z = 0$

2.20. $x^2 + y^2 = 18, \quad y = \sqrt{3x}, \quad 11z = 5x, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.21. $x = 20\sqrt{2y}, \quad x = 5\sqrt{2y}, \quad 2z + 2y = 1, \quad z = 0$

2.22. $y = \sqrt{15x}, \quad y = \sqrt{15} \cdot x, \quad z = \sqrt{15}\,(1 + \sqrt{x}\,), \quad z = 0$

2.23. $x^2 + y^2 = 8, \quad x = \sqrt{2y}, \quad 11z = 30y, \quad x = 0, \quad z = 0$

2.24. $x^2 + y^2 = 8, \quad y = \sqrt{2x}, \quad 11z = 15x, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.25. $3y = 5\sqrt{x}, \quad 9y = 5x, \quad 9z = 5\,(3 + \sqrt{x}\,), \quad z = 0$

2.26. $x + y = 4, \quad y = \sqrt{2x}, \quad z = 3y, \quad z = 0$

2.27. $x + y = 6, \quad x = \sqrt{3y}, \quad 5z = 4x, \quad z = 0$

2.28. $x^2 + y^2 = 2, \quad y = \sqrt{x}, \quad z = 15x, \quad y = 0, \quad z = 0$

2.29. $x^2 + y^2 = 18, \quad x = \sqrt{3y}, \quad 11z = 10y, \quad x = 0, \quad z = 0$

2.30. $x = 17\sqrt{2y}, \quad x = 2\sqrt{2y}, \quad 2z + 2y = 1, \quad z = 0$

3) Найти в прямоугольной системе координат уравнение:

3.1. Кругового цилиндра радиуса $\sqrt{2}$ с осью $x = 1 + t,\ \ y = 2 + t,\ \ z = 3 + t$.

3.2. Кругового конуса с вершиной $S(1, -1, -1)$, ось которого параллельна вектору $\vec{a}(1, 1, 1)$. Точка $A(-1, 2, 5)$ лежит на конусе.

3.3. Поверхности, каждая точка которой удалена от прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ в $\sqrt{2}$ раз ближе чем от прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

3.4. Геометрического места прямых, скользящих по двум прямым $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$, параллельно плоскости $x + y + z + 2 = 0$.

3.5. Поверхности вращения прямой $\begin{cases} 2y - \quad z - \sqrt{5} = 0 \\ 10x - 10y + 3\sqrt{5} = 0 \end{cases}$ вокруг прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.

3.6. Конуса с вершиной $S(1, -1, -1)$ и направляющей $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 - 2x + 1 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

3.7. Геометрического места прямых, скользящих по трем прямым $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-3}$.

3.8. Поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от прямых $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.9. Кругового цилиндра с осью $x = y = z$ и точкой $A\left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$.

3.10. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-5}{-6}$ около прямой $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.11. Поверхности, образованной движением прямой, пересекающей окружность $\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$ и прямые $x - 1 = y = z$, $\begin{cases} y = 0 \\ x + 1 = 0. \end{cases}$

3.12. Поверхности, каждая точка которой одинаково удалена от прямых $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.

3.13. Цилиндрической поверхности с направляющей $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2Ry \\ z = 0 \end{cases}$ и образующей, параллельной вектору $\vec{V}(a, b, 1)$.

3.14. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{-2}$ вокруг прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.15. Кругового конуса с вершиной $S(-1, 1, 1)$, ось которого параллельна вектору $\vec{V}(1, 1, 1)$. Точка $B(1, -2, -5)$ принадлежит конусу.

3.16. Геометрического места прямых, скользящих по двум прямым $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$; $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$, параллельно плоскости $x - y + z + 1 = 0$.

3.17. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z+5}{-6}$ вокруг прямой $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.18. Цилиндрической поверхности с образующей $x = y = z$ и направляющей $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0. \end{cases}$

3.19. Кругового конуса с вершиной $S(-1, 1, 1)$, осью, параллельной вектору $\vec{a}(1, 1, 1)$, и углом между осью и образующей равным $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.20. Геометрического места прямых, скользящих по трем прямым $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{-1}$.

3.21. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$ вокруг прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.22. Геометрического места точек, удаленных от прямой $x = y = z$ на расстояние $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3.23. Конической поверхности с вершиной $S(-1, 1, 1)$ и направляющей
$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 + 2x + 1 = 0 \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

3.24. Геометрического места прямых, пересекающих прямые $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{-1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{-1}$.

3.25. Геометрического места точек, равноудаленных от двух прямых $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

3.26. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y-4}{-3} = \dfrac{z-10}{-6}$ вокруг прямой $\dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.27. Поверхности, каждая точка которой удалена от прямой $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{1}$ в $\sqrt{2}$ дальше, чем от прямой $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$.

3.28. Геометрического места прямых, скользящих по прямым $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{1}$, параллельно плоскости $x + y - z + 1 = 0$.

3.29. Поверхности вращения прямой $\dfrac{x-1}{\sqrt{2}} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{\sqrt{2}-2}$ около прямой $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$.

3.30. Геометрического места прямых, скользящих по окружности $\begin{cases} x = b \\ y^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$ по оси Oz, параллельно плоскости $x + y + z = 0$.

4) Изобразить область, ограниченную поверхностями, уравнения которых заданы в цилиндрических координатах. Перейти к заданию области с помощью неравенств.

4.1. $\rho = 4\cos 2\varphi, \quad z = 4 - \rho^2, \quad z = 0$

4.2. $z = \rho^2, \quad z = 4$

4.3. $z = \sqrt{9-\rho^2}, \quad \rho = \sqrt{5}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{3}, \quad z = 0$

4.4. $z = 2 - \rho\sin\varphi, \quad \rho = 1, \quad z = 0$

4.5. $\rho = 8\sin 2\varphi, \quad \rho = 4, \quad z = 4 + \rho^2, \quad z = 0$

4.6. $\rho = \sin\varphi, \quad \rho = 4\sin\varphi, \quad z = \rho, \quad z = 0$

4.7. $z = \rho^2 - 4, \quad z = \sqrt{4-\rho^2}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

4.8. $z = \rho^2, \quad z = 4 - \rho\cos\varphi$

4.9. $\rho = 2\sqrt{2}\cos\varphi, \quad z = \rho^2 - 4, \quad z = 0 \quad (z \geq 0)$

4.10. $3z = 2\sqrt{9+\rho^2}, \quad z = 0, \quad \rho = 1, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

4.11. $\rho = 9\cos\varphi, \quad \rho = 12\cos\varphi, \quad z = \rho, \quad z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

4.12. $\rho^2 + z^2 = 1, \quad z = \rho^2$

4.13. $2z = 3\sqrt{4-\rho^2}, \quad 25z^2 - 4\rho^2 = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

4.14. $\rho = -2\sin\varphi, \quad 4z = 25 - 4\rho^2\cos^2\varphi, \quad z = 0$

4.15. $\rho^2 = 2\cos 2\varphi, \quad z = -\rho^2, \quad z = 1 + \rho, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}$

4.16. $\rho = \cos\varphi, \quad z = \rho, \quad z = 0$

4.17. $z^2 + \rho^2 = 25, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

4.18. $z = \sin 2\varphi, \quad \rho = 1, \quad z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

4.19. $\rho = 4\sec\left(\varphi - \dfrac{\pi}{6}\right), \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = 0, \quad z = 0, \quad z = 3 + 2\rho^2$

4.20. $z = 2\rho, \quad \rho = 1, \quad z = 0$

4.21. $\rho = 1, \quad \rho = 3, \quad z = 0, \quad z = 4, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{8}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

4.22. $z = \cos\left(\dfrac{\pi\rho}{2}\right), \quad \rho = 1, \quad (\rho \leq 1), \quad z = 0, \quad \varphi = 1, \quad \varphi = 2$

4.23. $z = \sqrt{4+\rho^2}, \quad \rho = 3\varphi, \quad z = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{4}$

4.24. $\rho^2 + z^2 = 1, \quad \rho^2 = \cos 2\varphi, \quad |\mathrm{tg}\,\varphi| \leq 1$

4.25. $z = 3\rho, \quad \rho = 4 - 3\sin\varphi, \quad z = -2, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{4}, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

4.26. $\rho^2 + z^2 = 4, \quad \rho = 2|\cos\varphi|$

4.27. $\rho^2 + \varphi^2 = \pi^2, \quad z = 2 + \sqrt{\pi^2 - \rho^2}, \quad z = 0$

4.28. $z = \rho, \quad \rho^2 + 1 = 2z^2, \quad (z \geq 0)$

4.29. $9z^2 - 4\rho^2 = 36, \quad \rho = 1 + 2\cos\varphi, \quad |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{4}$

4.30. $\rho^2 = \sin 2\varphi, \quad z = \rho(\cos\varphi + \sin\varphi), \quad z = 0, \quad |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2}$

5) Изобразить область, ограниченную поверхностями, заданными в сферических координатах. Перейти к заданию области с помощью неравенств.

5.1. $r = 1, \quad r = 7, \quad \operatorname{tg}\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{35}}\,, \quad \operatorname{tg}\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,, \quad \varphi = -\dfrac{\pi}{4}\,, \quad \varphi = 0$

5.2. $r^3(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = \sin\theta$

5.3. $r^2\sin 2\theta = 1, \quad r^2(5\sin^2\theta + 4) = 36$

5.4. $r = 4\cos\theta(2 + r\cos\theta), \quad r = 6$

5.5. $r = 2, \quad (1 - \cos^2\varphi \cdot \cos^2\theta)\, r^2 = 1$

5.6. $r = 2\sin\theta, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \left(\theta \le \dfrac{\pi}{4}\right)$

5.7. $r^2 = \cos\varphi \cdot \cos\theta$

5.8. $r = 3, \quad \theta = \dfrac{\pi}{6}\,, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

5.9. $r = 1, \quad r = 3, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{6}\,, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}$

5.10. $r = 2\sin\theta(2 + r\sin\theta), \quad r = 4$

5.11. $9r^2\cos 2\theta = 1, \quad r^2(4 + 21\sin^2\theta) = 100$

5.12. $r^2 = \cos 2\theta$

5.13. $r = \cos^2\theta\,\sin\theta$

5.14. $r\cos\theta = 4, \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}\,, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6}$

5.15. $r = 2, \quad r = 4, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{3}$

5.16. $r\cos\theta = 2, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{3}$

5.17. $r = \sin 2\varphi\,\cos^2\theta\,\sin\theta$

5.18. $r = 5, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{4}\,, \quad \theta = \dfrac{\pi}{6}, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}$

5.19. $r = 3, \quad \varphi = \pi, \quad \varphi = \dfrac{3\pi}{2}\,, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$

5.20. $r = \sin\theta(2 + r\sin\theta), \quad r = 5$

5.21. $r^3 = \cos\theta$

5.22. $r = 7, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$

5.23. $r = \cos\theta$

5.24. $r = 1, \quad r = 3, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi, \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}$

5.25. $r = 1, \quad r = 2, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}\,, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

5.26. $r = 4, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \dfrac{\pi}{2}\,, \quad \theta = \dfrac{\pi}{4}$

5.27. $r^2 = \sin 2\theta$

5.28. $r = 2, \quad \varphi = 0, \quad \varphi = \pi, \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$

5.29. $r\cos\theta = 2, \quad \theta = \dfrac{\pi}{3}\,, \quad \theta = -\dfrac{\pi}{6}$

5.30. $r = 1, \quad r\cos^2\theta = \sin\theta$

6) Привести уравнение поверхности второго порядка к каноническому виду и определить тип поверхности. Записать преобразование прямоугольных декартовых координат, приводящее уравнение к каноническому виду.

6.1. $5x^2+6y^2+7z^2-4xy+4xy-10x+8y+14z-6=0$

6.2. $4x^2+2y^2+3z^2+4xz-4yz-10x+4y+6=0$

6.3. $4x^2-2y^2+7z^2+16xy+20xz+4yz+4x+8y+10z+5=0$

6.4. $3x^2-2y^2-z^2+4xy+8xz-12yz+18x-12y-6z=0$

6.5. $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$

6.6. $x^2+y^2+5z^2-6xy+2xz-2yz-4x+8y-12z+14=0$

6.7. $2x^2+y^2+2z^2-2xy+2yz+4x-2y=0$

6.8. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z=0$

6.9. $4x^2+y^2+4z^2-4xy+8xz-4yz-12x-12y+6z=0$

6.10. $4x^2+5y^2+6z^2-4xy+4yz+4x+6y+4z-27=0$

6.11. $5x^2-y^2+z^2+4xy+6xz+2x+4y+6z-8=0$

6.12. $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$

6.13. $y^2-z^2+4xy-4xz-2x+6y+2z+8=0$

6.14. $5x^2+2y^2+5z^2+4xy-2xz+4yz+3x+2y+z=0$

6.15. $2x^2+5y^2+11z^2-20xy+4xz+16yz-24x-6y-6z-18=0$

6.16. $20x^2+8y^2+17z^2-8xy-28xz+20yz-14x-8y+26z+29=0$

6.17. $7y^2-7z^2-8xy+8xz-16x+14y+14z=0$

6.18. $x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz-x-3y-4z-1=0$

6.19. $xy+xz+x+y+1=0$

6.20. $2x^2+5y^2+2z^2-2xy-4xz+2yz+2x-10y-2z-1=0$

6.21. $x^2-2y^2+z^2+4yx-8xz-4yz-2x+8y-4z-6=0$

6.22. $4x^2+y^2+z^2+4xy-4xz-2yz+2x-2y-1=0$

6.23. $x^2+y^2+5z^2-6xy-2xz+2yz-6x+6y-6z+9=0$

6.24. $5x^2+9y^2+9z^2-12xy-6xz+12x-36z=0$

6.25. $x^2+2y^2-3z^2+12xy-8xz-4yz+14x+16y-12z+33=0$

6.26. $6x^2+3y^2+3z^2+2\sqrt{2}\,xy-2\sqrt{2}\,xz-6yz+32x-4\sqrt{2}\,y-4\sqrt{2}\,z+40=0$

6.27. $2y^2-2xy-2xz+2yz-2x+12y+10z+10=0$

6.28. $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y+2z+2=0$

6.29. $2x^2+10y^2-2z^2+12xy+8yz+12x+4y+8z-1=0$

6.30. $2x^2-4y^2-7z^2-16xy+20yz+4xz+8x+4y-10z-10=0$