Глава 1

Элементы векторной алгебры

1.1 Векторы и линейные операции над векторами

В аналитической геометрии как и в школьной геометрии вектор определяется как направленный отрезок или упорядоченная пара точек. Если первая из них есть A, а вторая B, то A называют началом, а B – концом вектора. Такой вектор записываем как $\overline{AB}$ и изображаем в виде стрелки, идущей от A к B. Векторы также обозначаем малыми латинскими буквами, например $\bar{a} = \overline{AB}$ (см. рис. 1).

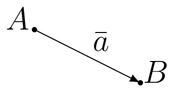

рис. 1

Среди всех векторов есть один специфичный вектор, который называют НУЛЕВЫМ вектором. По определению это вектор, у которого начало и конец совпадают: $\bar{0} = \overline{AA}$.

По определению принимают следующее соглашение:

<u>Соглашение 1</u>: $\bar{0}$ – это ЕДИНСТВЕННЫЙ вектор, направление которого НЕ ОПРЕДЕЛЕНО.

С каждым вектором $\bar{a} = \overline{AB}$ связывается тело, равное расстоянию между точками A и B. Это тело называют длиной, модулем или абсолютной величиной вектора $\bar{a}$ и обозначают $|\bar{a}|$. В последнее время это число стали называть нормой вектора и обозначать $\|\bar{a}\|$.

Из определения нулевого вектора и модуля вектора следует очевидное утверждение:

Утверждение 1.1. Вектор $\bar{a}$ есть нулевой вектор $\bar{0}$ тогда и только тогда, когда $|\bar{a}| = 0$.

Рассмотрим два вектора $\bar{a} \neq \bar{0}$ и $\bar{b} \neq \bar{0}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называют КОЛЛИНЕАРНЫМИ и обозначают $\bar{a} \parallel \bar{b}$, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Если $\bar{a} \parallel \bar{b}$ и, кроме того, они сонаправлены, то их называют ПРЯМОКОЛЛИНЕАРНЫМИ и записывают $\bar{a} \upuparrows \bar{b}$. Если же $\bar{a} \parallel \bar{b}$, но они ориентированы в противоположные стороны, то говорим, что они ОБРАТНОКОЛЛИНЕАРНЫ и записываем $\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{b}$ (см. рис. 2).

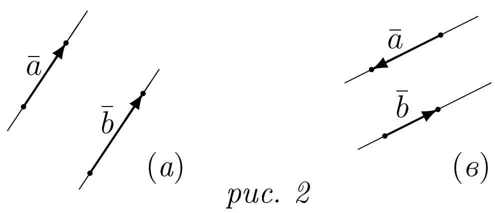

рис. 2

(a) – прямо коллинеарные векторы и $(в)$ – обратно коллинеарные векторы.

По соглашению 1 нулевой вектор не имеет направления и относительно него принимают ещё одно соглашение:

<u>Соглашение 2</u>: Нулевой вектор коллинеарен любому вектору $\bar{a}$: $\bar{0} \parallel \bar{a}$.

Замечание 1.1. В каждой математической дисциплине (здесь аналитическая геометрия) своя терминология. Мы говорим, что векторы коллинеарны, а не параллельны. Основание

для такой замены есть, но обсуждать это мы здесь не будем. Если вы скажите, что вектор параллелен, то я не расцениваю это как ошибку, а просто как безграмотность.

Рассмотрим определение равенства векторов:

Определение 1.1. Два вектора $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$ называем *равными* и пишем $\bar{a} = \bar{b}$ если выполнены два условия:
(1) $|\bar{a}| = |\bar{b}|$;
(2) $\bar{a} \upuparrows \bar{b}$.

Обсудим это определение. Пусть дан некоторый вектор $\bar{a} = \overline{AB}$ и некоторая точка A'. Построим параллелограмм $ABB'A'$ (см рис.3). Положение точки B' однозначно определяется положением точки A'. Говорим, что вектор $\overline{A'B'}$ получен из $\overline{AB}$ параллельным переносом (или сдвигом) начала A в точку A'. Так как $ABB'A'$ – параллелограмм, то $|\overline{AB}| = |\overline{A'B'}|$ и $\overline{AB} \upuparrows \overline{A'B'}$. По определению равенства векторов $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ это *один и тот же* вектор: $\bar{a} = \overline{AB} = \overline{A'B'}$. Другими словами: $\overline{AB}$ и $\overline{A'B'}$ это различные изображения одного и того же вектора $\bar{a}$.

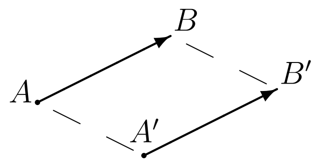

рис. 3

Если вместо нового начала вектора $\bar{a}$ брать новые точки A', A'', ..., то параллельным переносом (сдвигом) мы получим (бесконечный) класс векторов равных вектору $\bar{a}$ (см. рис. 4). Весь класс таких векторов-стрелок называют СВОБОДНЫМ вектором $\bar{a}$. Термин "свобода" здесь означает возможность произвольным сдвигом переносить начало вектора в любую точку.

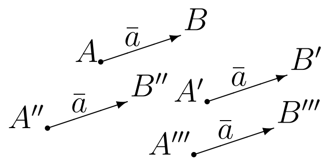

рис. 4

Замечание 1.2. Данное выше определение равенства векторов не единственное. Существуют и другие определения, но мы будем придерживаться "нашего" определения, т.к. именно оно "заточено" под те задачи, с которыми мы будем иметь дело в дальнейшем.

Переходим к вопросу об алгебраических операциях над векторами. Две "школьные" операции сложения векторов и умножение вектора на действительное число будем обозначать римскими цифрами (I) и (II), соответственно. Эти две операции также называют ЛИНЕЙНЫМИ операциями.

Пусть даны два произвольных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Т.к. векторы свободные, то их начала можно перенести в некоторую (произвольную) точку O: $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$. Построим параллелограмм $OACB$ (рис. 5a)

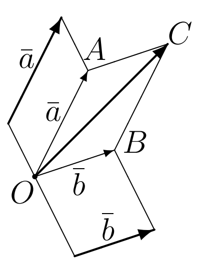

рис. 5а

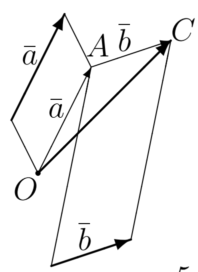

рис. 5в

Определение операции (I): вектор $\overline{OC}$ как диагональ параллелограмма $OACB$ определим как сумму векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\bar{a} + \bar{b} = \overline{OC}$.

Определение операции сложения (I), связанное с построением параллелограмма называют ПРАВИЛОМ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. Существуют другие точки зрения на определение операции (I). Пусть $\bar{a} = \overline{OA}$, но начало вектора $\bar{b}$ перенесём в точку A (рис 5$в$). Рассмотрим треугольник OAC. Тогда на вектор $\bar{a}+\bar{b}=\overline{OC}$ можно смотреть как на замыкающую ломаной OAC, состоящую у двух звеньев $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{AC}=\bar{b}$. Такую формулировку в определении суммы двух векторов, связанную с построением треугольника OAC называют ПРАВИЛОМ ТРЕУГОЛЬНИКА или ПРАВИЛОМ ЗАМЫКАЮЩЕЙ.

Замечание 1.3. Обе формулировки операции сложения векторов эквивалентности. Их “конкурентность” состоит в решении практических задач: иногда лучше использовать правило параллелограмма, а иногда правило треугольника (замыкающей).

Рассмотрим свойства операции сложения векторов (I):

$(I.1)$ Сложение векторов коммутативно: $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ для любых векторов $\bar{a},\bar{b}$.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $OACB$ (рис. 6). Пусть $\overline{OA}=\bar{a}$ и $\overline{OB}=\bar{b}$.

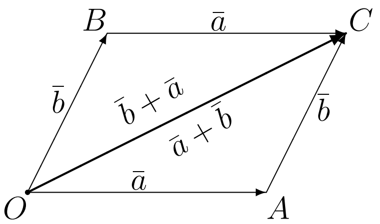

рис. 6

Из определения равенства векторов следует, что также $\overline{BC}=\bar{a}$ и $\overline{AC}=\bar{b}$.

По правилу треугольника (замыкающей) имеем:

$\bar{a}+\bar{b}=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$

$\bar{b}+\bar{a}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC}$

Откуда следует, что $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

$\square$

$(I.2)$ Сложение векторов ассоциативно: $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

Доказательство.

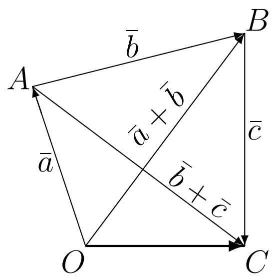

рис. 7

Введём векторы $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{AB}$ и $\bar{c}=\overline{BC}$ (рис.7).

Рассмотрим сумму слева:

$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$.

Здесь мы дважды использовали правило замыкающей:

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ и $\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}$.

Аналогично составим цепочку равенств для суммы справа:

$(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}+\overline{OC}$.

Таким образом получаем нужное равенство:

$\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

$\square$

Замечание 1.4. Значимость закона ассоциативности состоит в том, что в сумме трёх (и более) слагаемых скобки можно не ставить. Сумма $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ определяется однозначно при любом порядке действий: $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ или $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$.

$(I.3)$ Для любого вектора $\bar{a}$ выполняется $\bar{0}+\bar{a}=\bar{a}$.

Доказательство. Пусть $\bar{a}=\overline{AB}$ и $\bar{0}=\overline{AA}$. Тогда: $\bar{0}+\bar{a}=\overline{AA}+\overline{AB}=\overline{AB}$. $\square$

Определение 1.2. Вектор, обозначаемый $(-\bar{a})$, называем противоположным к вектору $\bar{a}$, если $\bar{a}+(-\bar{a})=\bar{0}$.

$(I.4)$ Каждый вектор имеет противоположный.

Доказательство. Покажем, что противоположным к вектору $\bar{a}=\overline{AB}$ будет вектор $(-\bar{a})=$ $=\overline{BA}$. Действительно, из определения правила замыкающей и определения нулевого вектора $\bar{0}=\overline{AA}$ следует: $\bar{a}+(-\bar{a})=\overline{AB}+\overline{BA}=\overline{AA}=\bar{0}$. $\square$

Вторая операция (II) над вектором – умножение вектора на действительное число. Пусть α действительное число: $\alpha\in\mathbb{R}$ и $\bar{a}$ – произвольный вектор.

Определение 1.3. Под произведением числа α на вектор $\bar{a}$ понимают ВЕКТОР, обозначаемый $\alpha\bar{a}$, который удовлетворяет двум условиям:

1° $|\alpha\bar{a}| = |\alpha||\bar{a}|$;

2° $\alpha\bar{a} \parallel \bar{a}$ и, если $\alpha \neq 0$, $\bar{a} \neq \bar{0}$, то $\begin{cases} \alpha\bar{a} \upuparrows \bar{a} \text{ для } \alpha > 0 \\ \alpha\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a} \text{ для } \alpha < 0 \end{cases}$

Во втором предложении этого определения не обговариваются случаи, когда $\alpha = 0$ и/или $\bar{a} = \bar{0}$. Эти варианты исчерпываются следующим утверждением:

Утверждение 1.2. Вектор $\alpha\bar{a}$ есть нулевой вектор $\bar{0}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$ и/или $\bar{a} = \bar{0}$.

Доказательство. 1. Необходимость. Покажем, что из условия $\alpha\bar{a} = \bar{0}$ следует, что $\alpha = 0$ и/или $\bar{a} = \bar{0}$. Так как $\alpha\bar{a} = \bar{0}$, то $|\alpha||\bar{a}| = |\alpha\bar{a}| = |\bar{0}| = 0$. Произведение двух чисел равно нулю, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю: $\alpha = 0$ и/или $|\bar{a}| = 0$. Согласно утверждению 1.1 (стр 3.) $|\bar{a}| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$, т.е. доказано, что из $\alpha\bar{a} = \bar{0}$ следует, что $\alpha = 0$ и/или $\bar{a} = \bar{0}$.

2. Достаточность. Пусть $\alpha = 0$ и/или $\bar{a} = \bar{0}$. Тогда $|\alpha\bar{a}| = |\alpha||\bar{a}| = 0$ и по утверждению 1.1 (стр 3.) из условия $|\alpha\bar{a}| = 0$ следует, что $\alpha\bar{a} = \bar{0}$. □

Рассмотрим два свойства операции (II):

$(II.1)$ Для любого вектора $\bar{a}$ выполняется $1\bar{a} = \bar{a}$.

Доказательство. Из определения операции (II) для $\alpha = 1$ получаем:

1° $|1\bar{a}| = |1||\bar{a}| = |\bar{a}|$;

2° $\alpha = 1 > 0 \Rightarrow 1\bar{a} \upuparrows \bar{a}$

и из определения равенства векторов следует, что $1\bar{a} = \bar{a}$. □

$(II.2)$ Ассоциативность операции умножения вектора на число: $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ и любого вектора $\bar{a}$.

Доказательство. Будем считать, что $\lambda, \mu \neq 0$ и $\bar{a} \neq \bar{0}$. Если хотя бы одно из условий нарушено, то доказываемое равенство $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ очевидно: $\bar{0} = \bar{0}$.

Из определения равенства векторов нам надо доказать:

$|(\lambda\mu)\bar{a}| = |\lambda(\mu\bar{a})|$ $\quad (a)$,

$(\lambda\mu)\bar{a} \upuparrows \lambda(\mu\bar{a})$ $\quad (b)$.

Равенство (a) доказывается использованием предложения 1° в определении операции (II):

$|(\lambda\mu)\bar{a}| = |\lambda\mu||\bar{a}| = |\lambda||\mu||\bar{a}|$ $\quad (*)$

$|\lambda(\mu\bar{a})| = |\lambda||\mu\bar{a}| = |\lambda||\mu||\bar{a}|$ $\quad (**)$

Правые части в формулах $(*)$ и $(**)$ равны, следовательно, равны левые: $|(\lambda\mu)\bar{a}| = |\lambda(\mu\bar{a})|$.

Условие (b) проверяется перечислением всех возможных случаев в распределении знаков для чисел λ и μ. Все варианты можно отобразить таблицей:

№ случая	1	2	3	4
λ	+	+	−	−
μ	+	−	+	−

Случай 1.

Здесь $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, следовательно, $\lambda\mu > 0$ и из предложения 2° в определении операции (II) следует: $(\lambda\mu)\bar{a} \upuparrows \bar{a}$. Аналогично, так как $\mu > 0$, то $\mu\bar{a} \upuparrows \bar{a}$ и так как $\lambda > 0$, то $\lambda(\mu\bar{a}) \upuparrows \bar{a}$. Получаем: $(\lambda\mu)\bar{a} \upuparrows \bar{a} \upuparrows \lambda(\mu\bar{a})$, т.е. $(\lambda\mu)\bar{a} \upuparrows \lambda(\mu\bar{a})$.

Случаи 2, 3, 4 рассматриваются аналогично (проверите сами). □

Отмеченные выше свойства операции сложения (I) и умножения на число (II) НЕ ЯВЛЯЮТСЯ независимыми. Они связаны двумя законами ДИСТРИБУТИВНОСТИ (приставка ди означает двойной):

$\lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} = \lambda(\bar{a} + \bar{b})$ – первый закон дистрибутивности;

$\lambda\bar{a} + \mu\bar{a} = (\lambda + \mu)\bar{a}$ – второй закон дистрибутивности.

Доказательства этих законов не сложное, но довольно громоздкое и здесь мы их рассматривать не будем.

Отмеченные свойства линейных операций (I), (II) собираем в единый список, вводя сквозную нумерацию:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \\ (2)\ \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} \\ (3)\ \exists\bar{0} : \bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \\ (4)\ \forall\bar{a}\ \exists(-\bar{a}) : \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0} \end{array}\right\} \text{свойства операции } (I)$$

$$\left.\begin{array}{l} (5)\ 1\bar{a} = \bar{a} \\ (6)\ (\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a}) \end{array}\right\} \text{свойства операции } (II)$$

$$\left.\begin{array}{l} (7)\ \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} = \lambda(\bar{a} + \bar{b}) \\ (8)\ \lambda\bar{a} + \mu\bar{a} = (\lambda + \mu)\bar{a} \end{array}\right\} \text{дистрибутивность}$$

Конечно, это не полный список всех свойств линейных операций. Можно отметить и другие свойства. Например, $0\bar{a} = \bar{0}$, $\alpha\bar{0} = \bar{0}$, $(-1\bar{a}) = (-\bar{a})$ и т.д. Однако выделяют именно восемь перечисленных свойств, т.к. они будут базовыми в определении (абстрактного) векторного пространства с которым вы скоро встретитесь в курсе АЛГЕБРА.

Доказанные свойства обосновывают правило, что в рамках выполнения операций (I) и (II) мы имеем право "работать" с векторами также как с числами.

Например: $7\bar{a} - 3(8\bar{b} - 4\bar{a}) + \bar{c} = 19\bar{a} - 24\bar{b} + \bar{c}$ и т.д.

1.2 Базисы, координаты вектора в базисе. Линейные операции в координатной форме

Вводим понятие пропорциональности векторов: говорим,что два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пропорциональны, если существует такое $\alpha \in \mathbb{R}$, что $\bar{b} = \alpha\bar{a}$ и/или существует такое $\beta \in \mathbb{R}$, что $\bar{a} = \beta\bar{b}$.

Утверждение 1.3. Нулевой вектор пропорционален любому другому.

Доказательство. Рассмотрим три случая:

Случай 1. Пусть $\bar{a} = \bar{0}$ (нулевой вектор), $\bar{b} \neq \bar{0}$. Пропорциональность векторов следует из равенства $\bar{a} = \beta\bar{b}$, которое выполняется при значении $\beta = 0$: $\bar{a} = \bar{0} = 0 \cdot \bar{b}$.

Случай 2. Пусть $\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} = \bar{0}$. Пропорциональность следует из равенства $\bar{b} = \alpha\bar{a}$, которое выполняется при значении $\alpha = 0$: $\bar{b} = \bar{0} = 0 \cdot \bar{a}$.

Случай 3. Если $\bar{a} = \bar{0}$, $\bar{b} = \bar{0}$, то пропорциональность следует, например, из равенства $\bar{b} = \alpha\bar{a}$, которое выполнено для любого значения α: $\bar{0} = \alpha\bar{0}$. □

Теорема 1.1 (Критерий коллинеарности векторов)**.** Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны ($\bar{a} \parallel \bar{b}$) тогда и только тогда, когда они пропорциональны.

Так как теорема является критерием, то надо доказать два утверждения: необходимость и достаточность. Предварительно маленькое замечание. Если хотя бы один из двух векторов нулевой: $\bar{a} = \bar{0}$ и/или $\bar{b} = \bar{0}$, то оба условия необходимости и достаточности выполнены, что с очевидностью следует из соглашения 2 (стр. 2) и утверждения 1.3 поэтому при доказательстве теоремы можно считать, что оба вектора ненулевые