

Вопросы по ВТА

5 июня 2024 г.

1. Множества и вектора \mathbb{R}^n : скалярное произведение, углы между векторами, длина вектора, расстояние, шар, окрестность точки, ограниченное множество, диаметр множества. Дополнение множества, внутреннее и граничные точки, граница, замкнутое и открытое множество, свойства открытых и замкнутых множеств, линейно связное множество, область, внутренность множества, замыкание, компактность, критерий компактности в \mathbb{R}^n .
2. Вектор-функция одного аргумента, предел, производная, геометрический смысл производной, кривая, простая кривая, гладкая кривая, касательная, теорема об однозначности проекции гладкой кривой на касательную.
3. Мера Жордана в \mathbb{R}^n : свойства меры, клеточные множества, их свойства, определение меры клеточного множества и ее свойства.
4. Мера Жордана в \mathbb{R}^n : измеримые по Жордану множества, определение меры, множества меры 0, критерий измеримости, свойства измеримых множеств.
5. Кратный интеграл Римана: определение, суммы Дарбу, необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции, свойства кратного интеграла, критерий интегрируемости (Римана), аддитивность по измеримым множествам.
6. Кратный интеграл Римана: теорема о среднем, интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость некоторых разрывных функций.
7. Кратный интеграл Римана: измеримость графика и “подграфика” интегрируемой функции.
8. Сведение кратного интеграла к повторному.
9. Замена переменных в кратном интеграле.
10. Длина дуги кривой, натуральный параметр.
11. Криволинейный интеграл 1 рода. Физический смысл, свойства, формула для вычисления.
12. Криволинейный интеграл 2 рода. Физический смысл, свойства, формула для вычисления. Циркуляция.
13. Формула Грина.
14. Теорема “4 условия эквивалентны”. Восстановление дифференцируемой функции комплексного переменного по действительной (мнимой части).
15. Поверхности. Простая гладкая поверхность, кусочно-гладкая поверхность. Окрестность точки на поверхности. Компактность простой гладкой поверхности. Касательная плоскость, нормаль, их независимость от параметризации. Однозначное проектирование окрестности точки и достаточно малого куска на касательную плоскость.
16. Площадь поверхности. Свойства площадей.
17. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности и углы между кривыми на поверхности.
18. Поверхностные интегралы 1 рода. Теорема о среднем.
19. Поверхностный интеграл 2 рода. Формулы для вычисления. Поток поля.
20. Односвязная область в трехмерном евклидовом пространстве. Формула Стокса.
21. Объемно-односвязная область. Формула Гаусса-Остроградского.
22. Скалярные и векторные поля. Градиент и производная по направлению. Векторные линии и векторные трубки. Инвариантность ротора и дивергенции.

23. Потенциальное, соленоидальное и лапласово поле. Скалярный и векторный потенциал. Задачи Дирихле и Неймана. Уравнение неразрывности.
24. Взаимный базис. Преобразование базиса касательного пространства при замене координат. Векторы и ковекторы. Градиент в криволинейных координатах.
25. Связь координат вектора в основном и взаимном базисах. Метрический тензор. Жонглирование индексами.
26. Символы и тензор Леви-Чивитты. Векторное и смешанное произведение. Их преобразования при замене координат.
27. Тензоры, основные операции (линейная комбинация, умножение, перестановка индексов, свертка).
28. Симметричные и кососимметричные тензоры. Симметризирование и альтернация. Бивектор и m -вектор.
29. Метрический тензор. Свойства. Евклидовы и псевдоевклидовы пространства.
30. Дифференциальные формы: определение, примеры.
31. Преобразование форм в 3-мерном пространстве при замене координат.
32. Внешний дифференциал дифференциальной формы. Точная и замкнутая форма. Теорема Пуанкаре (без доказательства). Связь с векторным анализом.
33. Кососимметричные тензоры и внешние формы. Дуальные объекты.
34. Ограничение тензоров с нижними индексами. Ограничение метрического тензора и ограничение форм.
35. Интегрирование дифференциальных форм. Формула Стокса в записи через дифференциальные формы (без доказательства). Частные случаи: формула Остроградского, формула Стокса. Интегрирование функции с помощью метрического тензора.