



ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА ЧАСТЬ I

СТЕПАНЬЯНЦ  
КОНСТАНТИН ВИКТОРОВИЧ

---

ФИЗФАК МГУ

---

КОНСПЕКТ ПОДГОТОВЛЕН  
СТУДЕНТАМИ, НЕ ПРОХОДИЛ  
ПРОФ. РЕДАКТУРУ И МОЖЕТ  
СОДЕРЖАТЬ ОШИБКИ.  
СЛЕДИТЕ ЗА ОБНОВЛЕНИЯМИ  
НА [VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).

ЕСЛИ ВЫ ОБНАРУЖИЛИ  
ОШИБКИ ИЛИ ОПЕЧАТКИ,  
ТО СООБЩИТЕ ОБ ЭТОМ,  
НАПИСАВ СООБЩЕСТВУ  
[VK.COM/TEACHINMSU](https://vk.com/teachinmsu).



БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА  
СТУДЕНТА ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА МГУ  
**КАМИНСКОГО АЛЕКСЕЯ СЕРГЕЕВИЧА**



## Содержание

<b>Семинар 1</b>	<b>5</b>
Системы координат . . . . .	5
Декартова система координат . . . . .	5
Полярная система координат . . . . .	7
Цилиндрические координаты . . . . .	12
Сферические координаты . . . . .	14
Параболические координаты . . . . .	15
<b>Семинар 2</b>	<b>18</b>
Движение механической системы при наложенных связях. Лагранжев формализм . . . . .	18
Условия связи. Обобщённые координаты . . . . .	18
Виртуальные перемещения . . . . .	20
Идеальные связи . . . . .	20
Уравнения Лагранжа . . . . .	23
<b>Семинар 3</b>	<b>29</b>
Примеры описания движения при помощи уравнений Лагранжа. Интегралы движения . . . . .	29
Описание движения с помощью уравнений Лагранжа. Определение интеграла движения . . . . .	29
Правила нахождения интегралов движения . . . . .	34
<b>Семинар 4</b>	<b>38</b>
Обобщённый импульс. Функции Лагранжа для движущейся частицы . . . . .	38
Функция Лагранжа для простейших случаев . . . . .	38
Физический смысл интегралов движения . . . . .	40
Функция Лагранжа для релятивистской частицы . . . . .	42
Функция Лагранж заряженной частицы в электромагнитном поле . . . . .	44
<b>Семинар 5</b>	<b>47</b>
Движение заряженной частицы в электромагнитном поле . . . . .	47
Правило построения обобщённой энергии по функции Лагранжа . . . . .	47
Калибровочные преобразования. Неоднозначность функции Лагранжа . . . . .	48
Движение заряженной частицы в электромагнитном поле . . . . .	50
<b>Семинар 6</b>	<b>55</b>
Движение заряженной частицы в магнитном поле. Примеры . . . . .	55
Заряженная бусинка на кольце . . . . .	55
Частица в неоднородном магнитном поле . . . . .	56
Частица в поле магнитного монополя . . . . .	58
Закон движения частицы в магнитном поле . . . . .	60
<b>Семинар 7</b>	<b>65</b>
Исследование одномерного движения . . . . .	65

Гармонический осциллятор . . . . .	67
<b>Семинар 8</b>	<b>75</b>
Качественное исследование одномерного движения . . . . .	75
Движение в центральном поле . . . . .	79
Качественное исследование движения в центральном поле . . . . .	82
<b>Семинар 9</b>	<b>85</b>
Движение в центральном поле . . . . .	85
Падение на силовой центр . . . . .	93
<b>Семинар 10</b>	<b>95</b>
Движение в центральном поле . . . . .	95
Задача Кеплера . . . . .	100
<b>Семинар 11</b>	<b>105</b>
Приложения задачи Кеплера . . . . .	105
Смещение перигелия Меркурия (постановка вопроса) . . . . .	109
Функция Лагранжа планеты с релятивистской поправкой . . . . .	110
<b>Семинар 12</b>	<b>114</b>
Смещение перигелия Меркурия . . . . .	114
<b>Семинар 13</b>	<b>118</b>
Задача двух тел . . . . .	118
<b>Семинар 14</b>	<b>124</b>
Движение двух взаимодействующих тел . . . . .	124
Задача рассеяния . . . . .	126
<b>Семинар 15</b>	<b>129</b>
Рассеяние в потенциале отталкивания . . . . .	129
Падение на центр . . . . .	135

# Семинар 1

## Системы координат

### Декартова система координат

Рассмотрим движение материальной точки в трёхмерном пространстве. Положение материальной точки в пространстве относительно какой-либо системы координат можно задать её радиус-вектором.

Радиус-вектор материальной точки - вектор, проведённый из начала координат в данную точку (См.  $\vec{r}$  на рис. 1).

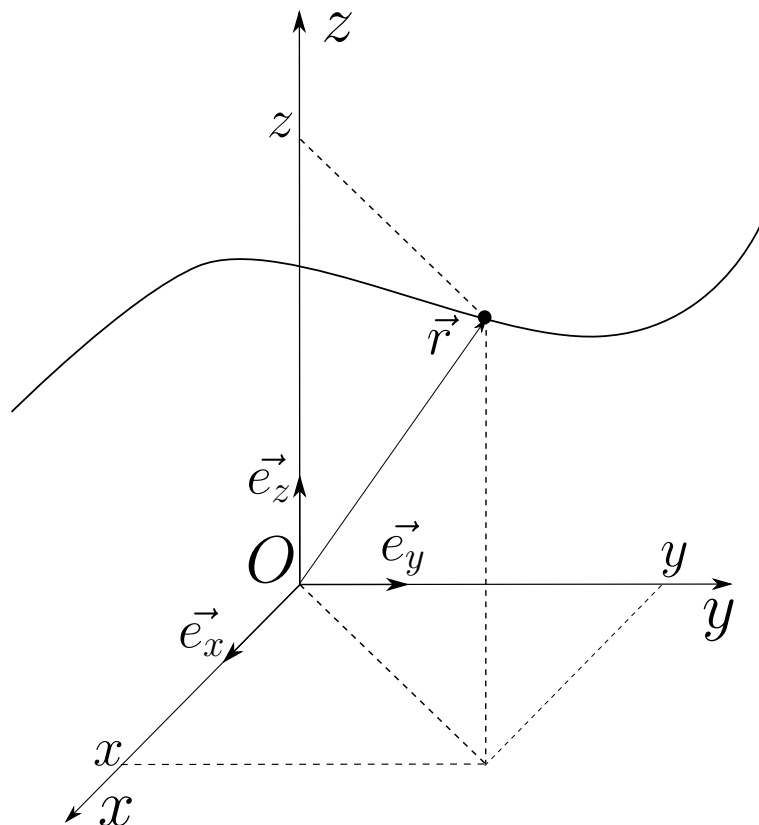


Рис. 1. Материальная точка в декартовой системе координат

Декартовы координаты точки - проекции радиус-вектора точки на координатные оси декартовой системы координат (x, y и z на рис. 1).

Введём единичные вектора  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ , сонаправленные, соответственно, осям Oх, Oу и Oz декартовой системы координат (См. рис. 1). Тогда радиус вектор точки можно записать:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y + \vec{e}_z z \quad (1)$$

Траектория материальной точки - кривая, по которой движется материальная точка (стрелка на траектории указывает направление движения по ней материальной точки).

Чтобы задать траекторию материальной точки, нужно задать зависимость радиус-вектора этой точки от времени, т.е.  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ .

Скорость частицы, по определению, есть:

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \quad (2)$$

Исходя из рис. 2 и определения скорости (2) получим:

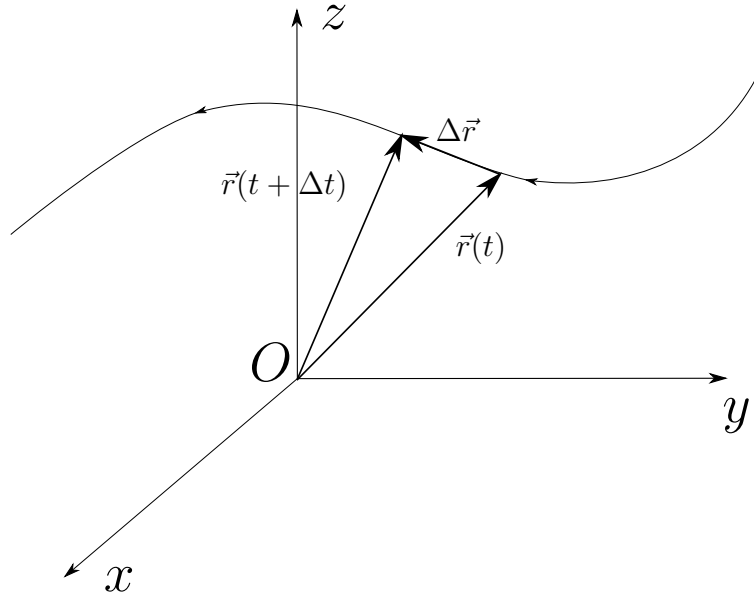


Рис. 2. Изменение радиус-вектора материальной точки с течением времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}} \quad (3)$$

При стремлении  $\Delta t$  к нулю направление  $\Delta \vec{r}$  будет стремиться к направлению касательной к траектории, в пределе  $\Delta \vec{r}$  совпадёт с касательной, то есть скорость материальной точки направлена по касательной к траектории. Очевидно, что в выражении 3 стоит производная радиус-вектора по времени, в дальнейшем такие производные будем обозначать точкой.

Чтобы получить выражение для скорости в декартовых координатах, нужно продифференцировать выражение для радиус-вектора (1) по времени:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{e}_x \dot{x} + \vec{e}_y \dot{y} + \vec{e}_z \dot{z} \quad (4)$$

Для квадрата скорости, соответственно получим:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (5)$$

Аналогично, ускорение определяется, как производная скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \quad (6)$$

Таким образом, для ускорения в декартовых координатах получим, исходя из (6) и (1):

$$\vec{a} = \vec{e}_x \ddot{x} + \vec{e}_y \ddot{y} + \vec{e}_z \ddot{z} \quad (7)$$

Поскольку декартовы координаты не всегда удобны для решения задач, зачастую пользуются другими системами координат, некоторые из которых будут рассмотрены далее.

### Полярная система координат

Рассмотрим движение материальной точки в плоскости. Задать положение материальной точки на плоскости можно с помощью декартовых координат  $(x, y)$ , а можно через длину радиус-вектора точки  $(\rho)$  и через угол, который образует радиус-вектор с осью  $Ox$   $(\varphi)$  (См. рис. 3). Координаты  $(\rho, \varphi)$  называются полярными координатами.

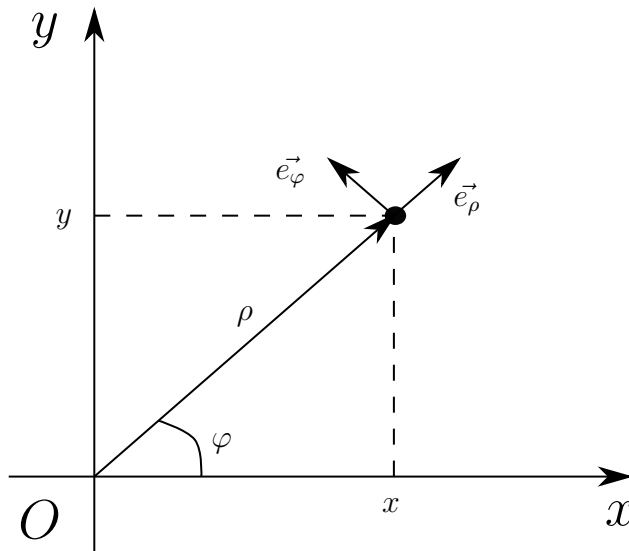


Рис. 3. Материальная точка в полярной системе координат

ми координатами. Из рис. 3 очевидна связь полярных и декартовых координат:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (8)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (9)$$

Соответственно соотношение (1) для материальной точки на плоскости при записи с использованием полярных координат примет вид:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y = \vec{e}_x \rho \cos \varphi + \vec{e}_y \rho \sin \varphi \quad (10)$$

Продифференцировав по времени выражение (10), получим выражение для скорости в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \vec{e}_x (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}) + \vec{e}_y (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}) = \\ &= \dot{\rho} (\vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi) + \rho \dot{\varphi} (-\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi) \end{aligned} \quad (11)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho \equiv \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi; \\ \vec{e}_\varphi \equiv -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi. \end{cases} \quad (12)$$

Тогда выражение для скорости (11) примет вид:

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \cdot \rho \dot{\varphi} \quad (13)$$

Из (12) понятно, что вектор  $\vec{e}_\rho$  будет радиально направлен, а вектор  $\vec{e}_\varphi$  будет перпендикулярным вектору  $\vec{e}_\rho$ , а также то, что они будут единичными, поскольку их квадраты равны единице (См. рис. 3). Вектора  $\vec{e}_\rho$  и  $\vec{e}_\varphi$  часто называют векторами локального базиса в полярных координатах.

Поскольку квадраты векторов  $\vec{e}_\rho$  и  $\vec{e}_\varphi$  равны единице, и они взаимно ортогональны, то нетрудно посчитать квадрат скорости:

$$\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 \quad (14)$$

Из рис. 3 очевидна запись радиус-вектора через вектора  $\vec{e}_\rho$  и  $\vec{e}_\varphi$ :

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \cdot \rho \quad (15)$$

поскольку вектора  $\vec{r}$  и  $\vec{e}_\rho$  - сонаправлены, а длина  $\vec{e}_\rho$  равна единице. Из (15) получим для скорости:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \dot{\vec{e}}_\rho \rho \quad (16)$$

Производную  $\dot{\vec{e}}_\rho$  можно получить из (12):

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \vec{e}_x(-\sin \varphi) \dot{\varphi} + \vec{e}_y \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \vec{e}_\varphi \cdot \dot{\varphi} \quad (17)$$

аналогично для  $\dot{\vec{e}}_\varphi$ :

$$\dot{\vec{e}}_\varphi = -\vec{e}_x \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} - \vec{e}_y \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = -\vec{e}_\rho \cdot \dot{\varphi} \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в выражение для скорости (16), получим:

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \rho \dot{\varphi} \quad (19)$$

Аналогично можно получить выражение для ускорения, из (6, 19, 17, 18):

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\vec{e}}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\rho \ddot{\rho} + \dot{\vec{e}}_\varphi \rho \dot{\varphi} + \vec{e}_\varphi \dot{\rho} \dot{\varphi} + \vec{e}_\varphi \rho \ddot{\varphi} = \\ &= \underline{\vec{e}_\varphi \dot{\rho} \dot{\varphi}} + \underline{\vec{e}_\rho \ddot{\rho}} + \underline{(-\vec{e}_\rho) \rho \dot{\varphi}^2} + \underline{\vec{e}_\varphi \dot{\rho} \dot{\varphi}} + \underline{\vec{e}_\varphi \rho \ddot{\varphi}} = \\ &= \vec{e}_\rho (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) \equiv \vec{e}_\rho a_\rho + \vec{e}_\varphi a_\varphi, \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 & \text{— проекция ускорения на вектор } \vec{e}_\rho; \\ a_\varphi = \rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(\rho^2 \dot{\varphi}) & \text{— проекция ускорения на вектор } \vec{e}_\varphi. \end{cases} \quad (21)$$



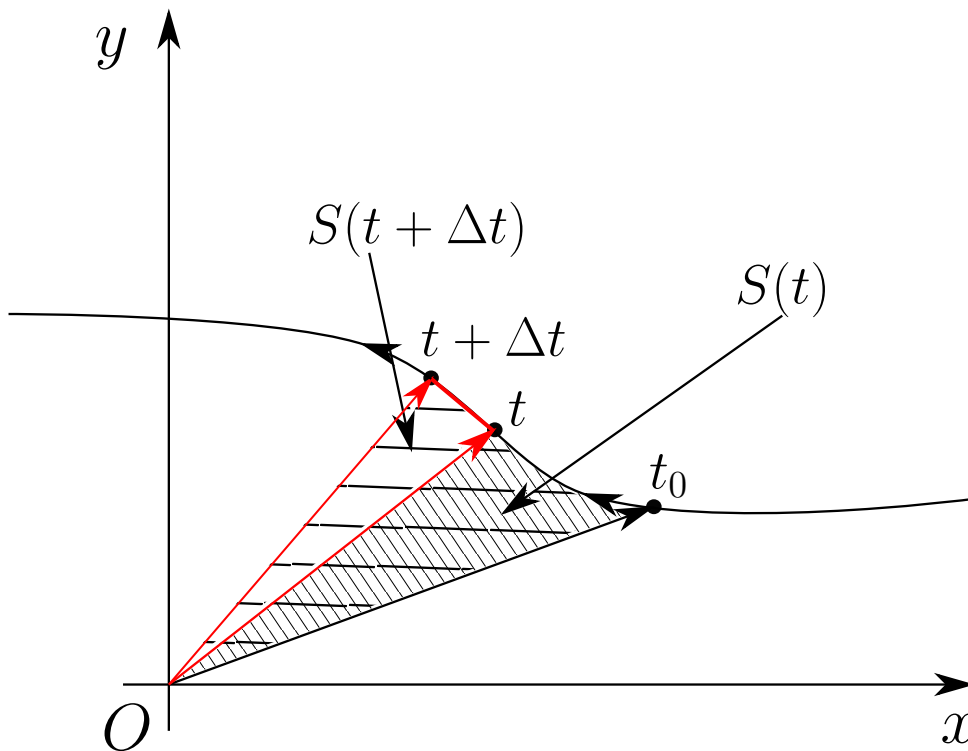


Рис. 4. Физический смысл секторной скорости

Выясним смысл величины  $\rho^2 \dot{\varphi}$ . Рассмотрим материальную точку, движущуюся по какой-либо траектории (См. рис. 4). В момент времени  $t_0$  она находилась в точке  $t_0$  своей траектории, в момент времени  $t$  - в точке  $t$ . Обозначим площадь фигуры, образованной радиус-вектором в точке  $t_0$ , радиус-вектором в текущей точке  $t$  и траекторией, как  $S(t)$ . Тогда в момент времени  $t + \Delta t$  это будет площадь  $S(t + \Delta t)$ .

Рассмотрим разность между  $S(t + \Delta t)$  и  $S(t)$  и вычислим производную этой разности по времени (учтём, что в пределе  $\Delta t \rightarrow 0$  разность между площадями стремиться к площади красного треугольника, разность между радиус векторами стремиться к нулю, а  $\sin \Delta\varphi$  к  $\Delta\varphi$ ):

$$\sigma \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t + \Delta t) - S(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \rho^2 \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi}, \quad (22)$$

где  $\sigma$  - секторная скорость.

Таким образом, выражение (21) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2; \\ a_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma}{dt}. \end{cases} \quad (23)$$

Пример 1.

Рассмотрим плоское движение, которое происходит под действием некоторой центральной силы, то есть есть силовой центр, который мы поместим в начало координат, и точка, находящаяся в поле этого силового центра (См. рис. 5) причём сила,

которая действует на эту точку направлена сонаправлено или противоположно направлено к её радиус-вектору. Тогда можно записать:

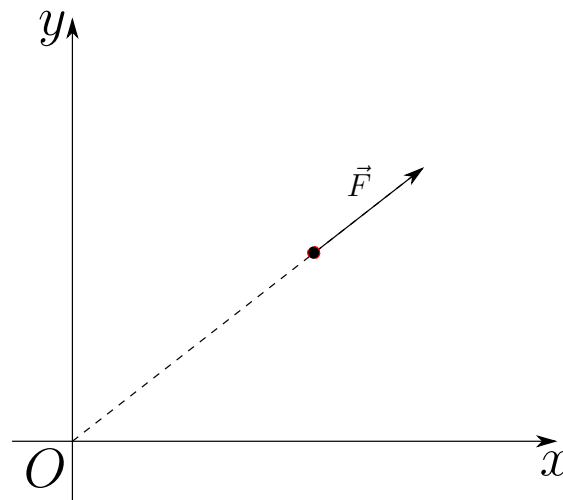


Рис. 5. Пример 1. Материальная точка в поле силового центра

$$\vec{F} \sim \vec{e}_\rho \quad (24)$$

Тогда, согласно второму закону Ньютона и (24):

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a}, \\ F_\varphi = 0. \end{cases} \Rightarrow 0 = a_\varphi = \frac{2}{\rho} \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow \sigma = \text{const} \quad (25)$$

То есть секторная скорость - постоянна. Это значит, что в таком случае радиус-вектор за равные промежутки времени заметает равные площади.

Пример 2.

Рассмотрим плоское движение по эллиптической орбите, а силовым центром находится в одном из фокусов эллипса (См.рис. 6). Заданы эксцентриситет  $\varepsilon$  и большая полуось эллипса  $a$ . Будем считать, что движение происходит с постоянной секторной скоростью  $\sigma = \text{const}$ . Нужно найти скорость материальной точки в перигелии (ближайшей к силовому центру точке орбиты).

Удобно записать уравнение эллипса в полярных координатах, из курса "Аналитическая геометрия" известно:

$$\rho = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}, \quad (26)$$

где  $p$ - фокальный параметр эллипса,  $\varepsilon$  - эксцентриситет.

По условию:

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{2\sigma}{\rho^2} \quad (27)$$

В то же время обычная скорость равна:

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \rho \dot{\varphi} \quad (28)$$

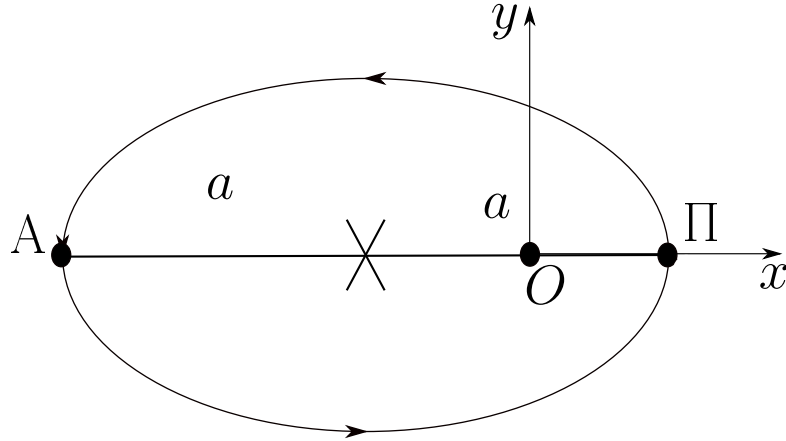


Рис. 6. Плоское движение по эллиптической орбите с силовым центром в фокусе эллипса. П - перигелий, А - афелий

Так как в перигелии величина  $\rho$  - минимальна, то в этой точке  $\dot{\rho} = 0$ , тогда учитывая (27):

$$\vec{v} = \vec{e}_{\varphi} \rho \dot{\varphi} = \vec{e}_{\varphi} \cdot \frac{2\sigma}{\rho_0}, \quad (29)$$

где  $\rho_0$  - расстояние от фокуса до перигелия. Из (26) понятно, что

$$\rho_0 = \frac{p}{1 + \varepsilon} \quad (30)$$

Несложно заметить, что

$$2a = \rho_{\min} + \rho_{\max} = \{\text{Учитывая (26)}\} = \frac{p}{1 + \varepsilon} + \frac{p}{1 - \varepsilon} = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2} \Rightarrow p = a(1 - \varepsilon^2) \quad (31)$$

Подставляя (30, 31) в (29), находим

$$\vec{v} = \vec{e}_{\varphi} \frac{2\sigma}{p} \cdot (1 + \varepsilon) = \frac{2\sigma(1 + \varepsilon)}{a(1 - \varepsilon^2)} \vec{e}_{\varphi} \Rightarrow \vec{v} = \vec{e}_{\varphi} \cdot \frac{2\sigma}{a(1 - \varepsilon)} \quad (32)$$

Вектора  $\vec{e}_{\rho}$  и  $\vec{e}_{\varphi}$  были определены с помощью выражения (12). Однако вектора локального базиса могут быть определены в общем виде. Пусть некоторые координаты  $q_i$  определяют положение некоторого радиус-вектора:  $\vec{r}(q_i)$  (В случае полярных координат этими координатами были  $\rho$  и  $\varphi$ ). Тогда вектора локального базиса можно определить следующим выражением:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right|} \quad (33)$$

Выражение (33) есть общее определение векторов локального базиса. В случае полярных координат радиус-вектор:

$$\vec{r} = \vec{e}_x x + \vec{e}_y y = \vec{e}_x \rho \cos \varphi + \vec{e}_y \rho \sin \varphi \quad (34)$$

В данном случае

$$q_i = (\rho, \varphi) \quad (35)$$

Для  $q_i = \rho$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} &= \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|^2 &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{aligned} \right\} \stackrel{(33)}{\Rightarrow} \vec{e}_\rho = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right|} = \vec{e}_x \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \varphi \quad (36)$$

Аналогично для  $q_i = \varphi$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= -\vec{e}_x \rho \sin \varphi + \vec{e}_y \rho \cos \varphi \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|^2 &= \rho^2 \sin^2 \varphi + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \Rightarrow \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = \rho \end{aligned} \right\} \stackrel{(33)}{\Rightarrow} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|} = -\vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \quad (37)$$

Из (33) можно сделать вывод о направлении вектора  $\vec{e}_i$ : поскольку, вектор  $\vec{e}_i$  совпадает по направлению с вектором  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$ , то  $\vec{e}_i$  направлен в сторону изменения радиус-вектора  $\vec{r}$  при увеличении  $i$ -й координаты (См. рис. 7).

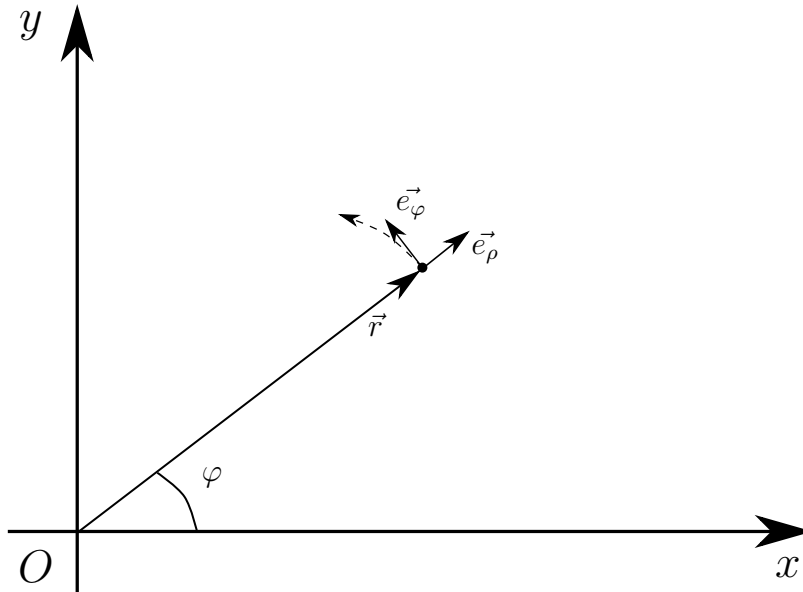


Рис. 7. Направление векторов локального базиса. Вектор  $\vec{e}_\rho$  направлен в сторону увеличения  $\rho$  при фиксированной  $\varphi$ ; вектор  $\vec{e}_\varphi$  - в сторону увеличения  $\varphi$  при фиксированной  $\rho$

## Цилиндрические координаты

Рассмотрим движение точки в трёхмерном пространстве. В качестве координат возьмём длину проекции радиус-вектора на плоскость  $Oxy$  ( $\rho$ ), угол между этой

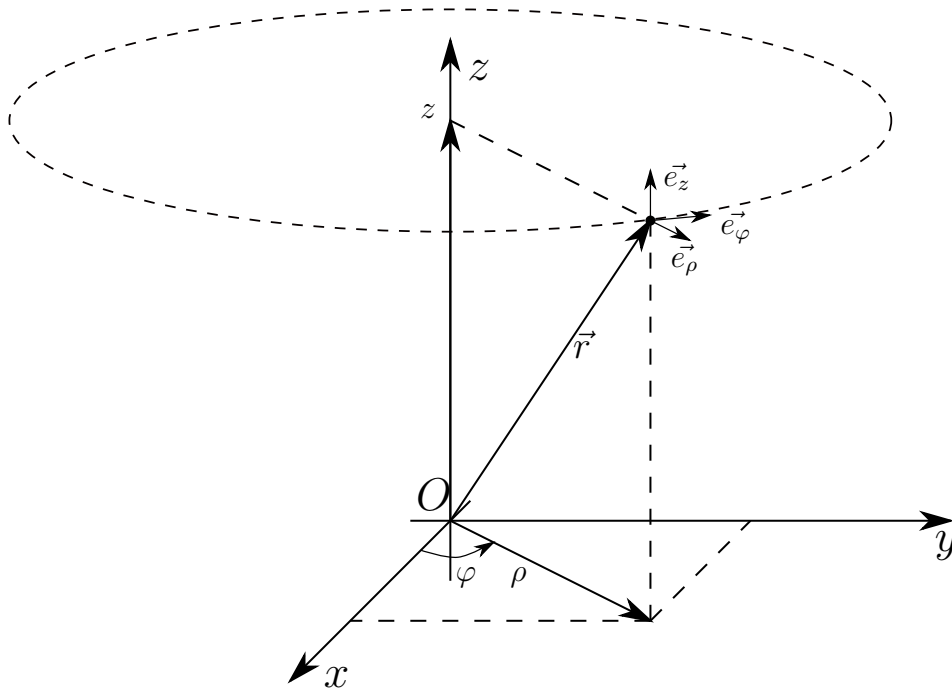


Рис. 8. Цилиндрические координаты

проекцией и осью  $Ox$  ( $\varphi$ ) и координату  $z$  (См. рис. 8). Таким образом, цилиндрические координаты:  $(\rho, \varphi, z)$ . Очевидна связь декартовых и цилиндрических координат:

$$x = \rho \cos \varphi \quad (38)$$

$$y = \rho \sin \varphi \quad (39)$$

$$z = z \quad (40)$$

Также понятно, как будут направлены единичные вектора локального базиса ( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ ) в цилиндрических координатах, из рис. 8 понятно, что они взаимно ортогональны.

В такой системе координат радиус-вектор можно записать, как сумму вектора в полярных координатах и вектора, параллельного оси  $Oz$ :

$$\vec{r} = \vec{e}_\rho \rho + \vec{e}_z z \quad (41)$$

Отсюда понятно, как будет выглядеть скорость

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \rho \dot{\varphi} + \vec{e}_z \dot{z} \quad (42)$$

и квадрат скорости

$$\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \quad (43)$$

Ускорение будет иметь вид:

$$\vec{a} = \vec{e}_\rho (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi (\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) + \vec{e}_z \ddot{z} \quad (44)$$

## Сферические координаты

В качестве сферических координат (См. рис. 9) используется модуль радиус-вектора ( $r$ ), угол между радиус-вектором и осью  $Oz$  ( $\theta$ ) и угол  $\varphi$ , как в цилиндрических координатах. Очевидна связь сферических координат  $(r, \theta, \varphi)$  с декартовыми:

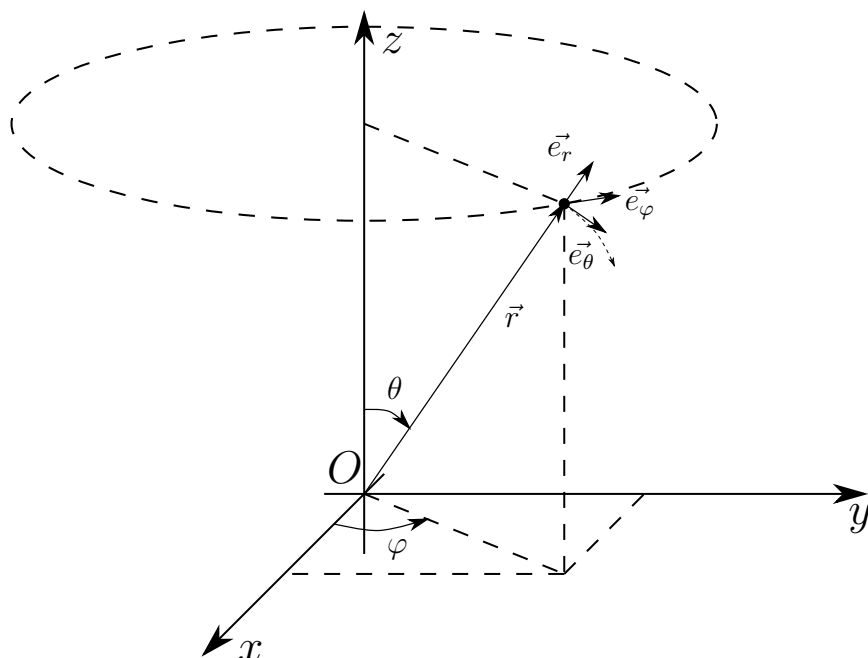


Рис. 9. Сферические координаты

$$x = r \sin \theta \cos \varphi \quad (45)$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi \quad (46)$$

$$z = r \cos \theta \quad (47)$$

Очевидны направления векторов локального базиса сферической системы координат:  $\vec{e}_r$  сонаправлен радиус-вектору;  $\vec{e}_\theta$  - по касательной к меридиану сферы радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ ;  $\vec{e}_\varphi$  по касательной к параллели этой сферы (См. рис. 9). Из рис. 9 очевидно, что эти вектора взаимно ортогональны.

Радиус-вектор в сферической системе координат примет вид:

$$\vec{r} = \vec{e}_r r \quad (48)$$

С помощью формулы для производной сложной функции, учитывая, что  $\vec{r}$  зависит от  $(r, \theta, \varphi)$ , найдём скорость:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(r, \theta, \varphi)}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \cdot \dot{r} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \cdot \dot{\varphi} \quad (49)$$

Учитывая (1), (45), (46), (47), найдём:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}(\vec{e}_x r \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y r \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z r \cos \theta) = \\ &= \vec{e}_x \sin \theta \cos \varphi + \vec{e}_y \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_z \cos \theta; \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| &= \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta} = 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \vec{e}_r \quad (50)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} &= \vec{e}_x r \cos \theta \cos \varphi + \vec{e}_y r \cos \theta \sin \varphi - \vec{e}_z r \sin \theta; \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| &= \sqrt{r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta} = r \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta \quad (51)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \vec{e}_x r \sin \theta (-\sin \varphi) + \vec{e}_y r \sin \theta \cos \varphi \\ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| &= r \sin \theta \Rightarrow \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = r \sin \theta \vec{e}_\varphi \quad (52)\end{aligned}$$

Подставив (50), (51) и (52) в (49), получим

$$\vec{v} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \quad (53)$$

Поскольку вектора базиса - единичны и взаимно ортогональны, то квадрат скорости:

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \quad (54)$$

## Параболические координаты

$(\xi, \eta, \varphi)$  - параболические координаты. По определению, это набор координат, которые связаны с цилиндрическими следующим образом:

$$\begin{cases} \rho \equiv \sqrt{\xi \eta}, \\ z = \frac{\xi - \eta}{2}, \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Пример 3.

Космонавт высадился на планету радиуса  $R$ , и пошёл по неё под углом  $\alpha$  ( $\alpha = \text{const}$ ) к меридиану (См. рис. 10). Найти его траекторию. Будем решать в сферических координатах  $(r, \theta, \varphi)$ . Тогда

$$r = R = \text{const} , \quad (55)$$

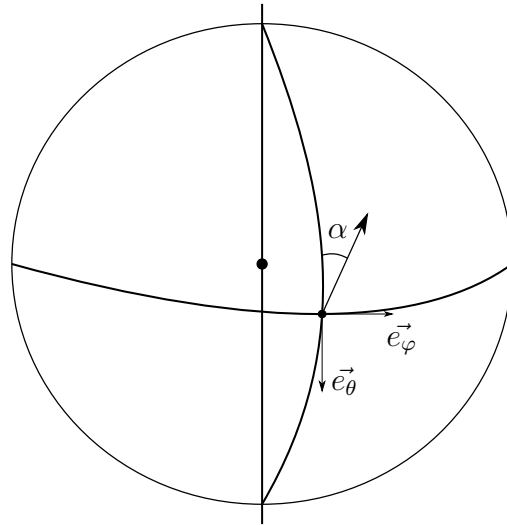


Рис. 10. Пример 1. Космонавт на планете

и траектория будет представлять зависимость угла  $\theta$  от угла  $\varphi$ . Учитывая (53) и (55), получим

$$\vec{v} = \underbrace{\vec{e}_\theta R \dot{\theta}}_{v_\theta} + \underbrace{\vec{e}_\varphi R \sin \theta \dot{\varphi}}_{v_\varphi} \quad (56)$$

Скорость космонавта направлена под углом  $\alpha$  к меридиану, это значит, что

$$\frac{v_\varphi}{v_\theta} = -\operatorname{tg} \alpha, \quad (57)$$

где  $v_\varphi, v_\theta$  проекции скорости соответственно на  $\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ . Подставляя их из (56) в (57), получим

$$-\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_\varphi}{v_\theta} = \frac{R \sin \theta \dot{\varphi}}{R \dot{\theta}} = \frac{\sin \theta \frac{d\varphi}{dt}}{\frac{d\theta}{dt}} = \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta}, \quad (58)$$

поскольку

$$\dot{\theta} = \frac{d}{dt} \theta(\varphi(t)) = \frac{d\theta}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\theta}{d\varphi} \dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\varphi}}. \quad (59)$$

Таким образом, из (58)

$$\begin{aligned} -\operatorname{tg} \alpha &= \sin \theta \frac{d\varphi}{d\theta}, \\ \frac{d\theta}{\sin \theta} &= -\operatorname{ctg} \alpha \cdot d\varphi, \\ \int \frac{d\theta}{\sin \theta} &= -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \int d\varphi \end{aligned} \quad (60)$$

(60) решение этого дифференциального уравнения, в чём можно убедиться, продифференцировав его по времени:

$$\frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = -\operatorname{ctg} \alpha \quad (61)$$



Если в начальный момент времени космонавт находился в точке  $(\theta_0, \varphi_0)$ , то учесть эти начальные условия в (60) можно следующим образом:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\operatorname{ctg} \alpha \cdot \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi \quad (62)$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned} -\operatorname{ctg} \alpha (\varphi - \varphi_0) &= \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta \sin \theta}{\sin^2 \theta} = \left[ dx = -\sin \theta d\theta \right] = - \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta} \frac{dx}{1-x^2} = \\ &= - \int_{\cos \theta_0}^{\cos \theta} dx \left( \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \cdot \frac{1}{2} = - \frac{1}{2} [\ln(1+x) - \ln(1-x)] \Big|_{\cos \theta_0}^{\cos \theta} = \\ &= - \frac{1}{2} \ln \frac{(1+\cos \theta)}{(1-\cos \theta)} \Big|_{\theta_0}^{\theta} = - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{(1+\cos \theta)(1-\cos \theta_0)}{(1-\cos \theta)(1+\cos \theta_0)} \right] \quad (63) \end{aligned}$$

Уравнение траектории можно представить в виде:

$$\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta} \cdot \frac{1-\cos \theta_0}{1+\cos \theta_0} = \exp(2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot (\varphi - \varphi_0)) \quad (64)$$

Выражение (62) представляет собой закон движения в квадратурах.

## Семинар 2

### Движение механической системы при наложенных связях. Лагранжев формализм

#### Условия связи. Обобщённые координаты

Рассмотрим систему из  $N$  материальных точек,  $\vec{r}_\alpha$  - радиус-вектор  $\alpha$ -й точки.

Будем считать, что на точки наложены некоторые условия связи, это значит, что  $\vec{r}_\alpha$  удовлетворяют некоторым уравнениям:

$$f_a(\vec{r}_\alpha, \dot{\vec{r}}_\alpha, t) = 0, \quad a = \overline{1, k} \quad (65)$$

Уравнения (65) называются условиями связи.

Связи называются голономными, если они не содержат производных по времени:

$$f_a(\vec{r}_\alpha, t) = 0, \quad a = \overline{1, k} \quad (66)$$

В такой системе, очевидно, количество независимых переменных, необходимых для описания системы (степеней свободы):

$$s \equiv 3N - k \quad (67)$$

Тогда существуют независимые параметры

$$q_i, \quad i = \overline{1, s}, \quad (68)$$

которые однозначно задают положение системы. Параметры (68) называются обобщёнными координатами.

Тогда  $\vec{r}_\alpha$  могут быть представлены, как

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_i, t) \quad (69)$$

Рассмотрим некоторые примеры систем со связями

Примеры:

1) Материальная точка, находящаяся на наклонной плоскости (Рис. 11)

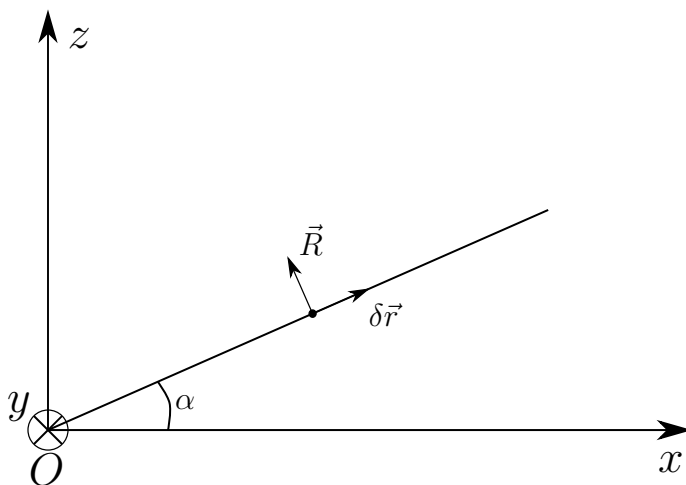


Рис. 11. Материальная точка на наклонной плоскости

Уравнение связи для такой системы:

$$z = x \cdot \operatorname{tg} \alpha \quad (70)$$

2) Две материальные точки, расстояние между которыми не меняется (Рис. 12).

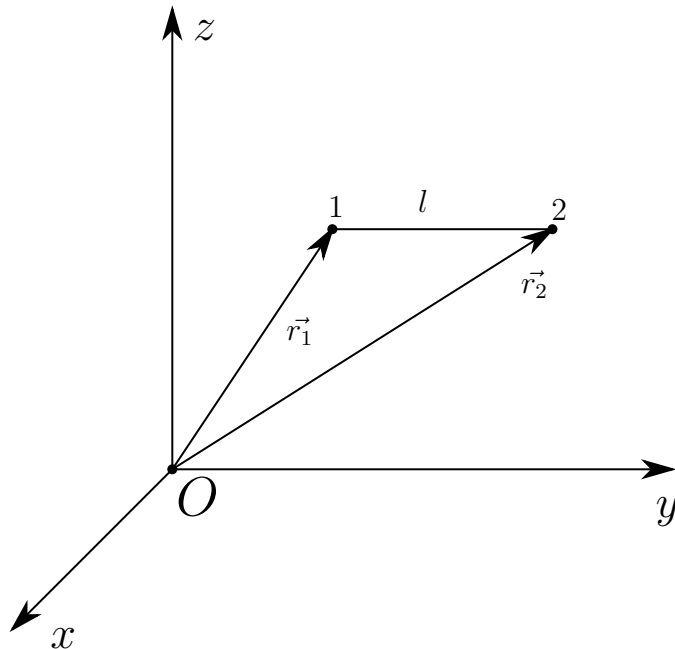


Рис. 12. Две материальные точки с фиксированным расстоянием между ними

Уравнение связи для такой системы можно записать так:

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2 \quad (71)$$

3) Стержень подвешенный за один конец. Стержень имеет бесконечное число материальных точек. Если считать его движение плоским, то его положение можно задать углом  $\varphi$  между стержнем и вертикалью, проходящей через его точку подвеса (См. рис. 13).

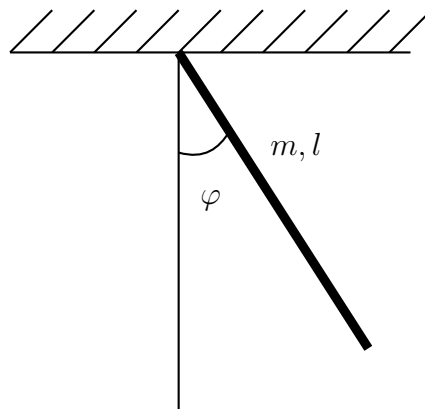


Рис. 13. Плоское движение подвешенного стержня

## Виртуальные перемещения

Виртуальным перемещением ( $\delta \vec{r}_\alpha$ ) называется такое бесконечно малое изменение состояния системы, при котором не нарушаются условия связи.

В примере 1  $\delta \vec{r}$  - перемещение материальной точки по плоскости.

**Замечание** Момент времени при виртуальном перемещении должен быть фиксирован, чем виртуальное перемещение отличается от реального, которое происходит за какой-либо конечный промежуток времени. Например, рассмотрим материальную точку на наклонной плоскости, которая движется горизонтально со скоростью  $\vec{u}$  (См. рис. 14). В таком случае, виртуальным перемещением всё равно будет вектор  $\delta \vec{r}$ , а вот реальным - вектор  $\Delta \vec{r}$ .

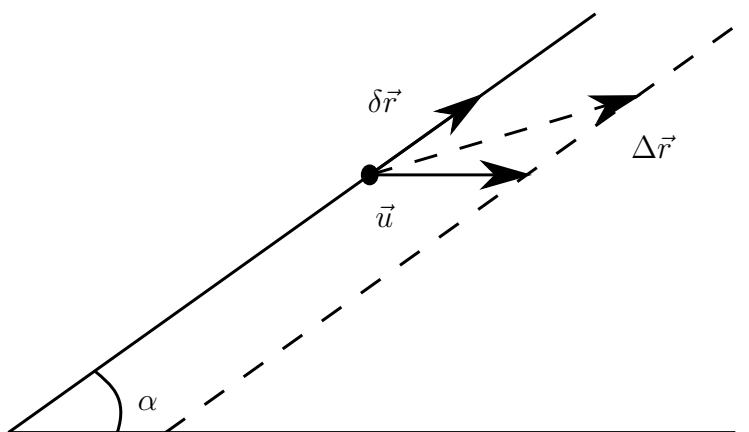


Рис. 14. Отличие виртуального и реального перемещения. Материальная точка на движущейся наклонной плоскости

## Идеальные связи

Запишем 2-й закон Ньютона для точек некоторой системы. Будем записывать 2-й закон Ньютона в следующем виде:

$$v_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha, \quad (72)$$

где под  $\vec{R}_\alpha$  будем подразумевать силы реакции связи, а под  $\vec{F}_\alpha$  - активные силы (то есть все остальные).

Связи в системе называются идеальными, если суммарная работа сил реакции связи в системе равна нулю, то есть:

$$\sum_{\alpha=1}^N \vec{R}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha = 0 \quad (73)$$

Нетрудно убедиться, что системы из примеров 1-3 являются идеальными.

Пример 1) Поскольку  $\vec{R}$  и  $\delta \vec{r}$  - перпендикулярны (См. рис. 15), то их скалярное произведение равно нулю:  $\vec{R} \delta \vec{r} = 0$ .

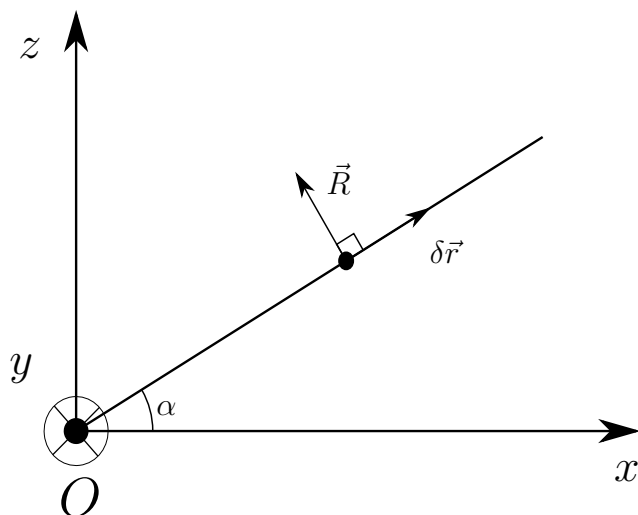


Рис. 15. Материальная точка на наклонной плоскости. Сила реакции связи

Пример 2) Две материальные точки с фиксированным расстоянием между ними (См. рис. 16) Заметим, что силы реакции связи в такой системе, действующие

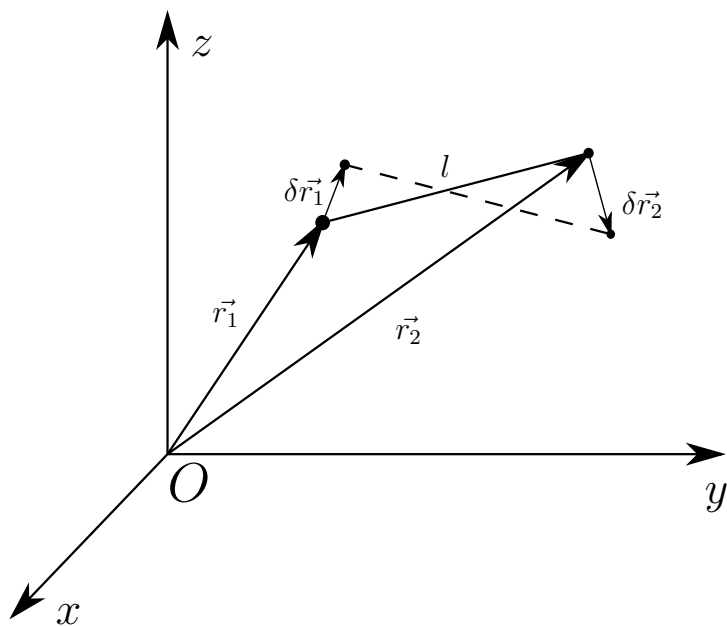


Рис. 16. Две материальные точки с фиксированным расстоянием между ними. Виртуальное перемещение

на разные точки, равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки, согласно 3-му закону Ньютона. Пусть в системе происходит виртуальное перемещение (См. рис. 16). Исходя из рис. 17 можно записать:

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2 = R \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (74)$$

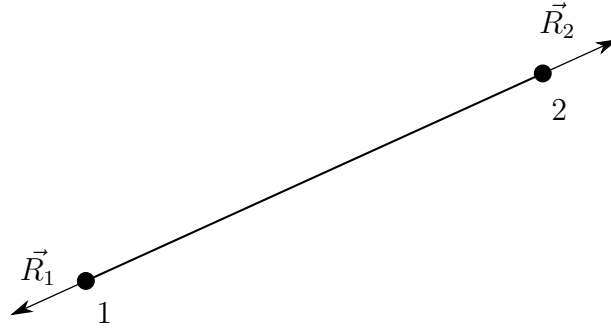


Рис. 17. Силы реакции связи согласно третьему закону Ньютона

Тогда запишем для неё сумму (73), учитывая (74) 3-й закон Ньютона (См. рис. 17):

$$\sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \delta \vec{r}_{\alpha} = \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \delta \vec{r}_2 = \vec{R}_1 (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = R \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} (\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) \quad (75)$$

С другой стороны, поскольку при виртуальном перемещении условие связи  $((\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l^2)$  не нарушается, то, учитывая порядок малости:

$$\begin{aligned} \delta l^2 &= (\vec{r}_1 + \delta \vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \delta \vec{r}_2)^2 = \\ &= \cancel{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2} + 2(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) + \cancel{(\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2)^2} \stackrel{0}{\Rightarrow} \\ &\Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)(\delta \vec{r}_1 - \delta \vec{r}_2) = 0 \quad (76) \end{aligned}$$

Подставив (76) в (75), получим условие идеальности связей.

Пример 3) Два тела, имеющие одну общую точку (См. рис. 18). Согласно 3-му

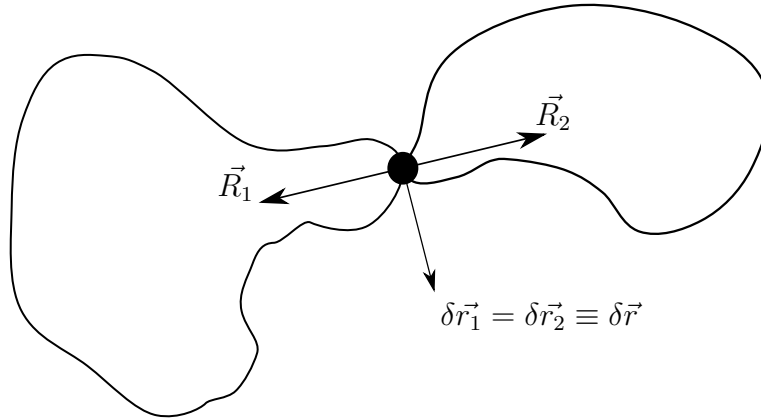


Рис. 18. Два тела, имеющие одну общую точку (так называемая «шарнирная связь»)

закону Ньютона для сил реакции связи справедливо

$$\vec{R}_1 = -\vec{R}_2 \quad (77)$$

Тогда, записывая для них сумму (73) и учитывая (77), получим условие идеальности связи:

$$\sum_{\alpha} \vec{R}_{\alpha} \delta \vec{r}_{\alpha} = \vec{R}_1 \delta \vec{r}_1 + \vec{R}_2 \delta \vec{r}_2 = (\vec{R}_1 + \vec{R}_2) \delta \vec{r} = 0 \quad (78)$$

## Уравнения Лагранжа

Пусть есть некоторая система с идеальными связями. Согласно 2-му закону Ньютона:

$$m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha + \vec{R}_\alpha, \quad | \times \delta \vec{r}_\alpha \text{ и просуммируем по } \alpha$$

$$\sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha = \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha + \sum_\alpha \vec{R}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha \stackrel{0 \text{ (ид. связь)}}{=} \quad (79)$$

Введём  $q_i$ , тогда  $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_i, t)$ . По определению обобщённых координат виртуальное перемещение представляет собой некоторое изменение обобщённых координат  $q_i$ , то есть

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \quad (80)$$

Тогда подставив (80) в правую часть (79), получим

$$\sum_\alpha \vec{F}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha, i} \vec{F}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \equiv \sum_i Q_i \delta q_i, \quad (81)$$

где ввели обозначение

$$Q_i \equiv \sum_\alpha \vec{F}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \quad - \quad \text{обобщённая сила} \quad (82)$$

Подставив (80) в левую часть (79) получим

$$\sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \delta \vec{r}_\alpha = \sum_{\alpha, i} m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{\alpha, i} m_\alpha \left\{ \frac{d}{dt} \left( \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) - \dot{\vec{r}}_\alpha \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \right\} \delta q_i \quad (83)$$

Так как  $\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_i, t)$ , то

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} (q_i(t), t) = \sum_{j=1}^s \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q_j \partial q_i} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial t \partial q_i} \quad (84)$$

Вычислим

$$\dot{\vec{r}}_\alpha = \frac{d\vec{r}_\alpha}{dt} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial t}; \quad (85)$$

Договоримся, что  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  - независимые переменные, то есть  $\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i} = 0$ , тогда, учитывая (85)

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial q_i} = \sum_j \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q_i \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \vec{r}_\alpha}{\partial q_i \partial t} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i} \right) \quad (86)$$

и

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\alpha}{\partial \dot{q}_i} = \sum_j \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \delta_j^i = \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_i}, \quad (87)$$

где

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad - \quad \text{символ Кронекера} \quad (88)$$

Тогда, подставляя (84), (86) в (83), получим, что левую часть (79) можно представить, как

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \ddot{\vec{r}}_{\alpha} \delta \vec{r}_{\alpha} &= \sum_i \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\dot{\vec{r}}_{\alpha}^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial q_i} \left( \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\dot{\vec{r}}_{\alpha}^2}{2} \right) \right\} = \\ &= \sum_i \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\}, \quad (89) \end{aligned}$$

где

$$T \equiv \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \frac{\dot{\vec{r}}_{\alpha}^2}{2} \quad - \quad \text{кинетическая энергия} \quad (90)$$

Подставив (89), (81) в (79), получим

$$\sum_i \delta q_i \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right\} = \sum_i \delta q_i Q_i \quad (91)$$

Ввиду того, что (91) - тождество, а  $q_i$  - независимые, получим из (91) уравнения

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = \overline{1, s} \quad (92)$$

Пусть  $\vec{F}_{\alpha}$  - потенциальные силы, то есть

$$\vec{F}_{\alpha} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_{\alpha}}, \quad (93)$$

где

$$U = U(\vec{r}_{\alpha}(q_i, t), t) \quad - \quad \text{потенциальная энергия, а} \quad (94)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \equiv \vec{\nabla} \equiv \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (95)$$

Тогда

$$Q_i = \sum_{\alpha} \left( - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_{\alpha}} \right) \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} = - \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (96)$$

Заметим, что из (94) следует, что

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (97)$$

Тогда подставляя (96) в (92) и учитывая (97), получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0 - \frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, s} \quad (98)$$



Введём функцию Лагранжа  $L$ :

$$L = T - U \quad (99)$$

Тогда, подставив (99) в (98), получим уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = \overline{1, s} \quad (100)$$

Примеры:

1) Материальная точка в  $D = 3$ ,  $q_i = (x, y, z)$ , ( $s = 3$ ). Написать уравнения Лагранжа.

$$L = T - U = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z); \quad (101)$$

Уравнение Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} + \frac{\partial U}{\partial x}; \quad (102)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (103)$$

Подставив (103) в (102), получим уравнение для  $x$ , аналогично для остальных:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x, \\ m\ddot{y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y, \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z. \end{cases} \quad (104)$$

Заметим, что (104) представляют собой 3 проекции 2-го закона Ньютона.

2) Материальная точка в  $D = 3$ ,  $q_i = (\rho, \varphi, z)$ , ( $s = 3$ ) (Рис. 19). Написать уравнения Лагранжа.

Функция Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U(\rho, \varphi, z) \quad (105)$$

Для  $z$ , как в декартовых координатах:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (106)$$

Для  $\rho$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} = m\dot{\rho}; \quad \frac{\partial L}{\partial \rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \rho} = \\ = m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \rho} \Rightarrow m\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 = -\frac{\partial U}{\partial \rho} \end{aligned} \quad (107)$$

Вспомним, что ускорение в цилиндрических координатах:

$$\vec{a} = \vec{e}_\rho(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) + \vec{e}_z\ddot{z} \quad (108)$$

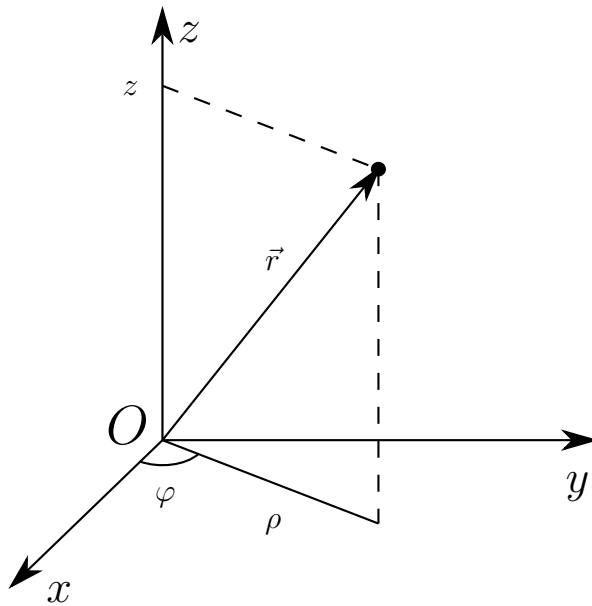


Рис. 19. Материальная точка в цилиндрических координатах

Потенциальная сила, соответствующая потенциальной энергии, учитывая вид  $\vec{\nabla}$  в цилиндрических координатах:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -\left(\vec{e}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}\right)U \quad (109)$$

Из (106), (107), (108) и (109), очевидно, следует:

$$ma_\rho = F_\rho \quad (110)$$

$$ma_z = F_z \quad (111)$$

Для  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= m\rho^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(m\rho^2 \dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad | \times \frac{1}{\rho} \\ 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt}(m\rho^2 \dot{\varphi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{1}{\rho} (m\rho^2 \ddot{\varphi} + 2m\rho \dot{\rho} \dot{\varphi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow m(\rho \ddot{\varphi} + 2\dot{\rho} \dot{\varphi}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (112)$$

Из (108) и (112) получим:

$$ma_\varphi = F_\varphi \quad (113)$$

Таким образом, уравнения (110), (111), (113) соответствуют проекциям 2-го закона Ньютона на вектора локального базиса цилиндрических координат. Система урав-

нений Лагранжа для цилиндрических координат имеет вид:

$$\begin{cases} m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = -\frac{\partial U}{\partial \rho}, \\ m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \\ m\ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z}. \end{cases} \quad (114)$$

3) Материальная точка в  $D = 3$ , сферические координаты:  $q_i = (r, \theta, \varphi)$  (См. рис. 20). Написать систему уравнений Лагранжа.

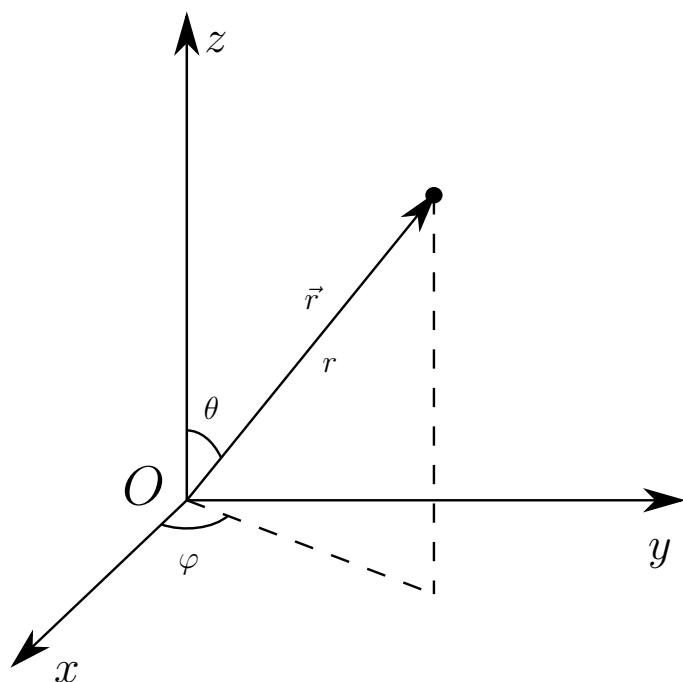


Рис. 20. Материальная точка в сферических координатах

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} - U = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi) \quad (115)$$

Уравнения Лагранжа:

для  $r$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}; \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r} \rightarrow (116) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\sin^2\theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} \end{aligned} \quad (117)$$

для  $\theta$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2 \dot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial \theta} \rightarrow (118) \Rightarrow \\ 0 &= \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (119)$$

для  $\varphi$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} \rightarrow (120) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (121)$$

Таким образом, система уравнений Лагранжа для материальной точки в сферической системе координат имеет вид:

$$\begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \dot{\theta}) - mr^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{d}{dt}(mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0. \end{cases} \quad (122)$$

Оператор  $\vec{\nabla}$  в сферических координатах имеет вид:

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (123)$$

## Семинар 3

### Примеры описания движения при помощи уравнений Лагранжа. Интегралы движения

Описание движения с помощью уравнений Лагранжа. Определение интеграла движения

Функция Лагранжа:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U \quad (124)$$

Уравнения Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (125)$$

Благодаря (124) и (125) можно найти уравнения движения системы в обобщённых координатах.

Задача 1

Рассмотрим стержень длины  $l$ , массой  $m$ , находящийся в прямом угле в поле тяжести. Концы стержня находятся на сторонах прямого угла (Рис. 21). Движение плоское. Найти уравнения движения, используя функцию Лагранжа и уравнения Лагранжа.

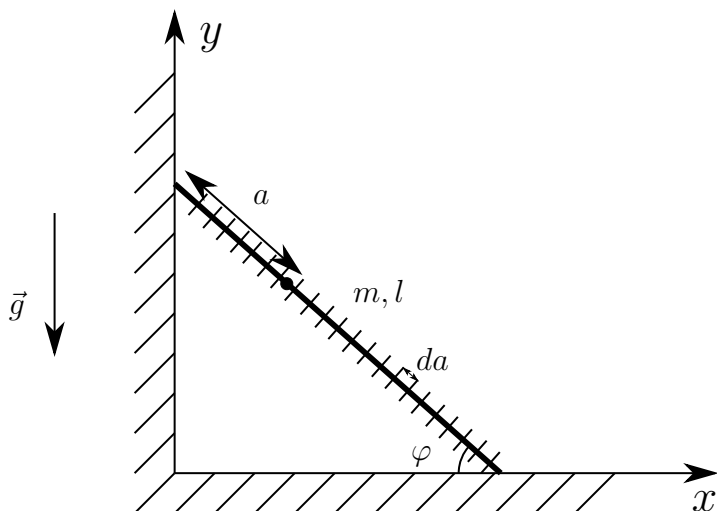


Рис. 21. Стержень в прямом угле

Ясно, что положение стержня можно охарактеризовать одним параметром, например углом  $\varphi$  (См. рис. 21):  $q_i \rightarrow \varphi$ .

Чтобы построить функцию Лагранжа нужно знать кинетическую и потенциальную энергию. Найдем  $U$ :

$$U = mgh_{\text{ц.м.}} \quad h_{\text{ц.м.}} = \frac{l}{2} \sin \varphi \Rightarrow U = \frac{mgl}{2} \sin \varphi \quad (126)$$

Найдём  $T$ . Стержень - система из бесконечно большого числа материальных точек. Формально можно записать

$$T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\vec{v}^2}{2}, \quad (127)$$

где  $\alpha$  - номер материальной точки массы  $m_{\alpha}$ . Так как точек бесконечно много, то сумма (127) переходит в интеграл. Будем использовать параметр  $a$  - расстояние от верхней точки стержня до точки, тогда её координаты:

$$\begin{aligned} x_a &= a \cos \varphi; \\ y_a &= (l - a) \sin \varphi. \end{aligned} \quad (128)$$

Её скорость:

$$\begin{aligned} \vec{v}^2 &= \dot{x}_a^2 + \dot{y}_a^2 = (-a \sin \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 + ((l - a) \cos \varphi \cdot \dot{\varphi})^2 = \\ &= \dot{\varphi}^2 [a^2 \sin^2 \varphi + (l^2 - 2la \cos^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi)] = \dot{\varphi}^2 [a^2 + (l^2 - 2la) \cos^2 \varphi] \end{aligned} \quad (129)$$

Чтобы посчитать  $T$  разобьём стержень на участки длины  $da$ , каждый такой участок можно рассматривать как материальную точку с  $N^{\circ}\alpha$ , тогда вместо суммы (127) для  $T$  возникнет интеграл:

$$\begin{aligned} T &= \int_0^l da \cdot \frac{m}{l} \cdot \frac{1}{2} \vec{v}_a^2 = \int_0^l da \frac{m}{2l} \dot{\varphi}^2 [a^2 + (l^2 - 2la) \cos^2 \varphi] = \\ &= \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{2} \left[ \frac{1}{3} + \left( 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \right) \cos^2 \varphi \right] = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} \end{aligned} \quad (130)$$

Подставляя (126), (130) в (124), получим

$$L = T - U = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \quad (131)$$

Уравнение движения, учитывая (125), для  $\varphi$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= \frac{ml^2 \dot{\varphi}}{3}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{mgl}{2} \cos \varphi \rightarrow (132) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{ml^2 \dot{\varphi}}{3} \right) + \frac{mgl}{2} \cos \varphi, \\ 0 &= \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (133)$$

Чтобы получить закон движения системы, нужно решить получившееся уравнение движения. Понизим его порядок. Для этого найдём интегралы движения.

Интеграл движения - это некоторая функция от обобщённых координат и обобщённых скоростей, которая остаётся неизменной в процессе движения системы.

Получим интеграл движения:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + \frac{mgl}{2} \cos \varphi \quad | \times \dot{\varphi}, \\ 0 &= \frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} \cdot \dot{\varphi} + \frac{mgl}{2} \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} = \\ &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right] = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi = \text{const} \equiv E \end{aligned} \quad (134)$$

Сравнивая (134) с (131), заметим, что  $E$  - полная энергия системы. Выразив из (134)  $\dot{\varphi}$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} &= \pm \sqrt{\frac{6}{ml^2} \left( E - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)} \equiv \sqrt{f(\varphi)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{6}{ml^2} \left( E - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)}} \end{aligned} \quad (135)$$

Выражение (135) представляет собой закон движения стержня в квадратурах.

Задача 2

Рассмотрим материальную точку массы  $m$ , находящуюся всё время на сфере радиуса  $R$  в поле тяжести (Рис. 22). Записать функцию Лагранжа, найти уравнения движения и закон движения в квадратурах.

Очевидно, что система имеет две степени свободы. Рассмотрим её в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \text{координаты: } q_i &= (r, \theta, \varphi); \\ \text{условия связи: } r &= R = \text{const} \quad \Rightarrow s = 2; \quad q_i = (\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (136)$$

Функция Лагранжа:

$$L = T - U \quad (137)$$

Потенциальная энергия:

$$U = mgh = mgR \cos \theta \quad (138)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) \Big|_{r=R} = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) \quad (139)$$

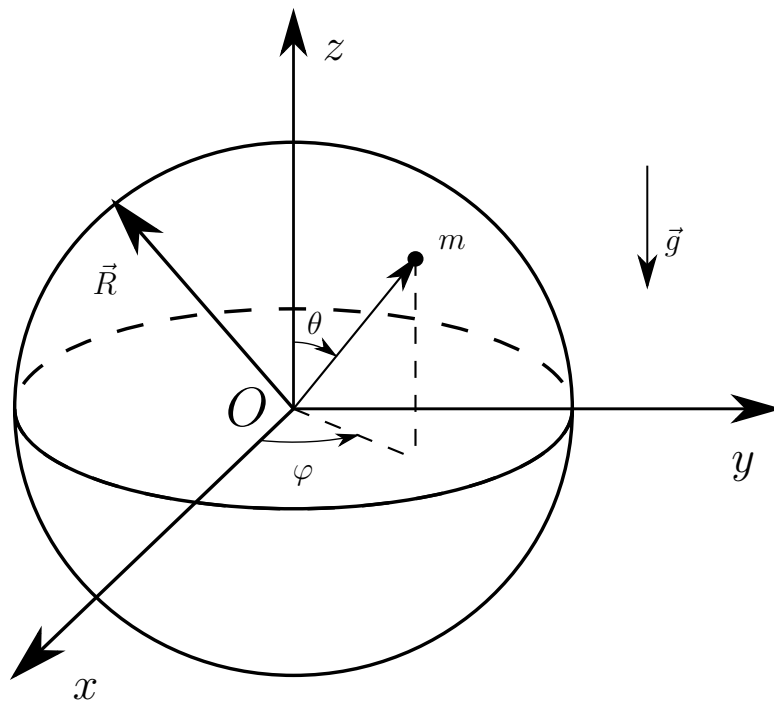


Рис. 22. Материальная точка на поверхности сферы

Подставляя (138), (139) в (137), получим:

$$L = \frac{mR^2}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta \quad (140)$$

Уравнения Лагранжа:

$$\begin{cases} 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta}, \\ 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (141)$$

для  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2 \dot{\theta}; \quad \frac{\partial L}{\partial \theta} = mR^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 + mgR \sin \theta \rightarrow (141) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - mgR \sin \theta \end{aligned} \quad (142)$$

для  $\varphi$ :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow (141) \Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}(mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}) \quad (143)$$

Таким образом, система уравнений Лагранжа имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\varphi}^2 - mgR \sin \theta, \\ 0 = \frac{d}{dt}(mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}). \end{cases} \quad (144)$$



Понизим их порядок. Из (143) понятно, что

$$mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = \text{const} \equiv P_{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad (145)$$

Подставив (145) в (142), получим

$$\begin{aligned} 0 &= mR^2 \ddot{\theta} - mR^2 \sin \theta \cos \theta \left( \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta} \right)^2 - mgR \sin \theta, \\ 0 &= mR^2 \ddot{\theta} - \frac{P_{\varphi}^2 \cos \theta}{mR^2 \sin^3 \theta} - mgR \sin \theta, \quad | \times \dot{\theta} \\ 0 &= \frac{d}{dt} \left[ \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta = \text{const} \equiv E \quad (146) \end{aligned}$$

В итоге, система уравнений движения стала иметь вид:

$$\begin{cases} mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = P_{\varphi}, \\ \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta = E \end{cases} \quad (147)$$

Найдём законы движения в квадратурах. Из (146) получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} &= \pm \sqrt{\frac{2}{mR^2} \left( E - \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} - mgR \cos \theta \right)} \equiv \pm \sqrt{f(\theta)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t - t_0 = \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}} \quad (148) \end{aligned}$$

Выражение (148) представляет собой зависимость  $\theta = \theta(t)$  в квадратурах. Можно таким же образом найти зависимость  $\varphi = \varphi(\theta)$ , но легче найти зависимость  $\varphi = \varphi(\theta)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{d\varphi/dt}{d\theta/dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} &= \pm \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta \sqrt{f(\theta)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{P_{\varphi} - \varphi d\theta}{mR^2 \sin^2 \theta \sqrt{f(\theta)}} \quad (149) \end{aligned}$$

Поскольку из (148) мы имеем зависимость  $\theta = \theta(t)$ , а из (149) - зависимость  $\varphi = \varphi(\theta)$ , то у нас есть закон движения в виде  $\varphi = \varphi(\theta(t))$ .

Таким образом, закон движения в квадратурах имеет вид:

$$\begin{cases} t - t_0 = \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{2}{mR^2} \left( E - \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} - mgR \cos \theta \right)}}, \\ \varphi - \varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{P - \varphi d\theta}{mR^2 \sin^2 \theta \sqrt{\frac{2}{mR^2} \left( E - \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} - mgR \cos \theta \right)}}. \end{cases} \quad (150)$$

### Правила нахождения интегралов движения

Для нахождения закона движения не всегда нужны уравнения Лагранжа. Часто по виду функции Лагранжа можно найти интегралы движения.

Рассмотрим функцию Лагранжа со следующей зависимостью:

$$L = L(q_2, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t) \not\equiv L(q_1), \quad (151)$$

то есть

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \quad (152)$$

Тогда  $q_1$  называется циклической координатой. Запишем уравнение Лагранжа для  $q_1$ :

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \cancel{\frac{\partial L}{\partial q_1}}^0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \text{const} = p_1 \quad (153)$$

Величина

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (154)$$

называется обобщённым импульсом.

1-е правило нахождения интегралов движения

Если для  $L$  существует циклическая координата, то сохраняется соответствующая компонента обобщённого импульса.

2) Рассмотрим  $L$ , которая не зависит от времени явно:

$$L = L(q_1, \dots, q_s; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s) \not\equiv L(t) \quad (155)$$

Тогда будет сохраняться величина, называемая обобщённой энергией:

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \quad (156)$$

Действительно, поскольку:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) = \\ &= \sum_i \ddot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \dot{q}_i \underbrace{\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)}_{\text{из ур. Лагранжа}} - \frac{d}{dt} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) = \\ &= \sum_i \left( \ddot{q}_i \cdot \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} + \dot{q}_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \dot{q}_i - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}} \ddot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}, \quad (157) \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t} \quad (158)$$

Соответственно, если  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ , то  $\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = \text{const}$ .

2-е правило нахождения интегралов движения Если  $L$  явно не зависит от времени, то сохраняется обобщённая энергия.

Чтобы найти закон движения без уравнений движения, нужно найти столько интегралов движения, сколько у системы степеней свободы.

Решим предыдущие задачи без уравнений движения.

1) Стержень в прямом угле (См. рис. 23).

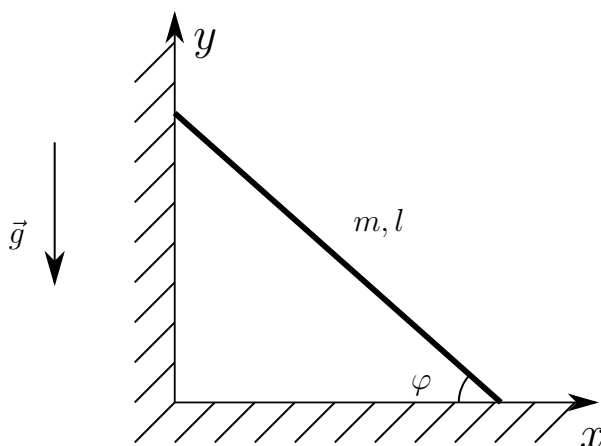


Рис. 23. Стержень в прямом угле

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \quad (159)$$

Так как  $L \neq L(t)$ , то  $E = const$

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \Rightarrow \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \dot{\varphi} \cdot \frac{ml^2 \dot{\varphi}}{3} - \frac{ml^2 \dot{\varphi}}{6} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi = \\
 &= \frac{ml^2 \dot{\varphi}^2}{6} + \frac{mgl}{2} \sin \varphi \Rightarrow \dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{6}{ml^2} \left( E - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{6}{ml^2} \left( E - \frac{mgl}{2} \sin \varphi \right)}} \quad (160)
 \end{aligned}$$

2) Материальная точка на поверхности сферы в поле тяжести (См. рис. 24).

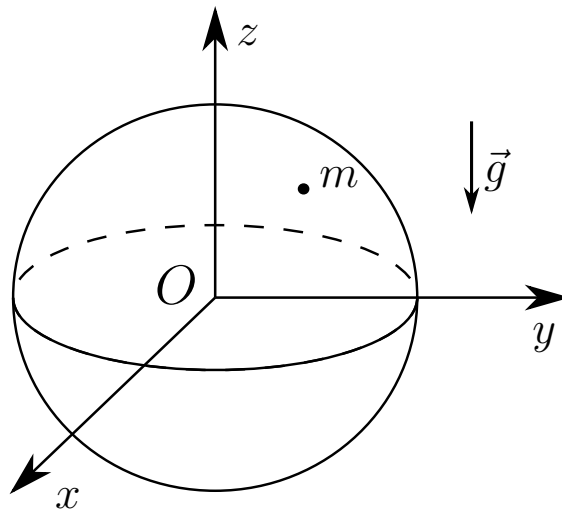


Рис. 24. Материальная точка на поверхности сферы в поле тяжести

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta \quad (161)$$

Так как  $L \neq L(\varphi)$ , то

$$P_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const \Rightarrow P_{\varphi} = mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = const \quad (162)$$

Так как  $L \neq L(t)$ , то

$$\begin{aligned}
 E &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const ; \quad E = \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \\
 &= \dot{\theta} \cdot mR^2 \dot{\theta} + \dot{\varphi} \cdot mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} - \left[ \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta \right] = \\
 &= \frac{mR^2}{2} (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgR \cos \theta = const \quad (163)
 \end{aligned}$$

Из (162) получим:

$$\dot{\varphi} = \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta} \quad (164)$$

Подставляя (164) в (163), получим

$$\frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta = E = \text{const} \quad (165)$$

Таким образом, получаем систему:

$$\begin{cases} P_{\varphi} = mR^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}, \\ \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{P_{\varphi}^2}{2mR^2 \sin^2 \theta} + mgR \cos \theta = E \end{cases} \quad (166)$$

Из которой легко получить закон движения в квадратурах:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = \pm \sqrt{f(\theta)} \Rightarrow t - t_0 &= \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}}; \\ \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\theta}} &= \frac{d\varphi}{d\theta} \pm \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta \sqrt{f(\theta)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta \frac{P_{\varphi}}{mR^2 \sin^2 \theta \sqrt{f(\theta)}} \end{aligned} \quad (167)$$

## Семинар 4

### Обобщённый импульс. Функции Лагранжа для движущейся частицы

#### Функция Лагранжа для простейших случаев

Известно, что в простейшем случае функция Лагранжа для материальной точки имеет вид:

$$L(q_i, \dot{q}_i, t) = T - U \quad (168)$$

Уравнения Лагранжа:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (169)$$

Также знаем правила нахождения интегралов движения:

1) Если  $L \neq L(q_1)$ , то

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = const \quad (170)$$

2) Если  $L \neq L(t)$ , то

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const \quad (171)$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Материальная точка всё время находится на поверхности конуса, составляющего угол  $\alpha$  с осью  $z$  (См. рис. 25). Найти закон движения точки в квадратурах.

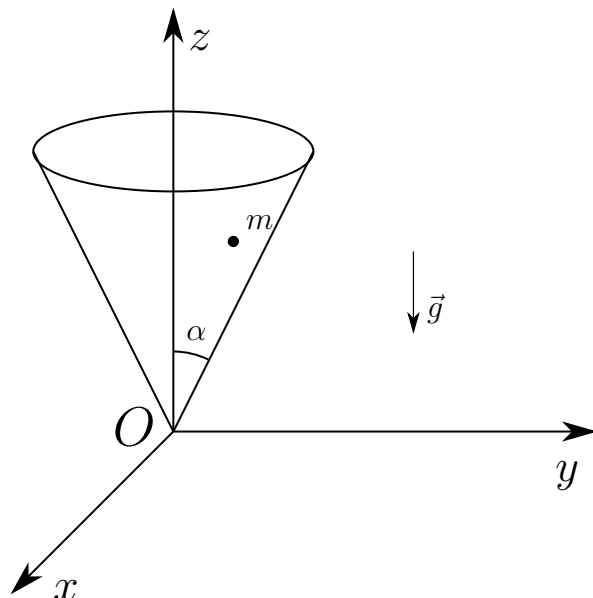


Рис. 25. Материальная точка на поверхности конуса

Используем сферические координаты. Тогда уравнение связи примет вид:

$$\theta = \alpha = \text{const} \quad (172)$$

Значит у системы две степени свободы, а обобщённые координаты:  $q_i = (r, \varphi)$ .

Потенциальная энергия:

$$U = mg \cdot \cos \alpha \quad (173)$$

Кинетическая энергия:

$$T = \frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) \Big|_{\theta=\alpha} = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2 \right) \quad (174)$$

Таким образом, функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2 \right) - mgr \cos \alpha \quad (175)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \text{const} = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin \alpha \cdot \dot{\varphi} \quad (176)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \text{const} = E &= \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = \\ &= \underline{\dot{r} \cdot m\dot{r}} + \underline{\dot{\varphi} \cdot mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}} - \left( \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2 - mgr \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2 \right) + mgr \cos \alpha \end{aligned} \quad (177)$$

Найдём закон движения в квадратурах. Выразим из (176)  $\dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \alpha} \quad (178)$$

Подставим (178) в (177), тогда

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} + mgr \cos \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{r} = \frac{dr}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2 \sin^2 \alpha} - mgr \cos \alpha \right)} \equiv \pm \sqrt{f(r)} \Rightarrow \\ \Rightarrow t - t_0 &= \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{f(r)}} \end{aligned} \quad (179)$$

(179)  $\rightarrow r = r(t)$ .

Найдём:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi/dt}{dr/dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{r}} &= \pm \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \alpha \sqrt{f(r)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int_{r_0}^r \frac{p_\varphi dr}{mr^2 \sin^2 \alpha \sqrt{f(r)}} \end{aligned} \quad (180)$$

(180)  $\rightarrow \varphi = \varphi(r)$ . Задача решена.

Выражения (179), (180), очевидно, зависят от  $r_0, \varphi_0$ , но также зависят от  $p_\varphi$  и  $E$ , которые зависят от начальных условий:

$$p_\varphi = mr^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi} \Big|_{t=t_0}; \quad (181)$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \cdot \dot{\varphi}^2) + mgr \cos \alpha \Big|_{t=t_0}; \quad (182)$$

то есть для решения задачи необходимо задать 4 начальных условия: начальные координаты и начальные скорости.

### Физический смысл интегралов движения

Рассмотрим частицу в  $3D$ , декартовых координатах, в каком-либо потенциале  $U$ . Её функция Лагранжа будет иметь вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \quad (183)$$

Тогда её обобщённые импульсы:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}. \end{cases} \quad (184)$$

Из (184) видно, что обобщённые импульсы представляют собой проекции обычных импульсов на декартовы оси.

Найдём обобщённую энергию такой системы:

$$\begin{aligned} E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \\ = m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2 + m\dot{z}^2 - \left( \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \right) = \\ = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) \end{aligned} \quad (185)$$

Из (185), сравнивая с (183), зная (168), ясно, что обобщённая энергия представляет собой сумму потенциальной и кинетической энергий системы. Однако это не всегда так.

Рассмотрим ту же частицу в сферических координатах. Её функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r, \theta, \varphi) \quad (186)$$

Тогда:

$$\begin{cases} p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \\ p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2 \dot{\theta}, \\ p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} \end{cases} \quad (187)$$



Обычный импульс имеет вид:

$$\vec{p} = m\vec{v}; \quad (188)$$

Зная, что скорость в сферических координатах:

$$\vec{v} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \quad (189)$$

Получим из (188) и (189), что

$$p_r = m\dot{r} = (\vec{e}_r \cdot \vec{p}) \quad (190)$$

То есть, первый обобщённый импульс из (187) является проекцией обычного на вектор  $\vec{e}_r$ . Однако для остальных это неверно.

Запишем момент импульса в сферических координатах:

$$\vec{L} = m [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = m \left[ \vec{e}_r r \times \left( \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r \sin \theta \dot{\varphi} \right) \right] \quad (191)$$

Зная взаимное расположение векторов локального базиса (См. рис. 26) можно

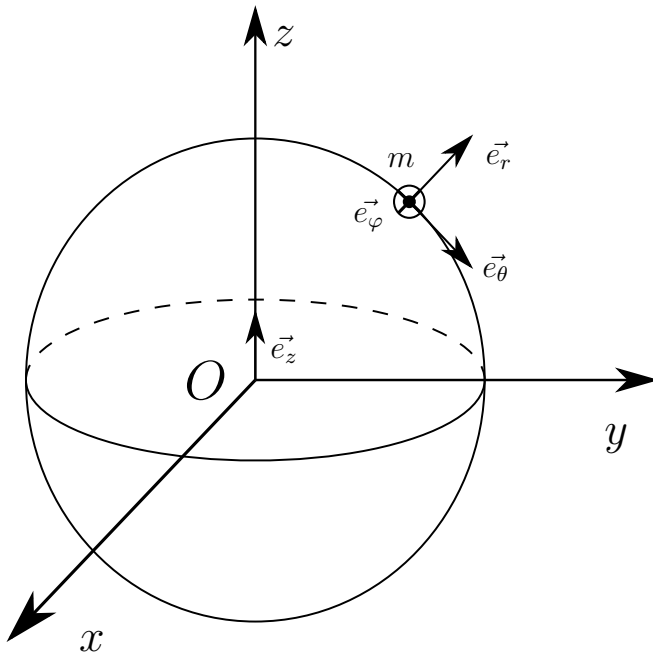


Рис. 26. Расположение векторов локального базиса в сферических координатах

посчитать векторные произведения:

$$[\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta] = \vec{e}_\varphi, \quad (192)$$

$$[\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi] = -\vec{e}_\theta \quad (193)$$

Подставляя (192) и (193) в (191), получим:

$$\vec{L} = mr^2 \dot{\theta} \vec{e}_\varphi - mr^2 \sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\theta \quad (194)$$

Таким образом, 2-ой обобщённый импульс в (187) есть проекция обычного импульса на  $\varphi$  компоненту момента импульса:

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = (\vec{e}_\varphi \cdot \vec{L}) \quad (195)$$

Чтобы понять смысл третьего обобщённого импульса из (187), посчитаем проекцию момента импульса на ось  $z$  (См. рис. 27): очевидно, что  $\vec{e}_z \perp \vec{e}_\varphi$ , а угол между  $\vec{e}_z$  и

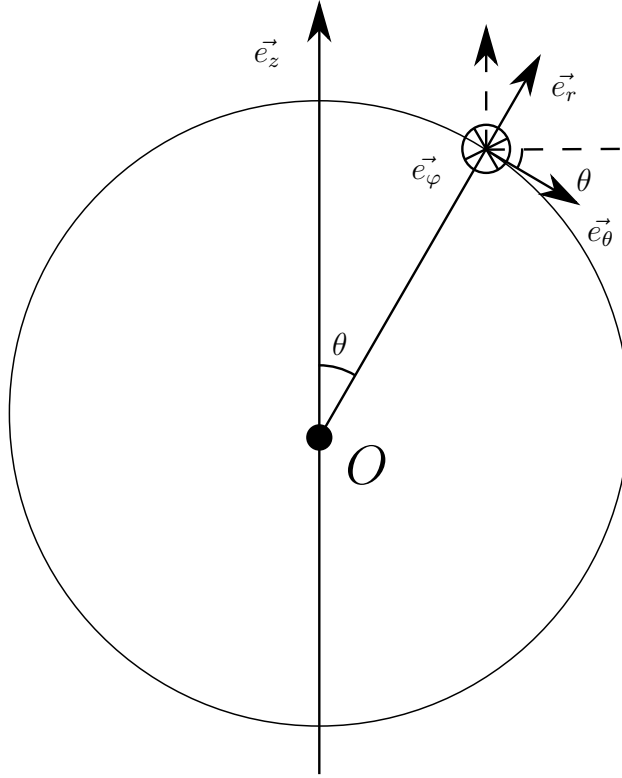


Рис. 27. Связь угла  $\theta$  и угла между векторами  $\vec{e}_z$  и  $\vec{e}_\theta$

$\vec{e}_r$  равен углу  $\theta$ , вычислим угол между  $\vec{e}_z$  и  $\vec{e}_\theta$  (См. рис. 27):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta \quad (196)$$

Тогда

$$(\vec{e}_z \cdot \vec{L}) = 0 - mr^2 \sin\theta \cdot \dot{\varphi} (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta) = +mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} \quad (197)$$

Таким образом, 3-й обобщённый импульс из (187) есть проекция обычного импульса на ось  $z$ :

$$p_\theta = mr^2 \sin^2\theta \cdot \dot{\varphi} = (\vec{e}_z \cdot \vec{L}) \quad (198)$$

### Функция Лагранжа для релятивистской частицы

В простейших случаях функция Лагранжа представляет собой (168). Но это не всегда так.

Рассмотрим следующую функцию Лагранжа:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - U = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}} - U(x, y, z) \quad (199)$$

Напишем для неё уравнения Лагранжа, обобщённый импульс и обобщённую энергию:

Уравнение Лагранжа для  $x$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} \quad (200)$$

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = -mc^2 \cdot \frac{1}{2} \frac{(-2)\dot{x}/c^2}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}} = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (201)$$

Аналогично для  $p_y$  и  $p_z$ ;

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \quad (202)$$

Подставляя (201), (202) в (200), получим:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial x} \quad (203)$$

Из (201) ясно, что  $p_x$  - проекция на ось  $x$  импульса релятивистской частицы:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (204)$$

Уравнения движения релятивистской частицы имеют вид:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x \quad (205)$$

Таким образом, получаем, стандартное уравнение движения релятивистской частицы имеет вид:

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x \quad (206)$$

Аналогично для  $y$  и  $z$ . То есть, в общем случае получим:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{\nabla} U = \vec{F} \quad (207)$$

Посчитаем обобщённую энергию релятивистской частицы:

$$\begin{aligned}
 E &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \\
 &= \dot{x} \cdot \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \dot{y} \cdot \frac{m\dot{y}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \dot{z} \cdot \frac{m\dot{z}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + U = \\
 &= \frac{mv^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + U = \underbrace{\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}_{\text{Эн. рел. частицы}} + U \quad (208)
 \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили, что обобщённая энергия релятивистской частицы есть полная сумма её кинетической и потенциальной энергий. То есть, кинетическая энергия релятивистской частицы имеет вид:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (209)$$

Однако поскольку (209) - кинетическая энергия релятивистской частицы, то её функция Лагранжа (199) не имеет вид (168).

### Функция Лагранж заряженной частицы в электромагнитном поле

Функция Лагранжа может описывать движение заряженной частицы в электромагнитном поле.

Рассмотрим частицу с массой  $m$ , и зарядом  $e$ . Уравнение движения для такого случая имеет вид:

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \vec{F}_л, \\
 m\ddot{\vec{r}} &= e \left( \vec{E} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right), \quad (210)
 \end{aligned}$$

где

$$\vec{F}_л = e \left( \vec{E} - \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \quad - \quad \text{сила Лоренца (СГС)} \quad (211)$$

Запишем уравнения Максвелла в системе СГС:

$$\text{div } \vec{H} = 0 \quad (212)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (213)$$

$$\text{div } \vec{E} = 4\pi\rho \quad (214)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (215)$$

Уравнения (212), (213) не содержат источников поля, уравнения (214), (215) - содержат источники:  $\rho$  - плотность заряда;  $\vec{j}$  - плотность тока.

Уравнения Максвелла без источников можно решить, введя потенциалы электромагнитного поля. Из (212) имеем:

$$\operatorname{div} \vec{H} = 0 \Rightarrow \vec{H} \equiv \operatorname{rot} \vec{A} \quad (216)$$

Из (213) и (216) заметим:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{A} \Rightarrow \operatorname{rot} \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \equiv -\vec{\nabla} \varphi \quad (217)$$

То есть, имеем:

$$\begin{cases} \vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi, \end{cases} \quad (218)$$

где  $\vec{A}, \varphi$  называются потенциалами электромагнитного поля. Потенциалы электромагнитного поля определены неоднозначно. Действительно, если изменить их следующим образом:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha(\vec{r}, t), \\ \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \end{cases} \quad (219)$$

то электрическое и магнитное поля, которые они определяют не изменятся:

$$\vec{H} \rightarrow \operatorname{rot} \left( \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha \right) = \operatorname{rot} \vec{A} = \vec{H} \quad (220)$$

$$\vec{E} \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha \right) - \vec{\nabla} \left( \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = \vec{E} \quad (221)$$

Преобразования (219) называются калибровочными преобразованиями.

Уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле следуют из функции Лагранжа, которая имеет вид:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\varphi = \{ \text{для декартовых координат} \} = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} [\dot{x}A_x(x, y, z, t) + \dot{y}A_y(x, y, z, t) + \\ &\quad + \dot{z}A_z(x, y, z, t)] - e\varphi(x, y, z, t) \end{aligned} \quad (222)$$

Запишем уравнение Лагранжа для  $x$ :

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \\
 &= \frac{d}{dt} \left[ m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x(x, y, z, t) \right] - \left[ \frac{e}{c} \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{e}{c} \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{e}{c} \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} - e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow 0 &= m\ddot{x} + \frac{e}{c} \left[ \frac{\partial A_x}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \cdot \dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \cdot \dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} \right] - \\
 &\quad - \frac{e}{c} \left[ \dot{x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial A_y}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial A_z}{\partial x} \right] + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \\
 &= m\ddot{x} + e \left( \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{e}{c} \dot{y} \left( \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) + \frac{e}{c} \dot{z} \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \quad (223)
 \end{aligned}$$

Вспомним, что

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (224)$$

Так как исходя из (218) следует, что

$$\frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -E_x, \quad (225)$$

а из (218) и (224) следует, что

$$\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = -H_z \quad (226)$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +H_y, \quad (227)$$

то, подставляя (225), (226) и (227) в (223), получим

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c} (\dot{y}H_z + \dot{z}H_y) \quad (228)$$

Заметим, что:

$$\left[ \vec{v} \times \vec{H} \right] = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} \Rightarrow \dot{y}H_z - \dot{z}H_y = + \left[ \vec{v} \times \vec{H} \right]_x \quad (229)$$

Подставляя (229) в (228), найдём:

$$m\ddot{x} = eE_x + \frac{e}{c} \left[ \vec{v} \times \vec{H} \right]_x \quad (230)$$

Аналогично для  $y$  и  $z$ . Таким образом, уравнения движения заряженной частицы в электромагнитном поле имеют вид (совпадают с (210)):

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\text{л} = e \left( \vec{E} - \frac{1}{c} \left[ \vec{v} \times \vec{H} \right] \right) \quad (231)$$

## Семинар 5

### Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

#### Правило построения обобщённой энергии по функции Лагранжа

Функция Лагранжа для заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\varphi, \quad (232)$$

где  $\vec{A}, \varphi$  - потенциалы электромагнитного поля, которые связаны с величинами полей соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi. \end{cases} \quad (233)$$

Уравнение движения такой частицы имеет вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_\text{л} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \quad (234)$$

Вычислим обобщённую энергию и обобщённый импульс. Возьмём декартовы координаты. Функция Лагранжа в них будет иметь вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} (\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) - e\varphi \quad (235)$$

Обобщённый импульс определяется, как:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (236)$$

Подставив (235) в (236), получим:

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x, \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y, \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z. \end{cases} \quad (237)$$

В декартовых координатах обобщённые импульсы представляют собой проекции на декартовы оси вектора:

$$\vec{p}_\text{об.} = m\vec{v} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (238)$$

Обобщённая энергия имеет вид:

$$E \equiv \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L \quad (239)$$

Тогда, подставляя (237) в (239), получим:

$$\begin{aligned} E &= \dot{x} \left( m\dot{x} + \frac{e}{c} A_x \right) + \dot{y} \left( m\dot{y} + \frac{e}{c} A_y \right) + \dot{z} \left( m\dot{z} + \frac{e}{c} A_z \right) - \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{e}{c} (A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z}) + e\varphi = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + e\varphi \quad (240) \end{aligned}$$

Можно понять правило построения обобщённой энергии по простейшим функциям Лагранжа: квадратичные слагаемые по обобщённым скоростям переходят в обобщённую энергию без изменений; линейный - исчезают; слагаемые, не содержащие обобщённых скоростей - меняют знак на противоположный. Однако в более сложных функциях Лагранжа это не так.

Например, рассмотрим функцию Лагранжа заряженной релятивистской частицы в электромагнитном поле:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\varphi \quad (241)$$

Уравнение движения можно записать так:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \vec{F}_a = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \quad (242)$$

Обобщённый импульс имеет вид:

$$\vec{p}_{об.} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \vec{A} \quad (243)$$

Обобщённая энергия:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi \quad (244)$$

## Калибровочные преобразования. Неоднозначность функции Лагранжа

Вспомним, что потенциалы электромагнитного поля связаны с величинами этих полей соотношениями:

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi. \end{cases} \quad (245)$$

Калибровочные преобразования для потенциалов имеют вид:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \alpha, \\ \varphi \rightarrow \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha}{\partial t}. \end{cases} \quad (246)$$



Так как при калибровочных преобразованиях электрические и магнитные поля не меняются, то сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} [\vec{v} \times \vec{H}] \right) \quad (247)$$

тоже не меняется.

Однако несмотря на то, что уравнения Лагранжа при калибровочных преобразованиях (246) остаются неизменными, функция Лагранжа получает добавочные члены:

$$\begin{aligned} L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\varphi &\rightarrow \\ &\rightarrow \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\alpha) - e\varphi + \frac{1}{c} \cdot e \frac{\partial\alpha}{\partial t} = \\ &= L + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}\alpha) + \frac{e}{c} \frac{\partial\alpha}{\partial t} \end{aligned} \quad (248)$$

(в релятивистском случае добавка будет той же) Перепишем добавочные члены в виде:

$$L \rightarrow L + \frac{e}{c} \left[ \dot{x} \frac{\partial\alpha}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial\alpha}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial\alpha}{\partial z} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \right] \quad (249)$$

Вспомним, что:

$$\alpha = \alpha(x, y, z, t) \Rightarrow \frac{d}{dt} \alpha(x, y, z, t) = \frac{\partial\alpha}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z} \dot{z} + \frac{\partial\alpha}{\partial t} \quad (250)$$

Тогда сравнивая (249) и (250), заметим, что добавка к функции Лагранжа при калибровочных преобразованиях имеет вид:

$$L \rightarrow L + \frac{d}{dt} \left[ \frac{e}{c} \alpha(x, y, z, t) \right] \quad (251)$$

Таким образом, получаем следующее утверждение.

Утверждение: Если

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q_i, t), \quad (252)$$

то уравнения Лагранжа для  $L$  и  $L'$  одинаковы.

Доказательство

Для  $L'$  уравнения Лагранжа имеют вид:

$$0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} \quad (253)$$

Учитывая (252), найдём:

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_j \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_j} \delta_j^i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}_i}; \quad (254)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} \quad (255)$$

Подставляя (254), (255) в (253), получим:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j - \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t} = \\
 &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_j \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} \dot{q}_j} + \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial q_i}} - \\
 &\quad - \sum_j \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} \dot{q}_j} - \cancel{\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial t}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (256)
 \end{aligned}$$

Таким образом, две различные функции Лагранжа могут описывать одну и ту же систему.

### Движение заряженной частицы в электромагнитном поле

Рассмотрим пример. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  находится в полях:

$$\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z, \quad (257)$$

$$\vec{E} = \mathcal{E} \vec{e}_x, \quad (258)$$

где  $\mathcal{H}, \mathcal{E} = const$ . Написать функцию Лагранжа и указать сохраняющиеся величины.

Найдём потенциалы электромагнитного поля:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{A} = \vec{H}; \\ -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = \vec{E} \end{cases} \quad (259)$$

Подставляя (257) в (259), получим:

$$\mathcal{H} \vec{e}_z = \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad (260)$$

Расписав по координатам (260), будем иметь:

$$\begin{cases} \vec{e}_x : 0 = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ \vec{e}_y : 0 = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ \vec{e}_z : \mathcal{H} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{cases} \quad (261)$$

Можно подобрать магнитное поле несколькими вариантами:

1) Пусть  $A_z = 0; A_y = 0$ , тогда

$$A_x = -\mathcal{H} \cdot y \Rightarrow \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0 \quad (262)$$

Таким образом:

$$A_x^{(1)} = -\mathcal{H}; A_y^{(1)} = 0; A_z^{(1)} = 0 \quad (263)$$

2) Аналогично, пусть  $A_x = 0; A_z = 0$ , тогда  $A_y = \mathcal{H}x$ . Таким образом:

$$A_x^{(2)} = 0; A_y^{(2)} = \mathcal{H}x; A_z^{(2)} = 0 \quad (264)$$

3)  $A_x = -\frac{1}{2}\mathcal{H}y; A_y = \frac{1}{2}\mathcal{H}x; A_z = 0$ . Таким образом:

$$A_x^{(3)} = -\frac{1}{2}\mathcal{H}y; A_y^{(3)} = \frac{1}{2}\mathcal{H}x; A_z^{(3)} = 0 \quad (265)$$

Можно убедиться, что решения (263), (264), (265) отличаются друг от друга на градиент функции от координат;

$$\left. \begin{aligned} A_x^{(2)} - A_x^{(3)} &= -\frac{1}{2}\mathcal{H}y = \frac{\partial \alpha}{\partial x}, \\ A_y^{(2)} - A_y^{(3)} &= \frac{1}{2}\mathcal{H}x = \frac{\partial \alpha}{\partial y}, \\ A_z^{(2)} - A_z^{(3)} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}xy \cdot \mathcal{H} \quad (266)$$

то есть решения отличаются на калибровочное преобразование.

Вычислим скалярный потенциал:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi = -\vec{\nabla} \varphi = -\mathcal{E} \vec{e}_x \Rightarrow \varphi = -\mathcal{E} \cdot x \quad (267)$$

Построим функцию Лагранжа. Рассмотрим первый вариант (263):

$$L^{(1)} = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \dot{x} (-\mathcal{H}y) + e\mathcal{E}x \quad (268)$$

Тогда:

$$\begin{aligned} p_z &= m\dot{z} = \text{const}; \\ E &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\mathcal{E}x = \text{const} \end{aligned}$$

Рассмотрим второй вариант:

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \dot{y} \mathcal{H}x + e\mathcal{E}x \Rightarrow \\ p_z &= m\dot{z} = \text{const}; \\ E &= \text{const}; \\ p_y &= m\dot{y} + \frac{e}{c} \mathcal{H}x = \text{const} \end{aligned} \quad (269)$$

Рассмотрим третий вариант:

$$\begin{aligned} L^{(3)} &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} (\dot{y}x - \dot{x}y) + e\mathcal{E}x \\ p_z &= \text{const} \\ E &= \text{const} \end{aligned} \quad (270)$$

Иногда подходящий вид потенциалов можно определить по виду полей, например:

$$\begin{cases} \vec{H} = \overrightarrow{\text{const}}, \\ \vec{E} = \overrightarrow{\text{const}} \end{cases} \quad (271)$$

В таком случае потенциалы можно выбрать такими:

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H} \times \vec{r}], \quad (272)$$

$$\varphi = -(\vec{E} \cdot \vec{r}) \quad (273)$$

Применим их к задаче:

$$\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z; \quad \vec{E} = \mathcal{E} \vec{e}_x; \quad (274)$$

$$\varphi = -(\vec{E} \cdot \vec{r}) = -\mathcal{E}x; \quad (275)$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \mathcal{H} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (-\vec{e}_x) \mathcal{H} y + \frac{1}{2} \vec{e}_y \mathcal{H} x \quad (276)$$

Получили третий вариант (265).

Рассмотрим задачу в цилиндрических координатах. Пусть  $q_i = (\rho, \varphi, z)$ . Тогда

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \Rightarrow \dot{x} = \dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \Rightarrow \dot{y} = \dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi \\ \Rightarrow L &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} (\rho \cos \varphi \cdot (\dot{\rho} \sin \varphi + \rho \dot{\varphi} \cos \varphi) - \\ &\quad - \rho \sin \varphi (\dot{\rho} \cos \varphi - \rho \dot{\varphi} \sin \varphi)) + e\mathcal{E} \rho \cos \varphi = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} + e\mathcal{E} \rho \cos \varphi \end{aligned} \quad (277)$$

Слагаемое, подчеркнутое двумя чертами в (277), есть форма слагаемого, подчеркнутого одной чертой в (270), в цилиндрических координатах при постоянном магнитном поле, направленном по  $z$ . Они представляют собой добавку к функции Лагранжа от слагаемого с потенциалом магнитного поля, которое в формальном виде (232) выглядит так:

$$\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \quad (278)$$

Рассмотрим следующую задачу. Заряженная частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  всё время находится на поверхности параболоида (См. рис. 28) в поле тяжести и магнитном поле:

$$\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z \quad (279)$$

Уравнение связи:

$$z = a\rho^2, \quad a = \text{const} \quad (280)$$

Найти закон движения частицы в квадратурах.

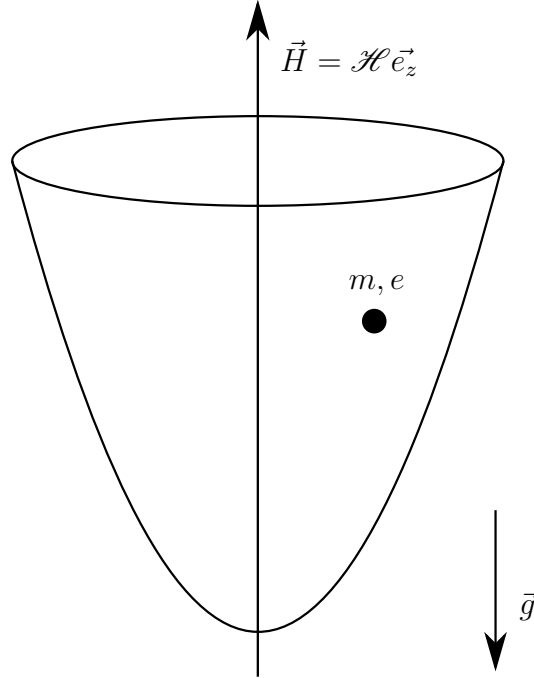


Рис. 28. Заряженная частица на поверхности параболоида

Функция Лагранжа в этом случае представляет собой простейшую функцию Лагранжа с добавками, связанными с электромагнитным полем. Учитывая уравнение связи (280), функция Лагранжа имеет вид:

$$\begin{aligned} L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\tilde{\varphi} - mgh \Big|_{z=a\rho^2} = \\ = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} - mgz \Big|_{z=a\rho^2} \end{aligned} \quad (281)$$

Возьмём цилиндрические координаты. Учитывая уравнение связи (280):  $q_i = (\rho, \varphi)$ . Избавимся от  $z$ :

$$\begin{aligned} z &= a\rho^2 \\ \dot{z} &= 2a\rho\dot{\rho} \end{aligned} \quad (282)$$

Подставляя (282) в (281), получим:

$$L = \frac{m}{2} [(1 + 4a^2\rho^2) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2] + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} - mga\rho^2; \quad (283)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 = \text{const}; \quad (284)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{m}{2} [(1 + 4a^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2] + m g a \rho^2 = \text{const} \quad (285)$$

Из (284) получим

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2}{m \rho^2} \quad (286)$$

Вставляя (286) в (285), получим:

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2} (1 + 4a^2 \rho^2) \dot{\rho}^2 + \frac{(p_{\varphi} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2)^2}{2m \rho^2} + m g a \rho^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} &= \pm \sqrt{\frac{2}{m(1 + 4a^2 \rho^2)} \left[ E - \frac{(p_{\varphi} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2)^2}{2m \rho^2} - m g a \rho^2 \right]} \equiv \pm \sqrt{f(\rho)} \Rightarrow \\ \Rightarrow t - t_0 &= \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}} \rightarrow \rho = \rho(t) \quad (287) \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{d\varphi/dt}{d\rho/dt} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} &= \pm \frac{p_{\varphi} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2}{m \rho^2 \sqrt{f(\rho)}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \int_{\varphi_0}^{\varphi} d\varphi = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{(p_{\varphi} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2) d\rho}{m \rho^2 \sqrt{f(\rho)}} \rightarrow \varphi = \varphi(\rho) \quad (288) \end{aligned}$$

Задача решена.

Вычислим добавку от магнитного поля к функции Лагранжа, связанную со слабым (278) в сферических координатах:

$$\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \xrightarrow{\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z} \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} \quad (289)$$

Заметим, что при преобразовании декартовых координат в сферические  $r \sin \theta$  занимает то же место, что и  $\rho$  в преобразовании декартовых координат к цилиндрическим:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi & x &= \rho \cos \varphi \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi & y &= \rho \sin \varphi \\ z &= r \cos \theta & z &= z \end{aligned} \quad (290)$$

Таким образом, с учётом (290) выражение (289) примет вид:

$$\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) \xrightarrow{\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z} \frac{e\mathcal{H}}{2c} r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (291)$$

## Семинар 6

### Движение заряженной частицы в магнитном поле. Примеры

Нам известна функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле:

$$L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - e\varphi, \quad (292)$$

где

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot } \vec{A}, \\ \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \varphi \end{cases} \quad (293)$$

Если  $\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z$ , где  $\mathcal{H} = \text{const}$ , то

$$\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H} \times \vec{r}] \quad (294)$$

В цилиндрических координатах:

$$\frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) = \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} \quad (295)$$

### Заряженная бусинка на кольце

Рассмотрим задачу.

На кольцо радиуса  $R$  нанизана бусинка с массой  $m$  и зарядом  $e$  (См. рис. 29). Кольцо вращается вокруг оси  $z$  с постоянной угловой скоростью  $\omega$ . Система находится в поле тяжести и в магнитном поле

$$\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z \quad (296)$$

Найти функцию Лагранжа и закон движения в квадратурах.

Понятно, что для описания частицы можно использовать один параметр  $\theta$ . Функция Лагранжа с учётом (295) и (292) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} L &= \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{e}{c} (\vec{v} \cdot \vec{A}) - U = \\ &= \frac{m}{2} (R^2 \dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega - mgR \cos \theta \end{aligned} \quad (297)$$

Исходя из (297) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E &= \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \Rightarrow \dot{\theta} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - L = \\ &= \dot{\theta} \cdot mR^2 \dot{\theta} - \left( \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{m}{2} R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega^2 + \frac{e\mathcal{H}}{2c} R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega - mgR \cos \theta \right) = \\ &= \frac{mR^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{m}{2} R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega^2 - \frac{e\mathcal{H}}{2c} R^2 \sin^2 \theta \cdot \omega + mgR \cos \theta = \text{const} \end{aligned} \quad (298)$$

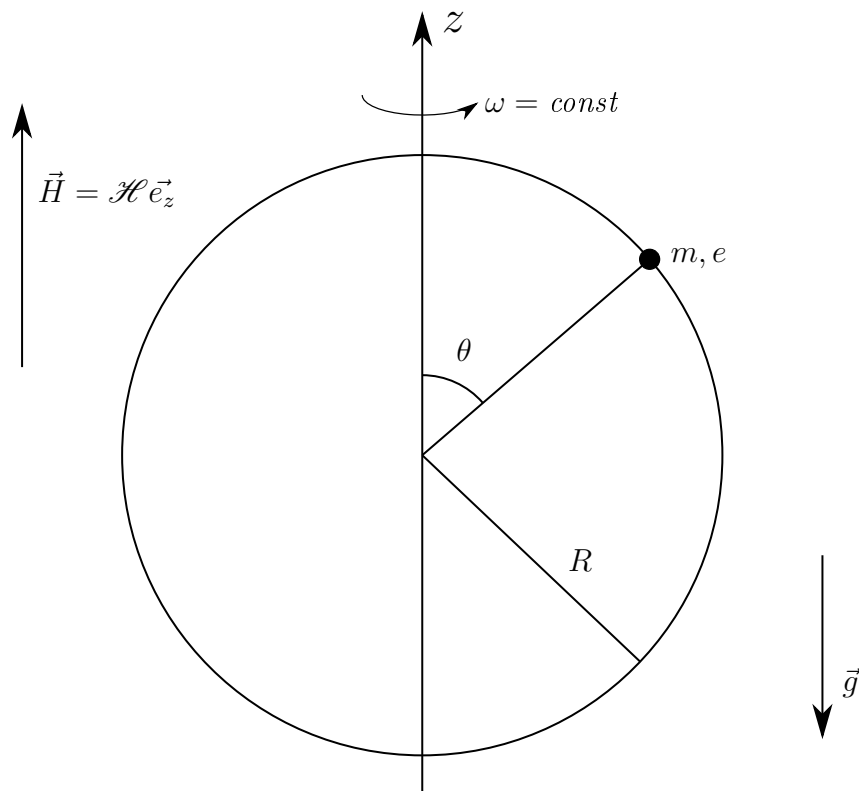


Рис. 29. Бусинка на кольце в магнитном поле

Из (298) получим закон движения в квадратурах:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} &= \\ &= \pm \sqrt{\frac{2}{mR^2} \left[ E + \frac{mR^2}{2} \sin^2 \theta \cdot \omega^2 + \frac{e\mathcal{H}}{2c} R^2 \sin^2 \theta \omega - mgR \cos \theta \right]} \equiv \pm \sqrt{f(\theta)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{f(\theta)}} \rightarrow \theta = \theta(t) \quad (299)\end{aligned}$$

Задача решена.

### Частица в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим задачу. Частица с массой  $m$  и зарядом  $e$  движется в магнитном поле:

$$\vec{H} = \vec{e}_z \cdot \mathcal{H} e^{-\rho^2/a^2}, \quad (300)$$

где  $\mathcal{H}, a = \text{const}$ .

Найти функцию Лагранжа и указать интегралы движения.



Будем использовать цилиндрические координаты. Найдём потенциал  $\vec{A}$ :

$$\vec{e}_z \mathcal{H} e^{-\rho^2/a^2} = \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}_\rho & \rho \vec{e}_\varphi & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \quad (301)$$

Напишем (301) в проекциях на вектора локального базиса:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho : 0 = \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho A_\varphi), \\ \vec{e}_\varphi : 0 = \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}, \\ \vec{e}_z : \mathcal{H} e^{-\rho^2/a^2} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\varphi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right] \end{cases} \quad (302)$$

Подберём проекции. Пусть  $A_z = 0$ ;  $A_\rho = 0$ , тогда с учётом (302) получим

$$\rho A_\varphi = \int d\rho \mathcal{H} \rho e^{-\rho^2/a^2} = \int \frac{1}{2} d\rho^2 \mathcal{H} e^{-\rho^2/a^2} = -\frac{a^2 \mathcal{H}}{2} e^{-\rho^2/a^2} \quad (303)$$

Тогда:

$$\frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial z} = 0 \quad (304)$$

Таким образом, из (303) получим:

$$A_\varphi = -\frac{a^2 \mathcal{H}}{2\rho} e^{-\rho^2/a^2} \quad (305)$$

Векторный потенциал будет иметь вид:

$$\vec{A} = \vec{e}_\varphi \left( -\frac{a^2 \mathcal{H}}{2\rho} e^{-\rho^2/a^2} \right) \quad (306)$$

Скалярный потенциал:

$$0 = \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \hat{\varphi} \Rightarrow \hat{\varphi} = 0 \quad (307)$$

Скорость в цилиндрических координатах:

$$\vec{v} = \vec{e}_\rho \dot{\rho} + \vec{e}_\varphi \rho \dot{\varphi} + \vec{e}_z \dot{z} \quad (308)$$

Таким образом, подставляя (306), (307), (308) в (292), получим:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - \frac{ea^2 \mathcal{H}}{2c} e^{-\rho^2/a^2} \dot{\varphi} \quad (309)$$

Очевидно, что:

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} = \text{const} ; \quad (310)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m\rho^2 \dot{\varphi} - \frac{ea^2 \mathcal{H}}{2c} e^{-\rho^2/a^2} = \text{const} ; \quad (311)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E &= \dot{\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{z} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - L = \\ &= \dot{\rho} \cdot m\dot{\rho} + \dot{\varphi} \left( m\rho^2 \dot{\varphi} - \frac{ea^2 \mathcal{H}}{2c} e^{-\rho^2/a^2} \right) + \dot{z} \cdot m\dot{z} - \\ &\quad - \frac{m}{2} \left( \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) + \frac{ea^2 \mathcal{H}}{2c} e^{-\rho^2/a^2} \dot{\varphi} = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \text{const} \end{aligned} \quad (312)$$

Задача решена.

### Частица в поле магнитного монополя

Рассмотрим частицу с массой  $m$  и зарядом  $e$  в магнитном поле магнитного монополя. Такое поле может иметь магнитный заряд (если его обнаружат). Также такое поле возникает на конце длинного соленоида на расстояниях от конца много больших ширины соленоида, но много меньших длины соленоида. Магнитное поле имеет вид:

$$\vec{H} = \frac{g\vec{r}}{r^3} \quad (313)$$

Чтобы построить функцию Лагранжа, нужно решить уравнение:

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A} \quad (314)$$

Для этого нужно:

$$\text{div } \vec{H} = \text{div rot } \vec{A} = 0 \quad (315)$$

Поле (313) удовлетворяет выражению (315), но только если  $\vec{r} \neq 0$

$$\text{div } \vec{H} = \left( \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{g\vec{r}}{r^3} \right) \right) = \frac{g(\vec{\nabla} \cdot \vec{r})}{r^3} + g \left( \vec{r} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r^3} \right) = \frac{3g}{r^3} - g \left( \vec{r} \cdot \frac{3\vec{r}}{r^5} \right) = 0 \quad (316)$$

Однако если рассмотреть интеграл:

$$\int dV \text{div } \vec{H} = \oint_{S_{\infty}^2} (d\vec{S} \cdot \vec{H}) = \oint_{S_{\infty}^2} \left( d\vec{S} \cdot \frac{g\vec{r}}{r^3} \right) = \oint_{S_{\infty}^2} dS \cdot \frac{g}{r^2} = 4\pi r^2 \frac{g}{r^2} = 4\pi g \quad (317)$$

Из (316) и (317) следует, что:

$$\text{div } \vec{H} = 4\pi g \delta^3(\vec{r}) \neq 0 \quad (318)$$

Попробуем решить (318), считая  $\vec{r} \neq 0$  в сферических координатах. Так как  $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$ , то:

$$g\vec{e}_r \frac{1}{r^2} = \vec{H} = \text{rot } \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & r \sin \theta \vec{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_r & rA_\theta & r \sin \theta A_\varphi \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{e}_r : \frac{g}{r^2} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r A_\theta) \right), \\ \vec{e}_\theta : 0 = \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta A_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}, \\ \vec{e}_\varphi : 0 = \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}. \end{cases} \quad (319)$$

Подберём его решение. Пусть  $A_r = 0$ ;  $A_\theta = 0$ , тогда из (319) следует:

$$g \sin \theta = \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta \cdot A_\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \sin \theta \cdot A_\varphi = \text{const} - g \cos \theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_\varphi = \frac{\text{const} - g \cos \theta}{r \sin \theta} \equiv \frac{g(k - \cos \theta)}{r \sin \theta} \quad (320)$$

Так как согласно (320)  $r \sin \theta \cdot A_\varphi$  не зависит от  $r$ , то

$$\frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta \cdot A_\varphi) = 0 \quad (321)$$

то второе уравнение из уравнений (319) в координатном представлении выполняется. Таким образом, Векторный потенциал имеет вид:

$$\vec{A} = \frac{g}{r \sin \theta} (k - \cos \theta) \vec{e}_\varphi \quad (322)$$

Выражение (322) имеет сингулярности при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi$  (См. рис. 30).

Если  $k = 1$ , то при  $\theta \rightarrow \pi$  сингулярность остаётся:

$$\frac{k - \cos \theta}{\sin \theta} \approx \frac{2}{\pi - \theta} \quad (323)$$

но при  $\theta \rightarrow 0$ :

$$\frac{k - \cos \theta}{\sin \theta} \approx \frac{1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)}{\theta} \approx \frac{\theta}{2} \quad (324)$$

Если  $k = -1$  - наоборот: при  $\theta \rightarrow 0$  сингулярность остаётся, а при  $\theta \rightarrow \pi$  сингулярность исчезает.

Так, выбором  $k$ , можно обойти сингулярности.

Скорость в сферических координатах:

$$\vec{v} = \vec{e}_r \dot{r} + \vec{e}_\theta r \dot{\theta} + \vec{e}_\varphi r \sin \theta \cdot \dot{\varphi} \quad (325)$$

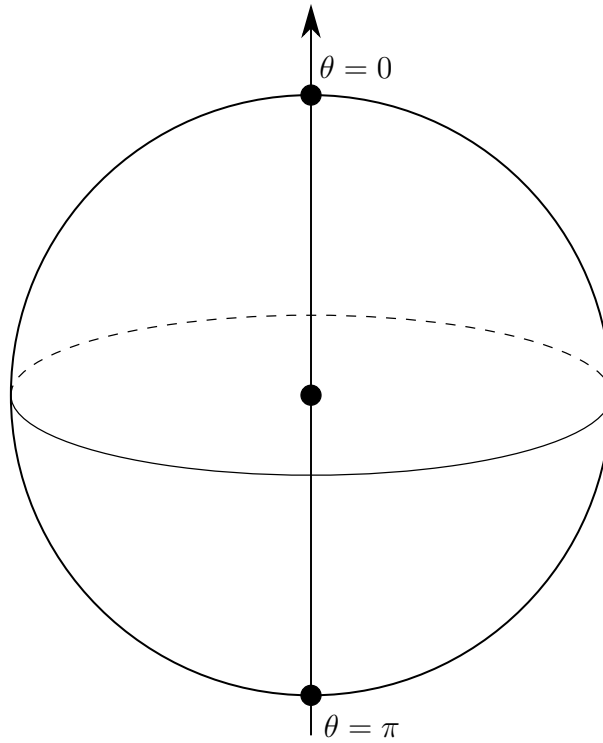


Рис. 30. Сингулярности векторного потенциала поля магнитного монополя

Подставляя (322), (325) в (292), учитывая, что электрического поля нет, получим:

$$L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{e}{c} g (K - \cos \theta) \dot{\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) - \frac{eg}{c} \cos \theta \cdot \dot{\varphi}; \quad (326)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} - \frac{eg}{c} \cos \theta = const; \quad (327)$$

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \frac{m}{2} \left( \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2 \right) = const. \quad (328)$$

Недостающий интеграл движения будет найден во второй части курса с помощью функции Гамильтона.

### Закон движения частицы в магнитном поле

Рассмотрим частицу с массой  $m$  и зарядом  $e$ , движущуюся в магнитном поле:

$$\vec{H} = \mathcal{H} \vec{e}_z \quad (329)$$

Найдём закон её движения в явном виде. Функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 \dot{\varphi} \quad (330)$$

Интегралы движения:

$$p_z = m\dot{z} = \text{const} \quad (331)$$

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} + \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2 = \text{const} \quad (332)$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) = \text{const} \quad (333)$$

Из (331) следует:

$$\dot{z} = \frac{p_z}{m} = \text{const} \Rightarrow z - z_0 = \frac{p_z}{m}(t - t_0) \quad (334)$$

Из (332), (333) получим:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} &= \frac{p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2}{m\rho^2} \rightarrow (333) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E - \frac{p_z^2}{2m} \equiv E_0 = \frac{m\dot{\rho}^2}{2} + \frac{(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2)^2}{2m\rho^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 - \frac{(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2)^2}{2m\rho^2} \right)} \equiv \pm \sqrt{f(\rho)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{f(\rho)}}; \quad (335) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\rho} &= \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \pm \frac{(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2)}{m\rho^2 \sqrt{f(\rho)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} d\rho \frac{(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2)}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 - \frac{(p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c}\rho^2)^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (336) \end{aligned}$$

Сделаем замену:

$$\xi \equiv \frac{p_\varphi}{\rho} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \cdot \rho \Rightarrow d\xi = -\frac{p_\varphi}{\rho^2} d\rho + \frac{e\mathcal{H}}{2c} d\rho \quad (337)$$

Подставив (337) в (336), получим:

$$\begin{aligned}
 \varphi - \varphi_0 &= \mp \int d\xi \frac{1}{\sqrt{2mE_0 - \left(\frac{p_\varphi}{\rho} - \frac{e\mathcal{H}}{2c} \cdot \rho\right)^2}} \Rightarrow \\
 \text{Так как } (a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \mp \int \frac{d\xi}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c} - \xi^2}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \mp \int \frac{d\xi}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c} - \xi^2}} \Rightarrow \\
 \varphi - \varphi_0 &= \mp \arcsin \left( \frac{\xi}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} \right) \Bigg|_{\rho_0}^{\rho} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \xi &= \frac{p_\varphi}{\rho} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \mp \arcsin \left( \frac{\frac{p_\varphi}{\rho} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} \right) \pm \arcsin \left( \frac{\frac{p_\varphi}{\rho_0} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho_0}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} \right) \quad (338)
 \end{aligned}$$

Перепишем (338) в виде:

$$\frac{\frac{p_\varphi}{\rho} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} = \mp \sin \left[ \varphi - \varphi_0 \mp \arcsin \left( \frac{\frac{p_\varphi}{\rho_0} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho_0}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} \right) \right] \quad (339)$$

Так как:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha, \quad (340)$$

то учитывая (340) в (339), ясно, что вместо  $\mp$  можно писать  $+$ , так как выражение с верхним знаком будет соответствовать выражению с нижним знаком, в котором к аргументу синуса добавили  $\pi$ , что, разумеется, не повлияет на траекторию, а повлияет лишь на ориентацию координат (выбор отсчёта угла  $\varphi$ ). Тогда получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{p_\varphi}{\rho} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho &= \sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}} \sin(\varphi - \varphi_1), \quad \left| \times \rho \right. \\
 p_\varphi + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho^2 &= \sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}} \cdot (\rho \sin \varphi \cos \varphi_1 - \rho \cos \varphi \sin \varphi_1), \quad (341)
 \end{aligned}$$

где

$$\varphi_1 = \varphi_0 - \arcsin \left( \frac{\frac{p_\varphi}{\rho_0} + \frac{e\mathcal{H}}{2c} \rho_0}{\sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}} \right) \quad (342)$$

Вспомним, что:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases} \quad (343)$$

Тогда, подставляя (343) в (342), получим:

$$p_\varphi + \frac{e\mathcal{H}}{2c} (x^2 + y^2) = \sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}} (y \cos \varphi_1 - x \sin \varphi_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow a(x^2 + y^2) - xb_1 - yb_2 + c = 0, \quad (344)$$

где

$$a = \frac{e\mathcal{H}}{2c}; \quad c = p_\varphi; \quad (345)$$

$$b_1 = \sin \varphi_1 \cdot \sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}}; \quad (346)$$

$$b_2 = -\cos \varphi_1 \cdot \sqrt{2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}} \quad (347)$$

Перепишем (344) в виде:

$$a \cdot \left(x - \frac{b_1}{2a}\right)^2 + a \cdot \left(y - \frac{b_2}{2a}\right)^2 + c - \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a} = 0, \\ \left(x - \frac{b_1}{2a}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a^2} \equiv R^2 \quad (348)$$

Из уравнений (334), (348) видно, что траектория движения частицы представляет собой спираль. Найдём радиус окружности, по которой движется частица в плоскости  $Oxy$ . Подставив (345), (346), (347) в (348), получим:

$$R^2 = -\frac{2p_\varphi c}{e\mathcal{H}} + \left(2mE_0 + \frac{2p_\varphi e\mathcal{H}}{c}\right) \cdot \frac{c^2}{e^2 \mathcal{H}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow R^2 = \frac{2mE_0 c^2}{e^2 \mathcal{H}^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2mE_0} c}{|e\mathcal{H}|} \quad (349)$$

Решим ту же задачу школьными методами. Уравнение движения имеет вид:

$$m \cdot \frac{v^2}{R} = \vec{F}_\perp = \frac{e}{c} \mathcal{H} v, \quad (350)$$

где

$$v^2 \equiv v_x^2 + v_y^2 \quad (351)$$

Заметим, учитывая (351), что:

$$E_0 = E - \frac{p_z^2}{2m} = \frac{mv^2}{2} \quad (352)$$

Тогда из (350) и (350) получим:

$$R = \frac{mvc}{e\mathcal{H}} = \frac{m\sqrt{\frac{2E_0}{m}}c}{e\mathcal{H}} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{2mE_0}c}{e\mathcal{H}} \quad (353)$$

Установим, как определить расположение данной окружности относительно оси  $z$  (См. рис. 31).

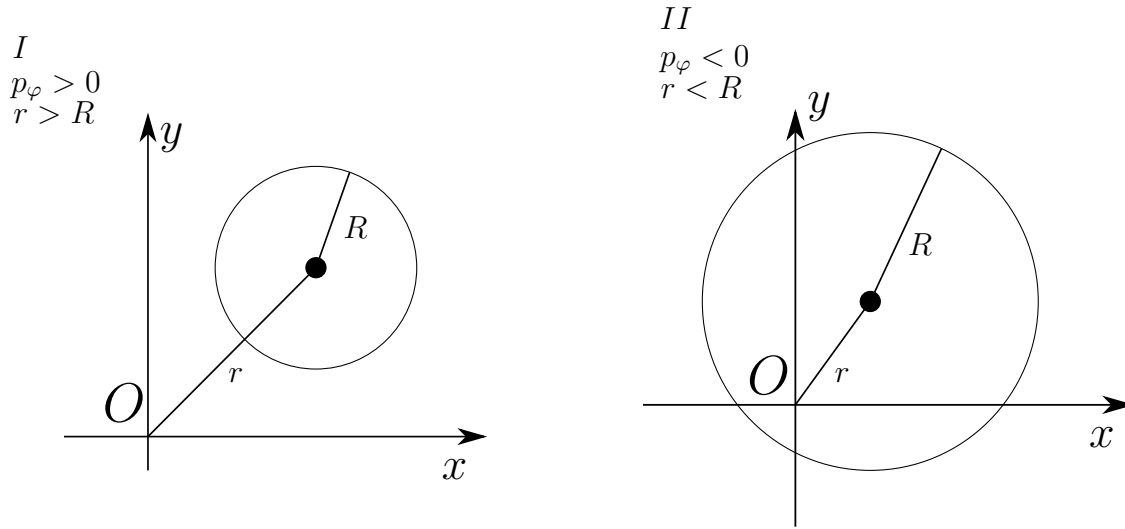


Рис. 31. Два варианта расположения проекции траектории частицы на плоскость  $Oxy$  относительно оси  $z$

Из геометрических соображений (См. рис. 31) и (348) видно, что:

$$\begin{aligned} x_{ц.} &= \frac{b_1}{2a}; & y_{ц.} &= \frac{b_2}{2a}; \\ r^2 &= x_{ц.}^2 + y_{ц.}^2 = \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a^2}; \\ R^2 &= -\frac{c}{a} + \frac{b_1^2 + b_2^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + r^2, \quad \text{где } c = p_\varphi; a = \frac{e\mathcal{H}}{2c} \end{aligned} \quad (354)$$

Таким образом, считая, что  $e > 0$ ;  $\vec{H} \uparrow \vec{e}_z \Rightarrow a > 0$ . Тогда из (354) очевидно, что  $R^2 < r^2$ , если  $p_\varphi > 0$  и наоборот. То есть случай I на рис. (31) соответствует случаю, когда  $p_\varphi > 0$ ; случай II - случаю, когда  $p_\varphi < 0$ .



## Семинар 7

### Исследование одномерного движения

Рассмотрим одномерное движение частицы (См. рис. 32). Её функция Лагранжа

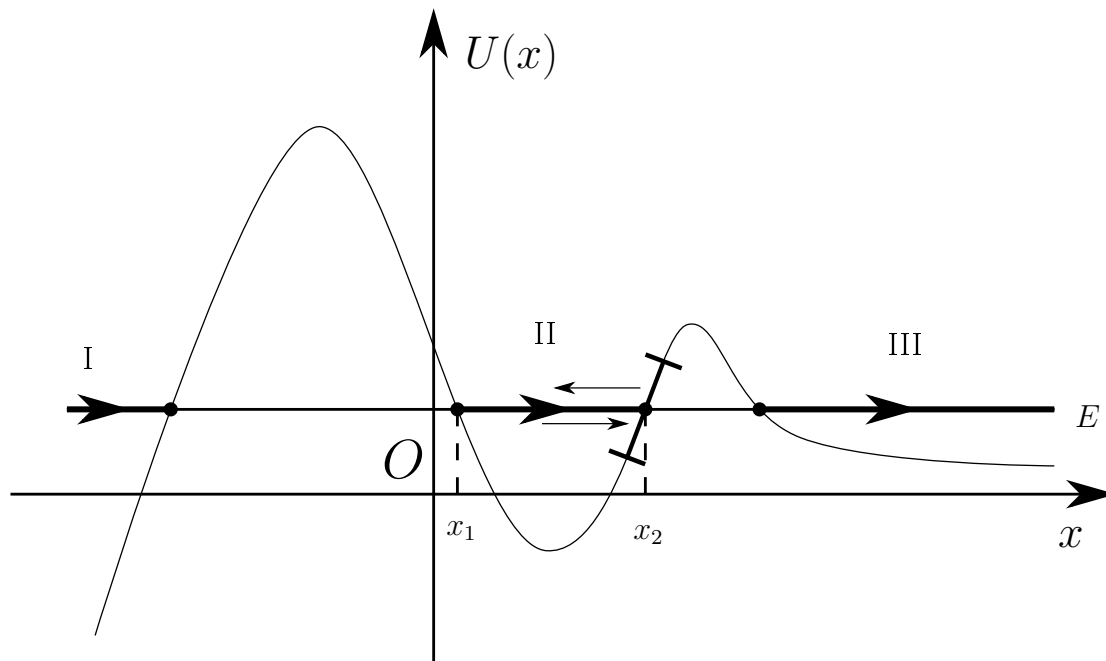


Рис. 32. Одномерное движение частицы

имеет вид:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \quad (355)$$

Из (355) очевидно, что:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow E = \text{const} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E &= \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L = \dot{x} \cdot m\dot{x} - \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \\ &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \text{const} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))};$$

$$t - t_0 = \int_{t_0}^t dt = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \quad (356)$$

Заметим, что

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) \geq U(x) \quad (357)$$

$$E = U(x_1) = U(x_2) \quad (358)$$

В окрестности  $x_2$  потенциал почти линейный. Тогда в этой окрестности можно записать:

$$U(x) = U(x_2 + (x - x_2)) = U(x_2) + \underbrace{U'(x_2)}_{>0} \cdot (x - x_2) + \dots = E + U'(x_2) \cdot (x - x_2) + \dots \quad (359)$$

В таком случае, можно найти закон движения частицы в окрестности точки поворота в явном виде:

$$\begin{aligned} t - t_0 &\approx \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x_2) - U'(x_2)(x - x_2))}} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} U'(x_2)(x_2 - x)}} = \\ &= \sqrt{\frac{m}{2U'(x_2)}} (-2) [\sqrt{x_2 - x} - \sqrt{x_2 - x_0}] \Rightarrow \\ \Rightarrow t - t_0 &= -\sqrt{\frac{2m}{U'(x_2)}} \sqrt{x_2 - x} + \sqrt{\frac{2m}{U'(x_2)}} \sqrt{x_2 - x_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow t - t_1 &\approx -\sqrt{\frac{2m}{U'(x_2)}} \sqrt{x_2 - x} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_2 - x &\approx \frac{U'(x_2)}{2m} \cdot (t - t_1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x &\approx x_2 - \frac{U'(x_2)}{2m} (t - t_1)^2, \quad (360) \end{aligned}$$

где

$$t_1 \equiv t_0 + \sqrt{\frac{2m}{U'(x_2)}} \sqrt{x_2 - x_0} \quad (361)$$

В момент времени  $t_1$  координата  $x$  станет равной  $x_2$ , после этого выражение  $(t - t_1)^2$  начнёт расти, а  $x$ , согласно (360), опять станет меньше  $x_2$ . Аналогичная ситуация случится в окрестности точки  $x_1$ .

Точки  $x_1, x_2$  называются точками поворота. Движение между двумя точками поворота периодическое (если между ними нет других особенных точек). Понятно, как найти период такого движения:

$$T = + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} - \int_{x_2}^{x_1} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \Rightarrow T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \quad (362)$$

### Пример

Рассмотрим случай, когда уровень энергии частицы не пересекает график потенциала, а касается его (См. рис. 33). Тогда в окрестности точки  $x_3$  можно записать:

$$\begin{aligned} U(x) = U(x_3 + (x - x_3)) &\approx U(x_3) + \underbrace{U'(x_3)}_{=0} (x - x_3) + \frac{1}{2} \underbrace{U''(x_3)}_{<0} (x - x_3)^2 + \dots = \\ &= E + \frac{1}{2} U''(x_3) (x - x_3)^2 + \dots \quad (363) \end{aligned}$$

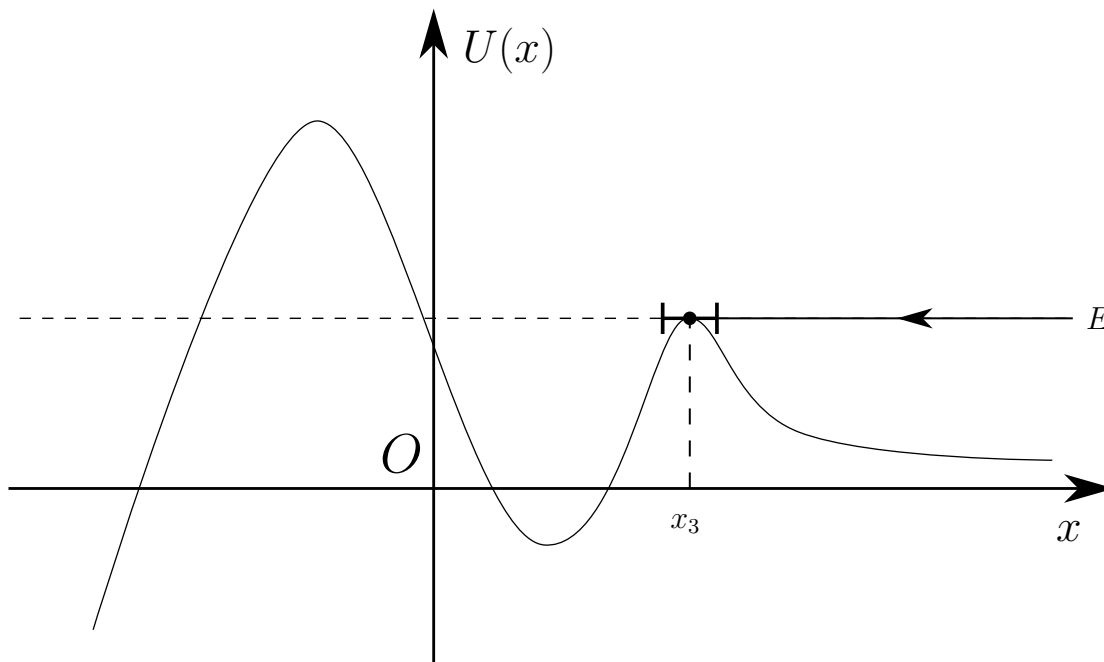


Рис. 33. Частица в одномерном потенциале

$$t - t_0 \approx - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U(x))}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t - t_0 \approx - \int_{x_0}^x dx \frac{1}{\sqrt{\frac{|U''(x_3)|}{m} (x - x_3)^2}} = - \sqrt{\frac{m}{|U''(x_3)|}} \ln \left( \frac{x - x_3}{x_0 - x_3} \right) \quad (364)$$

$$x - x_3 \approx (x_0 - x_3) \exp \left[ - \sqrt{\frac{|U''(x_3)|}{m}} (t - t_0) \right] \Rightarrow x_0 - x_3 > 0 \quad (365)$$

То есть, исходя из (365), поскольку  $x_0 > x_3$ , а экспонента всегда положительна, тогда величина  $(x - x_3)$  - тоже всегда будет положительной. Частица будет бесконечно долго приближаться к  $x_3$ .

## Гармонический осциллятор

### Пример

Рассмотрим частицу в гармоническом осцилляторе:  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ . Её функция Лагранжа имеет вид

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \quad (366)$$

Найдём период её движения.

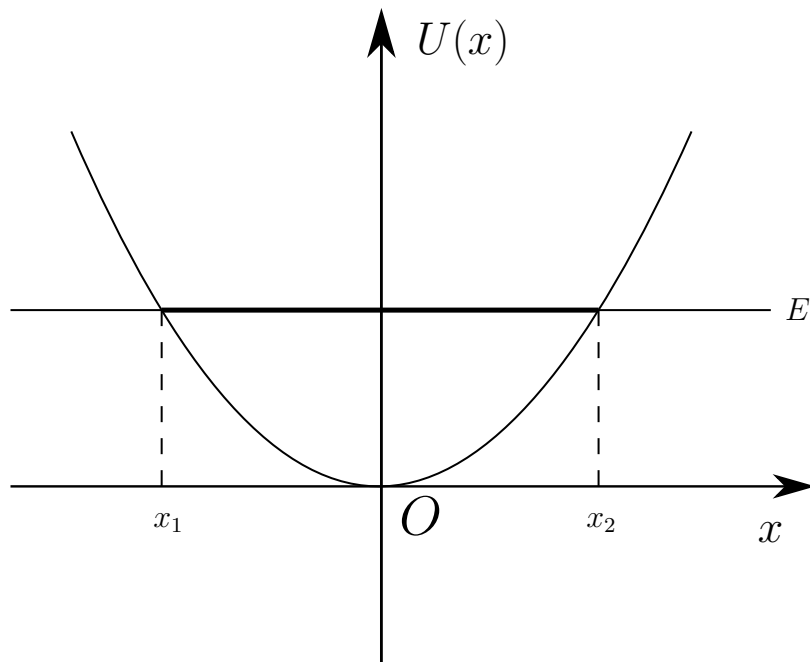


Рис. 34. Частица в гармоническом осцилляторе

Легко найти точки поворота:

$$E = U(x_{1,2}) = \frac{m\omega^2 x_{1,2}^2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \\ x_2 = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \end{cases} \quad (367)$$

1) Можно найти период через уравнения Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = \frac{d}{dt} (m\dot{x}) + m\omega^2 x \Rightarrow \Rightarrow 0 = \ddot{x} + \omega^2 x \Rightarrow x = A \sin(\omega t + \varphi_0) \quad (368)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (369)$$

2) Другой способ:

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\omega \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \\ &= \pm \frac{1}{\omega} \left[ \arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) - \arcsin \left( \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \pm \omega(t - t_0) + \arcsin \left( \frac{x_0}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) = \arcsin \left( \frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) \end{aligned} \quad (370)$$

Учитывая смену знака с помощью переопределения  $t_1$ , можно без ограничения общности считать

$$\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} = \sin(\omega(t - t_1)) \quad (371)$$

$$x = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \sin[\omega(t - t_1)] \quad (372)$$

Из вида (372) понятна величина периода движения.

3) Вычислим период напрямую из (362):

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} = \frac{2}{\omega} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} - x^2}} = \\ &= \frac{2}{\omega} \left[ \arcsin \left( \frac{x_2}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) - \arcsin \left( \frac{x_1}{\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}} \right) \right] = \\ &= \frac{2}{\omega} [\arcsin(1) - \arcsin(-1)] = \frac{2}{\omega} \left( \frac{\pi}{2} - \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (373)$$

Рассмотрим друго, в некоторых случаях более удобный, метод взятия интеграла (362).

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} \quad (374)$$

Возьмём его с помощью методов ТФКП. Заметим, что:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)} &= \sqrt{e^{i\pi} \left( m^2 x^2 - \frac{2E}{m} \right)} = \\ &= \omega \sqrt{e^{i\pi} \left( x + \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \left( x - \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}} \right) \right)} = \\ &= \omega \sqrt{e^{i\pi} (x - x_1)(x - x_2)} \end{aligned} \quad (375)$$

$$\sqrt{e^{2\pi i}} = e^{\pi i} = -1 \quad (376)$$

Тогда этот интеграл можно представить, как интеграл по контуру на комплексной плоскости, и взять его с помощью вычетов:

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} = \oint_C \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} \quad (377)$$

Вычет в точке ветвления брать нельзя, остаётся только бесконечно удалённая особая точка (См. рис. 35).

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right)}} \approx \frac{1}{\sqrt{-\omega^2 x^2}} = \frac{1}{i\omega x} \Rightarrow T = 2\pi i \cdot \frac{1}{i\omega} = \frac{2\pi}{\omega} \quad (378)$$

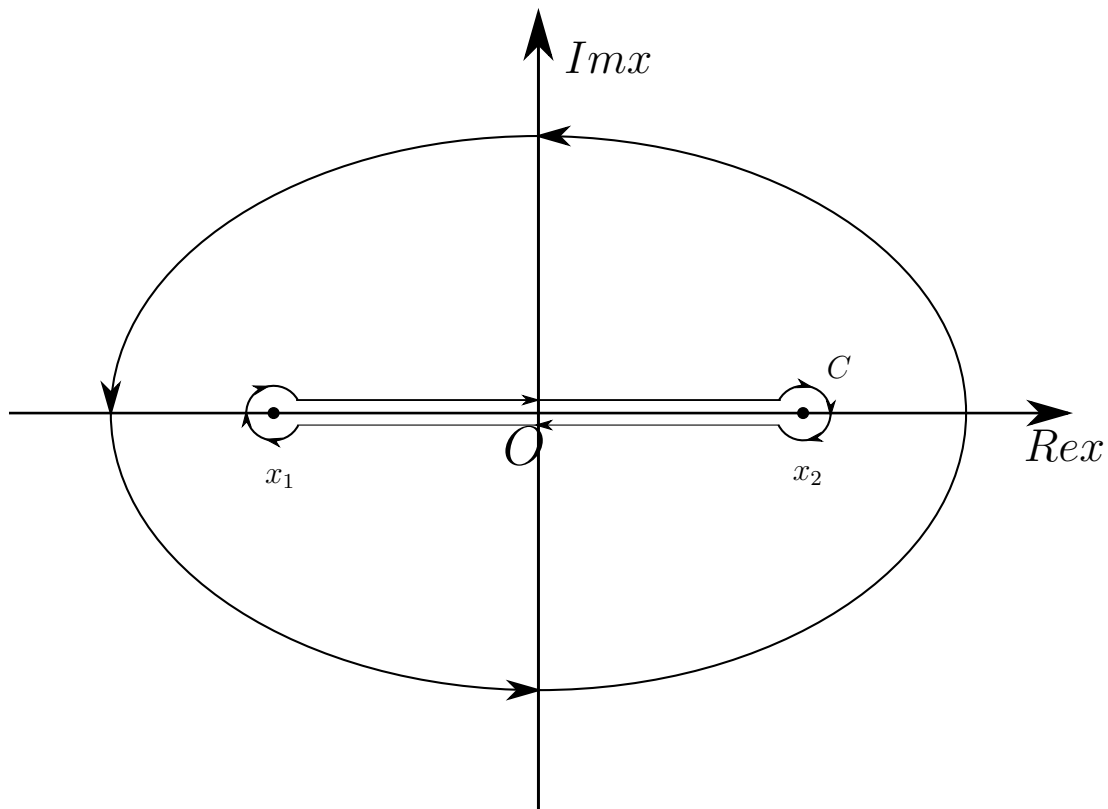


Рис. 35. Взятие интеграла по контуру на комплексной плоскости

### Пример

Частица с массой  $m$  движется в потенциале (379) (См. рис. 36).

$$U(x) = -\frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)}; \quad U_0 > 0 \quad (379)$$

Качественно исследовать движение. Найти его период, если оно финитно.

$$\text{ch } \alpha = \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad (380)$$

$E \geq 0$  - инфинитное движение

$-U_0 \leq E < 0$  - финитное движение

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)} \right)}} = 2 \int_{x_1}^{x_2} dx \frac{\text{ch}(x/a)}{\sqrt{\frac{2}{m} (-|E| \text{ch}^2(x/a) + U_0)}} \quad (381)$$

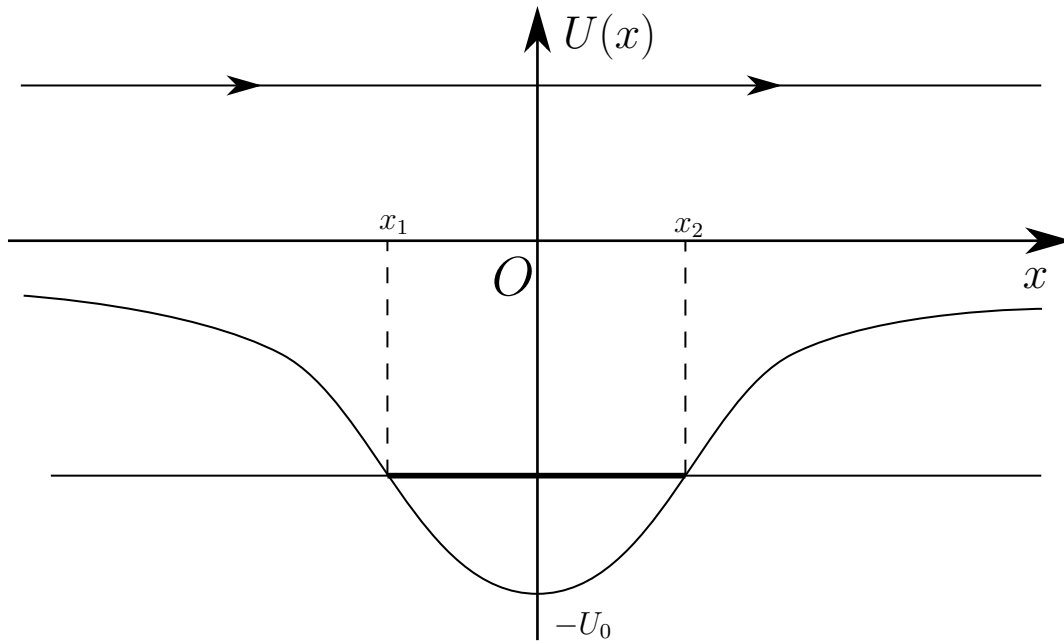


Рис. 36. Частица в одномерном потенциале гиперболического косинуса

Сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned}
 \xi = \operatorname{sh}(x/a) &\Rightarrow d\xi = \frac{1}{a} dx \cdot \operatorname{ch}(x/a) \\
 \operatorname{sh} \alpha &= \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \\
 \operatorname{ch}^2 \alpha - \operatorname{sh}^2 \alpha &= 1
 \end{aligned}
 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2 \int \frac{a d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} (-|E|\xi^2 - |E| + U_0)}} = 2a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{d\xi}{\sqrt{\underbrace{\frac{U_0 - |E|}{|E|}}_{\geq 0} - \xi^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = 2a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \arcsin \left( \frac{\xi}{\sqrt{\frac{U_0 - |E|}{|E|}}} \right) \Bigg|_{x=x_1}^{x=x_2} =$$

$$= 2a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} (\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = 2a \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = a\pi \sqrt{\frac{2m}{|E|}} \quad (382)$$

### Пример

Две частицы с одинаковой массой и энергией движутся из одной и той же точки. Однако, одна из них движется свободно, а другая - в потенциале (См. рис. 37). Найти время запаздывания второй частицы.

$$E_1 = E_2 \equiv E$$

$$t_1 - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} E}} \quad (383)$$

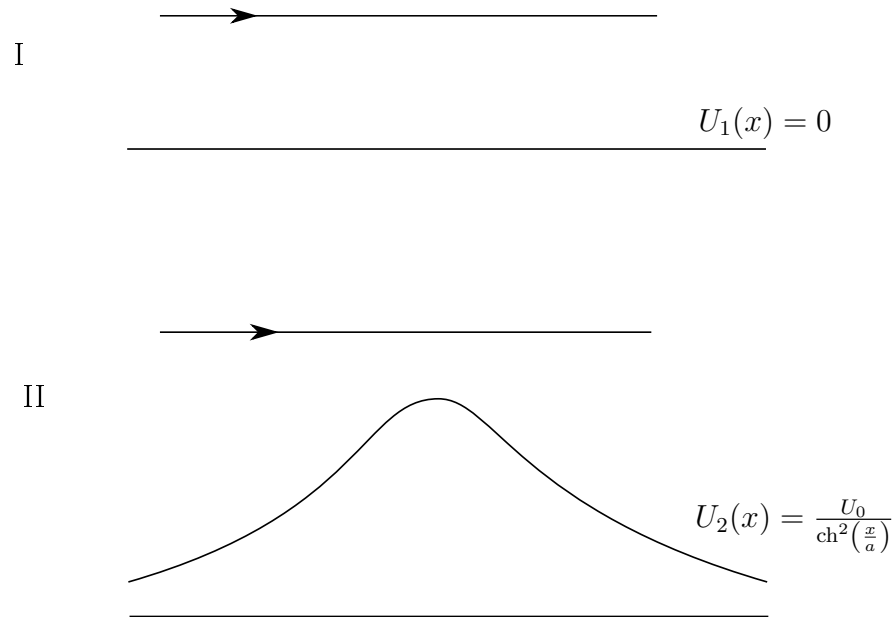


Рис. 37. Два случая пролёта частицы в одномерном потенциале

$$t_2 - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)} \right)}} \quad (384)$$

Точка  $x$  одна и та же, тогда:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 \equiv \Delta t &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{U_0}{\text{ch}^2(x/a)} \right)}} - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} E}} = [\xi = \text{sh}(x/a)] = \\ &= \int_{x=x_0}^{x=x} \frac{a d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} (E(1 + \xi^2) - U_0)}} - \sqrt{\frac{m}{2E}}(x - x_0) = \\ &= \int_{x=x_0}^{x=x} \frac{a d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} \sqrt{\xi^2 + 1 - \underbrace{\frac{U_0}{E}}_{>0}}}} - \sqrt{\frac{m}{2E}}(x - x_0) \quad (385) \end{aligned}$$

$$\int \frac{d\xi}{\sqrt{b^2 + \xi^2}} = [\xi = b \text{sh } \alpha] = \int \frac{b \text{ch } \alpha \cdot d\alpha}{\sqrt{b^2 + b^2 \text{sh}^2 \alpha}} = \int d\alpha = \alpha = \text{arcsch} \left( \frac{\xi}{b} \right) \quad (386)$$



$$\begin{aligned}
 \int_{x=x_0}^{x=x} \frac{ad\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m}} \sqrt{\xi^2 + 1 - \frac{U_0}{E}}} - \sqrt{\frac{m}{2E}}(x - x_0) &= [x = L; \quad x_0 = -L] \rightleftharpoons \\
 &\rightleftharpoons \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ \sqrt{\frac{m}{2E}} a \cdot \operatorname{arcsch} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right) \Big|_{x=-L}^{x=L} - 2L \sqrt{\frac{m}{2E}} \right] = \\
 &= [\xi = \operatorname{sh}(x/a)] = \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ 2 \sqrt{\frac{m}{2E}} a \cdot \operatorname{arcsch} \left( \frac{\operatorname{sh}(L/a)}{\sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right) - 2L \sqrt{\frac{m}{2E}} \right] \quad (387)
 \end{aligned}$$

Чтобы найти время запаздывания на бесконечности, нужно взять предел:

$$\operatorname{sh} \alpha = \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \approx \frac{e^\alpha}{2}; \quad \operatorname{arcsch} \alpha \approx \ln(2\alpha) \quad (388)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta t &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ 2 \sqrt{\frac{m}{2E}} a \cdot \ln \left[ 2 \cdot \frac{\frac{1}{2} e^{(L/a)}}{\sqrt{1 - \frac{U_0}{E}}} \right] - 2L \sqrt{\frac{m}{2E}} \right] = \\
 &= \lim_{L \rightarrow \infty} \left[ 2a \sqrt{\frac{m}{2E}} \left( \frac{L}{a} - \ln \left( \sqrt{1 - \frac{U_0}{E}} \right) \right) - 2L \sqrt{\frac{m}{2E}} \right] = \\
 &= 2a \sqrt{\frac{m}{2E}} \cdot (-1) \frac{1}{2} \ln \left( \frac{E - U_0}{E} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \Delta t = a \sqrt{\frac{m}{2E}} \ln \left( \frac{E}{E - U_0} \right) > 0 \quad (389)
 \end{aligned}$$

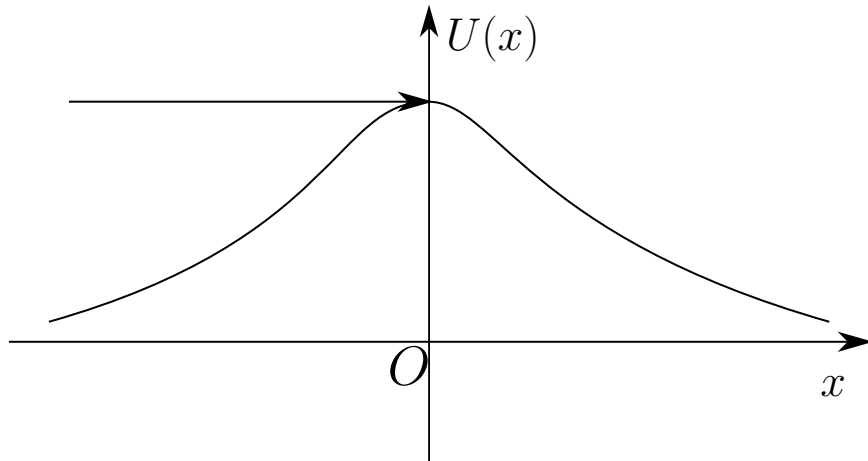


Рис. 38. Случай частицы в одномерном потенциале

На бесконечности:  $E = \frac{mv_\infty^2}{2}; \quad v_\infty \sqrt{\frac{2E}{m}}$

$$\Delta x = v_\infty \Delta t = a \cdot \ln \left( \frac{E}{E - U_0} \right) \quad (390)$$

Как мы видим, если  $E = U_0$  (уровень энергии касается графика потенциала), то время запаздывания стремится к бесконечности (389). Как и разница в пути частиц (390), что согласуется с полученными ранее результатами (См. рис. 38).

## Семинар 8

### Качественное исследование одномерного движения

#### Пример

Рассмотрим частицу с массой  $m$  в потенциале  $U(x) = U_0(e^{2x/a} - 2e^{x/a})$ , где  $U_0 > 0$ ,  $a = \text{const}$ . Область классически разрешённого движения определяется соотношением  $E \geq U(x)$  (См. рис. 39).

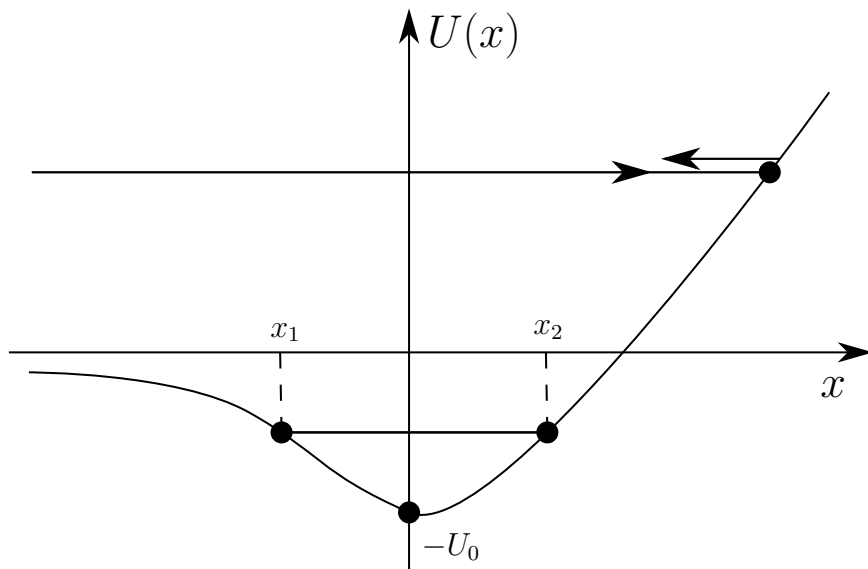


Рис. 39. Частица в одномерном потенциале

Условие финитного движения примет вид:

$$-U_0 \leq E < 0 \quad (391)$$

$$T = 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (392)$$

$$\begin{aligned} T &= 2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(-|E| - U_0(e^{2x/a} - 2e^{x/a}))}} = \left[ \xi \equiv e^{x/a}, d\xi = \frac{1}{a} \cdot e^{x/a} dx \right] = \\ &= 2 \int_{\xi=x_1}^{\xi=x_2} \frac{a d\xi}{\xi \sqrt{\frac{2}{m}(-|E| - U_0\xi^2 + 2U_0\xi)}} = 2a \sqrt{\frac{m}{2U_0}} \int_{\xi=x_1}^{\xi=x_2} \frac{d\xi}{\xi \sqrt{-\xi^2 + 2\xi - \frac{|E|}{U_0}}} \end{aligned} \quad (393)$$

В точках поворота:

$$\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))} = 0 \quad (394)$$

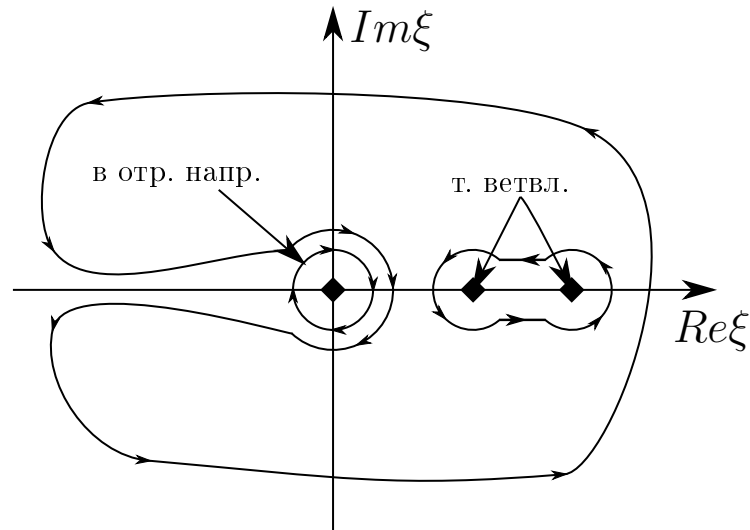


Рис. 40. Взятие интеграла по контуру на комплексной плоскости

Возьмём интеграл с помощью методов ТФКП (См. рис. 40)

$$T = a\sqrt{\frac{m}{2U_0}} \oint_C \frac{d\xi}{\xi\sqrt{-\xi^2 + 2\xi - \frac{|E|}{U_0}}} \quad (395)$$

$$T = a\sqrt{\frac{m}{2U_0}} 2\pi [B_{\text{вч.}}(\infty) - B_{\text{вч.}}(0)] \quad (396)$$

$$B_{\text{вч.}}(\infty) = 0:$$

$$\frac{1}{\xi\sqrt{-\xi^2 + 2\xi - \frac{|E|}{U_0}}} \sim \frac{1}{\xi^2} \quad (397)$$

$$B_{\text{вч.}}(0):$$

$$\frac{1}{\xi\sqrt{-\xi^2 + 2\xi - |E|/U_0}} \equiv \frac{1}{\xi\sqrt{e^{i\pi}(\xi^2 - 2\xi + \frac{|E|}{U_0})}} = \frac{1}{\xi\sqrt{e^{i\pi}(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2)}} \quad (398)$$

Точки  $\xi_1, \xi_2$  соответствуют точкам поворота  $x_1, x_2$ . Учитывая направление их обхода (См. рис. 41), найдём вычет в нуле:



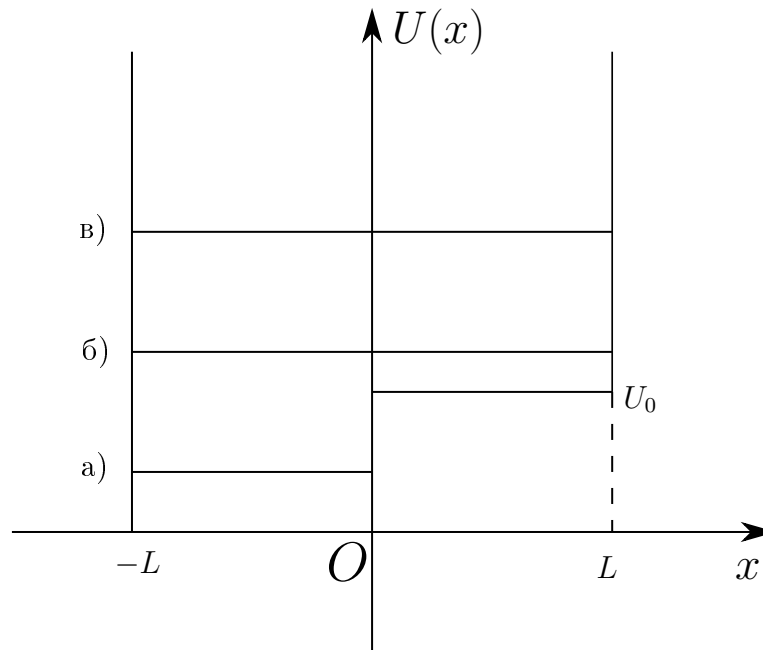


Рис. 42. Частица в одномерном потенциале

a)

$$E = \frac{m}{2} \cdot \frac{U_0}{2m} = \frac{U_0}{4}; \quad T = \frac{2L}{v_0} = 2L \cdot \sqrt{\frac{2m}{U_0}} \quad (407)$$

b)

$$E = \frac{m}{2} \cdot \frac{U_0}{2m} + U_0 = \frac{5U_0}{4} \quad (408)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2L}{v_+} + \frac{2L}{v_-} \\ v_+ &= v_0 = \sqrt{\frac{U_0}{2m}} \\ E &= \frac{5U_0}{4} = \frac{mv_-^2}{2} + 0 \Rightarrow v_- = \sqrt{\frac{5U_0}{2m}} \end{aligned} \right| \Rightarrow \Rightarrow T = 2L\sqrt{\frac{2m}{U_0}} + \sqrt{\frac{2m}{5U_0}} \quad (409)$$

c)

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(x_0) = \frac{m}{2} \cdot \frac{3U_0}{m} + 0 = \frac{3}{2}U_0 = \frac{mv^2}{2} + U_0 \quad (410)$$

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{2L}{v_+} + \frac{2L}{v_-} \\ v &= v_0 = \sqrt{\frac{3U_0}{m}} \\ \frac{1}{2}v_0 &= \frac{mv_+^2}{2} \Rightarrow v_+ = \sqrt{\frac{U_0}{m}} \end{aligned} \right| \Rightarrow T = 2L\sqrt{\frac{m}{U_0}} + 2L\sqrt{\frac{m}{3U_0}} \quad (411)$$

## Движение в центральном поле

Пусть имеется некоторый силовой центр. Все силы, действующие на частицы, направлены либо по, либо против радиус вектора из силового центра, а их модули зависят только от расстояния частиц до силового центра (См. рис. 42). Тогда потенциальное поле, создаваемое силовым центром называется центральным.

$$\vec{F} = \vec{e}_r \cdot F(r) \quad (412)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (413)$$

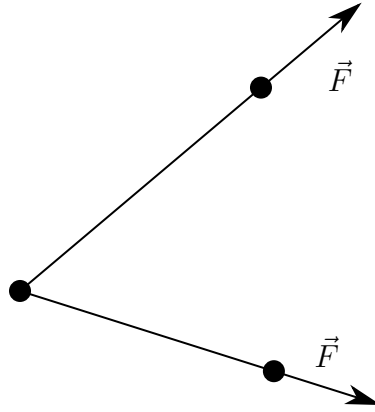


Рис. 43. Силы в центральном поле

Центральное поле всегда потенциально:

$$U(r) \equiv U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}); F = -\vec{\nabla}U = -U'(r)\vec{\nabla} \quad (414)$$

$$\vec{\nabla}r = \vec{e}_x \frac{\partial r}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial r}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial r}{\partial z} \quad (415)$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \quad (416)$$

$$\vec{\nabla}r = \vec{e}_x \frac{x}{r} + \vec{e}_y \frac{y}{r} + \vec{e}_z \frac{z}{r} = \frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_r \quad (417)$$

Подставив (417) в (414), получим

$$\vec{e}_r F(r) = \vec{F} = -U'(r)\vec{e}_r \Rightarrow F(r) = -U'(r) \Rightarrow U(r) = - \int dr F(r) \quad (418)$$

Стоит обратить внимание, на схожесть в обозначении центрального поля:

$$U(r) \equiv U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (419)$$

и произвольного поля:

$$U(\vec{r}) \equiv U(x, y, z) \quad (420)$$

Несмотря на схожесть в записи, разница между случаями, конечно, огромная.

Формально:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r) \quad (421)$$

Пусть  $q_i = (r, \theta, \varphi)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad (422)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi} = \text{const} \quad (423)$$

$$E = \dot{r} \frac{\partial H}{\partial \dot{r}} + \dot{\theta} \frac{\partial H}{\partial \dot{\theta}} + \dot{\varphi} \frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} - H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \cdot \dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const} \quad (424)$$

$p_\theta, p_r \neq \text{const}$

В декартовых координатах

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad (425)$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} \quad (426)$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -U'(r)\vec{e}_r$$

$$[\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}] = [\vec{r} \times (-U'(r)\vec{e}_r)] = 0$$

$$0 = [\vec{r} \times m\ddot{\vec{r}}] = \frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}] - \underbrace{[\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}]}_{=0} \Rightarrow \frac{d}{dt}[\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}] = 0 \Rightarrow \vec{L} \equiv [\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}] = \overrightarrow{\text{const}} \quad (427)$$

$$(\vec{L} \cdot \vec{r}) = ([\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}] \cdot \vec{r}) = (\underbrace{[\vec{r} \times \vec{r}]}_{=0} \cdot m\dot{\vec{r}}) = 0 \quad (428)$$

$$\left. \begin{aligned} L_x \cdot x + L_y \cdot y + L_z \cdot z &= 0 \\ \vec{L} &= \text{const} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{движение плоское} \quad (429)$$

Плоскость, в которой происходит движение системы в центральном поле называется плоскостью Лапласа. Имеет смысл рассматривать движение в этой плоскости.

В таком случае, рассмотрим движение частицы в центральном поле в плоскости Лапласа, используя для описания полярные координаты (См. рис. 44).  $q_i = (\rho, \varphi)$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - U(\rho) \quad (430)$$

$$\begin{cases} p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{m\rho^2}, \\ E = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) + U(\rho) = \text{const} . \end{cases} \quad (431)$$

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho) \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2})} \equiv \pm \sqrt{f(\rho)} \quad (432)$$



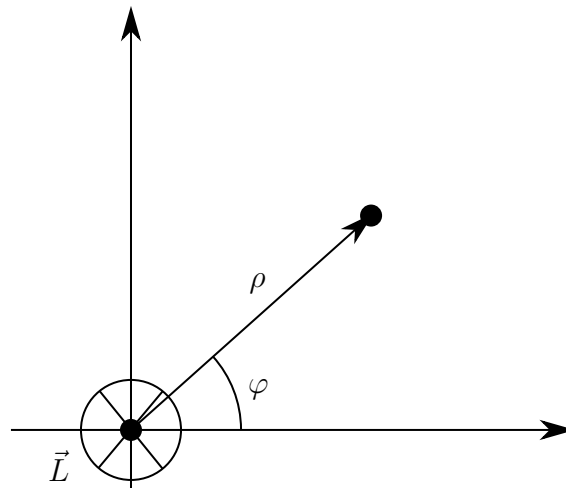


Рис. 44. Материальная точка в плоскости Лапласа

$$\frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} = \pm \frac{p_{\varphi}}{m\rho^2 \sqrt{f(\rho)}} \quad (433)$$

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(\rho) - \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho^2})}} \quad (434)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{\sqrt{m\rho^2(E - U(\rho) - \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho^2})}} \quad (435)$$

Секторная скорость сохраняется при движении в центральном поле (См. рис. 397).  
 $\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{dS(t)}{dt}$

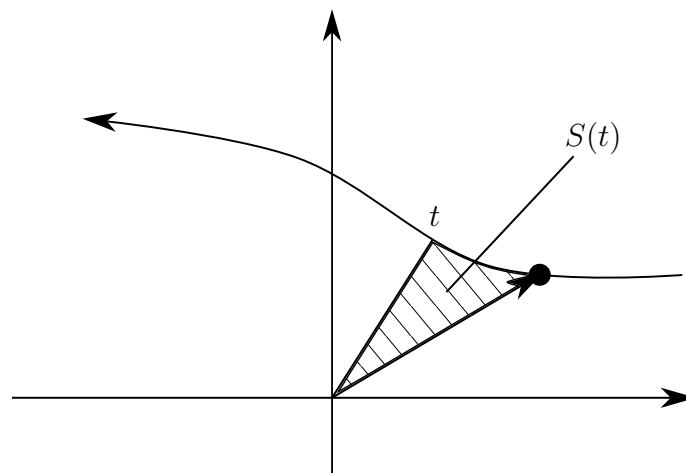


Рис. 45. Геометрический смысл секторной скорости

$$p_{\varphi} = m\rho^2\dot{\varphi} = 2m\sigma = \text{const} \Rightarrow \sigma = \text{const} \quad (436)$$

## Качественное исследование движения в центральном поле

Если ввести эффективный векторный потенциал, то задача о движении в центральном поле сводится к задаче об одномерном движении в эффективном потенциале (См. рис. 46), (См. рис. 399). Следует обратить внимание на различия между этими задачами, проявляющемся в траекториях частиц (См. рис. 47), (См. рис. 49).

$$E = \frac{m}{2}\dot{\rho}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho) \geq E = \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + U(\rho) \equiv U_{eff}(\rho) \quad (437)$$

В одномерном движении:

$$t - t_0 = \pm \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} \quad (438)$$

Заметим, что  $U_{eff}$  зависит от начальных условий.

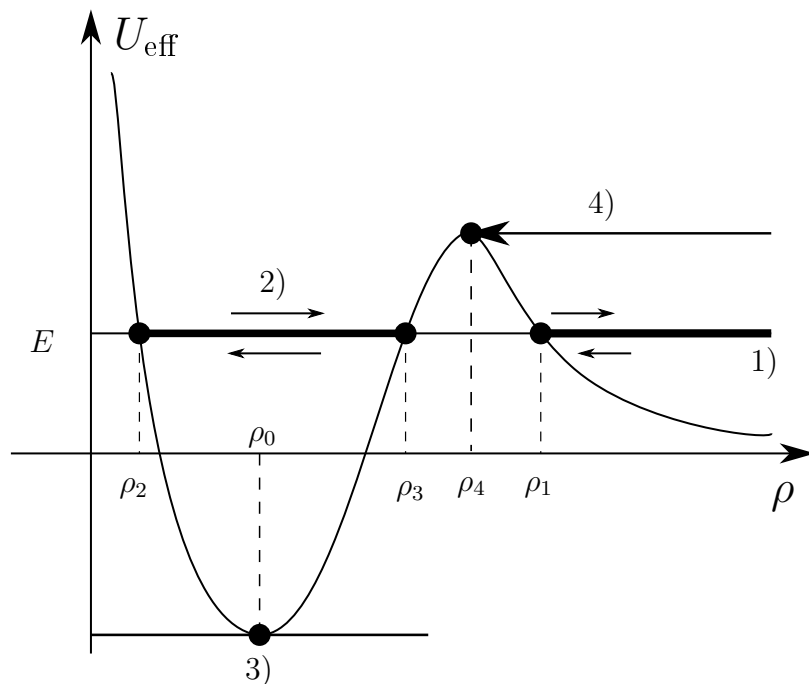


Рис. 46. Различные варианты нахождения частицы в эффективном потенциале

При движении в центральном поле:

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(\rho))}} \quad (439)$$

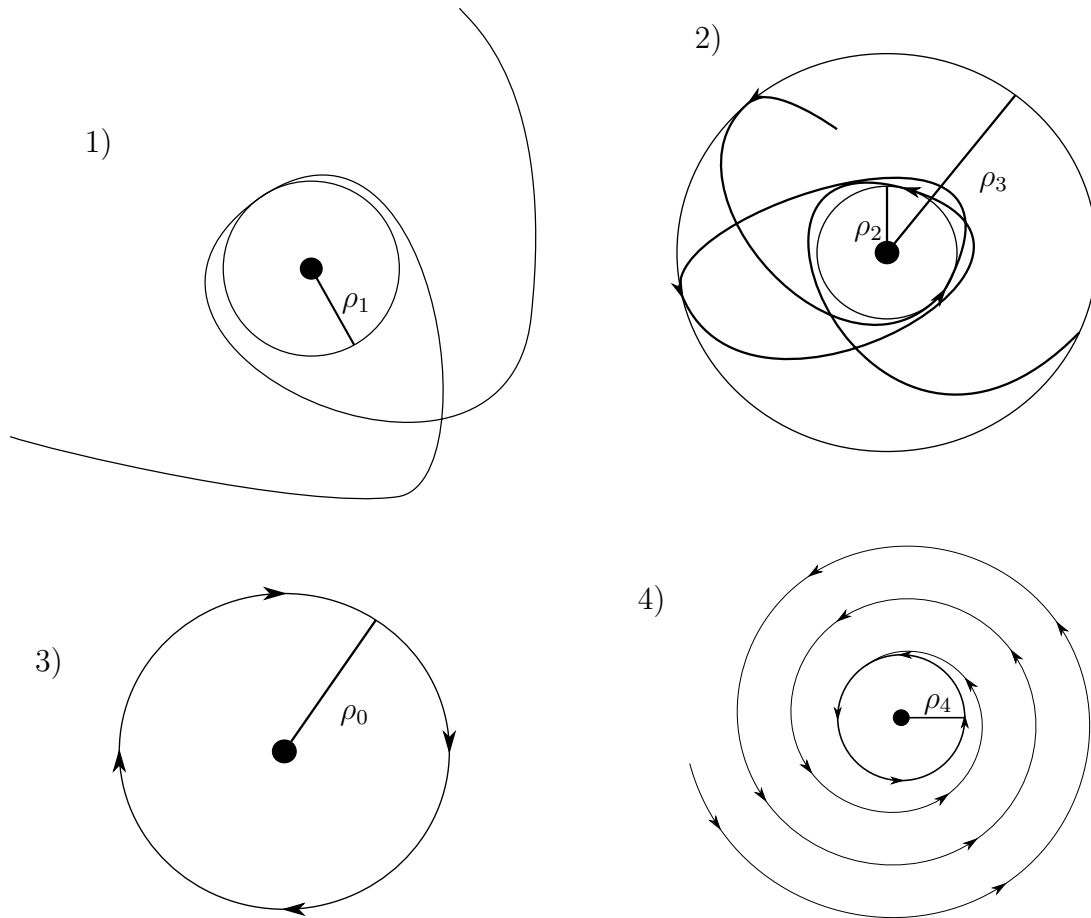


Рис. 47. Различные траектории частиц в центральном поле, полученные в результате качественного исследования

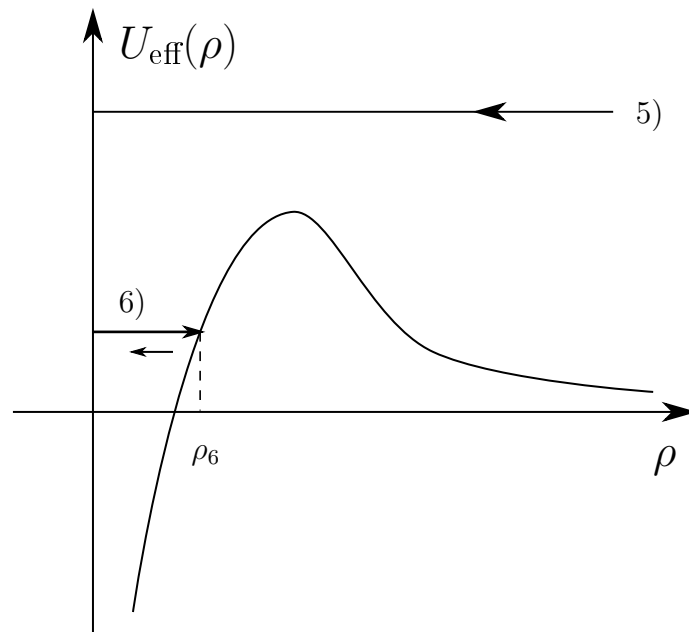


Рис. 48. Другой вариант эффективного потенциала

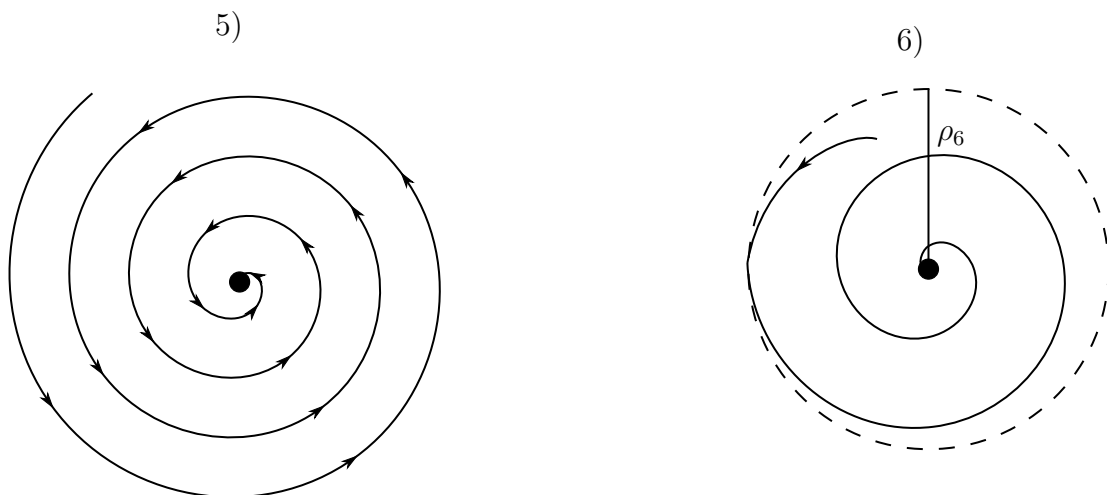


Рис. 49. Различные траектории частиц в центральном поле, полученные в результате качественного исследования

## Семинар 9

### Движение в центральном поле

Рассмотрим движение частицы в центральном поле, используя для его описания полярные координаты в плоскости Лапласа:  $U(r)$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;  $q_i = (\rho, \varphi)$ . Нам уже известны законы движения частицы в квадратурах с использованием понятия эффективного потенциала.

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))}} \quad (440)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}}(\rho))}} \quad (441)$$

$$U_{\text{eff}}(\rho) = U(\rho) + \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho^2} \quad (442)$$

Условие классически разрешённого движения:  $E \geq U_{\text{eff}}(\rho)$ .

#### Пример

Пусть потенциал центрального поля имеет вид:

$$U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho^2} \quad (443)$$

Тогда эффективный потенциал

$$U_{\text{eff}} = \left(-\alpha + \frac{p_{\varphi}^2}{2m}\right) \frac{1}{\rho^2} \quad (444)$$

Имеют место два случая:

а)  $\frac{p_{\varphi}^2}{2m} - \alpha > 0$  (См. рис. 50). Качественно можно предположить траекторию движения частицы (См. рис. 51).

б)  $\frac{p_{\varphi}^2}{2m} - \alpha < 0$  (См. рис. 52). Для такого случая возможны два варианта качественного представления траектории (См. рис. 53).

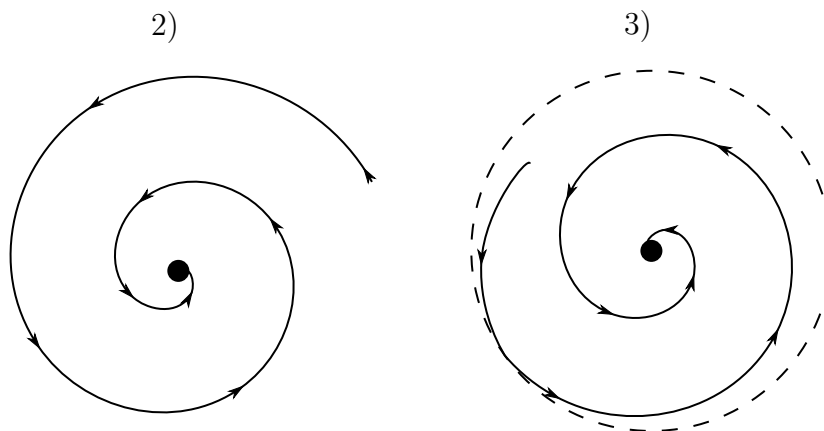


Рис. 53. Траектории для случая б)

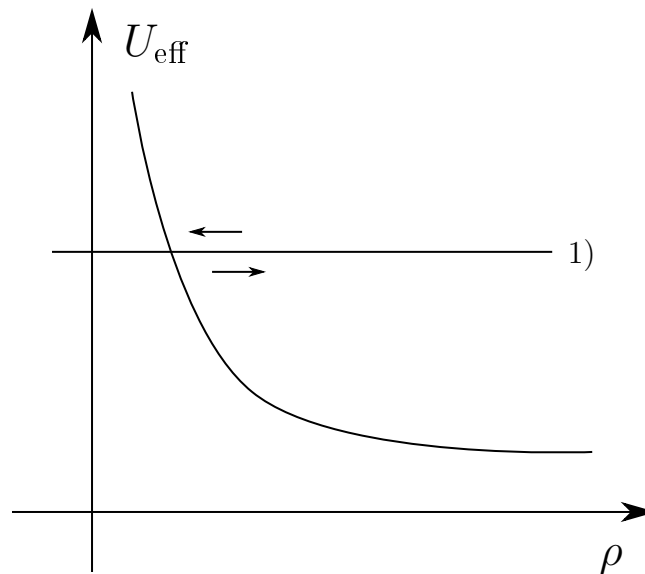


Рис. 50. Эффективный потенциал для случая а).

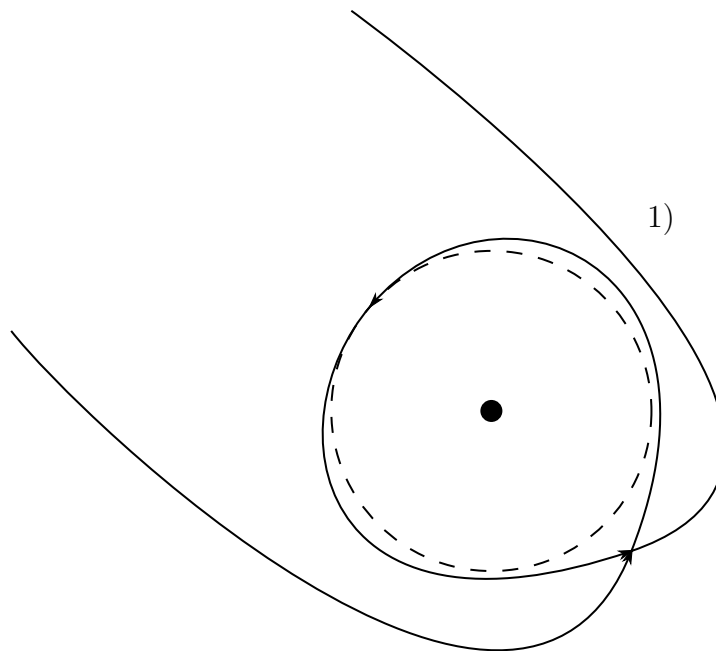


Рис. 51. Траектория для случая 1)

Найдём явный вид траектории

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U - \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho} \right)}} \quad (445)$$

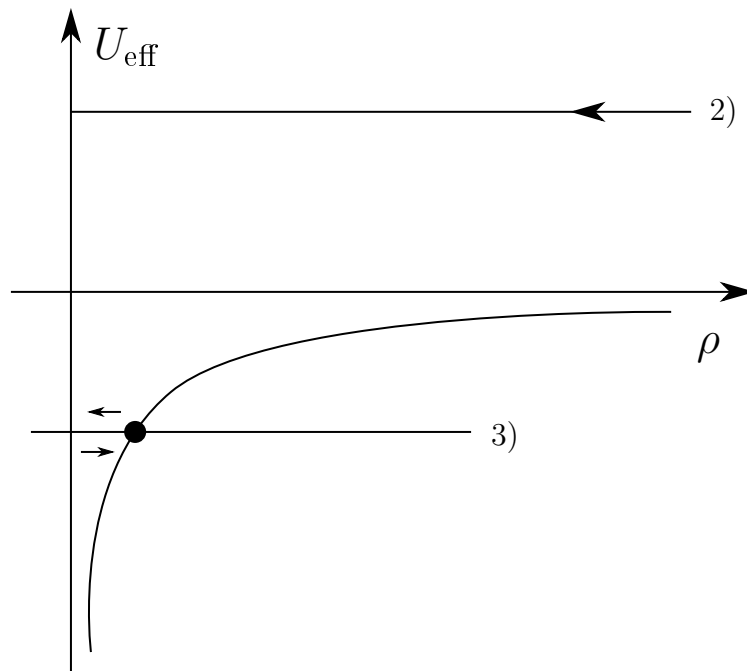


Рис. 52. Эффективный потенциал для случая б)

1) Для первого случая имеем:

$$\begin{aligned}
 \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m \rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \left( \frac{p_{\varphi}^2}{2m} - \alpha \right) \frac{1}{\rho^2} \right)}} \rightarrow \\
 &\rightarrow \left[ u \equiv \frac{1}{\rho}; \right. \\
 &\quad \left. du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \mp \int \frac{p_{\varphi} du}{m \sqrt{\frac{2}{m} \left( \underbrace{E}_{>0} - \underbrace{\left( \frac{p_{\varphi}^2}{2m} - \alpha \right)}_{>0} u^2 \right)}} = \\
 &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_{\varphi}^2} - \left( 1 - \frac{2m\alpha}{p_{\varphi}^2} \right) u^2}} = \mp \int \frac{du}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_{\varphi}^2} \sqrt{\frac{2mE}{p_{\varphi}^2 - 2m\alpha}} - u^2}} \quad (446)
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \left( \frac{u}{a} \right) \quad (447)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_{\varphi}^2}}} \arcsin \left( \frac{1/\rho}{\sqrt{\frac{2mE}{p_{\varphi}^2 - 2m\alpha}}} \right) \Bigg|_{\rho_0}^{\rho} \quad (448)$$

(448)

$$\sin \left( \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi - \varphi_1) \right) = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{p_\varphi^2 - 2m\alpha}{2mE}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{p_\varphi^2 - 2m\alpha}{2mE}} \cdot \frac{1}{\sin \left[ \sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi - \varphi_1) \right]} \quad (449)$$

при  $\varphi = \varphi_1$   $\rho \rightarrow \infty$  (См. рис. 54). Также  $\rho \rightarrow \infty$ , если  $\varphi = \varphi_2$ , где

$$\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi_2 - \varphi_1) = \pi \Rightarrow \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}} \quad (450)$$

Число оборотов вокруг силового центра:

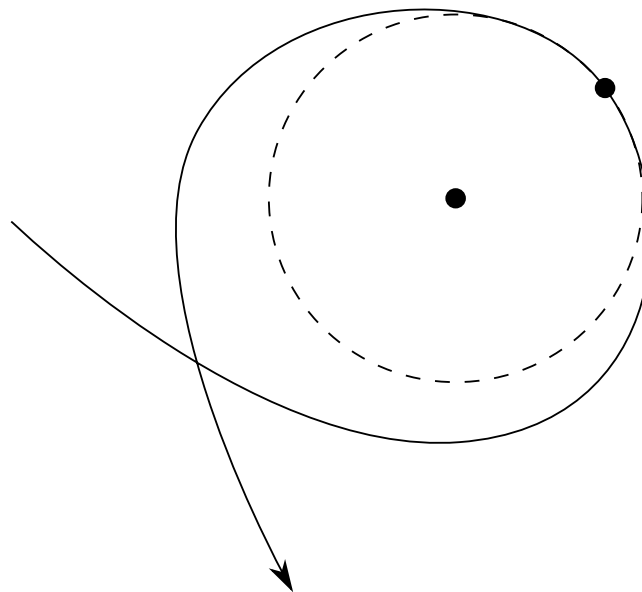


Рис. 54. Траектория частицы

$$n = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}} \quad (451)$$

2) Во втором случае  $\frac{p_\varphi^2}{2m} - \alpha < 0$ ;  $E > 0$  рассмотрим случай положительной энергии (См. рис. 55):  $p_\varphi > 0$ . Имеем:



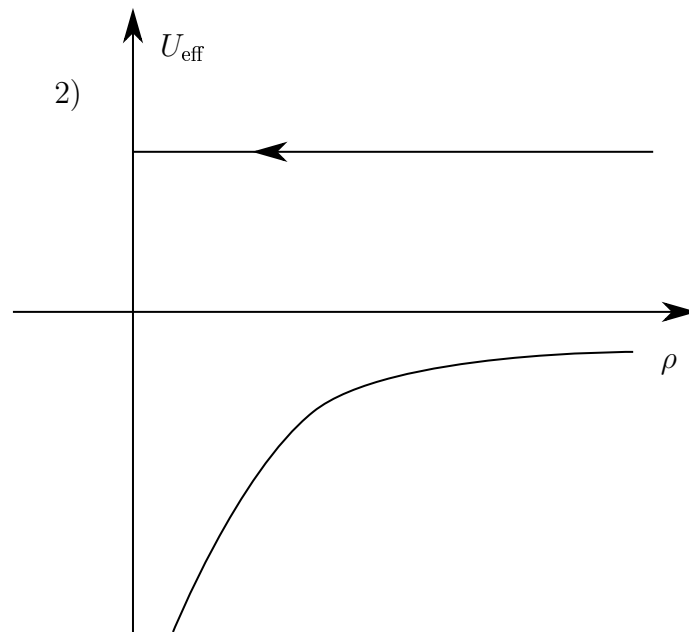


Рис. 55. Эффективный потенциал

$$\varphi - \varphi_0 = - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( \underbrace{E}_{>0} + \underbrace{\left( \alpha - \frac{p_{\varphi}^2}{2m} \right) \frac{1}{\rho^2}}_{>0} \right)}} \quad (452)$$

Сделаем замену переменной

$$u = \frac{1}{\rho}; \quad du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (453)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int \frac{du}{\sqrt{\underbrace{\frac{2Em}{p_{\varphi}^2}}_{>0} + \underbrace{\left( \frac{2m\alpha}{p_{\varphi}^2} - 1 \right)}_{>0} u^2}} \quad (454)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \left[ \begin{array}{l} u = a \operatorname{sh} \xi; \\ du = a \operatorname{ch} \xi d\xi \end{array} \right] = \int \frac{\cancel{a} \operatorname{ch} \xi d\xi}{\cancel{a} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \xi}} = \int d\xi = \xi = \operatorname{arcsch} \left( \frac{u}{a} \right) \quad (455)$$

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1}} \operatorname{arcsch} \left( \frac{1/\rho}{\sqrt{\frac{2mE}{2m\alpha - p_\varphi^2}}} \right) \Big|_{\rho_0}^{\rho} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1} (\varphi - \varphi_1) \right] = \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2m\alpha - p_\varphi^2}{2mE}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{2m\alpha - p_\varphi^2}{2mE}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sh} \left[ \sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi - \varphi_1) \right]} \quad (456)\end{aligned}$$

Вспомним, что:

$$\operatorname{sh} \alpha \equiv \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} \quad (457)$$

Учитывая (457), можно понять, как будет выглядеть траектория частицы в этом случае (См. рис. 56)

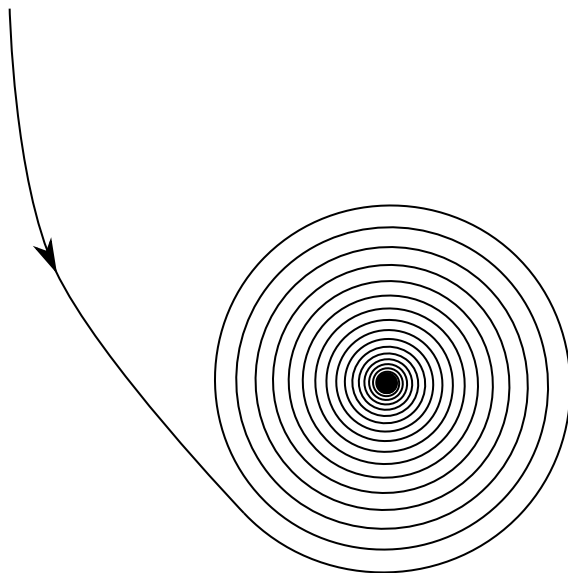


Рис. 56. Траектория частицы

Для случая отрицательной энергии  $\frac{p_\varphi^2}{2m} - \alpha < 0$ ;  $E < 0$  картина выглядит следующим образом (См. рис. 57).

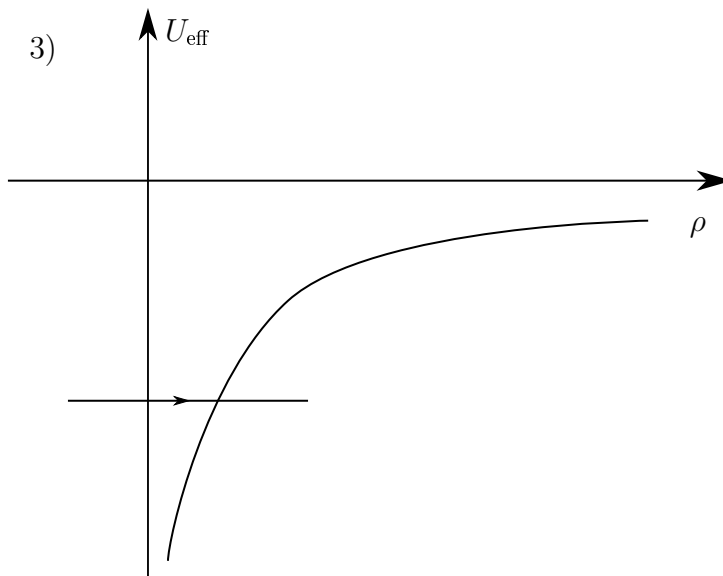


Рис. 57. Эффективный потенциал частицы

Пусть частица движется от центра:  $p_\varphi > 0$ :

$$\varphi - \varphi_0 = + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{\alpha}{\rho^2} \right)}} \quad (458)$$

Приняв во внимание следующие обозначения  $E = -|E|$ ;  $u = 1/\rho$ , получим:

$$\varphi - \varphi_0 = - \int \frac{du}{\sqrt{-\frac{2m}{p_\varphi^2}|E| + \left( \alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right) u^2 \cdot \frac{2m}{p_\varphi^2}}} = - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1} \sqrt{u^2 - \frac{2m|E|}{2m\alpha - p_\varphi^2}}} \quad (459)$$

Возьмём интеграл того типа, как в (459), с помощью замены переменной:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} &= \left[ \begin{array}{l} u = a \operatorname{ch} \xi; \\ du = a \operatorname{sh} \xi d\xi; \\ \xi \geq 0 \end{array} \right] = \int \frac{a \operatorname{sh} \xi d\xi}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 \xi - a^2}} = \\ &= \int \frac{a \operatorname{sh} \xi d\xi}{a \operatorname{sh} \xi} = \xi = \operatorname{arcch} \left( \frac{u}{a} \right) \quad (460) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned}\varphi - \varphi_0 &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1}} \operatorname{arccch} \left( \frac{1/\rho}{\sqrt{\frac{2m|E|}{2m\alpha - p_\varphi^2}}} \right) \bigg|_{\rho_0}^{\rho} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \sqrt{\frac{2m\alpha - p_\varphi^2}{2m|E|}} = \operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1} (\varphi - \varphi_1) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho = \sqrt{\frac{2m\alpha - p_\varphi^2}{2m|E|}} \frac{1}{\operatorname{ch} \left[ \sqrt{\frac{2m\alpha}{p_\varphi^2} - 1} (\varphi - \varphi_1) \right]} \quad (461)\end{aligned}$$

Вспомним, что из себя представляет гиперболический косинус (462) (См. рис. 58)

$$\operatorname{ch} \alpha \equiv \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{2} \quad (462)$$

Тогда легко понять вид траектории частицы в этом случае (См. рис. 59).

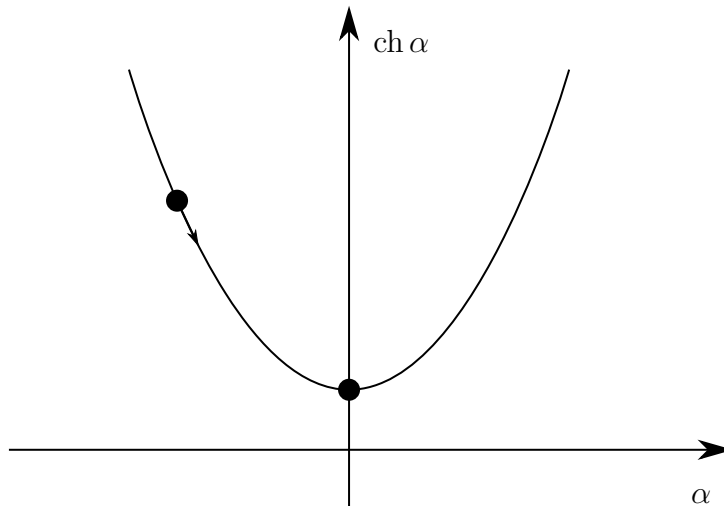


Рис. 58. Косинус гиперболический

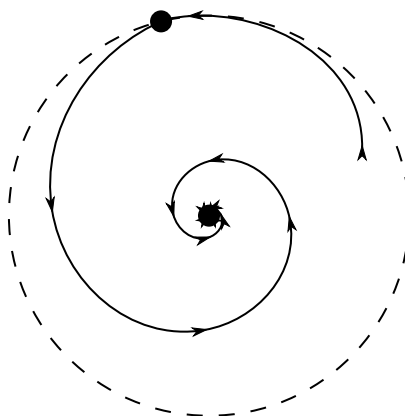


Рис. 59. Траектория частицы

## Падение на силовой центр

Исходя из рассмотренного выше, можно выявить условия падения на силовой центр  $U(\rho) = -\alpha/\rho^2$ ;  $\alpha > 0$ .

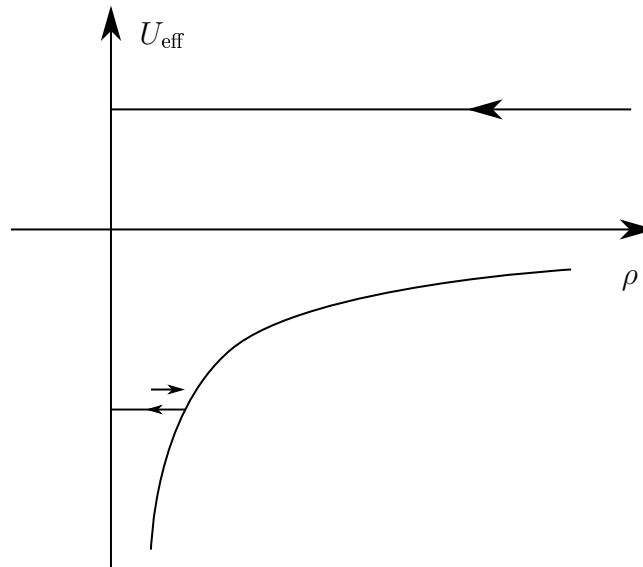


Рис. 60. Эффективный потенциал

Рассмотрим потенциал (См. рис. 60). Пусть  $\frac{p_\varphi^2}{2m} - \alpha < 0$ . Свяжем интегралы движения с начальными условиями. Это можно сделать, рассмотрев плоскость Лапласа в начальный момент времени (См. рис. 451)

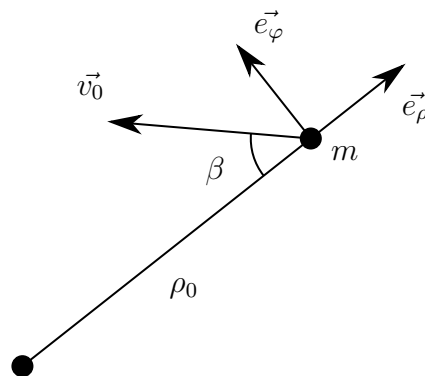


Рис. 61. Плоскость Лапласа в начальный момент времени

Тогда

$$p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi} = \text{const} \Rightarrow p_\varphi = m\rho(\rho\dot{\varphi}) \quad (463)$$

$$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi = m\rho v_\varphi = m\rho_0 v_0 \sin \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(m\rho_0 v_0 \sin \beta)^2}{2m} < \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m\rho_0^2 v_0^2 \sin^2 \beta < 2\alpha \quad (464)$$

$$E = \frac{m\vec{v}^2}{2} + U = \frac{m\vec{v}^2}{2} - \frac{\alpha}{\rho^2} = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{\alpha}{\rho_0^2} \quad (465)$$

Найдём время, за которое частица упадёт на силовой центр в двух случаях (в случае положительной и отрицательной энергий частицы).

Пусть движется к центру.  $\rho = \rho(t)$ :

$$\begin{aligned} t - t_0 &= - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}} \Bigg|_{t_0=0}^{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= - \int_{\rho_0}^0 \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{\alpha}{\rho^2} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}} = \int_0^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E\rho^2 + \alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right)}} \quad (466) \end{aligned}$$

1)  $E > 0$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \int_0^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{E} - \frac{p_\varphi^2}{2mE}}} = \sqrt{\frac{m}{2E}} \left[ \sqrt{\rho^2 + \frac{\alpha}{E} - \frac{p_\varphi^2}{2mE}} \right]_0^{\rho_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{m}{2E}} \left( \sqrt{\rho_0^2 + \frac{\alpha}{E} - \frac{p_\varphi^2}{2mE}} - \sqrt{\frac{\alpha}{E} - \frac{p_\varphi^2}{2mE}} \right) \quad (467) \end{aligned}$$

2)  $E = -|E|$

$$\begin{aligned} t &= \int_0^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( -|E|\rho^2 + \alpha - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right)}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int_0^{\rho_0} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha}{|E|} - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \left[ \sqrt{-\rho^2 + \frac{\alpha}{|E|} - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}} \right]_0^{\rho_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \left( \sqrt{\frac{\alpha}{|E|} - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}} - \sqrt{-\rho_0^2 + \frac{\alpha}{|E|} - \frac{p_\varphi^2}{2m|E|}} \right) \quad (468) \end{aligned}$$

## Семинар 10

### Движение в центральном поле

Продолжим рассмотрение движения частицы в центральном поле  $U(r)$ ;  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

#### Пример

Пусть имеется потенциал вида  $U(r) = -\alpha/r$ ,  $\alpha = G \cdot M \cdot m$  (См. рис. 62). Сила действующая на частицу имеет вид

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U = -U'(r)\vec{e}_r = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{e}_r \quad (469)$$

Качественное исследование:

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \quad (470)$$

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r}; \quad U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \quad (471)$$

$\alpha > 0$  (притяжение). Можно предположить траектории движения частиц в этом случае (См. рис. 63)

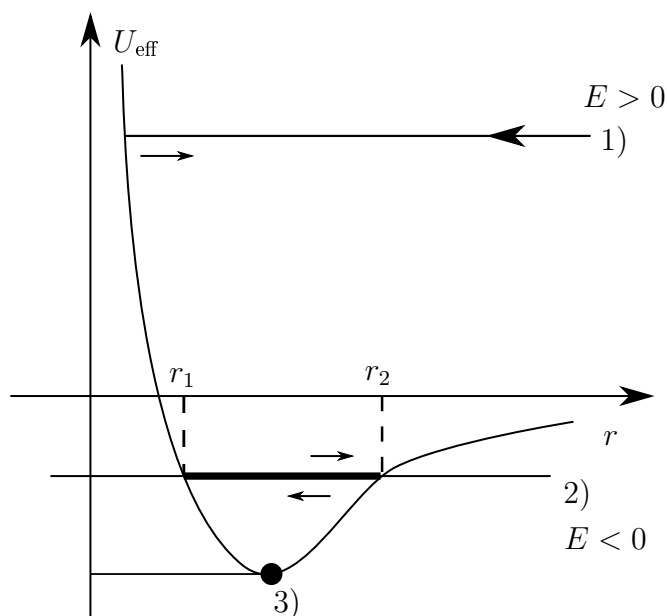


Рис. 62. Эффективный потенциал в случае притяжения

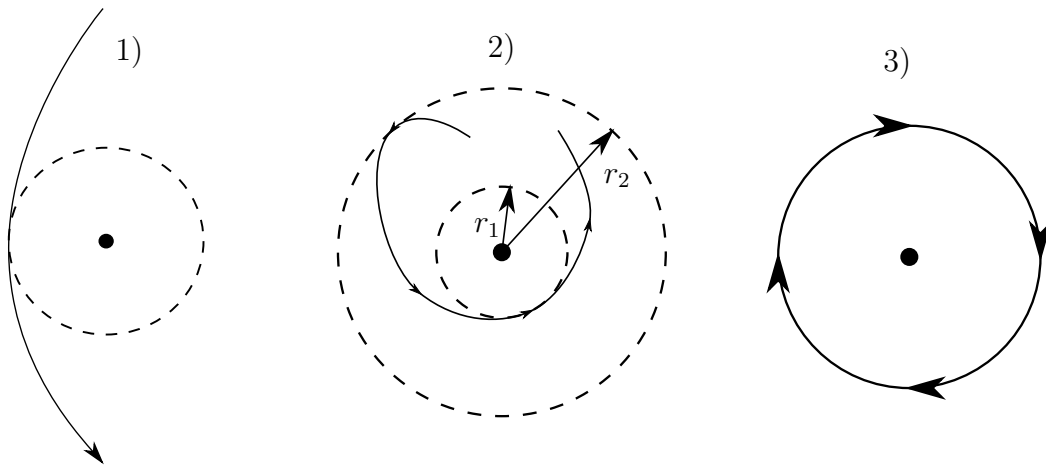


Рис. 63. Траектории частиц в случае притяжения

$\alpha < 0$  (отталкивание) (См. рис. 471). Тут возможен только один вариант траектории движения частицы (См. рис. 472).

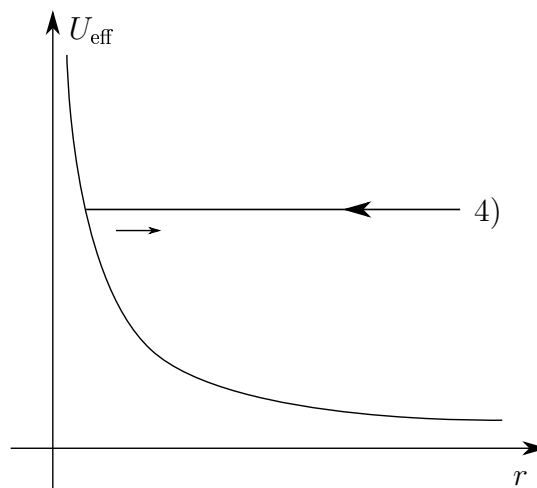


Рис. 64. Эффективный потенциал в случае отталкивания

Рассматривая систему в полярных координатах в плоскости Лапласа  $(\rho, \varphi)$ , найдём явный вид траектории движения частицы в этих случаях.

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (472)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (473)$$



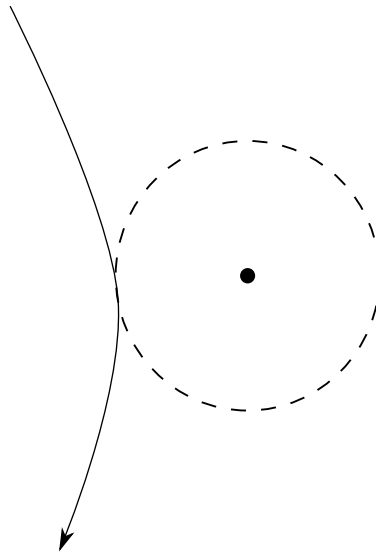


Рис. 65. Траектория частицы в случае отталкивания

В этом случае потенциал будет иметь вид  $U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho^2} \right)}} = \\ &= \left[ u = \frac{1}{\rho}; \right. \\ &\quad \left. du = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \right] = \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2m}{p_{\varphi}^2} \left( E + \alpha u - \frac{p_{\varphi}^2}{2m} \cdot u^2 \right)}} \quad (474) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{p_{\varphi}^2} + \frac{2m\alpha}{p_{\varphi}^2} \cdot u - u^2}} = \\ &= \mp \int \frac{du}{\sqrt{-\left(u - \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2}\right)^2 + \frac{m^2\alpha^2}{p_{\varphi}^4} + \frac{2mE}{p_{\varphi}^2}}} = \\ &= \mp \arcsin \left( \frac{1/\rho - \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2}}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{p_{\varphi}^4} + \frac{2mE}{p_{\varphi}^2}}} \right) \bigg|_{\rho_0}^{\rho} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi - \varphi_1 = \arcsin \left( \frac{1/\rho - \frac{m\alpha}{p_{\varphi}^2}}{\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{p_{\varphi}^4} + \frac{2mE}{p_{\varphi}^2}}} \right) \quad (475) \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{m^2\alpha^2}{p_\varphi^4} + \frac{2mE}{p_\varphi^2}} \sin(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{\rho} - \frac{m\alpha}{p_\varphi^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{1}{\frac{m\alpha}{p_\varphi^2} + \frac{m\alpha}{p_\varphi^2} \sqrt{1 + \frac{2mE}{p_\varphi^2} \cdot \frac{p_\varphi^2}{m^2\alpha^2}} \sin(\varphi - \varphi_1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{p_\varphi^2/m\alpha}{1 + \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} \sin(\varphi - \varphi_1)}; \quad (476)$$

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad (477)$$

где

$$p \equiv \frac{p_\varphi^2}{m\alpha}; \quad \epsilon \equiv \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} \quad (478)$$

$\alpha > 0$  (притяжение):  $p > 0$ .

Если  $E > 0$ , то  $\epsilon > 1 \Rightarrow$  гипербола (См. рис. 66).

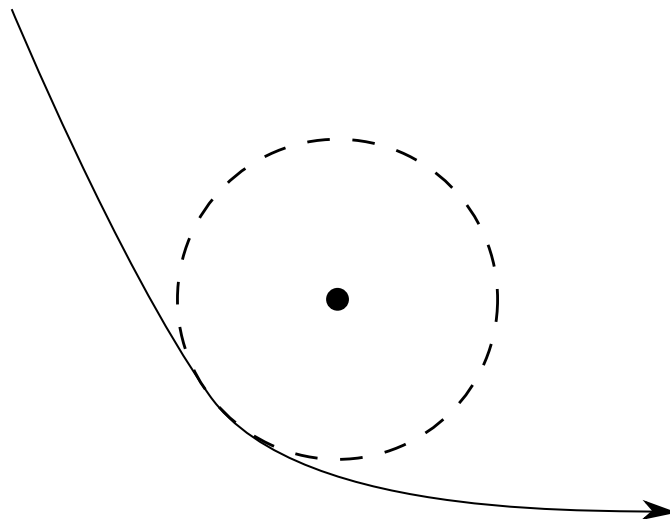


Рис. 66. Траектория частицы в случае притяжения

Если  $E = 0$ , то  $\epsilon = 1 \Rightarrow$  парабола (См. рис. 67).

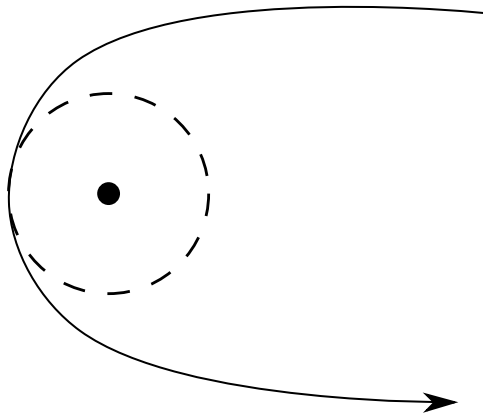


Рис. 67. Траектория частицы при  $E = 0$

Если  $0 > E > -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$ , то  $0 < \epsilon < 1 \Rightarrow$  эллипс (См. рис. 475).

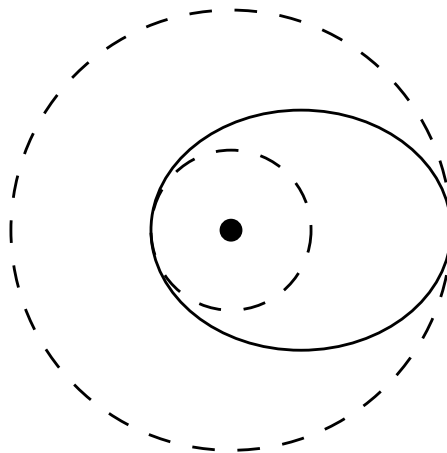


Рис. 68. Траектория частицы при  $0 > E > -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$

Если  $E = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2}$ , то  $\epsilon = 0 \Rightarrow$  окружность

$$E = (U_{\text{eff}})_{\min}$$

$$U_{\text{eff}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \quad (479)$$

$$0 = U'_{\text{eff}} = \frac{\alpha}{r_0^2} - \frac{p_\varphi^2}{mr_0^3} \Rightarrow \frac{\alpha}{r_0^2} = \frac{p_\varphi^2}{mr_0^3} \Rightarrow r_0 = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \quad (480)$$

$$(U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{\alpha}{r_0} + \frac{p_\varphi^2}{2mr_0^2} = -\frac{m\alpha^2}{p_\varphi^2} + \frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \quad (481)$$

$$E = (U_{\text{eff}})_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{2p_\varphi^2} \quad (482)$$

$\alpha < 0$  (отталкивание)

$$p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} < 0 \Rightarrow p = -|p| \quad (483)$$

$$\rho = -\frac{|p|}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad (484)$$

$$\rho = \frac{|p|}{-1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_2)} \Rightarrow \epsilon > 0 \quad (\text{гипербола}) \quad (\text{См. рис. 69}) \quad (485)$$

$E > 0$ :

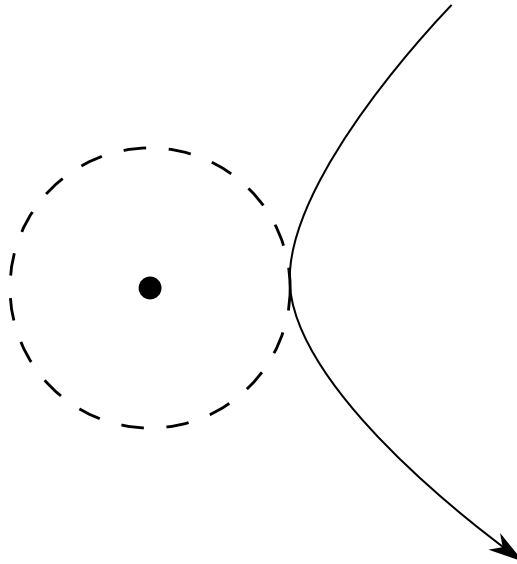


Рис. 69. Траектория частицы

## Задача Кеплера

Движение планет происходит при  $\alpha = GmM > 0$ , где  $M$  - масса Солнца,  $G$  - гравитационная постоянная.

Законы Кеплера:

- 1) Планеты движутся вокруг Солнца по эллиптическим орбитам;
- 2) При движении планеты за одинаковые промежутки времени её радиус-вектор заметает одинаковые площади (секторная скорость - постоянна) (См. рис. 70).

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (486)$$

- 3) Отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей (См. рис. 478) их орбит - постоянно

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const} \quad (487)$$

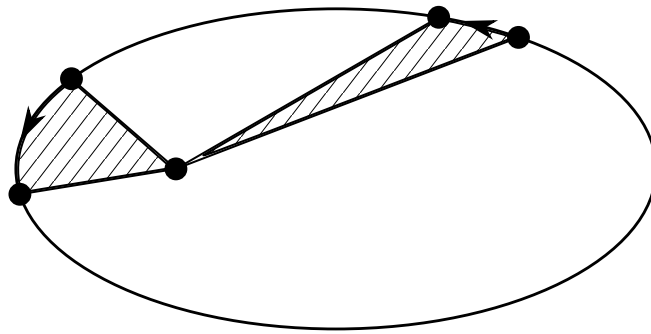


Рис. 70. Постоянство секторной скорости

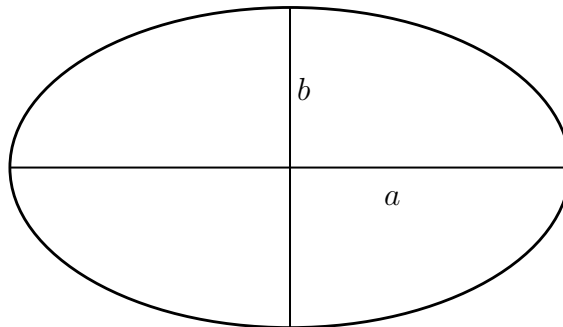


Рис. 71. Большая и малая полуоси эллипса

Докажем 3-й закон Кеплера. Известно, что  $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$ . Заметим

$$\sigma = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{2m} = \text{const} \quad (488)$$

$$S_{\text{элл.}} = \int_0^T dt\sigma = \int_0^T dt \frac{p_\varphi}{2m} = \frac{p_\varphi}{2m} \cdot T \quad (489)$$

$$\sigma = \frac{dS}{dt} \Rightarrow S_{\text{элл.}} = \int_0^T dt\sigma = \int_0^{S_{\text{элл.}}} = S_{\text{элл.}} = \pi ab \quad (490)$$

Из (489), (490) получим

$$T = \pi ab \cdot \frac{2m}{p_\varphi} \quad (491)$$

Вспомним связи параметров эллипса

$$b = a\sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (492)$$

Нетрудно видеть (См. рис. 479), что

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)} \quad (493)$$

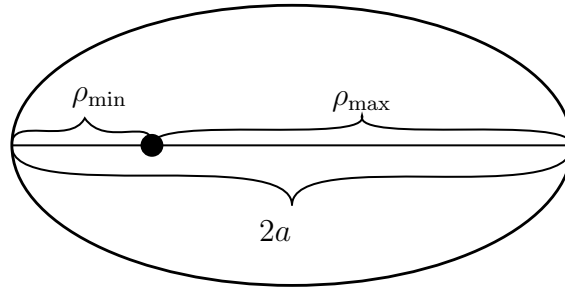


Рис. 72. Связь большой полуоси с  $\rho$

$$a = \frac{1}{2}(\rho_{\min} + \rho_{\max}) = \frac{1}{2} \left( \frac{p}{1 + \epsilon} + \frac{p}{1 - \epsilon} \right) = \frac{p}{1 - \epsilon^2} \quad (494)$$

Тогда, подставляя (492), (493), (494) в (495), получим

$$T = \frac{2\pi m}{p_\varphi} \left( \frac{p}{1 - \epsilon^2} \right)^2 \cdot \sqrt{1 - \epsilon^2} \quad (495)$$

Сравнивая (493) и (476), подставляя в (494) значения  $p$  и  $\epsilon$ , получим:

$$\begin{aligned} a = \frac{p}{1 - \epsilon^2} &= \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \cdot \frac{1}{\left( \chi - \chi - \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} \right)} = \\ &= -\frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \cdot \frac{m\alpha^2}{2Ep_\varphi^2} = -\frac{\alpha}{2E} = +\frac{\alpha}{2|E|} \Rightarrow a = \frac{\alpha}{2|E|} \Rightarrow 2|E| = \frac{\alpha}{a} \end{aligned} \quad (496)$$

Аналогично для периода:

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi m}{p_\varphi} \cdot \frac{p^2}{(1 - \epsilon^2)^{3/2}} = \frac{2\pi m}{p_\varphi} \cdot \frac{p_\varphi^3}{m^2 \alpha^2} \cdot \frac{1}{\left( \chi - \chi - \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2} \right)^{3/2}} = \\ &= \frac{2\pi p_\varphi^3}{m\alpha^2} \cdot \frac{m^{3/2} a^3}{(2|E|)^{3/2} p_\varphi^3} = \frac{2\pi m^{1/2} \alpha}{(2|E|)^{3/2}} \end{aligned} \quad (497)$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} T &= \pi\alpha \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} = 2\pi \frac{m^{1/2} \alpha}{\alpha^{3/2}} a^{3/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \cdot a^{3/2} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \cdot \frac{m}{\alpha} = 4\pi^2 \frac{m}{GM} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \end{aligned} \quad (498)$$

Посчитаем величину периода:

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{\alpha}{\rho} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}} \quad (499)$$

$$T = 2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( -|E|\rho^2 + \alpha\rho - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right)}} \quad (500)$$

Вычислим (500) с помощью методов ТФКП (См. рис. 73).

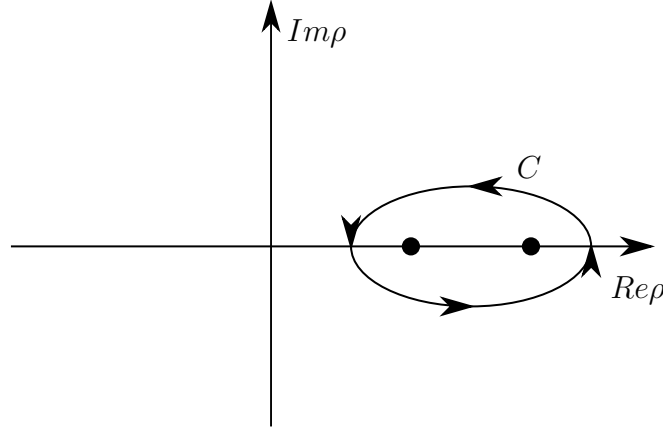


Рис. 73. Взятие интеграла по контуру на комплексной плоскости

$$T = \oint_C \frac{\rho d\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( -|E|\rho^2 + \alpha\rho - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right)}} = 2\pi i \text{ Выч.}(\infty) \quad (501)$$

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( -|E|\rho^2 + \alpha\rho - \frac{p_\varphi^2}{2m} \right)}} &\approx \frac{1}{i\sqrt{\frac{2|E|}{m}} \sqrt{1 - \frac{\alpha}{|E|\rho}}} \approx -i\sqrt{\frac{m}{2|E|}} \left( 1 + \frac{\alpha}{2|E|\rho} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Выч.}(\infty) = \frac{1}{i} \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \cdot \frac{\alpha}{2|E|} \end{aligned} \quad (502)$$

$$T = 2\pi\alpha\sqrt{m} \frac{1}{\sqrt{(2|E|)^3}} = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}} \quad (503)$$

Пойдём историческим путём. Занулим  $\varphi_1$  выбором осей:

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin \varphi} \quad (504)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \text{const} \quad (505)$$

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} = m \left[ \vec{e}_\rho (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) + \vec{e}_\varphi (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) \right] \\ a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\rho^2 \dot{\varphi}) = \frac{2}{\rho} \frac{d}{dt} \sigma = 0 \end{aligned} \Rightarrow \vec{F} = m \cdot \vec{e}_\rho (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) \quad (506)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{p}{(1 + \epsilon \sin \varphi)^2} \cdot \epsilon \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \quad \Rightarrow \\ \dot{\varphi} &= \frac{2\sigma}{\rho^2} \\ \Rightarrow \dot{\rho} &= -\frac{p}{(1 + \epsilon \sin \varphi)^2} \cdot \epsilon \cos \varphi \cdot 2\sigma \frac{1}{p^2} (1 + \epsilon \sin \varphi)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\rho} = -\frac{2\sigma}{p} \epsilon \cos \varphi \quad (507) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\rho} &= +\frac{2\sigma}{p} \epsilon \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} = \frac{2\sigma \epsilon}{p \rho^2} \sin \varphi \cdot 2\sigma = \frac{4\sigma^2}{p} \epsilon \sin \varphi \cdot \frac{(1 + \epsilon \sin \varphi)^2}{p^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ddot{\rho} = \frac{4\sigma^2}{p^3} \epsilon \sin \varphi (1 + \epsilon \sin \varphi)^2 \quad (508) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_\rho &= \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{4\sigma^2}{p^3} \epsilon \sin \varphi \cdot (1 + \epsilon \sin \varphi)^2 - \rho \frac{4\sigma^2}{\rho^4} = \\ &= \frac{4\sigma^2}{p^3} \epsilon \sin \varphi \cdot (1 + \epsilon \sin \varphi)^2 - \frac{4\sigma^2}{p^3} (1 + \epsilon \sin \varphi)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a_\rho = \frac{4\sigma^2}{p^3} (1 + \epsilon \sin \varphi)^2 (\epsilon \sin \varphi - 1 - \epsilon \sin \varphi) = \\ &= \frac{4\sigma^2}{p^3} (-1) \frac{p^2}{\rho^2} = -\frac{4\sigma^2}{p} \cdot \frac{1}{\rho^2} \quad (509) \end{aligned}$$

Таким образом, получим

$$\vec{F} = m \vec{e}_\rho a_\rho = -\frac{4\sigma^2 m}{p} \vec{e}_\rho \frac{1}{\rho^2} \quad (510)$$

$$\sigma = \frac{1}{2} \rho^2 \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{2m}; \quad (511)$$

$$p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha} \quad (512)$$

$$\frac{4\sigma^2 m}{p} = \frac{4m \cancel{p_\varphi^2}}{Am^2} \cdot \frac{m\alpha}{\cancel{p_\varphi^2}} = \alpha \quad (513)$$



## Семинар 11

### Приложения задачи Кеплера

Продолжим рассмотрение движения тел в потенциале  $U(r) = -\alpha/r$ , где  $\alpha = GmM$  (Приближение потенциала, в котором движутся планеты в Солнечной системе). Известно из законов Кеплера, что

$$\vec{F} \sim \vec{e}_\rho \cdot \left(-\frac{1}{\rho^2}\right) \cdot \text{const} \Rightarrow U(\rho) = -\frac{\alpha}{\rho} \quad (514)$$

Также, из третьего закона Кеплера можно понять, что  $\alpha$  в потенциале должна быть пропорциональна массе планеты:

$$\frac{T^2}{a^3} = 4\pi^2 \frac{m}{\alpha} \Rightarrow \alpha \sim m \quad (515)$$

#### Пример

Рассмотрим следующую ситуацию. С Земли (З.) взлетает космический корабль, который летит на Марс (М.) (См. рис. 74). Будем считать, что двигатели корабля могут мгновенно изменить его скорость на нужную величину. Исследуем подробности запуска космического корабля, которые можно узнать из полученных нами предыдущих результатов.

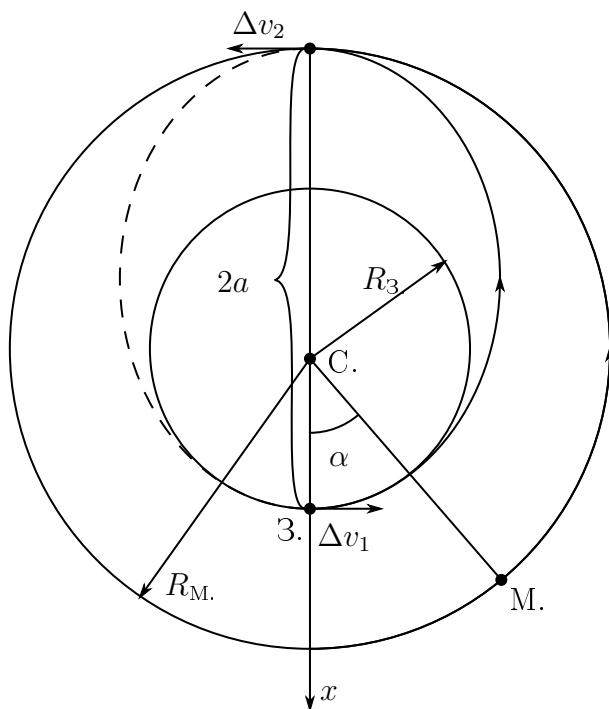


Рис. 74. Запуск космического корабля с Земли (З.) на Марс (М.)

Ясно, что тело - космический корабль, не отличается качественно от планет в нашей задаче, а значит на движение корабля также распространяются законы Кеплера. Энергетически выгодной траекторией полёта является эллиптическая (См. рис. 74).

Найдём в нашем потенциале параметры эллиптической орбиты, двигаясь по которой, корабль может достигнуть Марса ( $a$  - ?,  $\epsilon$  - ?,  $p$  - ?).

Радиусы Земли и Марса удобно измерять в астрономических единицах, в них:  $R_{З.} = 1$  (а. е.);  $R_{М.} = 1,52$  (а. е.). Считаем, что плоскости орбит Земли и Марса совпадают. Тогда из рис. 74 очевидно, что

$$a = \frac{R_{З.} + R_{М.}}{2} = 1,26 \text{ (а. е.)} \quad (516)$$

Вспомнив уравнение эллипса, получим (См. рис. 74):

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{\min} = \frac{p}{1 + \epsilon} = R_{З.}; \\ \rho_{\max} = \frac{p}{1 - \epsilon} = R_{М.} \end{cases} \quad (517)$$

Откуда

$$\frac{R_{М.}}{R_{З.}} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \Rightarrow R_{М.}(1 - \epsilon) = R_{З.}(1 + \epsilon) \Rightarrow \epsilon = \frac{R_{М.} - R_{З.}}{R_{М.} + R_{З.}} \approx 0,21 \quad (518)$$

Подставив (518) в (517), получим:

$$\begin{aligned} p &= R_{З.}(1 + \epsilon) = R_{З.} \left( 1 + \frac{R_{М.} - R_{З.}}{R_{М.} + R_{З.}} \right) = \\ &= R_{З.} \frac{2R_{М.}}{R_{М.} + R_{З.}} = \frac{2R_{З.}R_{М.}}{R_{М.} + R_{З.}} \approx 1,21 \text{ (а. е.)} \end{aligned} \quad (519)$$

Найдём приращение скорости, которое необходимо дать кораблю для перехода на другую орбиту, пренебрегая притяжением планет. Кораблю нужно дать два приращения ( $\Delta v_1, \Delta v_2$ ): для перехода на промежуточную орбиту и для перехода с промежуточной на орбиту Марса (См. рис. 514).

Известно, что

$$a = \frac{\alpha}{2|E|} \Rightarrow E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (520)$$

Запишем закон сохранения энергии для корабля, учитывая (520), тогда

$$\begin{aligned} E &= \frac{mv_1^2}{2} - \frac{\alpha}{R_{З.}} = -\frac{\alpha}{R_{З.} + R_{М.}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_1^2}{2} &= \frac{GM}{R_{З.}} - \frac{GM}{R_{З.} + R_{М.}} = \frac{G - M(R_{З.} + R_{М.} - R_{З.})}{R_{З.}(R_{З.} + R_{М.})} = \frac{GM R_{М.}}{R_{З.}(R_{З.} + R_{М.})} \Rightarrow \\ &\Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2GM R_{М.}}{R_{З.}(R_{З.} + R_{М.})}}, \end{aligned} \quad (521)$$

где  $v_1$  - скорость космического корабля в перигелии.

Найдём скорость Земли. Запишем закон сохранения энергии для Земли, учитывая (520), и то, что для Земли  $a = R_{З.}$ , тогда

$$E = \frac{m_З v_З^2}{2} - \frac{GMm_З}{R_{З.}} = -\frac{Gm_З M}{2R_{З.}} \Rightarrow v_З^2 = 2 \cdot \frac{GM}{R_{З.}} \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow v_З = \sqrt{\frac{GM}{R_{З.}}}, \quad (522)$$

где  $v_3$  - скорость Земли в перигелии.

Из (521), (522) получим для приращения

$$\Delta v_1 = v_1 - v_3 = \sqrt{\frac{GM}{R_3}} \left( -1 + \sqrt{\frac{2R_{M.}}{R_3 + R_2}} \right) \quad (523)$$

Посчитаем его

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{G \cdot M}{R_3}} &= \sqrt{\frac{6,7 \cdot 10^{-11} \text{ (м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек.}^2) \cdot 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}}{1,5 \cdot 10^{11} \text{ (м)}}} = 3 \cdot 10^4 \text{ (м/сек.)} = 30 \text{ (км/сек.)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta v_1 &= 30 \text{ (км/сек.)} \left( -1 + \sqrt{\frac{2 \cdot 1,52}{1 + 1,52}} \right) \approx 2,95 \text{ (км/сек.)} \quad (524) \end{aligned}$$

Аналогично найдём скорость космического корабля в афелии. Из закона сохранения энергии, учитывая (516), (520), получим

$$\begin{aligned} \frac{mv_2^2}{2} - \frac{GmM}{R_{M.}} &= -\frac{GmM}{R_3 + R_{M.}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{2GM} \cdot \sqrt{\frac{1}{R_{M.}} - \frac{1}{R_3 + R_{M.}}} = \sqrt{\frac{2GM}{R_{M.}}} \cdot \sqrt{\frac{R_3 + R_{M.} - R_{M.}}{R_3 + R_{M.}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_2 &= \sqrt{\frac{2GMR_3}{R_{M.}(R_3 + R_{M.})}}, \quad (525) \end{aligned}$$

где  $v_2$  - скорость корабля в афелии.

Аналогично найдём скорость Марса в этой точке. Учитывая (520) и то, что для Марса  $a = R_{M.}$ , получим из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_{M.}v_{M.}^2}{2} - \frac{Gm_{M.}M}{R_{M.}} = -\frac{Gm_{M.}M}{2R_{M.}} \Rightarrow v_{M.} = \sqrt{\frac{GM}{R_{M.}}} \quad (526)$$

Таким образом, из (525), (526) получим для второго приращения:

$$\begin{aligned} \Delta v_2 = v_{M.} - v_2 &= \sqrt{\frac{GM}{R_{M.}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_3}{R_3 + R_{M.}}} \right) = \\ &= \sqrt{\frac{GM}{R_3}} \cdot \sqrt{\frac{R_3}{R_{M.}}} \left( 1 - \sqrt{\frac{2R_3}{R_3 + R_{M.}}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta v_2 &= 30 \text{ (км/сек.)} \cdot \sqrt{\frac{1}{1,52}} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{2 \cdot 1}{2,52}} \right) \approx 2,65 \text{ (км/сек.)} \quad (527) \end{aligned}$$

Найдём время полёта корабля. Для него, как мы помним, справедлив третий закон Кеплера:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \quad (528)$$

где индекс 1 соответствует космическому кораблю, 2 - Земле. Тогда

$$\begin{aligned} T &= 1(\text{год}) \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{R_{З.}}\right)^3} \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{\text{полёта}} &= \frac{1}{2}T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{R_{З.} + R_{М.}}{2R_{З.}}\right)^3} (\text{лет}) \Rightarrow \\ \Rightarrow t_{\text{полёта}} &= \frac{1}{2}\sqrt{(1,26)^3}(\text{лет}) = 0,71(\text{лет}) = 258(\text{дней}) \quad (529) \end{aligned}$$

Чтобы попасть на Марс, Марс и космический корабль должны одновременно прийти в одну точку орбиты Марса. Выясним, когда нужно запускать корабль, чтобы это произошло. Найдём угол, который должны составлять радиус-вектора Земли и Марса в момент запуска космического корабля (угол  $\alpha$ ) (См. рис. 514).

За время полёта Марс изменит угол на

$$\begin{aligned} \pi - \alpha &= \omega_{М.} \cdot t_{\text{полёта}} = \frac{2\pi}{T_{М.}} \cdot t_{\text{полёта}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= \pi - 2\pi \frac{t_{\text{полёта}}}{T_{М.}}; \quad \left| \begin{array}{l} T_{М.} \approx 1,88(\text{лет}) \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha &= 360^\circ \left( \frac{1}{2} - \frac{t_{\text{полёта}}}{T_{М.}} \right) = 360^\circ \left( \frac{1}{2} - \frac{258(\text{дней})}{1,88 \cdot 365(\text{дней})} \right) \approx 45^\circ \quad (530) \end{aligned}$$

Узнаем, с какой периодичностью Земля и Марс занимают такое положение. Обозначим угол, который радиус-вектор Марса образует с осью  $x$ , как  $\varphi_{М.}$ , угол Земли -  $\varphi_{З.}$ , тогда

$$\begin{cases} \varphi_{З.} = \omega_{З.} \cdot t; \\ \varphi_{М.} = \omega_{М.} \cdot t + \alpha \end{cases} \quad (531)$$

Через какое-то время будет:

$$\varphi_{З.} - \varphi_{М.} = -\alpha + 2\pi n, \quad (532)$$

где  $n$  - целое число.

Пусть в начальный момент времени  $n = 0$ , тогда из (531), (532) получим время, через которое произойдёт (532), соответствующее некоторому ненулевому  $n$ :

$$\omega_{З.} \cdot t - \omega_{М.} \cdot t - \alpha = -\alpha + 2\pi n \Rightarrow t = \frac{2\pi n}{\omega_{З.} - \omega_{М.}} = \frac{2\pi n}{\frac{2\pi}{T_{З.}} - \frac{2\pi}{T_{М.}}} = \frac{nT_{З.}T_{М.}}{T_{М.} - T_{З.}} \quad (533)$$

Таким образом, промежуток между окнами старта:

$$\Delta t = \frac{T_{З.}T_{М.}}{T_{М.} - T_{З.}} = \frac{1 \cdot 1,88}{1,88 - 1}(\text{лет}) = 2,14(\text{лет}) = 780(\text{дней}) \quad (534)$$

Противостоянием Земли и Марса называется момент времени, когда Земля и Марс находятся на одной линии по одну сторону от Солнца (См. рис. 75)

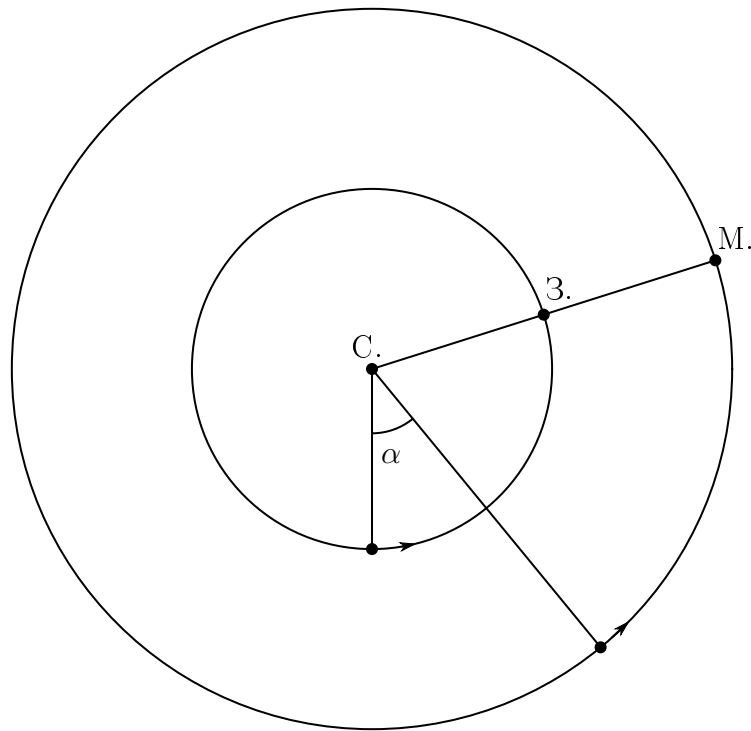


Рис. 75. Противостояние Земли и Марса

Найдём ближайшее к противостоянию Земли и Марса окно запуска космического корабля.

Нужное положение Земля и Марс занимают незадолго до противостояния (См. рис. 515). Пусть при  $t = 0$   $\alpha = 45^\circ$ . Найдём, какое время пройдёт от окна запуска до противостояния. В момент противостояния:

$$\begin{aligned}\varphi_{\text{З.}} &= \varphi_{\text{М.}} \Rightarrow \omega_{\text{З.}} t = \omega_{\text{М.}} t + \alpha \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{\alpha}{\omega_{\text{З.}} - \omega_{\text{М.}}} = \frac{\alpha}{2\pi \left( \frac{1}{T_{\text{З.}}} - \frac{1}{T_{\text{М.}}} \right)} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{T_{\text{З.}} T_{\text{М.}}}{T_{\text{М.}} - T_{\text{З.}}} = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \Delta t = \\ &= \frac{45^\circ}{360^\circ} \cdot 780(\text{дней}) \approx 97(\text{дней}) \quad (535)\end{aligned}$$

То после окна запуска до противостояния пройдёт 97 дней.

Противостояние Земли и Марса было 27 июля 2018 года, значит космический корабль можно было запустить 22 апреля 2018 года.

## Смещение перигелия Меркурия (постановка вопроса)

На самом деле движение планет не является чисто эллиптическим. Конечно, на их траектории влияют и другие планеты, имеющие свою гравитацию, и многие другие факторы. Одним из примечательных отклонений от эллиптической траектории движения является наблюдаемое смещение перигелия у Меркурия, которое состоит в том, что Меркурий движется практически по эллипсу, но этот эллипс медленно

вращается вокруг одного из своих фокусов, и поэтому траектория движения изменяется (См. рис. 76).

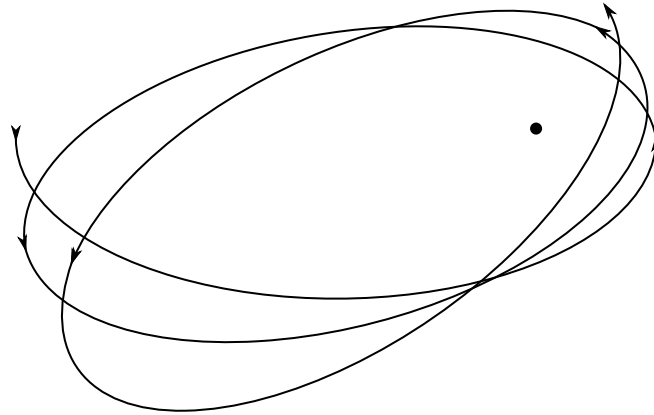


Рис. 76. Смещение перигелия Меркурия

Влияние притяжения других планет даёт свой вклад в смещение перигелия Меркурия, но основное объяснение данного эффекта даётся в общей теории относительности.

## Функция Лагранжа планеты с релятивистской поправкой

Из общей теории относительности функция Лагранжа имеет вид:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2(1 - R/\rho)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}, \quad (536)$$

где  $R$  - некоторая величина, имеющая размерность длины.

Осмыслим эту формулу:

1) Если  $R = 0$ , то (536) будет иметь вид:

$$L \rightarrow -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)} \quad (537)$$

Поскольку в полярный координатах:

$$\vec{v}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2, \quad (538)$$

то (537) примет вид:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (539)$$

Выражение (539) представляет собой функцию Лагранжа для свободной релятивистской частицы (199).

2) Пусть  $v/c \ll 1$  и  $r/\rho \ll 1$ , тогда разложим корень в (536) в ряд по малому параметру, получим:

$$\begin{aligned} L &\approx -mc^2 \left( 1 - \frac{R}{2\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{2c^2} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{2c^2} \right) = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + \frac{mc^2 R}{2\rho} - mc^2 \stackrel{const}{=} \\ &\stackrel{const}{=} \frac{m\vec{v}^2}{2} - \left( -\frac{mc^2 R}{2\rho} \right) \end{aligned} \quad (540)$$

Выражение (540) представляет собой функцию Лагранжа для частицы в потенциале  $\alpha/\rho$ . Отождествим подчёркнутое слагаемое с  $\alpha/\rho$  для планет, тогда:

$$-\frac{mc^2 R}{2} = GmM \Rightarrow R = \frac{2GM}{c^2} \quad (541)$$

Величина  $R$  называется гравитационным радиусом. Вычислим  $R$  для Солнца:

$$R = \frac{2 \cdot 6,7 \cdot 10^{-11} \left( \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{сек}^2} \right) \cdot 2 \cdot 10^{30} (\text{кг})}{(3 \cdot 10^8 (\text{м}/\text{сек}))^2} = 2,95 \cdot 10^3 (\text{м}) = 2,95 (\text{км}) \quad (542)$$

Найдём, как движется частица в системе с такой функцией Лагранжа (536):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2(1-R/\rho)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} \quad (543)$$

Очевидно, что у неё две степени свободы, обобщённые координаты:  $\rho$ ,  $\varphi$ . Найдём интегралы движения.  $\varphi$  - циклическая координата, тогда:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = const \quad (544)$$

Второй интеграл, очевиден:

$$L \neq L(t) \Rightarrow E = \dot{\rho} \frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} + \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - L = const \quad (545)$$

Вычислим их

$$\begin{aligned} p_\varphi &= m \cancel{c^2} \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\dots}} \left( \cancel{2} \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{\cancel{c^2}} \right) \Rightarrow p_\varphi = \frac{m\rho^2 \dot{\varphi}}{\sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2(1-R/\rho)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}} = const \quad (546) \\ E &= \dot{\rho} \left( \cancel{m} \cancel{c^2} \right) \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\dots}} \left( \cancel{2} \frac{\dot{\rho}}{\cancel{c^2}(1-R/\rho)} \right) + \frac{m\rho^2 \dot{\varphi}^2}{\sqrt{\dots}} + mc^2 \sqrt{\dots} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\dots}} \left[ \frac{m\dot{\rho}^2}{1-R/\rho} + m\rho^2 \dot{\varphi}^2 + mc^2 \left( 1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2(1-R/\rho)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} \right) \right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow E = \frac{mc^2(1-R/\rho)}{\sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2(1-R/\rho)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}}} = const \quad (547) \end{aligned}$$

Поделим (546) на (547), тогда получим:

$$\frac{p_\varphi}{E} = \frac{\rho^2 \dot{\varphi}}{c^2 (1 - R/\rho)} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi c^2 (1 - R/\rho)}{\rho^2 E} \quad (548)$$

Откуда

$$\frac{\rho \dot{\varphi}}{c} = \frac{p_\varphi c (1 - R/\rho)}{\rho E} \quad (549)$$

Подставляя (549) в (547), получим

$$\begin{aligned} E &= \frac{mc^2 (1 - R/\rho)}{\sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2 (1 - R/\rho)} - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)^2}{\rho^2 E^2}}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2 (1 - R/\rho)} - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)^2}{\rho^2 E^2} = \frac{m^2 c^4 (1 - R/\rho)^2}{E^2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\rho}^2 = c^2 \left(1 - \frac{R}{\rho}\right) \left[1 - \frac{R}{\rho} - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)^2}{\rho^2 E^2} - \frac{m^2 c^4}{E^2} \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)^2\right] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{\rho} = \pm c \left(1 - \frac{R}{\rho}\right) \sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)}{\rho^2 E^2} - \frac{m^2 c^4}{E^2} \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)} \quad (550) \end{aligned}$$

Из (550) легко можно составить квадратуру для нахождения зависимости  $\rho(t)$ . Нас же интересует траектория движения частицы, а именно смещение перигелия. Для этого определим зависимость  $\rho(\varphi)$ . Поделив (548) на (550), получим:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\rho} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{\rho}} &= \pm \frac{p_\varphi c^2 (1 - R/\rho)}{\rho^2 E \cdot \sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)}{\rho^2 E^2} - \frac{m^2 c^4}{E^2} \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi c d\rho}{\rho^2 E \sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2 c^2 (1 - R/\rho)}{\rho^2 E^2} - \frac{m^2 c^4}{E^2} \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)}} \quad (551) \end{aligned}$$

Запишем ответ для квадратуры (551) в виде, похожем на ответ для задачи Кеплера: введём  $E$  и  $c$  под корень и представим  $E$ , как:

$$E = mc^2 + E_0, \quad (552)$$

где  $mc^2$  - энергия покоя,  $E_0$  - энергия в нерелятивистском случае. Тогда, подстав-



ляя (552) в (551), и производя указанные действия, получим:

$$\begin{aligned}
 \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{1}{c^2} (mc^2 + E_0)^2 - \frac{p_{\varphi}^2}{\rho^2} \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{\rho^2 \sqrt{m^2 c^2 + 2mE_0 + \frac{1}{c^2} E_0^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\rho^2} + \frac{p_{\varphi}^2 R}{\rho^3} - m^2 c^2 + \frac{m^2 c^2 R}{\rho}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m \rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} E_0 + \frac{E_0^2}{m^2 c^2} - \frac{p_{\varphi}^2}{m^2 \rho^2} + \frac{p_{\varphi}^2 R}{m^2 \rho^3} + \frac{c^2 R}{\rho}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \varphi - \varphi_0 &= \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_{\varphi} d\rho}{m \rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 + \frac{E_0^2}{2mc^2} - \frac{p_{\varphi}^2}{2m\rho^2} + \frac{c^2 R m}{2\rho} + \frac{p_{\varphi}^2 R}{2m\rho^3} \right)}} \quad (553)
 \end{aligned}$$

Сравнивая (553) и (435), увидим сходство между траекторией частицы, движущейся в потенциале  $U(r) = \alpha/r$ , и траекторией частицы с функцией Лагранжа (536). Тогда в (553) слагаемое, подчёркнутое одной чертой имеет смысл константы (переопределения энергии частицы); слагаемое, подчёркнутое двумя чертами с учётом (541), представляет собой сам потенциал, в котором движутся планеты ( $\alpha/r$ ); тремя чертами - релятивистская добавка, за счёт которой и возникает смещение перигелия.

## Семинар 12

### Смещение перигелия Меркурия

Функция Лагранжа для движения в центральном поле с учётом релятивистских поправок имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{R}{\rho} - \frac{\dot{\rho}^2}{c^2 \left(1 - \frac{R}{\rho}\right)} - \frac{\rho^2 \dot{\varphi}^2}{c^2}} \quad (554)$$

Гравитационный радиус

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (555)$$

Подставляя (555) в (556), получим  $E = \text{const}$ ;  $p_\varphi = \text{const}$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 + \frac{E_0^2}{2mc^2} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{mc^2 R}{2\rho} + \frac{Rp_\varphi^2}{2m\rho^3} \right)}} \quad (556)$$

$$E \equiv mc^2 + E_0 \quad (557)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E_0 + \frac{E_0^2}{2mc^2} + \frac{GMm}{\rho} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{GMp_\varphi^2}{mc^3\rho^3} \right)}} \quad (558)$$

Найдём с помощью этого траектории движения в потенциале  $U(r) = -\alpha/r$ .

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{m\rho^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E + \frac{\alpha}{\rho} + \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} \right)}}, \quad (559)$$

где  $\alpha = GMm$

С учётом релятивистских поправок, будет происходить смещение перигелия эллиптических орбит планет (См. рис. 77).

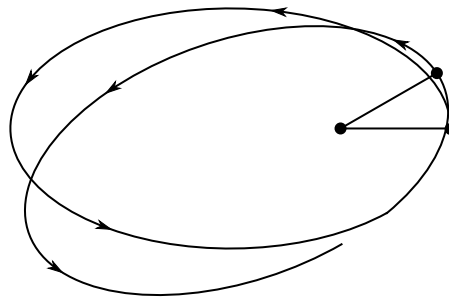


Рис. 77. Смещение перигелия эллиптической орбиты с учётом релятивистских поправок

Найдём величину изменения координаты  $\varphi$  за период в первом приближении и с учётом релятивистской поправки:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2 \int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} \frac{d\rho}{\rho^2 \sqrt{\frac{2m}{p_\varphi^2} \left( E_0 + \frac{E_0^2}{2mc^2} + \frac{GmM}{\rho} - \frac{p_\varphi^2}{2m\rho^2} + \frac{GMp_\varphi^2}{mc^2\rho^3} \right)}} = \\ &= \left[ u = 1/\rho; \quad 1/\rho_{\min} = u_{\max}; \right. \\ &\quad \left. du = -1/\rho^2 d\rho; \quad 1/\rho_{\max} = u_{\min} \right] = \\ &= 2 \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} \cdot u - u^2 + \underbrace{\frac{2GMu^2}{c^2}}_{\text{малое слаг.}}} \quad (560)\end{aligned}$$

Возьмём интеграл в (560) с помощью методов ТФКП (См. рис. 78).

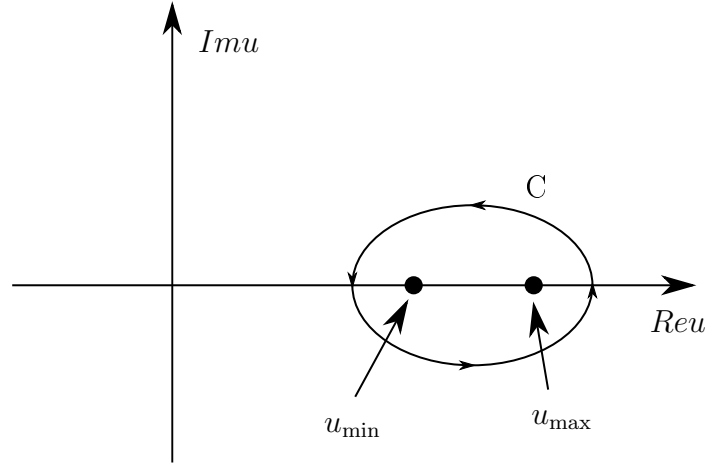


Рис. 78. Взятие интеграла по контуру на комплексной плоскости

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \oint_C \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} \cdot u - u^2}} + \\ &+ \oint_C du \left( -\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2GMu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\left( \frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} u - u^2 \right)^{3/2}} + \dots \equiv \\ &\equiv I_1 + I_2 + \dots \quad (561)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1 &= 2\pi i \operatorname{Res}_{u_{\min}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} \cdot u - u^2}}, \infty \right] = \\ &= \left[ \sim \frac{1}{\sqrt{-u^2}} = \frac{1}{iu} \right] = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} = 2\pi \quad (562)\end{aligned}$$

Таким образом первое слагаемое в (561) представляет собой классическую эллиптическую траекторию тела (См. рис. 79).

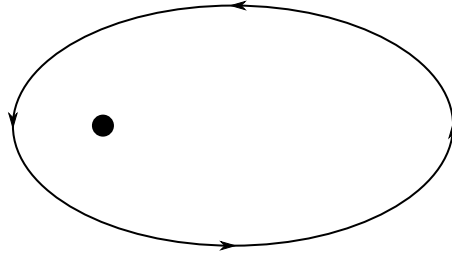


Рис. 79. Траектория частицы без релятивистской поправки

Теперь найдём релятивистскую поправку:

$$I_2 = - \oint_C du \cdot \frac{GMu^3}{c^2} \frac{1}{\left( \frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} u - u^3 \right)^{3/2}} =$$

$$= 2\pi i \text{ Выч. } \left[ -\frac{GMu^3}{c^2} \left( \frac{2mE_0}{p_\varphi^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2} + \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2} u - u^2 \right)^{-3/2}, \infty \right] \quad (563)$$

$$= -\frac{GMu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\left( iu^3 \right) \left( 1 - \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2 u} + \frac{2mE_0}{p_\varphi^2 u^2} + \frac{E_0^2}{c^2 p_\varphi^2 u^2} \right)^{3/2}} \approx$$

$$\approx -i \frac{GM}{c^2} \cdot \left( 1 - \frac{2Gm^2 M}{p_\varphi^2 u} \right)^{-3/2} \approx -i \frac{GM}{c^2} \left( 1 + \frac{3Gm^2 M}{p_\varphi^2 u} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Выч. } [\dots, \infty] = -i \frac{3G^2 M^2 m^2}{c^2 p_\varphi^2} \quad (564)$$

$$I_2 = 2\pi i(-i) \cdot \frac{3G^2 M^2 m^2}{c^2 p_\varphi^2} = 6\pi \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2 p_\varphi^2} \quad (565)$$

$$I_1 = 2\pi \quad (566)$$

$$\Delta\varphi \approx I_1 + I_2 = 2\pi \left( 1 + \frac{3G^2 M^2 m^2}{c^2 p_\varphi^2} \right) \quad (567)$$

Теперь ясно, что с учётом релятивистских эффектов за период частица будет делать больше одного оборота на величину (568). То есть перигелий эллипса её траектории будет смещаться на некоторый угол (См. рис. 80).

Смещение перигелия

$$\Delta\varphi - 2\pi = 6\pi \frac{G^2 M^2 m^2}{c^2 p_\varphi^2} \quad (568)$$

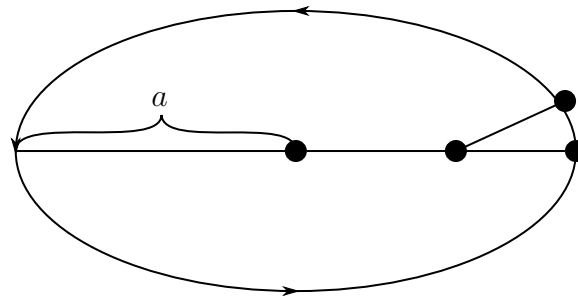


Рис. 80. Траектория частицы с учётом релятивистской поправки (смещение перигелия)

Выразим величину смещения через параметры орбиты. Траектория движения частицы по эллипсу:

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad (569)$$

где  $p = \frac{p_\varphi^2}{m\alpha}$ ;  $\alpha = GmM$ ;  $a = \frac{p}{1-\epsilon^2}$

$$p_\varphi^2 = m\alpha \cdot p = Gm^2Ma(1 - \epsilon^2) \quad (570)$$

$$\Delta\varphi - 2\pi = \frac{6\pi G^2 M^2 m^2}{c^2 \cdot Gm^2 Ma(1 - \epsilon^2)} \Rightarrow \Delta\varphi - 2\pi = \frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - \epsilon^2)} = \frac{3\pi R}{a(1 - \epsilon^2)}, \quad (571)$$

где

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (572)$$

Для Меркурия  $\epsilon = 0,205$ ;  $T = 0,24$  лет:

$$\Delta\varphi - 2\pi \approx \frac{9,4 \cdot 2,95 \text{ км}}{5,8 \cdot 10^7 \text{ км} \cdot (1 - 0,04)} \approx 5,0 \cdot 10^{-7} \quad (573)$$

В угловых секундах за 100 лет:

$$5,0 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{360}{2\pi} \cdot 60 \cdot 60 \cdot \frac{100}{0,24} = 43'' \quad (574)$$

## Семинар 13

### Задача двух тел

Рассмотрим две частицы, взаимодействующие друг с другом, так что сила, с которой они взаимодействуют направлена по прямой соединяющей их, эти силы равны по модулю, противоположны по направлению (См. рис. 81).

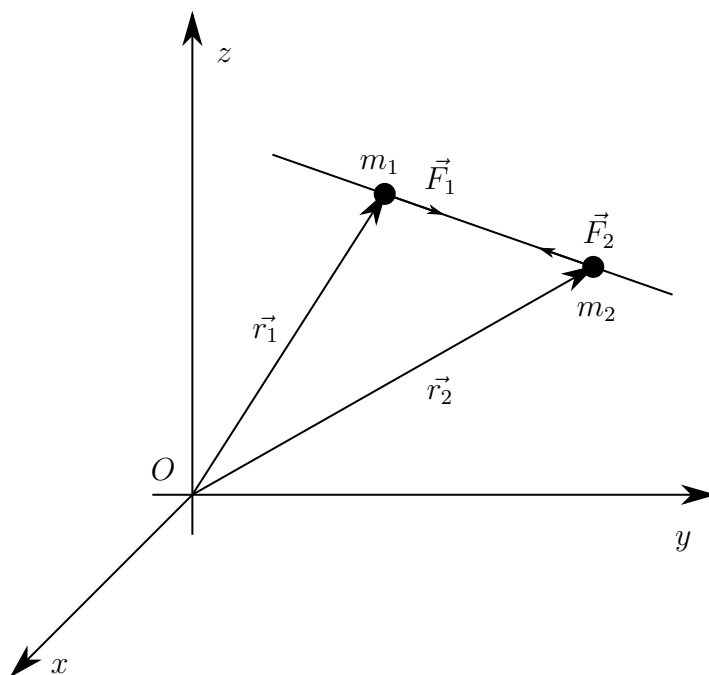


Рис. 81. Постановка задачи двух тел

3-й закон Ньютона

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \quad (575)$$

В таком случае потенциал можно записать, как

$$U = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (576)$$

Тогда сила будет иметь вид

$$\vec{F}_1 = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_1} \equiv -\left(\vec{e}_x \frac{\partial U}{\partial x_1} + \vec{e}_y \frac{\partial U}{\partial y_1} + \vec{e}_z \frac{\partial U}{\partial z_1}\right) \quad (577)$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \cdot \frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\partial x_1} \quad (578)$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \quad (579)$$

$$\frac{\partial |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}{\partial x_1} = \frac{2(x_1 - x_2)}{2\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}} = \frac{x_2 - x_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (580)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_1} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (581)$$

Таким образом, для сил получим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \cdot \frac{x_1 - x_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Rightarrow \vec{F}_1 = -U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (582)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_2} |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Rightarrow \vec{F}_2 = -U'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \cdot \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \quad (583)$$

Функция Лагранжа такой системы в классическом случае будет иметь вид

$$L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \quad (584)$$

Перейдём к другим переменным  $(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow (\vec{R}, \vec{r})$ , где

$$\begin{cases} \vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ \vec{R} \equiv \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \end{cases} \quad (585)$$

Найдём вид функции Лагранжа в этих переменных. Выразим  $\vec{r}_1$  и  $\vec{r}_2$  через новые переменные

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = |\vec{r}| \equiv r \quad (586)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 \quad (587)$$

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2) \vec{R} &= m_1(\vec{r} + \vec{r}_2) + m_2 \vec{r}_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (m_1 + m_2) \vec{r}_2 = (m_1 + m_2) \vec{R} - m_1 \vec{r} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \end{aligned} \quad (588)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{(m_1 + m_2) - m_1}{m_1 + m_2} \vec{r} = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad (589)$$

Получим

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}, \\ \vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (590)$$

Подставляя (590) в (584), получим

$$\begin{aligned} L &= \frac{m_1}{2} \left( \dot{\vec{R}} + \frac{m_2 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 + \frac{m_2}{2} \left( \dot{\vec{R}} - \frac{m_1 \dot{\vec{r}}}{m_1 + m_2} \right)^2 - U(r) = \\ &= \frac{m_1}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}} \dot{\vec{r}} + \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 + \\ &+ \frac{m_2}{2} \dot{\vec{R}}^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{R}} \dot{\vec{r}} + \frac{m_2 m_1^2}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r) = \\ &= \frac{(m_1 + m_2)}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2} \dot{\vec{r}}^2 - U(r) \end{aligned} \quad (591)$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{cases} M \equiv m_1 + m_2, \\ \mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \end{cases} \quad (592)$$

Тогда функция Лагранжа с учётом (585), (591), (592) будет иметь вид

$$L = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) \quad (593)$$

Заметим, что она явно делится на две части, одна из которых зависит только от  $\dot{\vec{R}}^2$ , а другая (подчёркнутая) представляет собой функцию Лагранжа движения частицы с массой  $\mu$  в центральном поле с потенциалом  $U(r)$ . Таким образом у нас есть интегралы движения. Энергия:

$$L \not\equiv L(t) \Rightarrow const = E = \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) \quad (594)$$

И импульсы:  $X \equiv (\vec{R})_x, \dots$

$$L = \frac{M}{2} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) + \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) \Rightarrow \begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{X}} = M \dot{X} = const, \\ p_y = const, \\ p_z = const. \end{cases} \quad (595)$$

Найдём закон движения для вектора  $\vec{R}$ :

$$\begin{aligned} \vec{P} \equiv \vec{e}_x p_x + \vec{e}_y p_y + \vec{e}_z p_z &= \underline{M \dot{\vec{R}}} = \overrightarrow{const} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{P} &= \underline{(m_1 + m_2)} \cdot \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2}{\underline{m_1 + m_2}} = m_1 \dot{\vec{r}}_1 + m_2 \dot{\vec{r}}_2 \end{aligned} \quad (596)$$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{\vec{P}}{M} = const \Rightarrow \vec{R}(t) = \frac{\vec{P}}{M} \cdot (t - t_0) + \vec{R}_0 \quad (597)$$

Перейдя в систему отсчёта связанную с центром масс системы, функция лагранжа будет иметь вид ( $\vec{r} = 0$ ):

$$L \rightarrow L_0 = \frac{m \dot{\vec{r}}^2}{2} - U(r) \quad (598)$$

Энергия системы в системе отсчёта центра масс:

$$E_0 = \frac{\mu \dot{\vec{r}}^2}{2} + U(r) = E - \frac{M \dot{\vec{R}}^2}{2} = E - \frac{\vec{P}^2}{2M} \quad (599)$$

$$\vec{L}_0 = \mu [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = const \quad (600)$$



Интегралы движения:  $E$ ,  $\vec{P}$ ,  $\vec{L}_0^2$ ,  $L_{0z}$ . Всего 6 интегралов движения.

$$(\vec{L}_0, \vec{r}) = 0 \quad (601)$$

$$L_0 = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - U(\rho) \quad (602)$$

$$t - t_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E_0 - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2\mu\rho^2} \right)}} \quad (603)$$

$$\varphi - \varphi_0 = \pm \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{p_\varphi d\rho}{\mu\rho^2 \sqrt{\frac{2}{\mu} \left( E_0 - U(\rho) - \frac{p_\varphi^2}{2\mu\rho^2} \right)}} \quad (604)$$

### Пример

Рассмотрим две частицы с массами  $m_1, m_2$  с потенциалом взаимодействия  $U(r) = Gm_1m_2/r$ , где  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ . Пусть  $r_{\min} = A$ ,  $r_{\max} = B$ . Найти энергию и угловой момент системы в системе отсчёта центра масс.

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad (605)$$

Известна траектория движения в центральном поле для данной задачи (См. рис. 82).

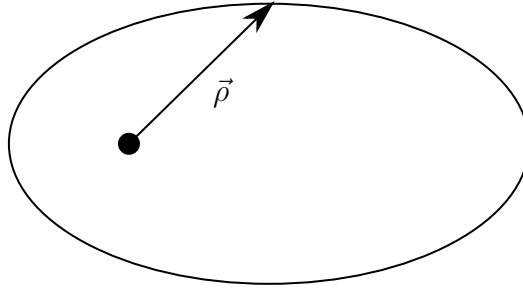


Рис. 82. Траектория движения в центральном поле в плоскости Лапласа

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)} \quad (606)$$

(В плоскости Лапласа:  $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$ )

$$\rho_1 = \frac{p_1}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad \text{где } p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot p \quad (607)$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad \text{где } p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot p \quad (608)$$

Таким образом, можно понять, как будет выглядеть траектория частиц в плоскости Лапласа в полярных координатах (См. рис. 83).

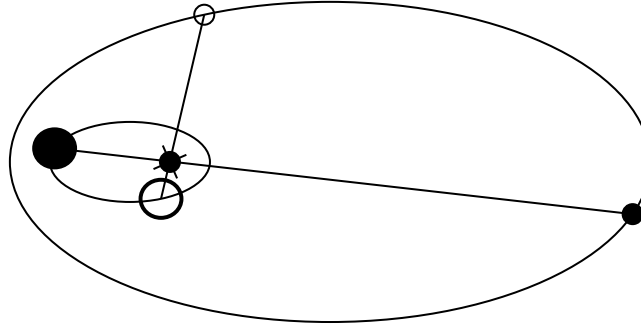


Рис. 83. Траектория движения системы в плоскости Лапласа

$$E_0 = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + U(\rho) \quad (609)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (610)$$

$$p_\varphi = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \quad (611)$$

Подставим (610), (611) в (609), тогда

$$E_0 = \frac{\mu \dot{\rho}^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2\mu \rho^2} - \frac{Gm_1 m_2}{\rho} = \text{const} \quad (612)$$

Энергия системы записанная при  $r_{\min}$  и  $r_{\max}$  будет иметь вид

$$\begin{cases} E_0 = \frac{p_\varphi^2}{2\mu A^2} - \frac{Gm_1 m_2}{A}, \\ E_0 = \frac{p_\varphi^2}{2\mu B^2} - \frac{Gm_1 m_2}{B}. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{p_\varphi^2}{2\mu} \left( \frac{A^2}{-B^2} \right) - Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_\varphi^2}{2\mu} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) = Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\varphi^2 = 2\mu \cdot Gm_1 m_2 \cdot \frac{AB}{A+B} = 2G \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{AB}{A+B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_\varphi = m_1 m_2 \sqrt{\frac{2G}{m_1 + m_2} \cdot \frac{AB}{A+B}} \quad (613)$$

$$E_0 = \frac{1}{A^2} \cdot Gm_1 m_2 \frac{AB}{A+B} - \frac{Gm_1 m_2}{A} = Gm_1 m_2 \frac{B - (A+B)}{A(A+B)} = -\frac{Gm_1 m_2}{A+B} \quad (614)$$

Ранее для  $U(r) = \alpha/r$  было найдено, что:

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (615)$$

Теперь:

$$E \rightarrow E_0; \quad a = \frac{A+B}{2}; \quad \alpha \rightarrow Gm_1 m_2 \quad (616)$$

Подставляя (616) в (615), получим:

$$E_0 = -\frac{Gm_1m_2}{A+B} \quad (617)$$

В системе отсчёта, где  $\vec{R} = 0$ :

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= m_1 [\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2] = \\ &= \frac{m_1m_2^2}{(m_1+m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] + \frac{m_2m_1^2}{(m_1+m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \\ &= \frac{m_1m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \mu [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] \end{aligned} \quad (618)$$

$$L_0 = \mu \rho^2 \dot{\varphi} = p_\varphi \quad (619)$$

## Семинар 14

### Движение двух взаимодействующих тел

#### Пример

Рассмотрим задачу двух тел:  $m_1, m_2$ ;  $U(r) = -Gm_1m_2/r$ , где  $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ ;  $r_{\min} = A$ ;  $r_{\max} = B$ . Найти энергию и угловой момент в системе отсчёта центра масс и период движения, если оно периодическое.

$$\vec{R} = 0; \quad \vec{r}_1 = \frac{m_2 \vec{r}}{m_1 + m_2}; \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1 \vec{r}}{m_1 + m_2} \quad (620)$$

$$\rho = \frac{p}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}; \quad 0 \leq \epsilon < 1 \quad (621)$$

В плоскости Лапласа: ( $\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho$ )

$$\rho_1 = \frac{p_1}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}, \quad \text{где } p_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p \quad (622)$$

$$\rho_2 = \frac{p_2}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \hat{\varphi}_1)}, \quad \text{где } p_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} p \quad (623)$$

Из (622), (623) понятен вид траектории системы (См. рис. 84).  $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1 + \pi$  Угловой

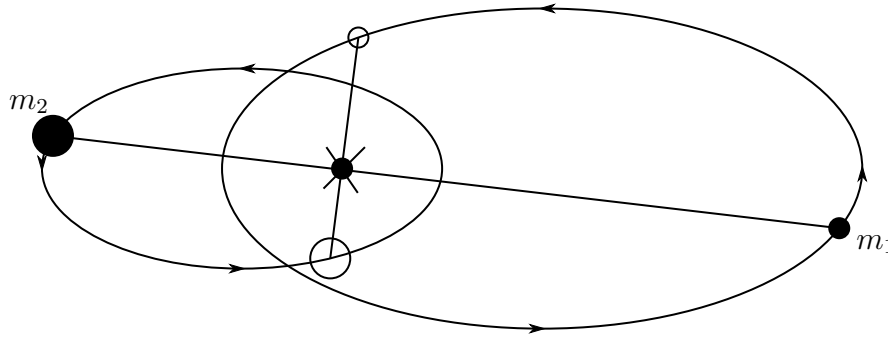


Рис. 84. Траектория движения системы в плоскости Лапласа

момент системы имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{L}_0 &= m_1 [\vec{r}_1 \times \dot{\vec{r}}_1] + m_2 [\vec{r}_2 \times \dot{\vec{r}}_2] = \\ &= \frac{m_1 m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] + \frac{m_2 m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \\ &= \frac{m_1 m_2 (m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2)^2} [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] = \mu [\vec{r} \times \dot{\vec{r}}] \end{aligned} \quad (624)$$

Запишем остальные интегралы движения

$$p_\varphi = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \quad (625)$$

$$E_0 = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + U(r) = \frac{\mu}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{Gm_1 m_2}{\rho} \quad (626)$$

$$p_\varphi = \mu \rho^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu \rho^2} \quad (627)$$

Подставляя (627) в (626), получим

$$E_0 = \frac{\mu}{2} \dot{\rho}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\mu \rho^2} - \frac{Gm_1 m_2}{\rho} = \text{const} \quad (628)$$

Записывая (628) в минимальной и максимальной точках ( $\dot{\rho} = 0$ ), получим

$$\begin{aligned} \begin{cases} E_0 = \frac{p_\varphi^2}{2\mu A^2} - \frac{Gm_1 m_2}{A}, \\ E_0 = \frac{p_\varphi^2}{2\mu B^2} - \frac{Gm_1 m_2}{B}. \end{cases} &\Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= \frac{p_\varphi^2}{2\mu} \left( \frac{1}{A^2} - \frac{1}{B^2} \right) - Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p_\varphi^2}{2\mu} \left( \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) &= Gm_1 m_2 \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow p_\varphi^2 &= 2\mu \cdot Gm_1 m_2 \cdot \frac{AB}{A+B} \Rightarrow \\ \Rightarrow p_\varphi &= m_1 m_2 \sqrt{\frac{2G}{m_1 + m_2} \cdot \frac{AB}{(A+B)}} \end{aligned} \quad (629)$$

$$E_0 = \frac{1}{A^2} \cdot Gm_1 m_2 \frac{AB}{(A+B)} - \frac{Gm_1 m_2}{A} = Gm_1 m_2 \frac{\cancel{B} - (A + \cancel{B})}{A(A+B)} = -\frac{Gm_1 m_2}{A+B} \quad (630)$$

Ранее для  $U(r) = \alpha/r$  было найдено

$$E = -\frac{\alpha}{2a} \quad (631)$$

Теперь:

$$E \rightarrow E_0; \quad \alpha = Gm_1 m_2; \quad a \rightarrow \frac{A+B}{2}; \quad m \rightarrow \mu \quad (632)$$

Подставляя (632) в (631), получим:

$$E_0 = -\frac{Gm_1 m_2}{A+B} \quad (633)$$

Ранее для  $U(r) = -\alpha/r$  было найдено:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\alpha}} \cdot a^{3/2} \quad (634)$$

Делая в (634) замены (632), получим

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\mu}{Gm_1 m_2}} \cdot a^{3/2} \quad (635)$$

Таким образом, получим для периода:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} \cdot a^{3/2} \quad (636)$$

### Пример

Рассмотрим задачу двух тел  $m_1, m_2$ ;  $U(r) = -Gm_1m_2/r$ . Пусть радиус меняется так медленно, что можно написать в некотором приближении, что  $r + R \approx \text{const}$ .  $\frac{\Delta E}{\Delta t} = -x$ , где  $x > 0$  - малая величина. Найти:  $\frac{\Delta R}{\Delta t}$ ;  $\frac{\Delta T}{\Delta t}$ , если известен период  $T$ .

$$E = -\frac{Gm_1m_2}{A+B} \Rightarrow -\frac{Gm_1m_2}{2R}, \quad \text{так как } A = B = R \quad (637)$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = +\frac{Gm_1m_2}{2R^2} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta R}{\Delta t} = \frac{2R^2}{Gm_1m_2} \cdot \frac{\Delta E}{\Delta t} = -x \cdot \frac{2R^2}{Gm_1m_2} \quad (638)$$

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}}, \quad (639)$$

где  $a = R$ . То есть

$$\begin{aligned} T &= 2\pi R^{3/2} \sqrt{\frac{1}{G(m_1 + m_2)}} \Rightarrow R^{3/2} = \frac{T}{2\pi} \cdot \sqrt{G(m_1 + m_2)} \Rightarrow \\ &\Rightarrow R = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{3/2} (G(m_1 + m_2))^{1/3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta R}{\Delta t} = -x \frac{2}{Gm_1m_2} \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{4/3} (G(m_1 + m_2))^{2/3} \quad (640) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta T}{\Delta t} &= \frac{2\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \cdot \frac{3}{2} R^{1/2} \cdot \frac{\Delta R}{\Delta t} = \\ &= \frac{3\pi}{\sqrt{G(m_1 + m_2)}} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/3} (G(m_1 + m_2))^{1/6} \cdot (-x) \frac{2}{Gm_1m_2} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{4/3} (G(m_1 + m_2))^{2/3} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta T}{\Delta t} = -6\pi \cdot x \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{5/3} \cdot \frac{1}{Gm_1m_2} (G(m_1 + m_2))^{1/3} \quad (641) \end{aligned}$$

## Задача рассеяния

Рассмотрим пучок частиц, налетающих на силовой центр, и рассеивающихся на нём (См. рис. 621).

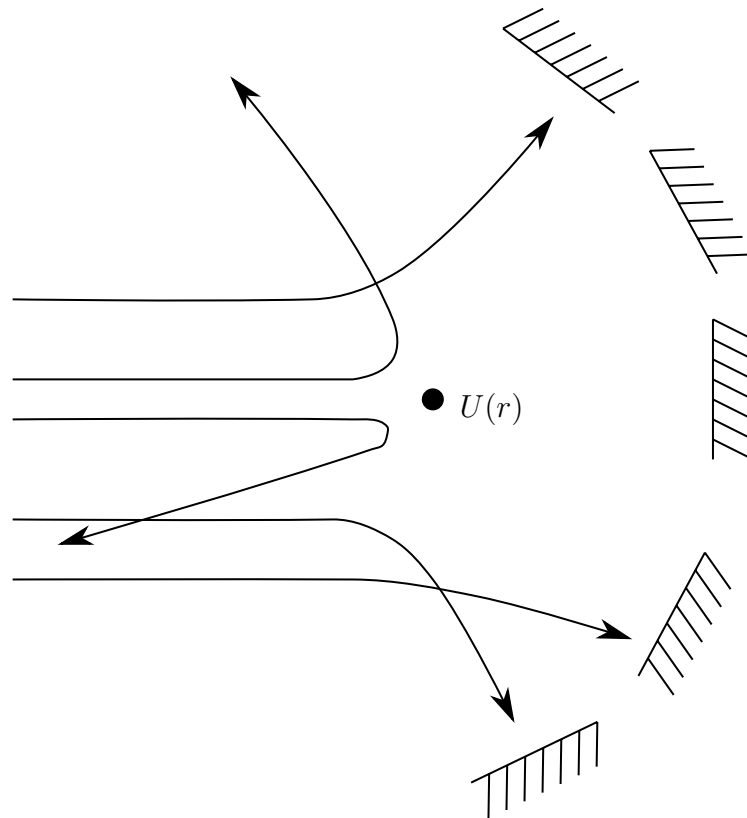


Рис. 85. Схематическое представление задачи рассеяния в классической механике

Введём величину дифференциального сечения рассеяния

$$d\sigma \equiv \frac{dN_{\text{расс.}}/dt}{j}, \quad (642)$$

где  $j$  - плотность потока налетающих частиц:

$$j \equiv \frac{d^2 N_{\text{пад.}}}{dt dS} \quad (643)$$

Из (642), (643) следует, что  $[d\sigma] = \text{м}^2$ .

При  $r \rightarrow \infty$ :  $U(r) \rightarrow 0$ . Угол отклонения частиц от начального направления ( $\theta$ ) называется углом рассеяния (См. рис. 622).

Величина  $p$  - прицельный параметр. Из рис. 86 понятно, что

$$\frac{dN_{\text{расс.}}}{dt} = j \cdot dS \quad (644)$$

Из рис. 87 нетрудно понять, что  $dS$  - то площадь заштрихованного кольца, то есть

$$\frac{dN_{\text{расс.}}}{dt} = j \cdot dS = j \cdot 2\pi p \cdot dp \quad (645)$$

Тогда, подставляя (645) в (642), получим

$$d\sigma = 2\pi p |dp| = \pi |dp^2| = \pi \left| \frac{dp^2}{d\theta} \right| \cdot d\theta = 2\pi p \left| \frac{dp}{d\theta} \right| \cdot d\theta \quad (646)$$

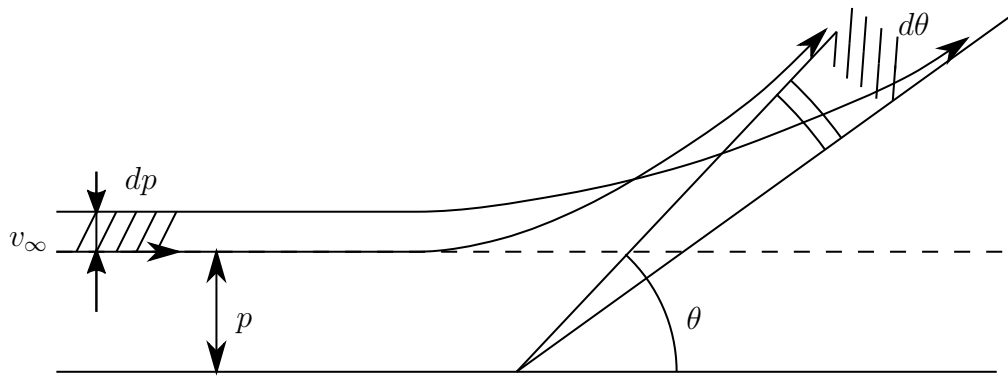


Рис. 86. Схема рассеивания частицы в зависимости от прицельного параметра

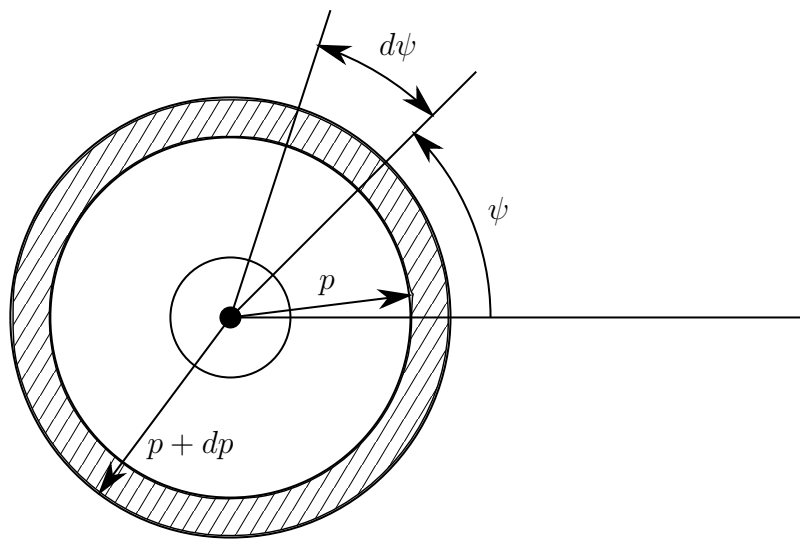


Рис. 87. Схема рассеивания, вид спереди

Нетрудно связать  $d\sigma$  с величиной телесного угла:

$$\begin{aligned} \frac{dN_{\text{расс.}}}{dt} &= j \cdot dS = j \cdot dp \cdot p d\psi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \begin{aligned} d\sigma &= p \cdot dp \cdot d\psi = p \left| \frac{dp}{d\theta} \right| \cdot \underline{d\theta \cdot d\psi}, \\ d\Omega &= \sin \theta \cdot \underline{d\theta \cdot d\psi} \end{aligned} \right| \Rightarrow \\ &\Rightarrow d\sigma = p \left| \frac{dp}{d\theta} \right| \cdot \frac{d\Omega}{\sin \theta} \quad (647) \end{aligned}$$



## Семинар 15

### Рассеяние в потенциале отталкивания

#### Пример

Рассмотрим абсолютно упругое рассеяние на жёсткой неподвижной сфере радиуса  $R$  (См. рис. 88). Найти  $d\sigma$  и  $\sigma$ .

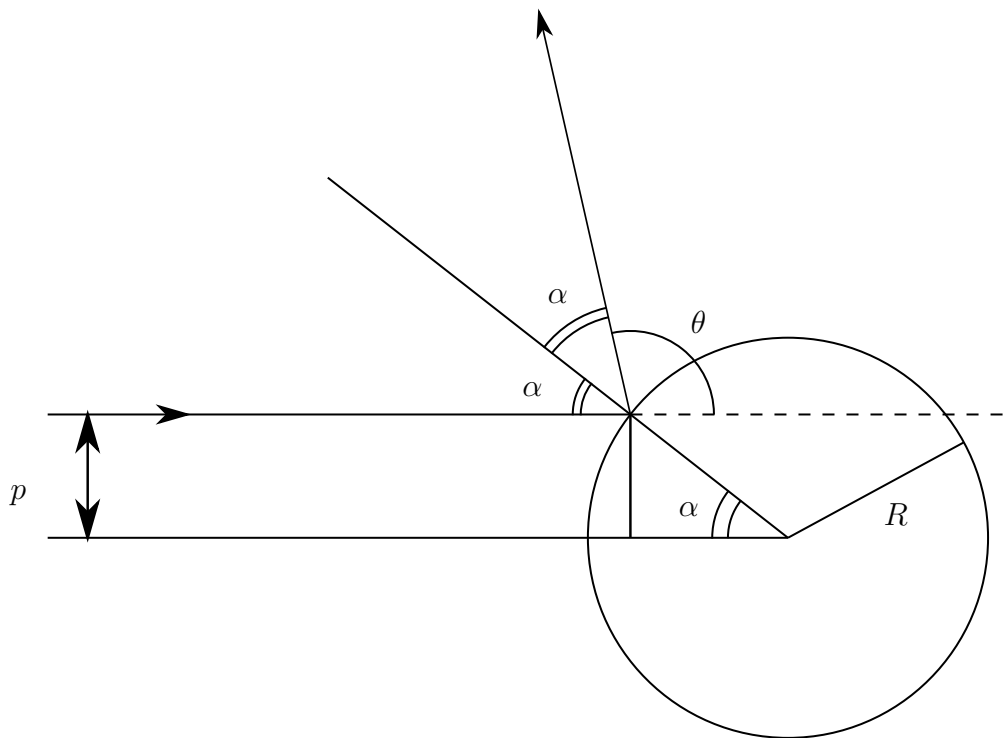


Рис. 88. Рассеяние на жёсткой неподвижной сфере

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha + \theta = \pi; \\ \sin \alpha = \frac{p}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}; \\ p = R \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) \end{array} \right. \Rightarrow p = R \cos \frac{\theta}{2} \quad (648)$$

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{d\Omega}{\sin \theta} p \left| \frac{dp}{d\theta} \right| = \frac{d\Omega}{\sin \theta} \cdot R \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left| -R \sin \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \right| = \\ &= \frac{d\Omega}{2 \sin \theta} \cdot R^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{d\Omega R^2 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{4 \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d\sigma = \frac{d\Omega}{4} \cdot R^2 = \frac{R^2 \sin \theta d\theta d\psi}{4} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2\pi R^2 \sin \theta d\theta}{4} = \frac{\pi R^2}{2} \cdot \sin \theta d\theta \quad (649) \end{aligned}$$

$$\sigma = \int d\sigma = \frac{R^2}{4} \int d\Omega = 4\pi \cdot \frac{R^2}{4} = \pi R^2 \quad (650)$$

$$\sigma = \int_0^\pi \frac{\pi R^2}{2} \sin \theta d\theta = \frac{\pi R^2}{2} (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = \frac{\pi R^2}{2} (+1 + 1) = \pi R^2 \quad (651)$$

### Пример

Рассмотрим задачу рассеяния  $U(r) = -\alpha/r$ ;  $\alpha < 0$  - притяжение;  $\alpha > 0$  - отталкивание (См. рис. 89).

$$\rho = \frac{\hat{p}}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)}; \quad (652)$$

$$\hat{p} = \frac{p_\varphi^2}{m(-\alpha)} \quad (653)$$

$$\rho = \frac{-p_\varphi^2/m\alpha}{1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1)} \quad (654)$$

$$\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} > 1, \quad (E > 1) \quad (655)$$

Найдём угол рассеяния.

а)  $\alpha > 0$  - отталкивание

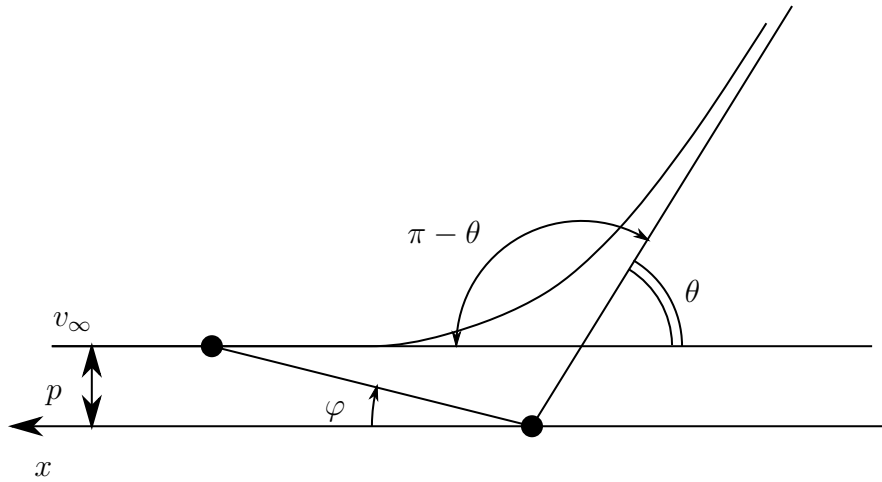


Рис. 89. Рассеяние в отталкивающем потенциале

$\rho = \infty$ , если

$$1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1) = 0 \quad (656)$$

Чтобы было  $\rho > 0$  нужно (См. рис. 90):

$$1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1) \leq 0 \Rightarrow \sin(\varphi - \varphi_1) \leq -\frac{1}{\epsilon} \quad (657)$$

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = \pi - \theta \Rightarrow \alpha_2 - \alpha_1 = \pi - \theta \quad (658)$$

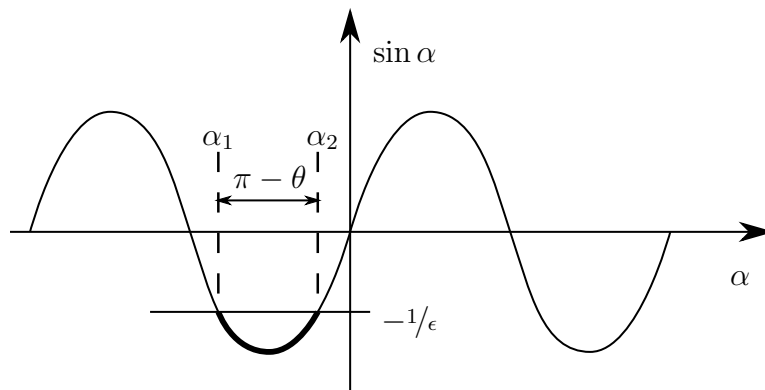


Рис. 90. Условие положительности  $\rho$

$$\alpha_2 = -\arcsin(1/\epsilon) \quad (659)$$

$$\alpha_1 = -\pi + \arcsin(1/\epsilon) \quad (660)$$

$$\pi - \theta = \alpha_2 - \alpha_1 = -\arcsin \frac{1}{\epsilon} + \pi - \arcsin \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \theta = 2 \arcsin \frac{1}{\epsilon} \quad (661)$$

б)  $\alpha < 0$  (притяжение) (См. рис. 91)

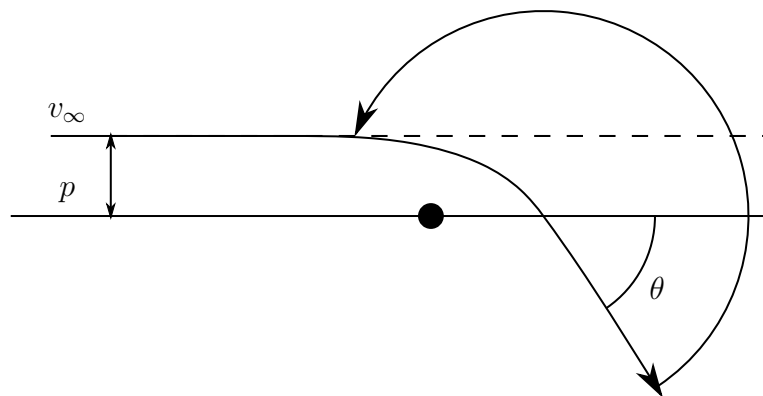


Рис. 91. Траектория частицы в случае притяжения

Из условия положительность  $\rho$  (См. рис. 92):

$$1 + \epsilon \sin(\varphi - \varphi_1) \geq 0 \quad (662)$$

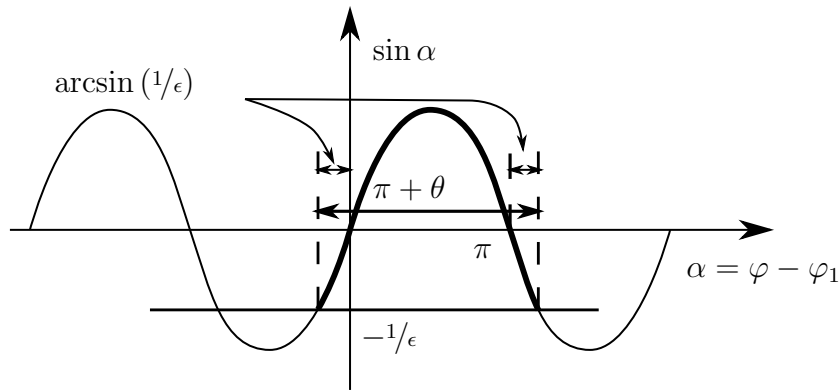


Рис. 92. Условие положительности  $\rho$

$$\pi + \theta = 2 \arcsin 1/\epsilon + \pi \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arcsin 1/\epsilon, \\ \Rightarrow \epsilon &= \sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}} \Rightarrow \theta = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Ep_\varphi^2}{m\alpha^2}}} \end{aligned} \quad (663)$$

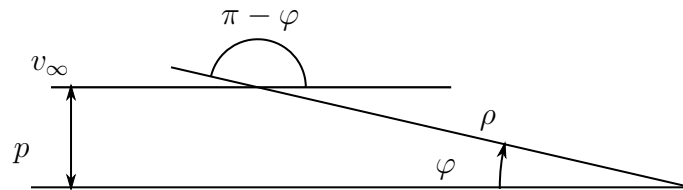


Рис. 93. Схема рассеивания

$$\dot{\varphi} > 0 \Rightarrow p_\varphi > 0; \quad E = \frac{mv_\infty^2}{2} \quad (664)$$

$$p_\varphi = |\vec{L}| = \left| m \left[ \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right] \right| = m\rho v_\infty \cdot \sin(\pi - \varphi) = m(\rho \sin \varphi) v_\infty = mpv_\infty \quad (665)$$

Нетрудно связать заданные величины с прицельным параметром (См. рис. 93). Тогда

$$\begin{aligned} \theta &= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2Em^2 p^2 v_\infty^2}{m^2 \alpha^2}}} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta &= 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 p^2}{\alpha^2}}} \right) \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4E^2 p^2}{\alpha^2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{4E^2 p^2}{\alpha^2} &= \frac{1 - \sin^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} = \frac{\cos^2 \theta/2}{\sin^2 \theta/2} \Rightarrow \\ \Rightarrow p^2 &= \frac{\alpha^2}{4E^2} \operatorname{ctg}^2 \theta/2 \Rightarrow p = \frac{\alpha}{2E} \operatorname{ctg} \theta/2 \end{aligned} \quad (666)$$

$$d\sigma = \frac{d\Omega}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} \cdot \frac{\alpha}{2E} \cdot \frac{\cos \theta/2}{\sin \theta/2} \cdot \frac{\alpha}{2E} \cdot \left| -\frac{1}{2 \sin^2(\theta/2)} \right| = \left( \frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\sigma = \left( \frac{\alpha}{4E} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} \quad (667)$$

Пример

Два заряда  $Z_1 e$ ,  $Z_2 e$ . Тогда  $\alpha = Z_1 Z_2 e^2$ .

$\sigma = \infty$ , так как если  $\theta$  мало, то

$$\frac{d\Omega}{\sin^4 \theta/2} = \frac{\sin \theta d\theta d\psi}{\sin^4 \theta/2} \sim \frac{\theta d\theta}{\theta^4} \sim \frac{d\theta}{\theta^3} \Rightarrow \int_0 \frac{d\theta}{\theta^3} \rightarrow \infty \quad (668)$$

Пример

$U(r) = +\alpha/r^2$ ,  $\alpha > 0$  (отталкивание) (См. рис. 94). Найти  $d\sigma$ .

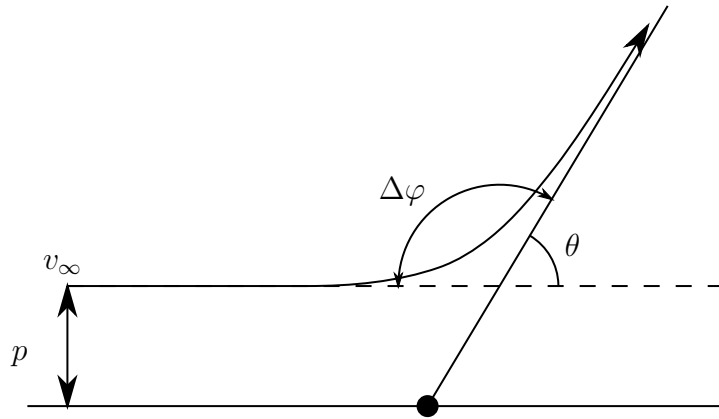


Рис. 94. Рассеяние на потенциале  $U(r) = +\alpha/r^2$

$$\rho = \sqrt{\frac{p_\varphi^2 + 2m\alpha}{2mE}} \cdot \frac{1}{\sin \left( \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi - \varphi_1) \right)} \quad (669)$$

$E > 0$ .  $\rho = \infty$ , если (См. рис. 95)

$$\sin \left( \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} (\varphi - \varphi_1) \right) = 0 \quad (670)$$

$$\alpha' = \sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}} \cdot (\varphi - \varphi_1) \quad (671)$$

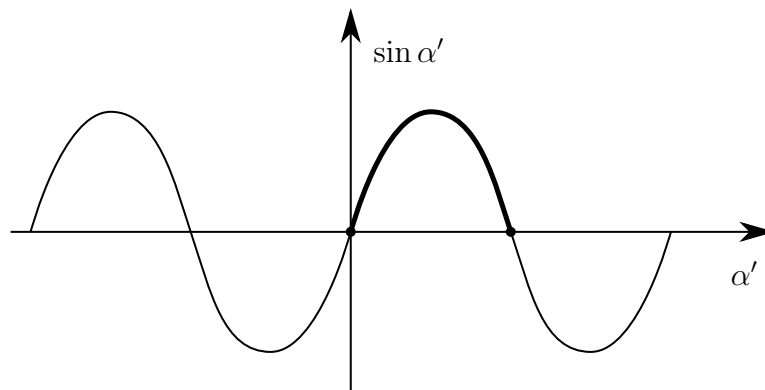


Рис. 95. Условие положительности  $\rho$

$$\begin{aligned}
 \Delta\alpha = \pi \Rightarrow \Delta\varphi &= \frac{\Delta\alpha}{\sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{p_\varphi^2}}} = \pi - \theta \quad \Rightarrow \\
 p_\varphi &= mv_\infty; \quad E = \frac{mv_\infty^2}{2} \\
 \Rightarrow \theta &= \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{2m\alpha}{m^2 v_\infty^2 p^2}}} = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{Ep^2}}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\pi}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{Ep^2}}} &= \pi - \theta \Rightarrow \frac{\pi^2}{(\pi - \theta)^2} = 1 + \frac{\alpha}{Ep^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{\alpha}{Ep^2} &= \frac{\pi^2}{(\pi - \theta)^2} - 1 = \frac{\pi^2 - (\pi - \theta)^2}{(\pi - \theta)^2} = \frac{\cancel{\pi^2} - \cancel{\pi^2} + 2\pi\theta - \theta^2}{(\pi - \theta)^2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow p^2 &= \frac{\alpha}{E} \cdot \frac{\pi^2 - 2\pi\theta + \theta^2}{\theta(2\pi - \theta)} = \frac{\alpha}{E} \left[ \frac{\pi^2}{\theta(2\pi - \theta)} - 1 \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow p^2 &= \frac{\alpha}{E} \left[ \frac{\pi}{2\theta} + \frac{\pi}{2(2\pi - \theta)} - 1 \right] \quad (672)
 \end{aligned}$$

$$d\sigma = \pi \left| \frac{dp^2}{d\theta} \right| d\theta = \frac{\alpha\pi^2}{2E} \left| -\frac{1}{\theta} + \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right| d\theta \Rightarrow d\sigma = \frac{\alpha\pi^2}{2E} \left( \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{(2\pi - \theta)^2} \right) d\theta \quad (673)$$

#### Пример

Рассмотрим следующую задачу рассеяния  $U(r) = -\alpha/r^2$ ;  $\alpha > 0$  (притяжение). Из рис. 96 понятно, что частицы рассеянные разным способом, но под одним углом в эксперименте попадают в один и тот же детектор.

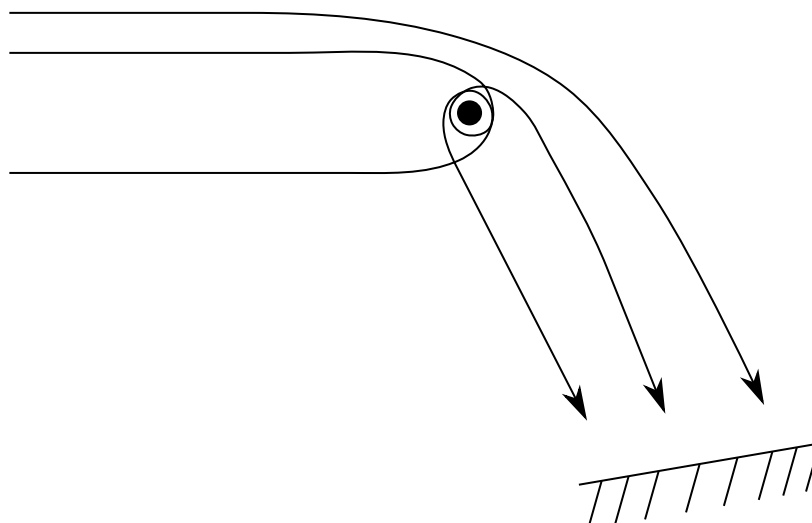


Рис. 96. Проблемы экспериментального обнаружения числа частиц, рассеянных под некоторым углом

## Падение на центр

Определим критическое значение прицельного параметра  $p_0$ , как максимально возможное значение прицельного параметра, при котором происходит падение на силовой центр (соответственно при любом значении прицельного параметра, большем  $p_0$  падения на силовой центр не происходит) (См. рис. 97)

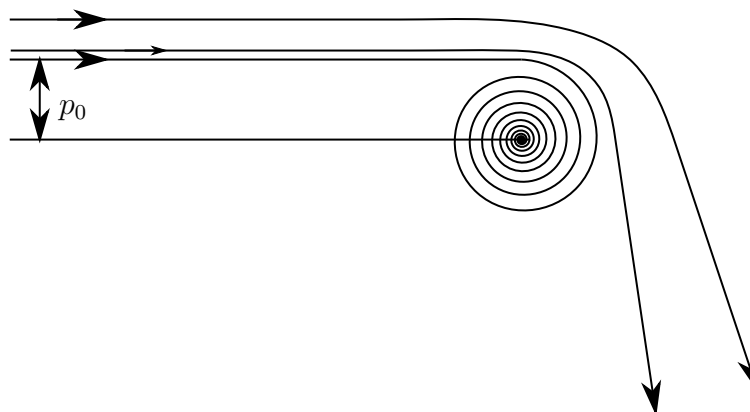


Рис. 97. Критическое значение прицельного параметра

Определим сечение падения на силовой центр следующим образом:

$$\sigma_{\text{пад.}} \equiv \frac{dN_{\text{захв.}}/dt}{j} \quad (674)$$

Область падения на силовой центр со стороны прилёта падающих частиц будет представлять собой окружность (См. рис. 98). Тогда несложно найти сечение падения на силовой центр:

$$\sigma_{\text{пад.}} = \frac{dN_{\text{захв.}}/dt}{j} = \frac{j\pi p_0^2}{j} = \pi p_0^2 \quad (675)$$

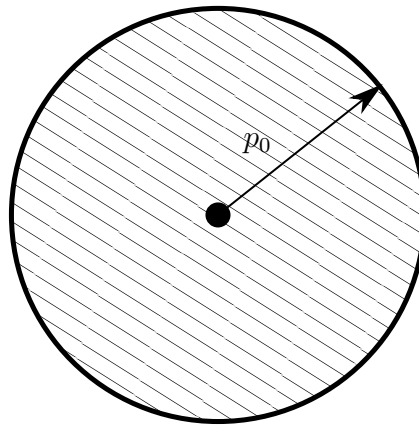


Рис. 98. Область значений прицельного параметра, при которых происходит падение на силовой центр

Найдём сечение падения на силовой центр для потенциала  $U(r) = -\alpha/r^2$ ,  $\alpha > 0$  (См. рис. 99).

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} = \left(-\alpha + \frac{p_\varphi^2}{2m}\right) \frac{1}{r^2} \quad (676)$$

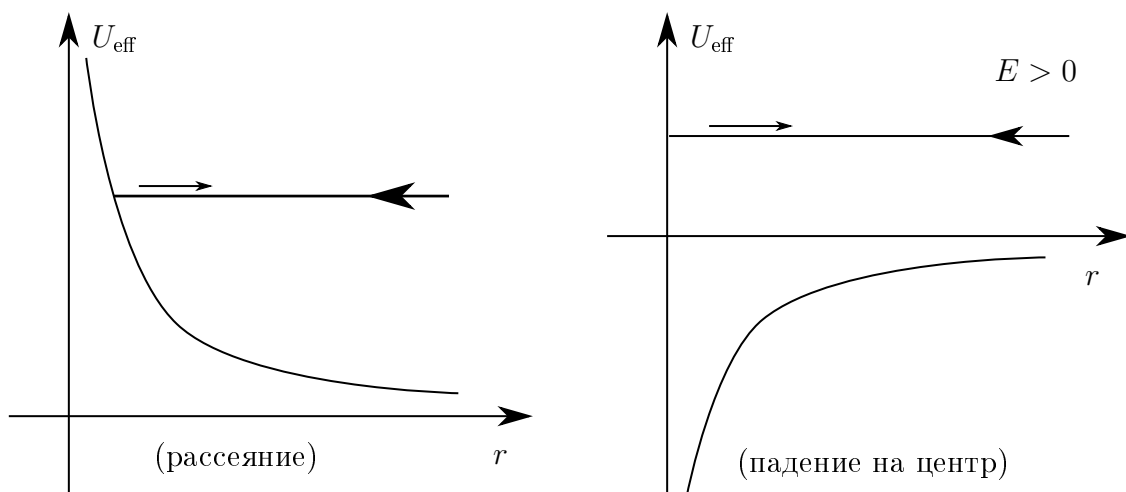


Рис. 99. Вид эффективного потенциала для потенциала  $U(r) = -\alpha/r^2$

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}; \quad p_\varphi = mv_\infty p \quad (677)$$

Падение на центр будет, если:

$$0 > \frac{p_\varphi^2}{2m} - \alpha = \frac{m^2 v_\infty^2 p^2}{2m} - \alpha \Rightarrow 0 > Ep^2 - \alpha \Rightarrow \alpha > Ep^2 \Leftrightarrow p^2 < \frac{\alpha}{E} \equiv p_0^2 \quad (678)$$

Сечение падения на силовой центр будет иметь вид

$$\sigma_{\text{пад.}} = \pi p_0^2 = \frac{\alpha\pi}{E} \quad (679)$$





ФИЗИЧЕСКИЙ  
ФАКУЛЬТЕТ  
МГУ ИМЕНИ  
М.В. ЛОМОНОСОВА



*teach-in*  
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ