

# Исследование линейных свойств двухполюсников и четырёхполюсников

Бояринцева Н.А.

Можаров А.Р.

22 ноября 2023

## Теоретическая часть

### Гармонические сигналы

*Гармоническим сигналом* — сигнал, изменяющийся с течением времени по закону косинуса или синуса (по *гармоническому закону*), но ввиду соотношения

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

нет особой разницы в выборе между косинусом и синусом, хотя в большинстве случаев используется косинус.

Пусть имеется гармонический сигнал:

$$A(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

С целью облегчения расчётов, такие сигналы представляются в комплексной форме так, чтобы исходный сигнал в точности равнялся действительной части комплексного сигнала. Если представить исходный сигнал в виде:

$$A(t) = A_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi) + i \cdot A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

то используя формулу Эйлера ( $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ ) получаем представление исходного сигнала в виде:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

Преобразуем сигнал, выделив в нём части, зависящие и независящие от времени, т.е.

$$A(t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t + \varphi)} = A_0 \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i(\omega t)} = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$$

где  $\hat{A} = A_0 \cdot e^{i\varphi}$  называют *комплексной амплитудой* сигнала. Таким образом, по определению, комплексная амплитуда *не зависит от времени*, т.е. *просто некоторое комплексное число*.

Стоит отметить, что *модуль*  $A_0$  *комплексной амплитуды*  $\hat{A} = A_0 \cdot e^{i\varphi}$  соответствует амплитуде исходного сигнала, а *аргумент комплексной амплитуды*  $\varphi$  соответствует сдвигу фазы исходного сигнала.

Отметим свойства комплексных амплитуд при некоторых преобразованиях над сигналами:

#### 1. Сложение сигналов:

Пусть имеется два гармонических сигнала одной и той же частоты  $A(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$  и  $B(t) = \hat{B} \cdot e^{i(\omega t)}$ . При сложении этих сигналов получаем сигнал:

$$C(t) = A(t) + B(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)} + \hat{B} \cdot e^{i(\omega t)} = (\hat{A} + \hat{B}) \cdot e^{i(\omega t)} = \hat{C} \cdot e^{i(\omega t)}$$

где  $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$  — комплексная амплитуда суммарного сигнала.

Т.е. суммой двух гармонических сигналов одной и той же частоты является гармонический сигнал той же частоты и комплексной амплитуды, равной сумме комплексных амплитуд исходных сигналов.

Заметим, что если суммируемые сигналы имеют разную частоту, то комплексная амплитуда суммарного сигнала будет зависеть от времени, что противоречит её определению.

## 2. Увеличение амплитуды сигнала:

Пусть имеется сигнал  $A(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$ . При умножении этого сигнала на некоторое действительное число  $k$  получится сигнал:

$$B(t) = k \cdot A(t) = k \cdot \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)} = \hat{B} \cdot e^{i(\omega t)}$$

где  $\hat{B} = k \cdot \hat{A}$  — комплексная амплитуда увеличенного сигнала.

Т.е. при увеличении гармонического сигнала в некоторое число раз, его комплексная амплитуда также увеличится в это же количество раз.

Само собой разумеется, что увеличенный сигнал будет гармоническим той же частоты.

## 3. Сдвиг сигнала по фазе:

Пусть имеется сигнал  $A(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$ . При умножении этого сигнала на некоторое комплексное число  $e^{i\psi}$  (по модулю равное единице) получится сигнал:

$$B(t) = e^{i\psi} \cdot A(t) = e^{i\psi} \cdot A_0 \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i(\omega t)} = A_0 \cdot e^{i(\psi+\varphi)} \cdot e^{i(\omega t)} = \hat{A}' \cdot e^{i(\omega t)}$$

где  $\hat{A}' = A_0 \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$  — комплексная амплитуда сдвинутого по фазе сигнала.

Т.е. при умножении сигнала на комплексное число, модуль которого равен единице, сдвиг сигнала по фазе будет численно равен аргументу комплексного числа.

## 2+3. Обобщение увеличения амплитуды сигнала и сдвига по фазе:

На что и указывает нумерация, этот пункт является обобщением пунктов 2 и 3 данного списка.

При умножении сигнала на комплексное число, сигнал будет увеличен по амплитуде в модуль этого комплексного числа раз и сдвинут по фазе на аргумент этого комплексного числа.

## 4. Дифференцирование сигнала по времени:

Пусть имеется гармонический сигнал  $A(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$ . Продифференцируем его по времени. Получится следующий сигнал:

$$B(t) = \frac{d(A(t))}{d(t)} = i\omega \cdot \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)} = \hat{B} \cdot e^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$$

где  $\hat{B} = \omega \cdot \hat{A}$  — комплексная амплитуда дифференцированного сигнала.

Т.е. при дифференцировании гармонического сигнала получается гармонический сигнал той же частоты, что и исходный, увеличенный в количество раз, численно равное его угловой частоте, и сдвинутый по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

## 4'. Интегрирование сигнала по времени:

При интегрировании сигнала  $A(t) = \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)}$  получится такой сигнал  $B(t)$ , что при дифференцировании сигнала  $B(t)$  получится сигнал  $A(t)$ .

Тогда если сигнал  $B(t)$  имеет вид:

$$B(t) = \hat{B} \cdot e^{i(\omega t)}$$

то сигнал  $A(t)$ , полученный путём дифференцирования сигнала  $B(t)$ , будет иметь вид:

$$A(t) = \omega \cdot \hat{B} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$

Из последнего равенства выразим сигнал  $B(t)$  через сигнал  $A(t)$ :

$$\begin{aligned} A(t) &= \hat{A} \cdot e^{i(\omega t)} = \omega \cdot \hat{B} \cdot e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \\ \frac{1}{\omega} \hat{A} \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})} &= \hat{B} \cdot e^{i(\omega t)} = B(t) \end{aligned}$$

Т.е. при интегрировании гармонического сигнала получается гармонический сигнал той же частоты, что и исходный, уменьшенный в количество раз, численно равное его угловой частоте, и сдвинутый по фазе на  $-\frac{\pi}{2}$ .

На практике, комплексная амплитуда применяется для упрощения расчётов электрических цепей, подключённых к гармоническим источникам.

## Двухполюсники и импеданс

Под *двухполюсником* понимается электрическая цепь, имеющая два наружных контакта, с помощью которых она подключается к другим цепям.

Под *линейными элементами* электрической цепи понимаются элементы, ведущие себя линейно, т.е. напряжение на которых является линейной функцией тока. Т.е.

$$U(t) = \alpha \cdot I(t) \Leftrightarrow I(t) = \beta \cdot U(t)$$

где  $\beta = \frac{1}{\alpha}$ .

Самыми распространёнными линейными элементами являются:

### 1. Резисторы

Согласно закону Ома в интегральной форме:

$$U(t) = R \cdot I(t)$$

При  $I_2(t) = k \cdot I_1(t)$  напряжение  $U_2(t)$  имеет вид:

$$U_2(t) = R \cdot I_2(t) = k \cdot R \cdot I_1(t) = k \cdot U_1(t)$$

### 2. Конденсаторы

Напряжение и ток на конденсаторе связаны соотношением:

$$I(t) = C \cdot \frac{d(U(t))}{d(t)}$$

При  $U_2(t) = k \cdot U_1(t)$  ток  $I_2(t)$  имеет вид:

$$I_2(t) = C \cdot \frac{d(U_2(t))}{d(t)} = C \cdot \frac{d(k \cdot U_1(t))}{d(t)} = k \cdot C \cdot \frac{d(U_1(t))}{d(t)} = k \cdot I_1(t)$$

### 3. Катушки индуктивности

Ток и напряжение на катушке индуктивности связаны соотношением:

$$U(t) = L \cdot \frac{d(I(t))}{d(t)}$$

При  $I_2(t) = k \cdot I_1(t)$  напряжение  $U_2(t)$  имеет вид:

$$U_2(t) = L \cdot \frac{d(I_2(t))}{d(t)} = L \cdot \frac{d(k \cdot I_1(t))}{d(t)} = k \cdot L \cdot \frac{d(I_1(t))}{d(t)} = k \cdot U_1(t)$$

При подключении линейных двухполюсников к гармонической э.д.с. в них возникают гармонические напряжения и токи той же частоты, что и частота подключаемой э.д.с.

$$U(t) = U_0 \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad I(t) = I_0 \cdot \cos(\omega t)$$

где  $\varphi$  — сдвиг фаз напряжения относительно тока.

Т.к. эти сигналы гармонические, то их можно представить с использованием комплексных амплитуд:

$$U(t) = \hat{U} \cdot e^{i(\omega t)} \quad I(t) = \hat{I} \cdot e^{i(\omega t)}$$

*Импедансом двухполюсника* называется отношение комплексной амплитуды напряжения гармонического сигнала к комплексной амплитуде тока, протекающего через двухполюсник.

$$Z = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi} = \hat{Z} \cdot e^{i\varphi}$$

где  $\hat{Z}$  — модуль импеданса, а  $\varphi$  — аргумент импеданса.

Согласно определению, импеданс имеет размерность сопротивления, не зависит от времени и определён только для линейных двухполюсников, подключённых к гармоническим источникам.

Импедансы базовых линейных элементов имеют вид:

#### 1. Импеданс резистора

Из закона Ома в интегральной форме при гармоническом сигнале:

$$U(t) = \hat{U} \cdot e^{i(\omega t)} = R \cdot I(t) = R \cdot \hat{I} \cdot e^{i(\omega t)}$$

Т.е.  $\hat{U} = R \cdot \hat{I}$ , а тогда импеданс резистора:

$$Z_R = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{R \cdot \hat{I}}{\hat{I}} = R$$

#### 2. Импеданс конденсатора

Ток и напряжение на конденсаторе при гармоническом сигнале связаны соотношением:

$$I(t) = \hat{I} \cdot e^{i(\omega t)} = C \cdot \frac{d(U(t))}{d(t)} = i\omega C \cdot \hat{U} \cdot e^{i(\omega t)}$$

Т.е.  $\hat{I} = i\omega C \cdot \hat{U}$ , а тогда:

$$Z_C = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{\hat{U}}{i\omega C \cdot \hat{U}} = \frac{1}{i\omega C} = -i \frac{1}{\omega C}$$

#### 3. Импеданс катушки индуктивности

Напряжение и ток на катушке индуктивности при гармоническом сигнале связаны соотношением:

$$U(t) = \hat{U} \cdot e^{i(\omega t)} = L \cdot \frac{d(I(t))}{d(t)} = i\omega L \cdot \hat{I} \cdot e^{i(\omega t)}$$

Т.е.  $\hat{U} = i\omega L \cdot \hat{I}$ , а тогда:

$$Z_L = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{i\omega L \cdot \hat{I}}{\hat{I}} = i\omega L$$

Рассмотрим свойства импеданса при последовательном и параллельном подключении линейных двухполюсников при гармоническом напряжении:

### 1. Последовательное

При последовательном подключении имеем соотношения для напряжений  $\hat{U}_{12} = \hat{U}_1 + \hat{U}_2$  и  $\hat{I}_{12} = \hat{I}_1 = \hat{I}_2$  для токов, соответственно. Тогда импеданс имеет вид:

$$Z_{12} = \frac{\hat{U}_{12}}{\hat{I}_{12}} = \frac{\hat{U}_1 + \hat{U}_2}{\hat{I}_{12}} = \frac{\hat{U}_1}{\hat{I}_1} + \frac{\hat{U}_2}{\hat{I}_2} = Z_1 + Z_2$$

### 2. Параллельное

При параллельном подключении имеем соотношения для напряжений  $\hat{U}_{12} = \hat{U}_1 = \hat{U}_2$  и  $\hat{I}_{12} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$  для токов, соответственно. Тогда импеданс имеет вид:

$$\frac{1}{Z_{12}} = \frac{\hat{I}_{12}}{\hat{U}_{12}} = \frac{\hat{I}_1 + \hat{I}_2}{\hat{U}_{12}} = \frac{\hat{I}_1}{\hat{U}_1} + \frac{\hat{I}_2}{\hat{U}_2} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Т.е. при последовательном и параллельном соединении импеданс эквивалентной схемы считается ровно также, как и сопротивление.

Прямое измерение импеданса требует измерения амплитуд гармонических напряжения и тока и измерения сдвига фазы между ними.

## Четырёхполюсники

Под *четырёхполюсником* понимается электрическая цепь, имеющая четыре наружных контакта, с помощью которых она подключается к другим цепям. Как правило, имеет смысл одну пару контактов называть входными, а другую выходными.

Важнейшей характеристикой четырёхполюсника является его *коэффициент передачи*, равный отношению комплексной амплитуды напряжения на выходе к комплексной амплитуде напряжения и входе:

$$K = \frac{\hat{U}_{\text{вых.}}}{\hat{U}_{\text{вх.}}} = \hat{K} \cdot e^{i\varphi}$$

Заметим, что для теоретического расчёта четырёхполюсников, входное напряжение на котором изменяется по гармоническому закону, можно использовать *законы Кирхгофа для переменных (гармонических) токов*:

#### 1. Первый закон Кирхгофа:

*Сумма токов, входящих в некоторый узел, равна сумме токов, выходящих из узла.*

Или просто:

*Сумма токов в узле равна нулю.*

$$\sum I_i = 0$$

где токи, входящие в узел и выходящие из узла, имеют разные знаки.

Это правило применяется для комплексных представлений гармонических токов.

#### 2. Второй закон Кирхгофа:

*Сумма ЭДС в некотором контуре равна сумме падений напряжения в этом контуре.*

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum U_i$$

Причём ЭДС берутся в их комплексном представлении, а падения напряжения будут представляться в виде произведений комплексного представления тока на элемент на импеданс этого элемента.

Т.е. второй закон Кирхгофа имеет вид:

$$\sum \mathcal{E}_i = \sum Z_i I_i$$

## Осциллограф

Пусть на входы  $x$  и  $y$  осциллографа подаются гармонические сигналы, причём сигнал, подаваемый на  $y$ , имеет ту же частоту, что и сигнал, подаваемый на  $x$ , но смещён по фазе. Т.е.:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega t) \quad y = y_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Слегка преобразуем эти два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{x}{x_0} &= \cos(\omega t) & \frac{y}{y_0} &= \cos(\omega t + \varphi) \\ \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 &= \cos^2(\omega t) & \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 &= \cos^2(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

Левое преобразовано, займёмся правым:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 &= \cos^2(\omega t + \varphi) = (\cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi))^2 = \\ &= \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi) + \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) = \\ &= \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi) + \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) - \\ &- \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) = \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\varphi) + \\ &+ \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) = 2 \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) - \\ &- 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot (\cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) - \cos(\omega t + \varphi)) + \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) = \\ &= 2 \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot \cos^2(\omega t) \cdot \cos^2(\varphi) + \\ &+ 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) = \\ &= 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) - \cos^2(\omega t) \cdot \sin^2(\varphi) \\ &\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \cdot \cos(\omega t) \cdot \cos(\omega t + \varphi) \cdot \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi) \\ &\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x_0} \cdot \frac{y}{y_0} \cdot \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 = \cos^2(\omega t) \quad \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x_0} \cdot \frac{y}{y_0} \cdot \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Сложим эти уравнения:

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{x_0} \cdot \frac{y}{y_0} \cdot \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

На экране осциллографа это уравнение будет иметь вид рис. 1.

Т.е. при  $\varphi$  равном 0 и  $\pi$  уравнение вырождается в прямые  $y = x$  и  $y = -x$ , соответствующие рис. 1.1 и рис. 1.4. При  $\varphi$  равном  $\frac{\pi}{2}$  уравнение вырождается в окружность, соответственно рис. 1.3. При  $\varphi$  в диапазоне от 0 до  $\frac{\pi}{2}$  уравнение будет иметь вид «эллипса», изображённого на рис. 1.2, а в диапазоне от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$  уравнение будет иметь вид, зеркальный данному «эллипсу» относительно оси  $Oy$ .

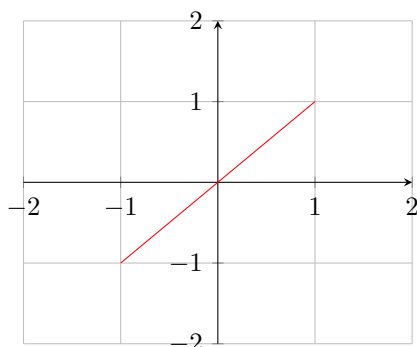


Рис. 1.1:  $\varphi = 0$

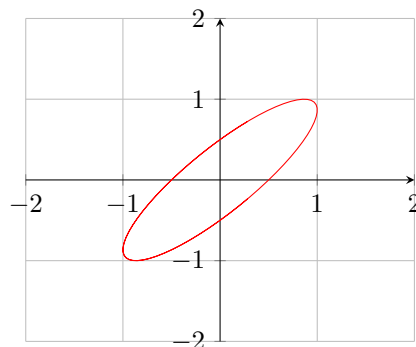


Рис. 1.2:  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$

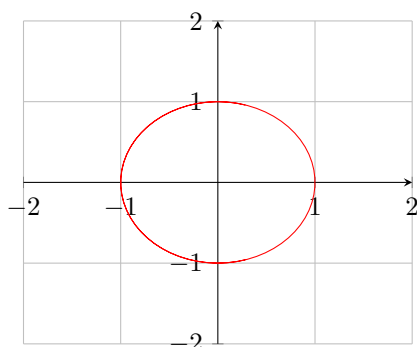


Рис. 1.3:  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

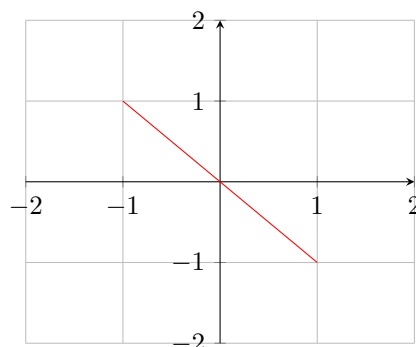


Рис. 1.4:  $\varphi = \pi$

Рис. 1: Уравнение на экране осциллографа

## Практическая часть

### Двухполосники

В данной работе используются двухполосники, схемы которых представлены на рис. 2.

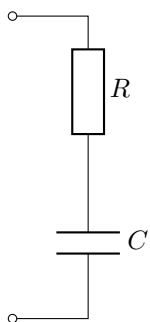


Рис. 2.1: Схема 1

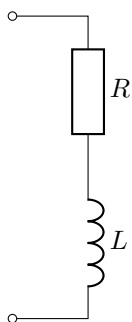


Рис. 2.2: Схема 2

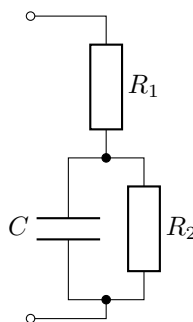


Рис. 2.3: Схема 3

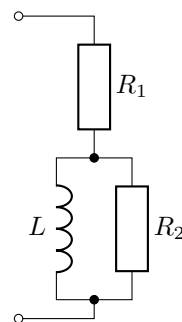


Рис. 2.4: Схема 4

Здесь  $R = R_1 = R_2 = 13 \text{ кОм}$ ,  $C = 0,05 \text{ мкФ}$ ,  $L = 0,28 \text{ Гн}$ .

Рис. 2: Двухполосники

#### 1. Схема 1 (рис. 2.1)

Импеданс данной схемы будет считаться как импеданс резистора и конденсатора при последовательном соединении:

$$Z = Z_R + Z_C = R - i \frac{1}{\omega C}$$

Его модуль:

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega^2 C^2}\right)^2}$$

И аргумент:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right)$$

Построим на одном графике теоретическую и практическую зависимости модуля  $\hat{Z}$  (рис. 3.1) и аргумента  $\varphi$  (рис. 3.2) импеданса от частоты  $\nu$  для схемы 1.

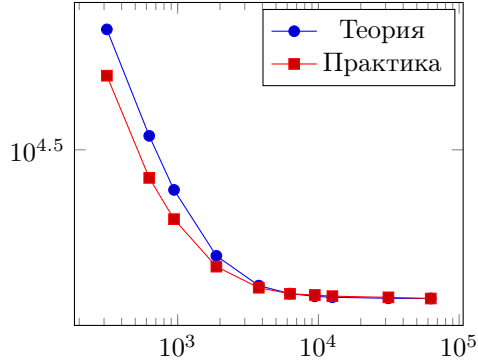


Рис. 3.1: График модуля для схемы 1

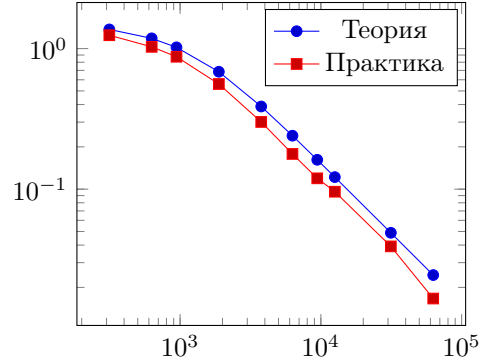


Рис. 3.2: График сдвига фазы для схемы 1

Рис. 3: Графики для схемы 1

## 2. Схема 2 (рис. 2.2)

Импеданс данной схемы будет считаться как импеданс резистора и катушки индуктивности при последовательном соединении:

$$Z = Z_R + Z_L = R + i\omega L$$

Его модуль:

$$\hat{Z} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

И аргумент:

$$\varphi = \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Построим на одном графике теоретическую и практическую зависимости модуля  $\hat{Z}$  (рис. 4.1) и аргумента  $\varphi$  (рис. 4.2) импеданса от частоты  $\nu$  для схемы 2.

## 3. Схема 3 (рис. 2.3)

Импеданс данной схемы будет считаться как импеданс последовательного соединения резистора с параллельным соединением другого резистора и конденсатора:

$$Z = Z_{R1} + \frac{Z_{R2}Z_C}{Z_{R2} + Z_C} = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2} - i \frac{\omega C R_2^2}{1 + (\omega R_2 C)^2}$$

Его модуль:

$$\hat{Z} = \sqrt{\left(R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega R_2 C)^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega C R_2^2}{1 + (\omega R_2 C)^2}\right)^2}$$



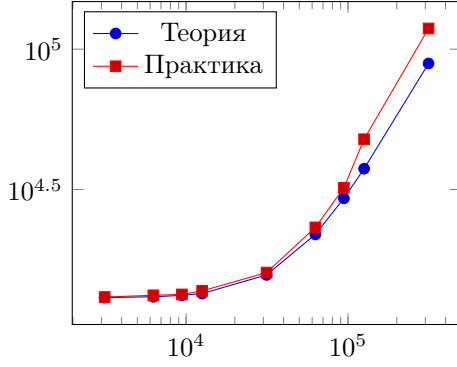


Рис. 4.1: График модуля для схемы 2

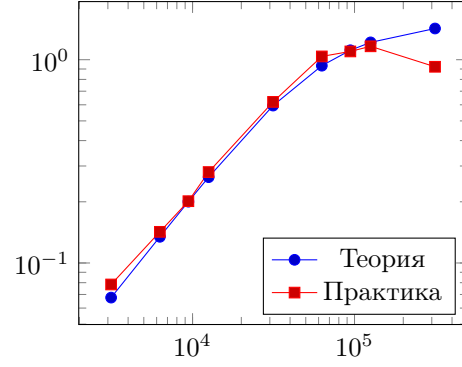


Рис. 4.2: График сдвига фазы для схемы 2

Рис. 4: Графики для схемы 2

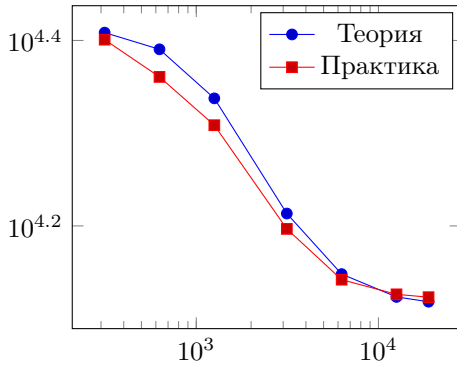


Рис. 5.1: График модуля для схемы 3

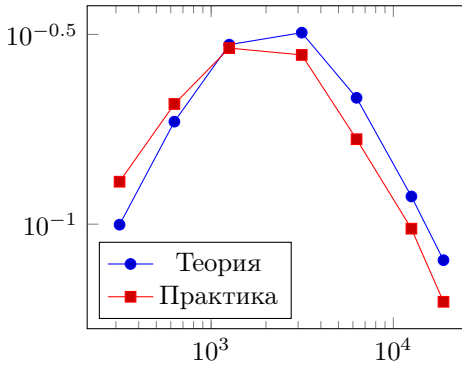


Рис. 5.2: График сдвига фазы для схемы 3

Рис. 5: Графики для схемы 3

И аргумент:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega C R_2^2}{R_1 + R_2 + R_1 \cdot (\omega R_2 C)^2} \right)$$

Построим на одном графике теоретическую и практическую зависимости модуля  $\hat{Z}$  (рис. 5.1) и аргумента  $\varphi$  (рис. 5.2) импеданса от частоты  $\nu$  для схемы 3.

#### 4. Схема 4 (рис. 2.4)

Импеданс данной схемы будет считаться как импеданс последовательного соединения резистора с параллельным соединением другого резистора и катушки индуктивности:

$$Z = Z_{R1} + \frac{Z_{R2} Z_L}{Z_{R2} + Z_L} = R_1 + \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} + i \frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + (\omega L)^2}$$

Его модуль:

$$\hat{Z} = \sqrt{\left( R_1 + \frac{R_2 \cdot (\omega L)^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \right)^2 + \left( \frac{\omega L R_2^2}{R_2^2 + (\omega L)^2} \right)^2}$$

И аргумент:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega L R_2^2}{R_1 R_2^2 + (R_1 + R_2)(\omega L)^2} \right)$$

Построим на одном графике теоретическую и практическую зависимости модуля  $\hat{Z}$  (рис. 6.1) и аргумента  $\varphi$  (рис. 6.2) импеданса от частоты  $\nu$  для схемы 4.

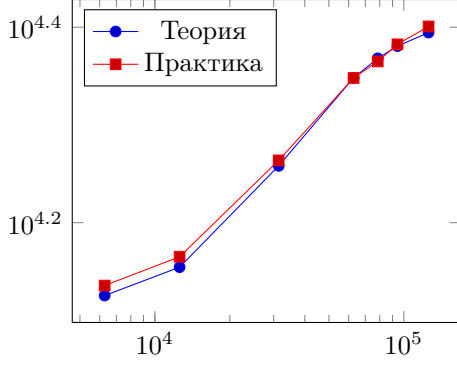


Рис. 6.1: График модуля для схемы 4

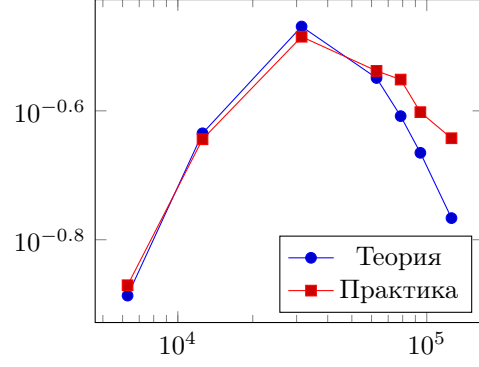


Рис. 6.2: График сдвига фазы для схемы 4

Рис. 6: Графики для схемы 4

## Четырёхполосники

Кроме того, в данной работе предлагается исследовать коэффициент проводимости напряжения  $K$  для четырёхполосников, представленных на рис. 7.

1. Для фазовращателя (рис. 7.1) построим теоретическую и экспериментальную зависимости сдвига фазы  $\varphi$  между входным  $U_{\text{вх.}}$  и выходным  $U_{\text{вых.}}$  сигналами от их частоты  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ) и сопротивления  $R$ .

$$\varphi(\omega) = 2 \arctan(\omega RC)$$

Получаем рис. 8.

2. Для экзотического четырёхполосника (рис. 7.2) снимем экспериментальную зависимость сдвига фазы  $\varphi$  от частоты  $\omega$  ( $\omega = 2\pi\nu$ ). Выражения для амплитудной и фазовой характеристик данного четырёхполосника:

$$\hat{K}(\omega) = \frac{\Omega^3}{\sqrt{(1 - 6\Omega^2)^2 + \Omega^2(5 - \Omega^2)^2}}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\Omega(5 - \Omega^2)}{1 - 6\Omega^2}\right)$$

Получим рис. 9.

3. Для четырёхполосника (рис. 7.3) рассчитаем коэффициент передачи:

Рассчитаем импеданс внутреннего двухполосника данного четырёхполосника:

$$Z_{RL} = Z_R + Z_L = R + i\omega L \quad Z_{RC} = Z_R + Z_C = R - i\frac{1}{\omega C}$$

$$Z = \frac{Z_{RC}Z_{RL}}{Z_{RC} + Z_{RL}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + iR\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{2R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = (*)$$

Выделим отдельно действительную и мнимую часть (домножив на сопряжённое к знаменателю):

$$(*) = R \frac{2\left(R^2 + \frac{L}{C}\right) + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{4R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} + i \frac{\left(R^2 - \frac{L}{C}\right)\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}{4R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = (\#)$$

По условию  $L = \chi R$  и  $C = \frac{\chi}{R}$ , тогда:

$$\begin{aligned} \frac{L}{C} = R^2 \quad 2 \left( R^2 + \frac{L}{C} \right) = 4R^2 \quad R^2 - \frac{L}{C} = 0 \\ (\#) = R \cdot 1 + i \cdot 0 = R \end{aligned}$$

Тогда коэффициент передачи всего четырёхполюсника:

$$K = \frac{Z}{Z + R} = \frac{R}{R + R} = \frac{1}{2}$$

4. Для двойного Т-моста (рис. 7.4) рассчитаем коэффициент передачи и построим теоретическую зависимость.

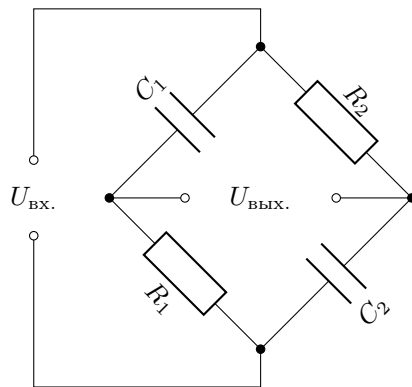
$$K = \frac{1}{1 + i \frac{8\Omega}{1 - 4\Omega^2}} = \frac{1}{16\Omega^4 + 56\Omega^2 + 1} + i \frac{32\Omega^3 - 8\Omega}{16\Omega^4 + 56\Omega^2 + 1}$$

где  $\Omega = \omega CR$ .

Тогда модуль коэффициента передачи  $\hat{K}$  будет иметь вид:

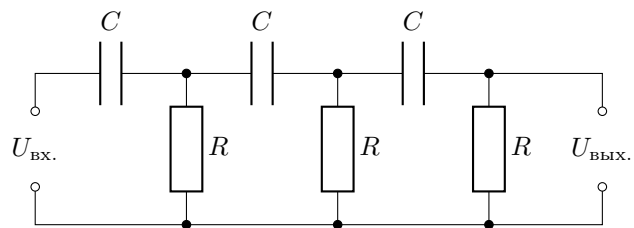
$$\hat{K} = \sqrt{\frac{1 + (32\Omega^3 - 8\Omega)^2}{(16\Omega^4 + 56\Omega^2 + 1)^2}}$$

А теоретическая зависимость  $\hat{K}(\Omega)$  будет иметь вид рис. 10.



Здесь  $R = R_1 = R_2 = 130 \text{ кОм}$ ,  
 $C = 0,015 \text{ мкФ}$ .

Рис. 7.1: Фазовращатель



Здесь  $R = R_1 = R_2 = 13 \text{ кОм}$ ,  $C = 0,05 \text{ мкФ}$ .

Рис. 7.2: Экзотический четырёхполюсник

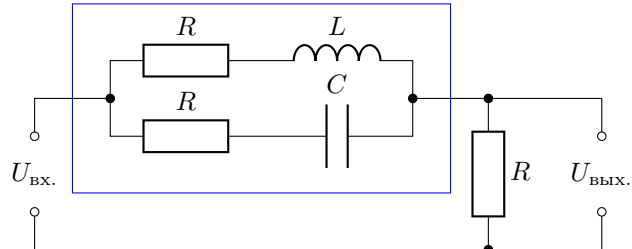


Рис. 7.3: Четырёхполюсник

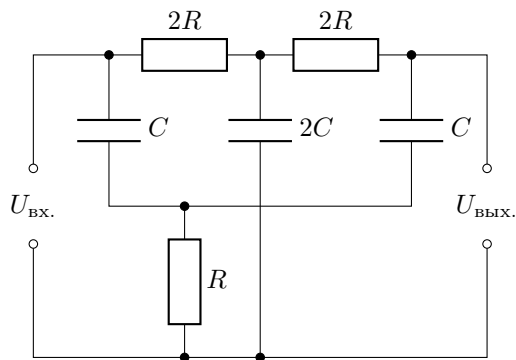


Рис. 7.4: Двойной Т-мост

Рис. 7: Четырёхполюсники

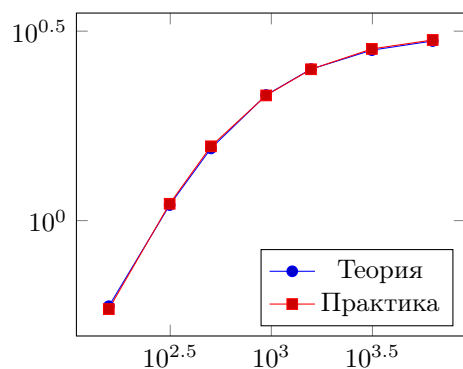


Рис. 8.1: График сдвига фазы для фазовращателя от частоты

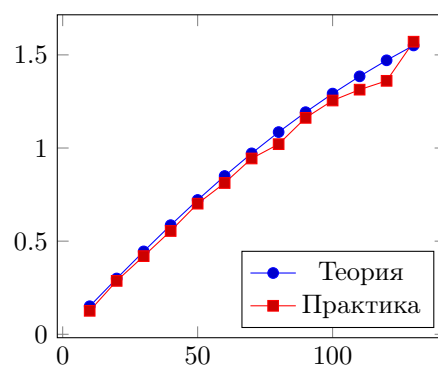


Рис. 8.2: График сдвига фазы для фазовращателя от сопротивления

Рис. 8: Графики для фазовращателя

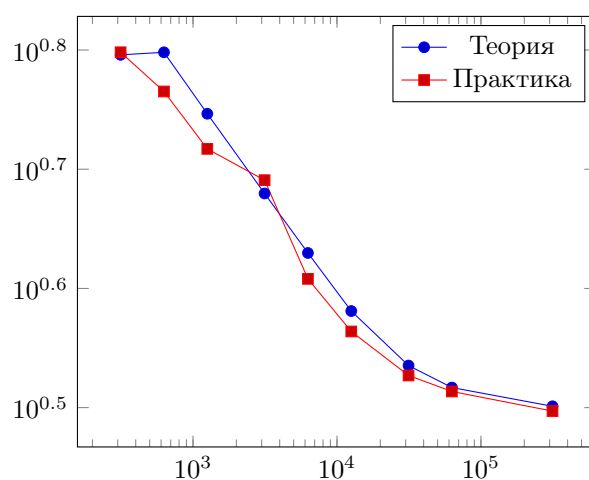


Рис. 9: График сдвига фазы для экзотического четырёхполюсника от частоты

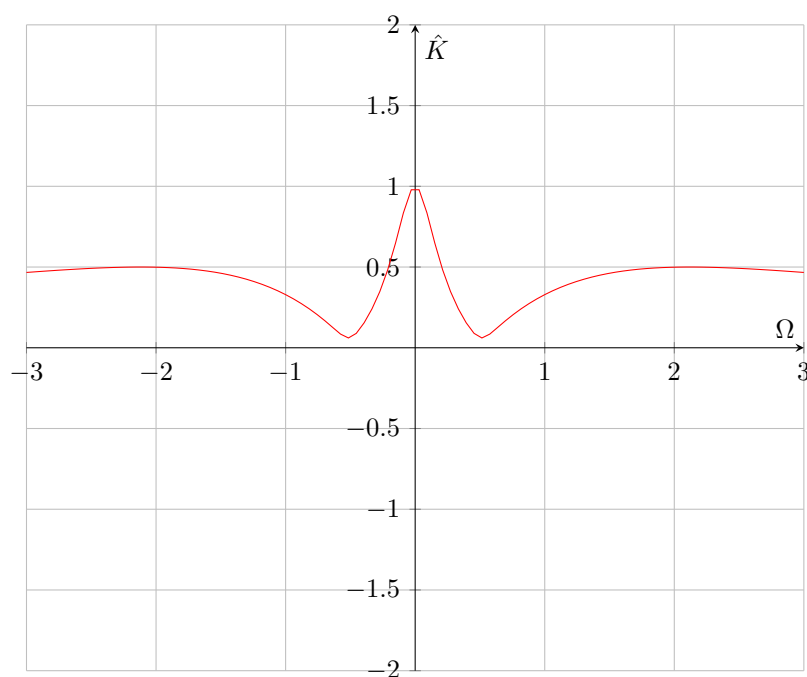


Рис. 10: Модуль коэффициента передачи двойного Т-моста