Дифференцирование и интегрирование сигналов

Бояринцева Н.А. Можаров А.Р.

26 ноября 2023

Теоретическая часть

Четырёхполюсники

Под *четырёхполюсником* понимается электрическая цепь, имеющая четыре наружных контакта, с помощью которых она подключается к другим цепям. Как правило, имеет смысл одну пару контактов называть входными, а другую выходными.

Если на вход четырёхполюсника подаётся сигнал $U_{\text{вх.}}(t)$, то с выхода дифференцирующего четырёхполюсника ожидается сигнал:

$$U_{\text{вых.}}(t) = \tau_0 \cdot \frac{dU_{\text{вх.}}(t)}{dt}$$

а с интегрирующего сигнал:

$$U_{\text{вых.}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int\limits_{-\infty}^{t} U_{\text{вх.}}(\tau) d\tau$$

где τ_0 — константа, имеющая размерность времени, называемая *постоянной времени.*

Запишем второй закон Кирхгофа для четырёхполюсников рис. **??**. Импеданс внешней цепи считаем стремящимся к бесконечности, поэтому второй

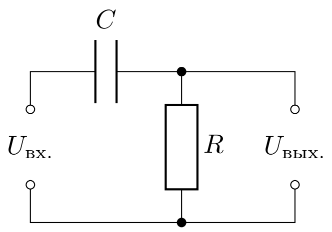

Рис. 1.1: Дифференцирующий четырёхполюсник

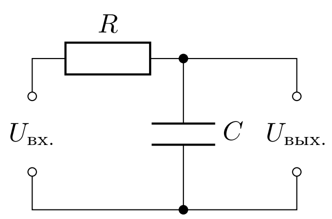

Рис. 1.2: Интегрирующий четырёхполюсник

Рис. 1: Линейные четырёхполюсники

закон Кирхгофа для данных четырёхполюсников совпадёт и примет вид:

$$RI(t) + \frac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} I(\tau)d\tau = U_{\text{вх.}}(t)$$

Домножив на ёмкость конденсатора C и обозначив произведение RC за постоянную времени τ_0, получим выражение:

$$\tau_0 I(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} I(\tau)d\tau = CU_{\text{вх.}}(t)$$

При малом τ_0 можно пренебречь первым слагаемым, тогда продифференцировав по времени и домножив на R, получим:

$$U_{\text{вых.}}(t) = \tau_0 \cdot \frac{dU_{\text{вх.}}}{dt}$$

При большом τ_0 можно пренебречь уже вторым слагаемым, тогда проинтегрировав по времени и поделив на ёмкость конденсатора получим:

$$U_{\text{вых.}}(t) = \frac{1}{\tau_0}\int\limits_{-\infty}^{t} U_{\text{вх.}}(\tau)d\tau$$

Т.е. при малой постоянной времени четырёхполюсник на рис. **??** будет осуществлять приближённое дифференцирование входного сигнала, а при большой постоянной времени четырёхполюсник рис. **??** будет осуществлять приближённое интегрирование входного сигнала.

Важнейшей характеристикой четырехполюсника является его *коэффициент передачи*, равный отношению комплексной амплитуды напряжения на выходе к комплексной амплитуде напряжения и входе:

$$K = \frac{\hat{U}_{\text{вых.}}}{\hat{U}_{\text{вх.}}} = \hat{K} \cdot e^{i\varphi}$$

Рассчитаем коэффициенты передачи дифференцирующего (рис. **??**) и интегрирующего (рис. **??**) четырёхполюсников:

$$K_d = \frac{R}{R + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{i\tau_0\omega}{1 + i\tau_0\omega} \quad K_I = \frac{\dfrac{1}{i\omega C}}{R + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\tau_0\omega} \cdot \frac{1}{1 + \dfrac{1}{i\tau_0\omega}}$$

Коэффициенты передачи же четырёхполюсников, выполняющих «идеальное» дифференцирование и интегрирование имеют вид:

$$K_d = \tau_0\omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad K_I = \frac{1}{\tau_0\omega}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Следовательно для преобразования сигналов, близкого к «идеальному», требуется выполнения условий: для дифференцирования $\tau_0\omega << 1$ и для интегрирования $\tau_0\omega >> 1$, причём эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра.

Ряд Фурье

Множество K называется *линейным пространством* (над некоторым полем F), если на нём введена бинарная операция, называемая *сложением*, обозначаемая $+$ и обладающая следующими свойствами (далее $x, y, z, \theta \in K$, $\alpha, 1 \in F$):

1. Замкнутость ($(x + y) \in K$)
2. Коммутативность ($x + y = y + x$)
3. Ассоциативность ($x + (y + z) = (x + y) + z$)
4. С нейтральным элементом ($\theta + x = x + \theta = x$)
5. С обратным элементом ($(-x) + x = x + (-x) = \theta$)

и операция, называемая *умножением на скаляр*, обладающая свойствами:

1. $1 \cdot x = x$
2. $\alpha x \in K$
3. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
4. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
5. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

Заметим, что множество непрерывных на некотором отрезке $[a, b]$ функций является линейным пространством.

Отображение, ставящее в соответствие двум элементам x, y линейного пространства число из поля, над которым построено это линейное пространство, называется *скалярным произведением* и обозначается (x, y), если оно обладает следующими:

1. $(x, y) = \overline{(y, x)}$
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
4. $(x, x) > 0, x \neq \theta$

Заметим, что на пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций можно ввести скалярное произведение:

$$(x, y) = \int\limits_a^b x(t)\overline{y(t)}dt$$

где $\overline{f(x)}$ означает комплексное сопряжение. Заметим, что комплексное сопряжение не изменяет значение действительного числа.

Если выполняется условие:

$$(x, y) = \begin{cases} \alpha, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

то семейство векторов называется *ортогональным*; если $(x, x) = 1, x \neq \theta$, то *нормированным*; а если выполняются оба условия, то *ортонормированным*.

Заметим, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} sin(mx)sin(nx)dx = \int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(mx)cos(nx)dx = \begin{cases} \pi, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} cos(mx)sin(nx)dx = 0$$

т.е. семейство функций 1, $sin(mx)$, $cos(nx)$ является ортогональным на симметричном отрезке.

Говорят, что непрерывная на некотором отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ разложена в *ряд Фурье* по ортогональному семейству непрерывных на том же отрезке $[a, b]$ функций $\{\varphi_n(x)\}$, если существует такая последовательность коэффициентов $\{a_n\}$, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ сходится к функции $f(x)$ на всём отрезке $[a, b]$.

Если ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно на всём отрезке $[a, b]$, то для коэффициентов этого ряда справедливы следующие выражения:

$$a_n = \frac{(f(x), \varphi_n(x))}{(\varphi_n(x), \varphi_n(x))} = \frac{\int\limits_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int\limits_a^b \varphi_n^2(x)dx}$$

Тригонометрическим рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называют функциональный ряд вида:

$$f(x) = c + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nx) + b_n sin(nx))$$

Ввиду ортогональности семейства функций, для коэффициентов ряда можно получить удобные формулы:

$$c = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx$$

Заметим, что ряд Фурье 2πпериодической функции можно почленно дифференцировать (при условии, что функция непрерывная и кусочно гладкая) и интегрировать (при условии, что функция кусочно непрерывная).

Используя *формулу Эйлера* ($e^{i\varphi} = cos(\varphi) + isin(\varphi)$) получим *формулы Эйлера*:

$$cos(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \quad sin(\varphi) = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

из которых заменами ($c = \frac{a_0}{2}$):

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx$$

получим *комплексную форму* тригонометрического ряда Фурье:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

Практическая часть

1. Для дифференцирующего четырёхполюсника с постоянной времени $\tau_0 = 10$ мкс снята зависимость модуля и аргумента коэффициента передачи от частоты.

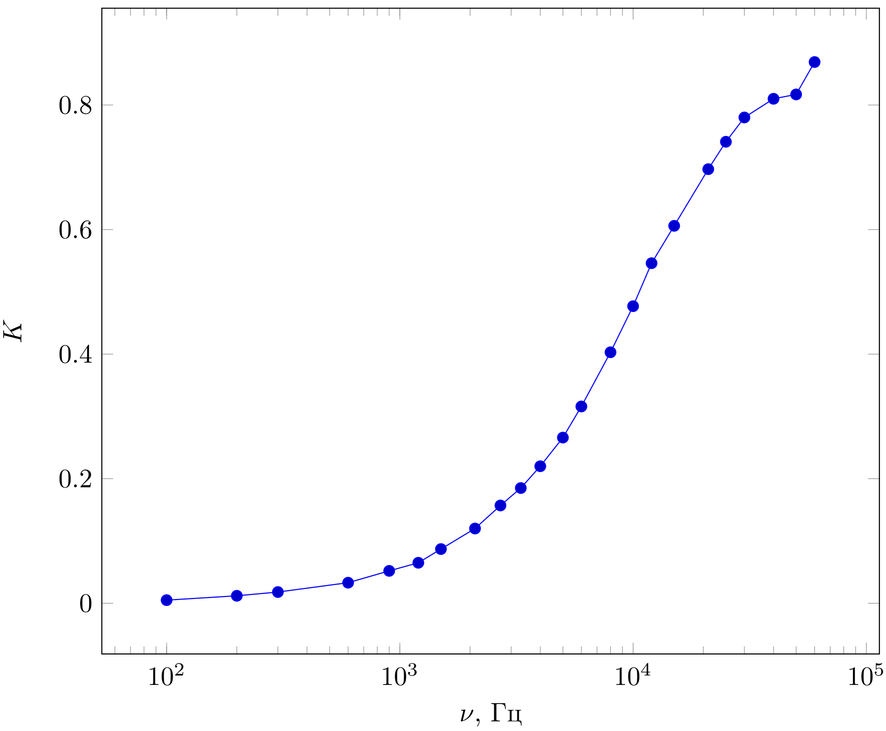

Рис. 2: Зависимость модуля коэффициента передачи от частоты для дифференцирующего четырёхполюсника

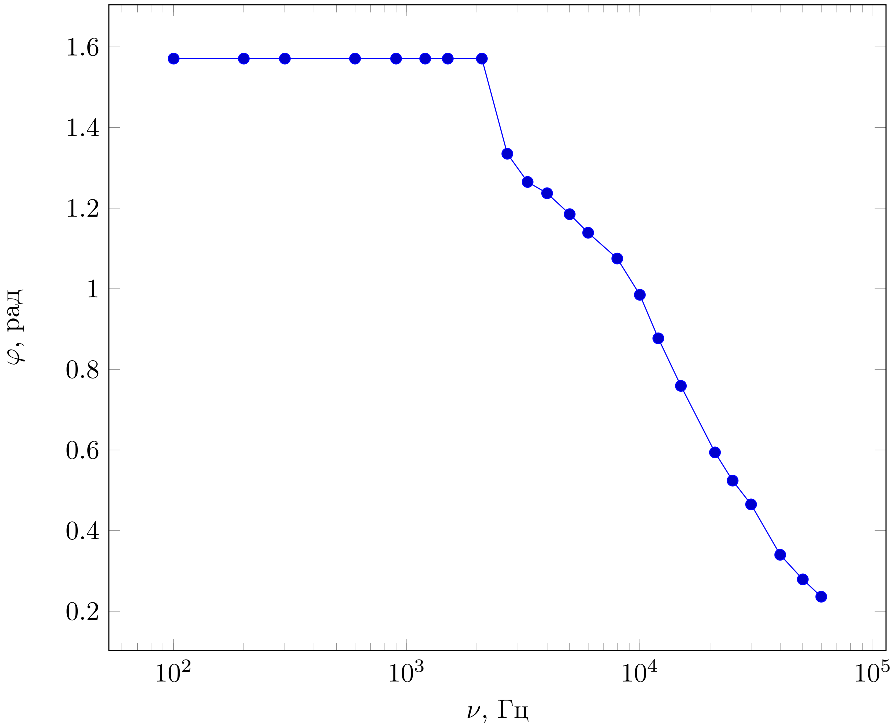

Рис. 3: Зависимость аргумента коэффициента передачи от частоты для дифференцирующего четырёхполюсника

2. Для интегрирующего четырёхполюсника с постоянной частоты $\tau_0 = 5$ мс снята зависимость модуля и аргумента коэффициента передачи от частоты.

3. Разложение усечённого синуса в ряд Фурье

$$f(t) = \begin{cases} -sin(\omega t) & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ 0 & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Получим:

$$f(t) = \frac{1}{2}cos(\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1} cos(2k\omega t)$$

Удовлетворительное дифференцирование и интегрирование урезанной синусоиды показано на рис. **??** и рис. **??**, соответственно.

4. Дифференцирование (рис. **??**) и интегрирование (рис. **??**) меандра, соответственно.

Разложение меандра в ряд Фурье:

$$\frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(\pi k t)}{k}$$

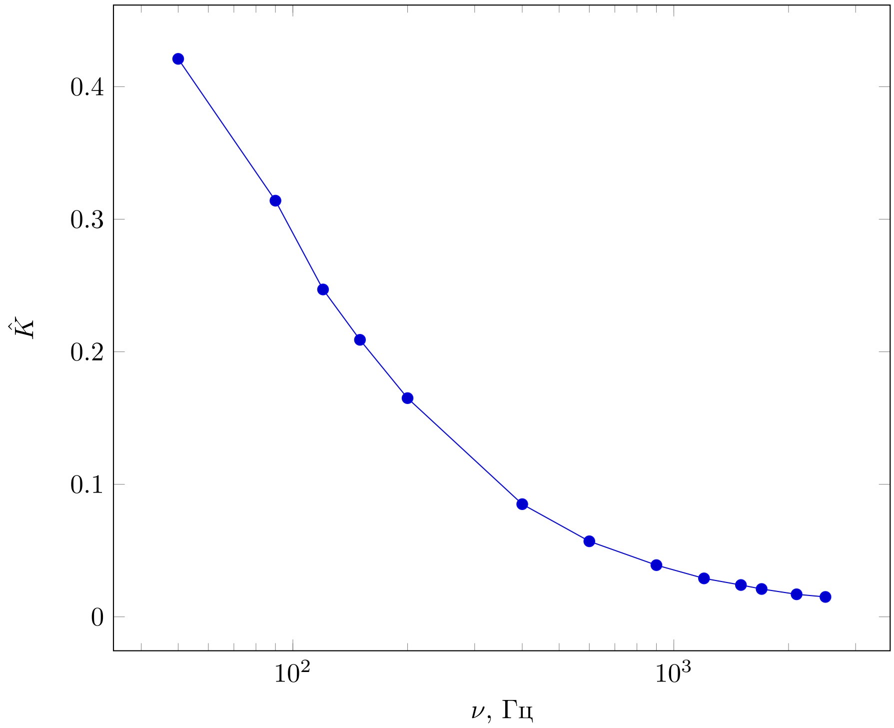

Рис. 4: Зависимость модуля коэффициента передачи от частоты для интегрирующего четырёхполюсника

5. Дифференцирование (рис. **??**) и интегрирование (рис. **??**) треугольника, соответственно.

   Разложение треугольника в ряд Фурье:

$$\frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{\dfrac{k-1}{2}}\frac{sin(\pi k t)}{k^2}$$

6. Дифференцирование (рис. **??**) и интегрирование (рис. **??**) пилы, соответственно.

   Разложение пилы в ряд Фурье:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}sin(\pi k t)$$

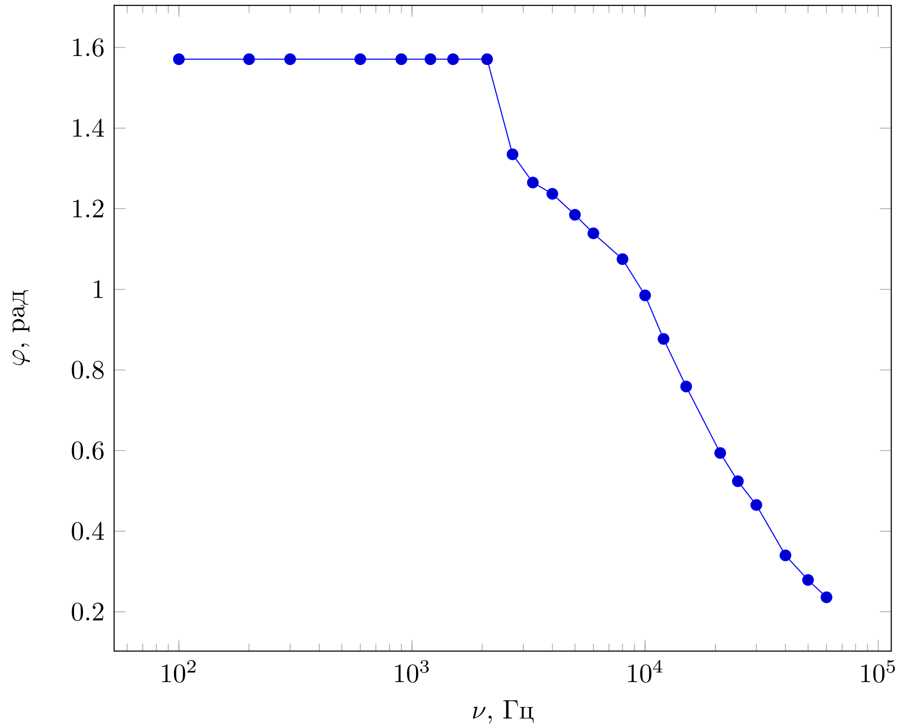

Рис. 5: Зависимость аргумента коэффициента передачи от частоты для интегрирующего четырёхполюсника

5.png

Рис. 6: Дифференцирование при $\tau_0 = 10$ мкс и $\nu = 500$ Гц

6.png

Рис. 7: Интегрирование при $\tau_0 = 5$ мс и $\nu = 5000$ Гц

7.png

Рис. 8: Дифференцирование меандра при $\tau_0 = 10$ мкс и $\nu = 50$ Гц

8.png

Рис. 9: Интегрирование меандра при $\tau_0 = 5$ мс и $\nu = 500$ Гц

9.png

Рис. 10: Дифференцирование треугольника при $\tau_0 = 10$ мкс и $\nu = 500$ Гц

10.png

Рис. 11: Интегрирование треугольника при $\tau_0 = 5$ мс и $\nu = 500$ Гц

11.png

Рис. 12: Дифференцирование пилы при $\tau_0 = 10$ мкс и $\nu = 500$ Гц

12.png

Рис. 13: Интегрирование пилы при $\tau_0 = 5$ мс и $\nu = 500$ Гц