

# Исследование колебательных процессов в колебательном контуре

Гордеев К.М.

Можаров А.Р.

26 февраля 2024

## Теоретическая часть

### Базовые понятия

*Колебательным контуром* (последовательным) называется электрическая цепь, состоящая из резистора, конденсатора, индуктивности и источника, в общем случае, некоторого переменного, не обязательно гармонического, напряжения (рис. 1).

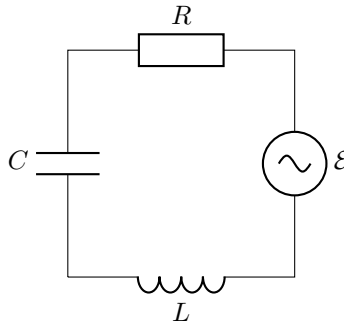


Рис. 1: Колебательный контур

Запишем *второй закон Кирхгофа* для данной цепи

$$U_L + U_R + U_C = \mathcal{E}(t)$$

Выразим каждое из напряжений через заряд

$$U_L = L \frac{dI}{dt} = L\ddot{q} \quad U_R = RI = R\dot{q} \quad U_C = \frac{q}{C}$$

При подстановке получим *уравнение колебательного контура*

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}(t)$$

Поделив на  $L$  и сделав классические замены получим *уравнение гармонического осциллятора*

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t)$$

Где  $\delta = \frac{R}{2L}$  называется *декрементом затухания*,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  *собственной частотой* колебательного контура,  $f(t)$  *вынуждающей силой*.

Если  $\delta \neq 0$ , то колебания называются *затухающими* (при  $\delta = 0$ , соответственно, *незатухающими*), а при  $f(t) \neq 0$  колебания называют *вынужденными* (в противном случае, соответственно, называют *свободными*).

Уравнение гармонического осциллятора (в общем случае) — это *неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка*, решением которого является сумма общего решения однородного дифференциального уравнения (при  $f(t) \equiv 0$ , т.е. когда в осцилляторе происходят *свободные колебания*) и любого частного решения исходного неоднородного дифференциального уравнения.

$$x_{\text{о.н.}} = x_{\text{о.о.}} + x_{\text{ч.н.}}$$

(сокращения имеют смысл: о.н. — общее неоднородное, о.о. — общее однородное, ч.н. — частное неоднородное)

*Циклическая частота* колебаний  $\omega$  — это величина, равная числу полных колебаний в системе, совершаемых за  $2\pi$  секунд. Более глубокий физический смысл эта величина имеет при рассмотрении вращательного движения, при котором она будет в точности равна угловой скорости вращения  $\dot{\varphi}$ .

*Частота* колебаний  $\nu$  — это количество колебаний за секунду. Из определения можно установить нехитрую связь с циклической частотой

$$\omega = 2\pi\nu$$

*Периодом*  $T$  колебаний называется время, за которое система совершает одно полное колебание. Таким образом величина, обратная периоду, есть количество колебаний за секунду, т.е. частота.

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}$$

## Свободные затухающие колебания

Найдём решение в случае свободных затухающих колебаний ( $\delta \neq 0$ ,  $f(t) \equiv 0$ ). Будем искать его в виде  $e^{\lambda t}$ . Тогда

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\delta \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + 2\delta \cdot \lambda + \omega_0^2 &= 0 \\ \lambda &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \\ q_{\text{о.о.}}(t) &= c_1 \cdot e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 \cdot e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}\end{aligned}$$

Далее в зависимости от  $\delta^2$  и  $\omega_0^2$  возможны три случая:

1. Случай  $\delta^2 - \omega_0^2 \geq 0$ . В этом случае в показателях экспонент будет находиться действительное число, что означает, что процесс не будет периодическим.
2. Случай  $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ . В этом случае под корнем будет стоять отрицательное число, т.е. показатель экспоненты станет комплексным.

Первый случай не представляет особого интереса, поэтому рассмотрим подробнее второй случай. Заменим  $\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  на  $\omega$ . В этом случае решение примет вид

$$q(t) = c_1 \cdot e^{(-\delta + i\omega)t} + c_2 \cdot e^{(-\delta - i\omega)t}$$

Используя формулу Эйлера ( $e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$ ) и сделав более приятный коэффициент перед синусом (так можно делать т.к. требуется лишь линейная независимость решений) получим более привычный вид

$$q(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t) + B e^{-\delta t} \sin(\omega t)$$

Приведём к другой форме записи. Вынесем за скобку  $e^{-\delta t} \sqrt{A^2 + B^2}$ .

$$q(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\delta t} \left( \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(\omega t) + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin(\omega t) \right)$$

Заметим, что (т.к.  $A, B \in \mathbb{R}$ ) можно представить

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos(\varphi) \quad - \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin(\varphi) \quad \varphi = -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$$

(будет выполняться *основное тригонометрическое тождество*), тогда мы получим формулу косинуса суммы

$$q(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\delta t} (\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

И т.к.  $A, B \in \mathbb{R}$ , то можно обозначить  $\sqrt{A^2 + B^2} = C \in \mathbb{R}$  — амплитуда колебаний, тогда получим

$$q(t) = C e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

Т.е. мы получили уравнение гармонических колебаний с экспоненциально убывающей со временем амплитудой.

*Логарифмическим декрементом* колебаний называется отношение амплитуд (предшествующей к данной).

$$d = \ln\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right)$$

Таким образом логарифмический декремент есть величина, обратная количеству  $N$  колебаний, за которое амплитуда уменьшится в  $e$  раз.

В случае свободных колебаний без затухания, амплитуда колебаний сохраняется, поэтому для колебаний в идеальном колебательном контуре (без потерь, т.е.  $R = 0$  или, по другому,  $\delta = 0$ )  $d = 0$ . Таким образом, чем ближе  $d$  к нулю, тем лучше колебательный контур.

В случае затухающих колебаний отношение амплитуд колебаний будет выглядеть следующим образом

$$d = \ln\left(\frac{C e^{-\delta t}}{C e^{-\delta(t+T)}}\right) = \ln\left(\frac{1}{e^{-\delta T}}\right) = \ln(e^{\delta T}) = \delta T$$

Заметим, что формула остаётся верной и для незатухающих колебаний (просто  $\delta = 0$ , откуда  $d = \ln(1) = 0$ , что согласуется с формулой).

*Добротностью* колебаний называется величина, в  $\pi$  раз большая количества колебаний, за которое амплитуда последних уменьшается в  $e$  раз.

$$Q = \pi N = \frac{\pi}{d}$$

Добротность имеет физическим смыслом отношение энергии, запасенной в колебательной системе, к энергии, теряемой системой за один период колебания.

Запишем выражения для введенных величин в приложении к используемому контуру

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = \frac{1}{2LC} \sqrt{4LC - R^2C^2} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{4LC}{\sqrt{4LC - R^2C^2}} \\ d = \delta T &= \frac{2RC}{\sqrt{4LC - R^2C^2}} \quad Q = \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{4RC} \sqrt{4LC - R^2C^2} \end{aligned}$$

При  $\delta \ll \omega_0$  эти формулы перейдут в

$$\begin{aligned} \omega &\approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} & T &\approx 2\pi\sqrt{LC} \\ d &\approx \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} & Q &\approx \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

## Вынужденные колебания

Рассмотрим случай, когда колебания в контуре происходят под действием гармонической силы. В более общем случае если сила изменяется не по гармоническому закону, то разложением её в тригонометрический ряд Фурье сводим задачу к случаю гармонической силы. Тогда сумма частных решений дифференциального уравнения для каждой гармоники даст частное решение для исходной негармонической силы.

Пусть  $f(t) = f_0 \cdot \cos(\omega t)$ , где  $f_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{L}$ , тогда решение дифференциального уравнения

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cdot \cos(\omega t)$$

соответствующее установившемуся режиму колебаний, будет иметь вид

$$q_{\text{ч.н.}}(t) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} \cdot \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)\right)$$

Т.е. при установлении колебаний система будет колебаться с частотой вынуждающей силы, но со сдвигом по фазе — с некоторым откликом.

До установления колебаний в системе будет действовать суперпозиция колебаний, но собственные колебания системы, как уже было сказано, экспоненциально затухают, поэтому со временем они станут практически не заметны.

Продифференцировав зависимость заряда по времени получим ток

$$I(t) = \frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2}}$$

Заметим, что в знаменателе стоит модуль импеданса колебательного контура, т.е. это выражение можно было получить и из законов *Кирхгофа* для переменных токов.

Зная ток, можно получить амплитуды напряжений на элементах контура: на индуктивности, на конденсаторе и на резисторе они будут равны, соответственно

$$\begin{aligned} U_L &= \frac{\omega L \mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ U_C &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega C \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ U_R &= \frac{R \mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{aligned}$$

## Практическая часть

### 1. Исследование собственных колебаний

Построены графики практических зависимостей  $d$  (рис. 2),  $Q$  (рис. 3),  $\delta$  (рис. 4) и  $T$  (рис. 5) от  $R$  и посчитаны ( $T = 480$  мкс,  $C = 32.3$  нФ) индуктивность  $L = 0.181 \pm 0.047$  Гн и критическое сопротивление контура  $R_{\text{кр.}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 4730$  Ом.

Теоретические зависимости  $d$ ,  $Q$ ,  $\delta$  и  $T$  от  $R$  имеют вид

$$d(R) = k_d \cdot R \quad Q(R) = \frac{k_Q}{R} \quad \delta(R) = k_\delta \cdot R \quad T(R) = k_T$$

где  $k_d = \pi\sqrt{\frac{C}{L}}$ ,  $k_Q = \sqrt{\frac{L}{C}}$ ,  $k_\delta = \frac{1}{2L}$ ,  $k_T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

## 2. Исследование вынужденных колебаний

На рис. 6 и рис. 7 показаны практические зависимости напряжений на различных элементах контура при сопротивлениях, соответственно,  $R = 50$  Ом и  $R = 500$  Ом.

На самом деле, ввиду неидеальности контура у последнего имеется внутреннее сопротивление  $r \approx 80$  Ом, поэтому в формулах для  $U_C$ ,  $U_L$  и  $U_R$  в модуле импеданса системы должно браться полное сопротивление системы  $R + r$ , но эта поправка не вносит изменений в импеданс резистора и он берётся просто  $R$ .

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\omega f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + (R + r)^2}} \\ U_L &= \frac{\omega L \mathcal{E}_0}{\sqrt{(R + r)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \\ U_C &= \frac{\mathcal{E}_0}{\omega C \sqrt{(R + r)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} \\ U_R &= \frac{R \mathcal{E}_0}{\sqrt{(R + r)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \end{aligned}$$

## 3. Исследование процессов установления вынужденных колебаний

На рис. 10 показана практическая зависимость времени установления колебаний в контуре от сопротивления резистора.

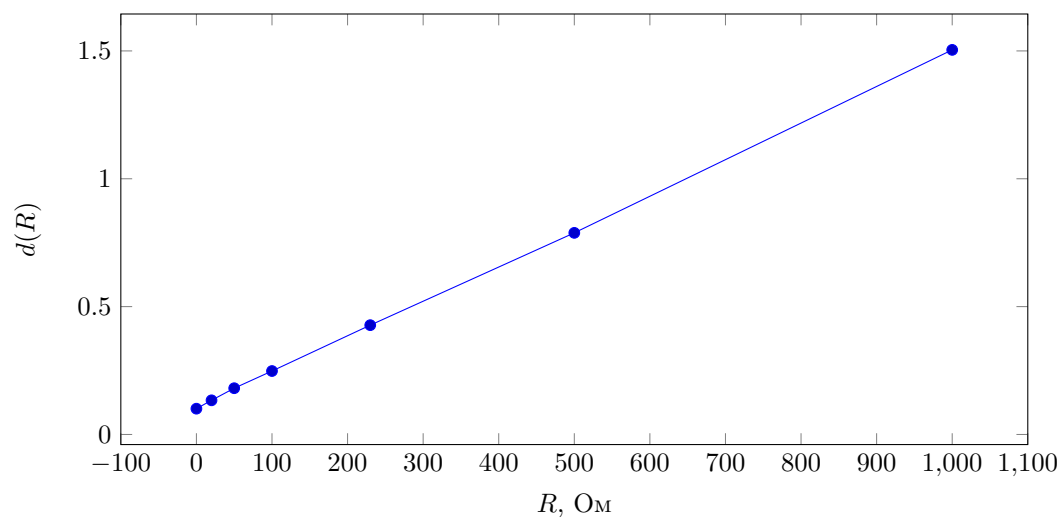


Рис. 2:  $d(R)$

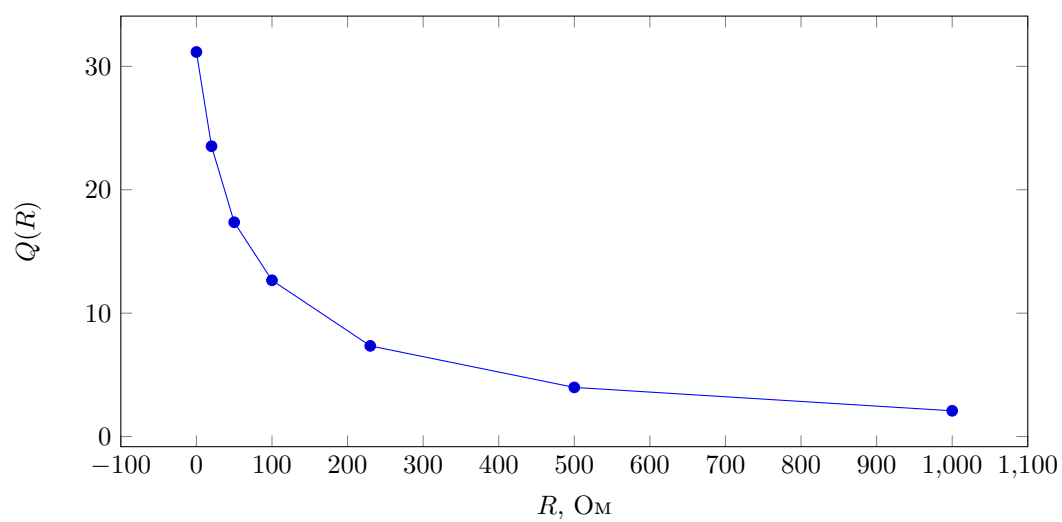


Рис. 3:  $Q(R)$

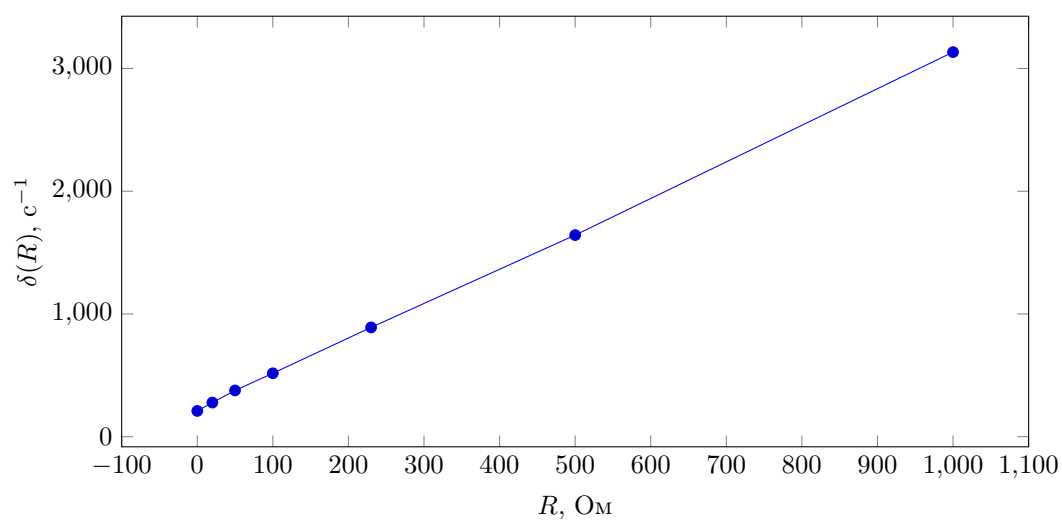


Рис. 4:  $\delta(R)$

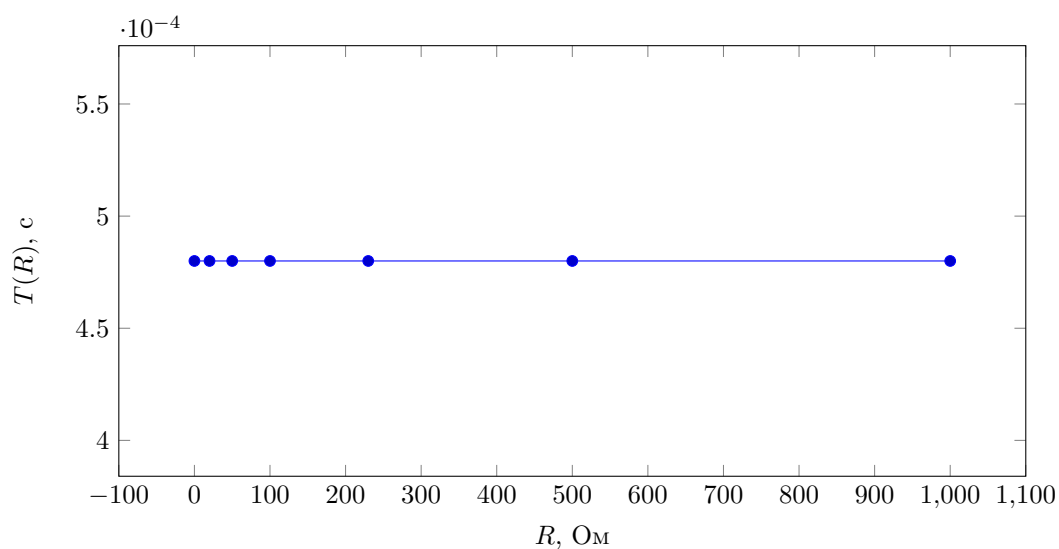


Рис. 5:  $T(R)$

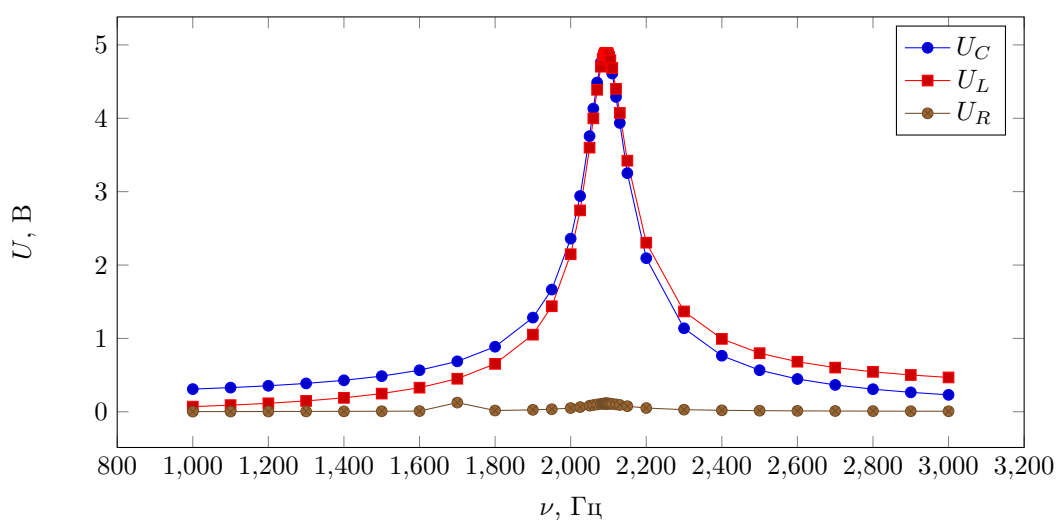


Рис. 6: Экспериментальные значения при  $R = 50$  Ом

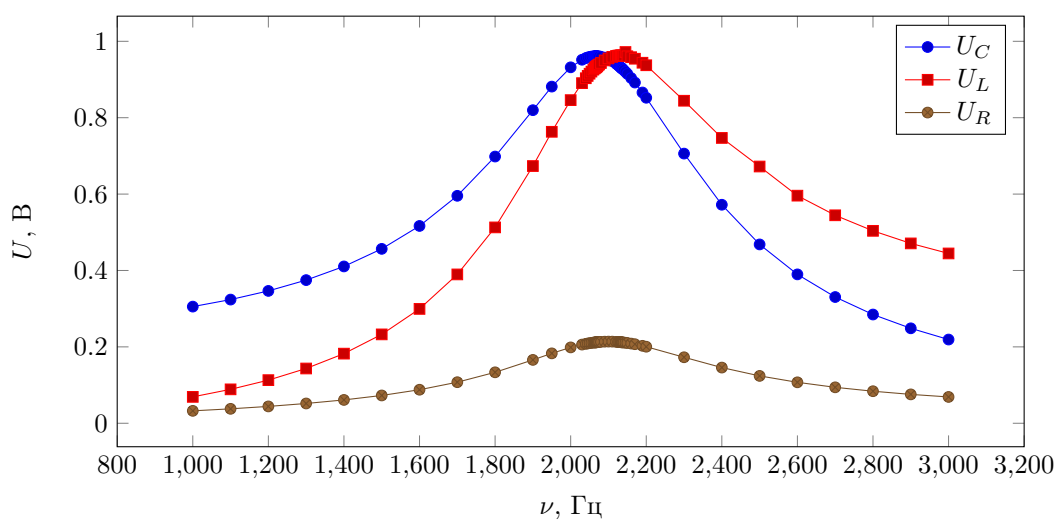


Рис. 7: Экспериментальные значения при  $R = 500$  Ом

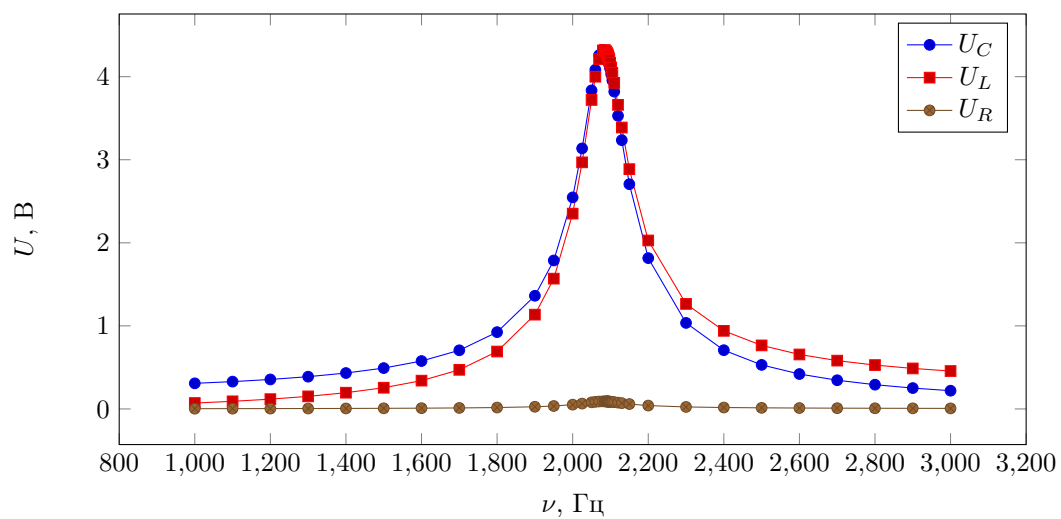


Рис. 8: Теоретические значения при  $R = 50 \text{ Ом}$

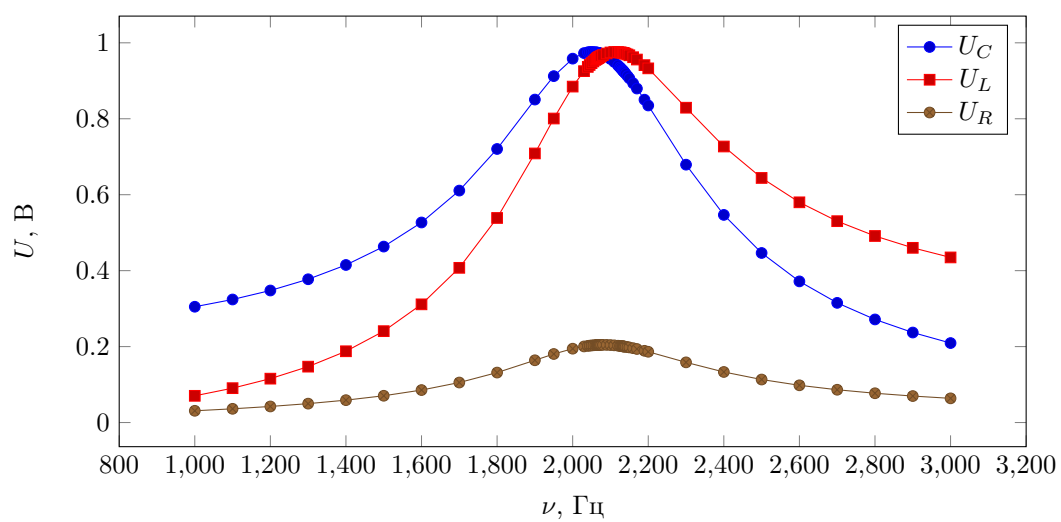


Рис. 9: Теоретические значения при  $R = 500 \text{ Ом}$

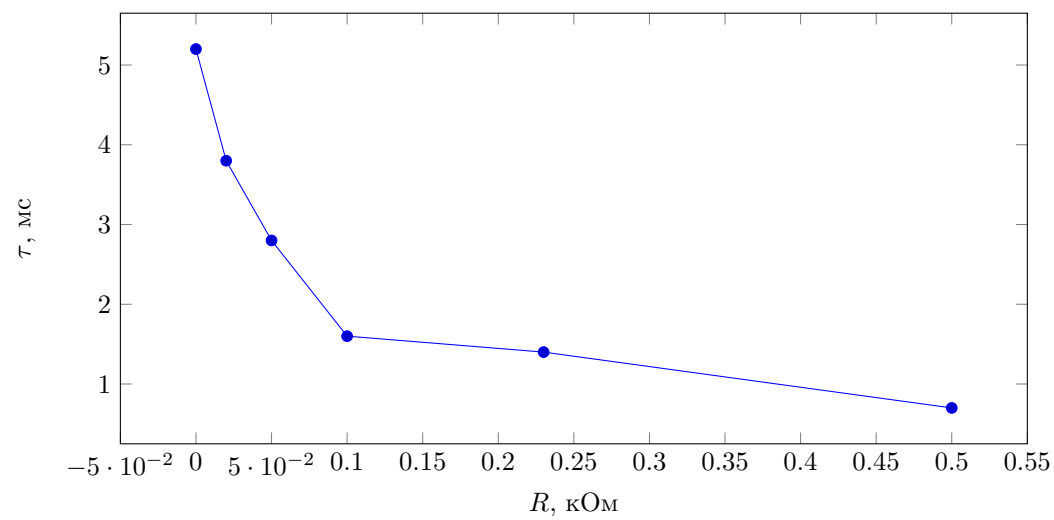


Рис. 10: Установление колебаний



| $R, \text{ Ом}$ | $q_n$ | $q_{n+1}$ |
|-----------------|-------|-----------|
| 0               | 1.46  | 1.32      |
| 20              | 1.44  | 1.26      |
| 50              | 1.39  | 1.16      |
| 100             | 1.32  | 1.03      |
| 230             | 1.15  | 0.75      |
| 500             | 0.88  | 0.4       |
| 1000            | 0.54  | 0.12      |

Таблица 1: Собственные колебания

| $\nu$ , кГц | $U_C$ , В | $U_L$ , В | $U_R$ , В |
|-------------|-----------|-----------|-----------|
| 1000        | 0.31      | 0.07      | 0.0       |
| 1100        | 0.33      | 0.09      | 0.0       |
| 1200        | 0.35      | 0.12      | 0.0       |
| 1300        | 0.39      | 0.15      | 0.0       |
| 1400        | 0.43      | 0.19      | 0.01      |
| 1500        | 0.49      | 0.25      | 0.01      |
| 1600        | 0.57      | 0.33      | 0.01      |
| 1700        | 0.69      | 0.45      | 0.12      |
| 1800        | 0.89      | 0.65      | 0.02      |
| 1900        | 1.28      | 1.05      | 0.03      |
| 1950        | 1.67      | 1.44      | 0.04      |
| 2000        | 2.36      | 2.15      | 0.05      |
| 2025        | 2.94      | 2.75      | 0.06      |
| 2050        | 3.76      | 3.6       | 0.08      |
| 2060        | 4.13      | 4.0       | 0.09      |
| 2070        | 4.49      | 4.39      | 0.1       |
| 2080        | 4.76      | 4.7       | 0.11      |
| 2085        | 4.85      | 4.81      | 0.11      |
| 2088        | 4.88      | 4.86      | 0.11      |
| 2090        | 4.89      | 4.88      | 0.11      |
| 2091        | 4.89      | 4.88      | 0.11      |
| 2092        | 4.89      | 4.89      | 0.11      |
| 2093        | 4.89      | 4.89      | 0.11      |
| 2094        | 4.89      | 4.89      | 0.11      |
| 2095        | 4.88      | 4.89      | 0.11      |
| 2096        | 4.88      | 4.89      | 0.11      |
| 2097        | 4.86      | 4.88      | 0.11      |
| 2099        | 4.84      | 4.87      | 0.11      |
| 2102        | 4.79      | 4.84      | 0.11      |
| 2105        | 4.74      | 4.79      | 0.11      |
| 2110        | 4.61      | 4.69      | 0.11      |
| 2120        | 4.29      | 4.4       | 0.1       |
| 2130        | 3.94      | 4.07      | 0.09      |
| 2150        | 3.25      | 3.42      | 0.08      |
| 2200        | 2.09      | 2.31      | 0.05      |
| 2300        | 1.14      | 1.37      | 0.03      |
| 2400        | 0.76      | 0.99      | 0.02      |
| 2500        | 0.57      | 0.8       | 0.02      |
| 2600        | 0.45      | 0.68      | 0.01      |
| 2700        | 0.37      | 0.6       | 0.01      |
| 2800        | 0.31      | 0.54      | 0.01      |
| 2900        | 0.26      | 0.5       | 0.01      |
| 3000        | 0.23      | 0.47      | 0.01      |

Таблица 2: Вынужденные колебания  $R = 50$  Ом

| $\nu$ , кГц | $U_C$ , В | $U_L$ , В | $U_R$ , В |
|-------------|-----------|-----------|-----------|
| 1000        | 0.31      | 0.07      | 0.03      |
| 1100        | 0.32      | 0.09      | 0.04      |
| 1200        | 0.35      | 0.11      | 0.04      |
| 1300        | 0.37      | 0.14      | 0.05      |
| 1400        | 0.41      | 0.18      | 0.06      |
| 1500        | 0.46      | 0.23      | 0.07      |
| 1600        | 0.52      | 0.3       | 0.09      |
| 1700        | 0.6       | 0.39      | 0.11      |
| 1800        | 0.7       | 0.51      | 0.13      |
| 1900        | 0.82      | 0.67      | 0.17      |
| 1950        | 0.88      | 0.76      | 0.18      |
| 2000        | 0.93      | 0.85      | 0.2       |
| 2030        | 0.95      | 0.89      | 0.21      |
| 2040        | 0.96      | 0.9       | 0.21      |
| 2045        | 0.96      | 0.91      | 0.21      |
| 2050        | 0.96      | 0.92      | 0.21      |
| 2055        | 0.96      | 0.92      | 0.21      |
| 2060        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2063        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2065        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2066        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2067        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2068        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2069        | 0.96      | 0.93      | 0.21      |
| 2070        | 0.96      | 0.94      | 0.21      |
| 2072        | 0.96      | 0.94      | 0.21      |
| 2075        | 0.96      | 0.94      | 0.21      |
| 2080        | 0.96      | 0.94      | 0.21      |
| 2090        | 0.96      | 0.95      | 0.21      |
| 2100        | 0.95      | 0.96      | 0.21      |
| 2110        | 0.95      | 0.96      | 0.21      |
| 2120        | 0.94      | 0.96      | 0.21      |
| 2125        | 0.94      | 0.96      | 0.21      |
| 2128        | 0.94      | 0.96      | 0.21      |
| 2131        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2133        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2134        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2135        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2137        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2140        | 0.93      | 0.96      | 0.21      |
| 2145        | 0.92      | 0.97      | 0.21      |
| 2150        | 0.91      | 0.96      | 0.21      |
| 2160        | 0.9       | 0.96      | 0.21      |
| 2170        | 0.89      | 0.95      | 0.21      |
| 2190        | 0.87      | 0.94      | 0.2       |
| 2200        | 0.85      | 0.94      | 0.2       |
| 2300        | 0.71      | 0.84      | 0.17      |
| 2400        | 0.57      | 0.75      | 0.15      |
| 2500        | 0.47      | 0.67      | 0.12      |
| 2600        | 0.39      | 0.6       | 0.11      |
| 2700        | 0.33      | 0.54      | 0.09      |
| 2800        | 0.28      | 0.5       | 0.08      |
| 2900        | 0.25      | 0.47      | 0.08      |
| 3000        | 0.22      | 0.44      | 0.07      |

Таблица 3: Вынужденные колебания  $R = 500$  Ом

| $R$ , кОм | $\tau$ , мс |
|-----------|-------------|
| 0         | 5.2         |
| 0.02      | 3.8         |
| 0.05      | 2.8         |
| 0.1       | 1.6         |
| 0.23      | 1.4         |
| 0.5       | 0.7         |

Таблица 4: Установление колебаний