Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Уральский энергетический институт

М. А. ПЛЕСКУНОВ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

М. А. Плескунов

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве* ***учебного пособия*** *для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата/специалитета по направлениям
подготовки 140200 – Электроэнергетика
и 231300 – Прикладная математика*

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.44(075.8)
ББК 22.161я73
П38

Рецензенты:
кафедра «Высшая и прикладная математика» УрГУПС (зав. кафедрой д-р физ.-мат. наук, проф. Г. А. Тимофеева);
д-р физ.-мат. наук, проф. В. В. Кабанов (ИММ УрО РАН)

Научный редактор – д-р физ.-мат. наук, проф. А. И. Короткий

Плескунов, М. А.
П38 Операционное исчисление : учебное пособие / М. А. Плескунов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 143, [1] с.
ISBN 978-5-7996-1161-3

Пособие предназначено для студентов, изучающих курс высшей математики. Содержит теоретический материал и примеры решения задач по операционному исчислению – разделу высшей математики, входящему в обязательный стандарт образования студентов радиотехнических, электротехнических и теплоэнергетических специальностей. Также включены контрольные вопросы к курсу и список рекомендуемой литературы.

Библиогр.: 15 назв. Рис. 16. Прил. 4.

УДК 517.44(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-5-7996-1161-3

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Метод операционного исчисления

Суть операционного исчисления состоит в том, что функции $f(t)$ действительного переменного t ставится в соответствие определенная функция $F(p)$ комплексного переменного p.

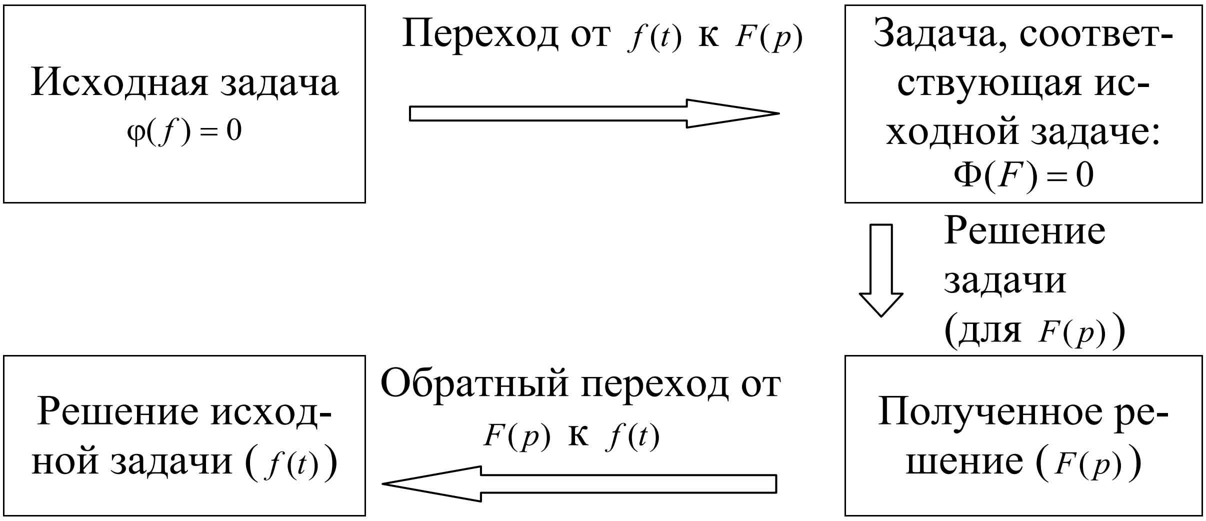
При выполнении некоторых условий, накладываемых на функцию $f(t)$, такое соответствие является **взаимно однозначным**, то есть каждой функции $f(t)$, удовлетворяющей таким условиям, соответствует единственная функция $F(p)$, и наоборот, каждой функции $F(p)$ соответствует единственная функция $f(t)$.

При этом оказывается, что операциям дифференцирования и интегрирования функций $f(t)$ соответствуют операции умножения и деления функций $F(p)$ на переменную p.

В результате этого становится возможным свести решение, скажем, системы дифференциальных уравнений для функций $f(t)$ к решению системы алгебраических уравнений для функций $F(p)$. Затем, по найденным решениям $F(p)$ алгебраической системы, можно найти соответствующие им функции $f(t)$, которые и будут решениями исходной системы дифференциальных уравнений.

Таким образом, мы сводим более сложную задачу отыскания решений системы дифференциальных уравнений к более простой задаче отыскания решений алгебраической системы уравнений.

Схема применения операционного исчисления



Оригинал и его изображение

Определения

Действительную переменную будем обозначать буквой t.

Рассмотрим функцию (в общем случае комплекснозначную) действительной переменной t. Обозначим ее $f(t)$.

Определение оригинала

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

(1) функция $f(t)$ определена на всей числовой оси и $f(t)\equiv 0$ при $t<0$;

(2) на любом конечном интервале оси Ot функция $f(t)$ или непрерывна, или имеет лишь конечное число точек разрыва и притом только первого рода, т. е. функция $f(t)$ кусочно-непрерывна на любом конечном интервале оси Ot. (Это условие можно заменить требованием локальной интегрируемости функции $f(t)$, т. е. интегрируемости на любом конечном интервале оси Ot.);

(3) существуют такие числа $M>0$ и $s_0 \geq 0$, что $\forall t\ (0 \leq t < \infty)$ $|f(t)| \leq M e^{s_0 t}$, т. е. модуль этой функции с ростом t возрастает не быстрее некоторой показательной функции.

Функцию $f(t)$, удовлетворяющую этим условиям, называют **оригиналом** или **начальной функцией**. Наименьшее число s_0, при котором выполнено условие (3), называется **показателем роста** функции $f(t)$. Говорят, что функция, удовлетворяющая условию (3), имеет **ограниченный рост**. (Показатель роста s_0 может быть, в общем случае, и отрицательным, т. е. не обязательно требовать, чтобы $s_0 \geq 0$.)

***Замечание* 1**

Рассматривая функции, определенные и при отрицательных значениях t (и отличные от тождественного нуля при этих значениях), в качестве оригиналов, мы будем предполагать, что условие (1) *всегда выполнено*, то есть, говоря, что функция $f(t)=\sin t$ является оригиналом, мы будем иметь в виду функцию $f(t)=\begin{cases}\sin t, & t \geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$, не оговаривая в дальнейшем этого специально (в целях упрощения записи оригиналов).

***Замечание* 2**

Условие (3) требуется для существования некоторых несобственных интегралов, рассматриваемых в дальнейшем. В частности, условию (3) удовлетворяют все ограниченные функции (в этом случае, очевидно, $s_0=0$), а также степенные функции $f(t)=t^k \quad (k>0)$.

Действительно, $\left|t^k\right| = \left(e^{\ln t}\right)^k = e^{k\ln t} < e^{kt}$ при $k > 0$, $t \geq 0$ (так как $\ln t < t$ при $t \geq 0$ и $k\ln t < kt$ при $k > 0$, $t \geq 0$, а показательная функция есть функция монотонно возрастающая). Следовательно, в этом случае (для функций вида $f(t) = t^k$ $(k > 0)$) показатель роста $s_0 = k$.

Определение изображения

Функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, связанная с оригиналом $f(t)$ равенством

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt, \qquad (*)$$

называется **изображением** оригинала $f(t)$.

Интеграл, стоящий в правой части этого равенства, носит название **интеграла Лапласа** для функции $f(t)$. Преобразование, ставящее в соответствие оригиналу $f(t)$ его изображение $F(p)$, называется **преобразованием Лапласа**. Теория преобразования Лапласа называется **операционным исчислением**. Функцию $F(p)$ называют часто **лапласовым изображением**, или **изображением по Лапласу**, или ***L*-изображением**.

Тот факт, что $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$, обозначают следующим образом:

$$L\{f(t)\} = F(p), \text{ или } F(p) \mathrel{\dot{\underset{\bullet}{\to}}} f(t), \text{ или } f(t) \xrightarrow{L} F(p), \text{ или } f(t) \mathrel{\dot{\underset{\bullet}{=}}} F(p).$$

Пусть M – множество всех оригиналов $f(t)$, а N – множество всех соответствующих им изображений. Формула (*) устанавливает отображение множества M на множество N. Это отображение называется

***L*-отображением** или **оператором Лапласа**[1] (не следует путать его с дифференциальным оператором Лапласа Δ). $L: M \to N$.

Теорема существования

Для всякого оригинала $f(t)$ существует изображение $F(p)$, определенное в полуплоскости $s = \operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста оригинала. В этой полуплоскости функция $F(p)$ является аналитической, имеет производную любого порядка в каждой точке полуплоскости и, кроме того, если $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, то $F(p) \to 0$.

Доказательство

Докажем первую часть теоремы.

По предположению $f(t)$ – оригинал, значит, $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$. Оценим модуль интеграла Лапласа:

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|\left|e^{-pt}\right|dt \le \int_0^\infty Me^{s_0 t}e^{-st}dt = M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt =$$

$$= \frac{-M}{s-s_0}e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{M}{s-s_0} \qquad (\text{при } s > s_0).$$

Поскольку $e^{-pt} = e^{-(s+i\sigma)t} = e^{-st}e^{-i\sigma t} = e^{-st}(\cos\sigma t - i\sin\sigma t)$, то

$\left|e^{-pt}\right| = e^{-st}$. (Вообще, если $e^z = e^{x+iy}$, то $\left|e^z\right| = e^x$.)

При $s - s_0 > 0$ верхний предел обращается в нуль, т. е. при $s > s_0$ интеграл Лапласа ограничен по модулю. Следовательно, он сходится и при этом, как видно из неравенства, сходится абсолютно. Это озна-

[1] Биографические сведения об ученых, упомянутых в пособии, даны в прил. 4.

чает, что изображение $F(p)$ оригинала $f(t)$ существует при $s > s_0$ и, более того, при выполнении этого условия $|F(p)| \leq \dfrac{M}{s - s_0}$.

Отсюда видно, что при $s = \operatorname{Re} p \to +\infty$ $\quad |F(p)| \to 0$,

а значит, $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} F(p) = 0$, т. е. $F(p) \to 0$ при $s = \operatorname{Re} p \to +\infty$.

Если же $s \leq s_0$, то верхний предел в нашей оценке обращается в бесконечность и, следовательно, интеграл Лапласа может оказаться расходящимся (нельзя утверждать, что он будет сходиться).

Аналитичность функции $F(p)$ и существование производных любого порядка при $s > s_0$ следует из возможности применить правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру к интегралу Лапласа сколько угодно раз и из сходимости полученных при этом интегралов. Эту часть теоремы примем без доказательства.

Замечание

В дальнейшем всегда будем предполагать, что $\operatorname{Re} p > s_0$, то есть рассматривать изображение $F(p)$ лишь для тех значений p, для которых обеспечено существование этого изображения (рис. 1).

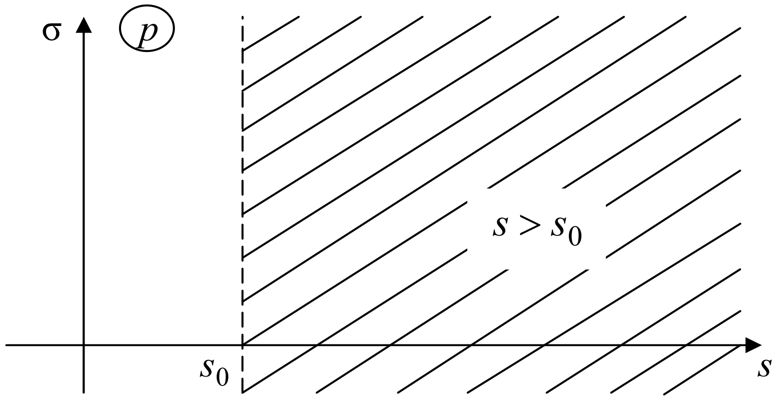


Рис. 1

Теорема единственности

Если $F(p)$ является изображением двух оригиналов $f_1(t)$ и $f_2(t)$, то эти оригиналы совпадают во всех точках, в которых они непрерывны.

Дополнение к теореме

Если за значение оригинала в каждой точке разрыва t_0 принимать полусумму его предельных значений слева и справа от точки t_0, то есть считать $f(t_0)=\frac{1}{2}[f(t_0-0)+f(t_0+0)]$, то при соблюдении этого условия соответствие между оригиналами и их изображениями *взаимно-однозначное* (то есть каждому оригиналу соответствует единственное изображение, а каждому изображению – единственный оригинал). В этом случае, если одновременно $\left.\begin{array}{l} F(p)\risingdotseq f_1(t) \\ F(p)\risingdotseq f_2(t) \end{array}\right\}$, то из этого следует, что $f_1(t)=f_2(t)$ при любом t. (Эту теорему вместе с дополнением примем без доказательства.)

СВОЙСТВА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Свойства оригиналов

Оригиналы обладают нижеследующими свойствами.

1. Линейная комбинация оригиналов является оригиналом:

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ – оригинал, если $f_1(x),\ f_2(x)$ – оригиналы, а $c_1,\ c_2$ – константы. Доказать самостоятельно.

2. Если $f(t)$ – оригинал, то функции $|f(t)|,\ e^{\alpha t} f(t),\ tf(t),\ t^k f(t)$ $(k>0),\ f(\alpha t)\ (\alpha>0),\ f(t-\tau)\ (\tau\in R),\ \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ также являются оригиналами.

Докажем это для функции $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Для этого проверим выполнение трех сформулированных выше (стр. 4–5) условий, при которых функция является оригиналом.

Условие (1) считаем всегда выполненным. При интегрировании функции число разрывов может лишь только уменьшиться, но никак не увеличиться, следовательно, условие (2) также будет выполнено.

Проверим выполнение условия (3).

Поскольку $f(t)$ – оригинал, то $|f(t)|\le Me^{s_0 t}$.

Тогда

$$|\varphi(t)|=\left|\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right|\le\int\limits_0^t|f(\tau)|d\tau\le M\int\limits_0^t e^{s_0\tau}d\tau=\frac{M}{s_0}e^{s_0\tau}\Big|_0^t=\frac{M}{s_0}\left(e^{s_0 t}-1\right)<\frac{M}{s_0}e^{s_0 t}.$$

Таким образом, $|\varphi(t)|<M_1 e^{s_0 t}$, где $M_1=\dfrac{M}{s_0}$.

Следовательно, условие (3) также выполнено. Значит, функция $\varphi(t)=\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$ действительно является оригиналом.

Для остальных функций провести доказательства самостоятельно.

3. Произведение двух оригиналов является оригиналом.

Очевидно, что если $f(t)=0$ и $y(t)=0$ при $t<0$, то и $f(t)y(t)=0$ при тех же значениях t, т. е. при $t < 0$. Произведение двух кусочно-непрерывных функций продолжает быть кусочно-непрерывной функцией. Осталось проверить ограниченность роста произведения двух оригиналов.

Пусть $|f(t)| \le M_1 e^{s_1 t}$, а $|y(t)| \le M_2 e^{s_2 t}$.

Тогда $|f(t)y(t)| = |f(t)||y(t)| \le M_1 M_2 e^{(s_1+s_2)t}$.

Итак, произведение оригиналов имеет ограниченный рост. Значит, произведение двух оригиналов продолжает оставаться оригиналом.

Свойства изображений

Рассмотрим свойства изображений.

1. **Свойство линейности**

Изображением линейной комбинации оригиналов является точно такая же линейная комбинация изображений этих оригиналов, т. е. если

$$F_1(p) \risingdotseq f_1(t), \text{ и } F_2(p) \risingdotseq f_2(t),$$

то

$$\alpha F_1(p)+\beta F_2(p) \risingdotseq \alpha f_1(t)+\beta f_2(t),$$

где α и β – некоторые (в общем случае комплексные) числа.

Это свойство является следствием свойства линейности интегралов. (Доказать самостоятельно.)

Из свойства линейности изображений следует, что сумме (разности) оригиналов соответствует сумма (разность) их изображений, а умножению оригинала на постоянное число соответствует умножение изображения на это же число:

$$F_1(p)+F_2(p) \doteq f_1(t)+f_2(t), \; F_1(p)-F_2(p) \doteq f_1(t)-f_2(t), \; \alpha F_1(p) \doteq \alpha f_1(t).$$

Например, если $F(p) \doteq f(t)$, то $5F(p) \doteq 5f(t)$, $\quad -F(p) \doteq -f(t)$.

2. **Теорема подобия**

Если $F(p) \doteq f(t)$ и $a > 0$, то $\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \doteq f(at)$.

Доказательство

Найдем $$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt.$$

Сделаем замену переменной интегрирования: $at = \tau$; $t = \frac{\tau}{a}$; $dt = \frac{1}{a}d\tau$;

$$t = 0 \Rightarrow \tau = 0; \; t = +\infty \Rightarrow \tau = +\infty .$$

$$L\{f(at)\} = \int_0^{+\infty} f(at)e^{-pt}dt = \frac{1}{a}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Следовательно, $$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) \doteq f(at) \quad (a > 0).$$

3. **Теорема смещения**

Если $F(p) \doteq f(t)$ и α – любое действительное или комплексное число, то $$F(p+\alpha) \doteq e^{-\alpha t} f(t).$$

Доказательство

$$L\{e^{-\alpha t}f(t)\}=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}e^{-pt}dt=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-(p+\alpha)t}dt=F(p+\alpha).$$

Несобственный интеграл существует при $\mathrm{Re}(p+\alpha)>s_0$, значит, при таком условии существует изображение $F(p+\alpha)$. Из теоремы смещения следует, что замена в изображении переменной p на выражение $p+\alpha$ соответствует умножению оригинала на $e^{-\alpha t}$.

4. **Изображение производной** (дифференцирование оригинала)

Если $F(p)\doteq f(t)$ и $f'(t)$ – оригинал, то

$$pF(p)-f(0)\doteq f'(t).$$

Доказательство

Найдем L-изображение $f'(t)$.

$$L\{f'(t)\}=\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty}+p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=-f(0)+pF(p)=pF(p)-f(0).$$

Здесь мы провели интегрирование по частям:

$$u=e^{-pt};\ du=-pe^{-pt}dt;\ \ dv=f'(t)dt;\ v=f(t),\ \int udv=uv-\int vdu.$$

При этом учли, что $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)e^{-pt}=0$, т. к.

$\left|f(t)e^{-pt}\right|=\left|f(t)\right|\left|e^{-pt}\right|\le Me^{s_0t}e^{-st}=Me^{-(s-s_0)t}\to 0$ при $t\to+\infty$ (если $s>s_0$)

и $\left|e^{-pt}\right|=e^{-st}$. Теорема доказана.

Замечание

Под $f(0)$ здесь и в дальнейшем (кроме специально оговоренных случаев) понимается правосторонний предел функции в точке $t=0$, т. е.
$$f(0)=f(+0)=\lim_{t\to+0}f(t).$$

Следствия

(1) Пусть $f''(t)$ также является оригиналом. Найдем её изображение. По теореме об изображении производной

$$L\{f''(t)\} = pL\{f'(t)\} - f'(0) = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) = p^2F(p) - pf(0) - f'(0).$$

Таким образом,

$$p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f''(t).$$

(2) Пусть $f^{(n)}(t)$ также является оригиналом. Методом математической индукции можно доказать, что

$$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - pf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f^{(n)}(t).$$

(Доказать самостоятельно.)

(3) Если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, т. е. если начальные условия нулевые, то формулы упрощаются.

Тогда имеем:

$$F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t),$$

$$pF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f'(t),$$

$$p^2F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f''(t),$$

$$p^3F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f'''(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^nF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f^{(n)}(t).$$

В этом случае дифференцированию оригинала соответствует операция умножения его изображения на переменную p.

(4) **Лемма**. Если $F(p)\risingdotseq f(t)$ и $f'(t)$ – оригинал, то

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} pF(p)=f(0).$$

Как указано в теореме существования, изображение всякого оригинала стремится к нулю при $p\to\infty$ (когда $\operatorname{Re} p\to+\infty$).

Поэтому, если $F_1(p)\risingdotseq f'(t)$, то $\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} F_1(p)=0.$

Но $$F_1(p)=pF(p)-f(0), \text{ где } F(p)\risingdotseq f(t).$$

Тогда $$\lim_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} \left[pF(p)-f(0)\right]=0.$$

Таким образом, $$f(0) = \lim_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} pF(p).$$

Эта формула позволяет находить начальное значение оригинала $f(t)$ по его изображению $F(p)$, не вычисляя самого оригинала.

Например:

$F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}\risingdotseq \cos t$ (то, что $F(p)=\dfrac{p}{p^2+1}$ является изображением $\cos t$, будет доказано позже). Проверим полученную формулу:

$$\cos 0=f(0)=\lim_{p\to\infty} pF(p)=\lim_{p\to\infty} p\frac{p}{p^2+1}=1.$$

5. **Изображение интеграла** (интегрирование оригинала)

Если $$F(p)\risingdotseq f(t), \qquad \text{то} \qquad \frac{F(p)}{p}\risingdotseq\int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Интегрирование оригинала в пределах от 0 до t соответствует делению изображения на переменную p.

Доказательство

Обозначим $$\varphi(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau.$$

По ранее доказанному, $\varphi(t)$ – оригинал.

Пусть $\Phi(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\varphi(t)$, т. е. $\Phi(p)=L\{\varphi(t)\}$.

$$\varphi(0)=\int_0^0 f(\tau)d\tau=0.$$

Тогда, по теореме о дифференцировании оригинала, имеем

$$p\Phi(p)-\varphi(0)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\varphi'(t),\text{ т.е. } p\Phi(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\varphi'(t)=\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right)'=f(t)$$

(в силу теоремы о дифференцировании интеграла по верхнему пределу).

Таким образом, $$p\Phi(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f(t).$$

Но, с другой стороны, по условию $F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f(t)$.

По теореме единственности $p\Phi(p)=F(p)$, т. е. $\Phi(p)=\dfrac{F(p)}{p}$.

Следовательно,

$$\frac{F(p)}{p}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\int_0^t f(\tau)d\tau.$$

6. **Умножение оригинала на** $(-t)$ (дифференцирование изображения)

Если $F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f(t)$, то $F'(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}(-t)f(t)$.

И более того, $$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t^n f(t).$$

Умножение оригинала на $(-t)$ соответствует дифференцированию изображения.

Доказательство

Рассмотрим интеграл Лапласа

$$F(p)=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Этот интеграл – функция параметра p, т. е. это есть интеграл, зависящий от параметра. Вспомним правило Лейбница дифференцирования интеграла по параметру. При его формулировке требовалось, чтобы подынтегральная функция была непрерывной как функция двух переменных.

Однако можно показать, что правило Лейбница остается в силе, если функция $f(t)$ имеет разрывы 1-го рода в изолированных точках. (Примем этот факт без доказательства.)

Воспользуемся правилом Лейбница и продифференцируем функцию $F(p)$ по параметру p.

$$F'(p)=\frac{d}{dp}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=\int_0^\infty \frac{d}{dp}\left(f(t)e^{-pt}\right)dt=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-t)dt=$$
$$=\int_0^\infty (-t)f(t)e^{-pt}dt=-\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt=L\{(-t)f(t)\}=-L\{tf(t)\}.$$

Полученный интеграл сходится, т. к. $tf(t)$ является оригиналом, если $f(t)$ – оригинал.

Таким образом,

$$F'(p) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} (-t)f(t),$$

или, иначе, $\quad -F'(p)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} tf(t) \quad$ (т. к. $F'(p)=-L\{tf(t)\}$).

Применяя это правило n раз, получаем

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \doteq t^n f(t).$$

7. **Деление оригинала на** t (интегрирование изображения)

Если $F(p) \doteq f(t)$ и $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится, то

$$\int_p^\infty F(z)dz \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Деление оригинала на t соответствует интегрированию изображения в пределах от p до ∞.

Замечание

Несобственный интеграл в этом соотношении понимается в следующем смысле:

$$\int_p^\infty = \lim_{\substack{\alpha \to \infty \\ (\operatorname{Re}\alpha \to +\infty)}} \int_p^\alpha,$$ где α – комплексное число, т. е.

α стремится к ∞ так, что действительная часть α стремится к $+\infty$.

Доказательство

Пусть $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал. Обозначим его изображение как $\Phi(p)$, т. е.

$$\Phi(p) \doteq \frac{f(t)}{t}.$$

Умножим оригинал, стоящий в правой части этого соотношения, на t. Тогда $-\Phi'(p) \doteq f(t)$. Но, с другой стороны, $F(p) \doteq f(t)$.

Следовательно, в силу теоремы единственности $F(p) = -\Phi'(p)$. Проинтегрируем это равенство в пределах от p до ∞.

$$\int\limits_p^\infty F(z)dz = -\int\limits_p^\infty \Phi'(z)dz = -\Phi(z)\Big|_p^\infty = \Phi(p) - \lim_{\substack{\operatorname{Re}\alpha\to+\infty \\ (\alpha\to\infty)}} \Phi(\alpha) = \Phi(p),$$

т. к. по теореме существования в силу того, что $\Phi(p)$ – изображение,

$$\lim_{\substack{p\to\infty \\ (\operatorname{Re} p\to+\infty)}} \Phi(p) = 0.$$

Остается выяснить вопрос о сходимости $\int\limits_p^\infty F(z)dz$.

Итак, $$\Phi(p) = \int\limits_p^\infty F(z)dz. \qquad (*)$$

Мы предполагали, что $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал. Следовательно, существует его изображение $\Phi(p)$. На основании только что доказанного равенства (*) $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ существует, т. е. сходится, и является изображением функции $\dfrac{f(t)}{t}$.

С другой стороны, если этот интеграл сходится, то в силу равенства (*) и теоремы единственности никакая другая функция не может быть изображением функции $\dfrac{f(t)}{t}$, а сам этот интеграл не может быть изображением никакой другой функции, кроме $\dfrac{f(t)}{t}$, и в силу взаимно-однозначного соответствия оригиналов и их изображений функция $\dfrac{f(t)}{t}$ является оригиналом.

Итак, получили $\int\limits_p^\infty F(z)dz \risingdotseq \dfrac{f(t)}{t}$, если $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ – сходится.

Примеры

1. Проинтегрируем от p до ∞ изображение $\sin t$.

Используем тот факт, что $\dfrac{1}{p^2+1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin t$ (справедливость этого выражения будет доказана позже).

$$\int_p^\infty \frac{1}{p^2+1}dp = \operatorname{arctg} p\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Интеграл существует. (Берется главная ветвь многозначной функции $\operatorname{Arctg} z$. Интегрирование ведется вдоль вещественной оси $\operatorname{Im} p = 0$, в области $\operatorname{Re} p > 0$.)

По теореме об интегрировании изображения

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \frac{\sin t}{t}.$$

Действительно, $\dfrac{\sin t}{t}$ является ограниченной функцией, поскольку $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t} = 1$, т. е. является оригиналом.

2. Проинтегрируем от p до ∞ изображение $\cos t$.

Ранее было указано, что $\dfrac{p}{p^2+1} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \cos t$.

$$\int_p^\infty \frac{p}{p^2+1}dp = \frac{1}{2}\int_p^\infty \frac{d\left(p^2+1\right)}{p^2+1} = \frac{1}{2}\ln\left(p^2+1\right)\Big|_p^\infty = \infty.$$

Интеграл расходится (не существует). Следовательно, не существует изображения функции $\dfrac{\cos t}{t}$. Действительно, эта функция не является оригиналом, т. к. в точке $t = 0$ имеет бесконечный разрыв (разрыв второго рода).

ИЗОБРАЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Отыщем изображения функций, используемых чаще всего.

1. Найдем изображение функции t^{α}, где α – действительное число.

$$L\{t^{\alpha}\} = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt.$$

Сделаем замену переменной интегрирования (считая $\operatorname{Re} p > 0$).

Пусть $pt = \tau;\ t = \dfrac{\tau}{p};\ dt = \dfrac{1}{p} d\tau$. Временно будем считать p положительным действительным числом.

Тогда $pt = \tau$; $t = 0 \Rightarrow \tau = 0$; при $p > 0$ $t = +\infty \Rightarrow \tau = +\infty$.

$$\int_{0}^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\tau}{p}\right)^{\alpha} e^{-\tau} \frac{d\tau}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_{0}^{\infty} \tau^{\alpha} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_{0}^{\infty} \tau^{(\alpha+1)-1} e^{-\tau} d\tau = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Использовали тот факт, что $\int_{0}^{+\infty} \tau^{\alpha-1} e^{-\tau} d\tau = \Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

Можно показать, что полученное равенство остается справедливым и в том случае, когда p – комплексное число и $\operatorname{Re} p > 0$. (Примем этот факт без доказательства.)

Окончательно имеем

$$L\{t^{\alpha}\} = \int_{0}^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}.$$

Гамма-функция определена при положительных значениях аргумента, значит, при $\alpha + 1 > 0$ существует несобственный интеграл

$$\int_{0}^{\infty} t^{\alpha} e^{-pt} dt.$$

Следовательно, при $\alpha > -1$ существует изображение функции t^{α}, и это изображение равно $\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$, значит, имеет место формула

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^{\alpha}, \quad (\operatorname{Re} p > 0, \quad \alpha > -1). \qquad (**)$$

2. Рассмотрим некоторые частные случаи полученной формулы.

Пусть α – натуральное число, т. е. $\alpha = n \in N$.

Поскольку $\Gamma(n+1) = n!$, получим $\boxed{\dfrac{n!}{p^{n+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t^{n}}$.

В частности, при $n = 1$ получим $\boxed{\dfrac{1}{p^{2}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} t}$.

3. Единичная функция Хевисайда и ее изображение

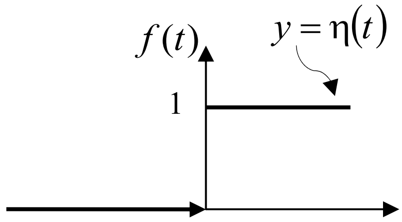
Возьмем теперь $\alpha = 0$. $\Gamma(1) = 0! = 1$.

Получим из формулы (**) $\boxed{\dfrac{1}{p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} 1}$.

В данном случае 1 понимается как оригинал, т. е. при этом имеется в виду функция

$$\eta(t) = \sigma_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Эта функция носит название **единичной функции Хевисайда** (или **единичного скачка**). Ее график имеет вид, представленный на рис. 2.



$\boxed{\dfrac{1}{p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} 1 = \eta(t)}$

Рис. 2

Единичная функция Хевисайда находит широкое применение в технических приложениях математики (в частности, в электротехнике).

Замечание. Значение функции Хевисайда в точке $t = 0$ можно выбрать произвольно в пределах от 0 до 1. Удобнее считать, что $\eta(0) = \frac{1}{2}$. В этом случае точка $t = 0$ будет регулярной точкой функции $\eta(t)$, т. е. точкой, в которой

$$\eta(t) = \frac{1}{2}[\eta(t-0) + \eta(t+0)].$$

Лемма

Если для комплексного числа $z = x + iy$ его действительная часть $\operatorname{Re} z = x > 0$ и t – действительная переменная, то $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-zt} = 0$.

Доказательство

$$e^{-zt} = e^{-(x+iy)t} = e^{-xt}e^{-iyt} = e^{-xt}(\cos yt - i\sin yt).$$

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-zt} = \lim_{t\to+\infty} e^{-xt}\cos yt - i\lim_{t\to+\infty} e^{-xt}\sin yt = 0$$

(так как функции $\cos yt$ и $\sin yt$ – ограниченные функции).

4. Изображение показательной функции

Пусть $f(t) = e^{\alpha t}$, где α – некоторое комплексное число (в частности, α может быть и любым действительным числом). Найдем $L\{e^{\alpha t}\}$.

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{\alpha t}e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}dt = -\frac{1}{p-\alpha}e^{-(p-\alpha)t}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha}, \ (\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0),$$

т. к. при $\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0$ $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-(p-\alpha)t} = 0$ согласно лемме.

Таким образом, $\boxed{\frac{1}{p-\alpha} \risingdotseq e^{\alpha t}, \quad (\operatorname{Re}(p-\alpha) > 0)}$.

Аналогично (или заменяя α на $(-\alpha)$) получим

$$\boxed{\frac{1}{p+\alpha} \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} e^{-\alpha t}, \quad (\mathrm{Re}(p+\alpha)>0)}.$$

Эти же формулы можно получить, используя теорему смещения.

По теореме смещения, если $F(p) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t)$, то $F(p+\alpha) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t)e^{-\alpha t}$.

Найдем $L\{e^{-\alpha t}\} = L\{1 \cdot e^{-\alpha t}\}$.

В данном случае $\frac{1}{p} = F(p) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} 1$.

Отсюда следует, что $\frac{1}{p+\alpha} = F(p+\alpha) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} 1 \cdot e^{-\alpha t}$.

Таким образом, $\boxed{\frac{1}{p+\alpha} \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} e^{-\alpha t}}$.

Заменяя α на $(-\alpha)$, найдем, что $\boxed{\frac{1}{p-\alpha} \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} e^{\alpha t}}$.

5. Изображение произведения степенной функции на показательную

Рассмотрим $\frac{n!}{p^{n+1}} = F(p) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} t^n$.

Тогда по теореме смещения $\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}} = F(p+\alpha) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} t^n e^{-\alpha t}$, т. е.

$$\boxed{\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}} \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} t^n e^{-\alpha t}}.$$

В частности, при $n = 1$ получим

$$\boxed{\frac{1}{(p+\alpha)^2} \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} t e^{-\alpha t}}.$$

6. Изображение гиперболических и тригонометрических функций

Поскольку $\operatorname{ch} at = \dfrac{e^{at}+e^{-at}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{at}+e^{-at}\right)$, то по свойству линейности изображения имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p+a}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2p}{p^2-a^2}=\frac{p}{p^2-a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\frac{1}{2}\left(e^{at}+e^{-at}\right)=\operatorname{ch} at.$$

Итак, $$\boxed{\frac{p}{p^2-a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\operatorname{ch} at}.$$

Аналогично для $\operatorname{sh} at = \dfrac{e^{at}-e^{-at}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(e^{at}-e^{-at}\right)$ получим

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a}-\frac{1}{p+a}\right)=\frac{1}{2}\,\frac{2a}{p^2-a^2}=\frac{a}{p^2-a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\frac{1}{2}\left(e^{at}-e^{-at}\right)=\operatorname{sh} at.$$

Значит, $$\boxed{\frac{a}{p^2-a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\operatorname{sh} at}.$$

Найдем изображения тригонометрических функций, воспользовавшись формулами Эйлера.

По формулам Эйлера: $\cos at = \operatorname{ch}(iat)$, $\sin at = -i\operatorname{sh}(iat) = \dfrac{1}{i}\operatorname{sh}(iat)$.

$\cos at = \operatorname{ch}(iat) = \dfrac{1}{2}\left(e^{iat}+e^{-iat}\right)$. Следовательно,

$$L\{\operatorname{ch}(iat)\}=\frac{p}{p^2-(ia)^2}=\frac{p}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\cos at.\ \text{Итак,}\ \boxed{\frac{p}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\cos at}.$$

$$\sin at=\frac{1}{i}\operatorname{sh}(iat)=\frac{1}{2i}\left(e^{iat}-e^{-iat}\right)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}}\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{p-ia}-\frac{1}{p+ia}\right)=\frac{1}{2i}\,\frac{2ia}{p^2+a^2}=\frac{a}{p^2+a^2},$$

т. е. $$\boxed{\frac{a}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\sin at},$$

или, по-другому, $L\{\operatorname{sh}(iat)\}=\dfrac{ia}{p^2-(ia)^2}$, т. е. $\dfrac{ia}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\operatorname{sh}(iat)$.

Умножению на $(-i)$ оригинала соответствует умножение на $(-i)$ изображения:

$-i\dfrac{ia}{p^2+a^2}\doteq -i\operatorname{sh}(iat)=\sin at$, отсюда снова получим, что

$$\frac{a}{p^2+a^2}\doteq\sin at\,.$$

Еще можно воспользоваться правилом дифференцирования оригинала. Поскольку $L\{\cos at\}=\dfrac{p}{p^2+a^2}$, то

$$L\{-a\sin at\}=L\left\{(\cos at)'\right\}=p\frac{p}{p^2+a^2}-\cos 0=\frac{p^2}{p^2+a^2}-1=\frac{-a^2}{p^2+a^2}\,,$$

т. е. $\dfrac{-a^2}{p^2+a^2}\doteq -a\sin at$; отсюда следует (делим оригинал и соответственно изображение на постоянное число $(-a)$), что $\dfrac{a}{p^2+a^2}\doteq\sin at$.

В частности, при $a=1$ $\boxed{\dfrac{p}{p^2+1}\doteq\cos t}$, $\boxed{\dfrac{1}{p^2+1}\doteq\sin t}$.

7. Изображение произведений тригонометрических функций на функции $e^{-\alpha t}$ и t

По теореме смещения замена в изображении переменной p на выражение $p+\alpha$ соответствует умножению оригинала на множитель $e^{-\alpha t}$:

$$F(p+\alpha)\doteq f(t)e^{-\alpha t}.$$

Пользуясь теоремой смещения, найдем

$$\boxed{\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}\doteq e^{-\alpha t}\cos at},$$

$$\boxed{\frac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}\doteq e^{-\alpha t}\sin at}.$$

Заменяя α на $(-\alpha)$, получим

$$\boxed{\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}e^{\alpha t}\cos at}, \quad \boxed{\frac{a}{(p-\alpha)^2+a}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}e^{\alpha t}\sin at}.$$

В частности, $\dfrac{p-1}{(p-1)^2+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}e^{t}\cos t,\quad \dfrac{1}{(p-1)^2+1}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}e^{t}\sin t$.

Здесь $\alpha=-1,\ a=1$.

Умножение оригинала на t соответствует дифференцированию изображения и умножению полученного выражения на (-1):

$$-F'(p)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}tf(t).$$

Продифференцируем изображения $\cos at$ и $\sin at$ и найдем изображения функций $t\cos at$ и $t\sin at$:

а) $\dfrac{p}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\cos at,\qquad -1\left(\dfrac{p}{p^2+a^2}\right)'\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\cos at,$

$$-\frac{p^2+a^2-2p^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\cos at;$$

б) $\dfrac{a}{p^2+a^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\sin at,\qquad -1\left(\dfrac{a}{p^2+a^2}\right)'\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\sin at,$

$$-\frac{-2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}=\frac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\sin at.$$

Таким образом, $\boxed{\dfrac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\sin at},\ \boxed{\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}t\cos at}.$

8. Изображение функций $\sin^2 t,\ \cos^2 t,\ \sin^2 at,\ \cos^2 at$

Воспользуемся правилом дифференцирования оригинала.

$$(\sin^2 t)'=2\sin t\cos t=\sin 2t,\quad pF(p)-f(0)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f'(t),\Rightarrow pF(p)-\sin^2 0\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\sin 2t,$$

где $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin^2 t$. Поскольку $\sin^2 0 = 0$, то $pF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin 2t$. Но изображением оригинала $\sin 2t$ является выражение $\dfrac{2}{p^2+2^2} = \dfrac{2}{p^2+4}$ (по формуле $\dfrac{a}{p^2+a^2} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \sin at$). В силу теоремы единственности $pF(p) = \dfrac{2}{p^2+4}$.

Тогда
$$F(p) = L\{\sin^2 t\} = \frac{2}{p(p^2+4)}.$$

$$L\{\cos^2 t\} = L\{1 - \sin^2 t\} = L\{1\} - L\{\sin^2 t\} = \frac{1}{p} - \frac{2}{p(p^2+4)} = \frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$$

По теореме подобия $f(at) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \dfrac{1}{a} F\left(\dfrac{p}{a}\right)$, если $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$.

Найдем $L\{\sin^2 at\}$ и $L\{\cos^2 at\}$.

$$L\{\sin^2 at\} = \frac{1}{a} \frac{2}{\frac{p}{a}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 4\right)} = \frac{2a^2}{p(p^2+4a^2)},$$

$$L\{\cos^2 at\} = \frac{1}{a} \frac{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 2}{\frac{p}{a}\left(\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 4\right)} = \frac{p^2+2a^2}{p(p^2+4a^2)}.$$

Сведем полученные изображения в одну таблицу.

Таблица изображений

№ п/п	Изображение: $F(p)=\int\limits_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	Оригинал: $f(t)\quad(t\ge 0)$
1	$\dfrac{1}{p}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$1=\eta(t)$
2	$\dfrac{1}{p^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	t
3	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$t^n \quad (n\in N)$
4	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$e^{-\alpha t}$
5	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\sin at$
6	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\cos at$
7	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\operatorname{sh} at$
8	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\operatorname{ch} at$
9	$\dfrac{a}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$e^{-\alpha t}\sin at$
10	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+a^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$e^{-\alpha t}\cos at$
11	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$t^n e^{-\alpha t} \quad (n\in N)$
12	$\dfrac{2pa}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$t\sin at$
13	$\dfrac{p^2-a^2}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$t\cos at$
14	$\dfrac{1}{\left(p^2+a^2\right)^2}$	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\dfrac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)$
15	1	$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}$	$\delta(t)$

Формулы, соответствующие № 14 и 15, будут выведены позже.

Более подробный список оригиналов и их изображений дан в прил. 3.

Соберем в таблицу ранее полученные формулы свойств изображений. Имеем в виду, что здесь (как и всюду в дальнейшем)

$$F(p) \doteq f(t), \;\; \Phi(p) \doteq \varphi(t).$$

№ п/п	Изображение	$\doteq$	Оригинал
1	$cF(p)$	$\doteq$	$c\,f(t) \quad (c = \text{const})$
2	$\alpha F(p) + \beta\Phi(p)$	$\doteq$	$\alpha f(t) + \beta\varphi(t) \quad \begin{pmatrix}\alpha = \text{const} \\ \beta = \text{const}\end{pmatrix}$
3	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$	$\doteq$	$f(at) \quad (a > 0)$
4	$F(p + \alpha)$	$\doteq$	$e^{-\alpha t} f(t)$
5	$pF(p) - f(0)$	$\doteq$	$f'(t)$
6	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$	$\doteq$	$f^{(n)}(t)$
7	$\frac{1}{p}F(p)$	$\doteq$	$\int_0^t f(\tau)d\tau$
8	$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}$	$\doteq$	$t^n f(t)$
9	$\int_p^\infty F(z)dz$	$\doteq$	$\frac{f(t)}{t}$
10	$e^{-p\tau}F(p)$	$\doteq$	$f(t - \tau) \quad (\tau > 0)$
11	$F_1(p)F_2(p)$	$\doteq$	$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t - \tau)d\tau$
12	$pF_1(p)F_2(p)$	$\doteq$	$f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t - \tau)d\tau$

Теоремы, соответствующие свойствам № 10, 11, и 12, будут доказаны позже. Более подробный список теорем операционного исчисления приведен в прил. 2.

Примеры

1. Найти изображение функции $f(t)=\sin^2 t+te^{5t}$.

$$f(t)=\sin^2 t+te^{5t}=\frac{1}{2}(1-\cos 2t)+te^{5t}\ \risingdotseq\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+4}\right)+\frac{1}{(p-5)^2}=F(p).$$

2. Найти изображение функции

$$f(t)=e^{-t}\sin 3t-2te^{3t}\operatorname{ch}9t+6.$$

$$F(p)=\frac{3}{(p+1)^2+3^2}-2\frac{(p-3)^2+9^2}{\left((p-3)^2-9^2\right)^2}+\frac{6}{p}=\frac{3}{p^2+2p+10}-\frac{2p^2-12p+180}{\left(p^2-6p-72\right)^2}+\frac{6}{p}.$$

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПО КАРСОНУ – ХЕВИСАЙДУ

Кроме изображения по Лапласу в технических приложениях математики используется также изображение по Карсону – Хевисайду, которое определяется следующим образом: $F^*(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$.

Такое преобразование носит название **преобразование Карсона – Хевисайда**, а функция $F^*(p)$, определенная этой формулой, называется **изображением по Карсону – Хевисайду** оригинала $f(t)$.

Изображение по Карсону – Хевисайду получается из изображения по Лапласу путем умножения последнего на переменную p, как это видно из формулы, т. е. $\boxed{F^*(p) = pF(p)}$, где $F(p) = L\{f(t)\}$.

В частности, для единичной функции Хевисайда имеем:

$$\boxed{\frac{1}{p} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} 1 = \eta(t)} \qquad \text{(по Лапласу)},$$

$$\boxed{1 \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} 1 = \eta(t)} \qquad \text{(по Карсону – Хевисайду)}.$$

Отсюда следует, что изображением константы по Карсону – Хевисайду является сама эта константа, что бывает очень удобно.

$$C \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} C \quad \text{(по Карсону – Хевисайду)},\ C = \text{const}.$$

Удобно также то, что размерность изображения физических величин по Карсону – Хевисайду совпадает с размерностью оригинала.

В дальнейшем будем иметь дело только с изображениями по Лапласу.

ОТЫСКАНИЕ ОРИГИНАЛА ПО ЕГО ИЗОБРАЖЕНИЮ

Получив решение задачи в изображениях, нам необходимо найти оригинал, соответствующий изображению решения. Поэтому нужно уметь производить обратное действие: по имеющемуся изображению находить отвечающий ему оригинал.

Метод разложения на простейшие дроби

Рассмотрим метод на примере.

Пример. Найти оригинал по его изображению.

$$F(p)=\frac{4-5p-p^3}{\left(p^2-4p+4\right)\left(p^3+p^2+p\right)}.$$

Изображение является правильной рациональной дробью. Разложим ее на простейшие дроби.

$$F(p)=\frac{4-5p-p^3}{\left(p^2-4p+4\right)\left(p^3+p^2+p\right)}=\frac{4-5p-p^3}{p(p-2)^2\left(p^2+p+1\right)}=\frac{A}{p}+\frac{B_1}{(p-2)^2}+\frac{B_2}{p-2}+\frac{Cp+D}{p^2+p+1}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители в правой и левой части равенства, получим

$$A(p-2)^2\left(p^2+p+1\right)+B_1p\left(p^2+p+1\right)+B_2p(p-2)\left(p^2+p+1\right)+(Cp+D)p(p-2)^2\equiv 4-5p-p^3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p в правой и левой части равенства и решая полученную систему, найдем, что

$$A=1,\ B_1=-1,\ B_2=0,\ C=-1,\ D=-1.$$

Проверим правильность найденных коэффициентов.

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{p+1}{p^2+p+1}=\frac{p^2+p+1-p^2-p}{p\left(p^2+p+1\right)}-\frac{1}{(p-2)^2}=$$

$$=\frac{p^2-4p+4-p^3-p^2-p}{p(p-2)^2\left(p^2+p+1\right)}=\frac{4-5p-p^3}{p(p-2)^2\left(p^2+p+1\right)}.$$

Коэффициенты найдены верно.

Таким образом, $F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{p+1}{p^2+p+1}$.

Преобразуем последнюю дробь, выделив в знаменателе полный квадрат.

$$\frac{p+1}{p^2+p+1}=\frac{p+1}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{p+\frac{1}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

В знаменателе получили выражение вида $(p+\alpha)^2+a^2$,

где $\alpha=\frac{1}{2}$, а $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Выделили полный квадрат и разбили на две дроби такого типа, которые имеются в таблице. В знаменателе стоит группа $p+\alpha$, а в числителе имеется p, поэтому в числителе тоже выделили группу $p+\alpha$. Константу в числителе второй дроби преобразовали так, чтобы получить $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$, поскольку в знаменателе стоит выражение $(p+\alpha)^2+a^2$.

Таким образом, имеем

$$F(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{(p-2)^2}-\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq 1-te^{2t}-e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Сделаем выводы.

Если изображение является правильной рациональной дробью, то для нахождения соответствующего оригинала следует изображение разложить на сумму простейших дробей и применить свойство линейности.

Пусть изображение представляет собой правильную рациональную дробь: $F(p)=\frac{R_m(p)}{Q_n(p)}$, где $R_m(p)$ – многочлен m-ой степени, а $Q_n(p)$ – многочлен n-й степени $(m<n)$. Тогда его можно представить как сумму дробей простейшего вида (простейших дробей).

Имеется четыре типа простейших дробей.

Найдем их изображения:

(I) $\frac{A}{p+\alpha} \risingdotseq Ae^{-\alpha t}$;

(II) $\frac{A}{(p+\alpha)^k} \risingdotseq A\frac{1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t}$ (по формуле: $\frac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}} \risingdotseq t^n e^{-\alpha t}$);

(III) $\frac{Ap+B}{p^2+a_1p+a_2}=\frac{Ap+B}{(p+\alpha)^2+\beta^2}=\frac{A(p+\alpha)+B-A\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$.

(Это тот случай, когда корни знаменателя – комплексные.)

Выделив в знаменателе полный квадрат, разобьем на две дроби:

$$A\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{B-A\alpha}{\beta}\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \risingdotseq Ae^{-\alpha t}\cos\beta t+\frac{B-A\alpha}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t,$$

где $\alpha=\frac{a_1}{2}, \quad \beta=\sqrt{a_2-\frac{a_1^2}{4}}$.

Поскольку корни знаменателя считаем комплексными, то $\frac{a_1^2}{4}-a_2<0$ (дискриминант знаменателя меньше нуля), т. е. $a_2-\frac{a_1^2}{4}>0$;

(IV) $\frac{Ap+B}{\left(p^2+a_1p+a_2\right)^k}$ (корни знаменателя – комплексные).

Эту дробь надо сводить к изображению функций вида $t^{m-1}e^{-\alpha t}\cos\beta t$ и $t^{m-1}e^{-\alpha t}\sin\beta t,\ m=1,2,...,k$. У дроби такого типа нет достаточно простого выражения соответствующего ей оригинала, поэтому ее лучше представить в виде суммы дробей (I) и (II) типа с комплексными значениями корней и комплексными коэффициентами разложения. В этом случае

$$\frac{Ap+B}{\left(p^2+a_1p+a_2\right)^k}=\frac{Ap+B}{[(p+\alpha)^2+\beta^2]^k}=\frac{Ap+B}{(p+\alpha+\beta i)^k(p+\alpha-\beta i)^k}=$$

$$=\frac{A_1}{(p+\alpha+\beta i)^k}+\frac{A_2}{(p+\alpha+\beta i)^{k-1}}+...+\frac{A_k}{p+\alpha+\beta i}+$$

$$+\frac{B_1}{(p+\alpha-\beta i)^k}+\frac{B_2}{(p+\alpha-\beta i)^{k-1}}+...+\frac{B_k}{p+\alpha-\beta i}.$$

Тогда

$$\frac{A_1}{(p+\alpha+\beta i)^k}\ \dot{\rightarrow}\ \frac{A_1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t-\beta t i}=\frac{A_1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t),...,$$

$$\frac{A_k}{p+\alpha+\beta i}\ \dot{\rightarrow}\ A_ke^{-\alpha t-\beta t i}=A_ke^{-\alpha t}(\cos\beta t-i\sin\beta t),$$

$$\frac{B_1}{(p+\alpha-\beta i)^k}\ \dot{\rightarrow}\ \frac{B_1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t+\beta t i}=\frac{B_1}{(k-1)!}t^{k-1}e^{-\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),...,$$

$$\frac{B_k}{p+\alpha-\beta i}\ \dot{\rightarrow}\ B_ke^{-\alpha t+\beta t i}=B_ke^{-\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t),$$

где коэффициенты $A_1,...,A_k,B_1\ ...,B_k$, вообще говоря, комплексные.

Зная оригиналы для дробей простейшего вида, найдем оригинал для любой правильной рациональной дроби от p, т. е. для любого изображения, являющегося правильной рациональной дробью.

Рассмотрим отдельно случай, когда знаменатель $Q_n(p)$ имеет *только* простые корни (т. е. *все* корни знаменателя – *простые*).

Пусть $p_1, p_2, ..., p_n$ – простые корни уравнения $Q_n(p) = 0$.

Тогда $F(p)$ можно разложить на сумму простейших дробей следующим образом:

$$F(p) = \frac{R_m(p)}{Q_n(p)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{p - p_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} \frac{1}{p - p_k},$$

где $A_k = \dfrac{R_m(p_k)}{Q_n'(p_k)}$ (эта формула доказывается при рассмотрении разложения дробей на простейшие).

Отсюда следует, что в случае только простых корней $p_1, p_2, ..., p_n$ знаменателя оригиналом, соответствующим такому изображению, будет

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_m(p_k)}{Q_n'(p_k)} e^{p_k t}}.$$

Эта формула позволяет найти оригинал тогда, когда изображение его является *правильной рациональной несократимой* дробью, знаменатель которой имеет *только простые* корни.

Общий случай отыскания оригинала по его изображению дает формула Меллина (Римана – Меллина). Однако ее применение может вызвать затруднения, поэтому лучше использовать другие методы, если это возможно.

Формула обращения Меллина

Если $f(t)$ – оригинал и $F(p)$ – его изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ справедлива формула обращения Меллина

$$\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)e^{pt}\,dp},$$

где интегрирование производится по любой прямой $\operatorname{Re}p=s$, $s>s_0$.

Замечание

Во всякой точке t_0, являющейся точкой разрыва функции $f(t)$, правая часть формулы Меллина равна

$$\frac{1}{2}\left[f(t_0-0)+f(t_0+0)\right].$$

Первая теорема разложения

Если $F(p)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки $(p=\infty)$ и равна в ней нулю и если ее разложение в ряд по степеням $\frac{1}{p}$ (ряд Лорана) имеет вид $F(p)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{p^{k+1}}$, то функция

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\frac{t^k}{k!},\qquad t\ge 0}$$

($f(t)=0$ при $t<0$) является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Вторая теорема разложения

Если $F(p)$ является однозначной аналитической функцией во всей плоскости комплексного переменного p, за исключением конечного числа изолированных особых точек $p_1, p_2, \dots p_n$ и $\lim\limits_{p\to\infty}F(p)=0$, то для всех $t>0$

$$\boxed{f(t)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[F(p)e^{pt}\right]}.$$

В условиях теоремы имеется в виду, что $\lim\limits_{p\to\infty} F(p)=0$ при произвольном стремлении $p\to\infty$, а не только для $\operatorname{Re} p = s > s_0$.

Замечание. Все условия второй теоремы разложения будут выполнены, если $F(p)$ – правильная рациональная дробь. (Формулу Меллина и две теоремы разложения примем без доказательства.)

С помощью второй теоремы разложения можно находить оригиналы для изображений, не являющихся правильными рациональными дробями. Напомним, что в случае, когда $p=p_k$ является полюсом m-го порядка функции $Y(p)$, вычет может быть найден по формуле

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k} Y(p)=\operatorname{Res} Y(p)\Big|_{p=p_k} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[Y(p)(p-p_k)^m\right].$$

В нашем случае $Y(p)=F(p)e^{pt}$. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)e^{pt} = \operatorname{Res} F(p)e^{pt}\Big|_{p=p_k} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{m-1}}{dp^{m-1}}\left[F(p)e^{pt}(p-p_k)^m\right].$$

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ОПЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-го порядка:

$$a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x' + a_n x = f(t).$$

Требуется найти решение этого уравнения при $t \geq 0$.

Будем предполагать, что решение этого уравнения – функция $x(t)$и все ее производные до n-го порядка включительно: $x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t)$, а также функция $f(t)$, – являются оригиналами:

$$x(t),\ x'(t), x''(t), ..., x^{(n)}(t), f(t) \text{ – оригиналы.}$$

Подставив в дифференциальное уравнение его решение $x = x(t)$, получим тождество. Найдем изображение этого тождества, т. е. найдем изображение правой и левой части этого тождества. По теореме единственности, если оригиналы тождественно равны, то равны и их изображения (это же следует прямо из определения изображения). Следовательно, изображение левой части тождества будет равно изображению правой его части.

Перейдем к изображению этого дифференциального уравнения, т. е. найдем изображение его правой и левой части:

$$L\left\{a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + ... + a_{n-1} x' + a_n x\right\} = L\{f(t)\}.$$

По свойству линейности, изображение линейной комбинации оригиналов равно такой же линейной комбинации изображений этих оригиналов. Поэтому получим

$$a_0 L\left\{x^{(n)}\right\} + a_1 L\left\{x^{(n-1)}\right\} + ... + a_{n-1} L\{x'\} + a_n L\{x\} = L\{f(t)\}. \qquad (*)$$

Обозначим изображение искомого решения дифференциального уравнения через $\bar{x}(p)$, т. е. $L\{x(t)\} = \bar{x}(p)$, или

$$\bar{x}(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} x(t).$$

Изображение функции $f(t)$, т. е. правой части дифференциального уравнения, обозначим, как обычно, через $F(p)$:

$$L\{f(t)\} = F(p), \text{ т. е. } F(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} f(t).$$

Будем решать задачу Коши, т. е. искать частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x(0) = x_0, x'(0) = x'_0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)},$$

где $x_0, x'_0, \ldots, x_0^{(n-1)}$ – некоторые числа.

Рассмотрим сначала случай нулевых начальных условий, т. е. будем предполагать, что $x_0 = x'_0 = \ldots = x_0^{(n-1)} = 0$.

Тогда $\quad \bar{x}(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} x(t), \quad$ т. е. $\quad L\{x(t)\} = \bar{x}(p),$

$$p\bar{x}(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} x'(t), \quad \text{т. е.} \quad L\{x'(t)\} = p\bar{x}(p),$$

$$p^2\bar{x}(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} x''(t), \quad \text{т. е.} \quad L\{x''(t)\} = p^2\bar{x}(p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p^n\bar{x}(p) \mathrel{\dot{\underset{\cdot}{\rightarrow}}} x^{(n)}(t), \quad \text{т. е.} \quad L\{x^{(n)}(t)\} = p^n\bar{x}(p).$$

Отсюда имеем

$$a_0 p^n \bar{x}(p) + a_1 p^{n-1}\bar{x}(p) + \ldots + a_{n-1} p\bar{x}(p) + a_n\bar{x}(p) = F(p),$$

или

$$\left(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right)\bar{x}(p) = F(p).$$

Обозначим $$Y_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n.$$

Этот многочлен представляет собой не что иное, как характеристический многочлен для исходного дифференциального уравнения (только раньше вместо p мы писали λ или k).

Таким образом, получили $\boxed{Y_n(p)\overline{x}(p) = F(p)}$.

Отсюда при нулевых начальных условиях $\boxed{\overline{x}(p) = \dfrac{F(p)}{Y_n(p)}}$,

т. е. мы нашли изображение решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям.

Переходя от изображения к оригиналу, получим искомое решение $x = x(t)$: $$\overline{x}(p) \doteqdot x(t).$$

Пусть теперь начальные условия не обязательно нулевые (т. е. рассмотрим общий случай). Умножим коэффициенты дифференциального уравнения на изображения функции $x(t)$ и ее производных:

a_n на $L\{x(t)\} = \overline{x}(p)$,

a_{n-1} на $L\{x'(t)\} = p\overline{x}(p) - x(0) = p\overline{x}(p) - x_0$,

a_{n-2} на $L\{x''(t)\} = p^2\overline{x}(p) - px(0) - x'(0) = p^2\overline{x}(p) - px_0 - x'_0$,

……………………………………………………………………

a_1 на $L\{x^{(n-1)}(t)\} = p^{n-1}\overline{x}(p) - p^{n-2}x_0 - p^{n-3}x'_0 - \ldots - px_0^{(n-3)} - x_0^{(n-2)}$,

a_0 на $L\{x^{(n)}(t)\} = p^n\overline{x}(p) - p^{n-1}x_0 - p^{n-2}x'_0 - \ldots - px_0^{(n-2)} - x_0^{(n-1)}$.

Подставим полученные выражения в уравнение (*).

Введем обозначение:

$$\Psi_{n-1}(p) = a_0\left(p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \ldots + px_0^{(n-2)} + x_0^{(n-1)}\right) +$$
$$+ a_1\left(p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 + \ldots + px_0^{(n-3)} + x_0^{(n-2)}\right) + \ldots + a_{n-2}(px_0 + x'_0) + a_{n-1}x_{0.}$$

Заметим, что при нулевых начальных условиях $\Psi_{n-1}(p) \equiv 0$.

Тогда, с учетом введенных обозначений, будем иметь

$$Y_n(p)\overline{x}(p) - \Psi_{n-1}(p) = F(p)$$

Полученное уравнение носит название **вспомогательного уравнения** для данного дифференциального уравнения (или **уравнения в изображениях**).

Это уравнение называют также **изображающим уравнением**.

Это алгебраическое уравнение. Таким образом, переходя к изображениям, мы вместо дифференциального уравнения получаем более простое алгебраическое уравнение. Решая его, найдем изображение искомого решения.

$$Y_n(p)\overline{x}(p) = \Psi_{n-1}(p) + F(p), \text{ отсюда}$$

$$\boxed{\overline{x}(p) = \frac{\Psi_{n-1}(p)}{Y_n(p)} + \frac{F(p)}{Y_n(p)}}.$$

Полученная формула дает так называемое **операторное решение** уравнения в изображениях.

Отыскав по изображению соответствующий ему оригинал, получим искомое решение:

$$x(t) \stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \overline{x}(p).$$

Аналогичным образом решаются и системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В этом случае, переходя к изображениям, получим алгебраическую систему уравнений. Решив такую алгебраическую систему, найдем изображение решений системы дифференциальных уравнений, а затем, перейдя к оригиналам, и сами эти решения.

Примеры

1. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\dddot{x} - 6\ddot{x} + 10\dot{x} = 0,$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$x(0)=1$; $\dot{x}(0)=3$; $\ddot{x}(0)=8$, т. е. решить задачу Коши.

Перейдем к уравнению в изображениях.

$x(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \overline{x}(p)$,

$\dot{x}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p\overline{x}(p) - x(0) = p\overline{x}(p) - 1$,

$\ddot{x}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^2\overline{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0) = p^2\overline{x}(p) - p - 3$,

$\dddot{x}(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} p^3\overline{x}(p) - p^2x(0) - p\dot{x}(0) - \ddot{x}(0) = p^3\overline{x}(p) - p^2 - 3p - 8$.

$p^3\overline{x} - 6p^2\overline{x} + 10p\overline{x} - [(p^2 + 3p + 8) - 6(p+3) + 10 \cdot 1] = 0$.

$L\{0\} = 0$, т. е. $0 \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} 0$ (как следствие линейности изображения при $c = 0$: $cF(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} cf(t)$ для любого оригинала $f(t)$ и его изображения $F(p)$ или найдем $L\{0\} = 0$ непосредственно из определения изображения).

Отсюда получим

$$(p^3 - 6p^2 + 10p)\overline{x}(p) - [(p^2 + 3p + 8) - 6(p+3) + 10] = 0.$$

Здесь

$Y_n(p) = Y_3(p) = p^3 - 6p^2 + 10p$ – характеристический многочлен.

$\Psi_{n-1}(p) = \Psi_2(p) = 1 \cdot (p^2 + 3p + 8) - 6(p+3) + 10 \cdot 1 = p^2 - 3p = p(p-3)$.

$Y_n(p) \cdot \overline{x}(p) - \Psi_{n-1}(p) = F(p)$ – вспомогательное уравнение.

$\overline{x}(p) = \dfrac{\Psi_{n-1}(p)}{Y_n(p)}$ (т. к. $F(p) = L\{0\} = 0$), т. е.

$$\overline{x}(p) = \frac{p(p-3)}{p^3 - 6p^2 + 10p} = \frac{p(p-3)}{p(p^2 - 6p + 10)} = \frac{p-3}{p^2 - 6p + 10}.$$

Знаменатель имеет комплексные корни, поэтому выделим полный квадрат.

$$\bar{x}(p)=\frac{p-3}{p^2-6p+10}=\frac{p-3}{(p-3)^2+1}\risingdotseq e^{3t}\cos t\,.$$

Таким образом, $\quad x(t)=e^{3t}\cos t\,.$

Нашли изображение решения и соответствующий этому изображению оригинал. Этот оригинал и будет искомым решением.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что найденная функция $x(t)=e^{3t}\cos t$ является решением данного дифференциального уравнения, удовлетворяющим заданным начальным условиям.

2. Найти частное решение дифференциального уравнения

$$\ddot{x}+a^2x=\cos at\,,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=x_0$, $\dot{x}(0)=\dot{x}_0$, т. е. решить задачу Коши с произвольными начальными условиями.

Перейдем к изображающему уравнению.

$$Y_n(p)=Y_2(p)=p^2+a^2\,.$$

$$\Psi_{n-1}(p)=\Psi_1(p)=1\cdot(px_0+\dot{x}_0)+0\cdot x_0=px_0+\dot{x}_0\,.$$

$$F(p)=\frac{p}{p^2+a^2}\risingdotseq\cos at\,. \qquad Y_n(p)\bar{x}(p)=\Psi_{n-1}(p)+F(p).$$

$$\left(p^2+a^2\right)\bar{x}(p)=px_0+\dot{x}_0+\frac{p}{p^2+a^2}\,.$$

$$\bar{x}(p)=\frac{px_0+\dot{x}_0}{p^2+a^2}+\frac{p}{\left(p^2+a^2\right)^2}=x_0\frac{p}{p^2+a^2}+\frac{\dot{x}_0}{a}\frac{a}{p^2+a^2}+\frac{1}{2a}\frac{2ap}{\left(p^2+a^2\right)^2}\risingdotseq$$

$$\risingdotseq x_0\cos at+\frac{\dot{x}_0}{a}\sin at+\frac{1}{2a}t\sin at\,.$$

Итак, найдено решение задачи Коши:

$$x(t) = x_0 \cos at + \frac{\dot{x}_0}{a} \sin at + \frac{1}{2a} t \sin at.$$

Поскольку величины x_0 и $\dot{x}_0$ могут быть взяты произвольными, то, введя обозначения $x_0 = C_1$, $\frac{\dot{x}_0}{a} = C_2$, сумеем получить и *общее* решение исходного дифференциального уравнения.

$$x(t) = C_1 \cos at + C_2 \sin at + \frac{1}{2a} t \sin at.$$

3. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$\dddot{x} - \ddot{x} + 4\dot{x} - 4x = 4(1-t).$$

Перейдем к уравнению в изображениях.

$Y_n(p) = Y_3(p) = p^3 - p^2 + 4p - 4 = (p-1)(p^2+4).$

$\Psi_{n-1}(p) = \Psi_2(p) = a_0(p^2 x_0 + p x_0' + x_0'') + a_1(p x_0 + x_0') + a_2 x_0,$

где $a_0 = 1, a_1 = -1, a_2 = 4.$

$\Psi_2(p) = (p^2 x_0 + p x_0' + x_0'') - (p x_0 + x_0') + 4x_0.$

Найдем изображение правой части уравнения:

$$F(p) = 4\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{4(p-1)}{p^2} \risingdotseq 4(1-t).$$

Запишем вспомогательное уравнение

$$(p^3 - p^2 + 4p - 4)\overline{x}(p) = \Psi_2(p) + \frac{4(p-1)}{p^2}.$$

$$\overline{x}(p) = \frac{\Psi_2(p)}{p^3 - p^2 + 4p - 4} + \frac{4(p-1)}{p^2(p^3 - p^2 + 4p - 4)} = \frac{\Psi_2(p)}{p^2(p-1) + 4(p-1)} + \frac{4(p-1)}{p^2(p-1)(p^2+4)} =$$

$$= \frac{\Psi_2(p)}{(p-1)(p^2+4)} + \frac{4}{p^2(p^2+4)}.$$

Здесь $\Psi_2(p)$ – многочлен 2-й степени с неопределенными коэффициентами (так как нам не заданы начальные условия, т. е. x_0, x_0', x_0'' – произвольны).

Первая дробь $\dfrac{\Psi_2(p)}{(p-1)(p^2+4)}$ является правильной рациональной дробью, т. к. степень многочлена в числителе ниже степени многочлена в знаменателе (в знаменателе стоит многочлен 3-й степени, а в числителе – 2-й). Поэтому ее можно разложить на простейшие дроби:

$$\frac{\Psi_2(p)}{(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+4}.$$

Коэффициенты A, B и C находить не нужно, т. к. многочлен $\Psi_2(p)$ сам имеет неопределенные коэффициенты (т. е. коэффициенты A, B и C будут выражаться через x_0, x_0', x_0'', которые у нас произвольны).

Разложим вторую дробь на простейшие:

$$\frac{4}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4}$$ (легко проверить).

Произведя указанные разложения, получим

$$\bar{x}(p) = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp+C}{p^2+4} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4} = A\frac{1}{p-1} + B\frac{p}{p^2+4} + \frac{C}{2}\frac{2}{p^2+4} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4} =$$

$$= A\frac{1}{p-1} + B\frac{p}{p^2+4} + \frac{C-1}{2}\frac{2}{p^2+4} + \frac{1}{p^2}.$$

Примем $A = C_1$, $B = C_2$, $\dfrac{C-1}{2} = C_3$.

Тогда

$$\bar{x}(p) = C_1\frac{1}{p-1} + C_2\frac{p}{p^2+4} + C_3\frac{2}{p^2+4} + \frac{1}{p^2} \risingdotseq C_1e^t + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t + t.$$

Таким образом, $x(t) = C_1e^t + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t + t$.

Нашли общее решение данного дифференциального уравнения.

Оно состоит из суммы общего решения однородного дифференциального уравнения, соответствующего данному, и частного решения данного неоднородного дифференциального уравнения:

$$x(t)=x_{\text{о.о}}(t)+x_{\text{ч.н}}(t),$$

где $$x_{\text{о.о}}(t)=C_1e^t+C_2\cos 2t+C_3\sin 2t,\quad x_{\text{ч.н}}(t)=t.$$

***Замечание* 1.** Для отыскания корней алгебраического уравнения удобно применять схему Горнера (прил. 1).

***Замечание* 2.** Требование, чтобы начальные условия задачи Коши были заданы в точке $t_0=0$, несущественно, т. к. заменой независимой переменной t на новую переменную $\tau=t-t_0$ задача с начальными условиями в точке $t_0\neq 0$ будет сведена к задаче с начальными условиями, заданными в точке $\tau_0=0$.

4. Найти решение дифференциального уравнения

$$x''+2x'+x=2e^{1-t},$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(1)=1,\ x'(1)=-1.$

Начальные условия определены при $t_0=1\neq 0$. Введем новую независимую переменную $\tau=t-1$. Рассмотрим функцию новой переменной: $y(\tau)=x(\tau+1)=x(t)$. Для функции $y(\tau)$ найдем первую и вторую производную по переменной t, считая $y(\tau)$ сложной функцией переменной t, где $\tau=\tau(t)=t-1$.

Имеем $x(t)=y(\tau),\ t=\tau+1,\ y(0)=x(1)=1,\ y'(0)=x'(1)=-1,$

$x'(t)=y'_t(\tau(t))=y'_\tau(\tau)\tau'_t(t)=y'_\tau(\tau)$, т. к. $\tau'_t(t)=(t-1)'=1,$

$x''(t)=(y'_\tau(\tau))'_t=y''_{\tau\tau}(\tau)\tau'_t(t)=y''_{\tau\tau}(\tau).$

Дифференциальное уравнение примет вид

$$y''(\tau) + 2y'(\tau) + y(\tau) = 2e^{-\tau}, \quad y(0) = 1, \; y'(0) = -1.$$

Найдем изображения производных функции $y(\tau)$:

$\bar{y} \doteqdot y(\tau),$

$p\bar{y} - 1 \doteqdot y'(\tau),$

$p^2\bar{y} - p + 1 \doteqdot y''(\tau).$

Запишем изображающее уравнение:

$$p^2\bar{y} - p + 1 + 2(p\bar{y} - 1) + \bar{y} = 2\frac{1}{p+1}.$$

Ищем решение.

$$(p^2 + 2p + 1)\bar{y} = 2\frac{1}{p+1} + p + 1.$$

$$\bar{y} = \frac{2}{(p+1)^3} + \frac{1}{p+1}.$$

$$y(\tau) = (\tau^2 + 1)e^{-\tau}.$$

Вернемся к старой переменной: $\tau = t - 1$, $y(\tau) = x(\tau + 1), \Rightarrow y(t-1) = x(t).$

Получаем окончательное решение:

$$x(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{1-t}.$$

ИНТЕГРИРОВАНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Решение систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в принципе ничем не отличается от решения отдельных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Примеры

1. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} + y = 4t, \\ \dot{y} - x = 2 - t^2 \end{cases}$$

с начальными условиями $x(0) = y(0) = 0$.

Выпишем изображения функций $x(t)$ и $y(t)$ и их производных:

$$x(t) \risingdotseq \overline{x}(p),$$

$$\dot{x}(t) \risingdotseq p\overline{x}(p) - x(0) = p\overline{x}(p),$$

$$y(t) \risingdotseq \overline{y}(p),$$

$$\dot{y}(t) \risingdotseq p\overline{y}(p) - y(0) = p\overline{y}(p).$$

Найдем изображение правых частей системы:

$$4t \risingdotseq 4\frac{1}{p^2},$$

$$2 - t^2 \risingdotseq 2\frac{1}{p} - \frac{2}{p^3}.$$

По формуле $t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

Перейдем к изображению системы:

$$\begin{cases} p\overline{x} + \overline{y} = \dfrac{4}{p^2}, \\ -\overline{x} + p\overline{y} = 2\dfrac{p^2 - 1}{p^3}. \end{cases}$$

Решим эту алгебраическую систему, используя формулы Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p & 1 \\ -1 & p \end{vmatrix} = p^2 + 1.$$

$$\Delta_{\overline{x}} = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{p^2} & 1 \\ \dfrac{2\left(p^2-1\right)}{p^3} & p \end{vmatrix} = \frac{4}{p} - \frac{2\left(p^2-1\right)}{p^3} = \frac{2\left(p^2+1\right)}{p^3},$$

$$\Delta_{\overline{y}} = \begin{vmatrix} p & \dfrac{4}{p^2} \\ -1 & \dfrac{2\left(p^2-1\right)}{p^3} \end{vmatrix} = \frac{2\left(p^2-1\right)}{p^2} + \frac{4}{p^2} = \frac{2\left(p^2+1\right)}{p^2}.$$

$$\overline{x}(p) = \frac{\Delta_{\overline{x}}}{\Delta} = \frac{2\left(p^2+1\right)}{p^3\left(p^2+1\right)} = \frac{2}{p^3} \risingdotseq t^2,$$

$$\overline{y}(p) = \frac{\Delta_{\overline{y}}}{\Delta} = \frac{2\left(p^2+1\right)}{p^2\left(p^2+1\right)} = \frac{2}{p^2} = 2\cdot\frac{1}{p^2} \risingdotseq 2t.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} x(t) = t^2, \\ y(t) = 2t. \end{cases}$$

Нашли решение данной системы, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Непосредственной проверкой легко убедиться, что это искомое решение.

2. Найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y} + y, & x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -1, \\ \ddot{y} = 2\dot{x} + y, & y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

Перейдем к вспомогательной системе

$$\begin{cases} p^2\overline{x} - p\cdot 1 + 1 = p\overline{y} - 0 + \overline{y}, \\ p^2\overline{y} - p\cdot 0 - 1 = 2p\overline{x} - 2 + \overline{y}, \end{cases}$$ нормализуем эту систему:

$$\begin{cases} p^2\bar{x} - (p+1)\bar{y} = p-1, \\ 2p\bar{x} - (p^2-1)\bar{y} = 1. \end{cases}$$ Решаем алгебраическую систему.

$$\Delta = \begin{vmatrix} p^2 & -(p+1) \\ 2p & -(p^2-1) \end{vmatrix} = -p^2(p^2-1) + 2p(p+1) = p(p+1)[2 - p(p-1)] =$$

$$= p(p+1)(2 - p^2 + p) = -p(p+1)(p^2 - 2p + p - 2) = -p(p+1)^2(p-2).$$

$$\Delta_{\bar{x}} = \begin{vmatrix} p-1 & -(p+1) \\ 1 & -(p^2-1) \end{vmatrix} = -(p-1)^2(p+1) + (p+1) = -(p+1)(p^2-2p) = -p(p+1)(p-2).$$

$$\Delta_{\bar{y}} = \begin{vmatrix} p^2 & p-1 \\ 2p & 1 \end{vmatrix} = p^2 - 2p(p-1) = -p^2 + 2p = -p(p-2).$$

$$\bar{x}(p) = \frac{\Delta_{\bar{x}}}{\Delta} = \frac{-p(p+1)(p-2)}{-p(p+1)^2(p-2)} = \frac{1}{p+1} \xrightarrow{\bullet} e^{-t}.$$

$$\bar{y}(p) = \frac{\Delta_{\bar{y}}}{\Delta} = \frac{-p(p-2)}{-p(p+1)^2(p-2)} = \frac{1}{(p+1)^2} \xrightarrow{\bullet} te^{-t}$$

(оригиналы находим по формуле $\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}} \xrightarrow{\bullet} t^n e^{-\alpha t}$).

Итак,

$$\begin{cases} x(t) = e^{-t}, \\ y(t) = te^{-t}. \end{cases}$$

Таким образом, получили решение системы, удовлетворяющее начальным условиям, т. е. получили решение задачи Коши.

Аналогично решаются методом операционного исчисления линейные системы дифференциальных уравнений высших порядков с двумя или большим числом неизвестных функций.

Замечание. Операторный способ решения систем дифференциальных уравнений применим к системам порядка выше первого, что очень важно, так как в этом случае применение других способов крайне затруднительно.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Свертка функций

Пусть $f(t), y(t)$ – непрерывные или кусочно-непрерывные функции.

Определение

Сверткой функций $f(t)$ и $y(t)$ называется функция $q(t)$, определяемая равенством $$q(t)=\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau.$$

Эту функцию обозначают символом $f*y$, т. е. $q=f*y$, ее значение в точке *t* может быть записано как

$$q(t)=(f*y)(t), \quad \text{или} \quad q(t)=f(t)*y(t).$$

Таким образом, $\boxed{f(t)*y(t)=(f*y)(t)\overset{def}{=}\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau}$.

Это некоторая новая функция от *t*.

Свойства свертки

1. Свойство симметрии свертки:

$$f*y=y*f.$$

Это свойство легко проверить, сделав замену переменной интегрирования:

$$t-\tau=u, \quad \tau=t-u, \quad d\tau=-du, \quad \tau=0\Rightarrow u=t, \quad \tau=t\Rightarrow u=0.$$

$$f*y=\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau=-\int_t^0 f(t-u)y(u)du=\int_0^t f(t-u)y(u)du=\int_0^t y(u)f(t-u)du=y*f.$$

2. Если $f(t)$ и $y(t)$ – оригиналы, то их свертка тоже является оригиналом.

Это следует из того, что если $y(t)$ – оригинал, то и $y(t-\tau)$ – оригинал при $0<\tau<t$. Докажем это. В самом деле, если τ меняется от 0 до t, то $t-\tau$ меняется от t до 0, т. е. аргумент функции $y(t-\tau)$ изменяется в пределах от 0 до t. Но тогда при любом фиксированном $t>0$ при таких значениях аргумента функция y по условию является оригиналом. Следовательно, при любых $t>0$ и $0<\tau<t$ функция $y(t-\tau)$ является оригиналом.

Ранее было доказано, что произведение двух оригиналов есть оригинал. Отсюда следует, что при любом $t>0$ функция $f(\tau)y(t-\tau)$ как функция переменной τ является оригиналом, если $0<\tau<t$ (т. е. если τ меняется в пределах от 0 до t).

Пусть $|f(t)|\le M_1e^{s_1t}$, а $|y(t)|\le M_2e^{s_2t}$.

Тогда $|f(\tau)|\le M_1e^{s_1\tau}$, и т. к. $|y(t-\tau)|\le M_2e^{s_2(t-\tau)}$, то

$$|f(\tau)y(t-\tau)|=|f(\tau)||y(t-\tau)|\le M_1M_2e^{s_2t+(s_1-s_2)\tau}=M_1M_2e^{s_2t}e^{(s_1-s_2)\tau}\le M_1M_2e^{s_2t}e^{s_1\tau},$$

поскольку показатели роста оригиналов считаются неотрицательными: $s_1\ge 0$ и $s_2\ge 0$. Заметим, что произведение $M_1M_2e^{s_2t}=\mathrm{const}$ при любом фиксированном $t>0$. Теперь не трудно показать ограниченность роста $\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau$ как функции переменной t.

$$\left|\int_0^t f(\tau)y(t-\tau)d\tau\right|\le\int_0^t|f(\tau)y(t-\tau)|d\tau\le M_1M_2e^{s_2t}\int_0^t e^{s_1\tau}d\tau=\frac{M_1M_2}{s_1}e^{s_2t}\left.e^{s_1\tau}\right|_0^t=$$

$$=\frac{M_1M_2}{s_1}e^{s_2t}(e^{s_1t}-1)<\frac{M_1M_2}{s_1}e^{s_2t}e^{s_1t}=\frac{M_1M_2}{s_1}e^{(s_1+s_2)t}=Me^{s_0t}.$$

Здесь $M = \dfrac{M_1 M_2}{s_1}$, а $s_0 = s_1 + s_2$.

Впрочем, ранее уже было доказано, что $\int\limits_0^t \varphi(\tau)d\tau$ от оригинала $\varphi(\tau)$ тоже является оригиналом.

3. Все обычные свойства умножения справедливы и для свертывания. Это утверждение легко проверить непосредственно. Но это же утверждение вытекает как следствие теоремы умножения изображений, которая будет рассмотрена ниже.

Теорема умножения (теорема Бореля)

Если $F_1(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f_1(t)$ и $F_2(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f_2(t)$, то

$$\boxed{F_1(p)F_2(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau},$$

$$\text{т. е. } F_1(p)F_2(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} (f_1 * f_2)(t).$$

Таким образом, перемножение изображений соответствует свертыванию оригиналов.

Или: при свертывании оригиналов их изображения перемножаются.

Иначе: произведение изображений является изображением свертки их оригиналов.

Доказательство

$$L\{f_1 * f_2\} = \int\limits_0^\infty e^{-pt} \int\limits_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)d\tau\, dt.$$

Это двойной интеграл с областью интегрирования D (рис. 3).

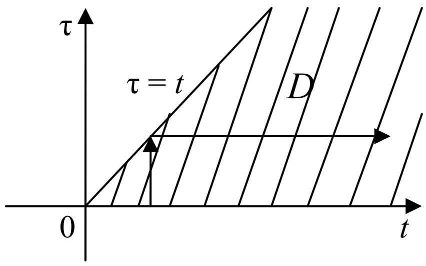


Рис. 3

Изменим порядок интегрирования в этом интеграле. Возьмем внешний интеграл по τ.

$$\int_0^\infty e^{-pt}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\,dt=\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}f_2(t-\tau)dt.$$

Сделаем замену переменной интегрирования во внутреннем интеграле:

$$t-\tau=u;\quad dt=du;\quad t=u+\tau;$$
$$t=\tau\Rightarrow u=0;\quad t=\infty\Rightarrow u=\infty.$$
$$\int_0^\infty f_1(\tau)d\tau\int_0^\infty e^{-p(u+\tau)}f_2(u)du=\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\int_0^\infty e^{-pu}f_2(u)du=$$
$$=\left(\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-p\tau}d\tau\right)\cdot\left(\int_0^\infty f_2(u)e^{-pu}du\right)=F_1(p)F_2(p).$$

Поскольку внутренний интеграл не зависит от переменной интегрирования внешнего интеграла (т. е. ни подынтегральная функция, ни пределы интегрирования внутреннего интеграла не зависят от переменной τ), а внешний интеграл не зависит от переменной u, то повторный интеграл равен произведению двух определенных интегралов, а эти интегралы являются изображениями функций $f_1(t)$ и соответственно $f_2(t)$.

Таким образом, $F_1(p)F_2(p)\risingdotseq(f_1*f_2)(t)$.

Следствие

Следствием этой теоремы является тот факт, что свойства умножения распространяются и на свертывание, т. е. операция свертывания обладает теми же свойствами, что и операция умножения:

а) коммутативность свертки:

$F_1(p)F_2(p) = F_2(p)F_1(p) \Rightarrow (f_1 * f_2)(t) = (f_2 * f_1)(t)$.

По теореме единственности: если изображения равны, то равны и их оригиналы (во всех регулярных точках).

Получили свойство симметрии (коммутативности) свертки:

$$\boxed{f_1 * f_2 = f_2 * f_1};$$

б) ассоциативность свертки.

Поскольку $F_1(p)\cdot[F_2(p)\cdot F_3(p)] = [F_1(p)\cdot F_2(p)]\cdot F_3(p)$, то в силу теоремы единственности имеем свойство ассоциативности свертки:

$$\boxed{f_1 * (f_2 * f_3) = (f_1 * f_2) * f_3};$$

в) дистрибутивность свертки относительно операции сложения.

Поскольку $F_1(p)[F_2(p) + F_3(p)] = F_1(p)F_2(p) + F_1(p)F_3(p)$, то в силу теоремы единственности и свойства линейности изображений получим дистрибутивное свойство свертки:

$$\boxed{f_1 * (f_2 + f_3) = f_1 * f_2 + f_1 * f_3}.$$

Примеры

1. Найти свертку функций $f_1(t) = t^2, \quad f_2(t) = t$.

$$t^2 * t = \int_0^t \tau^2 (t - \tau) d\tau = \left[t\frac{\tau^3}{3} - \frac{\tau^4}{4} \right]_0^t = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{1}{12}t^4 .$$

Итак, $$t^2 * t = \frac{t^4}{12}.$$

2. Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{1}{\left(p^2 + a^2\right)^2}.$$

Представим $F(p)$ следующим образом:

$$F(p) = \frac{1}{\left(p^2 + a^2\right)^2} = \left(\frac{1}{a}\frac{a}{p^2 + a^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\frac{a}{p^2 + a^2}\right).$$

$$F_1(p) = \frac{1}{a}\frac{a}{p^2 + a^2} \doteqdot \frac{1}{a}\sin at.$$

$$F(p) = F_1(p) \cdot F_1(p) \doteqdot$$

$$\doteqdot \int_0^t \frac{1}{a}\sin a\tau \cdot \frac{1}{a}\sin a(t-\tau)d\tau = \frac{1}{a^2}\int_0^t \frac{1}{2}\left[\cos(a\tau - at + a\tau) - \cos(a\tau + at - a\tau)\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\int_0^t \left[\cos(2a\tau - at) - \cos at\right]d\tau = \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{2a}\sin(2a\tau - at) - \tau\cos at\right]_0^t =$$

$$= \frac{1}{2a^2}\left[\frac{1}{2a}\sin at - \frac{1}{2a}\sin(-at) - t\cos at\right] = \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at).$$

Таким образом, $$\boxed{\frac{1}{\left(p^2 + a^2\right)^2} \doteqdot \frac{1}{2a^3}(\sin at - at\cos at)}.$$

Мы вывели формулу № 14 из таблицы изображений (стр. 29).

Как следствие теоремы умножения можно получить теорему об интегрировании оригинала. Рассмотрим особенности свертывания с единичной функцией Хевисайда.

Пусть $f(t)$ – оригинал и $F(p) \doteqdot f(t)$.

Найдем

$$f(t) * \eta(t) = \int_0^t f(\tau)\eta(t-\tau)d\tau .$$

По свойству симметрии свертки

$$\int_0^t f(\tau)\eta(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)\eta(\tau)d\tau ,$$

а поскольку для любого $t > 0$ при $0 < \tau \le t \quad \eta(\tau) = 1,$ то

$$\int_0^t f(t-\tau)\eta(\tau)d\tau = \int_0^t f(t-\tau)d\tau .$$

Сделаем замену переменной интегрирования:

$$t-\tau = u, \quad \tau = t-u, \quad d\tau = -du, \quad \tau = 0 \Rightarrow u = t, \quad \tau = t \Rightarrow u = 0.$$

$$\int_0^t f(t-\tau)d\tau = -\int_t^0 f(u)du = \int_0^t f(u)du.$$

Обозначив переменную интегрирования (u) снова через τ, получаем следующие равенства: $\int_0^t f(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau,$

$$\int_0^t f(t-\tau)\eta(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau,$$

$$\int_0^t f(\tau)\eta(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, для любого оригинала $f(t)$ свертывание с единичной функцией Хевисайда означает интегрирование этой функции в пределах от нуля до t:

$$f(t) * \eta(t) = \int_0^t f(\tau)\eta(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)d\tau .$$

Применяя теорему умножения и имея в виду, что $\frac{1}{p} \xrightarrow{\bullet} 1 = \eta(t)$, получим

$$\frac{F(p)}{p} = F(p) \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow{\bullet} f(t) * \eta(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau .$$

Итак, деление изображения на p соответствует интегрированию оригинала в пределах от 0 до t (теорема интегрирования оригинала).

Примеры

Используя свертку, найти оригиналы, соответствующие изображениям

$$\frac{1}{p(p^2+1)}, \quad \frac{1}{p^2(p^2+1)}.$$

Воспользуемся теоремой Бореля (теоремой умножения).

1. $\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p} \xrightarrow{\bullet} \int_0^t \sin\tau \cdot \eta(t-\tau) d\tau = \int_0^t \sin\tau d\tau = -\cos\tau \Big|_0^t = 1 - \cos t .$

Тот же результат можно получить, разложив изображение на простейшие дроби:

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1} \xrightarrow{\bullet} 1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2} .$$

2. $\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{(p^2+1)} \cdot \frac{1}{p^2} \xrightarrow{\bullet} \int_0^t \sin\tau \cdot (t-\tau) d\tau = t\int_0^t \sin\tau d\tau - \int_0^t \tau \sin\tau d\tau =$

$$= -t\cos\tau\Big|_0^t + \tau\cos\tau\Big|_0^t - \int_0^t \cos\tau d\tau = -t\cos t + t + t\cos t - \sin\tau\Big|_0^t = t - \sin t .$$

Методом разложения изображения на простейшие дроби получим тот же результат: $\frac{1}{p^2(p^2+1)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+1} \xrightarrow{\bullet} t - \sin t.$

Формула Дюамеля

Если $F_1(p) \risingdotseq f_1(t)$ и $F_2(p) \risingdotseq f_2(t)$, то

$$\boxed{pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau}.$$

Доказательство

По теореме Бореля $F_1(p) \cdot F_2(p) \risingdotseq (f_1 * f_2)(t)$.

По правилу дифференцирования оригинала

$$pF_1(p)F_2(p) - (f_1 * f_2)(0) \risingdotseq (f_1 * f_2)'(t),$$ но поскольку

$$(f_1 * f_2)(0) = \left[\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau\right]_{t=0} = \int_0^0 f_1(\tau)f_2(0-\tau)d\tau = 0,$$ то

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq (f_1 * f_2)'(t).$$

Найдем производную свертки

$$(f_1 * f_2)'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau = \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau + f_1(t)f_2(0).$$

Здесь мы дифференцируем интеграл как сложную функцию, зависящую от параметра t:

$$\frac{d}{dt}I(u(t),t) = \frac{d}{dt}\int_0^{u(t)} \varphi(t,\tau)d\tau = \varphi(t,u(t))u'(t) + \int_0^{u(t)} \frac{d\varphi(t,\tau)}{dt}d\tau$$

при условии, что в нашем случае верхний предел интегрирования $u(t) = t,$ а $\varphi(t,\tau) = f_1(\tau)f_2(t-\tau).$

Таким образом,

$$pF_1(p)F_2(p) \risingdotseq (f_1 * f_2)'(t) = \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau + f_1(t)f_2(0).$$

Формула Дюамеля доказана. Интеграл, стоящий в правой части формулы, называется интегралом Дюамеля.

Рассмотрим применение формулы Дюамеля к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пусть требуется найти частное решение уравнения

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=f(t),$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$x(0)=x'(0)=\ldots=x^{(n-1)}(0)=0.$$

В операторной форме это уравнение примет вид $Y(p)\overline{x}=F(p)$, где

$$Y(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n,\quad F(p)\doteqdot f(t),\quad \overline{x}\doteqdot x(t).$$

Составим вспомогательное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t)+a_1x^{(n-1)}(t)+\ldots+a_nx(t)=1$$

и найдем его частное решение $x_1(t)$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $x_1(0)=x_1'(0)=\ldots=x_1^{(n-1)}(0)=0.$

Операторная форма этого уравнения $Y(p)\overline{x_1}=\dfrac{1}{p}$, где $\overline{x_1}$ – изображение частного решения вспомогательного уравнения, т. е.

$$\overline{x_1}=\overline{x_1}(p)\doteqdot x_1(t).$$

Таким образом, имеем $Y(p)=\dfrac{1}{p\overline{x_1}}$.

Но тогда из $Y(p)\overline{x}=F(p)$ получаем $\overline{x}=\dfrac{F(p)}{Y(p)}=p\overline{x_1}(p)F(p).$

Теперь по формуле Дюамеля находим решение исходного уравнения:

$$x(t)=f(t)x_1(0)+\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau,$$

и если учесть, что $x_1(0)=0$, то

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)x_1'(t-\tau)d\tau .$$

Обычно $\overline{x}_1(p)$ и соответственно $x_1(t)$ находятся достаточно просто.

Замечание. Если начальные условия, которым должно удовлетворять искомое решение, не нулевые, то заменой искомой функции имеющуюся задачу можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями, при этом лишь несколько изменится правая часть исходного уравнения, т. е. функция $f(t)$.

Примеры

1. Найти решение уравнения $x''=\operatorname{arctg} t$, удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=x'(0)=0$.

Вспомогательным уравнением будет $x''=1$.

Его изображение $p^2\overline{x_1}=\dfrac{1}{p}$.

Отсюда $\overline{x_1}=\dfrac{1}{p^3}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2!}{p^{2+1}}$ и $x_1(t)=\dfrac{1}{2}t^2$. Тогда $x_1'(t)=t,\quad x_1(0)=0.$

Воспользовавшись формулой Дюамеля, найдем искомое решение:

$$x(t)=\operatorname{arctg} t\cdot 0+\int_0^t \operatorname{arctg}\tau\cdot(t-\tau)d\tau.$$

Выполняя интегрирование по частям, получим

$$x(t)=\operatorname{arctg}\tau\cdot\left(t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right)\Big|_0^t-\int_0^t\left(t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{d\tau}{1+\tau^2}=\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg} t-\frac{t}{2}\ln(1+\tau^2)\Big|_0^t+\frac{\tau}{2}\Big|_0^t-$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\tau\Big|_0^t=\frac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arctg} t-\frac{t}{2}\ln(1+t^2)+\frac{t}{2}.$$

Итак, $$x(t)=\frac{1}{2}(t^2-1)\operatorname{arctg}t-\frac{t}{2}\ln(1+t^2)+\frac{t}{2}.$$

2. Найти решение уравнения

$$x''-x'=\frac{1}{1+e^t}+2,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0)=1, \quad x'(0)=-2.$

Начальные условия не нулевые; чтобы воспользоваться формулой Дюамеля, сведем данную задачу к задаче с нулевыми начальными условиями.

Введем новую неизвестную функцию $y(t)=x(t)-x(0)-x'(0)t$.

Для этой функции $y'(t)=x'(t)-x'(0); \quad y''(t)=x''(t); \quad y(0)=0; \quad y'(0)=0$.

Перейдем к уравнению для новой функции.

$x(t)=y(t)+x(0)+x'(0)t=y(t)+1-2t;\ x'(t)=y'(t)+x'(0)=y'(t)-2;\ x''(t)=y''(t).$

Подставляя найденные значения, получим

$$y''-y'+2=\frac{1}{1+e^t}+2, \quad \Rightarrow \quad y''-y'=\frac{1}{1+e^t}, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0.$$

Составим вспомогательное уравнение: $y''-y'=1, \quad y(0)=0, \quad y'(0)=0$.

Перейдем к изображающему уравнению: $p^2\bar{y}-p\bar{y}=\dfrac{1}{p}.$

Найдем его решение $\bar{y}_1=\dfrac{1}{p^2(p-1)}$. Чтобы найти соответствующий этому решению оригинал, разложим дробь на простейшие дроби:

$$\bar{y}_1=\frac{1}{p^2(p-1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{p-1}.$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$A(p-1)+Bp(p-1)+Cp^2\equiv 1.$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях p:

при p^2 $\quad B+C=0;$

при p $\quad A-B=0;$

при p^0 $\quad -A=1.$

Получим $A=-1, \quad B=A=-1, \quad C=-B=1.$

Следовательно, $\quad \overline{y}_1=\dfrac{1}{p^2(p-1)}=\dfrac{-1}{p^2}+\dfrac{-1}{p}+\dfrac{1}{p-1}.$

Этому решению соответствует оригинал $y_1(t)=e^t-1-t.$

Теперь для отыскания решения $y(t)$ можно воспользоваться формулой Дюамеля

$$\overline{y}=p\overline{y}_1F(p)\doteq f(t)y_1(0)+\int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau=y(t).$$

Учитывая, что $y_1(0)=0$ (как решение уравнения с нулевыми начальными условиями), окончательно имеем

$$y(t)=\int_0^t f(\tau)y_1'(t-\tau)d\tau.$$

В нашем случае $y_1(t)=e^t-1-t$, $\quad f(t)=\dfrac{1}{1+e^t}.$

Тогда $y_1'(t)=e^t-1$. Чтобы найти решение уравнения $y''-y'=\dfrac{1}{1+e^t}$,

нужно вычислить интеграл $\displaystyle\int_0^t \frac{e^{t-\tau}-1}{1+e^\tau}d\tau=y(t).$

$$y(t)=\int_0^t \frac{e^{t-\tau}-1}{1+e^\tau}d\tau=\int_0^t \frac{e^te^{-\tau}-1}{1+\dfrac{1}{e^{-\tau}}}d\tau=\int_0^t \frac{(e^te^{-\tau}-1)e^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}d\tau=-\int_0^t \frac{e^te^{-\tau}-1}{e^{-\tau}+1}de^{-\tau}=$$

$$=\int_0^t \frac{1}{e^{-\tau}+1}de^{-\tau}-e^t\int_0^t \frac{e^{-\tau}}{e^{-\tau}+1}de^{-\tau}=\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1}-e^t\int_0^t \frac{e^{-\tau}+1-1}{e^{-\tau}+1}de^{-\tau}=$$

$$= \ln(e^{-\tau}+1)\Big|_0^t - e^t\int_0^t de^{-\tau} + e^t\int_0^t \frac{d(e^{-\tau}+1)}{e^{-\tau}+1} = \ln(e^{-t}+1) - \ln 2 - e^t e^{-\tau}\Big|_0^t + e^t\ln(e^{-\tau}+1)\Big|_0^t =$$

$$= \ln(e^{-t}+1) - \ln 2 - 1 + e^t + e^t\ln(e^{-t}+1) - e^t\ln 2 = (e^t+1)(\ln\left(\frac{1}{e^t}+1\right) - \ln 2) + e^t - 1 =$$

$$= (e^t+1)(\ln\frac{1+e^t}{e^t} - \ln 2) + e^t - 1 = (e^t+1)(\ln(e^t+1) - t - \ln 2) + e^t - 1, \text{ т. е.}$$

$$y(t) = (e^t+1)(\ln\frac{e^t+1}{2} - t) + e^t - 1.$$

Итак, получено решение преобразованного уравнения. Вернемся к исходной функции. У нас $x(t) = y(t) + x(0) + x'(0)t = y(t) + 1 - 2t$. Следовательно,

$$x(t) = (e^t+1)(\ln\frac{e^t+1}{2} - t) + e^t - 2t.$$

Задача полностью решена.

Теорема запаздывания

Пусть $f(t)$ – оригинал (рис. 4) и пусть $\tau > 0$. Рассмотрим $f(t-\tau)$. График этой функции является смещенным по оси Ot вправо на τ графиком функции $f(t)$ (рис. 5).

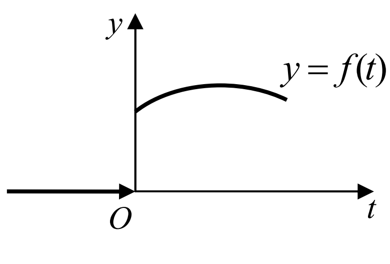


Рис. 4

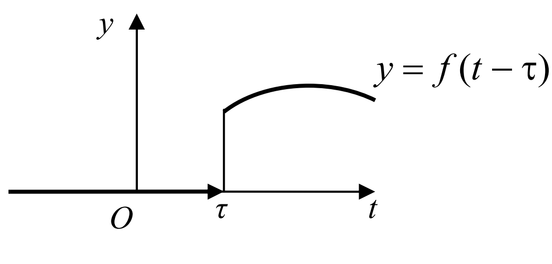


Рис. 5

Например:

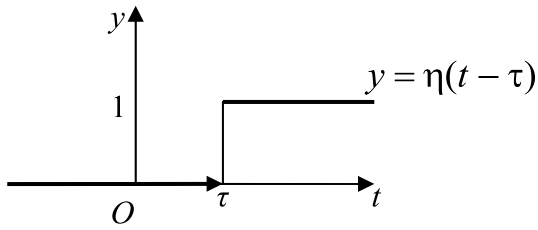


Рис. 6

Это график функции Хевисайда, смещенный вправо на величину τ.

Если функция $f(t)$ описывает некоторый процесс, то функция $f(t-\tau)$ описывает тот же процесс, но начавшийся с запаздыванием на τ. Поэтому говорят, что функция $f(t-\tau)$ обладает запаздыванием на величину τ.

Сформулируем **теорему запаздывания**.

Если $F(p)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t)$ и $\tau > 0$, то

$$\boxed{e^{-p\tau}F(p)\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t-\tau)}\,.$$

При этом считаем, что $f(t-\tau) \equiv 0$ при $t < \tau$ (т. е. когда $t - \tau < 0$).

Доказательство

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int_0^\tau e^{-pt} f(t-\tau)dt + \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt.$$

Первый интеграл равен нулю, т. к. $f(t-\tau) \equiv 0$ при $t - \tau < 0$, т. е. при $t < \tau$. Во втором интеграле сделаем замену переменной интегрирования: $t - \tau = u,\quad dt = du,\quad t = u + \tau,\quad t = \tau \Rightarrow u = 0,\quad t = \infty \Rightarrow u = \infty.$

$$L\{f(t-\tau)\} = \int_\tau^\infty e^{-pt} f(t-\tau)dt = \int_0^\infty e^{-p(u+\tau)} f(u)du = e^{-p\tau}\int_0^\infty e^{-pu} f(u)du = e^{-p\tau}F(p).$$

Таким образом, $\qquad e^{-p\tau}F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} f(t-\tau).$

Замечание

Функцию $f(t-\tau)$ мы считаем оригиналом, значит, нельзя забывать, что при отрицательных значениях аргумента, т. е. при $t-\tau<0$, она должна обращаться в тождественный нуль, т. е. что $f(t-\tau)\equiv 0$ при $t<\tau \quad (t-\tau<0)$.

Для того чтобы избежать ошибок, связанных с этим обстоятельством, и помнить об этом условии, пишут $f(t-\tau)\eta(t-\tau)$ вместо $f(t-\tau)$, т. к. в соответствии с данным замечанием

$$f(t-\tau)\equiv f(t-\tau)\eta(t-\tau).$$

Множитель $\eta(t-\tau)$ напоминает о запаздывании.

Пример

Рассмотрим функцию $f(t)=(t-1)^2$ как оригинал.

График этой функции представлен на рис. 7.

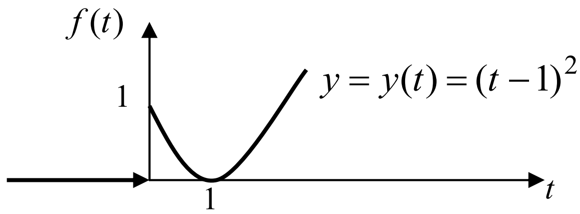


Рис. 7

Найдем изображение данной функции:

$$f(t)=(t-1)^2=t^2-2t+1 \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftarrow}} \frac{2}{p^3}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p}.$$

Рассмотрим теперь функцию $f_1(t-1)=(t-1)^2\eta(t-1)$.

Это функция с запаздыванием $\tau = 1$, полученная из функции $f_1(t) = t^2$. Ее график представлен на рис. 8.

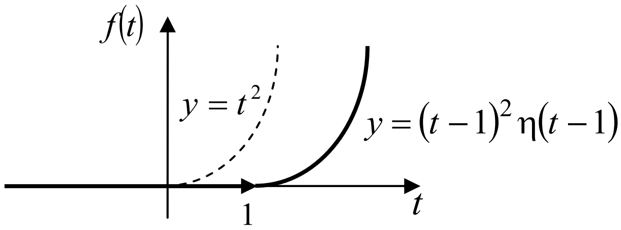


Рис. 8

Он получается из графика функции $f_1(t) = t^2$ сдвигом вправо по оси $0t$ на $\tau = 1$. Получим изображение этой функции, учитывая имеющееся запаздывание:

$$f_1(t-1) = (t-1)^2 \eta(t-1) \doteqdot \frac{2}{p^3} e^{-p}, \text{ т. к. } f_1(t) = t^2 \doteqdot \frac{2}{p^3}.$$

Видим, что как сами функции, так и их изображения существенно отличаются друг от друга. Если бы не было множителя $\eta(t-1)$, функции $(t-1)^2$ и $(t-1)^2 \eta(t-1)$ можно было бы спутать. Было бы неясно, рассматривается ли функция без запаздывания $f(t) = (t-1)^2$ или же функция $f_1(t-1) = (t-1)^2 \eta(t-1)$ с запаздыванием на $\tau = 1$.

Поэтому теорему запаздывания следует записать так:

если $F(p) \doteqdot f(t)$ и $\tau > 0$, то

$$\boxed{e^{-p\tau} F(p) \doteqdot f(t-\tau)\eta(t-\tau)}.$$

Примеры

1. Найти изображение ступенчатой функции

$$f(t) = 2\eta(t) + 1 \cdot \eta(t-1) - 2\eta(t-2) - 1 \cdot \eta(t-4),$$

график которой имеет вид, изображенный на рис. 9.

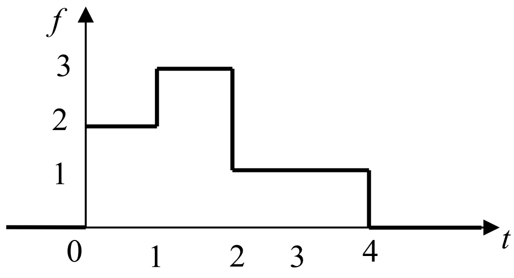


Рис. 9

$$L\{f(t)\}=2L\{\eta(t)\}+L\{\eta(t-1)\}-2L\{\eta(t-2)\}-L\{\eta(t-4)\}=$$

$$=2\frac{1}{p}+\frac{1}{p}e^{-p}-2\frac{1}{p}e^{-2p}-\frac{1}{p}e^{-4p}=$$

$$=\frac{1}{p}\left(2+e^{-p}-2e^{-2p}-e^{-4p}\right)\risingdotseq f(t).$$

2. Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения с графически заданной правой частью:

$$x''+4x=f(t),\quad x(0)=x'(0)=0,$$

где $f(t)$ – функция, график которой представлен на рис. 10.

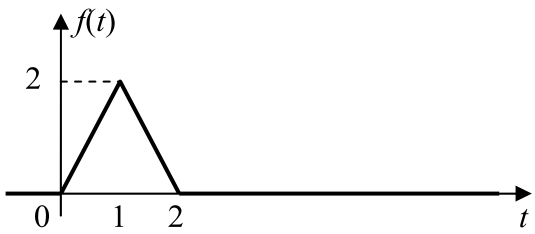


Рис. 10

Найдем аналитическое выражение для функции $f(t)$.

При $t\in[0,1]$ $f(t)=2t$; на промежутке $[1,2]$ нужно компенсировать эту функцию за счет слагаемого $-2t\eta(t-1)$ и добавить функцию $(4-2t)\eta(t-1)$, а на оставшемся интервале $(2,\infty)$ обнулить и вновь добавленную функцию за счет слагаемого $-(4-2t)\eta(t-2)$.

Таким образом, при любых t

$$f(t)=2t\eta(t)-2t\eta(t-1)+(4-2t)\eta(t-1)-(4-2t)\eta(t-2)=$$

$$=2t\eta(t)-4(t-1)\eta(t-1)+2(t-2)\eta(t-2).$$

Теперь можно найти изображение этой функции, применив теорему запаздывания:

$$F(p) = L\{f(t)\} = 2\frac{1}{p^2} - 4\frac{1}{p^2}e^{-p} + 2\frac{1}{p^2}e^{-2p}.$$

С учетом нулевых начальных условий изображающее уравнение примет вид

$$p^2\bar{x} + 4\bar{x} = \frac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2}, \text{ откуда } \bar{x} = \frac{2 - 4e^{-p} + 2e^{-2p}}{p^2(p^2+4)}.$$

Найдем оригинал, соответствующий следующей дроби:

$$\frac{4}{p^2(p^2+4)} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+4} = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{2}\frac{2}{p^2+4} \risingdotseq t - \frac{1}{2}\sin 2t.$$

Тогда изображение решения можно представить в виде

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\frac{4}{p^2(p^2+4)} - \frac{4e^{-p}}{p^2(p^2+4)} + \frac{1}{2}\frac{4e^{-2p}}{p^2(p^2+4)}.$$

Применяя теорему запаздывания, получим решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$x(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{2}\sin 2t)\eta(t) - (t - 1 - \frac{1}{2}\sin 2(t-1))\eta(t-1) + \frac{1}{2}(t - 2 - \frac{1}{2}\sin 2(t-2))\eta(t-2).$$

Дельта-функция и ее изображение

Рассмотрим функцию $\delta_h(t)$:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} \frac{1}{h^2}(h+t), & -h \le t \le 0, \\ \frac{1}{h^2}(h-t), & 0 < t \le h, \\ 0, & |t| > h, \quad \text{где} \quad h > 0. \end{cases}$$

График этой функции имеет вид, изображенный на рис. 11.

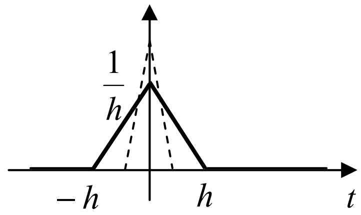


Рис. 11

Для этой функции

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_h(t)dt = \int\limits_{-h}^{+h} \delta_h(t)dt = S_\Delta = \frac{1}{2}2h \cdot \frac{1}{h} = 1 \qquad \forall h > 0,$$ т. е. не зависит от h.

Определим функцию $\delta(t)$ как предел $\delta_h(t)$ при $h \to 0$:

$$\delta(t) \overset{def}{=} \lim_{h \to 0} \delta_h(t).$$

Видно, что при этом

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0, \\ +\infty, & t = 0. \end{cases}$$

Будем считать, что в пределе по-прежнему

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1.$$

Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{0} \delta_h(t)dt = \int\limits_{-h}^{0} \delta_h(t)dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \delta_h(t)dt = \int\limits_{0}^{+h} \delta_h(t)dt = \frac{1}{2}S_\Delta = \frac{1}{2} \qquad \forall h > 0,$

то $\int\limits_{-\infty}^{0} \delta(t)dt = \int\limits_{0}^{+\infty} \delta(t)dt = \int\limits_{-0}^{0} \delta(t)dt = \int\limits_{0}^{+0} \delta(t)dt = \frac{1}{2}$, а $\int\limits_{-0}^{+0} \delta(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = 1$

(считаем, что при $h \to 0$ в пределе равенства остаются справедливыми).

Такую функцию называют **импульсной функцией Дира́ка,** или δ-**функцией**. Это простейшая обобщенная функция.

Можно определить эту функцию немного иначе. Рассмотрим функцию $\delta_\ell(t)$:

$$\delta_\ell(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\ell} & \text{при} \quad |t|\le \ell,\\ 0 & \text{при} \quad |t|>\ell,\end{cases} \quad \text{где} \quad \ell>0.$$

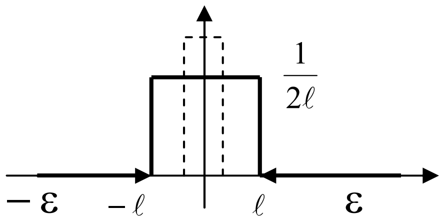


Рис. 12

График этой функции представлен на рис. 12.

Очевидно, что при любом $\varepsilon>\ell$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta_\ell(t)dt=S_{\text{прям}}=\frac{1}{2\ell}\cdot 2\ell=1 \qquad (\forall \ell>0), \tag{*}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{0}\delta_\ell(t)dt=\int_{0}^{+\varepsilon}\delta_\ell(t)dt=\frac{1}{2}S_{\text{прям}}=\frac{1}{2} \qquad (\forall \ell>0). \tag{**}$$

Определим функцию $\delta(t)$ как предел $\delta_\ell(t)$ при $\ell\to 0$. Будем считать при этом, что в пределе полученные равенства (*) и (**) остаются справедливыми.

$$\boxed{\delta(t)\overset{def}{=}\lim_{\ell\to 0}\delta_\ell(t)}.$$

При этом снова получим

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t\ne 0,\\ +\infty & \text{при} \quad t=0,\end{cases} \quad \text{а} \quad \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)dt=1 \qquad \forall\varepsilon>0.$$

График (условный) функции $\delta(t)$ показан на рис. 13.

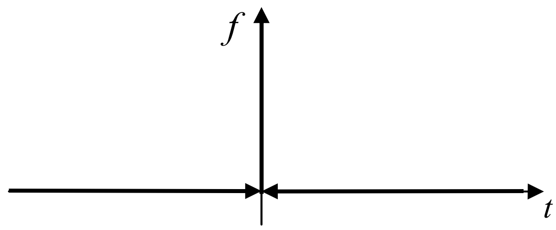


Рис. 13

Эта функция равна нулю всюду, за исключением точки $t=0$, в которой она принимает бесконечно большое значение, но при этом так, что интеграл по любому промежутку, содержащему точку $t=0$, равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\delta(t)dt=\int_{-0}^{+0}\delta(t)dt=1 \qquad (\alpha<0<\beta).$$

Последний интеграл получится, если в $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(t)dt=1 \quad (\forall\varepsilon>0)\ \ \varepsilon\to 0$.

Если рассматривать эту функцию как силу, то это бесконечно большая сила, действующая в бесконечно малый промежуток времени и имеющая импульс, равный единице. Иными словами, это сила, которая мгновенно, в момент времени $t=0$, сообщает единичной массе скорость, равную единице.

Именно это свойство и отражается в полученных соотношениях:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\delta(t)dt=\int_{-0}^{+0}\delta(t)dt=1},$$

где $\alpha<0<\beta$.

Точно так же из равенства (**) при $\varepsilon>\ell,\ \ell\to 0,\ \varepsilon\to 0$ снова получим

$$\boxed{\int_{-\infty}^{0}\delta(t)dt=\int_{0}^{+\infty}\delta(t)dt=\int_{-0}^{0}\delta(t)dt=\int_{0}^{+0}\delta(t)dt=\frac{1}{2}}.$$

Из всего сказанного следует, что $\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & \text{при} \quad t<0,\\ \dfrac{1}{2} & \text{при} \quad t=0,\\ 1 & \text{при} \quad t>0.\end{cases}$

Существует целый класс так называемых дельтаобразных функций. Это функции, зависящие от параметра, предел последовательности которых при стремлении параметра к нулю или бесконечности дает δ-функцию. Среди них есть не только непрерывные кусочно-гладкие (как рассмотренная $\delta_h(t)$) или кусочно-непрерывные (как $\delta_\ell(t)$) функции, но и гладкие функции, такие как, например,

$$\delta_k(t) = \frac{k}{\pi(1 + k^2 t^2)}.$$

Действительно,

$$\lim_{k \to +\infty} \delta_k(t) = \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{\pi(1 + k^2 t^2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ +\infty & \text{при } t = 0, \end{cases}$$

причем $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{\pi(1 + k^2 t^2)} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(kt)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})) = 1$ при любом значении k.

Значит, можно записать $\delta(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \delta_k(t) = \lim\limits_{k \to +\infty} \frac{k}{\pi(1 + k^2 t^2)}$.

Свойства δ-функции

1. Пусть $f(t)$ – непрерывная или кусочно-непрерывная ограниченная на интервале $(-\infty, +\infty)$ функция, определенная при $t = 0$.

Тогда $$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Действительно, во всех точках, за исключением $t = 0$, $\delta(t) = 0$. Значит, в этих точках $f(t)\delta(t) = 0 = f(0)\delta(t)$. При $t = 0$ также $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(0)$.

Следовательно, при любых значениях t имеет место равенство

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t).$$

Рассмотрим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)\int\limits_{-0}^{+0} \delta(t)dt = f(0) \cdot 1 = f(0).$$

Таким образом, $\boxed{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)}$.

Это свойство называют фильтрующим свойством δ-функции.

Рассмотрим δ-функцию с запаздыванием τ: $\delta(t-\tau)$. Вся особенность δ-функции теперь сосредоточена в точке $t=\tau$. Условный график этой функции приведен на рис. 14.

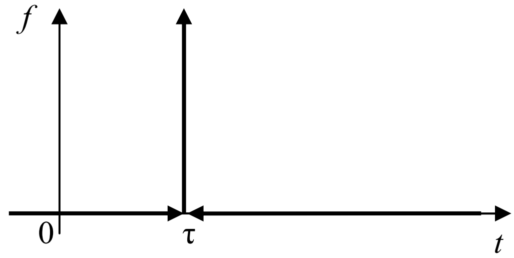


Рис. 14

$$\delta(t-\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \neq \tau, \\ +\infty & \text{при} \quad t = \tau, \end{cases} \quad \text{а} \quad \int\limits_{\alpha}^{\beta} \delta(t-\tau)dt = 1 \quad \forall \alpha, \beta, \ \alpha < \tau < \beta.$$

Пусть функция $f(t)$ определена в точке $t = \tau$. Тогда на основании фильтрующего свойства δ-функции имеем

$$f(t)\delta(t-\tau) = f(\tau)\delta(t-\tau) \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)dt = f(\tau).$$

2. Определим изображение δ-функции следующим образом:

$$L\{\delta(t)\} \overset{def}{=} \int\limits_{-0}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt.$$

Нижним пределом в этом случае будем считать (– 0), т. к. вся особенность $\delta(t)$-функции сосредоточена в точке $t=0$. Мы будем предполагать, что вся эта особенность интегрируется полностью.

$L\{\delta(t)\} \overset{def}{=} \int\limits_{-0}^{+\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\delta(t)dt = e^{-pt}\big|_{t=0} = 1$ по предыдущему свойству (в данном случае $f(t) = e^{-pt}$, $\quad f(0) = 1$).

Таким образом, имеем $\boxed{1 \risingdotseq \delta(t)}$.

Следует заметить, что это не обычное изображение, так как оно не стремится к нулю при $p \to \infty$ $(\operatorname{Re} p \to +\infty)$. Функцию $F(p) = 1$ следует считать изображением в условном смысле.

3. Рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0, \\ 1 & \text{при} \quad t \geq +0 \end{cases} \qquad \text{(т. к. } \int_{-\infty}^{+0} \delta(t)dt = \int_{-0}^{+0} \delta(t)dt = 1\text{)}.$$

Но это есть единичная функция Хевисайда (будем считать, что она определена с условием: $\eta(0) = \frac{1}{2}$).

Следовательно, $\boxed{\eta(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau}$.

4. Продифференцируем формально полученное равенство. По правилу дифференцирования интеграла по переменному верхнему пределу имеем

$$\eta'(t) = \left(\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau \right)' = \delta(t).$$

Получили условное равенство. Это не обычная производная, т. е. не производная в обычном смысле слова, т. к. функция $\eta(t)$ – разрывна в точке $t = 0$, и обычная производная у нее в этой точке не существует.

Этот же результат можно получить, рассмотрев функции

$\eta_k(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}(kt)$ и $\delta_k(t) = \frac{k}{\pi(1 + k^2 t^2)}$. Нетрудно видеть, что

$$\eta_k'(t)=\frac{d}{dt}\eta_k(t)=\delta_k(t),\quad \lim_{k\to+\infty}\eta_k(t)=\eta(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<0,\\ \frac{1}{2} & \text{при } t=0,\\ 1 & \text{при } t>0,\end{cases}\quad \lim_{k\to+\infty}\delta_k(t)=\delta(t).$$

Тогда, определив $\eta'(t)$ как $\lim\limits_{k\to+\infty}\eta_k'(t)$, будем иметь

$$\eta'(t)\overset{def}{=}\lim_{k\to+\infty}\eta_k'(t)=\lim_{k\to+\infty}\delta_k(t)=\delta(t).$$

Итак, $$\boxed{\eta'(t)=\delta(t)}\,.$$

Это равенство согласуется с правилом дифференцирования оригинала (умножения изображения на p) и найденным изображением δ-функции, если в формуле

$$pF(p)-f(0)\risingdotseq f'(t)$$

считать, что для единичной функции Хевисайда и для обобщенных функций с особенностью в точке $t = 0$ в качестве $f(0)$ рассматривается не правосторонний (как это делается для обычных функций), а левосторонний предел, т. е.

$$f(0)=f(-0)=\lim_{t\to-0}f(t)$$

в силу определения изображения δ-функции, где в качестве нижнего предела интеграла Лапласа берется ($-$ 0). С учетом сделанного замечания имеем

$$L\{1\}=L\{\eta(t)\}=\frac{1}{p},\quad \eta(-0)=0;$$

$$L\{\delta(t)\}=L\{\eta'(t)\}=p\cdot\frac{1}{p}-\eta(-0)=1-0=1\,.$$

Можно формально применить это правило и к самой δ-функции, т. е. найти изображение «производной» δ-функции, учитывая, что $\delta(-0)=0$:

$$p\cdot 1-\delta(-0)=p \;\dot{\underset{\bullet}{\to}}\; \delta'(t).$$

Процесс отыскания изображений «производных высших порядков» δ-функции можно продолжить, имея в виду, что все ее «производные» являются обобщенными функциями, равными нулю всюду, кроме точки $t = 0$, в которой сосредоточена вся особенность этих функций.

Тогда с учетом того, что $\delta'(-0)=\delta''(-0)=\delta'''(-0)=...=\delta^{(n)}(-0)=0$, получим $$p^2 \;\dot{\underset{\bullet}{\to}}\; \delta''(t),\;\; p^3 \;\dot{\underset{\bullet}{\to}}\; \delta'''(t),\; \ldots,\;\; p^n \;\dot{\underset{\bullet}{\to}}\; \delta^{(n)}(t).$$

Это позволяет расширить множество изображений за счет функций, не стремящихся к нулю при $p\to\infty$ $(\operatorname{Re} p\to+\infty)$. Но это будут изображения не обычных, а обобщенных функций, т. е. условные изображения.

Пример. Найти оригинал по его изображению $\dfrac{p^2}{p-1}$.

Данная дробь не стремится к нулю при $p\to\infty$ и, следовательно, не является изображением, но если рассматривать ее как условное изображение, т. е. как изображение оригинала, содержащего обобщенные функции, то можно этот оригинал найти.

$$\frac{p^2}{p-1}=\frac{p^2-1}{p-1}+\frac{1}{p-1}=p+1+\frac{1}{p-1} \;\dot{\underset{\bullet}{\to}}\; \delta'(t)+\delta(t)+e^t.$$

Итак, оригиналом, соответствующим данному условному изображению, будет функция $f(t) = \delta'(t) + \delta(t) + e^t$.

5. Пусть $f(t)$ имеет разрыв 1-го рода в точке $t = c$. Обозначим через $h = f(c+0) - f(c-0)$ величину скачка.

Обозначим через $f_*(t) = f(t) - h \cdot \eta(t-c)$ непрерывную «сомкнутую» функцию (рис. 15).

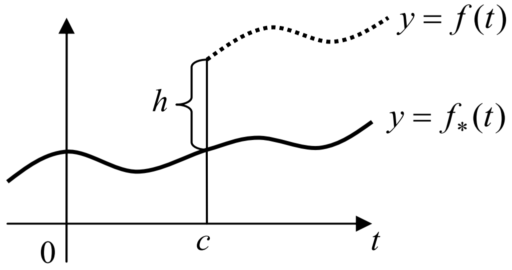


Рис. 15

Тогда
$$f(t) = f_*(t) + h \cdot \eta(t-c).$$

Продифференцируем формально это равенство.

$$f'(t) = f_*'(t) + h \cdot \eta'(t-c).$$

Но, по доказанному,
$$\eta'(t-c) = \delta(t-c).$$

Следовательно,

$$\boxed{f'(t) = f_*'(t) + h \cdot \delta(t-c)}.$$

Итак, производная от функции, имеющей разрыв первого рода, равна обычной производной, соответствующей непрерывной функции, плюс значение δ-функции в точке разрыва, умноженное на величину скачка.

Аналогичным образом запишется производная от функции, имеющей не один, а несколько разрывов первого рода, т. е. скачков.

6. Пусть $F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t)$. Из теоремы умножения следует, что свертывание с δ-функцией некоторого оригинала $f(t)$ равносильно умножению его изображения на единицу:

$$1 \cdot F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} \delta * f \ , \text{ но } F(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t).$$

Это означает, что свертывание с δ-функцией не изменяет оригинала, т. е.

$$\delta(t) * f(t) = f(t).$$

Таким образом, δ-функция при свертывании играет ту же роль, что тождественная единица при умножении: $\boxed{\delta * f = f * \delta = f}$. Иными словами, свертывание с δ-функцией оставляет любую функцию неизменной.

7. Пусть $f(x)$ – функция, представимая своим интегралом Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt .$$

При $x = 0$ получим

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt.$$

Переменим (формально!) порядок интегрирования в этом повторном интеграле, взяв внешнее интегрирование по переменной t.

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} d\alpha .$$

Запишем этот результат в следующем виде:

$$f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} d\alpha \right] dt$$

(множитель $\frac{1}{2\pi}$ отнесли к внутреннему интегралу).

Сравним с формулой $f(0)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt$.

Заметим, что обе формулы справедливы для любой функции $f(x)$ рассматриваемого типа. Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t}d\alpha\right]dt .$$

Поэтому можно считать, что

$$\boxed{\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t}d\alpha}.$$

Получили так называемое представление δ-функции интегралом Фурье.

Заметим, что интеграл, стоящий в правой части полученного равенства, расходящийся (действительно, при $t=0$ получим

$\delta(0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} d\alpha=\frac{1}{2\pi}[+\infty-(-\infty)]=+\infty$, т. е. интеграл расходится).

Таким образом, δ-функция не может выражаться сходящимся интегралом, т. к. любой сходящийся интеграл, зависящий от параметра, представляет собой обычную функцию этого параметра, в то время как δ-функция не является функцией обычного типа, а представляет собой обобщенную функцию.

Замечание. Изменение порядка интегрирования в повторном интеграле (в процессе доказательства) мы провели формально, т. к. в результате такой перемены получили расходящийся внутренний интеграл. В первоначальном интеграле функция $f(t)$, являясь абсолютно интегрируемой (что требуется для представления функции интегралом Фурье), обеспечивала сходимость внутреннего интеграла:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty, \;\Rightarrow\; \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \right| < +\infty.$$

Воспользуемся формулой Эйлера $e^{-i\alpha t} = \cos\,\alpha t - i\sin\alpha t$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos\,\alpha t - i\sin\alpha t) d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\,\alpha t\, d\alpha - i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha t\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\,\alpha t\, d\alpha$$

(поскольку интеграл от нечетной функции $\sin\alpha t$ по симметричному интервалу интегрирования равен нулю при любом *t*, то второе слагаемое обратилось в нуль).

Итак, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\,\alpha t\, d\alpha = 2\int_{0}^{+\infty} \cos\,\alpha t\, d\alpha$ (в силу четности косинуса).

Это опять расходящийся интеграл.

Действительно, при $t = 0$ получим $\int_{0}^{+\infty} d\alpha = +\infty$.

Таким образом, $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\alpha t} d\alpha = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos\alpha t d\alpha$.

Отсюда следует, что $\delta(t)$ можно представить в виде

$$\boxed{\delta(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty} \cos\,\alpha t\, d\alpha}.$$

8. Рассмотренные дельтаобразные функции, последовательности которых приводили к $\delta(t)$, были функциями четными, поэтому естественно считать и δ-функцию четной на интервале $(-\infty, +\infty)$, т. е. для любого *t* $\delta(-t) = \delta(t)$.

ВЫЧИСЛЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Лемма

Пусть $f(t)$ – оригинал.

Если $F(p) \risingdotseq f(t)$ и существует $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = f(\infty)$, то справедлива формула

$$f(\infty) = \lim_{p \to 0} [pF(p)].$$

Условия леммы могут быть выполнены только в том случае, когда $s_0 \le 0$, т. е. когда функция $f(t)$ ограничена (в частности, убывает по абсолютной величине на бесконечности до нуля, что имеет место, если $s_0 < 0$), т. к. только в этом случае может оказаться, что существует $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$. Поскольку по теореме существования $F(p)$ существует при $s = \operatorname{Re} p > s_0$, то в нашем случае $F(p)$ существует, по крайней мере, при $s = \operatorname{Re} p > 0$.

Доказательство

Пусть $f'(t)$ существует, непрерывна и является оригиналом (доказательство проведем только для этого частного случая).

По теореме об изображении производной оригинала имеем

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = pF(p) - f(0).$$

Отсюда

$$pF(p) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt + f(0).$$

Поскольку $f'(t)$, по предположению, непрерывна при $t>0$, то интеграл $I(p)=\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$, зависящий от параметра p, является непрерывной функцией этого параметра, т. е.

$$\lim_{p\to p_0} I(p)=I(p_0).$$

(Несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt$ сходится равномерно, т. к. функция $f'(t)$ по предположению является оригиналом, т. е. существует мажорирующая функция, несобственный интеграл от которой сходится.)

В этом случае

$$\lim_{p\to 0}[pF(p)]=f(0)+\lim_{p\to 0}\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(0)+\int\limits_0^\infty f'(t)dt=f(0)+f(t)\Big|_0^{+\infty}=$$

$$=f(0)+f(\infty)-f(0)=f(\infty)$$

(по условию $f(\infty)$ существует, а следовательно, существует и несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty f'(t)dt$).

Итак, доказали, что если существует $f(\infty)$, то $\lim\limits_{p\to 0}[pF(p)]=f(\infty)$.

Лемма может быть доказана и без заявленных дополнительных предположений, например, в случае, если $f(t)$ – непрерывный оригинал[2].

---

[2] Романовский П. И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические функции. Преобразование Лапласа. М. : Наука, 1973. С. 306;
Мышкис А. Д. Математика для втузов. Специальные курсы. М. : Наука, 1971. С. 141–142.

Необходимым в условиях леммы является требование существования $f(\infty) \equiv f(+\infty)$ (под $f(\infty)$ понимается $f(+\infty)$). Без учета этого требования возможны ошибки при использовании леммы, например, для функций $f(t) = \cos t$, $f(t) = t\cos t$ и т. п.

Приведем другое доказательство леммы для того же частного случая.

Пусть $f'(t)$ существует, непрерывна и является оригиналом.

Рассмотрим $$pF(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Проинтегрируем этот интеграл по частям:

$$u = f(t), \quad du = f'(t)dt, \quad dv = e^{-pt}dt, \quad v = -\frac{1}{p}e^{-pt}.$$

$$pF(p) = p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt =$$

$$= p\left[-f(t)\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt\right] = -f(t)e^{-pt}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt,$$

т. к. $$\left|e^{-pt}\right| = e^{-st}, \quad |f(t)| \le Me^{s_0 t},$$

$$\lim_{t\to+\infty}\left|f(t)e^{-pt}\right| \le \lim_{t\to+\infty} Me^{+s_0 t}\cdot e^{-st} = \lim_{t\to+\infty} Me^{-(s-s_0)t} = 0 \text{ при } s - s_0 > 0,$$

т. е. при $s = \operatorname{Re} p > s_0$.

Таким образом, $$pF(p) = f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt.$$ Отсюда

$$\lim_{p\to 0}[pF(p)] = f(0) + \lim_{p\to 0}\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(0) + \int_0^\infty f'(t)dt = f(0) + f(t)\Big|_0^{+\infty}$$

(интеграл $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt}dt$ является непрерывной функцией параметра p, если $f'(t)$ – непрерывная функция, что мы и предполагаем).

Следовательно, если существует $\int_0^{\infty} f'(t)dt$, т. е. если существует

$\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = f(+\infty) = f(\infty)$, то справедливо равенство

$$\lim_{p\to 0}[pF(p)] = f(0) + f(t)\Big|_0^{+\infty} = f(0) + f(\infty) - f(0) = f(\infty), \text{ т. е.}$$

$$\lim_{p\to 0}[pF(p)] = f(\infty).$$

Лемма доказана.

С помощью доказанной леммы и теоремы об интегрировании изображения легко вычисляются некоторые несобственные интегралы.

Теорема

Если $F(p) \doteqdot f(t)$ и $\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt$ сходится, то $\boxed{\int_0^{\infty} \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^{\infty} F(p)dp}$,

где интеграл в правой части равенства можно вычислять по положительной полуоси.

Доказательство

Пусть $F(p) \doteqdot f(t)$. Тогда, по теореме об интегрировании изображения (теореме о делении оригинала на *t*), получим

$$\int_p^{\infty} F(z)dz \doteqdot \frac{f(t)}{t},$$

если интеграл $\int_p^{\infty} F(z)dz$ существует (сходится).

По теореме об интегрировании оригинала (теореме о делении изображения на p) имеем $\quad \dfrac{1}{p}\int\limits_p^{\infty} F(z)dt \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} \int\limits_0^t \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau$.

Воспользуемся леммой. Обозначим

$$Y(t)=\int\limits_0^t \frac{f(\tau)}{\tau}d\tau, \qquad \Phi(p)=\frac{1}{p}\int\limits_p^{\infty} F(z)dz.$$

Тогда, поскольку $\Phi(p) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}} Y(t)$, то $\lim\limits_{p\to 0}[p\Phi(p)]=Y(\infty)$, если $Y(\infty)$ существует, где $Y(\infty)=\lim\limits_{t\to+\infty} Y(t)$.

Следовательно, $\quad \lim\limits_{p\to 0}\int\limits_p^{\infty} F(z)dz = \lim\limits_{t\to+\infty}\int\limits_0^t \dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau$.

Отсюда $\int\limits_0^{\infty} F(z)dz = \int\limits_0^{\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau$. По условию $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{f(\tau)}{\tau}d\tau = Y(\infty)$ существует.

Значит, действительно, справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\infty} F(p)dp = \int\limits_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}dt$$

(здесь z заменили на p, а τ на t).

Теорема доказана.

Пример

Найти $\qquad \int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha t}\dfrac{\sin\beta t}{t}dt \qquad (\alpha \geq 0), \qquad \beta \neq 0.$

Можно показать, что при $\alpha \geq 0$ $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha t}\dfrac{\sin\beta t}{t}dt$ существует (сходится).

Действительно, т. к. $\dfrac{\sin\beta t}{t}$ – ограниченная функция, т. е.

$$\left|\frac{\sin\beta t}{t}\right| \leq M, \text{ где } M=\text{const}, \quad M>0, \text{ то } \left|e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}\right| \leq Me^{-\alpha t}.$$

Следовательно, при $\alpha > 0$ интеграл сходится. Можно доказать, что и при $\alpha = 0$ интеграл будет существовать (т. е. сходиться).

Поскольку $\dfrac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \risingdotseq e^{-\alpha t}\sin\beta t$, то по рассмотренной теореме,

если $\beta > 0$, $$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}dp =$$

$$= \beta\cdot\frac{1}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{(p+\alpha)}{\beta}\bigg|_0^\infty = \operatorname{arctg}\frac{p+\alpha}{\beta}\bigg|_0^\infty = \operatorname{arctg}(\infty) - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Если $\beta < 0$, $$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}dp =$$

$$= -\operatorname{arctg}\frac{p+\alpha}{|\beta|}\bigg|_0^\infty = -\operatorname{arctg}(+\infty) + \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{|\beta|} = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Итак, $$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\frac{\sin\beta t}{t}dt = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}, & \beta < 0, \\ \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\dfrac{\alpha}{\beta}, & \beta > 0, \end{cases} \qquad \alpha \ge 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$.

В этом случае: при $\beta > 0$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$;

при $\beta < 0$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}dt = -\frac{\pi}{2}$;

при $\beta = 0$ $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin\beta t}{t}dt = 0$.

Если $\beta = 1$, то $\boxed{\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}}$ – получили известный интеграл Дирихле.

ИЗОБРАЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Пусть $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$: $f(t+T) = f(t)$ $(\forall t \geq 0)$. Найдем изображение $f(t)$.

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-pt} f(t)dt.$$

Сделаем во втором интеграле замену переменной интегрирования по формуле

$$t = T + \tau; \quad dt = d\tau; \quad \text{при } t = T \;\; \tau = 0; \;\; \text{при } t = +\infty \;\; \tau = +\infty.$$

Тогда
$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-p(T+\tau)} f(T+\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-pT} e^{-p\tau} f(T+\tau)d\tau = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT}\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau,$$

т. к. $f(T+\tau) = f(\tau)$ в силу того, что T – период функции $f(t)$.

Но
$$\int_0^\infty e^{-p\tau} f(\tau)d\tau = L\{f(t)\}.$$

Следовательно,

$$L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt + e^{-pT} \cdot L\{f(t)\}.$$

Отсюда

$$\left(1 - e^{-pT}\right) \cdot L\{f(t)\} = \int_0^T e^{-pt} f(t)dt, \text{ т. е.}$$

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-pT}} \int_0^T e^{-pt} f(t)dt = F(p).$$

Таким образом, если функция $f(t)$ периодична с периодом $T>0$, то

$$\boxed{\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt \risingdotseq f(t), \quad f(t+T)=f(t)}.$$

Пример. Найти изображение функции, заданной графиком, представленным на рис. 16.

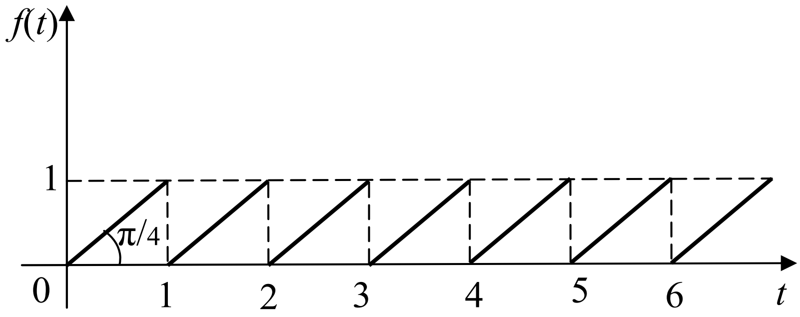


Рис. 16

Аналитически данная функция может быть записана в следующем виде:

$$\begin{cases} f(t)=t & \text{при } 0\le t<1, \\ f(t+T)=f(t), & \text{где } T=1. \end{cases}$$

Для того чтобы получить изображение этой функции, найдем сначала

$$\int_0^T e^{-pt} f(t)dt = \int_0^1 e^{-pt} t dt,$$

вычислив его методом интегрирования по частям:

$$\int_0^T e^{-pt} f(t)dt = \int_0^1 te^{-pt}dt = -\frac{1}{p}te^{-pt}\Big|_0^1 + \frac{1}{p}\int_0^1 e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-pt}\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{p}e^{-p} - \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}-pe^{-p}\right).$$

Теперь по формуле найдем изображение данной функции:

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt=\frac{1}{1-e^{-p}}\frac{1}{p^2}\left(1-e^{-p}-pe^{-p}\right)=\frac{1}{p^2}\left(1-\frac{pe^{-p}}{1-e^{-p}}\right)=$$
$$=\frac{1}{p^2}-\frac{e^{-p}}{p\left(1-e^{-p}\right)}=\frac{1}{p^2}\left(1-\frac{p}{e^p-1}\right)=\frac{e^p-1-p}{p^2\left(e^p-1\right)}.$$

Таким образом, $\qquad \dfrac{e^p-1-p}{p^2\left(e^p-1\right)} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f(t).$

Найдем изображение этой же функции другим способом.

Запишем аналитическое выражение этой функции с использованием единичной функции Хевисайда:

$$f(t)=t-\sum_{k=1}^{\infty}\eta(t-k).$$

Найдем обобщенную производную этой функции:

$$f'(t)=1-\sum_{k=1}^{\infty}\delta(t-k).$$

Условное изображение функции $f'(t)$ имеет вид

$$\frac{1}{p}-\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kp},$$

т. к. $\frac{1}{p}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}1,\ 1\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\delta(t),$ и по теореме запаздывания $e^{-kp}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}\delta(t-k)$.

Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}e^{-kp}=e^{-p}+e^{-2p}+e^{-3p}+\ldots$ является геометрической прогрессией со знаменателем e^{-p}, и т. к. $\left|e^{-p}\right|=e^{-s}<1$ при $s>0$, то этот ряд сходится при условии $\operatorname{Re}p=s>0$.

Найдем сумму этого ряда:

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kp}=e^{-p}+e^{-2p}+e^{-3p}+\ldots=\frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}=\frac{1}{e^p-1}.$$

Значит, изображение (условное) функции $f'(t)$ может быть записано как

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{e^{p}-1}.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования оригинала:

$$pF(p)-f(0)\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f'(t).$$

С учетом того, что $f(0)=0,$ имеем $pF(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{e^{p}-1},$ где $F(p)$ – изображение функции $f(t).$

Теперь найдем изображение самой функции:

$$F(p)=\frac{1}{p^{2}}-\frac{1}{p(e^{p}-1)}=\frac{e^{p}-1-p}{p^{2}(e^{p}-1)}.$$

Итак, $$\frac{e^{p}-1-p}{p^{2}(e^{p}-1)}\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}f(t).$$

РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

Рассмотрим интегральные уравнения следующего вида:

$$\int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t) \quad \text{и} \quad y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau .$$

Здесь $K(t,\tau)$, $f(t)$ – заданные функции; $y(t)$ – искомая функция. Функцию $K(t,\tau)$ называют **ядром** интегрального уравнения.

Это частные случаи интегральных уравнений Вольтерры соответственно первого и второго рода с ядром $K(t-\tau)$, зависящим только от разности аргументов. Такие уравнения представляют собой важный класс уравнений Вольтерры, их иногда называют уравнениями **типа свертки**.

Если функции $K(t)$ и $f(t)$ являются оригиналами, то и $y(t)$ будет оригиналом (можно доказать; примем это без доказательства).

Пусть $\Phi(p) \doteqdot K(t)$, $F(p) \doteqdot f(t)$, $\bar{y}(p) \doteqdot y(t)$.

По теореме умножения $\bar{y}(p)\Phi(p) \doteqdot \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau$.

Найдем изображения данных интегральных уравнений.

Для уравнения $\int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau = f(t)$ предполагаем, что $K(t,t) \neq 0$.

Изображением этого уравнения будет $\bar{y}(p)\Phi(p) = F(p)$, откуда

$$\boxed{\bar{y}(p) = \frac{F(p)}{\Phi(p)}, \quad \Phi(p) \neq 0}.$$

Перейдя к оригиналу, найдем искомое решение.

Для уравнения $y(t) = f(t) + \int_0^t K(t-\tau)y(\tau)d\tau$ изображение будет иметь вид

$$\bar{y}(p) = F(p) + \bar{y}(p)\Phi(p).$$

Решим это уравнение относительно $\bar{y}(p)$.

$$\bar{y}(p)(1-\Phi(p)) = F(p) \quad \text{и}$$

$$\boxed{\bar{y}(p) = \frac{F(p)}{1-\Phi(p)}, \quad \Phi(p) \neq 1}.$$

Найдя оригинал $y(t)$, соответствующий изображению $\bar{y}(p)$, получим решение исходного интегрального уравнения.

Примеры

1. Найти решение интегрального уравнения $\int_0^t e^{2(t-\tau)}y(\tau)d\tau = t^2e^t$.

В этом уравнении $K(t-\tau) = e^{2(t-\tau)}$, следовательно, $K(t) = e^{2t}$. Найдем изображение этой функции: $\Phi(p) = L\{e^{2t}\} = \frac{1}{p-2} \risingdotseq e^{2t}$. Найдем изображение правой части уравнения, т. е. функции t^2e^t :

$$F(p) = L\{t^2e^t\} = \frac{2}{(p-1)^3} \risingdotseq t^2e^t .$$

Запишем изображающее уравнение: $\bar{y}(p)\frac{1}{p-2} = \frac{2}{(p-1)^3}$.

Отсюда $$\bar{y}(p) = \frac{2p-4}{(p-1)^3}.$$

Методом неопределенных коэффициентов найдем разложение дроби на простейшие дроби:

$\bar{y}(p)=\dfrac{2p-4}{(p-1)^3}=\dfrac{A}{(p-1)^3}+\dfrac{B}{(p-1)^2}+\dfrac{C}{p-1}$. Приведем правую часть к общему знаменателю и приравняем числители полученной и исходной дроби:

$A+B(p-1)+C(p-1)^2\equiv 2p-4$. Найдем коэффициенты A, B и C.

Из полученного тождества имеем:

при $p=1 \quad A=-2;$

при $p=2 \quad A+B+C=0;$

при $p=0 \quad A-B+C=-4.$

$2B=4\Rightarrow B=2; \quad 2A+2C=-4\Rightarrow A+C=-2\Rightarrow C=0.$

Таким образом, $\bar{y}(p)=\dfrac{2p-4}{(p-1)^3}=-\dfrac{2}{(p-1)^3}+2\dfrac{1}{(p-1)^2}$.

Найдем соответствующий изображению оригинал:

$$y(t)=-t^2e^t+2te^t=te^t(2-t).$$

Итак, решением данного интегрального уравнения является функция

$$y(t)=te^t(2-t).$$

2. Найти решение интегрального уравнения

$$y(t)=1+t+\int_0^t\cos(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

В данном случае

$$f(t)=1+t, \Rightarrow F(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}; K(t)=\cos t, \Rightarrow \Phi(p)=\frac{p}{p^2+1}.$$

Интеграл $\int_0^t\cos(t-\tau)y(\tau)d\tau$ является сверткой функций $\cos t$ и $y(t)$.

Изображение уравнения: $\overline{y}(p)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\overline{y}(p)\frac{p}{p^2+1}$. Найдем $\overline{y}(p)$.

$$\overline{y}(p)\left(1-\frac{p}{p^2+1}\right)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2},\Rightarrow\ \overline{y}(p)\frac{p^2-p+1}{p^2+1}=\frac{p+1}{p^2},\Rightarrow \overline{y}(p)=\frac{(p^2+1)(p+1)}{p^2(p^2-p+1)}.$$

Представим изображение решения как сумму простейших дробей:

$$\overline{y}(p)=\frac{(p^2+1)(p+1)}{p^2(p^2-p+1)}=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{Cp+D}{p^2-p+1}.$$

Найдем коэффициенты разложения.

$$A(p^2-p+1)+Bp(p^2-p+1)+Cp^3+Dp^2\equiv p^3+p^2+p+1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях p в правой и левой части тождества:

при p^3 $\quad B+C=1;$

при p^2 $\quad A-B+D=1;$

при p $\quad -A+B=1;$

при p^0 $\quad A=1.$

Получим: $A=1,\ B=2,\ C=-1,\ D=2.$ Следовательно, разложение

имеет вид $$\overline{y}(p)=\frac{(p^2+1)(p+1)}{p^2(p^2-p+1)}=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}+\frac{2-p}{p^2-p+1}.$$

Преобразуем все дроби в дроби табличного вида:

$$\overline{y}(p)=\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}+\frac{2-p}{p^2-p+1}=\frac{1}{p^2}+2\frac{1}{p}+\frac{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}-p}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=$$

$$=\frac{1}{p^2}+2\frac{1}{p}+\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}-\frac{p-\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}.$$

Найдем соответствующий оригинал:

$$y(t) = t + 2 + e^{\frac{t}{2}}(\sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t).$$

Эта функция является решением заданного интегрального уравнения.

3. Найти решение интегрального уравнения $y(t) = \cos t - \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau$.

Здесь $f(t) = \cos t;\ K(t) = e^t$, т. к. $\int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau$ есть свертка функций

$$e^t \text{ и } y(t), \text{ т. е. } e^t * y(t) = \int_0^t e^{t-\tau} y(\tau) d\tau \doteqdot \Phi(p)\overline{y}(p),$$

где $\Phi(p) = L\{e^t\} = \dfrac{1}{p-1};\quad F(p) = L\{\cos t\} = \dfrac{p}{p^2+1};\quad L\{y(t)\} = \overline{y}(p).$

Изображение интегрального уравнения принимает вид

$$\overline{y}(p) = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p-1}\overline{y}(p).$$

$$\overline{y}(p) + \frac{1}{p-1}\overline{y}(p) = \frac{p}{p^2+1}, \Rightarrow \overline{y}(p)\frac{p}{p-1} = \frac{p}{p^2+1}, \Rightarrow \overline{y}(p) = \frac{p-1}{p^2+1}.$$

По изображению решения найдем его оригинал:

$$\overline{y}(p) = \frac{p-1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} - \frac{1}{p^2+1} \doteqdot \cos t - \sin t = y(t).$$

Итак, решением интегрального уравнения является функция

$$y(t) = \cos t - \sin t.$$

ИЗОБРАЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И КЕЛЬВИНА

При решении некоторых задач электротехники операторным методом приходится встречаться с изображениями, оригиналами которых являются функции Бесселя.

Определение

Функция

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)},$$

определенная как сумма сходящегося ряда, называется цилиндрической функцией 1-го рода порядка ν, или **функцией Бесселя** (1-го рода) порядка ν.

Через $\Gamma(x)$ здесь обозначена гамма-функция. Сходимость ряда легко устанавливается с помощью признака Даламбера. Функция $J_\nu(x)$ при любом действительном значении параметра ν является частным решением уравнения

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0,\quad \nu=\text{const}.$$

Такое уравнение называется уравнением Бесселя. К уравнениям подобного вида сводятся многие задачи математической физики, в частности оно встречается в краевых задачах теории потенциала для цилиндрической области. Подобные уравнения возникают также в различных разделах техники, физики и астрономии. По своему типу это уравнение является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Число ν называется индексом уравнения Бесселя.

Для функций Бесселя имеет место следующее рекуррентное соотношение:

$$J_{\nu+1}(x) = J_{\nu-1}(x) - 2J'_{\nu}(x).$$

Будем рассматривать функции Бесселя с целым неотрицательным индексом $\nu = n$ $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+n}}{2^{2k+n} k!(k+n)!}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Gamma(k+1) = k!,\ \ \Gamma(k+n+1) = (k+n)!$

Это будут частные решения уравнения Бесселя с индексом $\nu = n$:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0, \quad n = \text{const}.$$

Для них справедливо рекуррентное соотношение

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - 2J'_n(x).$$

В частности, будем иметь

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}, \qquad J_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!}.$$

Найдем изображение по Лапласу функции Бесселя $J_n(x)$.

Сначала найдем изображение функции $J_0(x)$. Пользуясь известными свойствами оригиналов и изображений и учитывая сходимость соответствующих рядов, получим

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2} \risingdotseq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2} \frac{(2k)!}{p^{2k+1}} = \frac{1}{p}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{p^{2k}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{p^{2k}}\right) = \frac{1}{p}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} \left(\frac{1}{p^2}\right)^k\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - \frac{1}{2\cdot 1!}\cdot\frac{1}{p^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{p^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{p^6} + \ldots\right) = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

При выводе использован тот факт, что $\frac{(2k)!}{2^k k!} = \frac{(2k)!}{(2k)!!} = (2k-1)!!$

(Напомним, что символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел от 1 до n одинаковой четности с n; например,

$$8!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8, \quad 7!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot 7,$$

поэтому $2^k k! = (2k)!!$, как, например,

$$2^3 3! = 2^3\cdot 1\cdot 2\cdot 3 = 2\cdot 4\cdot 6 = 6!!,$$

отсюда можно получить, что

$$\frac{6!}{6!!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6} = 1\cdot 3\cdot 5 = 5!!, \text{ т. е. } (2k)! = (2k)!!(2k-1)!!)$$

Кроме того, было использовано разложение в биномиальный ряд:

$$\left(1 + \frac{\alpha}{1!}z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}z^3 + \ldots\right) = (1+z)^\alpha;$$

при $\alpha = -\frac{1}{2}$ это разложение принимает вид

$$\left(1 - \frac{1}{2\cdot 1!}\cdot z + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 2!}\cdot z^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot 3!}\cdot z^3 + \ldots\right) = (1+z)^{-\frac{1}{2}},$$

и, как известно, данный ряд сходится при $|z| < 1$.

Итак, $$\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \risingdotseq J_0(x).$$

Теперь покажем, что изображением функции $J_1(x)$ является

$$\frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}}.$$

Действительно,

$$\frac{\sqrt{p^2+1}-p}{\sqrt{p^2+1}} = 1 - \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} = 1 - \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m-1)!!}{2^m m!} \frac{1}{p^{2m}}\right) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{2^{2m}(m!)^2} \frac{1}{p^{2m}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} 2m(2m-1)!}{2 \cdot 2^{2m-1} m(m-1)!m!} \frac{1}{p^{2m}} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1}(m-1)!m!} \frac{(2m-1)!}{p^{2m}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m-1}(m-1)!m!} x^{2m-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2^{2k+1} k!(k+1)!} = J_1(x) .$$

Последним действием заменили индекс суммирования m на $k = m - 1$. Тогда $m = k + 1$ и $2m - 1 = 2(k+1) - 1 = 2k + 1$.

Мы доказали, таким образом, что $\frac{\sqrt{p^2+1} - p}{\sqrt{p^2+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} J_1(x).$

Пользуясь методом математической индукции, докажем, что для любого натурального числа n имеет место формула

$$\frac{\left(\sqrt{p^2+1} - p\right)^n}{\sqrt{p^2+1}} \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} J_n(x).$$

Для $n = 0$ и $n = 1$ эта формула уже доказана. Докажем теперь, что если эта формула верна для $n = k - 1$ и $n = k$ $(k \geq 1)$, то она верна и для $n = k + 1$. Воспользуемся рекуррентным соотношением, связывающим $J_{n+1}(x)$ с $J_{n-1}(x)$ и $J_n'(x)$. В силу рекуррентного соотношения

$$J_{k+1}(x) = J_{k-1}(x) - 2J_k'(x),$$

используя то обстоятельство, что $J_k(0) = 0 \quad (k \geq 1)$, и принимая во внимание правило изображения производной

$$pF(p) - f(0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}} f'(x),$$

будем иметь

$$L\{J_{k-1}(x)\} - 2[pL\{J_k(x)\} - J_k(0)] = L\{J_{k+1}(x)\},$$

т. е.

$$\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{k-1}}{\sqrt{p^2+1}}-2p\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{k}}{\sqrt{p^2+1}}=\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{k-1}}{\sqrt{p^2+1}}(1-2p\sqrt{p^2+1}+2p^2)=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{k-1}}{\sqrt{p^2+1}}(\sqrt{p^2+1}-p)^2=\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{k+1}}{\sqrt{p^2+1}}\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}J_{k+1}(x).$$

Таким образом, по заключению метода индукции формула

$$\boxed{\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)^{n}}{\sqrt{p^2+1}}\stackrel{\bullet}{\underset{\bullet}{\to}}J_n(x)}$$

доказана.

Заметим, что ряд, определяющий функции Бесселя, сходится не только для действительных значений аргумента x, но и для любых его комплексных значений. В последнем случае этот ряд определяет функцию Бесселя комплексного аргумента.

Во многих задачах физики и техники используются **функции Кельвина (функции Томсона)** $ber\,t$ и $bei\,t$, которые определяются соответственно как действительная и взятая с противоположным знаком мнимая части функции $J_0(t\sqrt{i})$, т. е.

$$J_0(t\sqrt{i})=ber\,t-i\,bei\,t.$$

Заменим в формуле $J_0(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k}(k!)^2}$ переменную x на $t\sqrt{i}$.

$$J_0(t\sqrt{i})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}i^k}{2^{2k}(k!)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}t^{4k}i^{2k}}{2^{4k}((2k)!)^2}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2k+1}t^{4k+2}i^{2k+1}}{2^{4k+2}((2k+1)!)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{(2^{2k}(2k)!)^2}-i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k+2}}{(2^{2k+1}(2k+1)!)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k}}{((4k)!!)^2}-i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k t^{4k+2}}{((4k+2)!!)^2}.$$

Разделили сходящийся ряд на суму двух сходящихся рядов по четным и нечетным степеням i, приняли во внимание, что $i^{2k} = (-1)^k$.

Отделив действительную и мнимую части, получим

$$ber\, t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(4k)!!]^2} t^{4k},$$

$$bei\, t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{[(4k+2)!!]^2} t^{4k+2}.$$

Найдем оригинал, соответствующий изображению $\frac{1}{p} e^{-\frac{i}{p}}$.

Воспользуемся разложением в ряд функции e^{-z}:

$$e^{-z} = 1 - \frac{1}{1!} z + \frac{1}{2!} z^2 - \frac{1}{3!} z^3 + \ldots$$

Имеем

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{i}{p}} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1!} \frac{i}{p^2} + \frac{1}{2!} \frac{i^2}{p^3} - \frac{1}{3!} \frac{i^3}{p^4} + \ldots \risingdotseq 1 - \frac{1}{(1!)^2} it + \frac{1}{(2!)^2} (it)^2 - \frac{1}{(3!)^2} (it)^3 + \ldots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (it)^k}{(k!)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2\sqrt{it})^{2k}}{2^{2k} (k!)^2} = J_0(2\sqrt{it}), \text{ т. к. } J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^{2k} (k!)^2}.$$

Отсюда вытекает

$$\frac{1}{p} e^{-\frac{i}{p}} = \frac{1}{p} (\cos \frac{1}{p} - i \sin \frac{1}{p}) \risingdotseq J_0(2\sqrt{it}) = ber(2\sqrt{t}) - i bei(2\sqrt{t}).$$

Из полученного выражения по свойству линейности изображений следует

$$\boxed{\frac{1}{p} \cos \frac{1}{p} \risingdotseq ber(2\sqrt{t})}, \quad \boxed{\frac{1}{p} \sin \frac{1}{p} \risingdotseq bei(2\sqrt{t})}.$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Методом операционного исчисления найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1) $\ddot{x} - 9x = e^{-2t}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

2) $\ddot{x} + 9x = \cos 3t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

3) $\ddot{x} + x = 2e^{t}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.$

4) $\ddot{x} + x = 2 - 10e^{3t}, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = -6.$

5) $\ddot{x} - 4x = t - 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

6) $\ddot{x} + \dot{x} = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad \dot{x}(0) = -2.$

7) $\ddot{x} - \dot{x} = te^{t}, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

8) $\ddot{x} - \dot{x} + 2\sin t = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2.$

9) $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0.$

10) $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1.$

11) $\ddot{x} - 2\dot{x} + 2x = 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0.$

12) $\ddot{x} - \dot{x} + x = 2\sin t + 3\cos t, \quad x(0) = 2, \quad \dot{x}(0) = -3.$

13) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 4t, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0.$

14) $\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = 1 + t + t^2, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

15) $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2\cos t, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 1.$

16) $\dddot{x} + x = 1, \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \ddot{x}(0) = 0.$

17) $\dddot{x} + 4\dot{x} = 1, \quad x(0) = \dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0.$

18) $\dddot{x} + \ddot{x} = \sin t, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad \ddot{x}(0) = 0.$

19) $\dddot{x} - 2\ddot{x} + \dot{x} = 4, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 2, \quad \ddot{x}(0) = -2.$

20) $\ddot{x} + 4x = e^{t}, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = \dot{x}_0.$ Найти общее решение.

21) $y'' + y = 2e^{x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

22) $y'' + y = x^3 + 6x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

23) $y'' + y = \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

24) $y'' + y = x^2 + 6x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

25) $y'' + y' = \sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

26) $y'' + 2y' + 2y = 1, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

27) $y'' - 2y' + 5y = 1 - x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$

28) $y'' - y' + y = e^{-x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

29) $y''' + y' = e^{2x}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$

30) $y''' - y' - 3(2 - x^2) = 0, \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

II. Методом операционного исчисления найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

1) $\begin{cases} \dot{x} + y = 0, \\ \dot{y} + x = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2,\ y(0) = 0.$

2) $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = x + y; \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0.$

3) $\begin{cases} \dot{x} + 3x + y = 0, \\ \dot{y} - x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

4) $\begin{cases} \dot{x} - 4x + y = 0, \\ \dot{y} - x - 2y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 0,\ y(0) = 1.$

5) $\begin{cases} y' = 3z - y, \\ z' = y + z + e^x; \end{cases} \quad y(0) = z(0) = 0.$

6) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z, \\ y' = -2x + y - 2z, \\ z' = 5x + 2y + 7z; \end{cases} \quad x(0) = 1,\ y(0) = 1,\ z(0) = 1.$

7) $\begin{cases} x' + 4x - y = 0, \\ y' + 2x + y = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2,\ y(0) = 3.$

8) $\begin{cases} x' + y - z = 0, \\ y' - z = 0, \\ x + z - z' = 0; \end{cases} \quad x(0) = 2,\ y(0) = \dfrac{1}{2},\ z(0) = \dfrac{5}{2}.$

9) $\begin{cases} x' + 7x - y = 0, \\ y' + 2x + 5y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

10) $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z; \end{cases}$ $x(0) = 2,\ y(0) = 2,\ z(0) = -1.$

11) $\begin{cases} x' - x + 2y = 3, \\ 3x' + y' - 4x + 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 0,\ y(0) = 0.$

12) $\begin{cases} x' = y - z, \\ y' = x + y, \\ z' = x + z; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 2,\ z(0) = 3.$

13) $\begin{cases} x' + y' = 0, \\ y' - 2y + x = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = -1.$

14) $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' - 2x - 2y = 0; \end{cases}$ $x(0) = 1,\ y(0) = 1.$

15) $\begin{cases} 2x' + y' = 0, \\ x' + 3y' + y = 3 - 7e^t; \end{cases}$ $x(0) = 3,\ y(0) = 1.$

16) $\begin{cases} x' - 3y' + x = 0, \\ y' - x - y = e^t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

17) $\begin{cases} x' - 4y = 8\sin 2t, \\ y' - x = -8\sin 2t; \end{cases}$ $x(0) = -2,\ y(0) = 2.$

18) $\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + \ \ x + 2y = \sin t; \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0.$

19) $\begin{cases} \ddot{x} + y = 1, \\ \ddot{y} + x = 0; \end{cases}$ при $t_0 = 0$ $\quad x_0 = \dot{x}_0 = 0, \quad y_0 = \dot{y}_0 = 0.$

20) $\begin{cases} (2x'' - x' + 9x) - (y'' + y' + 3y) = 0, \\ (2x'' + x' + 7x) - (y'' - y' + 5y) = 0; \end{cases}$ $x(0) = x'(0) = 1,\ \ y(0) = y'(0) = 0.$

III. Найти оригинал по данному его изображению методом разложения на простейшие дроби.

1) $\frac{p-1}{p^2+3p}$; 2) $\frac{p^2+1}{p^2(p-1)^2}$; 3) $\frac{5p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$;

4) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$; 5) $\frac{p^2+3p+4}{p(p-1)(p-2)}$; 6) $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$;

7) $\frac{p^2-p+2}{p^3-p^2-6p}$; 8) $\frac{4p^2-6p+4}{p(p-1)^2}$; 9) $\frac{1}{p+2p^2+p^3}$.

IV. Пользуясь теоремой умножения, найти оригиналы, соответствующие следующим изображениям:

1) $\frac{p}{(p-1)(p^2+4)}$; 2) $\frac{1}{p^2(p-1)}$; 3) $\frac{1}{(p+1)(p+2)^2}$;

4) $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$; 5) $\frac{1}{(p^2-6p+13)(p^2-6p+10)}$; 6) $\frac{1}{(p-1)^2(p-2)^3}$;

7) $\frac{p}{p^4-1}$; 8) $\frac{p^2}{(p^2+1)^2}$; 9) $\frac{1}{(p+1)(p^2-4)}$.

V. Найти оригиналы, используя одну из теорем обращения.

1) $\frac{1}{p^2(p^2-1)}$; 2) $\frac{1}{p(p^2+1)}$; 3) $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$;

4) $\frac{1}{(p-1)^2(p^2+1)}$; 5) $\frac{1}{(p^2+1)^3}$; 6) $\frac{p}{(p^2+1)^2}$;

7) $\frac{1}{(p-1)^3(p^3+1)}$; 8) $\frac{4-p-p^2}{p^3-p^2}$; 9) $\frac{1}{p^4-6p^3+11p^2-6p}$.

VI. Найти решение интегральных уравнений.

1) $\int\limits_0^t e^{t-\tau} y(\tau)d\tau = t;$ 2) $\int\limits_0^t e^{t-\tau} y(\tau)d\tau = \sin t;$

3) $\int\limits_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau = 1-\cos t;$ 4) $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = t+t^2;$

5) $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = \sin t;$ 6) $\int\limits_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau = 1-\cos t;$

7) $\int\limits_0^t \mathrm{ch}(t-\tau)y(\tau)d\tau = t;$ 8) $\int\limits_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)d\tau = \frac{1}{3}t^3;$

9) $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int\limits_0^t e^{t-\tau} y(\tau)d\tau;$ 10) $y(t) = e^t + \int\limits_0^t e^{t-\tau} y(\tau)d\tau;$

11) $y(t) = \frac{t^3}{3} + \int\limits_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau)d\tau;$ 12) $y(t) = \cos t + \int\limits_0^t e^{2(t-\tau)} y(\tau)d\tau.$

13) $y(t) = \cos t + \int\limits_0^t e^{t-\tau} y(\tau)d\tau;$ 14) $y(t) = \sin t + \int\limits_0^t (t-\tau)y(\tau)d\tau;$

15) $y(t) = t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)d\tau;$ 16) $y(t) = t + \int\limits_0^t \sin(t-\tau)y(\tau)d\tau;$

17) $y(t) = \frac{t^2}{2} + \int\limits_0^t (t-\tau)e^{-(\tau-t)} y(\tau)d\tau;$ 18) $y(t) = e^t + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (t-\tau)^2 y(\tau)d\tau;$

19) $y(t) = \sin t + 2\int\limits_0^t \cos(t-\tau)y(\tau)d\tau;$ 20) $y(t) = 1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^t \sin 2(t-\tau)y(\tau)d\tau.$

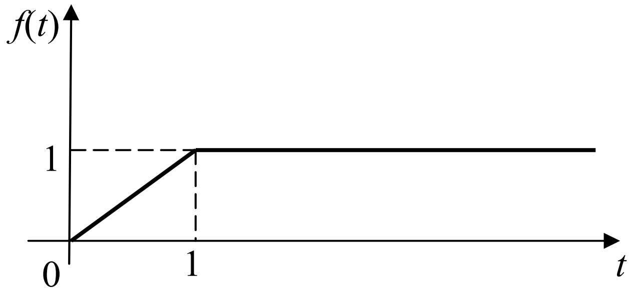
VII. Вычислить интегралы.

1) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}dt \quad (a>0, b>0);$ 2) $\int\limits_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t}dt \quad (a>0, b>0);$

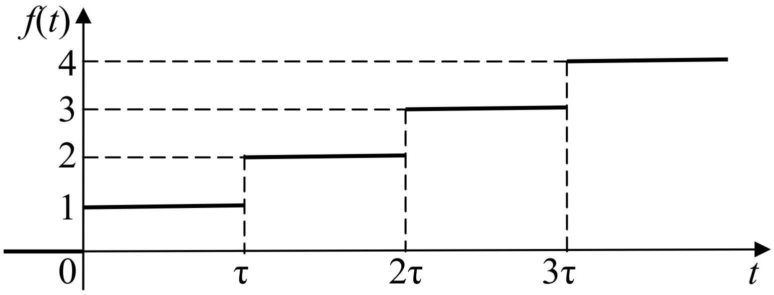
3) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}\sin\beta t dt \quad (a>0, b>0, \beta>0);$ 4) $\int\limits_0^\infty \frac{\sin at \sin bt}{t}dt \quad (a>0, b>0);$

VIII. Найти изображение оригинала, заданного графиком.

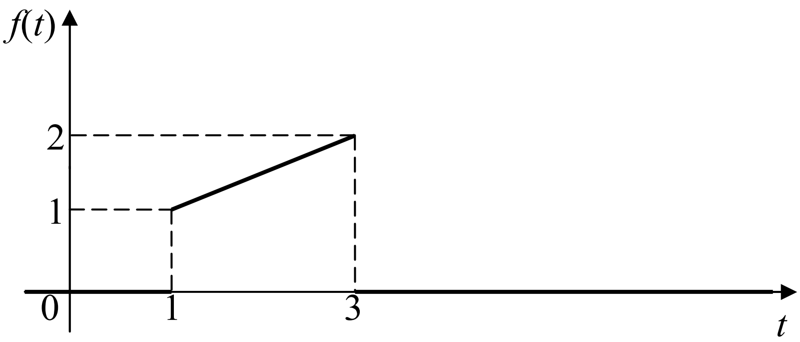
1)



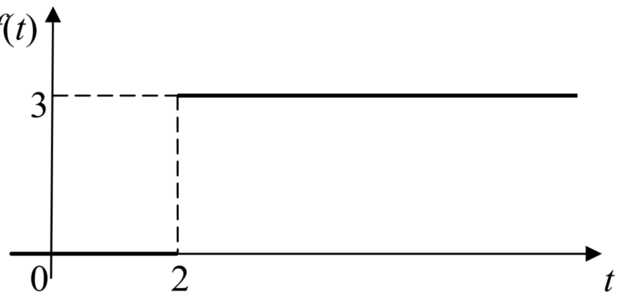
2)



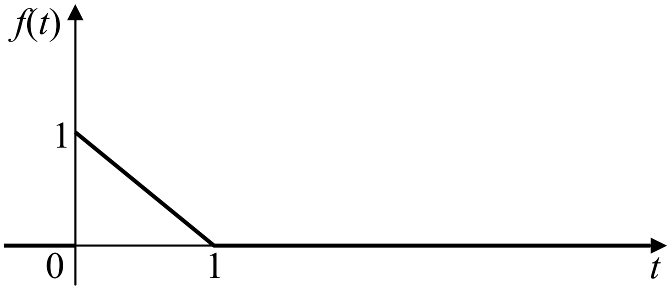
3)



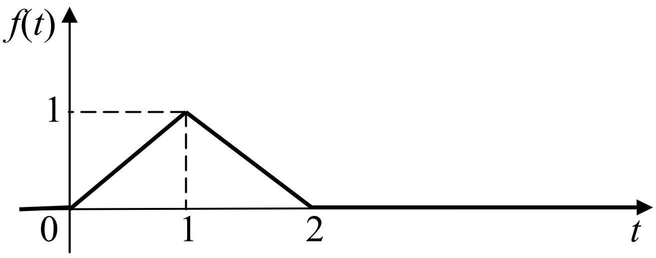
4)



5)

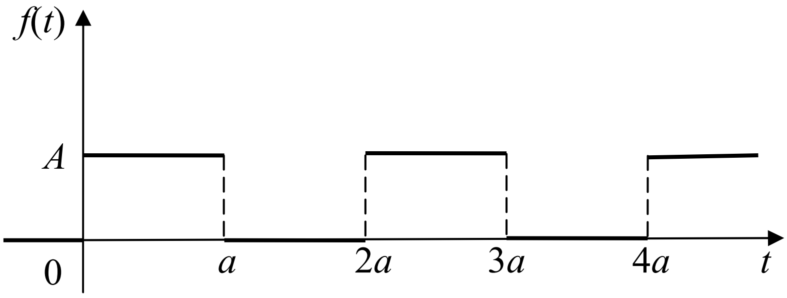


6)

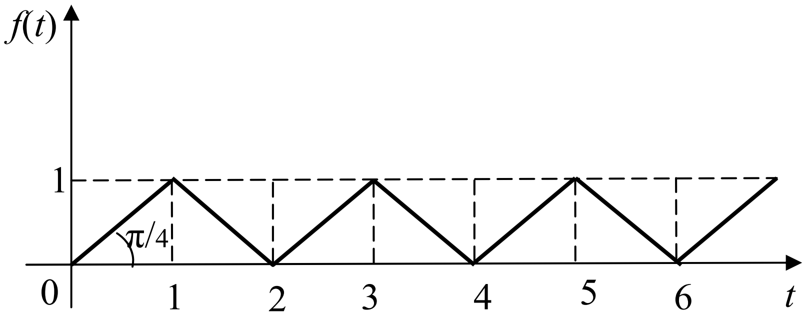


IX. Найти изображение периодического оригинала, заданного графиком.

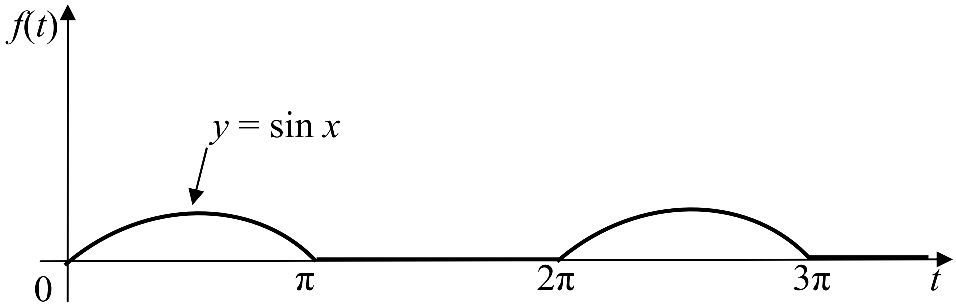
1)



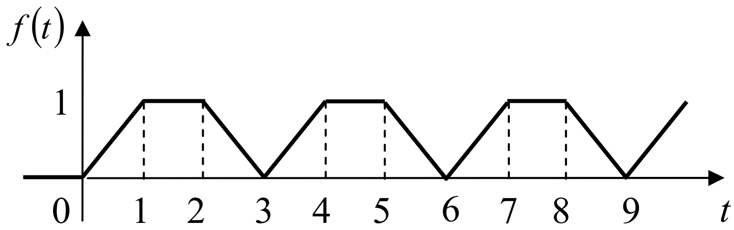
2)



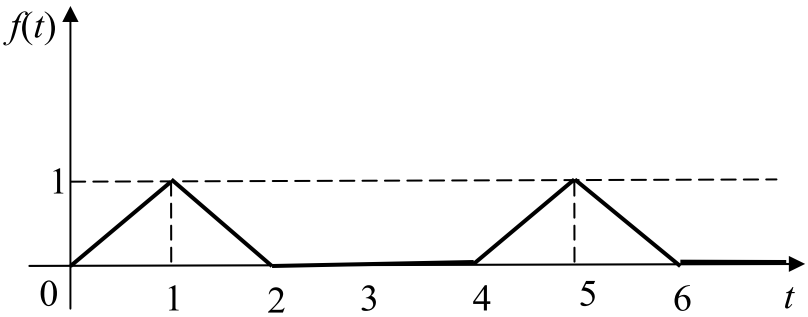
3)



4)



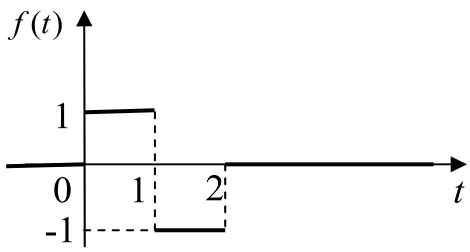
5)



X. Решить задачу Коши для дифференциального уравнения с графически заданной правой частью.

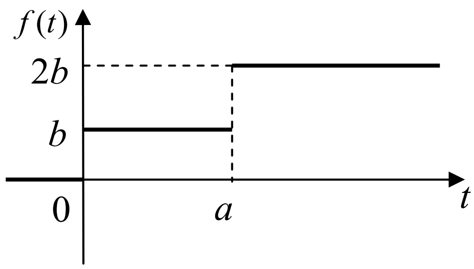
1) $x'' + x = f(t)$,

$x(0) = x'(0) = 0.$



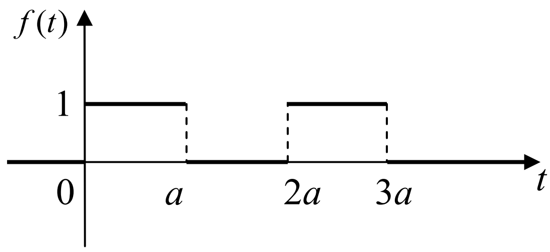
2) $x'' + x = f(t)$,

$x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$



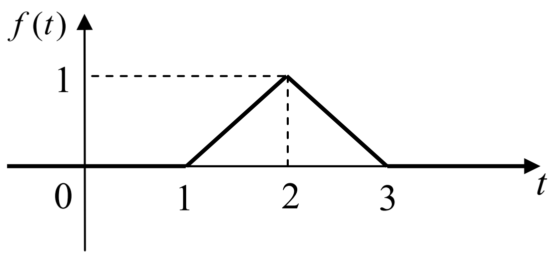
3) $x'' - 2x' + x = f(t)$,

$x(0) = x'(0) = 0.$



4) $x'' + 9x = f(t)$,

$x(0) = 0,\ x'(0) = 1.$



КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Суть метода операционного исчисления.
2. Определение оригинала.
3. Определение изображения.
4. Теорема существования.
5. Теорема единственности.
6. Свойства оригиналов.
7. Теорема линейности (свойство линейности изображений).
8. Теорема подобия.
9. Теорема смещения.
10. Дифференцирование оригинала (изображение производной).
11. Интегрирование оригинала (изображение интеграла).
12. Дифференцирование изображения.
13. Интегрирование изображения.
14. Теорема запаздывания.
15. Теорема умножения.
16. Формула Дюамеля.
17. Изображение периодических функций.
18. Единичная функция Хевисайда и ее применение к аналитическому описанию разрывных функций. Изображение функции Хевисайда.
19. Изображение по Карсону – Хевисайду и его связь с изображением по Лапласу.
20. Отыскание оригинала. Метод разложения на простейшие дроби.
21. Отыскание оригинала. Первая теорема разложения.
22. Отыскание оригинала. Вторая теорема разложения.

23. Формула обращения Меллина. Условия ее применения.

24. Решение линейных дифференциальных уравнений операционным методом.

25. Решение систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом.

26. Свертка функций и ее свойства.

27. Применение формулы Дюамеля для решения дифференциальных уравнений.

28. Решение дифференциальных уравнений с графически заданной правой частью.

29. Дельта-функция, ее свойства и ее изображение. Обобщенные производные разрывных функций.

30. Леммы о $\lim pF(p)$ при $p \to \infty$ $(\operatorname{Re} p = s \to +\infty)$ и $p \to 0$.

31. Теорема о вычислении некоторых несобственных интегралов.

32. Решение интегральных уравнений специального вида операторным методом.

33. Изображение функций Бесселя и Кельвина.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Крайнов А. Ю. Операционное исчисление. Примеры и задачи : учебно-методическое пособие / А. Ю. Крайнов, Ю. Н. Рыжих. – Томск : Том. ун-т, 2007. – 104 с.

2. Лунц Г. Л. Функции комплексного переменного (с элементами операционного исчисления) / Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Лань, 2002. – 292 с.

3. Волков И. К. Интегральные преобразования и операционное исчисление : учебник для вузов / И. К. Волков, А. Н. Канатников. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. – 228 с.

4. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебное пособие : в 2 т. / Н. С. Пискунов. – М. : Интеграл-Пресс, 2002. – Т. 2. – 544 с.

5. Эйдерман В. Я. Основы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления / В. Я. Эйдерман. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 256 с.

6. Пантелеев А. В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах : учебное пособие / А. В. Пантелеев, А. С. Якимова. – М. : Высш. шк., 2001. – 445 с.

7. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах : учебное пособие для втузов : в 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк.,1997. – 416 с.

8. Краснов М. Л. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости : учебное пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. – М. : Наука, 1981. – 305 с.

9. Шелковников Ф. А. Сборник упражнений по операционному исчислению : учебное пособие для втузов / Ф. А. Шелковников, К. Г. Такайшвили. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 1976. – 184 с.
10. Шостак Р. Я. Операционное исчисление. Краткий курс : учебное пособие для втузов / Р. Я. Шостак. – 2-е изд., доп. – М. : Высш. шк., 1972. – 280 с.
11. Штокало И. З. Операционное исчисление (обобщения и приложения) / И. З. Штокало. – Киев : Наукова Думка, 1972. – 302 с.
12. Лушникова З. М. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление : учебно-методическое пособие для студентов радиотехнических специальностей и специальности 0606 – «Автоматика и телемеханика» заочного обучения / З. М. Лушникова, И. Н. Янкелевич. – Свердловск : УПИ, 1971. – 152 с.
13. Араманович И. Г. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / И. Г. Араманович, Г. Л. Лунц, Л. Э. Эльсгольц. – М. : Наука, 1968. – 416 с.
14. Микусинский Я. Операционное исчисление / Я. Микусинский. – М. : ИЛ, 1956.
15. Бородин А. И. Биографический словарь деятелей в области математики / А. И. Бородин, А. С. Бугай. – Киев : Радянська школа, 1979. – 607 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

СХЕМА ГОРНЕРА

Схема Горнера употребляется для деления многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ на линейный двучлен $x - b$:

	a_0	a_1	a_2	...	a_{n-1}	a_n
b	b_0	b_1	b_2	...	b_{n-1}	r

В верхней строке таблицы, начиная со второго столбца, записываем коэффициенты делимого многочлена. Во второй строке в первом столбце записываем свободный член b делителя, в остальных столбцах – коэффициенты неполного частного и в последнем столбце – остаток. Они вычисляются по следующей схеме:

$$\begin{aligned}
&b_0 = a_0,\\
&b_1 = b \cdot b_0 + a_1,\\
&b_2 = b \cdot b_1 + a_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_{n-1} = b \cdot b_{n-2} + a_{n-1},\\
&r = b \cdot b_{n-1} + a_n \qquad\qquad \text{– остаток.}
\end{aligned}$$

$b_0, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ – коэффициенты неполного частного:

$$R_{n-1}(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + ... + b_{n-2}x + b_{n-1}.$$

Обозначим делимый многочлен через $P_n(x)$:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n.$$

Тогда $$\frac{P_n(x)}{x-b} = R_{n-1}(x) + \frac{r}{x-b} \Rightarrow P_n(x) = R_{n-1}(x)(x-b) + r.$$

Значение многочлена при $x = b$ равно остатку r.

$$\boxed{P_n(b) = r}.$$

Если $r = 0$, то $x = b$ является корнем многочлена.

К полученному многочлену $R_{n-1}(x)$ снова можно применить схему Горнера.

Примеры

1. $Y_3(p) = p^3 + 2p^2 - p - 2$.

Подбором установим, что $p = 1$ – корень многочлена $Y_3(p)$.

Для отыскания других корней разделим многочлен $Y_3(p)$ на $(p-1)$.

	1	2	–1	–2
1	1	3	2	0

Запишем $Y_2(p)$ – частное от деления $Y_3(p)$ на $(p-1)$. Остаток $r = 0$.

$Y_2(p) = p^2 + 3p + 2$. Убедимся, что $p = -1$ – корень многочлена $Y_2(p)$. Для этого разделим $Y_2(p)$ на $(p+1)$. Продолжим таблицу.

	1	2	–1	–2
1	1	3	2	0
–1	1	2	0	

Остаток от деления равен нулю, значит, $p = -1$ – действительно корень $Y_2(p)$. Запишем частное от деления $Y_2(p)$ на $(p+1)$ и продолжим таблицу. $Y_1(p) = p + 2$. Очевидно, что $p = -2$ – корень $Y_1(p)$.

	1	2	–1	–2
1	1	3	2	0
–1	1	2	0	
–2	1	0		

Запишем разложение многочлена $Y_3(p)$ на множители в соответствии с его корнями:

$$Y_3(p)=(p-1)Y_2(p)=(p-1)(p+1)Y_1(p)=(p-1)(p+1)(p+2).$$

2. $Y_3(p)=p^3+3p^2-4$. Легко обнаружить, что $p=1-$ корень $Y_3(p)$.

	1	3	0	–4
1	1	4	4	0
–2	1	2	0	
–2	1	0		

$Y_2(p)=p^2+4p+4$. Нетрудно понять, что $p=-2$ – корень $Y_2(p)$.

$Y_1(p)=p+2$. Теперь можно разложить многочлен на множители:

$Y_3(p)=(p-1)Y_2(p)=(p-1)(p+2)Y_1(p)=(p-1)(p+2)^2$.

3. $Y_4(p)=p^4-5p^3+5p^2+5p-6$.

Проверим, что $p=3$ – корень $Y_4(p)$. Разделим многочлен на $(p-3)$.

	1	–5	5	5	–6
3	1	–2	–1	2	0

$Y_3(p)=p^3-2p^2-p+2$. Остаток от деления равен нулю. Проверим, не является ли $p=3$ также корнем многочлена p^3-2p^2-p+2. Найдем $Y_3(3)$. Для этого разделим $Y_3(p)$ на $(p-3)$. Остаток от деления будет равен значению $Y_3(p)$ при $p=3$. Если остаток равен нулю, то $p=3$ – корень.

	1	–5	5	5	–6
3	1	–2	–1	2	0
3	1	1	2	8	

$Y_3(3)=r=8$. Число 3 не является корнем многочлена $Y_3(p)$.

С учетом того, что p = 3 есть корень многочлена $Y_4(p)$, запишем разложение этого многочлена на два множителя:

$$Y_4(p)=p^4-5p^3+5p^2+5p-6=Y_3(p)(p-3)=(p^3-2p^2-p+2)(p-3).$$

Разделим $Y_3(p)=(p^3-2p^2-p+2)$ на $(p-2)$.

Третью строчку таблицы запишем заново.

	1	–5	5	5	–6
3	1	–2	–1	2	0
2	1	0	–1	0	

Поскольку остаток от деления $Y_3(p)=(p^3-2p^2-p+2)$ на $(p-2)$ оказался равен нулю, то $p=2$ есть корень многочлена.

$Y_2(p)=p^2-1$. Очевидно, что $p=\pm1$ – корни $Y_2(p)=p^2-1$.

	1	–5	5	5	–6
3	1	–2	–1	2	0
2	1	0	–1	0	
–1	1	–1	0		
1	1	0			

Корнями многочлена являются $p_1=3,\ p_2=2,\ p_3=-1,\ p_4=1$.

$$Y_4(p)=p^4-5p^3+5p^2+5p-6=Y_3(p)(p-3)=(p^3-2p^2-p+2)(p-3)=$$

$$=Y_2(p)(p-2)(p-3)=(p^2-1)(p-2)(p-3)=(p-1)(p+1)(p-2)(p-3).$$

Найдено разложение многочлена $Y_4(p)=p^4-5p^3+5p^2+5p-6$ на множители в соответствии с его корнями:

$$Y_4(p)=p^4-5p^3+5p^2+5p-6=(p-1)(p+1)(p-2)(p-3).$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

№ п/п	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	Теорема линейности $\alpha f_1(t)+\beta f_2(t), \quad \alpha, \beta = \text{const}$	$\alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$
1а	$cf(t), \qquad c = \text{const}$	$cF(p)$
2	Теорема подобия $f(at) \quad (a>0)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$
3	Теорема смещения $e^{-\alpha t}f(t)$	$F(p+\alpha)$
4	Дифференцирование оригинала $f'(t)$	$pF(p)-f(0)$
4а	$f''(t)$	$p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$
4б	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$
5	Интегрирование оригинала $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, если $f(t)$ – оригинал	$\frac{F(p)}{p}$
6	Дифференцирование изображения $t^nf(t)$	$(-1)^n\frac{d^n}{dp^n}F(p)$
7	Интегрирование изображения $\frac{f(t)}{t}$	$\int\limits_p^\infty F(z)dz$, если $\int\limits_p^\infty F(z)dz$ сходится
8	Теорема запаздывания $f(t-\tau) \qquad (\tau>0)$	$e^{-p\tau}F(p)$
9	Теорема умножения $\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(p)F_2(p)$
10	Формула Дюамеля $f_1(t)f_2(0)+\int\limits_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau$	$pF_1(p)F_2(p)$
11	Изображение периодической функции $f(t), \quad$ если $f(t+T)=f(t)$, $T>0$	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int\limits_0^T e^{-pt}f(t)dt$

НАИБОЛЕЕ ЧАСТО ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОРИГИНАЛЫ И ИХ ИЗОБРАЖЕНИЯ

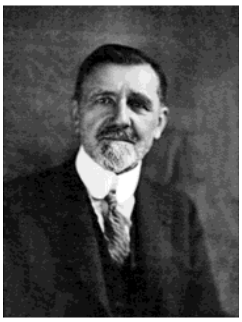
№ п/п	Оригинал	Изображение
1	$1=\eta(t)$	$\dfrac{1}{p}$
2	t	$\dfrac{1}{p^2}$
3	$t^n \quad (n\in N)$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
4	$t^\alpha \quad (\alpha>-1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
5	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
6	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$
7	$\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
8	$\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
9	$e^{-\lambda t} \quad (\lambda=s+\sigma i)$	$\dfrac{1}{p+\lambda}$
10	$e^{-\lambda t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\lambda)^2+\beta^2}$
11	$e^{-\lambda t}\cos\beta t$	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\beta^2}$
12	$e^{-\lambda t}\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p+\lambda)^2-\beta^2}$
13	$e^{-\lambda t}\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2-\beta^2}$
14	$t^n e^{-\lambda t} \quad (n\in N)$	$\dfrac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$
15	$t^\alpha e^{-\lambda t} \quad (\alpha>-1)$	$\dfrac{\Gamma(\alpha+1)}{(p+\lambda)^{\alpha+1}}$

№ п/п	Оригинал	Изображение
16	$t\sin\beta t$	$\dfrac{2\beta p}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
17	$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
18	$t\mathrm{sh}\beta t$	$\dfrac{2\beta p}{\left(p^2-\beta^2\right)^2}$
19	$t\mathrm{ch}\beta t$	$\dfrac{p^2+\beta^2}{\left(p^2-\beta^2\right)^2}$
20	$\dfrac{1}{2\beta^3}\left(\sin\beta t-\beta t\cos\beta t\right)$	$\dfrac{1}{\left(p^2+\beta^2\right)^2}$
21	$\sin^2 t$	$\dfrac{2}{p(p^2+4)}$
22	$\cos^2 t$	$\dfrac{p^2+2}{p(p^2+4)}$
23	$\sin^2\beta t$	$\dfrac{2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
24	$\cos^2\beta t$	$\dfrac{p^2+2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
25	$1-\cos t=2\sin^2\dfrac{t}{2}$	$\dfrac{1}{p(p^2+1)}$
26	$1+\cos t=2\cos^2\dfrac{t}{2}$	$\dfrac{2p^2+1}{p(p^2+1)}$
27	$t-\sin t$	$\dfrac{1}{p^2(p^2+1)}$
28	$t+\sin t$	$\dfrac{2p^2+1}{p^2(p^2+1)}$
29	$\delta(t)$	1
30	$\delta^{(n)}(t) \quad (n\in N)$	p^n
31	$J_n(t) \quad (n\in N)$	$\dfrac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

БИОГРАФИЧЕСКИЕ СПРАВКИ

БЕССЕЛЬ Фридрих Вильгельм (1784–1846) – немецкий астроном, геодезист и математик, член Берлинской АН (1812), иностранный почетный член Петербургской АН (1814). Основные труды – по астрономии. В математике имя Бесселя носят так называемые цилиндрические функции 1-го рода (функции Бесселя) и дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют (уравнение Бесселя), поскольку он первым начал систематическое изучение таких решений этого уравнения и подробно исследовал их, хотя еще раньше они встречались в работах Д. Бернулли, Л. Эйлера, Ж. Лагранжа. Именем Бесселя названо неравенство для коэффициентов ряда Фурье (неравенство Бесселя), а также одна из интерполяционных формул (интерполяционная формула Бесселя).



БОРЕЛЬ Феликс Эдуард Жюстен Эмиль (1871–1956) – французский математик, член Парижской АН (1921), лауреат нескольких премий Парижской АН, иностранный член-корреспондент АН СССР (1929). Во время Второй мировой войны участвовал во французском Сопротивлении. Учёный уже в семидесятилетнем возрасте был арестован немцами и брошен в тюрьму Френ. После месяца пребывания в холодной и сырой камере он все же был освобожден. Борель – создатель нескольких отраслей современного математического анализа. Основные работы – в области математического анализа, математической физики, теории функций и теории вероятностей. За свою жизнь он опубликовал более 300 работ. Эмиль Борель – один из самых известных математиков XX века. В честь Бореля назван кратер на Луне.

ВОЛЬТЕРРА Вито (1860–1940) – итальянский математик, член Национальной академии деи Линчеи в Риме (1899), иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1908) и иностранный почетный член АН СССР (1926). Работы в области дифференциальных уравнений, математической физики, функционального анализа. Вольтерре принадлежат интересные применения математического анализа в биологии. В русском переводе вышла его «Математическая теория борьбы за существование» (1976).

ГОРНЕР Уильям Джордж (1786–1837) – английский математик. Основные труды – по теории алгебраических уравнений. В возрасте 16 лет он стал помощником директора в Кингсвудской школе города Бристоля в Англии и директором 4 года спустя. В 1819 году опубликовал способ приближенного вычисления вещественных корней многочлена, который называется теперь способом Руффини – Горнера. Впрочем, этот способ был известен китайцам еще в XIII веке. Именем Горнера названа схема деления многочлена на двучлен $x - a$.

ДАЛАМБЕР (Д'Аламбер) Жан Лерон (1717–1783) – французский математик, механик и философ, член Парижской АН (1741), Французской академии (1754), Петербургской АН (1764) и других академий. Д'Аламбер был незаконным сыном маркизы де Тансен от артиллерийского офицера Детуша. Вскоре после рождения младенец был подкинут матерью на ступени парижской Круглой церкви св. Иоанна (фр. *Église Saint-Jean-le-Rond*). В честь этой церкви ребёнок был назван Жаном Лероном. Воспитывался в усыновившей его семье стекольщика Руссо. Позднее, став знаменитым, Д'Аламбер никогда не забывал стекольщика и его жену, помогал им материально и всегда с гордостью называл своими родителями. Рано проявившийся талант позволил мальчику получить хорошее образование – сначала в коллегии Мазарини (получил степень магистра свободных наук), затем в Академии юридических наук, где он получил звание лиценциата прав. Однако профессия адвоката ему была не по душе, и он стал изучать математику. Уже в возрасте 22 лет Д'Аламбер представил Парижской академии свои сочинения, а в 23 года был избран адъюнктом Академии. Основные математические труды относятся к области дифференциальных уравнений (метод решения волнового уравнения), теории рядов (признак сходимости Даламбера), математическому анализу. При решении одного дифференциального уравнения с частными производными эллиптического типа, встретившегося в гидродинамике, Д'Аламбер впервые применил функции комплексного переменного. Его работы, вместе с работами Д. Бернулли и

Л. Эйлера, заложили основы математической физики. В астрономии Д'Аламбер обосновал теорию возмущения движения планет и первый строго объяснил теорию предварения равноденствий и нутации. В «Трактате о динамике» (1743) он впервые сформулировал общие правила составления дифференциальных уравнений движения любых материальных систем. Ему принадлежат работы по вопросам музыкальной теории и музыкальной эстетике. С 1751 года Д'Аламбер работал вместе с Дидро над созданием знаменитой «Энциклопедии наук, искусств и ремёсел», вел отделы математики и физики. В 1764 году в статье «Размерность» (для Энциклопедии) им впервые высказана мысль о возможности рассматривать время как четвёртое измерение. Основное сочинение в философии – «Элементы философии» (1759). Опираясь на систему Ф. Бэкона, он классифицировал науки, положив начало современному понятию «гуманитарные науки». Д'Аламбер вёл активную переписку с российской императрицей Екатериной II. В середине 1760-х годов Д'Аламбер был приглашён ею в Россию в качестве воспитателя наследника престола, однако приглашения не принял. В 1783 году после долгой болезни Д'Аламбер умер. Церковь отказала «отъявленному атеисту» в месте на кладбище, и его похоронили в общей могиле, ничем не обозначенной.

В честь Д'Аламбера названы кратер на обратной стороне Луны и горный хребет на видимой её стороне.

ДИРА́К Поль Адриен Морис (1902–1984) – английский физик-теоретик, один из основателей квантовой механики, лауреат Нобелевской премии (1933), член Лондонского королевского общества (1930), иностранный член АН СССР (1931) и ряда других зарубежных академий и научных обществ, профессор Кембриджского университета. Основные труды в математике по функциональному анализу и математической физике.

ДИРИХЛЕ Петер Густав Лежён (1805–1859) – немецкий математик, профессор Берлинского, а после смерти К. Гаусса – Геттингенского университета, член Берлинской и многих других академий наук, иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1837). Сделал ряд крупных открытий в теории чисел. В области математического анализа впервые точно сформулировал и исследовал понятие условной сходимости ряда, дал строгое доказательство возможности разложения в ряд Фурье кусочно-непрерывной и монотонной функции, что послужило обоснованием многих дальнейших исследований. Значительны труды Дирихле в механике и математической физике, в частности в теории потенциала. Лекции Дирихле имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Б. Римана, Ю. Дедекинда, Л. Кронекера и других. Он не написал крупного произведения, но его научное наследие и его лекции значительно продвинули вперед развитие математических знаний в Германии, его лекции по теории чисел стали классическим трудом. На русский язык переведена его книга «Лекции по теории чисел» (М., 1936).

ДЮАМЕЛЬ Жан Мари Констан (1797–1872) – французский математик, член Парижской АН (1840), иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1859), профессор Политехнической школы в Париже. Автор учебников по математическому анализу и механике. Основные работы – в области математической физики, математического анализа и геометрии.

КАРСОН Джон (1887–1940) – американский математик и инженер. Основные математические труды относятся к теории функций комплексного переменного (преобразование Карсона) и операционному исчислению, где он наряду с английским математиком Томасом Джоном Бромвичем (1875–1929) впервые обосновал и математически приемлемо изложил операционное исчисление.

КОШИ Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик, член Парижской АН (1816), Петербургской АН (1831). Некоторое время работал инженером путей сообщения, а с 1813 года занялся научными занятиями и преподаванием. Работы Коши относятся к различным областям математики. Были периоды, когда он каждую неделю представлял в Парижскую АН новый мемуар. Всего же он написал и опубликовал свыше 800 работ по теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, теоретической и небесной механике, математической физике и т. д. В теории дифференциальных уравнений Коши принадлежит постановка одной из важнейших общих задач теории (задача Коши), основные теоремы существования решений для случая действительных и комплексных переменных. Он ввел применяемые ныне термины: модуль комплексного числа, сопряженные комплексные числа и др. Ему принадлежат также исследования по тригонометрии, механике, теории упругости, оптике, астрономии и т. д. Быстрота, с которой Коши переходил с одного предмета к другому, дала ему возможность проложить в математике множество новых путей. Коши был членом Лондонского королевского общества и почти всех академий наук.

КРАМЕР Габриель (1704–1752) – швейцарский математик. Профессор математики и философии. Основные работы относятся к высшей алгебре и аналитической геометрии. Установил и опубликовал (1750) правила решения систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными с буквенными коэффициентами (правило Крамера), заложил основы теории определителей, но при этом Крамер не пользовался еще удобными обозначениями определителей. Существенно развил идеи современников по аналитической геометрии, исследовал особые точки, ветви, кривизну и т. п. алгебраических кривых высших порядков. В геометрии известен парадокс Крамера.

ЛАПЛАС Пьер Симон (1749–1827) – французский математик, физик и астроном, член Парижской АН (1785), многих других академий и обществ, иностранный почетный член Петербургской АН (1802). Научная деятельность Лапласа была чрезвычайно разнообразной. Ему принадлежат многочисленные фундаментальные работы по математике, экспериментальной и математической физике, небесной механике и астрономии. В работах Лапласа в значительной мере сформировалась как научная дисциплина теория вероятностей. Для разработки созданной им математической теории вероятностей Лаплас ввел так называемые производящие функции и широко применял преобразование, носящее его имя (преобразование Лапласа).

ЛЕЙБНИЦ Готфрид Вильгельм (1646–1716) – немецкий математик, физик и изобретатель, философ, юрист, историк, языковед, организатор и первый президент Берлинской АН (1700), член Лондонского королевского общества (1673), член Парижской АН (1700). Оставил выдающиеся труды в области философии, занимался вопросами химии, геологии, механики. В 1711, 1712 и 1716 годах Лейбниц встречался с Петром I, разработал по его просьбе ряд проектов по развитию образования и государственного управления в России.

Особенно плодотворной была научная деятельность Лейбница в области математики. Он заложил основы символической логики. Сконструированная им счетная машина выполняла не только сложение и вычитание, как это было у Б. Паскаля, но и умножение, деление, возведение в степень и извлечение квадратного и кубического корней. Свыше 40 лет Лейбниц посвятил усовершенствованию своего изобретения. Именно поэтому его можно считать идейным вдохновителем современной машинной математики. Лейбниц до некоторой степени проложил путь таким новым дисциплинам, как политическая экономия и сравнительное языкознание. Но важнейшей его заслугой является то, что он, одновременно с И. Ньютоном, но независимо от него, завершил создание дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц ввел много математических терминов и символов, которые теперь прочно вошли в научную практику: функция, дифференциал, дифференциальное исчисление, дифференциальное уравнение, алгоритм, абсцисса, ордината, координата, а также знаки дифференциала, интеграла, логическую символику и т. д.

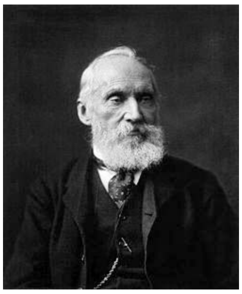
Лейбниц был талантливым изобретателем: он проектировал оптические приборы и гидравлические машины, конструировал ветряной двигатель для насосов, выкачивающих воду из шахт, изобрел первый интегрирующий механизм и уникальную для того времени счетную машину.

С именем Лейбница в науке связано много открытий и гипотез, которые позже получили признание. Лейбниц создал собственную научную школу, в которую входили братья Бернулли, Г. Лопиталь и другие математики. Он первым нарушил и вековую традицию писать научные труды только на латинском языке. Лейбниц оказал значительное влияние на последующее развитие философии и науки.

ЛОРАН Пьер Альфонс (1813–1854) – французский математик, по профессии военный инженер. Родился в Париже. Окончил Политехническую школу в Париже (1832). Исследования в области вариационного исчисления, теории функций, теории колебаний, математической физики. Существенно дополнил некоторые исследования О. Коши, дав (1843) разложение в ряд функции, аналитической в круговом кольце по целым положительным и отрицательным степеням (ряд Лорана). Несмотря на то, что такие ряды встречаются уже у Л. Эйлера, они получили название по имени Лорана, так как он доказал, что всякая функция комплексного переменного, однозначная и аналитическая в круговом кольце, может быть разложена в этом кольце в такой ряд (теорема Лорана). Впрочем, ту же теорему получил несколько раньше К. Вейерштрасс, но его работа была опубликована лишь в 1894 году. Результат Лорана содержался в мемуаре, представленном на получение Гран-при Парижской АН в 1843 году, но его представление было сделано после установленного срока, и работа не была опубликована и не рассматривалась на получение приза. Лоран умер в возрасте 41 года в Париже. Его работа была опубликована лишь после его смерти.

МЕЛЛИН Роберт Ялмар (1854–1933) – финский математик, профессор, затем директор Политехнической школы в Хельсинки. Основные труды относятся к дифференциальным и интегральным уравнениям. В математической физике и теории функций широко применяется так называемое интегральное преобразование Меллина.

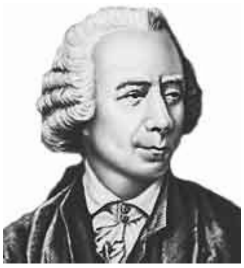
РИМАН Георг Фридрих Бернхард (1826–1866) – немецкий математик, доктор математики (1851), профессор (1857). Читал лекции по математической физике, теории тяготения, электричества и магнетизма, теории эллиптических функций. Научные интересы ученого были очень широкими. За свою короткую жизнь (всего 10 лет трудов) он преобразовал сразу несколько разделов математики. Риман создал общую теорию многозначных комплексных функций, построив для них «римановы поверхности», разработал теорию конформных отображений. Он использовал не только аналитические, но и топологические методы; позднее его труды продолжил Анри Пуанкаре, завершив создание топологии. Вслед за Коши, Риман рассмотрел формализацию понятия интеграла и ввёл своё определение – интеграл Римана. Развил общую теорию тригонометрических рядов, не сводящихся к рядам Фурье. В аналитической теории чисел большой резонанс имело исследование Риманом распределения простых чисел. Он дал интегральное представление дзета-функции Римана, исследовал её полюса и нули (гипотеза Римана), вывел приближённую формулу для оценки количества простых чисел через интегральный логарифм. В знаменитой лекции 1854 года «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» (опубликована в 1868 году) Риман дал общую идею математического пространства (по его словам, «многообразия»), включая функциональные и топологические пространства. Более подробно Риман рассмотрел так называемые римановы пространства, обобщающие пространства геометрий Евклида, Лобачевского и Римана, характеризующиеся специальным видом линейного элемента, и развил учение об их кривизне. Обсуждая применение своих идей к физическому пространству, Риман поставил вопрос о «причинах метрических свойств» его, как бы предваряя то, что будет сделано в общей теории относительности. Предложенные Риманом идеи и методы раскрыли новые пути в развитии математики и нашли применение в механике и физике.



ТОМСОН Уильям, лорд **КЕЛЬВИН** (1824–1907) – английский физик и математик, член Лондонского королевского общества (1851) и его президент (1890–1895), иностранный член-корреспондент (1877) и иностранный почетный член (1896) Петербургской АН. За научные заслуги получил титул лорда Кельвина (1892). Основные труды – по физике. Ввел (1890) и изучил один класс цилиндрических функций (функции Кельвина (Томсона)).

ФУРЬЕ Жан Батист Жозеф (1768–1830) – французский математик, профессор, член Парижской АН (1817), почетный член Петербургской АН (1829). Вместе с другими учеными принимал участие в египетской экспедиции Наполеона, был секретарем Каирского института. В 1817 году переехал в Париж, где вскоре стал секретарем Парижской АН. Первые научные достижения касались алгебры. Но основным объектом исследований Фурье была математическая физика. С 1807 по 1811 год он систематически подавал в Парижскую АН свои открытия по теории теплопроводности в твердом теле. Результаты его исследований были опубликованы в 1822 году в монографии «Аналитическая теория тепла». Он вывел уравнение теплопроводности и разработал методы его решения. В основе метода разделения переменных (метода Фурье) лежит представление функций тригонометрическими рядами (рядами Фурье). Такие ряды применялись и раньше, но только у Фурье они стали настоящим орудием математической физики. Фурье нашел формулу представления функции с помощью интеграла (интеграла Фурье), играющую важную роль в современной математике. «Аналитическая теория тепла» Фурье и примененные в ней методы стали основой для создания теории тригонометрических рядов и разработки некоторых других общих проблем математического анализа. Хотя Фурье и не доказал, что любую функцию можно разложить в тригонометрический ряд, но его попытки осуществить такое разложение были толчком к ряду исследований, посвященных этой проблеме. Работы Фурье и других ученых, посвященные тригонометрическим рядам, способствовали созданию теории множеств и теории функций действительной переменной.

ХЕВИСАЙД Оливер (1850–1925) – английский инженер и физик, член Лондонского королевского общества (1891). В 1892 году опубликовал работы, посвященные применению метода символического, или операционного, исчисления к решению задач теории распространения электрических колебаний в проводах. Эти работы положили начало систематическому применению операционного исчисления как одного из методов прикладного анализа, дающего возможность в ряде случаев очень просто решать сложные математические задачи механики, электротехники, автоматики и т. д. Разработанное Хевисайдом операционное исчисление не имело у него надлежащего математического обоснования, многие его результаты оставались недоказанными. Усилиями математиков, в первую очередь Дж. Карсона и Т. Дж. Бромвича, формальные приемы, предложенные Хевисайдом, были превращены на основе преобразования Лапласа в строго доказанные математические утверждения.



ЭЙЛЕР Леонард (1707–1783) – математик, физик, механик и астроном. Родился в Швейцарии. В 1727 году по приглашению Петербургской АН Эйлер приехал в Россию и был назначен адъюнктом по математике. В 1730 году он возглавил кафедру физики, а в 1733 стал академиком математики. В 1741 году он принимает предложение короля Фридриха II и переезжает в Берлин, но не порывает связей с Петербургом. В 1766 году Эйлер возвращается в Россию и до конца жизни проживает в Петербурге. К 1768 году Эйлер ослеп и вынужден был диктовать свои работы. Несмотря на слепоту, научная продуктивность Эйлера все возрастала. Почти половина его трудов создана в последнее десятилетие жизни.

Поразительна широта научных интересов Эйлера, охватывавших все отделы современной ему математики и механики, теорию упругости, математическую физику, оптику, теорию машин, страховое дело, теорию музыки и т. д. Он занимается вопросами баллистики и навигации. В 1746 году выходят три тома статей, посвященных артиллерии; в 1749 выпускает двухтомный труд, впервые излагающий вопросы навигации в математической форме, в нем подробно исследуются вопросы об остойчивости и равновесии судов, о качке, о форме судов, о движении под действием силы ветра и управлении судном и т. д. В 1773 году Эйлер опубликовал полную теорию кораблестроения и маневрирования судов. Этот труд был издан во Франции, Англии и Италии. Одновременно Эйлер занимается оптикой и теорией объективов, он исследует вопрос о прохождении света через различные среды и связанный с этим эффект хроматизма. В 1769–1777 годах выходят три больших тома, в которых изложены правила наилучшего расчета рефракторов, рефлекторов и микроскопов, решаются такие вопросы, как вычисление наибольшей яркости изображения, наибольшего поля зрения, наименьшей длины астрономических труб, наибольшего увеличения и т. п. В это же время печатаются три тома интегрального исчисления, два тома элементов алгебры, работы по астрономии: «Вычисление Кометы 1769», «Вычисление затмения Солнца», «Новая теория Луны» и др. Но большая часть работ Эйлера посвящена математике и ее приложениям.

Многочисленны открытия Эйлера в математике. Он впервые вводит понятие функции комплексной переменной, находит неожиданную связь между тригонометрическими и показательными функциями (формулы Эйлера). Тригонометрию он дал в таком виде, в каком мы ее знаем сейчас. Вариационное исчисление в ряде трудов Эйлера приняло вид общего метода. Эйлер положил начало аналитическому методу в теории чисел. Всего теории чисел он посвятил более 140 работ. Эйлер был одним из творцов современной дифференциальной геометрии. Ему принадлежит доказательство соотношения между числом вершин, ребер и граней многогранника. В алгебраической топологии важную роль играют эйлерова характеристика и эйлеров класс, в механике – углы Эйлера. Почти во всех областях математики и ее приложений встречается имя Эйлера: теоремы Эйлера, тождества Эйлера, эйлеровы постоянные, функции, формулы, интегралы, уравнения, подстановки и т. д.

В последние годы жизни Эйлер занимается теорией вероятностей, теорией чисел, гидродинамикой и другими вопросами естествознания. За несколько дней до смерти он проводит расчет полета аэростата, который казался чудом в ту эпоху, и почти закончил весьма трудную интеграцию, связанную с этим вычислением. Эйлеру принадлежит более 865 исследований по самым разнообразным и труднейшим вопросам. Он оказал большое и плодотворное влияние на развитие математического просвещения в России в XVIII в. Петербургская математическая школа под его руководством провела огромную просветительскую работу, создала обширную и замечательную для своего времени учебную литературу, выполнила ряд интересных научных исследований в области математики.

В 1775 году Парижская АН в обход статуса и с согласия французского правительства определила Эйлера своим девятым (должно быть только 8) «присоединенным членом».

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Плескунов Михаил Александрович

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *Л. Ю. Козяйчева*
Компьютерная верстка *Т. С. Криницинoй*

Подписано в печать 22.04.2014. Формат 60×90 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 9,0.
Уч.-изд. л. 5,8. Тираж 100 экз. Заказ № 650.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок