(2) Докажем дистрибутивность по второму множителю: $(\bar{a}, \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2, \bar{c})$ = по свойству $(V.3)$ смешанного произведения $= -(\mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2, \bar{a}, \bar{c})$ = по доказанной дистрибутивности смешанного произведения по первому множителю $= -\mu_1(\bar{b}_1, \bar{a}, \bar{c}) - \mu_2(\bar{b}_2, \bar{a}, \bar{c})$ = по свойству $(V.3)$ смешанного произведения $= \mu_1(\bar{a}, \bar{b}_1, \bar{c}) + \mu_2(\bar{a}, \bar{b}_2, \bar{c})$.

(3) Доказательство дистрибутивности по третьему множителю аналогично доказательству дистрибутивности смешанного произведения по второму множителю. □

Вернемся несколько назад. При доказательстве свойств векторного произведения у нас оказалось НЕ доказанным свойство $(IV.3)$ – свойство дистрибутивности векторного произведения: $[\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}] = \lambda_1[\bar{a}_1, \bar{b}] + \lambda_2[\bar{a}_2, \bar{b}]$ – дистрибутивность по первому множителю;
$[\bar{a}, \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2] = \mu_1[\bar{a}, \bar{b}_1] + \mu_2[\bar{a}, \bar{b}_2]$ – дистрибутивность по второму множителю.

Это свойство $(IV.3)$ векторного произведения наиболее просто обосновывать с использованием доказанного свойства дистрибутивности смешанного произведения. Именно по этой причине доказательство свойства $(IV.3)$ векторного произведения мы перебросили в данную лекцию.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор $\bar{c} \in V^3$ и запишем для смешанного произведения свойство дистрибутивности по первому множителю: $(\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c}) = \lambda_1(\bar{a}_1, \bar{b}, \bar{c})+$ $+ \lambda_2(\bar{a}_2, \bar{b}, \bar{c})$, которое в виду свойства $(V.4)$ можно представить как

$([\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{c}) = \lambda_1([\bar{a}_1, \bar{b}], \bar{c}) + \lambda_2([\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{c})$

Введем в V^3 некоторый ортонормированный базис $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ и в последнем равенстве в качестве вектора $\bar{c}$ будем последовательно брать базисные векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Рассмотрим случай $\bar{c} = \bar{e}_1$:

$([\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{e}_1) = \lambda_1([\bar{a}_1, \bar{b}], \bar{e}_1) + \lambda_2([\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{e}_1)$.

Теперь вспомним теорему о координатах вектора в ортонормированном базисе (см. стр. 17). Согласно этой теореме в ортонормированном базисе E:

$([\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{e}_1)$ – первая координата вектора $[\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}]$,

$([\bar{a}_1, \bar{b}], \bar{e}_1)$ – первая координата вектора $[\bar{a}_1, \bar{b}]$,

$([\bar{a}_2, \bar{b}], \bar{e}_1)$ – первая координата вектора $[\bar{a}_2, \bar{b}]$.

Согласно правилам выполнения линейных операция с векторами в координатной форме (см. стр. 10) заключаем, что первые координаты пары векторов

$$[\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2, \bar{b}] \text{ и } \lambda_1[\bar{a}_1, \bar{b}] + \lambda_2[\bar{a}_2, \bar{b}]$$

совпадают. Аналогичные рассуждения для случаев $\bar{c} = \bar{e}_2$ и $\bar{c} = \bar{e}_3$ показывают, что у последней пары векторов совпадают также и вторые и третьи координаты. Следовательно, это пара равных векторов, что доказывает дистрибутивность по первому множителю.

Дистрибутивность векторного произведения по второму множителю теперь доказывается просто. Рассмотрим векторное произведение $[\bar{a}, \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2]$ и цепочку равенств:
$[\bar{a}, \mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2]$ = антикоммутативность векторного произведения $= -[\mu_1\bar{b}_1 + \mu_2\bar{b}_2, \bar{a}]$ = дистрибутивность векторного произведения по первому множителю $= -\mu_1[\bar{b}_1, \bar{a}] - \mu_2[\bar{b}_2, \bar{a}]$ = антикоммутативность векторного произведения $= \mu_1[\bar{a}, \bar{b}_1] + \mu_2[\bar{a}, \bar{b}_2]$. Дистрибутивность векторного произведения по второму множителю доказана. □

1.7 Определители (детерминанты) второго и третьего порядков

Это один из самых коротких и скучных (в отличие от предыдущих) параграфов. Излагаемый здесь материал будет детально рассматриваться в курсе АЛГЕБРА. Однако последовательность изложения нашего курса вынуждает вводить некоторые конструкции ДО введения из в других дисциплинах.

Определение 1.27. МАТРИЦЕЙ называют прямоугольную таблицу A чисел, состоящую из m строк и n столбцов, которую заключают в большие круглые скобки:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{ij} \in \mathbb{R}$ называют элементами матрицы A ($1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$).

Если $m = n$, то такую матрицу называют КВАДРАТНОЙ матрицей n-го (или m-го) порядка. В данном параграфе будем рассматривать только квадратные матрицы второго ($n = 2$) или третьего ($n = 3$) порядков:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.28. ОПРЕДЕЛИТЕЛЕМ или ДЕТЕРМИНАНТОМ квадратной матрицы A называют <u>число</u>, которое обозначают как $|A|$ или в более подробной записи:

$$\text{Для } n = 2\colon |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и для } n = 3\colon |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

(1) Определитель второго порядка — это число, определяемое равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (*)$$

(2) Определитель третьего порядка – это число, определяемое равенством $(**)$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

В этой записи круглые “матричные” скобки заменяются на вертикальные чёрточки. Иногда используют обозначение $\det A$.

Для $n = 2$, $n = 3$ определение определителя, т.е. формулы $(*)$, $(**)$, соответственно, также называют <u>формулами полного развёртывания</u>.

<u>Например</u>

(1) Вычислим (развернём) определитель: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = (*) = 2 \cdot 3 - (-1)4 = 10.$

(2) Вычислим (развернём) определитель: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2(-1) \cdot 0 - 2 \cdot 3 \cdot 4 -$ $- 1(-1)3 - 1 \cdot 2 \cdot 0 = -4.$

Определитель третьего порядка $|A|$ можно выразить через определители второго порядка (редукция). Рассмотрим цепочку преобразований:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} =$$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$ по определению $(*)$ можем "свернуть" скобки: $= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$.

Полученная формула:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

называется ФОРМУЛОЙ РАЗЛОЖЕНИЯ определителя третьего порядка $|A|$ по первой строке.

Замечание 1.17. Несмотря на пугающе-грозный вид этой формулы, запомнить её очень просто: (1) В исходном определителе $|A|$ выделим 1-ую строку и над ней поставим последовательность знаков $+ - +$, соединяющих три слагаемых в правой части формулы:

$$|A| = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{array}$$

(2) Первый, второй и третий определители второго порядка получаются из $|A|$ вычёркиваем 1-й строки и 1,2,3-го столбцов, соответственно.

Например, разложим определитель (см. стр. 24) по 1-й строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 9 + 11 - 24 = -4.$$

1.8 Векторное и смешанное произведения векторов в координатной форме. Двойное векторное произведение

Пусть $E = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ – некоторый базис в V^3. Пусть $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ и координаты этих векторов в базисе E есть:

$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \Rightarrow \bar{a} = \alpha_1\bar{e}_1 + \alpha_2\bar{e}_2 + \alpha_3\bar{e}_3,$

$\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\} \Rightarrow \bar{b} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3.$

Тогда $[\bar{a}, \bar{b}] = [\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3, \beta_1\bar{e}_1+\beta_2\bar{e}_2+\beta_3\bar{e}_3] =$ по св-ву $(IV.3)$ ВП (стр. 20) $= \alpha_1\beta_1[\bar{e}_1, \bar{e}_1] + \alpha_1\beta_2[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \alpha_1\beta_3[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \alpha_2\beta_1[\bar{e}_2, \bar{e}_1] + \alpha_2\beta_2[\bar{e}_2, \bar{e}_2] + \alpha_2\beta_3[\bar{e}_2, \bar{e}_3] + \alpha_3\beta_1[\bar{e}_3, \bar{e}_1] + \alpha_3\beta_2[\bar{e}_3, \bar{e}_2] + \alpha_3\beta_3[\bar{e}_3, \bar{e}_3] = \left\{ \begin{array}{l} \text{из определения векторного произведения } \Rightarrow [\bar{e}_i, \bar{e}_i] = \bar{0} \\ \text{из свойства } (IV.2) \text{ векторного произведения } \Rightarrow [\bar{e}_i, \bar{e}_j] = -[\bar{e}_j, \bar{e}_i] \end{array} \right\} =$
$= (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + (\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1)[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)[\bar{e}_2, \bar{e}_3].$

Из определения $(*)$ определителя второго порядка (стр. 24) получаем:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}[\bar{e}_1, \bar{e}_2] + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix}[\bar{e}_1, \bar{e}_3] + \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}[\bar{e}_2, \bar{e}_3] \qquad (1)$$

Обсудим полученную формулу. Она представляет собой разложение вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$ по системе векторов $E' = \{[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]\}$. Будет ли система E' БАЗИСОМ в V^3? Ответом на этот вопрос является утверждение:

Утверждение 1.5. Система $E' = \{[\bar{e}_1, \bar{e}_2], [\bar{e}_1, \bar{e}_3], [\bar{e}_2, \bar{e}_3]\}$ есть базис в V^3.