Следствие 2.2. Из условия совпадения прямых: $l_1 = l_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \lambda \neq 0$ следует, что общее уравнение прямой определено с точностью до константы: $l\colon Ax + By + C = 0$ и $l\colon \lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0$ $(\lambda \neq 0)$.

НЕПОЛНОЕ УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

Определение 2.8. Общее уравнение прямой $l\colon Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$ называем НЕПОЛНЫМ если хотя бы один из коэффициентов A, B, C равен нулю.

Из-за условия $A^2 + B^2 \neq 0$ может быть пять случаев НЕПОЛНЫХ уравнений:
(a) $A = 0,\ B, C \neq 0$;
(b) $B = 0,\ A, C \neq 0$;
(c) $C = 0,\ A, B \neq 0$;
(d) $A, C = 0,\ B \neq 0$;
(e) $B, C = 0,\ A \neq 0$.

Рассмотрим вопрос о взаиморасположении прямой l относительно системы координат OXY в каждом отдельном случае.
(a) $A = 0$ и $B, C \neq 0 \Rightarrow$ направляющий вектор $\bar{a} = \{-B, 0\} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{e}_1 \Rightarrow l \parallel OX$;
(b) $B = 0$ и $A, C \neq 0 \Rightarrow$ направляющий вектор $\bar{a} = \{0, A\} \Rightarrow \bar{a} \parallel \bar{e}_2 \Rightarrow l \parallel OY$;
(c) $C = 0$ и $A, B \neq 0 \Rightarrow l\colon Ax + By = 0 \Rightarrow (\bullet)O(0,0) \in l \Rightarrow l$ проходит через начало координат;
(d) $A, C = 0$ и $B \neq 0$. Из (a) и (c) $\Rightarrow l$ совпадает с осью OX;
(e) $B, C = 0$ и $A \neq 0$. Из (b) и (c) $\Rightarrow l$ совпадает с осью OY.

2.3 Уравнение пучка прямых

Определение 2.9. Пучком прямых на плоскости называем множество всех прямых, проходящих через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, которую называем центром пучка (см. *рис. а*).

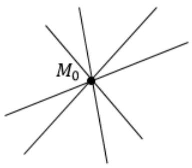


рис. а

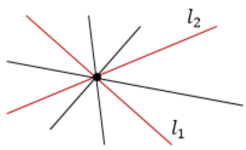


рис. в

Пучок прямых можно также задать некоторыми двумя прямыми из пучка l_1 и l_2:
$l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (A_1^2 + B_1^2 \neq 0)$
$l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (A_2^2 + B_2^2 \neq 0)$

Т.к. l_1, l_2 из пучка, то, очевидно, $l_1 \neq l_2$ и $l_1 \nparallel l_2$. Такие прямые иногда называют ОПРЕДЕЛЯЮЩИМИ прямыми пучка (см. *рис. в*).

Описание всех прямых пучка доставляется теоремой

Теорема 2.2. Если l_1, l_2 есть определяющие прямые пучка, то уравнение

$$\left.\begin{array}{c}\lambda(A_1x + B_1y + C_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0,\\ \text{где } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ и } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0\end{array}\right\} \quad (7)$$

задает любую прямую из пучка и только её.

Доказательство. 1° Необходимость. Доказываем, что (7) есть уравнение любой прямой из пучка.

(а) Сначала покажем, что (7) есть уравнение прямой. Для этого перепишем уравнение (7) в виде:

$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2) = 0 \quad (7)'$

Вводим обозначения:

$A = \lambda A_1 + \mu A_2;$

$B = \lambda B_1 + \mu B_2;$

$C = \lambda C_1 + \mu C_2;$

Покажем, что $A^2 + B^2 \neq 0$, т.е. $(7)'$ и, следовательно, (7) есть линейное уравнение и l – прямая. Предположим противное:

$$\left.\begin{array}{l} A = 0 \;\Rightarrow\; \lambda A_1 + \mu A_2 = 0 \\ B = 0 \;\Rightarrow\; \lambda B_1 + \mu B_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Рассмотрим это как систему двух уравнений с двумя неизвестными λ и μ. Определитель системы $d = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Действительно, в противном $A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Rightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$ или $l_1 = l_2$. Противоречие с условием, что эти прямые из пучка. Следовательно $A^2 + B^2 \neq 0$, т.е. $(7)'$ (и (7)) есть уравнение прямой.

(в) Докажем, что уравнение (7) описывает прямые из пучка. Действительно, если точка M_0 есть центр пучка: $M_0 = l_1 \cap l_2$, то

$$\left.\begin{array}{l} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{array}\right\}$$

и получаем тожество: $\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 \equiv 0$, т.е. любая прямая l задаваемая (7) проходит через точку M_0, что значит l принадлежит пучку.

2° Достаточность. Здесь доказываем что любую прямую из пучка можно записать в виде (7). Пусть l произвольная прямая из пучка, а l_1, l_2 определяющие прямые пучка.

$l\colon\; Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0) \quad (a)$

$l_1\colon A_1x + B_1y + C_1 = 0 \;\; (A_1^2 + B_1^2 \neq 0) \quad (b)$

$l_2\colon A_2x + B_2y + C_2 = 0 \;\; (A_2^2 + B_2^2 \neq 0) \quad (c)$

Из (a) вычтем (b) и (c) умноженное на λ и μ, соответственно:

$Ax + By + C - \lambda(A_1x + B_1y + C_1) - \mu(A_2x + B_2y + C_2) = 0 \quad \Longrightarrow$

$(A - \lambda A_1 - \mu A_2)x + (B - \lambda B_1 - \mu B_2)y + (C - \lambda C_1 - \mu C_2) = 0 \quad (*)$

Определим вспомогательную систему:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda A_1 + \mu A_2 = A \\ \lambda B_1 + \mu B_2 = B \end{array}\right\}$$

Т.к. l_1, l_2 определяющие прямые пучка ($l_1 \nparallel l_2$, $l_1 \neq l_2$), то, как отметилось в 1°, определитель системы $d = A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$ и по Крамеру эта система имеет единственное решение λ_0, μ_0 и оно НЕ нулевое. Действительно, в противном: $\lambda_0 = \mu_0 = 0 \Rightarrow A = B = 0$, что противоречит условию $A^2 + B^2 \neq 0$. По определению решения линейной системы:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 A_1 + \mu_0 A_2 = A \\ \lambda_0 B_1 + \mu_0 B_2 = B \end{array}\right\}$$

Подставляем в $(*)$: $(A - \lambda_0A_1 - \mu_0A_2)x + (B - \lambda_0B_1 - \mu_0B_2)y + (C - \lambda_0C_1 - \mu_0C_2) =$
$= 0 \cdot x + 0 \cdot y + (C - \lambda_0C_1 - \mu_0C_2) = C - \lambda_0C_1 - \mu_0C_2 = 0 \Rightarrow C = \lambda_0C_1 + \mu_0C_2.$

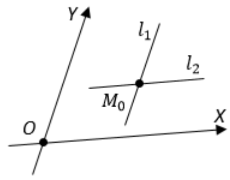
Итак, найдены такие λ_0 и μ_0 $(\lambda_0^2 + \mu_0^2 \neq 0)$, что:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_0 A_1 + \mu_0 A_2 = A \\ \lambda_0 B_1 + \mu_0 B_2 = B \\ \lambda_0 C_1 + \mu_0 C_2 = C \end{array}\right\}$$

Поэтому уравнение любой прямой из пучка можно записать в виде:

$l\colon Ax + By + C = (\lambda_0 A_1 + \mu_0 A_2)x + (\lambda_0 B_1 + \mu_0 B_2)y + (\lambda_0 C_1 + \mu_0 C_2) = 0$
или
$l\colon \lambda_0(A_1 x + B_1 y + C_1) + \mu_0(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0,$
т.е. показано, что любую прямую из пучка можно задать уравнением (7). $\square$

Уравнение пучка прямых (7) получено в предположении, что пучок задан определяющими прямыми l_1 и l_2. Пусть теперь пучок определен координатами x_0, y_0 центра пучка $M_0(x_0; y_0)$. В этом случае уравнение пучка можно получить из (7) следующим образом. Пусть прямые $l_1 \parallel OY$, $l_2 \parallel OX$ и проходят через точку $M_0(x_0; y_0)$ (см. рис.) Общие уравнения этих прямых есть:



$l_1\colon x - x_0 = 0,$
$l_2\colon y - y_0 = 0.$
Считаем эти прямые образующими пучка и подставляем их уравнения в (7):
$\lambda(x - x_0) + \mu(y - y_0) = 0.$
В этой записи обычно полагают $\lambda = A$ и $\mu = B$. Тогда уравнение пучка прямых относительно заданного центра $M_0(x_0; y_0)$ записывают в виде:

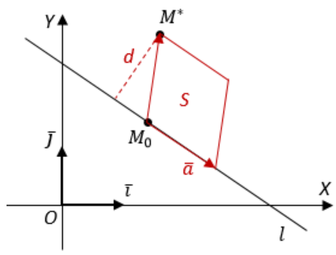
$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 \quad (\tilde{7})$$

Далее, если в $(\tilde{7})$ считать, что $B \neq 0$ то из $(\tilde{7})$ следует $y - y_0 = -\dfrac{A}{B}(x - x_0)$ и полагая $k = -\dfrac{A}{B}$ получаем

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (\tilde{7})' \text{ – уравнение пучка «через угловой коэффициент».}$$

Замечание 2.6. Уравнение пучка прямых «через угловой коэффициент» описывает все прямые из пучка кроме прямой $l_1\colon x - x_0 = 0$ для которой $B = 0$. В уравнении $(\tilde{7})'$ смысл коэффициента k как $k = tg\varphi$, где φ – угол наклона прямой из пучка к оси OX, имеет смысл только для ПРЯМОУГОЛЬНОЙ системы OXY.

В рамках темы «уравнения прямой на плоскости» сформулируем следующую задачу:
Задача
Пусть в ПРЯМОУГОЛЬНОЙ декартовой системе координат $OXY \sim \{O, \bar{\imath}, \bar{\jmath}\}$ задана прямая общим уравнением $l\colon Ax + By + C = 0$ и некоторая точка $M^*(x^*, y^*)$ на плоскости. Требуется вывести формулу для расстояния d от точки M^* до прямой l.
Решение
Возьмем на l некоторую точку $M_0(x_0, y_0)$: $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Направляющий вектор $\bar{a}$ прямой есть: $\bar{a} = \{-B, A\}$. На векторах $\bar{a}$ и $\overline{M_0M^*}$ образуем параллелограмм (см. рис). Пусть его площадь S. Тогда $d = \dfrac{S}{|\bar{a}|}$. Значение S можно «вытащить» из 1-го свойства векторного произведения: $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$, но векторное произведение $[\bar{a}, \bar{b}]$ определенно для векторов в ПРОСТРАНСТВЕ. Чтобы воспользоваться этим определением, будем считать, что векторы $\overline{M_0M^*} = \{x^* - x_0, y^* - y_0\}$ и $\bar{a} = \{-B, A\}$ рассматриваются в пространстве: $\overline{M_0M^*} = \{x^* - x_0, y^* - y_0, 0\}$ и



$\bar{a} = \{-B, A, 0\}$. Тогда $[\overline{M_0M^*}, \bar{a}] = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ x^* - x_0 & y^* - y_0 & 0 \\ -B & A & 0 \end{vmatrix} = (A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0))\bar{k}$ и
$S = |A(x^* - x_0) + B(y^* - y_0)| = |Ax^* + By^* + (-Ax_0 - By_0)| = |Ax^* + By^* + C|$
Т.к. $|\bar{a}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ то искомая формула есть:

$$d = \frac{|Ax^* + By^* + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$