Пусть, например, $\alpha_1 = 0$. Тогда это будет означать запись $\dfrac{\beta_1}{0} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_3}{\alpha_3}$?

Запишем по-другому: $\begin{cases} \beta_1 = \alpha \cdot 0 \\ \beta_2 = \alpha\alpha_2 \\ \beta_3 = \alpha\alpha_3 \end{cases}$

Таким образом, $\beta_1 = 0$ и из записи: $\dfrac{\beta_1}{0} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_3}{\alpha_3}$ следует, что $\beta_1 = 0$, т.е. получаем правило, если в «знаменателе» $\alpha_1 = 0$, то и «числитель» $\beta_1 = 0$. Аналогично:
$\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{0} = \dfrac{\beta_3}{\alpha_3} \Rightarrow \beta_2 = 0$ и $\dfrac{\beta_1}{\alpha_1} = \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_3}{0} \Rightarrow \beta_3 = 0$.

Легко проверить, что если два «знаменателя» нулевые, то соответствующие «числители» равны нулю.

Суть замечания в том, что условие пропорциональности это НЕ равенство дробей. Поэтому слова «знаменатель» и «числитель» берем в кавычки. В отличие от обычных дробей здесь «знаменатели» могут быть равными нулю и соответствующие «числители» надо также брать равными нулю.

В заключении данного параграфа подчеркнем, что введение базисов в V^1, V^2, V^3 позволяет задавать векторы не геометрические (вектор-стрелки) а набором чисел – координат вектора. В координатной форме можно выполнять линейные операции (I), (II) и не только их (см. далее), судить о коллинеарности векторов и т.п. Тем самым геометрическое задание векторов и операций над ними базис «переведет» на алгебраический язык, что можно изобразить условной схемой:

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Геометрическое определение векторов и операций над ними	$\xrightarrow{\text{базис}}$	Алгебраический подход: "работа" в координатной форме

1.3 Базисы (алгебраическая точка зрения)

Рассмотрим векторные пространства $V = V^1, V^2, V^3$ и остановимся еще раз на определении базисов, введенных в предыдущем параграфе.

(1) В пространстве V^1 (прямая) базис $E_1 = \{\bar{e}_1\}$ есть вектор (вектор-стрелка) ненулевой длины: $|\bar{e}_1| \neq 0 \Rightarrow \bar{e}_1 \neq \bar{0}$.

(2) В пространстве V^2 (планиметрия) базис $E_2 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ есть пара не коллинеарных векторов, $\bar{e}_1 \nparallel \bar{e}_2$, т.е. пара векторов не лежащих на одной или параллельных прямых.

(3) В пространстве V^3 (стереометрия) базис $E_3 = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ есть тройка не компланарных векторов, т.е. тройка векторов, которые нельзя разместить на одной плоскости.

<u>Обратите внимание(!)</u>: определение базисных систем E_1, E_2, E_3 в V^1, V^2, V^3 дано в наивной, геометрической форме – это векторы ненулевые, неколлинеарные, некомпланарные.

В данном параграфе мы «уйдем» от геометрических характеристик в описании базисных систем E_1, E_2, E_3, но будем определять их с иной, АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ точки зрения. Первым шагом на этом пути является определение ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ и ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫХ систем векторов.

Рассмотрим в векторном пространстве V некоторую систему векторов A:
$A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ (где $\bar{a}_i \in V$, $i = 1, 2, \ldots, n$)

Пусть $\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$ есть линейная комбинация векторов этой системы. Говорят, что линейная комбинация НУЛЕВАЯ или ТРИВИАЛЬНАЯ, если все коэффициенты равны нулю: $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$. Далее будет удобно использовать очевидный факт:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0 \Leftrightarrow \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0$.

Тогда запись $\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2\neq 0$ означает, что среди n чисел $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ есть хотя бы одно отличное от нуля.

Определение 1.13. Система $A=\{\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n\}$ называется линейно независимой системой, если из равенства $\bar 0$ ее линейной комбинации следует, что она тривиальна, т.е.
$\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2+\ldots+\lambda_n\bar a_n=\bar 0\Rightarrow\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2=0.$

Отрицанием этого определения является определение линейно зависимой системы.

Определение 1.14. Система $A=\{\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n\}$ называется линейно зависимой системой, если существует нетривиальная линейная комбинация равная $\bar 0$, т.е.
$\exists\ \lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_n^2\neq 0$ такая, что $\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2+\ldots+\lambda_n\bar a_n=\bar 0$.

Теорема 1.9 (Критерий линейной зависимости системы векторов)**.** Система векторов A, $A=\{\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n\}$ – линейно зависимая тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы можно разложить по векторам этой системы.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть A есть линейно зависимая система. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация равная $\bar 0$. Не нарушая общность будем считать, что $\lambda_1\neq 0$. Тогда $\lambda_1\bar a_1+\lambda_2\bar a_2+\ldots+\lambda_n\bar a_n=\bar 0\Rightarrow\bar a_1=\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\bar a_2+\ldots+\left(-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\bar a_n$, т.е. вектор $\bar a_1$ разложен по остальным векторам системы A: $\bar a_1=\mu_2\bar a_2+\ldots+\mu_n\bar a_n$ $\left(\text{здесь } \mu_2=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1},\ldots,\ \mu_n=-\dfrac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)$.

2. Достаточность. Пусть один из векторов системы A разложен по остальным векторам этой системы. Пусть этим вектором будет $\bar a_1=\mu_2\bar a_2+\ldots+\mu_n\bar a_n\Rightarrow-\bar a_1+\mu_2\bar a_2+\ldots+\mu_n\bar a_n=\bar 0$, т.е. найдена нетривиальная ($\mu_1=-1\neq 0$) линейная комбинация равная $\bar 0$. Таким образом, A есть линейно зависимая система. □

Теорема 1.10 (Критерий линейной независимости системы векторов)**.** Система векторов $A=\{\bar a_1,\bar a_2,\ldots,\bar a_n\}$ – линейно независимая тогда и только тогда, когда ни один из векторов этой системы нельзя разложить по векторам этой системы.

Доказательство. Сразу получается от противного с использованием критерия линейной зависимости. □

Теорема 1.11. Системы базисных векторов E_1, E_2, E_3 есть линейно независимые системы в пространствах V^1,V^2,V^3 соответственно.

Доказательство. От противного.

(1) Для V^1. Предположим $E_1=\{\bar e_1\}$, где $\bar e_1\neq 0$ есть линейно зависимая система. По определению линейной зависимости существует $\lambda\neq 0$ такое, что линейная комбинация $\lambda\bar e_1$ нулевая: $\lambda\bar e_1=\bar 0$. Т.к. $\bar e_1\neq 0$, то из утверждения следует, что $\lambda=0$. Противоречие.

(2) Для V^2. Предположим $E_2=\{\bar e_1,\bar e_2\}$, где $\bar e_1\nparallel\bar e_2$ есть линейно зависимая система, т.е. существует нетривиальная линейная комбинация равная $\bar 0$: $\lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2=\bar 0$. Пусть один из коэффициентов, например λ_1, не равен нулю. Тогда: $\lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2=\bar 0\Rightarrow\bar e_1=-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\bar e_2$. Из критерия коллинеарности векторов следует, что $\bar e_1\parallel\bar e_2$. Противоречие.

(3) Для V^3. Предположим $E_3=\{\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3\}$ где $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3$ – тройка некомпланарных векторов есть линейно зависимая, т.е. $\lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2+\lambda_3\bar e_3=\bar 0$. Пусть один из коэффициентов, например λ_1, не равен нулю. Тогда: $\lambda_1\bar e_1+\lambda_2\bar e_2+\lambda_3\bar e_3=\bar 0\Rightarrow\bar e_1=\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\bar e_2+\left(-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\bar e_3$, откуда следует, что $\bar e_1$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\left(-\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\bar e_2$ и $\left(-\dfrac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\bar e_3$, т.е. $\bar e_1$ лежит в плоскости векторов $\bar e_2,\bar e_3$ из чего следует, что $\bar e_1,\bar e_2,\bar e_3$ – компланарная тройка векторов. Противоречие. □

Введем еще определения:

Определение 1.15. Система векторов $A = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ называется ПОЛНОЙ системой, если <u>любой</u> вектор $\bar{a} \in V$ можно разложить по системе A: $\bar{a} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \dots \lambda_n\bar{a}_n$.

Наконец, дадим (алгебраическое) определение базиса:

Определение 1.16. Система $E_n = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ называется базисом пространства V, если она удовлетворяет двум условиям:
1° E_n есть линейно независимая система;
2° E_n есть полная система.

В последнем определении два предложения 1° и 2° иногда объединяют в одно: E_n есть МАКСИМАЛЬНАЯ линейно независимая система в V.

Если E_n – базис в V, то такое пространство также обозначают V^n: $V = V^n$.

Какая связь между «геометрическим» определением базисов E_1, E_2, E_3 в пространствах V^1, V^2, V^3 с алгебраическим определением базиса E_n в V^n?

Теорема 1.12. Геометрическое определение базисов E_1, E_2, E_3 в V^1, V^2, V^3 совпадает с алгебраическим определением базиса E_n в V^n для случаев $n = 1, 2, 3$.

Доказательство. 1° E_1, E_2, E_3 есть полные системы в V^1, V^2, V^3. Это следует из теорем 1.2, 1.3, 1.4 (стр. 8-9) или «объединенной» теоремы 1.5 (стр. 9).

2° E_1, E_2, E_3 есть линейно независимые системы векторов, это следует теоремы 1.11 данного параграфа.

Выполнение этих двух условий и есть определение базиса с алгебраической точки зрения.
$\square$

В отличие от пространств V^1, V^2, V^3 в пространстве V^n $(n \geqslant 4)$ базисы E_n геометрическим способом задать нельзя.

Определение 1.17. Число n векторов в базисе $E_n = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ называют размерностью пространства и обозначают $\dim V^n = n$.

Таким образом для:
$n = 1, \dim V^1 = 1$ (прямая);
$n = 2, \dim V^2 = 2$ (плоскость);
$n = 3, \dim V^3 = 3$ (пространство);
$n \geqslant 4, \dim V^n = n$ (наглядно-геометрического образца нет).

Именно алгебраическая точка зрения на базис позволяет сделать «переход» от геометрически ясных конфигураций пространств V^1, V^2, V^3 к пространствам больших размерностей.

Общая теория векторных пространств, как уже устоялось, будет построена в курсе АЛГЕБРА. В данном курсе АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ мы рассматриваем и будем рассматривать пространства V^1, V^2, V^3. Зачем же мы вообще упоминаем о пространствах больших размерностей? Только для того, чтобы посмотреть как здесь реализуется принцип «от простого к сложному» – переход от V^1, V^2, V^3 к пространствам V^n при $n > 3$.

1.4 Скалярное произведение векторов

Наряду с линейными операциями (I) и (II) вводят еще третью операцию, которую называют скалярным произведением векторов. Операцию скалярного произведения будем также нумеровать римской цифрой (III). Предварительно сформулируем следующее определение: