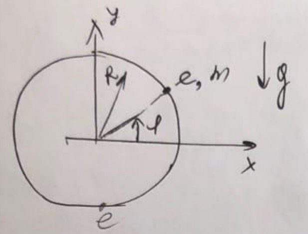
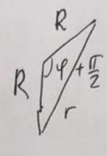
2.2. Частица массой m и зарядом e может двигаться в поле силы тяжести по вертикальному обручу радиуса R, в нижней точке обруча закреплена частица, также имеющая заряд e. Найти устойчивые положения равновесия и частоты малых колебаний относительно этих положений равновесия.



$S = 1$

φ – обобщ. координата

$$U_e = e\,\frac{e}{r}$$



$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

$$r^2 = 2R^2(1 + \sin\varphi)$$

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases}$$

$$U_e = \frac{e^2}{\sqrt{2}R\sqrt{1+\sin\varphi}}$$

$$\begin{cases} \dot x = -R\sin\varphi\,\dot\varphi \\ \dot y = R\cos\varphi\,\dot\varphi \end{cases}$$

$$U_g = mgy = mgR\sin\varphi$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}R^2\dot\varphi^2 - mgR\sin\varphi - \frac{e^2}{\sqrt{2}R\sqrt{1+\sin\varphi}}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot\varphi\right) = mR^2\ddot\varphi = \frac{\partial L}{\partial\varphi} = -mgR\cos\varphi -$$

$$-\frac{e^2}{\sqrt{2}R}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+\sin\varphi)^{-\frac{3}{2}} = -mgR\cos\varphi + \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}$$

$$mR^2\ddot\varphi + \left(mg\cos\varphi - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}\right)\cos\varphi = 0$$

Положения равновесия: $\dot\varphi = \ddot\varphi = 0$

$$\left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}\right)\cos\varphi = 0$$

$\cos\varphi = 0$ $\quad 1 + \sin\varphi \neq 0$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$mgR = \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}$$

$$(1+\sin\varphi)^{3/2} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}R\,mgR}$$

$$1+\sin\varphi = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3}$$

$$\sin\varphi = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} - 1$$

т.к. $|\sin\varphi| \le 1$, то это выражение имеет смысл

если $0 \le \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^2g}\right)^{2/3} \le 2$

$$\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2} \le 2\sqrt{2}$$

, тогда пусть

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2} - 1\right)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2} - 1\right)$$

$$\frac{e^2}{mgR^2} \le 8$$

$$\frac{e^2}{R^2} \le 8mg$$

(1). $\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta\varphi$; $\delta\varphi \to 0$ (малое отклонение)

$$mR^2\delta\ddot{\varphi} + \left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\delta\varphi\right) = 0 \quad |:mR^2$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{R} - \frac{e^2}{8mR^3}\right)(-\sin\delta\varphi) = 0$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \underbrace{\left(\frac{e^2}{8mR^3} - \frac{g}{R}\right)}_{\omega^2}\delta\varphi = 0$$

1) $\omega^2 > 0$ равновесие устойчивое;

$$\omega = \sqrt{\frac{e^2}{8mR^3} - \frac{g}{R}}$$

$$\frac{e^2}{8mR^3} > \frac{g}{R} \Rightarrow \frac{e^2}{R^2} > 8mg$$

2) $\omega^2 < 0$ – равновесие не уст.

$$\frac{e^2}{8mR^3} < 8mg$$

(2) $\varphi = \varphi_1 + \delta\varphi$

$$mR^2\delta\ddot{\varphi} + \left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin(\varphi_1+\delta\varphi))^{3/2}}\right)\cos(\varphi_1+\delta\varphi) = 0 \quad |:mR^2$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{R} + \frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^3}\frac{1}{(1+\sin(\varphi_1+\delta\varphi))^{3/2}}\right)\cos(\varphi_1+\delta\varphi) = 0$$

$$\sin(\varphi_1+\varphi) = \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\,\delta\varphi$$

$$(1+\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\cdot\delta\varphi)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1+\frac{\cos\varphi_1}{(1+\sin\varphi_1)}\delta\varphi\right)^{-3/2} =$$

$$= (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\delta\varphi\right)$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(\cancel{\frac{g}{R}} - \frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^3}(1+\sin\varphi_1)^{-3/2} + \frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^3}\,\frac{3}{2}\,(1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\,\delta\varphi\right)\cdot\cos\varphi_1 = 0$$

т.к. полож. р-ся

$$\delta\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{3\,e^2(1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\cos^2\varphi_1}{4\sqrt{2}\,mR^3(1+\sin\varphi_1)}}_{\omega^2}\,\delta\varphi = 0$$

оно всегда устойчивое если ∃ и если $\omega^2 \neq 0$

т.е. $\frac{e^2}{R^2} < 8mg$

т.е. $\omega = \sqrt{\frac{3}{4\sqrt{2}}\,\frac{e^2(1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\cos^2\varphi_1}{(1+\sin\varphi_1)\,mR^3}} = \sqrt{\frac{3e^2}{4\sqrt{2}}\,\frac{\cos^2\varphi_1}{(1+\sin\varphi_1)^{5/2}}}$

3). $\varphi = \varphi_1 + \delta\varphi$

т.к. $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, то есть точка симметричная отн-но оси y, то ситуация будет такая же (в силу симметрии с-мы отн-но оси y)

Действительно,

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{R} - \frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^3}\,\frac{1}{1+\sin(\pi-(\varphi_1-\delta\varphi))}\right)\cos(\pi-\varphi_1+\delta\varphi) = 0$$

$$\sin(\pi-(\varphi_1-\delta\varphi)) = \sin(\varphi_1-\delta\varphi) = \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1\,\delta\varphi$$

$$(1+\sin\varphi_1-\cos\varphi_1\,\delta\varphi)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1-\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\delta\varphi\right)^{-3/2} =$$

$$= (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\delta\varphi\right)$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \left(-\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mR^3}\,\frac{3}{2}\,\frac{(1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\cos^2\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}\delta\varphi\right)(-\cos\varphi_1) = 0$$

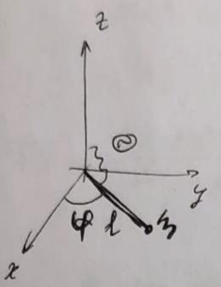
$$\delta\ddot{\varphi} + \frac{3e^2}{4\sqrt{2}\,mR^3}\,\frac{\cos^2\varphi_1}{(1+\sin\varphi_1)^{5/2}}\,\delta\varphi = 0$$

т.е. ур-е получилось такое же → ∃ус. те же что и во 2 случ?

P.S. ∗ ~~ур-ие~~ на усл. устойчивости полож. р-я, то верно если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – уст., то других полож. р-я нет.

если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – не уст., то возникают 2 других уст. полож. р-ия, симметричных отн-но оси y (φ и $\pi - \varphi$)

2. Сферический маятник представляет собой частицу массой m подвешенную в поле силы тяжести на невесомом и нерастяжимом стержне длиной l, который может выполнять свободные колебания относительно точки подвеса. Угол отклонения сферического маятника от вертикали совершает малые колебания относительно положения равновесия θ_0, определить частоту этих малых колебаний.



сферич. маятник

m, l, θ_0

$s = 2 : l = const$

θ и φ – обобщ. координаты

$$\begin{cases} x = l\cos\varphi\sin\theta \\ y = l\sin\varphi\sin\theta \\ z = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot\theta^2 + (l\dot\varphi\sin\theta)^2\right) - mgl\cos\theta}$$

φ: φ – циклическая;

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = ml^2\sin^2\theta\,\dot\varphi = const \to \boxed{\dot\varphi = \frac{p_\varphi}{ml^2\sin^2\theta}}$$

$$\theta: \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{d}{dt}\left(ml^2\dot\theta\right) + \cancel{ml^2\cos\theta} = ml^2\ddot\theta = \frac{\partial L}{\partial\theta} = ml^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta + mgl\sin\theta$$

$$\boxed{ml^2\ddot\theta = ml^2\dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta + mgl\sin\theta} \Leftrightarrow \boxed{\ddot\theta - \dot\varphi^2\cos\theta\sin\theta - \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

Ищем положения равновесия $\dot\theta = \ddot\theta = 0$

$$(ml^2\dot\varphi^2\cos\theta + mgl)\sin\theta = 0 \quad (\$)$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\theta = 0 \\ \cos\theta = -\dfrac{mgl}{ml^2\dot\varphi^2} = -\dfrac{g}{l\dot\varphi^2} \end{array}\right. \qquad |\cos\theta| \le 1, \quad \left|-\frac{g}{l\dot\varphi^2}\right| \le 1 \text{ – усл. } \exists$$

$$\left[\begin{array}{l} \theta_0 = 0 \\ \theta_0 = \pi \\ \cos\theta_0 = -\dfrac{g}{l\dot\varphi^2} \end{array}\right. \qquad -\frac{g}{l\dot\varphi^2} = -\frac{g}{l}\frac{(ml^2)^2\sin^4\theta_0}{p_\varphi^2}$$

$$p_\varphi^2 = -\frac{g}{l}\frac{(ml^2)^2\sin^4\theta_0}{\cos\theta_0} \quad (1)$$

~~θ = θ₀ + δθ, θ₀ положение равновесия~~

в * поставим $\dot\varphi$

$$ml^2\ddot\theta = \frac{p_\varphi^2}{(ml^2\sin^2\theta)^2}ml^2\cos\theta\sin\theta + mgl\sin\theta$$

$$ml^2\ddot\theta = \frac{p_\varphi^2}{ml^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} + mgl\sin\theta$$

Пусть $\theta = \theta_0 + \delta\theta$, где $\delta\theta$ малое отклонение

$$ml^2\delta\ddot\theta = \frac{p_\varphi^2}{ml^2}\left(\frac{\cos\theta_0}{\sin^3\theta_0} + \frac{-\sin^4\theta_0 - \cos^2\theta_0\, 3\sin^2\theta_0}{\sin^6\theta_0}\right) +$$

$$+ mgl(\sin\theta_0 + \cos\theta_0\,\delta\theta)$$

$=0$ как полож. р-я ($)

$$ml^2\delta\ddot{\Theta} = \frac{p_\varphi^2}{ml^2}\left(-\frac{1}{\sin^3\Theta_0} - 3\frac{\cos^2\Theta_0}{\sin^4\Theta_0}\right)\delta\Theta + mgl\cos\Theta_0\,\delta\Theta$$

p_φ^2 из (1)

$$ml^2\delta\ddot{\Theta} = -\frac{g}{l}\frac{ml^2\sin^4\Theta_0}{\cos\Theta_0}\left(-\frac{1}{\sin^3\Theta_0} - \frac{3\cos^2\Theta_0}{\sin^4\Theta_0}\right)\delta\Theta + mgl\cos\Theta_0\,\delta\Theta$$

$$\delta\ddot{\Theta} = +\frac{g}{l}\frac{\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0}\delta\Theta + \frac{g}{l}3\cos\Theta_0\,\delta\Theta + \frac{g}{l}\cos\Theta_0\,\delta\Theta$$

$$\delta\ddot{\Theta} = \frac{g}{l}\left(\frac{\sin^2\Theta_0}{\cos\Theta_0} + 3\cos\Theta_0 + \cos\Theta_0\right)\delta\Theta$$

$$\delta\ddot{\Theta} = \frac{g}{l\cos\Theta_0}\left(\sin^2\Theta_0 + \cos^2\Theta_0 + 3\cos^2\Theta_0\right)\delta\Theta$$

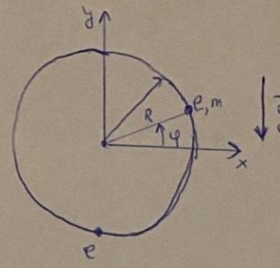
$$\delta\ddot{\Theta} - \frac{g}{l\cos\Theta_0}\left(1 + 3\cos^2\Theta_0\right)\delta\Theta = 0$$

$$w^2 = \sqrt{-\frac{g}{l\cos\Theta_0}(1+3\cos^2\Theta_0)}$$

$\frac{\pi}{2} < \Theta_0 < \pi$ усл. того, что
под корнем положительное
число т.е. что в принципе возможно
такое полож. равн. и колеб.

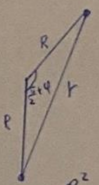
Чубаров 10181

2.2. Частица массой m и зарядом e может двигаться в поле силы тяжести по вертикальному обручу радиуса R, в нижней точке обруча закреплена частица, также имеющая заряд e. Найти устойчивые положения равновесия и частоты малых колебаний относительно этих положений равновесия.



1) $S = 1$ φ - обобщённая координата

$$U_e = e \cdot \frac{e}{r}$$



т.к.

$$r^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$$

$$r^2 = 2R^2(1+\sin\varphi)$$

$$U_e = \frac{e^2}{\sqrt{2}R\sqrt{1+\sin\varphi}}$$

$$U_g = mgy = mgR\sin\varphi$$

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi \\ y = R\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = -R\sin\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y} = R\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \end{cases}$$

2) $$L = \frac{m}{2}R^2\dot{\varphi}^2 - mgR\sin\varphi - \frac{e^2}{\sqrt{2}R\sqrt{1+\sin\varphi}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgR\cos\varphi - \frac{e^2}{\sqrt{2}R}\left(-\frac{1}{2}\right)(1+\sin\varphi)^{-\frac{3}{2}}\cos\varphi = -mgR\cos\varphi + \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}$$

$$mR^2\ddot{\varphi} + \left(mgR\cancel{\cos\varphi} - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}\right)\cos\varphi = 0$$

3) положения р-ия

$$\left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}\right)\cos\varphi = 0$$

$\cos\varphi = 0$; $1+\sin\varphi \neq 0$ ~~[illegible]~~

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$mgR = \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\frac{1}{(1+\sin\varphi)^{3/2}}$$

$$(1+\sin\varphi)^{3/2} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}R\,mgR}$$

$$1+\sin\varphi = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3}$$

$$\sin\varphi = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} - 1$$

т.к. $|\sin\varphi| \le 1$, то данное выр-ие имеет смысл если

$$0 \le \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} \le 2$$

$$\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2} \le 2\sqrt{2}$$

$$\frac{e^2}{mgR^2} \le 8 \qquad \frac{e^2}{R^2} \le 8mg$$

пусть $\sin\varphi_1 = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} - 1$

$$\varphi_1 = \arcsin\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} - 1\right)$$

$$\varphi_2 = \pi - \arcsin\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}\,mgR^2}\right)^{2/3} - 1\right)$$

Чубаров 10181

1) $\varphi = \frac{\pi}{2} + q$, $q \to 0$

$$mR^2\ddot{q} + \left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+q\right) = 0 \quad \Big|:mR^2$$

$$\ddot{q} + \left(\frac{g}{R} - \frac{e^2}{8mR^3}\right)(-\sin q) = 0$$

$$\ddot{q} + \underbrace{\left(\frac{e^2}{8mR^3} - \frac{g}{R}\right)}_{\omega^2} q = 0$$

1) $\omega^2 > 0$ - равновесие устойчивое ; $\omega = \sqrt{\frac{e^2}{8mR^3} - \frac{g}{R}}$

$$\frac{e^2}{8mR^3} > \frac{g}{R} \Rightarrow \frac{e^2}{R^2} > 8mg$$

2) $\omega^2 < 0$ - равновесие не устойчивое

$$\frac{e^2}{R^2} < 8mg$$

2) $\varphi = \varphi_1 + q$

$$mR^2\ddot{q} + \left(mgR - \frac{e^2}{2\sqrt{2}R}\,\frac{1}{(1+\sin(\varphi_1+q))^{3/2}}\right)\cos(\varphi_1+q) = 0$$

$$\ddot{q} + \left(\frac{g}{R} - \frac{e^2}{2\sqrt{2}mR^3}\,\frac{1}{(1+\sin(\varphi_1+q))^{3/2}}\right)\cos(\varphi_1+q) = 0$$

$$\sin(\varphi_1+q) = \sin\varphi_1 + \cos\varphi_1\, q$$

$$(1+\sin\varphi_1+\cos\varphi_1\, q)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1 + \frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}q\right)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}q\right)$$

пусть $(1+\sin\varphi_1)^{-3/2} = \xi$

$$\ddot{q} + \left(\cancel{\frac{g}{R} - \frac{e^2}{2\sqrt{2}mR^3}(1+\sin\varphi_1)^{-3/2}} + \frac{e^2}{2\sqrt{2}mR^3}\cdot\frac{3}{2}\xi\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}q\right)\cos\varphi_1 = 0$$

т.к. φ_1 - пол-е р-ия

$$\ddot{q} + \overbrace{\frac{3e^2}{4\sqrt{2}mR^3}\xi\frac{\cos^2\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}}^{\omega^2} q = 0$$

оно всегда устойчивое если $\exists$ и если $\omega^2 \neq 0$, т.е. $\frac{e^2}{R^2} < 8mg$

т.е. $\omega = \sqrt{\frac{3e^2}{4\sqrt{2}mR^3}\xi\frac{\cos^2\varphi_1}{1+\sin\varphi_1}}$

выражать через величины
из условия

3) $\varphi = \varphi_2 + q$

т.к. $\varphi_2 = \pi - \varphi_1$, то есть точка симметричная относительно оси y, то ситуация будет такая же (в силу симметрии системы относительно оси y)

Действительно

Чубаров 10181

$$\ddot{q} + \left(\frac{g}{R} - \frac{e^2}{2\sqrt{2} m R^3} \frac{1}{\left(1 + \sin\left(\pi - (\varphi_1 - q)\right)\right)^{3/2}} \right) \cos(\pi - \varphi_1 + q) = 0$$

$$\sin(\pi - (\varphi_1 - q)) = \sin(\varphi_1 - q) = \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 q$$

$$(1 + \sin\varphi_1 - \cos\varphi_1 q)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1 - \frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1} q\right)^{-3/2} = (1+\sin\varphi_1)^{-3/2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1} q\right)$$

$$\ddot{q} + \left(- \frac{e^2}{2\sqrt{2} m R^3} \cdot \frac{3}{2} \xi \frac{\cos\varphi_1}{1+\sin\varphi_1} q \right)(-\cos\varphi_1) = 0$$

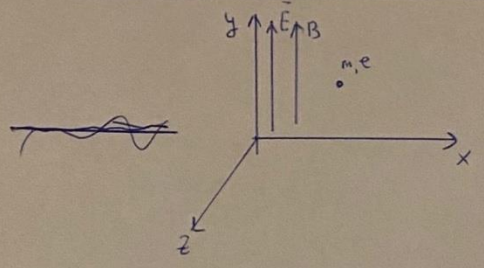
$$\ddot{q} + \frac{3e^2}{4\sqrt{2} m R^3} \xi \frac{\cos^2\varphi_1}{1+\sin\varphi_1} q = 0$$

т.е. ур-ие получилось таким же $\Rightarrow$ условия те же, что и во 1-м случае. (4)

Замечание: если смотреть на условие устойчивости положения р-ия, то видно, что если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – устойчиво, то других положений р-ия нет, если $\varphi = \frac{\pi}{2}$ – не устойчиво, то возникают 2 других уст-вых положения р-ия симм-ых отн-но оси y $(\varphi_1; \pi - \varphi_1)$

Чубаров 10181

2.1. Частица с массой m и зарядом e движется в потенциале $U=½m\omega^2x^2$ и однородных стационарных магнитном поле **B** и электрическом поле **E**, направленных вдоль оси y. Найти функцию Лагранжа, уравнения движения частицы (уравнения Лагранжа) и законы сохранения. Решить уравнения движения.



1) $S=3$, x, y, z - обобщённые координаты

$$U_e = (e\cdot\varphi) - \frac{e}{c}(\bar{A}, \bar{v}),$$ где

$$-\nabla\varphi = \bar{E}; \quad rot\,\bar{A} = \bar{B}$$

$$v = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\bar{B} = (0, B_0, 0)$$

$$rot\,\bar{A} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= e_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - e_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) +$$

$$+ e_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = B_0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad \bar{A} = (0, 0, -B_0 x)$$

$$\nabla\varphi = (0, -E_0, 0)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -E_0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\varphi = -E_0 y$$

$$U_e = -eE_0 y - \frac{e}{c}(-B_0 x\dot{z}) =$$

$$= -eE_0 y + \frac{e}{c}B_0 x\dot{z}$$

2) $$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m\omega^2x^2}{2} + eE_0 y - \frac{e}{c}B_0 x\dot{z}.$$

z - циклическая

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = const$$

$$m\dot{z} - \frac{e}{c}B_0 x = const = mC_1$$

t - циклическая

$$H = const$$

$$H = L_2 - L_0 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{m\omega^2x^2}{2} - eE_0 y$$

3) $$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -m\omega^2 x - \frac{e}{c}B_0\dot{z}$$

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x + \frac{e}{c}B_0\dot{z} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = eE_0$$

$$m\ddot{y} = eE_0$$

$$m\ddot{z} - \frac{e}{c}B_0\dot{x} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + m\omega^2 x + \frac{e}{c}B_0\dot{z} = 0 \;|: m \\ m\ddot{y} = eE_0 \\ m\ddot{z} = -\frac{e}{c}B_0\dot{x} = 0 \end{cases}$$

4) $$m\dot{z} - \frac{e}{c}B_0 x = mC_1 \;|: m$$

$$\dot{z} - \omega_B x = C_1 \qquad \text{где}, \; \omega_B = \frac{eB_0}{mc}$$

$$\dot{z} = C_1 + \omega_B x$$

тогда $$\ddot{x} + \omega^2 x + \omega_B(C_1 + \omega_B x) = 0$$

$$\ddot{x} + (\omega^2 + \omega_B^2)x = -\omega_B C_1$$

$$\Omega^2 = \omega^2 + \omega_B^2 \qquad x(t) = C_2\cos\left(\sqrt{\omega^2+\omega_B^2}\,t\right) + C_3\sin\left(\sqrt{\omega^2+\omega_B^2}\,t\right) - \frac{\omega_B C_1}{\omega^2+\omega_B^2}$$

$$\dot{z} = C_1 + \omega_B\left(C_2\cos\Omega t + C_3\sin\Omega t - \frac{\omega_B C_1}{\Omega^2}\right)$$

$$z = C_1 t + \frac{\omega_B}{\Omega}\left(C_2\sin\Omega t - C_3\cos\Omega t - \frac{\omega_B}{\Omega}C_1 t\right) + C_4$$

[illegible] 10181

$$\ddot{y} = \frac{eE_0}{m}$$

$$\dot{y} = \frac{eE_0}{m} t + C_5$$

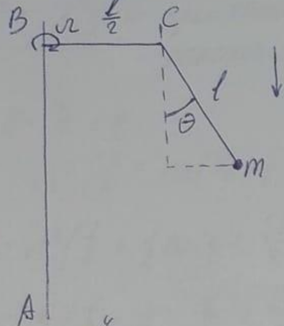
$$y(t) = \frac{eE_0}{m}\frac{t^2}{2} + C_5 t + C_6$$

$$\begin{cases} x(t) = C_2 \cos \Omega t + C_3 \sin \Omega t - \dfrac{\omega_B}{\Omega^2} C_1 \\ y(t) = \dfrac{eE_0}{m}\dfrac{t^2}{2} + C_5 t + C_6 \\ z(t) = C_1 t + \dfrac{\omega_B}{\Omega}\left(C_2 \sin \Omega t - C_3 \cos \Omega t - \dfrac{\omega_B}{\Omega} C_1 t \right) + C_4 \end{cases}$$

5

Самойлов Роман

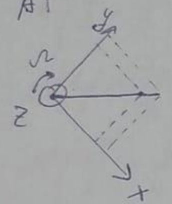
1.3.2 Прямой угол ABC вращается вокруг вертикальной оси AB с угловой скоростью Ω, в точке C к углу на идеальном шарнире, допускающем движение только в плоскости ABC, прикреплен невесомый и нерастяжимый стержень длиной $l = 2BC$, на конце которого закреплен груз массы m. Найти функцию Лагранжа системы. Найти соотношение между величинами Ω, l и g, при котором угол отклонения стержня от вертикали $\theta = \pi/6$ является устойчивым положением равновесия, найти частоту малых колебаний относительно этого положения равновесия.



$$\begin{cases} x = \left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)\cos\Omega t \\ y = \left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)\sin\Omega t \\ z = (l\cos\theta(-1) + l) = l(1-\cos\theta) \end{cases}$$

$$U_g = mgl(1-\cos\theta)$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$



$$\begin{cases} \dot{x} = -\Omega\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)\sin\Omega t + l\cos\Omega t\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{y} = \Omega\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)\cos\Omega t + l\sin\Omega t\cos\theta\,\dot{\theta} \\ \dot{z} = \sin\theta\,\dot{\theta}\, l \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)^2\sin^2\Omega t + l^2\cos^2\Omega t\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)^2\cos^2\Omega t + \right.$$

$$\left. + l^2\sin^2\Omega t\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\dot{\theta}^2 l^2\right)$$

$$T = \frac{m}{2}\left(\Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)^2 + l^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$L = \frac{m}{2}\Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)^2 + \frac{m}{2}l^2\dot{\theta}^2 - mgl(1-\cos\theta)$$

$$P_\theta = ml^2\dot{\theta}$$

$$\dot{P}_\theta = ml^2\ddot{\theta} = m\Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)l\cos\theta - mgl\sin\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} - m\Omega^2\left(\frac{l}{2} + l\sin\theta\right)l\cos\theta + mgl\sin\theta = 0$$

$\measuredangle$ c.p. $\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$

$$\parallel \ddot{\theta} - \Omega^2\left(\frac{1}{2} + \sin\theta\right)\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

$$-\Omega^2\frac{1}{2}\cos\theta - \Omega^2\sin\theta\cos\theta + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$$

1.3.2 Самойлов Роман

$\theta = \pi/6$

$-\Omega^2 \frac{\sqrt{3}}{4} - \Omega^2 \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{g}{l} \cdot \frac{1}{2} = 0$

$\frac{g}{l} = \Omega^2 \sqrt{3}$

$\Omega^2 = \frac{g}{l\sqrt{3}}$ ← при таком соотношении $\theta = \pi/6$ является положением равновеся (проверим, что устойчивым)

Δ $\theta = \pi/6 + q$

$\ddot{q} - \Omega^2 \left(\frac{1}{2} + \sin(\pi/6 + q)\right)\cos(\pi/6 + q) + \frac{g}{l}\sin(\pi/6 + q) = 0$

$\ddot{q} - \Omega^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos q + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin q\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos q - \frac{1}{2}\sin q\right) + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{2}\cos q + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin q\right) = 0$

$\ddot{q} - \Omega^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{q^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}q\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}q^2 - \frac{1}{2}q\right) + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{2} - \frac{q^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}q\right) = 0$

$\ddot{q} - \Omega^2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}q\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}q\right) + \frac{g}{l}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}q\right) = 0$

$\ddot{q} - \Omega^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{4}q - \frac{1}{2}q\right) + \frac{g}{2l} + \frac{\sqrt{3}g}{2l}q = 0$

$\ddot{q} - \underline{\underline{\Omega^2 \frac{\sqrt{3}}{2}}} - \Omega^2 \frac{1}{4}q + \underline{\underline{\frac{g}{2l}}} + \frac{\sqrt{3}g}{2l}q = 0$

сократятся, т.к такое полож. равновесия, где $\Omega^2 = \frac{g}{l\sqrt{3}}$

$\ddot{q} + q\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{l} - \Omega^2 \frac{1}{4}\right) = 0$

$\ddot{q} + q\left(\frac{3}{2}\Omega^2 - \Omega^2 \frac{1}{4}\right) = 0$

$\ddot{q} + q\frac{5}{4}\Omega^2 = 0$

это устойчивое полож. равновесия, с частотой $\omega^2 = \frac{5}{4}\Omega^2$

5

$\omega = \Omega \frac{\sqrt{5}}{2}$

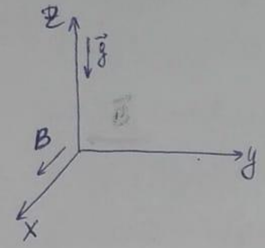
Ответ: $\theta = \pi/6$ устойчивое полож. равновесия при $\Omega^2 = \frac{g}{l\sqrt{3}}$

с частотой малых колебаний относительно него

$\omega^2 = \frac{5}{4}\Omega^2$

Самойлов Роман

1.1.1 В поле силы тяжести и однородном стационарном магнитном поле движется частица с зарядом e и массой m. Вектор индукции магнитного поля $\mathbf{B}$ направлен по оси x, а сила тяжести $m\mathbf{g}$ перпендикулярна ему и направлена против оси z. Найти функцию Лагранжа, уравнения движения частицы (уравнения Лагранжа) и законы сохранения. Решите уравнения движения.



$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U_g = mgz$$

$$U_e = -\frac{e}{c}(\vec{A}, \vec{v})$$

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

$$\begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{e}_x \underbrace{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)}_{B_0} + \vec{e}_y \underbrace{\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)}_{0} + \vec{e}_z \underbrace{\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)}_{0}$$

$\cancel{\vec{A} = (B_0 z, 0, 0)}$ $\vec{A} = (0, -B_0 z, 0)$

$$(\vec{A}, \vec{v}) = -B_0 z \dot{y}$$

$$U_e = \frac{e}{c} B_0 z \dot{y}$$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz - \frac{e}{c} B_0 z \dot{y}$$ ← Лагранжиан системы

1) $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, зн $H = const$ $\quad \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgz = const$ з.с. обобщ. энергии

2) $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, зн $P_x = const$ $\quad m\dot{x} = const$ з.с импульса по x

3) $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, зн. $P_y = const$ $\quad m\dot{y} - \frac{eB_0}{c} z = const$ з.с импульса по y

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = P_z = m\dot{z}$$

$$\dot{P}_z = m\ddot{z} = -mg - \frac{eB_0}{c}\dot{y} \Rightarrow m\ddot{z} + mg + \frac{eB_0}{c}\dot{y} = 0$$

Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{z} + mg + \frac{eB_0}{c}\dot{y} = 0 \\ m\ddot{y} - \frac{eB_0}{c}\dot{z} = 0 \\ m\ddot{x} = 0 \end{cases}$$

Решим ур-я движения

1) $m\ddot{x} = 0 \quad m\dot{x} = C_1 \quad mx = C_1 t + C_2 \quad x = \tilde{C}_1 t + \tilde{C}_2 \quad x = v_{0x} t + x_0$

Самойлов Роман (1.1.1)

2) $\begin{cases} m\dot{y} - \frac{eB_0}{c} z = const \\ m\ddot{z} + mg + \frac{eB_0}{c}\dot{y} = 0 \end{cases}$ $\omega = \frac{eB_0}{mc}$

$\begin{cases} \dot{y} - \omega z = v_{0y} \\ \ddot{z} + g + \omega\dot{y} = 0 \end{cases}$

$\dot{y} = v_{0y} + \omega z$

$\ddot{z} + g + v_{0y}\omega + \omega^2 z = 0$

$\ddot{z} + \omega^2 z = -(g + v_{0y}\cdot\omega)$

$z_{oo} = z_A \cos(\omega t + \varphi_0)$

$z_{чн} = A \quad \omega^2 A = -g - v_{0y}\cdot\omega \quad A = -\frac{g}{\omega^2} - \frac{v_{0y}}{\omega}$

$z_{он} = z_{oo} + z_{чн} = z_A \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{g}{\omega^2} - \frac{v_{0y}}{\omega}$

$\dot{y} = v_{0y} + \left(z_A \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{g}{\omega^2} - v_{0y}/\omega\right)\omega$

$\dot{y} = z_A \omega \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{g}{\omega}$

$y = z_A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{gt}{\omega} + y_0$

$\begin{cases} x = v_{0x} t + x_0 \\ y = z_A \sin(\omega t + \varphi_0) - \frac{gt}{\omega} + y_0 \\ z = z_A \cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{g}{\omega^2} - \frac{v_y}{\omega} \end{cases}$

проинтегрированные уравнения движения

где v_{0x}, x_0, z_A φ_0, v_{0y} y_0 — константы

$\omega = \frac{eB_0}{mc}$

Или же

$\begin{cases} x = C_1 t + C_2 \\ y = C_3 \sin(\omega t + C_4) - \frac{gt}{\omega} C_5 \\ z = C_3 \cos(\omega t + C_4) - \frac{g}{\omega^2} - \frac{C_6}{\omega} \end{cases}$

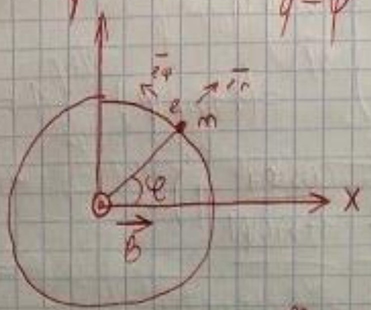
5

Сорвачева №1 3 1 кр 1

1.2.1 Частица с массой m и зарядом e движется по обручу, находящемуся в горизонтальной плоскости, ортогональной стационарному однородному магнитному полю **B**. Радиус обруча меняется по закону $R(t)$. Найти функцию Лагранжа, уравнения движения частицы (уравнения Лагранжа) и законы сохранения. Радиус обруча изменился от начального момента с R_1 до R_2, как изменилась скорость движения частицы по обручу, если в начальный момент она была равна v_1?

Задача 2

$q = \varphi$



$x = R\cos\varphi$

$y = R\sin\varphi$

$z = 0$

$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2)$

$U = -\frac{e}{c}\bar{A}\cdot\bar{v}$

$\operatorname{rot}\bar{A} = \bar{B}$

$\bar{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) = \frac{1}{2}BR\,\bar{e}_\varphi$

$\bar{v} = \dot{R}\bar{e}_r + R\dot{\varphi}\,\bar{e}_\varphi$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2) + \frac{e}{2c}BR^2\dot{\varphi}$$

$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2$; $\frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$

2.1

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}\right) = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2\right) = 0$

$\rightarrow \underline{mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2 = const}$ обобщ. импульс

$$2mR\dot R\dot\varphi + mR^2\ddot\varphi + \frac{e}{c}BR\dot R = 0$$

$$\dot R\dot\varphi + \frac{R\ddot\varphi}{2} + \frac{eB}{2mc}\dot R = 0$$

вдоль обруча!

В нач момент скорость v_1 $(t=0)$

затем v_2 $(t = t')$

$$\left[\begin{array}{l} v = \sqrt{\dot R^2 + (R\dot\varphi)^2} \\ mR^2\dot\varphi + \frac{e}{2c}BR^2 = const = p \end{array}\right.$$

$R(0)=R_1 \quad R(t')=R_2$

$p_\varphi(0) = p_\varphi(t')$

$R\dot\varphi = \pm\sqrt{v^2 - \dot R^2}$

$$\begin{cases} p_\varphi(0) = \pm mR_1\sqrt{v_1^2 - \dot R(0)^2} + \frac{e}{2c}BR(0)^2 \\ p_\varphi(t') = \pm mR_2\sqrt{v_2^2 - \dot R(t')^2} + \frac{e}{2c}BR(t')^2 \\ mR_1\sqrt{v_1^2 - \dot R(0)^2} + \frac{e}{2c}BR(0)^2 = mR_2\sqrt{v_2^2 - \dot R(t')^2} + \frac{e}{2c}BR(t')^2 \end{cases}$$

$\omega = \frac{eB}{mc}$

$$\pm mR_1v_1 + \frac{e}{2c}BR_1^2 \pm mR_2v_2 + \frac{e}{2c}BR_2^2$$

$$\cancel{v_2 = \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}v_1 + \frac{\omega}{2R_2}(R_1^2 - R_2^2)\right)^2}}$$

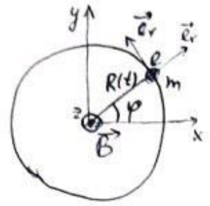
$\pm$

$$v_2 = \left|\pm\frac{R_1}{R_2}v_1 + \frac{\omega}{2R_2}(R_1^2 - R_2^2)\right|$$

2.2

Сальников И.

1.1. Частица с массой m и зарядом e движется по обручу, находящемуся в горизонтальной плоскости, ортогональной стационарному магнитному полю $\mathbf{B}$. Радиус обруча меняется по закону $R(t)$. Найти функцию Лагранжа, уравнения движения частицы (уравнения Лагранжа) и законы сохранения. Радиус обруча изменился от начального момента с R_1 до R_2, как изменилась скорость движения частицы по обручу, если в начальный момент она была равна v_1?



$q = \varphi$

$$\begin{cases} x = R(t)\cos\varphi \\ y = R(t)\sin\varphi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2)$$

$$U = -\frac{e}{c}\vec{A}\cdot\vec{v}, \quad \operatorname{rot}\vec{A} = \vec{B}$$

$$\vec{A} = \frac{B}{2}(-y, x, 0) = \frac{1}{2}BR\vec{e}_\varphi \quad ; \quad \vec{v} = \dot{R}\,\vec{e}_r + R\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + (R\dot{\varphi})^2) + \frac{e}{2c}BR^2\dot{\varphi}}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2 \quad ; \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi} = 0$$

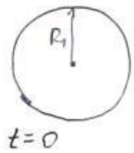
$$\frac{d}{dt}\left(mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2 = const}$$ – закон сохранения обобщённого импульса.

$$2mR\dot{R}\dot{\varphi} + mR^2\ddot{\varphi} + \frac{e}{c}BR\dot{R} = 0$$

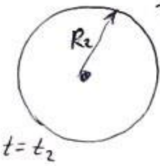
$$\boxed{\dot{R}\dot{\varphi} + \frac{R\ddot{\varphi}}{2} + \frac{eB}{2mc}\dot{R} = 0}$$ ур-е движения

±

$v = v_1$



$t = 0$



$t = t_2$

$v = v_2$

$$v = \sqrt{(\dot{R})^2 + (R\dot{\varphi})^2}$$

$$p_\varphi = mR^2\dot{\varphi} + \frac{e}{2c}BR^2 = const$$

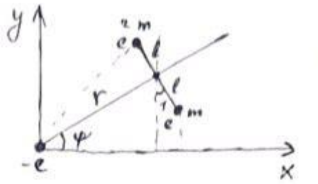
$$p_\varphi(0) = p_\varphi(t_2) \quad ; \quad R\dot{\varphi} = \sqrt{v^2 - \dot{R}^2}$$

$$p_\varphi(0) = mR_1\cdot\sqrt{v_1^2 - (\dot{R}(0))^2} + \frac{e}{2c}BR_1^2 \quad , \quad p_\varphi(t_2) = mR_2\sqrt{v_2^2 - (\dot{R}(t_2))^2} + \frac{e}{2c}BR_2^2$$

$$p_\varphi(0) = p_\varphi(t_2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_2 = \sqrt{\left(\frac{R_1}{R_2}\sqrt{v_1^2 - (\dot{R}(0))^2} + \frac{\omega_B}{2R_2}(R_1^2 - R_2^2)\right)^2 + (\dot{R}(t_2))^2}} \quad \omega_B = \frac{eB}{mc}$$

Сальников Н.

1.2. Длинный невесомый стержень вращается с постоянной угловой скоростью Ω в горизонтальной плоскости вокруг оси z. На стержне в точке пересечения с осью вращения укреплен заряд $-e$. По стержню может скользить без трения ортогональная этому стержню гантель так, что центр гантели всегда находится на стержне, а сама гантель – в плоскости вращения. Гантель представляет собой две одинаковых частицы заряда e и массы m, соединенные невесомым грифом длины $2l$. Найти положения равновесия системы, условия их устойчивости и частоты малых колебаний относительно устойчивых положений равновесия.



$q = r$

$\varphi = \Omega t$

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\Omega t + l\sin\Omega t \\ y_1 = r\sin\Omega t - l\cos\Omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = r\cos\Omega t - l\sin\Omega t \\ y_2 = r\sin\Omega t + l\cos\Omega t \end{cases}$$

$z_1 = z_2 = 0$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{r}\cos\Omega t + \Omega r(-\sin\Omega t) + \Omega l\cos\Omega t \\ \dot{y}_1 = \dot{r}\sin\Omega t + \Omega r\cos\Omega t + \Omega l\sin\Omega t \end{cases}$$

$$T_1 = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) = \frac{m}{2}\Big(\big((\dot{r}+\Omega l)\cos\Omega t - \Omega r\sin\Omega t\big)^2 + \big((\dot{r}+\Omega l)\sin\Omega t + \Omega r\cos\Omega t\big)^2\Big) =$$

$$= \frac{m}{2}\left((\dot{r}+\Omega l)^2 + (\Omega r)^2\right)$$

$T_2 = T_1$

$\varphi = -\dfrac{e}{\sqrt{r^2+l^2}}$; $\boxed{L = T - U = m\left((\dot{r}+\Omega l)^2 + (\Omega r)^2\right) + \dfrac{2e^2}{\sqrt{r^2+l^2}}}$

$U = 2e\varphi = -\dfrac{2e^2}{\sqrt{r^2+l^2}}$

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = 2m(\dot{r}+\Omega l)$; $\dfrac{\partial L}{\partial r} = 2m\Omega^2 r - \dfrac{e^2\cdot 2r}{(r^2+l^2)^{3/2}}$

$\boxed{2m\ddot{r} = 2m\Omega^2 r - \dfrac{2e^2 r}{(r^2+l^2)^{3/2}}}$ (*) ; в положении равновесия $\ddot{r} = 0$

$$m\Omega^2 r - \frac{re^2}{(r^2+l^2)^{3/2}} = 0 \iff \left[\begin{array}{l} r = 0 \\ r^2+l^2 = \left(\frac{e^2}{m\Omega^2}\right)^{2/3} \end{array}\right. \Rightarrow r^2 = \left(\frac{e^2}{m\Omega^2}\right)^{2/3} - l^2 > 0$$ – усл. существования полож. равновесия

1) $r = 0$; $r = \delta r$ – малое отклонение $\ddot{r} = \delta\ddot{r}$

Раскладываем (*) в окрестности точки $r = 0$ до первого порядка

$\delta\ddot{r} + \left(\dfrac{e^2}{m l^3} - \Omega^2\right)\delta r = 0 \Rightarrow$ положение равновесия устойчиво при

$\dfrac{e^2}{ml^3} - \Omega^2 > 0$, частота малых колебаний $\boxed{\omega = \sqrt{\dfrac{e^2}{ml^3} - \Omega^2}}$

Сальников Н.

2) $r_0 = \sqrt{\left(\frac{e^2}{m\Omega^2}\right)^{2/3} - \ell^2}$ $\left(\left(\frac{e^2}{m\Omega^2}\right)^{2/3} - \ell^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{e^2}{m\Omega^2} > \ell^3 \Leftrightarrow \frac{e^2}{m\ell^3} - \Omega^2 < 0 \right)$

при таком соотношении параметров это будет положением равновесия

$r = r_0 + \delta r$

Раскладываем уравнение движения до 1-го порядка:

$$\delta \ddot{r} = \Omega^2 (r_0 + \delta r) - \frac{e^2}{m}\left((r_0 + \delta r)\left(\frac{1}{(r_0^2+\ell^2)^{3/2}} + \left(-\frac{3}{2}\frac{1}{(r_0^2+\ell^2)^{5/2}} \cdot 2r_0\right)\delta r\right)\right)$$

$$\delta \ddot{r} = \underbrace{\left(\Omega^2 r_0 - \frac{e^2 r_0}{m(r_0^2+\ell^2)^{3/2}}\right)}_{=0} + \Omega^2 \delta r - \frac{e^2}{m}\left(\frac{1}{e^2/m\Omega^2} - \frac{3 r_0^2}{(e^2/m\Omega^2)^{5/3}}\right)\delta r$$

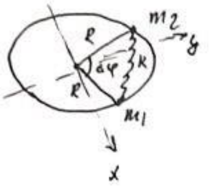
$$\delta \ddot{r} \underbrace{\left(-\frac{3e^2}{m} r_0^2 \left(\frac{m\Omega^2}{e^2}\right)^{5/3}\right)}_{<0} \delta r = 0$$

<0 $\Rightarrow$ если равновесие есть, то оно неустойчивое

(+)

Елсаин
Андрей

3.2. Два груза массами m_1 и m_2, связанные между собой пружиной жесткости κ, могут скользить без трения по неподвижному горизонтальному кольцу радиуса R. Длина пружины в недеформированном состоянии равна $R\sqrt{2}$. Найти частоты малых колебаний системы относительно положений устойчивого равновесия.



$S=2$, обобщ. координаты φ_1 и $\Delta\varphi$.

$$\begin{cases} x_1 = R\cos\varphi_1 \\ y_1 = R\sin\varphi_1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = R\cos(\varphi_1+\Delta\varphi) \\ y_2 = R\sin(\varphi_1+\Delta\varphi) \end{cases}$$

$$l_0 = \sqrt{2}R \qquad l^2 = 2R^2 - 2R^2\cos\Delta\varphi \qquad l - l_0 = \sqrt{2}R\left(-1+\sqrt{1-\cos\Delta\varphi}\right)$$

$$L = \frac{m_1}{2}R^2\dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot\varphi_1+\Delta\dot\varphi)^2R^2 - \frac{k}{2}2R^2\left(\sqrt{1-\cos\Delta\varphi}-1\right)^2.$$

т.к. $\Delta\varphi\in[0;2\pi]$ то $\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\geq 0.$

$$\left(\sqrt{1-\cos\Delta\varphi}-1\right)^2 = \left(2-\cos\Delta\varphi - 2\sqrt{1-\cos\Delta\varphi}\right) = \left(2-\cos\Delta\varphi - 2\sqrt{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$\cos\Delta\varphi = 1-2\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}$, const в L.

$$L' = \frac{m_1}{2}R^2\dot\varphi_1^2 + \frac{m_2}{2}(\dot\varphi_1+\Delta\dot\varphi)^2R^2 + kR^2\left(\cos\Delta\varphi + 2\sqrt{2}\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$\cancel{\frac{\partial L}{\partial \varphi_1}} \quad \frac{\partial L}{\partial\varphi_1}=0 \to \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi_1}=const \Rightarrow m_1R^2\dot\varphi_1 + m_2R^2\dot\varphi_1 + m_2R^2\Delta\dot\varphi = const.$$

$$\ddot\varphi_1 = \left(\frac{-m_2}{m_1+m_2}\right)\Delta\ddot\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\Delta\dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial\Delta\varphi} = 0 \Rightarrow m_2R^2\Delta\ddot\varphi + m_2R^2\ddot\varphi_1 - kR^2\left(-\sin\Delta\varphi + \sqrt{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0$$

подставим $\ddot\varphi_1$:

$$m_2R^2\Delta\ddot\varphi\left(1-\frac{m_2}{m_1+m_2}\right) + kR^2\left(\sin\Delta\varphi - \sqrt{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = 0.$$

положение равновесия соответствует $\ddot\varphi = 0$:

$$\sin\Delta\varphi - \sqrt{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 0.$$

$$2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} - \sqrt{2}\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 0.$$

$\cos\frac{\Delta\varphi}{2} = 0$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{2} + 2\pi k = \pi.$

~~$\Delta\varphi = 2\pi = 0.$~~

$\sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{4} + 2\pi k = \frac{\pi}{2}$

$\Delta\varphi = \frac{2\cdot 3\pi}{4} + 4\pi k = \frac{3\pi}{2}.$

(1)

Малое отклонение от $\Delta\varphi = \{\frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\}$.

$\Delta\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta\varphi$:

$$\left(\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\right)\ddot{\delta\varphi} + k\left(1 - \frac{(\delta\varphi)^2}{2} - \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\delta\varphi\right)\right) = 0$$

$\downarrow$

μ

$$\mu\ddot{\delta\varphi} + \frac{k}{2}(+\delta\varphi) = 0$$

$$\omega_{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{k}{2\mu}\right)^{1/2}$$

Ряд Тейлора:

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2} + \delta\varphi\right) = \cos\frac{\Delta\varphi}{2} - \frac{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{2}\delta\varphi$$

$$\sin(\Delta\varphi + \delta\varphi) = \sin\Delta\varphi + \cos\Delta\varphi\,\delta\varphi.$$

+

$\Delta\varphi = \pi + \delta\varphi$:

$$\mu\ddot{\delta\varphi} + k\left(-\delta\varphi - \sqrt{2}\left(-\frac{\delta\varphi}{2}\right)\right) = 0$$

$$\mu\ddot{\delta\varphi} + k\left(-\delta\varphi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = 0$$

$\uparrow$

не устойчивое

$\Delta\varphi = \frac{3\pi}{2} + \delta\varphi$:

$$\mu\ddot{\delta\varphi} + k\left(-1 - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \delta\varphi\frac{1}{\sqrt{2}\cdot 2}\right)\right) = 0$$

$$\mu\ddot{\delta\varphi} + k(\delta\varphi/2) = 0.$$

$$\omega_{\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{\frac{k}{2\mu}}.$$

Ответ: $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\Delta\varphi = \pi\cdot\frac{3}{2}$ ← устойчивые.

$$\omega_{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{k}{2\mu}\right)^{1/2} \quad \omega_{\frac{3\pi}{2}} = \left(\frac{k}{2\mu}\right)^{1/2}, \text{ где } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}.$$

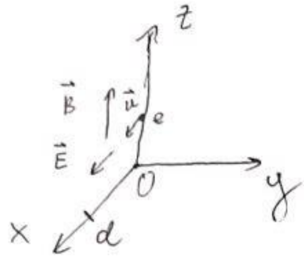
Елясин

Андрей

(2)

Репец М.А.

2.1. Магнитные и электрические поля равны $\mathbf{B} = (0,0,B_0)$ и $\mathbf{E} = (E_0,0,0)$ в области $0 \le x \le d$ и равны нолю вне этой области. На эту область со стороны отрицательных x налетает частица массой m, зарядом e и скоростью $\mathbf{v} = (v_0,0,0)$. Найти функцию Лагранжа, уравнения движения частицы (уравнения Лагранжа) и законы сохранения. Под каким углом к оси x частица вылетает из области $0 \le x \le d$.



1) $S = 3 \quad q = (x, y, z)$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

$$U = e\varphi - \frac{e}{c}\vec{A}\vec{v}, \text{ где}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi$$
$$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}$$

• $-\nabla\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{x}_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{y}_0 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{z}_0 = E_0\vec{x}_0$ $\qquad \varphi = -E_0 x$

$$\Rightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -E_0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$$

$$\exists\, \underline{\varphi} = \cancel{\{\ldots\}} = \underline{-E_0 x}$$

• $\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{x}_0 & \vec{y}_0 & \vec{z}_0 \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \ldots + \vec{z}_0\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = B_0\vec{z}_0$

$$\exists\, \vec{A} = (0, B_0 x, 0)$$

Тогда $\quad U = -eE_0 x - \frac{e}{c}B_0 x\dot{y}$

$$\underline{L = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + eE_0 x + \frac{e}{c}B_0 x\dot{y}} \leftarrow \text{лагранжиан}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = m\ddot{x} - eE_0 - \frac{e}{c}B_0\dot{y} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = m\ddot{y} + \frac{e}{c}B_0\dot{x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot z}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot z = 0$$

Решу М. А.

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} H = const \\ H = L_1 - L_0 = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - \frac{e}{c}B_0 x \dot y = const \end{array}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow y, z \text{ - циклические координаты}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot y} = m\dot y + \frac{e}{c}B_0 x = const \\ p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot z} = m\dot z = const \end{array}}$$

Законы сохранения

Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot x - eE_0 - \frac{e}{c}B_0\dot y = 0 \quad (1) \\ m\ddot y + \frac{e}{c}B_0\dot x = 0 \quad (2) \\ m\ddot z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

(Приведенные выкладки верны только при $0 \le x \le d$)

Решим полученные уравнения

$$\omega_B = \frac{eB_0}{mc}$$

$$(2) \Rightarrow m\ddot y + \frac{e}{c}B_0\dot x = 0 \Rightarrow \dot y + \frac{eB_0}{mc}x = C_1$$

$$\dot y + \omega_B x = C_1$$

$$(1) \Rightarrow m\ddot x - eE_0 - \frac{e}{c}B_0\dot y = 0 \;\Big|\; \frac{1}{m}$$

$$\ddot x - \frac{eE_0}{m} - \omega_B(C_1 - \omega_B x) = 0$$

$$\ddot x + \omega_B^2 x - \frac{eE_0}{m} - \omega_B C_1 = 0$$

$$x = C_2\cos(\omega_B t) + C_3\sin(\omega_B t) + \frac{eE_0}{m\omega_B^2} + \frac{C_1}{\omega_B}$$

$$\dot y = C_1 - \omega_B x = -\frac{eE_0}{m\omega_B} - C_2\omega_B\cos(\omega_B t) - C_3\omega_B\sin(\omega_B t)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{eE_0}{m\omega_B}t + C_2\sin(\omega_B t) + C_3\cos(\omega_B t) + C_4$$

Ремез М. А.

2) В положении равновесия $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$, $\varphi = \varphi_0 = const$

$$\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}} - mgR \right) \cos\varphi = 0$$

$\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi \neq -1$

$\Rightarrow \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}} = mgR$$

$$(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}} = \frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR^2}$$

$$\sin\varphi = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

Положения равновесия

$$\left[\begin{array}{l} \varphi_0 = \arcsin\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right) \\ \varphi_0 = \pi \pm \arcsin(-\|-) \end{array} \right.$$

при $\left| \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR^2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1 \right| \leq 1$

$\boxed{1.}$ $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ $\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta\varphi$

$$mR^2\ddot{\delta\varphi} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \delta\varphi\right)\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(1+\sin(\frac{\pi}{2}+\delta\varphi))^{\frac{3}{2}}} - mgR \right) =$$

$$= -\sin\delta\varphi \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(1+\cos\delta\varphi)^{\frac{3}{2}}} - mgR \right) =$$

$$= -\delta\varphi\left(\frac{e^2}{8R} - mgR \right)$$

$$mR^2\ddot{\delta\varphi} + \left(\frac{e^2}{8R} - mgR\right)\delta\varphi = 0 \quad \Big| \frac{1}{mR^2}$$

$$\ddot{\delta\varphi} + \underbrace{\left(\frac{e^2}{8mR^3} - \frac{g}{R} \right)}_{\omega^2} \delta\varphi = 0$$

±

при $\omega^2 > 0$ получаем гармонические малые колебания с частотой ω отн-но положения равновесия $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

2

φ_0 Решу И А

$\boxed{2}$ $\varphi = \arcsin\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) + \delta\varphi$

$$mR^2\delta\ddot{\varphi} = (\cos\varphi_0 - \delta\varphi\sin\varphi_0)\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R\left(1+\sin\varphi_0+\delta\varphi\cos\varphi_0\right)^{\frac{3}{2}}} - mgR\right)$$

$$mR^2\delta\ddot{\varphi} + \delta\varphi\left(\frac{e^2\sin\varphi_0}{2\sqrt{2}R(1+\sin\varphi_0+\delta\varphi\cos\varphi_0)^{\frac{3}{2}}} - mgR\sin\varphi_0\right) =$$

$$= \cos\varphi_0\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(-\shortparallel-)^{\frac{3}{2}}} - mgR\right) \quad \Big| \frac{1}{mR^2}$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \delta\varphi\left(\frac{e^2\sin\varphi_0}{2\sqrt{2}mR^3(-\shortparallel-)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{R}\sin\varphi_0\right) = \frac{\cos\varphi_0}{mR^2}\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}R(-\shortparallel-)^{\frac{3}{2}}} - mgR\right)$$

$$0 \le \left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) \le 1 \Rightarrow \sin\varphi_0 = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}} - 1$$

$$\cos\varphi_0 = \left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\delta\ddot{\varphi} + \delta\varphi\left(\frac{e^2\cdot\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)}{8m^2gR^4(-\shortparallel-)^{\frac{3}{2}}} - \frac{m}{R}\left(\left(\frac{e^2}{2\sqrt{2}mgR}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right)\right) = \ldots$$

...