Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Часть 1

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Федеральный исследовательский центр
Институт прикладной физики
Российской академии наук

Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

**Методическое пособие
для студентов физических специальностей
очной формы обучения**

Часть 1

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Нижний Новгород
ИПФ РАН
2017

УДК 533.601.1

Издано по решению редакционно-издательского совета
ФИЦ Институт прикладной физики РАН

Р е ц е н з е н т
доктор физико-математических наук В. П. Реутов

Механика сплошных сред. Ч. 1 : Течение идеального сжимаемого газа и жидкости / Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова, О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев; Федер. исслед. центр Ин-т прикладной физики Рос. академии наук. — Нижний Новгород : ИПФ РАН, 2018. — 100 с.

В основе методического пособия лежит курс лекций, читаемых авторами в течение многих лет на факультете «Высшая школа общей и прикладной физики» в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского и на кафедре прикладной математики в Нижегородском техническом университете им. Р.Е. Алексеева. Пособие поможет студентам, специализирующимся в различных областях физики и математики, понять общие законы механики сплошной среды, проявляющиеся в гидродинамике, газодинамике, теории упругости и других областях, и в умении применять их. Пособие состоит из двух частей. В первой части излагаются основные аксиоматические положения — законы сохранения массы, импульса, энергии в сжимаемых газах и жидкостях, а также первый и второй законы термодинамики для адиабатических течений. Вторая часть будет посвящена динамике несжимаемой среды, т. е. фактически жидкости.

Пособие рассчитано на студентов физических специальностей.

ВВЕДЕНИЕ

Механика сплошных сред изучает поведение всевозможных сред (твердые тела, жидкости, газы) в различных физических условиях. При этом в зависимости от целей исследования и от внешних условий для описания физических процессов, происходящих в одной и той же среде, используются разные физические модели. Эти модели изучаются в различных разделах механики сплошных сред, таких, например, как гидро- и газодинамика, теория упругости и т. д. В настоящем пособии основное внимание уделено изучению динамических процессов в жидкостях и газах. Дополнительная литература по механике сплошных сред приведена в конце книги.

Хотя молекулярный механизм, посредством которого жидкость оказывает сопротивление деформации, не такой, как у газов (между молекулами газа действуют чрезвычайно слабые силы притяжения, в то время как в жидкости молекула, наоборот, находится все время под воздействием интенсивного поля сил соседних молекул), уравнения, определяющие, например, скорость изменения деформации, имеют одинаковую форму в обоих случаях.

Прежде чем обсуждать основные уравнения динамики жидкости и газов, остановимся на так называемой гипотезе сплошной среды.

Введем понятие сплошной среды. Известно, что все тела состоят из отдельных движущихся дискретных частиц (атомов, молекул и т. д.). Однако в любом интересующем нас объеме их число достаточно велико, так что тело можно рассматривать как среду, заполняющую пространство непрерывно. При этом среда называется *сплошной*, если распределение вещества можно считать непрерывным в любом сколь угодно малом объеме V. Это понятие — *непрерывное распределение вещества* — является определенной идеализацией для среды, состоящей из дискретных частиц, и зависит от изучаемых физических процессов. Предположим, что в сплошной среде можно выделить два характерных масштаба: L — характерный масштаб исследуемых физических процессов, l — характерное расстояние между молекулами в сплошной среде. При этом среду можно считать сплошной, если характерные масштабы L рассматриваемых процессов велики по сравнению с характерным расстоянием между молекулами l.

На первый взгляд кажется, что введение гипотезы сплошности — это усложнение, поскольку мы переходим от рассмотрения системы, состоящей из конечного, пусть большого, числа N частиц, к рассмотрению непрерывного континуума. И это действительно было бы усложнением, если рассматривать динамику этого континуума вместо динамики N дискретных частиц. Но механика сплошных сред использует совершенно другие методы.

Гипотеза о сплошной среде позволяет описывать движение среды с помощью непрерывных функций пространственных координат и времени, которые удовлетворяют системе уравнений в частных производных. Такое описание возможно потому, что гипотеза о сплошной среде позволяет определить дифференциалы координат и времени. Это так называемый феноменологический подход, очень распространенный в механике сплошных сред.

Механика сплошных сред возникла более 200 лет назад как обобщение механики Ньютона для описания сред, непрерывно заполняющих пространство. Казалось бы, в механике сплошных сред не должно остаться нерешенных задач. Но, как будет видно в дальнейшем, уравнения механики сплошных сред — это нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Их решения можно найти только в очень ограниченном числе случаев. Причем сильная нелинейность проявляется уже при обычных условиях. В связи с этим много практически важных задач механики сплошных сред остаются нерешенными.

Итак, будем полагать, что сплошная среда — это непрерывная совокупность материальных точек. Что является материальной точкой сплошной среды? Очевидно, это не молекула. Как говорилось выше, гипотеза сплошной среды может быть введена только при рассмотрении таких движений, масштаб которых L велик по сравнению с масштабом l — расстоянием между частицами. Выберем малый объем сплошной среды, линейный размер которого λ удовлетворяет соотношению $l \ll \lambda \ll L$. Будем рассматривать характеристики среды, усредненные по малому объему $V \sim \lambda^3$. Используя гипотезу сплошной среды, полагающую, что вещество непрерывно заполняет пространство, можно формально стягивать этот объем в точку, но в нем все равно остается большое число молекул сплошной среды. Материальными точками сплошной среды в таком случае называются бесконечно малые объемы с линейным размером порядка λ (иногда эти объемы называют жидкими частицами). Поэтому исследование движения сплошной среды (жидкости, газа, твердых тел) будет означать исследование движения всех ее *материальных точек*.

Пособие состоит из двух частей. В первой части излагаются основные аксиоматические положения — законы сохранения массы, импульса, энергии в сжимаемых газах и жидкостях, а также первый и второй законы термодинамики для адиабатических течений. Вторая часть будет посвящена динамике несжимаемой среды, т. е. фактически жидкости.

Авторы выражают благодарность доктору физико-математических наук В. Е. Семенову за помощь в составлении задач к настоящему пособию.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

1.1. КИНЕМАТИКА СПЛОШНОЙ СРЕДЫ. ОПИСАНИЕ ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭЙЛЕРОВЫХ И ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность *материальных точек*. По определению, знать движение сплошной среды — это знать движение всех ее точек. Для этого нужно ввести правило индивидуализации отдельных (одинаковых с геометрической точки зрения) точек континуума.

1.1.1. Описание Лагранжа. Лагранжевы переменные

Будем следить за движением отдельных жидких частиц, изучая изменение различных величин, характеризующих состояние сплошной среды, например: температуры, скорости, плотности и т. д. Для того чтобы индивидуализировать жидкие частицы, будем ставить в соответствие каждой частице 3 числа (ξ_1, ξ_2, ξ_3) — координаты жидких частиц в начальный момент времени. Эти координаты называются лагранжевыми координатами. Тогда положение частицы в произвольный момент времени будет определяться радиусом-вектором $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, т. е. в декартовых координатах функциями $x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. При описании движения жидких частиц в переменных Лагранжа основной кинематической характеристикой является радиус-вектор всех материальных точек (жидких частиц) в любой момент времени t, т. е. $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Таким образом, при описании Лагранжа состояние сплошной среды будет определяться значениями физических величин (например, поля температуры T, поля скорости $\vec{v}$ и т. д.) как функциями переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, t. При этом скорость жидкой частицы определяется выражением

$$\vec{v}\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\vec{\xi}} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1.1}$$

а ускорение частицы — выражением

$$\vec{a} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\vec{\xi}} = \left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}\right|_{\vec{\xi}} \equiv \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \tag{1.2}$$

Производная по времени в лагранжевых координатах называется материальной или полной производной. В дальнейшем для ее обозначения мы будем использовать знак полной производной. При описании Лагранжа движение сплошной среды считается известным, если для каждой материальной точки заданы скорость, ускорение, температура и другие характеристики как функции времени.

1.1.2. Описание Эйлера. Эйлеровы переменные

Возможен и другой подход к описанию движения сплошной среды, когда изучается временная зависимость параметров сплошной среды для каждой фиксированной точки пространства в некоторой системе отсчета. Такой подход называется описанием Эйлера. При описании Эйлера характеристики движения сплошной среды и происходящие в ней процессы рассматриваются как функции координат (x_1, x_2, x_3) и времени t. В отличие от описания Лагранжа, наблюдатель не движется вместе с частицами сплошной среды, а находится в фиксированной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. В каждый момент времени t в точке с координатами (x_1, x_2, x_3) находится частица, скорость которой равна $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$. Поле скорости $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ является основной кинематической характеристикой сплошной среды при эйлеровом описании. Таким образом, в случае эйлерова описания мы наблюдаем физические величины в заданных точках пространства. При этом движение сплошной среды считается известным, если заданы скорость, ускорение, температура и другие характеристики как функции координат и времени.

1.1.3. Переход от эйлерова к лагранжеву описанию и наоборот

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера. Пусть нам известен закон движения сплошной среды, т. е. известен радиус-вектор $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ любой жидкой частицы в момент t. Предположим также, что известны термодинамические и гидродинамические характеристики физических величин в среде, которые обозначим как $A(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Требуется найти все физические величины как функции переменных Эйлера x_1, x_2, x_3 и времени t. Для этого из системы трансцендентных уравнений, определяющих компоненты радиуса-вектора $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$,

$$\begin{cases} x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \\ x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t), \end{cases} \tag{1.3}$$

можно выразить $\xi_1 = \xi_1(x_1, x_2, x_3, t)$, $\xi_2 = \xi_2(x_1, x_2, x_3, t)$, $\xi_3 = \xi_3(x_1, x_2, x_3, t)$. Тогда все физические величины — поля скорости, температуры, плотности и т. д. — можно представить функциями переменных Эйлера. Следовательно, переход от движения, описываемого в переменных Лагранжа, к описанию движения в переменных Эйлера, сводится к решению алгебраических уравнений для неявных функций (1.3).

Переход от переменных Эйлера к переменным Лагранжа. Предположим, что известно поле скорости $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ и все другие физические величины сплошной среды как функции x_1, x_2, x_3 и времени t. Перейдем к описанию движения в переменных Лагранжа, т. е. найдем радиус-вектор $\vec{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$ всех лагранжевых частиц. Мы знаем, что поле скорости $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ характеризует скорость частицы, которая в момент времени t находится в точке с координатами (x_1, x_2, x_3), т. е.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\left(\vec{r}, t\right) \tag{1.4}$$

с начальными условиями $\vec{r}\Big|_{t=0} = \vec{\xi}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

Решая эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить радиусы-векторы лагранжевых частиц $\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{\xi}\,)$, т. е. основную кинематическую характеристику сплошной среды при описании Лагранжа. При этом все физические характеристики сплошной среды будут функциями лагранжевых переменных, т. е. $(\vec{r}(t, \vec{\xi}), t)$. Отсюда ясно, почему производная по времени в лагранжевых переменных называется полной.

Действительно, с формальной точки зрения переход от эйлерова описания к лагранжеву — это замена переменных. Выразим лагранжеву производную по времени какой-нибудь физической величины, заданной в эйлеровых переменных. Пусть, например, скалярное поле

A (поле плотности, температуры и т. д.) выражено в эйлеровых переменных, т. е. $A(x_1, x_2, x_3, t)$. Тогда

$$\frac{dA}{dt} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\xi} = \left.\frac{\partial}{\partial t} A\left(x_1, x_2, x_3, t\right)\right|_{\xi}. \tag{1.5}$$

Но, как мы показали выше, можно перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа. При этом $x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, где $i = 1, 2, 3$. И тогда

$$\left.\frac{\partial}{\partial t} A\right|_{\xi} = \left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{x} + \left.\frac{\partial A}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi}. \tag{1.6}$$

Учитывая, что $\left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi} = v_i\left(\vec{x}_1, x_2, x_3, t\right)$ по определению скорость частицы, нетрудно видеть, что

$$\left.\frac{\partial A}{\partial t}\right|_{\xi} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right) A. \tag{1.7}$$

Если $A = v_i$ — компоненты скорости, то из формулы (1.7) сразу получаем выражение для лагранжева ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right)\vec{v}. \tag{1.8}$$

1.1.4. Траектории и линии тока

При изучении движения сплошной среды необходимо вводить скалярные и векторные величины, например, температуру T, скорость $\vec{v}$ и др. Совокупность значений той или иной величины, заданной в каждой точке рассматриваемой области, называется *скалярным (или векторным) полем* этой величины. Для любого векторного поля соответствующей физической величины можно построить семейство так называемых векторных линий. Выясним их смысл на примере векторных линий поля скорости, называемых линиями тока.

Линия тока — кривая, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору скорости. Уравнения для линий тока получаются из их определения:

$$\frac{dx_i}{v_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)} = dS,$$

или

$$\frac{dx_i}{dS} = v_i\left(\vec{x}, t\right). \tag{1.9}$$

При лагранжевом описании вводят *траектории жидких частиц*, т. е. геометрическое место их положений в каждый момент времени. Радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(\vec{\xi}, t)$ представляет собой параметрическое задание траекторий. Уравнение траектории можно найти, если известно поле скорости при эйлеровом описании. Для этого надо решить систему

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{\xi} = v_i(\vec{x}, t), \\ x_i\big|_{t=0} = \xi_i . \end{cases} \qquad (1.10)$$

При сравнении уравнений (1.9) и (1.10) становится ясно, что в общем случае линии тока и траектории отличаются. Действительно, в формуле (1.9) время t рассматривается как параметр, в уравнении же (1.10) время t следует считать переменной. Если $\vec{v}$ не зависит от t (*стационарное* поле скорости), то линии тока и траектории удовлетворяют одним и тем же уравнениям, т. е. линии тока и траектории частиц совпадают.

1.2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Вначале постулируем основные законы движения сплошной среды (жидкости, газа) в интегральной форме для индивидуального объема, состоящего из одних и тех же частиц.

1.2.1. Закон сохранения массы

Будем считать, что жидкость (газ) не может препятствовать произвольно малым силам деформировать ее таким образом, чтобы объем жидкости оставался неизменным. Это утверждение можно рассматривать как опытно установленный факт, верный при определенных приближениях. Назовем *индивидуальным* объем сплошной среды, состоящий из одних и тех же частиц. В процессе движения этот объем искажается, но масса его (в силу сделанного выше утверждения) должна сохраняться.

Подобно ньютоновской механике, фундаментальным законом механики сплошных сред является закон сохранения массы любого индивидуального объема, т. е. m = const. Этот закон можно записать и в другой форме, а именно:

$$\frac{dm}{dt} = 0. \qquad (1.11)$$

Для того чтобы сформулировать закон сохранения массы в интегральной форме, введем понятие плотности. Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды V, состоящий из малых индивидуальных объемов ΔV. Пусть их масса равна Δm. Используя гипотезу сплошной среды, можно перейти к пределу при $\Delta V \to 0$, т. е. стянуть этот объем в точку. Плотностью ρ называется предел отношения $\dfrac{\Delta m}{\Delta V}$:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \qquad (1.12)$$

Тогда масса конечного индивидуального объема может быть выражена через плотность следующим образом: $m = \int\limits_V \rho dV$. При этом закон сохранения массы для конечного индивидуального объема примет вид

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \rho dV = 0. \qquad (1.13)$$

Заметим, что если ввести сравнение жидкости и газа по простейшему макроскопическому параметру, а именно по плотности, то жидкость окажется значительно ближе к твердым телам, чем к газам: $\rho_{\text{тт}} = 7 \cdot 10^3$ для чугуна, $\rho_{\text{вод}} \approx 10^3$ для воды и $\rho_{\text{возд}} \approx 1$ для воздуха.

1.2.2. Закон сохранения импульса

Прежде чем формулировать закон сохранения импульса (аналог второго закона Ньютона), введем понятие импульса конечного индивидуального объема. Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды V, состоящий из малых индивидуальных объемов ΔV с массой Δm. Пусть этот объем ΔV движется со скоростью $\vec{v}$. Тогда его импульс можно определить как $\Delta \vec{Q} = \Delta m \vec{v}$, а плотность импульса — как предел отношения:

$$\vec{q} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \vec{v} = \rho \vec{v}\,. \qquad (1.14)$$

Импульс конечного индивидуального объема будет определяться как интеграл:

$$\vec{Q} = \int\limits_V \rho \vec{v} dV.$$

Введя импульс конечного индивидуального объема $\vec{Q}$, постулируем второй закон Ньютона для индивидуального объема сплошной среды: «*Скорость изменения импульса индивидуального объема равна сумме всех действующих на него внешних сил*». Таким образом, для любого индивидуального объема V можно записать уравнение изменения импульса в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\vec{v}dV = \int\limits_V \vec{F}dV + \oiint\limits_\Sigma \vec{\sigma}_n dS. \tag{1.15}$$

Здесь первое слагаемое в правой части — *объемная сила*, действующая на конечный индивидуальный объем, $\vec{F}$ — плотность объемных сил. Объемная сила вводится следующим образом. Пусть имеется малый объем ΔV. На него действует объемная сила $\Delta\vec{f}$. Если существует предел $\dfrac{\Delta\vec{f}}{\Delta V}$

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\vec{f}}{\Delta V}, \tag{1.16}$$

то он называется плотностью объемных сил, причем сила, действующая на конечный индивидуальный объем сплошной среды, выражается интегралом

$$\vec{f} = \int\limits_V \vec{F}dV. \tag{1.17}$$

Пример объемной силы — сила тяжести. Действительно, если на объем ΔV массой Δm действует сила тяжести $\Delta\vec{f} = \Delta m\vec{g},$ то ее плотность, согласно формуле (1.16), определяется соотношением $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta m}{\Delta V}\vec{g} = \rho\vec{g}.$

Сила тяжести, действующая на конечный индивидуальный объем, согласно (1.17) равна

$$\vec{f} = \int\limits_v \rho\vec{g}dV = m\vec{g}\,. \tag{1.18}$$

Вернемся к формуле (1.15). Второе слагаемое в правой части — *поверхностные силы*, а $\vec{\sigma}_n$ — *вектор поверхностных напряжений*. Он вводится следующим образом. Рассмотрим элемент поверхности Σ, окружающей индивидуальный объем $dV,$ имеющий площадь ΔS, вектор нормали к которой $\vec{n}$. На этот элемент поверхности действует сила $\Delta\vec{\sigma}_n$. Если существует предел $\vec{\sigma}_n = \lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{\Delta\vec{\sigma}}{\Delta S}$, то он называется вектором поверхностных напряжений. Тогда поверхностная сила, действующая на всю поверхность, равна $\oiint \vec{\sigma}_n ds.$ Примером поверхностной силы является, например, сила давления.

Уравнение (1.15) является основным постулируемым динамическим соотношением механики сплошных сред, подобно тому, как второй закон Ньютона является исходным уравнением в механике материальной точки.

1.2.3. Уравнение для момента импульса

Это уравнение в механике сплошных сред также не выводится, а постулируется по аналогии с уравнением для момента импульса системы материальных точек.

Для материальной точки уравнение для момента импульса следует из второго закона Ньютона: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$. Момент импульса материальной точки $\vec{M} = \left[\vec{r}\times m\vec{v}\right]$, так что его изменение равно моменту сил, действующих на материальную точку:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}\right] + \left[\vec{r}\times\frac{md\vec{v}}{dt}\right] = \vec{v}\times m\vec{v} + \left[\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \left[\vec{r}\times\vec{f}\right]. \quad (1.19)$$

Для системы N материальных точек изменение момента импульса равно сумме моментов импульсов внешних сил $\vec{F}_i^{(e)}$, действующих на материальные точки; при этом моменты внутренних сил, действующих между точками внутри системы $\vec{F}_i^{(i)}$, взаимно компенсируются. Таким образом, для системы материальных точек имеем

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\right] = \left[\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(e)}\right] + \left[\vec{r}_i\times\vec{F}_i^{(i)}\right]. \quad (1.20)$$

По аналогии вводится уравнение для момента импульса для объема сплошной среды. Пусть индивидуальный объем V состоит из малых индивидуальных объемов ΔV_i, которые движутся со скоростью $\vec{v}$. Момент количества движения конечного индивидуального объема равен сумме моментов количества движения малых объемов, т. е.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N}\left[\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\right].$$

Переходя к пределу, из этого соотношения получаем

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left[\vec{r}_i \times \rho_i \Delta V_i \vec{v}_i \right] = \int_V \left[\vec{r} \times \rho \vec{v} \right] dV. \qquad (1.21)$$

Уравнение для момента количества движения индивидуального объема постулируется по аналогии с уравнением для системы материальных точек (1.20), т. е.

$$\frac{d}{dt} \int_V \left[\vec{r} \times \rho \vec{v} \right] dV = \int_V \left[\vec{r} \times \vec{F} \right] dV + \oiint_\Sigma \left[\vec{r} \times \vec{\sigma}_n \right] dS. \qquad (1.22)$$

Таким образом, изменение момента импульса индивидуального объема сплошной среды равно сумме моментов внешних объемных и поверхностных сил, действующих на этот индивидуальный объем. Эта запись не учитывает возможные внутренние вращения и другие степени свободы у среды, т. е. более сложные случаи рассматривать не будем.

1.3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ В ЭЙЛЕРОВЫХ КООРДИНАТАХ

Для того чтобы записать уравнения механики сплошной среды в дифференциальной форме, нам потребуется доказать несколько математических соотношений.

Предположим, что имеется индивидуальный объем V, ограниченный поверхностью $\sum$. Пусть этот объем переместился за время t так, что, деформируясь, принял значение V' с поверхностью $\sum'$ (рис. 1). Найдем изменение интеграла $\frac{d}{dt}\int_V A dV$, где A — произвольная скалярная величина, V — произвольный индивидуальный объем. По определению производной получим

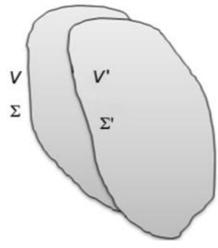

Рис. 1

$$\frac{d}{dt} \int_V A(\vec{r}, t) dV = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\int_{V'} A(\vec{r}, t + \Delta t) dV - \int_V A(\vec{r}, t) dV}{\Delta t}. \qquad (1.23)$$

Прибавим и вычтем под знаком первого интеграла в формуле (1.23) $A(\vec{r},t)$, тогда получим следующее выражение:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V'}\left[A(\vec{r},t+\Delta t)-A(\vec{r},t)\right]dV+\int\limits_{V'}A(\vec{r},t)dV-\int\limits_{V}A(\vec{r},t)dV}{\Delta t}. \quad (1.24)$$

Внесем в 1-м слагаемом lim под знак интеграла и вычислим предел:

$$\int\limits_{V}\frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r},t)dV+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int\limits_{V'-V}A(\vec{r},t)dV}{\Delta t}. \quad (1.25)$$

По определению интеграла как предела частичных сумм из (1.25) имеем

$$\int\limits_{V'-V}A(\vec{r},t)dV=\lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)\,\Delta V_i\,. \quad (1.26)$$

Очевидно, что $\Delta V_i=\Delta S_i v_n(\vec{r}_i,t)\Delta t,$ где ΔS_i — i-й элемент поверхности, а $v_n(\vec{r}_i,t)$ — нормальная проекция вектора скорости. Тогда

$$\lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)\,\Delta V_i=\lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)\,v_n\Delta S_i\Delta t. \quad (1.27)$$

А этот последний предел равен (по определению) $\oiint\limits_{\Sigma}Av_n dS\Delta t.$ Окончательно из равенства (1.23) получаем *первую вспомогательную формулу*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}A(\vec{r},t)\,dV=\int\limits_{V}\frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r},t)dV+\oiint\limits_{\Sigma}Av_n dS. \quad (1.28)$$

Формула (1.28) в таком виде понадобится в дальнейшем, когда будут рассматриваться разрывы сплошной среды, т. е. области, в которых параметры среды изменяются на масштабах одного порядка с расстоянием между молекулами. Если $A(\vec{r},t)$ — непрерывная функция координат, то в (1.28) можно применить формулу Остроградского — Гаусса и получить

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{V}A(\vec{r},t)\,dV=\int\limits_{V}\left(\frac{\partial A}{\partial t}+\operatorname{div}A\vec{v}\right)dV. \quad (1.29)$$

Этой формулой воспользуемся при выводе дифференциальной формы основных уравнений механики сплошных сред.

1.3.1. Закон сохранения массы

Будем исходить из закона сохранения массы в интегральной форме.

Равенство $\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho dV = 0$ справедливо для любого индивидуального объема. Воспользуемся вспомогательной формулой (1.29), тогда интегральный закон сохранения массы примет вид

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right) dV = 0. \tag{1.30}$$

Поскольку выбран произвольный индивидуальный объем, то из предыдущей формулы следует закон сохранения массы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0. \tag{1.31}$$

1.3.2. Закон сохранения импульса

Выведем еще одну вспомогательную формулу. Вычислим производную $\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, A(\vec{r}, t) dV$, где $A(\vec{r}, t)$ — произвольное скалярное поле, а ρ — плотность среды. Согласно первой вспомогательной формуле (1.28)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho A dV &= \int\limits_V \left[\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho A \vec{v}) \right] dV = \\ &= \int\limits_V \left[\rho \frac{\partial A}{\partial t} + A \frac{\partial \rho}{\partial t} + A \operatorname{div}(\rho \vec{v}) + \rho (\vec{v} \nabla) A \right] dV. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Второе и третье слагаемые в правой части с учетом закона сохранения массы (1.31) в сумме дают нуль. Принимая во внимание выражение для материальной производной, получаем *вторую вспомогательную формулу*:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho A(\vec{r}, t) dV = \int\limits_V \rho \frac{dA}{dt} dV. \tag{1.33}$$

Прежде чем выводить закон сохранения импульса в дифференциальной форме, рассмотрим основное свойство поверхностных напряжений.

Основное свойство поверхностных напряжений. Тензор напряжений. Поверхностное напряжение $\vec{\sigma}_n$ зависит от ориентации площадки, определяемой вектором нормали $\vec{n}$. Покажем, что в самом общем случае $\vec{\sigma}_n$ — это линейная функция от компонент вектора $\vec{n}$. Применим закон сохранения импульса к индивидуальному объему ΔV в виде малого тетраэдра, стороны которого совпадают с осями прямоугольной системы координат (рис. 2). Сначала запишем выражение для поверхностной силы $\oiint\limits_S \vec{\sigma}_n dS$, считая тетраэдр малым, так что интегрирование по поверхности можно заменить произведением:

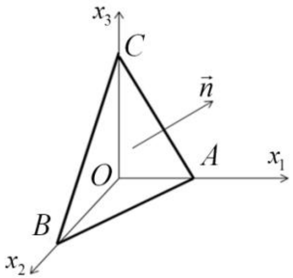

Рис. 2

$$\oiint\limits_S \vec{\sigma}_n dS = \underset{(-1)}{\vec{\sigma}_{BOC}}\, S_{BOC} + \underset{(-2)}{\vec{\sigma}_{AOC}}\, S_{AOC} + \underset{(-3)}{\vec{\sigma}_{AOB}}\, S_{AOB} + \vec{\sigma}_n\, S_{ABC}. \quad (1.34)$$

Индексы –1, –2, –3 в этой формуле означают, что внешняя нормаль, например, к площадке BOC направлена по $-\vec{x}_{01}$ и т. д. По третьему закону Ньютона сила, действующая на поверхность, нормаль к которой направлена по $\vec{x}_{01}$, равна $-\vec{\sigma}_{BOC} S_{BOC} = -\vec{\sigma}_1 S_1$ и т. д. Из геометрических соображений ясно, что площади граней соответственно равны $S_i = n_i\, S_{ABC}$, где n_i — i-я проекция нормали к площадке ABC. Итак,

$$\oiint \vec{\sigma}_n dS = S_{ABC}\left[\vec{\sigma}_n - \left(\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3\right)\right]. \quad (1.35)$$

Объемная сила, действующая на этот индивидуальный объем, равна

$$\int\limits_V \vec{F} dV = \vec{F}\,\Delta V = \frac{1}{3} S_{ABC}\, h\vec{F}, \quad (1.36)$$

где h — высота тетраэдра, опущенная из точки O на плоскость ABC.

Применим вторую вспомогательную формулу (1.33) к закону сохранения импульса в интегральной форме. Пусть скалярное поле

$A = v_i$, т. е. равно i-й проекции скорости. Тогда согласно (1.33) скорость изменения i-й проекции импульса индивидуального объема равна

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\vec{v}dV = \int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV. \tag{1.37}$$

Но, учитывая малость индивидуального объема, получаем

$$\int\limits_V \rho\frac{d\vec{v}}{dt}dV \approx \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\Delta V = \rho\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{1}{3}S_{ABC}h. \tag{1.38}$$

Итак, из закона сохранения импульса следует

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt}\frac{1}{3}hS_{ABC} = \vec{F}\frac{1}{3}S_{ABC}h + S_{ABC}\left[\vec{\sigma}_n - \left(\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3\right)\right]. \tag{1.39}$$

Сокращаем обе части в (1.39) на S_{ABC}, устремляем $h \to 0$. Тогда из (1.39) получаем

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3 = \vec{\sigma}_i n_i. \tag{1.40}$$

Таким образом, напряжение, приложенное к произвольной площадке с нормалью $\vec{n}$, можно представить в виде линейной комбинации напряжений, приложенных к площадкам с нормалями, ориентированными по ортам выбранной системы координат, а коэффициентами в этом разложении будут направляющие косинусы вектора нормали в этой системе координат.

Разложим вектор $\vec{\sigma}_i$ по ортам произвольной выбранной системы координат, т. е. представим $\vec{\sigma}_i$ в виде $\vec{\sigma}_i = \sigma_{ji}\vec{x}_{0j}$, тогда $\vec{\sigma}_n = \sigma_{ji}n_i\vec{x}_{0j}$. Переменная σ_{ji} называется *тензором поверхностных напряжений*.

Смысл компонент тензора поверхностных напряжений: σ_{ji} — это поверхностная плотность силы, действующей в направлении $\vec{x}_{0j}$ на площадку, ориентированную так, что нормаль к ней направлена по вектору $\vec{x}_{0i}$, т. е. 1-й индекс (j) задает направление силы; 2-й индекс (i) — направление нормали к площадке. По существу, тензор напряжений σ_{ji} задает линейное преобразование от вектора нормали к вектору напряжений. Действительно, j-я проекция вектора $\vec{\sigma}_n$ равна $\left[\vec{\sigma}_n\right]_j = \sigma_{ji}n_i$.

Теперь запишем закон сохранения импульса в дифференциальной форме. Для произвольного индивидуального объема воспользуемся выражением

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \vec{F} dV + \oiint_\Sigma \vec{\sigma}_n dS, \tag{1.41}$$

где поверхностный интеграл в правой части можно представить как

$$\oiint_\Sigma \vec{\sigma}_n dS = \oiint_\Sigma \sigma_{ji} n_i \vec{x}_{0j} dS. \tag{1.42}$$

Рассмотрим проекцию уравнения (1.41) на направление *k*:

$$\int_V \rho \frac{dv_k}{dt} dV = \int_V F_k dV + \oiint_\Sigma \sigma_{ki} n_i dS. \tag{1.43}$$

Введем вспомогательный вектор $\vec{\Sigma}_k = \sigma_{ki}\vec{x}_{0i}$, тогда $\sigma_{ki} n_i = \left(\vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n}\right)$, а поверхностный интеграл по теореме Остроградского — Гаусса можно заменить интегралом по объему:

$$\oiint_\Sigma \sigma_{ki} n_i dS = \oiint_\Sigma \vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n}\, dS = \int_V \left(\operatorname{div} \vec{\Sigma}_k\right) dV. \tag{1.44}$$

Учитывая определение дивергенции вектора $\operatorname{div}\vec{\Sigma}_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}$, а также произвольность индивидуального объема *V*, из (1.43) получаем закон сохранения импульса в дифференциальной форме в эйлеровых координатах:

$$\rho \frac{dv_k}{dt} = F_k + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}. \tag{1.45}$$

С учетом выражения лагранжевой производной в эйлеровых координатах получаем

$$\rho\left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right) v_k\right) = F_k + \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}. \tag{1.46}$$

Чтобы понять физический смысл слагаемого, определяющего силу поверхностных напряжений, рассмотрим поверхностную силу, действующую в *k*-м направлении на малый объем в виде прямоугольника (рис. 3):

$$\begin{aligned} \Delta F_k &= \left(\sigma_{ki}\left(x_i + \Delta x_i\right) - \sigma_{ki}\left(x_i\right)\right)\Delta x_k \Delta x_j = \\ &= \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}\Delta x_i \Delta x_j \Delta x_k = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i}\Delta V. \end{aligned} \tag{1.47}$$

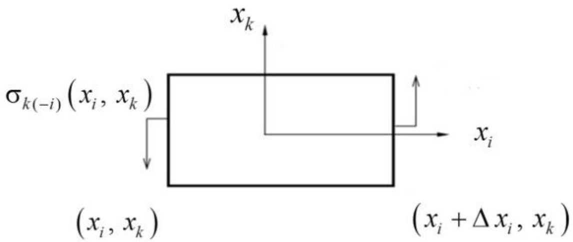

Рис. 3

Если просуммировать выражение в правой части (1.47) по всем i и учесть объемную силу F_k, то второй закон Ньютона для малого индивидуального объема ΔV можно записать в виде

$$\Delta m \frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_i} \Delta V + F_k \Delta V. \qquad (1.48)$$

Делим обе части (1.48) на ΔV, переходя к пределу при $\Delta V \to 0$, получаем снова закон сохранения импульса в форме (1.45).

1.3.3. Закон сохранения момента импульса

Запишем сначала этот закон в интегральной форме для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_V \left[\vec{r} \times \rho \vec{v}\right] dV = \int\limits_V \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] dV + \oiint\limits_\Sigma \left[\vec{r} \times \vec{\sigma}_n\right] dS. \qquad (1.49)$$

k-я компонента векторного произведения

$$\left[\vec{r} \times \rho\, \vec{v}\right]_k = \varepsilon_{ijk} \rho\, x_i v_j, \qquad (1.50)$$

где $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, \text{ если } i, j, k \text{ образуют четную перестановку чисел 1, 2, 3,} \\ -1, \text{ если } i, j, k \text{ образуют нечетную перестановку чисел 1, 2, 3,} \\ 0, \text{ если есть совпадающие индексы.} \end{cases}$

Рассмотрим k-ю проекцию закона сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_v \rho \varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int\limits_v \varepsilon_{ijk} x_i F_j + \oiint\limits_\Sigma \varepsilon_{ijk} x_i \left[\vec{\sigma}_n\right]_j dS. \qquad (1.51)$$

По основному свойству поверхностных напряжений

$$\left[\vec{\sigma}_n\right]_j = \sigma_{jm} n_m = \sigma_{jm} (\vec{x}_{0m} \vec{n}). \qquad (1.52)$$

Тогда

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk} x_i \left[\vec{\sigma}_n\right]_j dS = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \varepsilon_{ijk}\left(x_i \sigma_{jm}\left(\vec{x}_{0m}\vec{n}\right)\right) dS = \int_{v} \varepsilon_{ijk}\,\mathrm{div}\left(x_i \sigma_{jm}\vec{x}_{0m}\right) dV =$$

$$= \int_{v} \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_i \sigma_{jm}\right) dV = \int_{v} \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_m} + \sigma_{jm}\delta_{im}\right] dV. \qquad (1.53)$$

С использованием второй вспомогательной формулы получаем

$$\frac{d}{dt}\int_{v} \rho\, \varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int_{v} \rho \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{ijk} x_i v_j\right) dV =$$

$$= \int_{v} \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt} + \varepsilon_{ijk} v_j \frac{dx_i}{dt}\right) dV = \int_{v} \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt}\right) dV. \qquad (1.54)$$

Тогда можно записать

$$\int_{v} \varepsilon_{ijk}\left[x_i\left(\rho\frac{dv_j}{dt} - F_j - \frac{\partial \sigma_{jm}}{\partial x_m}\right) + \sigma_{ji}\right] dV = 0. \qquad (1.55)$$

Первое слагаемое в (1.55) равно нулю в силу закона сохранения импульса. Остается $\int_{v} \varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} dV = 0$. Поскольку объем V произвольный, то $\varepsilon_{ijk}\sigma_{ji} = 0$. Отсюда сразу следует *изотропия тензора поверхностных напряжений*:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,. \qquad (1.56)$$

Это и есть *закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме для классических сред.* Его обычно не используют отдельно, а просто считают, что тензор напряжений симметричен. Выясним физический смысл этого закона.

Рассмотрим малый индивидуальный объем в форме параллелепипеда и закон сохранения момента импульса для него относительно одной из вершин (например, точки O). Запишем уравнение для момента импульса в интегральной форме:

$$\int_{\Delta V} \left[\vec{r} \times \rho\vec{v}\right] dV = \int_{\Delta V} \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] dV + \oint\!\!\!\oint_{\Delta\Sigma} \left[\vec{r} \times \vec{\sigma}_n\right] dS. \qquad (1.57)$$

Будем считать, что параллелепипед настолько мал, что интегрирование можно заменить умножением. Рассмотрим k-ю проекцию уравнения для импульса и оценим слагаемые:

$$\left[\int\limits_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\right]dV\right]_k = O\left(\rho\frac{dv_k}{dt}\right)\left(\Delta V\right)^{4/3},$$
$$\left[\int\limits_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]dV\right]_k = O\left(F_k\right)\left(\Delta V\right)^{4/3}. \tag{1.58}$$

Из рис. 4 видно, что

$$\oiint\limits_{\Delta\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{\sigma}_n\right]_k dS \approx -\sigma_{ij}\Delta x_j\Delta x_i\Delta x_k + \sigma_{ji}\Delta x_i\Delta x_j\Delta x_k = \left(-\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\Delta V. \tag{1.59}$$

Подставляем эти выражения в уравнение для момента импульса, делим на ΔV и стягиваем параллелепипед в точку, получаем $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ для любых $i \neq j$.

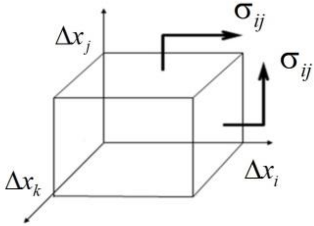

Рис. 4

Итак, симметричность тензора поверхностных напряжений при отсутствии внутренних вращательных степеней свободы означает, что момент сил, создаваемых поверхностными напряжениями в бесконечно малом объеме, равен нулю.

1.4. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ В ЛАГРАНЖЕВЫХ КООРДИНАТАХ

1.4.1. Закон сохранения массы

Рассмотрим элемент жидкости, который в начальный момент времени имеет форму параллелепипеда с центром в точке (ξ_1, ξ_2 , ξ_3). Его объем dV_0, а масса $dm = \rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)dV_0$.

В момент времени t все точки параллелепипеда сместятся. Их новые координаты, и в частности координаты центра, будут связаны со старыми законами движения $x_i(\xi_1, \xi_2 , \xi_3, t)$, где $i = 1, 2, 3$, которые, по существу, представляют собой преобразование координат. Но тогда в момент t объем элемента жидкости $dV = JdV_0$, где $J = \dfrac{\partial\left(x_1, x_2, x_3\right)}{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right)}$ — якобиан преобразования от эйлеровых координат к лагранжевым. Масса индивидуального объема в момент t будет равна $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)dV = dm$. Отсюда по закону сохранения массы получим

$$\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)dV_0 = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)JdV_0. \qquad (1.60)$$

Окончательно уравнение неразрывности запишем в лагранжевых координатах:

$$\rho\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{J}. \qquad (1.61)$$

1.4.2. Закон сохранения импульса

Чтобы найти уравнения движения частиц, надо знать законы их движения. Запишем их в лагранжевой форме. В эйлеровых координатах x_1, x_2, x_3, t — независимые переменные. Поле скорости $\vec{v}$ — неизвестная. В лагранжевых координатах x_1, x_2, x_3 — неизвестные, а ξ_1, ξ_2, ξ_3, t —независимые переменные.

Будем исходить из уравнения для импульса в эйлеровых координатах:

$$\rho\frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}. \qquad (1.62)$$

В лагранжевых координатах $\frac{d}{dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi}$, а $v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi}$, т. е. уравнение движения примет вид

$$\rho\left.\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right|_{\xi} = F_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}. \qquad (1.63)$$

В уравнении (1.63) не должно быть производных по неизвестным функциям, в частности по пространственной переменной x_j (x_j неизвестна). Поэтому необходимо совершить преобразование координат к переменным Лагранжа. Воспользуемся при этом правилом дифференцирования сложных функций. Тогда, например,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\frac{1}{J}. \qquad (1.64)$$

Аналогично

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1, f, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\frac{1}{J}; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial(x_1, x_2, f)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}\frac{1}{J}. \qquad (1.65)$$

Рассмотрим частный случай одномерного движения идеальной жидкости. Выражая производные от тензора поверхностных напряжений через производные по лагранжевым координатам, получим закон сохранения импульса (уравнение Эйлера) в координатах Лагранжа:

$$\rho \left. \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right|_{\xi} = F + \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{1}{J}. \tag{1.66}$$

В случае отсутствия массовых сил, с учетом закона сохранения массы в форме (1.61), из (1.66) можно получить следующее выражение для одномерного уравнения Эйлера:

$$\left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{\xi} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \xi}. \tag{1.67}$$

Приведенные уравнения применимы для описания движения индивидуального объема сплошной среды под действием объемных и поверхностных сил. Однако такой объем может обмениваться теплом с окружающей средой, поэтому для более полного описания движения сплошной среды требуется знание ее термодинамики.

ЗАДАЧИ к разделу 1

Задача 1

Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения среды, если оно происходит с полем скорости $v_1 = \dfrac{x_1}{t+\tau}$, $v_2 = \dfrac{2x_2 t}{t^2+\tau^2}$, $v_3 = \dfrac{3x_3 t^2}{t^3+\tau^3}$, $\tau = \text{const}$.

Решение. В лагранжевых координатах скорости связаны с координатами следующими выражениями: $v_i = \left. \dfrac{\partial x_i}{\partial t} \right|_{\xi}$, $\dfrac{d}{dt} = \left. \dfrac{\partial}{\partial t} \right|_{\xi}$. Тогда уравнения движения с заданным полем скорости примут следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t+\tau}, \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_2 t}{t^2+\tau^2}, \quad \frac{dx_3}{dt} = \frac{3x_3 t^2}{t^3+\tau^3}.$$

Интегрируя полученные дифференциальные уравнения методом разделения переменных, находим

$$x_1 = C_1(t+\tau), \quad x_2 = C_2(t^2+\tau^2), \quad x_3 = C_3(t^3+\tau^3),$$

где C_1, C_2, C_3 — константы интегрирования. Учитывая, что при $t = 0$ $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, $x_3 = \xi_3$, где ξ_1, ξ_2, ξ_3 — координаты Лагранжа, получим, что движение среды происходит по закону

$$x_1 = \xi_1\left(\frac{t}{\tau}+1\right), \quad x_2 = \xi_2\left(\frac{t^2}{\tau^2}+1\right), \quad x_3 = \xi_3\left(\frac{t^3}{\tau^3}+1\right).$$

Задача 2

Движение среды происходит по закону $x_1 = \xi_1,\ x_2 = \xi_2\left(\frac{t}{\tau}+1\right),\ x_3 = \dfrac{\xi_3}{1+\frac{t}{\tau}}$. Определить поле скорости и ускорения $v(x, t)$, $a(x, t)$. Найти траектории и линии тока.

Решение. По определению в лагранжевых координатах $v_i = \left.\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right|_\xi$, $\dfrac{d}{dt} = \left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_\xi$, тогда для поля скорости получим следующие выражения:

$$v_1 = \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi_1} = 0, \quad v_2 = \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_2} = \frac{\xi_2}{\tau}, \quad v_3 = \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_3} = -\frac{\xi_3}{\tau}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^2}.$$

Выразим ξ_1, ξ_2, ξ_3 через x_1, x_2, x_3:

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)}, \quad \xi_3 = x_3\left(1+\frac{t}{\tau}\right).$$

Подставим полученные соотношения в выражения для скоростей, тогда поле скорости примет следующий вид:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{x_2}{t+\tau}, \quad v_3 = -\frac{x_3}{t+\tau}.$$

Проделывая аналогичные выкладки для ускорения с учетом соотношений $a_i = \left.\dfrac{\partial v_i}{\partial t}\right|_\xi$, $\dfrac{d}{dt} = \left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_\xi$, получим $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{2x_3}{(t+\tau)^2}$.

Определим линии тока и траектории. По определению линий тока

$$\frac{dx_i}{v_i(x_1, x_2, x_3, t)} = dS, \quad \frac{dx_i}{dS} = v_i(\vec{x}, t).$$

Тогда $\dfrac{dx_1}{dv_1} = \dfrac{dx_2}{dv_2} = \dfrac{dx_3}{dv_3}$. Подставляя полученные выражения для скоростей, находим $\dfrac{dx_2}{dx_2} = -\dfrac{dx_3}{dx_3}, \quad x_2 = \dfrac{C}{x_3}$.

Определим траектории движения, для этого выразим $1+\dfrac{t}{\tau}$ через $\dfrac{x_2}{\xi_2}$. Тогда для эйлеровых координат получим следующие выражения:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_3 = \frac{\xi_2 \xi_3}{x_2}.$$

Задача 3

В некоторой точке тела в декартовой системе координат компоненты тензора напряжений заданы матрицей

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Определить вектор напряжений на площадке с нормалью $\vec{n} = \left(\dfrac{1}{3};\ -\dfrac{2}{3};\ \dfrac{2}{3}\right)$.

Решение. По определению тензора поверхностных напряжений

$$\left[\vec{\sigma}_n\right]_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij} (\vec{x}_{oj} \vec{n}).$$

Тогда

$$\left[\vec{\sigma}_n\right]_1 = \sigma_{1j} n_j = 0,$$

$$\left[\vec{\sigma}_n\right]_2 = \sigma_{2j} n_j = -\frac{10}{3},$$

$$\left[\vec{\sigma}_n\right]_3 = \sigma_{3j} n_j = \frac{4}{3},$$

$$\vec{\sigma}_n = -\frac{10}{3} \vec{y}_0 + \frac{4}{3} \vec{z}_0.$$

2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ТЕРМОДИНАМИКИ. ПОНЯТИЕ ИДЕАЛЬНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ (ЖИДКОСТИ, ГАЗА)

В предыдущем разделе мы получили уравнения, описывающие движение индивидуального объема сплошной среды. Этот объем может обмениваться теплом с окружающей его жидкостью, газом, что в свою очередь также может вызывать движения сплошной среды. Кроме того, ясно, что полученная система уравнений незамкнута: следует определить тензор поверхностных напряжений либо (для идеальной среды) давление как функцию, например, плотности или температуры. Это означает, что для полного описания движения сплошной среды требуется знание ее термодинамики. Кратко изложим далее основные положения термодинамики сплошной среды.

2.1. ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ

Первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, постулирует невозможность вечного двигателя 1-го рода, т. е. тепловой машины, которая совершает полезную работу в цикле без затрат энергии. Следовательно, энергию можно определить как функцию состояния термодинамической системы и ввести дифференциал полной энергии $d\varepsilon = d(E+U)$, где E — механическая энергия, U — внутренняя энергия.

Сформулируем теперь *первый закон термодинамики.*

Изменение полной энергии $d\varepsilon$ термодинамической системы при малом изменении ее состояния равно сумме:

1) механической работы внешних сил над системой $dA^{(e)}$,

2) количества тепла, передаваемого системе извне, $dQ^{(e)}$,

3) количества немеханической и нетепловой энергии, передаваемой системе, dQ^{**}:

$$d\varepsilon = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**}, \tag{2.1}$$

$dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$, dQ^{**} не являются полными дифференциалами, $d\varepsilon$ — полный дифференциал.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем сплошной среды V. Выделим внутри этого объема малый объем ΔV, полная энергия которого равна $\Delta\varepsilon$. Тогда плотность энергии определим как

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta E + \Delta U}{\Delta V} = \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right), \tag{2.2}$$

где $\Delta E = \Delta m(v^2/2)$ — механическая энергия, $\Delta U = \Delta m u$ — внутренняя энергия, Δm — масса в объеме ΔV, $v^2/2$, u — массовая плотность механической и внутренней энергии соответственно. Полная энергия всего объема будет при этом равна

$$\varepsilon = \int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV. \tag{2.3}$$

Пусть за время dt энергия индивидуального объема изменяется на $d\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV.$ Рассмотрим возможные источники изменения энергии индивидуального объема.

1) Энергия может меняться за счет механической работы объемных и поверхностных сил.

Работа объемных сил. Выделим внутри индивидуального объема малый объем ΔV. Предположим, что на него действует массовая внешняя сила с плотностью $\vec{F}$. Пусть объем ΔV за время dt переместился на расстояние $d\vec{r} = \vec{v}dt$, тогда работа этой силы $d\left(\Delta A_1^{(e)}\right) = \vec{F}\vec{v}dt\Delta V$, а работа, совершаемая над всем объемом,

$$dA_1^{(e)} = \left(\int\limits_V \vec{F}\,\vec{v}\,dV\right) dt. \tag{2.4}$$

Работа поверхностных сил. На объем V действует поверхностная сила, плотность которой $\vec{\sigma}_n$. Рассмотрим элемент поверхности ΔS, на который действует сила $\vec{\sigma}_n\,\Delta S$. Работа, совершаемая этой силой при перемещении элемента поверхности на расстояние $d\vec{r}$ за время dt, равна $d\Delta A_2^{(e)} = \left(\vec{\sigma}_n\vec{v}\right)dt\Delta S$. При этом работа, совершаемая на всей поверхности этой поверхностной силой, определяется выражением

$$dA_2^{(e)} = \left[\oiint_{\Sigma} \vec{\sigma}_n \vec{v} dS \right] dt. \tag{2.5}$$

<u>Замечание</u>. Внутри индивидуального объема мы можем выделить внутренние индивидуальные объемы, каждый из которых окружен своей поверхностью. При этом на каждую из поверхностей действуют поверхностные силы, которые также совершают работу. Однако вклад этих работ в изменение полной энергии выделенного объема сплошной среды равен нулю. В то же время эти внутренние поверхностные силы могут вносить вклад в изменение отдельно механической и внутренней энергии.

2) Энергия индивидуального объема может меняться за счет процессов теплообмена.

Пусть в единицу времени в объеме ΔV выделяется количество тепла Δq. Можно ввести плотность количества тепла, выделяемого в единицу времени в единице объема:

$$q^{(e)} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}. \tag{2.6}$$

Тогда во всем объеме V за время dt выделяется тепло:

$$dQ_1^{(e)} = \int_V q^{(e)} dV dt. \tag{2.7}$$

Ясно, что передача тепла может происходить и через границу индивидуального объема. Пусть через участок поверхности площадью ΔS, ориентированный перпендикулярно нормали $\vec{n}$ (см. рис. 2), передается в единицу времени количество тепла ΔQ_n. Тогда плотность потока тепла определяется выражением

$$Q_n^{(e)} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q_n}{\Delta S}. \tag{2.8}$$

При этом количество тепла, передаваемое системе за время dt, равно

$$dQ_2^{(e)} = \left[\oiint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS \right] dt. \tag{2.9}$$

Так же можно ввести количество нетепловой энергии, передаваемой системе:

$$dQ^{**} = dt \left[\int_V q^{**} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{**} dS \right]. \tag{2.10}$$

Таким образом, закон сохранения энергии для индивидуального объема принимает вид

$$d\int\limits_{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=$$

$$=dt\left[\int\limits_{V}(\vec{F}\vec{v})dV+\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{\sigma}_n\vec{v})dS+\int\limits_{V}q^{(e)}dV+\oiint\limits_{\Sigma}Q_n^{(e)}dS+\int\limits_{V}q^{**}dV+\oiint\limits_{\Sigma}Q_n^{**}dS\right]. \tag{2.11}$$

Если обе части этого соотношения разделить на dt, получим выражение для изменения полной энергии индивидуального объема в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{v}\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=$$

$$=\left[\int\limits_{V}(\vec{F}\vec{v})dV+\oiint\limits_{\Sigma}(\vec{\sigma}_n\vec{v})dS+\int\limits_{V}q^{(e)}dV+\oiint\limits_{\Sigma}Q_n^{(e)}dS+\int\limits_{V}q^{**}dV+\oiint\limits_{\Sigma}Q_n^{**}dS\right]. \tag{2.12}$$

2.1.1. Закон сохранения энергии в дифференциальной форме

Начнем с того, что определим вектор потока тепла. Как и ранее, при определении вектора поверхностных напряжений, рассмотрим индивидуальный объем в виде малого тетраэдра с гранями, ориентированными вдоль осей некоторой декартовой системы координат (см. рис. 2). Пусть тепло поступает в этот объем только через боковые грани, тогда передаваемое количество тепла равно:

$$\begin{aligned}\oiint\limits_{\Xi}Q_n^{(e)}dS &\approx Q_n^{(e)}S_{ABC}+q_1S_{BOC}+q_2S_{AOC}+q_3S_{AOB}=\\ &=S_{ABC}(Q_n^{(e)}+q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3).\end{aligned} \tag{2.13}$$

Количество тепла, поступающего в этот объем, должно иметь порядок этого объема $O(1/3S_{ABC}h)$ (здесь h — высота тэтраэдра, опущенная из точки O), т. е.

$$S_{ABC}\,(Q_n^{(e)}+q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3)=1/3S_{ABC}h. \tag{2.14}$$

Устремляя $h\to 0$, получим

$$Q_n^{(e)}=-(q_1n_1+q_2n_2+q_3n_3), \tag{2.15}$$

т. е. поток тепла можно представить в виде скалярного произведения вектора нормали к площадке $\vec{n}$ на вектор $\vec{Q}^{(e)}$ с проекциями $(-q_1;$ $-q_2;\ -q_3)$, следовательно, $Q_n^{(e)} = (\vec{Q}^{(e)}\vec{n})$. При этом i-я проекция вектора $\vec{Q}^{(e)}$ имеет смысл плотности потока тепла через площадку, вектор нормали к которой $\vec{x}_{0i}$.

Аналогичные рассуждения можно провести для потока энергии нетепловой природы. Преобразуем поверхностные интегралы, входящие в интегральное выражение для закона сохранения энергии (2.12), в соответствии с формулой Остроградского — Гаусса:

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} (\vec{Q}^{(e)}\vec{n}) dS = \int_V \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} dV, \tag{2.16}$$

$$\oint\!\!\!\oint_{\Xi} \left(\vec{v}\vec{\sigma}_n\right) dS = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j v_i dS = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \left(\sigma_{ij} v_i (\vec{x}_{0j}\vec{n})\right) dS, \tag{2.17}$$

$$\int_V \operatorname{div}\left(\sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j}\right) dV = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\sigma_{ij}\right) dV. \tag{2.18}$$

Используя вторую вспомогательную формулу (1.34), запишем

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right) dV = \int_V \rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right) dV. \tag{2.19}$$

Таким образом, закон сохранения энергии (2.13) преобразуется к виду

$$\int_v dV\left(\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right) - (\vec{F}\vec{v}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i\sigma_{ij}) - q^{(e)} - \operatorname{div} Q^{(e)} - q^{**} - \operatorname{div} Q^{**}\right) = 0. \tag{2.20}$$

Учитывая произвольность индивидуального объема V, приравняем подынтегральное выражение к нулю, что и дает закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}+u\right) = \left(\vec{F}\vec{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(v_i\sigma_{ij}\right) + q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \operatorname{div}\vec{Q}^{**}. \tag{2.21}$$

Это закон сохранения полной энергии, который мы постулировали из термодинамических предположений.

2.1.2. Законы сохранения механической и внутренней энергии

Покажем, что из уравнения для изменения импульса индивидуального объема следует закон изменения механической энергии. Действительно, умножив обе части уравнения (1.46) на v_i и сложив по i, получим

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=\left(F_i v_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}v_i\right)-\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \tag{2.22}$$

Из сравнения формул (2.21) и (2.22) ясно, что 1-е и 2-е слагаемые в правой части (2.22) входят в уравнение для закона сохранения полной энергии (2.21) и имеют смысл плотности мощности внешних массовых и поверхностных сил. Последнее слагаемое в (2.22) называется *работой внутренних поверхностных напряжений.*

Чтобы разобраться с физическим смыслом этого слагаемого, рассмотрим малый объем ΔV в форме параллелепипеда. Мы уже вычисляли силу, действующую на этот объем за счет поверхностных напряжений в направлении i. Она равна $\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\Delta V$ (см. формулу (1.48) на с. 19); при этом по всем индексам j предполагается суммирование. Если скорость перемещения жидкого объема ΔV равна $\vec{v}$, то за время dt эта сила совершает работу

$$dA_V=\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}v_i dt\,\Delta V. \tag{2.23}$$

Рассмотрим теперь поверхность, ограничивающую объем ΔV. На поверхности *2* (рис. 5) действует сила $\sigma_{ij}(x_j+\Delta x_j, ...)\Delta S$, скорость перемещения этой поверхности равна $v_i\,(x_j+\Delta x_j, ...)$. За время dt эта сила совершит работу $\sigma_{ij}v_i(x_j+\Delta x_j, ...)\Delta S dt$. На поверхности *1* аналогичная сила равна $-\sigma_{ij}(x_j, ...)\Delta S$. Совершенная работа определится соотношением $-\sigma_{ij}v_i(x_j, ...)\Delta S dt$.

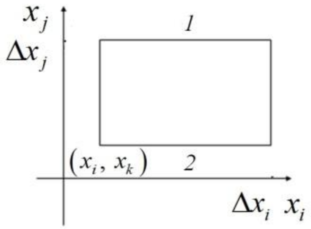

Рис. 5

Таким образом, полная работа, производимая поверхностными силами над частицами, находящимися на поверхностях *1* и *2*, равна

$$dA_s=\left(\sigma_{ij}v_i\left(x_j+\Delta x_j, ...\right)-\sigma_{ij}v_i\left(x_j, ...\right)\right)dt\,\Delta S\cong\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij}v_i\right)\Delta V dt. \tag{2.24}$$

Чтобы найти полную работу, совершаемую на поверхности, ограничивающей объем ΔV, надо просуммировать по всем i и j. Из сравнения выражений (2.23) и (2.24) для dA_s и dA_V ясно, что

$$dA_V = dA_S - \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Delta V dt. \tag{2.25}$$

Из (2.25) следует, что dA_V может быть представлена как сумма работ, совершаемых поверхностными силами как на поверхностях, ограничивающих объем V, так и на поверхностях внутри объема V. Поэтому величину $\sigma_{ij} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ называют *работой внутренних поверхностных напряжений* (или напряжений на внутренних поверхностях).

Если из уравнения (2.21) для полной энергии вычесть уравнение (2.22) для механической энергии, то получится соотношение, описывающее изменение внутренней энергии:

$$\rho \frac{du}{dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \mathrm{div}\left(\vec{Q}^{(e)} + \vec{Q}^{**}\right) + q^{(e)} + q^{**}. \tag{2.26}$$

Из этого соотношения ясно, что работа внутренних поверхностных напряжений обеспечивает изменение внутренней энергии сплошной среды. Это уравнение называют общим уравнением теплопередачи. Оно эквивалентно закону сохранения энергии (2.21), так как закон сохранения механической энергии есть следствие уже известного уравнения — закона сохранения импульса.

2.2. ВТОРОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

Второе начало термодинамики утверждает, что невозможно существование вечного двигателя 2-го рода, т. е. тепловой машины, в которой полезная работа совершается за счет передачи тепла от тела с более низкой температурой к телу с более высокой температурой. Следствием этого является введение функции состояния — энтропии $\bar{S}$.

Обратимся к математической формулировке второго начала термодинамики.

Пусть произвольная термодинамическая система (жидкость, газ и т. д.) переходит из состояния 1 в близкое состояние 2. Тогда можно ввести изменение энтропии по формуле

$$d\bar{S} = \frac{dQ^{(e)} + dQ'}{T}, \tag{2.27}$$

где $dQ^{(e)}$ — количество тепла, переданное системе извне, а dQ' — нескомпенсированное тепло, причем $dQ' \geq 0$. Для обратимых процессов полагают, что $dQ' = 0$.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем V с энтропией $\overline{S}$. Выделим внутри этого объема малый объем ΔV. Энтропия этого объема равна $\Delta\overline{S}$. Поскольку энтропия — непрерывная функция координат, то можно ввести массовую плотность энтропии:

$$\bar{S} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \overline{S}}{\rho \Delta V}. \qquad (2.28)$$

При этом полная энтропия объема V равна $\int\limits_V \bar{S}\rho dV$.

Пусть сплошная среда внутри малого объема ΔV переходит из состояния 1 в близкое состояние 2 за время dt. Тогда изменение энтропии равно

$$d\overline{S} = d\left(\rho\bar{S}\Delta V\right). \qquad (2.29)$$

Пусть этот объем получает извне количество тепла:

$$d\Delta Q^{(e)} = q^{(e)}\Delta V dt + \left[\oiint\limits_{\Delta\Sigma} Q_n^{(e)} dS\right] dt. \qquad (2.30)$$

1-е слагаемое описывает объемное тепловыделение, а 2-е — количество тепла, поступающего через поверхность $\Delta\Sigma$. Применяя теорему Остроградского — Гаусса ко второму слагаемому и учитывая малость объема V, по которому проводится интегрирование в (2.30), получаем

$$d\Delta Q^{(e)} = \left(q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)}\right)\Delta V dt. \qquad (2.31)$$

Нескомпенсированное тепло, выделяемое в объеме ΔV, запишем в виде

$$d\Delta Q' = q'\Delta V dt, \qquad (2.32)$$

где q' — плотность нескомпенсированного тепла, выделяемого в единицу времени.

С учетом этого второй закон термодинамики (2.27) для малого объема ΔV можно записать в виде

$$d\left(\rho\bar{S}\Delta V\right) = \frac{\left[q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)}\right]\Delta V dt + q'\Delta V dt}{T}. \qquad (2.33)$$

Если теперь проинтегрировать это уравнение по индивидуальному объему V, то получим математическую формулировку второго начала термодинамики для конечного индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\bar{S}dV = \int_V \frac{q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} + q'}{T}dV\,. \qquad (2.34)$$

Из этого уравнения можно сразу получить второе начало термодинамики в дифференциальной форме. Примем во внимание, что при изменении состояния объема ΔV его масса $\rho\Delta V$ сохраняется, т. е. $d(\rho\,\bar{S}\,\Delta V) = \rho\Delta V d\bar{S}$. Тогда из (2.34) следует *второе начало термодинамики в дифференциальной форме*:

$$\rho\frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} + q'}{T}. \qquad (2.35)$$

2.3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ И ТЕРМОДИНАМИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЕ

Выпишем теперь полученные уравнения в дифференциальной форме.

1) Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0. \qquad (2.36)$$

2) Закон сохранения импульса:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\vec{v},\nabla\right)v_i\right) = F_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}. \qquad (2.37)$$

3) Закон сохранения момента импульса:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \qquad (2.38)$$

4) Закон сохранения полной энергии:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) = \left(\vec{F},\vec{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon\sigma_{ij}v_i\right) + q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \operatorname{div}\vec{Q}^{**}. \qquad (2.39)$$

5) Уравнение теплопередачи:

$$\rho\frac{du}{dt} = \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)} + q^{**} + \operatorname{div}\vec{Q}^{**}. \qquad (2.40)$$

6) Второе начало термодинамики:

$$\rho \frac{d\bar{S}}{dt} = \frac{q^{(e)} + \mathrm{div}\vec{Q}^{(e)} + q'}{T}. \tag{2.41}$$

Система уравнений (2.36)—(2.41) механики сплошных сред незамкнута, так как в ней не определены σ_{ij}, потоки тепла $\vec{Q}^{(e)}$, нескомпенсированное тепло q' и т. д. Все эти величины определяются опытным путем, т. е. строятся феноменологические модели механики сплошных сред. В разных средах будут свои уравнения для этих величин. Первой моделью сплошной среды является модель идеальной жидкости или идеального газа.

2.4. ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ ИЛИ ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Рассмотрим модель идеальной жидкости или идеального газа.

Идеальной жидкостью (или газом) называют сплошную среду, обладающую следующими свойствами.

1) Тензор поверхностных напряжений шаровой, т. е. $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$.

Выясним смысл скалярной функции p, входящей в выражение для тензора поверхностных напряжений. Найдем проекцию вектора поверхностных напряжений на i-е направление: $\left[\vec{\sigma}_n\right]_i = -pn_i$, т. е. $\vec{\sigma}_n = -p\vec{n}$. Таким образом, сила, действующая на площадку противоположно направлению нормали, — это давление.

2) Среда является двухпараметрической, т. е. такой, в которой уравнение состояния определяется двумя термодинамическими функциями. Например, плотность внутренней энергии $u = u(\rho, \bar{S})$ является функцией плотности и энтропии или плотности и давления, т. е. $u = u(p, \rho)$.

3) Все термодинамические процессы являются обратимыми. Это означает, что если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, при этом нескомпенсированное тепло $q' = 0$. Заметим, что могут быть необратимые процессы, для которых $q' = 0$, но не наоборот.

Для такой среды система уравнений механики сплошных сред (2.36)—(2.41) примет следующий вид:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\rho\vec{v} = 0; \qquad (2.42)$$

уравнение Эйлера:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right) v_i\right) = F_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad (2.43)$$

или в векторной форме

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right)\vec{v}\right) = \vec{F} - \nabla p;$$

уравнение притока тепла:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla u\right)\right] = -p\operatorname{div}\vec{v} + q^{(e)} + \operatorname{div}Q^{(e)} + q^{**} + \operatorname{div}\vec{Q}^{**}; \qquad (2.44)$$

уравнение состояния:

$$u = u\,(\rho,\ \bar{S}); \qquad (2.45)$$

уравнение энтропии:

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + \left(\vec{v}, \nabla\right)\bar{S}\right) = \frac{q}{T}, \qquad (2.46)$$

где $q = q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)}$.

Из этой системы уравнений можно получить основное термодинамическое соотношение, которое является следствием первого и второго начал термодинамики для идеального газа. Допустим, что источники немеханической и нетепловой энергии отсутствуют, тогда уравнение притока тепла (2.44) можно записать в виде

$$\rho\frac{du}{dt} = -p\operatorname{div}\vec{v} + q, \qquad (2.47)$$

где $q = q^{(e)} + \operatorname{div}\vec{Q}^{(e)}$.

Из уравнения непрерывности при этом получаем

$$\operatorname{div}\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \qquad (2.48)$$

т. е. формула (2.47) примет вид

$$\rho\,\frac{du}{dt} = \frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt} + q. \qquad (2.49)$$

Из уравнения для изменения энтропии (2.46) следует, что

$$\rho\frac{d\overline{S}}{dt}=\frac{q}{T}\,. \tag{2.50}$$

Исключая q из (2.50), получаем из (2.49)

$$\rho\,\frac{du}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+T\rho\,\frac{d\,\overline{S}}{dt}. \tag{2.51}$$

Или, поделив обе части на ρ, получим

$$\frac{du}{dt}=T\,\frac{d\overline{S}}{dt}-p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.52}$$

Как мы видели раньше, d/dt — это производная по времени от заданной лагранжевой частицы. Для фиксированной частицы можно в формуле (2.52) перейти к дифференциалам и получить *основное термодинамическое соотношение* в виде

$$du=Td\,\overline{S}-pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{2.53}$$

Таким образом, в идеальной жидкости (газе) приращение внутренней энергии определяется приращением энтропии и плотности в заданной лагранжевой частице.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГИДРОСТАТИКИ. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ГАЗА)

Изучение механики идеальной жидкости или газа начнем с так называемого приближения гидростатики. Пусть течение жидкости (газа) отсутствует, т. е. $\vec{v} = 0$ (среда неподвижна). Тогда из уравнения сохранения массы следует, что $\partial\rho/\partial t = 0$, а значит, $\rho = \rho(x, y, z)$. Уравнение Эйлера при этом сводится к виду

$$\nabla p = \vec{F}. \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) часто называют уравнением гидростатики, из которого следует, что в отсутствие внешних объемных сил $(\vec{F} = 0)$ внутри покоящейся жидкости (газа) давление p = const. Это закон Паскаля, известный из школьного курса физики.

Таким образом, в отсутствие внешних массовых сил плотность жидкости ρ является произвольной функцией координат, при этом давление p постоянно и не зависит, например, от формы сосуда, в который налита жидкость.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять внешние объемные силы, чтобы идеальная жидкость могла находиться в состоянии гидростатического равновесия.

3.1. ОБЩИЕ УСЛОВИЯ РАВНОВЕСИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ (ГАЗА) В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

Пусть $\vec{F} = \rho\vec{f}$, где $\vec{f}$ — массовая плотность объемных сил. Применим ротор (rot) к выражению (3.1). Поскольку согласно (3.1) $\nabla p = \rho\vec{f}$, то

$$\operatorname{rot}(\rho\vec{f}) = \rho\operatorname{rot}\vec{f} + [\nabla\rho, \vec{f}\,] = 0. \tag{3.2}$$

Умножим равенство (3.2) на $\vec{f}$ скалярно, тогда получим условие, которому должна удовлетворять плотность объемных сил, чтобы идеальная жидкость находилась в состоянии гидростатического равновесия:

$$\vec{f}\ \mathrm{rot}\,\vec{f}\ = 0. \tag{3.3}$$

Важным является случай, когда внешние силы имеют потенциал, т. е. $\vec{F} = \rho\nabla\varphi$. Пример такой силы — сила тяжести. Оказывается, что потенциальный характер массовых сил накладывает дополнительные ограничения на пространственное распределение плотности. Действительно, если $\vec{F} = \rho\nabla\varphi$, то $\mathrm{rot}\,\vec{f} \equiv 0$, а из (3.2) следует, что $[\nabla\rho \times \nabla\varphi] = 0$. Это означает, что векторы $\nabla\rho$ и $\nabla\varphi$ должны быть *коллинеарными*. Но тогда $\rho = \rho(\varphi)$, и из уравнения гидростатики (3.1) следует, что давление также является функцией потенциала, т. е. $p = p(\varphi)$. Таким образом, при гидростатическом равновесии поверхности равных значений потенциала φ (φ = const) являются поверхностями равного давления и плотности.

Рассмотрим в качестве примера покоящуюся жидкость (газ), находящуюся в поле силы тяжести, плотность которой является функцией только давления, т. е. $\rho(p)$. Такая жидкость называется *баротропной*, а равновесие *баротропным*. В этом случае $\vec{F} = \rho\vec{g}$, а $\varphi = -gz$; тогда $p = p(z)$ и $\rho = \rho(z)$.

Рассмотрим основные случаи баротропного равновесия в поле тяжести.

1) Пусть $\rho = \rho_0$ = const — жидкость (газ) несжимаема. В этом случае $p = = p_0 - \rho_0 g(z - z_0)$, т. е. равновесное давление является линейной функцией вертикальной координаты. Заметим, что в этом соотношении и заключена вся школьная гидростатика: и закон Паскаля, и одинаковый уровень жидкости в сообщающихся сосудах.

2) Газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях, так называемый *совершенный газ*. Пример совершенного газа — газ атмосферы. В совершенном газе давление, плотность и температура связаны уравнением Клапейрона:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT\left(z\right), \tag{3.4}$$

где $R = 8{,}3144 \cdot 10^7$ эрг/(мол $\cdot$ град) — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярная масса газа. Заметим также, что внутренняя энергия совершенного газа пропорциональна его абсолютной температуре, т. е. $u = c_V T$, где c_V — это величина, описывающая теплоемкость совершенного газа при постоянном объеме. Подставляя уравнение состояния (3.4) в (3.1), находим равновесное распределение давления:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT(z)}. \qquad (3.5)$$

Отсюда после интегрирования получаем

$$p = p_0 \exp\left[-\int_{z_0}^{z} \frac{g}{RT(z')} dz'\right], \qquad (3.6)$$

где p_0 — давление при $z = 0$.

Мы получили так называемую барометрическую формулу, описывающую изменение плотности (давления) с изменением высоты. При $T = \mathrm{const}$ (изотермический термодинамический процесс) получается известная барометрическая формула для изотермической атмосферы. Аналогичная формула описывает изменение давления (плотности) газа в зависимости от высоты в атмосфере, если известно распределение $T(z)$.

3.2. ЗАКОН АРХИМЕДА

Найдем силу, действующую на тело объемом V, погруженное в жидкость, находящуюся в равновесии и имеющую плотность $\rho(z)$. Проведем в жидкости поверхность Σ, расположенную близко к телу (рис. 6). Вычислим силу, действующую на жидкость на этой поверхности. Заметим, что вектор внешней нормали к поверхности для жидкости является вектором внутренней нормали для тела. Для i-й проекции силы, действующей на жидкость на этой поверхности,

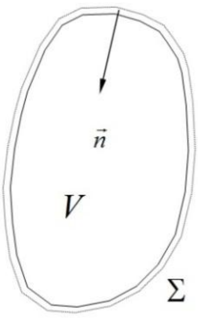

Рис. 6

$$F_{fi} = \oiint_{\Sigma} [\vec{\sigma}_n]_i \, dS = \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS = \oiint_{\Sigma} (-p) \delta_{ij} n_j dS. \qquad (3.7)$$

Уберем тело и заполним образовавшуюся полость жидкостью с тем же распределением плотности. Применим теорему Остроградского — Гаусса к вычислению поверхностного интеграла в формуле

(3.7). Поскольку внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ является внутренней по отношению к поверхности, ограничивающей объем V, из (3.7) следует

$$\oiint\limits_{\Sigma} pn_i dS = -\int\limits_V \operatorname{div} p\vec{x}_{0i} dV = -\int\limits_V \frac{\partial p}{\partial x_i} dV. \tag{3.8}$$

Таким образом, сила, действующая на жидкость в объеме V, определяется выражением

$$\vec{F}_f = \vec{g} \int\limits_V \rho(z) dV = m_f \vec{g}. \tag{3.9}$$

Следовательно, сила, действующая на тело объемом V со стороны окружающей жидкости, по третьему закону Ньютона равна по величине силе (3.9) и противоположна ей по направлению, т. е.

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_f = -m_f \vec{g}, \tag{3.10}$$

где $m_f = \int\limits_V \rho(z) dV$ — масса жидкости в объеме тела.

Таким образом, сила, действующая на тело объемом V со стороны окружающей жидкости, равна по модулю весу жидкости в объеме тела. Выражение (3.10) описывает так называемую *силу Архимеда*.

3.3. УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ В ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Рассмотрим условие устойчивости равновесного распределения плотности жидкости в поле тяжести. Распределение плотности $\rho(z)$ будет устойчиво, если при отклонении жидкой частицы от положения равновесия на нее действует возвращающая сила, стремящаяся вернуть частицу к положению равновесия.

Пусть жидкость с профилем плотности $\rho(z)$ находится в равновесии в поле сил тяжести. Направим ось z вверх, тогда в покоящейся жидкости распределение давления $p(z)$ удовлетворяет общей барометрической формуле

$$p = p_0 - \int\limits_{z_0}^{z} \rho(z') g dz'. \tag{3.11}$$

В соответствии с уравнением состояния идеального газа ($p = p(\rho, \overline{S})$) давление и энтропия также являются функциями вертикальной координаты z.

Рассмотрим малый индивидуальный объем ΔV, находящийся в равновесии на уровне z. Пусть его плотность на этом уровне равна $\rho(z)$, а масса $\Delta m = \rho(z)\Delta V$. Предположим, что этот жидкий объем сместился вверх на высоту $z + \Delta z$, где равновесное давление отличается от давления на уровне z. В силу сжимаемости и плотность жидкости в объеме ΔV будет отличаться от плотности на уровне z. Обозначим плотность в этом индивидуальном объеме как ρ', а сам перемещенный индивидуальный объем как $\Delta V'$. Отметим, что масса этого объема $\Delta m = \rho'\Delta V'$ сохраняется. На перемещенный индивидуальный объем действует сила тяжести $\rho'\Delta V'g$, направленная вниз, и выталкивающая сила $\rho(z + \Delta z)\Delta V'g$, направленная вверх, где $\rho(z + \Delta z)$ — равновесная плотность на новом уровне $z + \Delta z$. Для того чтобы индивидуальный объем вернулся назад, сила тяжести должна быть больше, чем выталкивающая сила — сила Архимеда, т. е. $\rho'\Delta V'g > \rho(z + {}$ $+ \Delta z)\Delta V'g$, а следовательно

$$\rho' > \rho(z + \Delta z). \tag{3.12}$$

Будем считать, что смещение индивидуального объема происходит при отсутствии притока внешнего тепла и теплообмена между соседними частицами. Такие процессы называются *адиабатическими*. Подчеркнем, что при этом сохраняется энтропия. Тогда с учетом уравнения состояния из (3.12) следует

$$\rho[p(z + \Delta z);\ \bar{S}(z)] > \rho[p(z + \Delta z);\ \bar{S}(z + \Delta z)]. \tag{3.13}$$

Разложим это выражение по z, полагая $\Delta z / z \ll 1$:

$$\rho(z) + \left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{\bar{S}} \frac{dp}{dz}\Delta z > \rho(z) + \left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{\bar{S}} \frac{dp}{dz} + \left.\frac{\partial\rho}{\partial \bar{S}}\right|_{p} \frac{d\bar{S}}{dz} \right)\Delta z. \tag{3.14}$$

Учитывая, что $\Delta z > 0$, условие устойчивости (3.14) примет вид

$$\left.\frac{\partial\rho}{\partial \bar{S}}\right|_{p} \frac{d\bar{S}}{dz} < 0\,. \tag{3.15}$$

Это одна из форм записи условия устойчивости распределения плотности в поле силы тяжести. Более наглядной является форма выражения условия устойчивости через градиент распределения плотности.

Вернемся снова к условию (3.13), переписав его с учетом уравнения состояния в виде

$$\rho[p(z + \Delta z);\ \bar{S}(z)] > \rho(z + \Delta z). \tag{3.16}$$

Разложив (3.16) в ряд по Δz, получим

$$\rho(z)+\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{\bar{S}}\frac{dp}{dz}\Delta z>\rho(z)+\frac{d\rho}{dz}\Delta z\ . \tag{3.17}$$

С учетом уравнения гидростатики в поле тяжести

$$\frac{dp}{dz}=-\rho(z)g \tag{3.18}$$

из выражения (3.17) получим

$$\left(\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{S}\rho g+\frac{d\rho}{dz}\right)\Delta z<0\,. \tag{3.19}$$

Учитывая, что $\Delta z > 0$, $\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{\bar{S}}=\frac{1}{\left.\left(\partial p/\partial\rho\right)\right|_{\bar{S}}}$, запишем условие (3.19) в виде

$$\frac{d\rho}{dz}+\frac{g\rho(z)}{\left.\left(\partial p/\partial\rho\right)\right|_{\bar{S}}}<0. \tag{3.20}$$

Как увидим далее, $\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{\bar{S}}=c^2$ имеет смысл скорости звука. Во всех известных случаях c^2 — большая величина, поэтому условие устойчивости можно записать в виде

$$\frac{d\rho}{dz}<0. \tag{3.21}$$

Таким образом, устойчивым является распределение плотности, соответствующее ее убыванию с высотой. Заметим, что, переходя к условию (3.21), мы, по существу, положили $\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{\bar{S}}=\infty$, т. е. предположили, что жидкость несжимаема.

Остановимся подробнее на введенном выше понятии скорости звука.

3.4. СКОРОСТЬ ЗВУКА

Определим физический смысл величины $\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}}$, входящей в условие устойчивости равновесного распределения плотности. Рассмотрим уравнение для малых возмущений состояния идеального газа (жидкости). Эти уравнения в дальнейшем будем называть линейными.

Пусть жидкость (газ) находится в состоянии равновесия с постоянным давлением p_0, плотностью ρ_0 и энтропией $\bar{S}_0$, причем p_0 связано с ρ_0 и $\bar{S}_0$ уравнением состояния $p_0 = p_0(\rho_0, \bar{S}_0)$. Предположим, что возникли малые возмущения, зависящие только от одной пространственной координаты x и от времени t. Запишем уравнения движения идеальной жидкости в одномерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\rho v = 0 \text{ — закон сохранения массы,}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{g}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ — уравнение Эйлера,} \tag{3.22}$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} + v\frac{\partial \bar{S}}{\partial x} = 0 \text{ — второе начало термодинамики,}$$

$$p = p(\rho, \bar{S}) \text{ — уравнение состояния.}$$

Представим термодинамические и гидродинамические величины в виде сумм средних (ρ_0, $\bar{S}_0$, p_0) и возмущений (ρ_1, v_1, $\bar{S}_1$, p_1), полагая, что средние по времени от возмущений скорости равны нулю:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1(x, t),$$

$$v = v_1(x, t),$$

$$\bar{S} = \bar{S}_0 + \bar{S}_1(x, t),$$

$$p = p_0 + p_1(x, t).$$

Будем считать, что отклонение величин от равновесных значений мало. Представим все слагаемые, входящие в уравнения (3.22), в виде рядов по малым переменным и отбросим все слагаемые выше 1-го порядка малости. Тогда из системы (3.22) получим линейную систему уравнений гидро-, газодинамики идеальной жидкости (газа):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0,$$
$$\rho_0 \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} \right) = 0,$$
$$\frac{\partial \bar{S}_1}{\partial t} = 0, \tag{3.23}$$
$$p_1 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}} \rho_1 + \left.\frac{\partial p}{\partial \bar{S}}\right|_{\rho} \bar{S}_1.$$

Отсюда видно, что возмущение равновесной энтропии можно положить равной нулю ($\bar{S}_1$ = 0). Подставим в уравнение Эйлера p_1 из линеаризованного уравнения состояния и получим вместо системы (3.23) два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right] = 0,$$
$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}} \frac{\partial \rho_1}{\partial x} \right] = 0. \tag{3.24}$$

Исключая v_1, получаем волновое уравнение для возмущения давления:

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}} \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = 0. \tag{3.25}$$

Его решение можно представить в виде суммы двух волн сжатия (или разрежения), распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\rho = R_1(x - ct) + R_2(x + ct). \tag{3.26}$$

Итак, параметр $c = \sqrt{\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}}}$, входящий в условие равновесия жидкости (газа) в поле тяжести, имеет смысл *скорости звука* — скорости распространения звуковых волн малой амплитуды. Пусть ρ = const, т. е. независимо от давления плотность не меняется. Это соответствует пределу несжимаемой жидкости. Тогда скорость звука $c = \infty$, т. е. в несжимаемой жидкости скорость распространения малых возмущений бесконечна. На самом деле скорость звука конечна, но в этом пределе достаточно велика. Отсюда сделаем вывод, что любую среду можно считать несжимаемой, если рассматриваемые в ней процессы много медленнее, чем процесс, связанный с распространением звука.

Сформулируем это условие более точно. Пусть L — характерный пространственный масштаб процесса, а T — характерный временной масштаб. Тогда жидкость или газ можно считать несжимаемыми, если

$$\frac{L}{T} << c\,. \tag{3.27}$$

Из определения скорости звука следует, что она зависит от сжимаемости среды: если сжимаемость плохая (плотность меняется слабо, например при адиабатическом изменении давления), то скорость звука велика.

Приведем выражение для скорости звука совершенного газа. Уравнение состояния совершенного газа имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = \frac{R}{\mu}T. \tag{3.28}$$

При адиабатическом процессе изменения термодинамического состояния газа давление p и плотность ρ связаны так называемой политропной формулой:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \tag{3.29}$$

где $\gamma = c_p/c_V$ — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме. Поэтому скорость звука для совершенного идеального газа при адиабатическом процессе сжатия определяется следующим соотношением:

$$c = \sqrt{\gamma\frac{p_0}{\rho_0}\cdot\rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma\frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}\,. \tag{3.30}$$

Видно, что скорость звука в идеальном газе зависит только от абсолютной температуры.

3.5. СТАЦИОНАРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Перейдем к описанию движения в жидкости или газе. Начнем с так называемых стационарных движений. Течение называют *стационарным*, если в соответствующих уравнениях идеальной жидкости (газа) (2.42)—(2.46) $\partial/\partial t = 0$, т. е. скорость жидкости в каждой точке не зависит от времени. Запишем уравнения движения идеальной жидкости (газа) в случае стационарного течения. Из системы (2.42)—(2.46) нетрудно получить

$$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0, \tag{3.31}$$

$$(\vec{v},\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = \vec{F}, \tag{3.32}$$

$$\rho\,(\vec{v}\nabla)\,u = q - p\operatorname{div}\vec{v}, \tag{3.33}$$

$$\rho(\vec{v}\nabla)\overline{S} = \frac{q}{T}. \tag{3.34}$$

Следует отметить, что уравнения (3.33) и (3.34), вытекающие из уравнений теплопередачи и из второго закона термодинамики, иногда заменяются уравнениями состояния.

Уравнение (3.32) в случае установившихся движений идеальной жидкости (газа) имеет первый интеграл. Предположим, что объемная сила потенциальна, т. е. $\vec{F} = -\rho\nabla\varphi$. Воспользуемся формулой из векторного анализа

$$(\vec{v},\nabla\vec{v}) = \frac{1}{2}\nabla v^2 + [\operatorname{rot}\vec{v},\vec{v}]. \tag{3.35}$$

Тогда уравнение Эйлера (3.32) примет вид уравнения Громеки — Лэмба:

$$\frac{1}{2}\nabla v^2 + [\operatorname{rot}\vec{v}\times\vec{v}] + \frac{1}{\rho}\nabla p = -\nabla\varphi. \tag{3.36}$$

Проведем в жидкости семейство линий. Обозначим l координату вдоль линии, а различные линии будем определять параметром L. Эти линии, вообще говоря, не являются линиями тока. Найдем проекцию уравнения Эйлера (3.36) на произвольную линию из этого семейства:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2} + \varphi\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = -[\operatorname{rot}\vec{v},\vec{v}]_l. \tag{3.37}$$

На каждой линии

$$p = p(l, L), \quad \rho = \rho(l, L). \tag{3.38}$$

А значит, на данной линии (при фиксированном L) $\rho = \rho(p, L)$. Но тогда

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial}{\partial l}\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}. \tag{3.39}$$

Функция

$$P(p,L)=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)} \tag{3.40}$$

называется функцией давления. Она различна, вообще говоря, на разных линиях L. С учетом функции давления уравнение Эйлера (3.37) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2}+\varphi+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}\right]=-\left[\operatorname{rot}\vec{v},\vec{v}\right]_l. \tag{3.41}$$

Допустим, что в качестве семейства линий мы выбрали семейство линий тока. Очевидно, что вектор $[\operatorname{rot}\vec{v},\vec{v}]_l$ направлен перпендикулярно вектору $\vec{v}$. Значит, его проекция на линию тока равна нулю. Отсюда следует, что на линии тока сохраняется величина

$$\frac{v^2}{2}+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}+\varphi=C(L). \tag{3.42}$$

Этот интеграл и называется *формулой Бернулли*.

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы Бернулли.

1. Допустим, что движение жидкости представляет собой баротропный процесс, т. е. плотность есть функция только от давления: $\rho=\rho(p)$, а поле скорости безвихревое, т. е. $\operatorname{rot}\vec{v}=0$. Тогда независимо от линии тока из (3.42) получим

$$\frac{v^2}{2}+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p')}+\varphi=\text{const}. \tag{3.43}$$

Частным случаем баротропного процесса является процесс, происходящий в несжимаемой жидкости, плотность которой во всех точках одинакова. В этом случае $\rho=\rho_0=\text{const}$. Интеграл Бернулли (3.42) для безвихревого течения в несжимаемой жидкости принимает вид

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\varphi=\text{const}. \tag{3.44}$$

2. Если же движение произвольно, т. е. $\operatorname{rot}\vec{v}\neq 0$, то интеграл Бернулли принимает вид

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\varphi=\text{const}(L). \tag{3.45}$$

В следующем разделе рассмотрим ряд интегралов движения стационарного течения идеальной жидкости.

ЗАДАЧИ к разделу 3

Задача

Найти силу, действующую на стенку квадратного аквариума, до краев наполненного жидкостью с плотностью ρ. Высота стенки аквариума равна *H*. На какой высоте от дна находится точка приложения этой силы?

Решение. Жидкость в аквариуме находится в состоянии гидростатического равновесия, тогда давление жидкости внутри аквариума описывается следующим выражением: $\nabla p = \rho\vec{g}$. В проекции на ось *z*, направленную вертикально вверх, $\frac{dp}{dz} = -\rho g$. Выберем начало отсчета оси *z* на дне аквариума, тогда, интегрируя выражение для давления, получим $p = p_a - \rho g(z - H)$.

Вычислим силу давления, действующую на стенку аквариума на единицу его длины:

$$F = \vec{n}\int_0^H (p - p_a)dz = -\rho g\vec{n}\int_0^H (z - H)dz = \frac{\rho g H^2}{2}\vec{n}.$$

Определим точку приложения вычисленной силы. Для этого найдем отношение момента силы давления к модулю этой силы:

$$z_F = \frac{\int_0^H (p - p_a)z dz}{|F|} = \frac{H}{3}.$$

Таким образом, точка приложения интегральной силы давления, действующей со стороны покоящейся жидкости на стенку прямоугольного аквариума, оказывается смещенной ближе к дну аквариума и расположена на расстоянии 1/3 высоты аквариума, отсчитываемой от его дна.

4. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ (ЖИДКОСТИ, ГАЗА). МЕТОД КОНТРОЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В механике сплошных сред часто не требуется обладать детальной информацией обо всех характеристиках течений, достаточно определить некоторые интегральные характеристики, например суммарные силы, действующие на твердое тело в жидкости (газе), и т. д. Для получения интегральных характеристик течений нередко используется метод, основанный на интегрировании уравнений динамики и термодинамики сплошной среды по некоторым объемам, называемым контрольными. Эти объемы не являются индивидуальными, их выбирают так, чтобы в них характеристики течений были известны или их можно было определить. Проинтегрируем уравнения механики сплошных сред (2.42)—(2.46) по такому объему и посмотрим, какие получатся следствия для стационарных течений.

4.1. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ МАССЫ

Проинтегрируем уравнение неразрывности (2.42) по некоторому произвольному стационарному объему:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{v} \right] dV = 0. \tag{4.1}$$

Применяя вторую вспомогательную формулу (1.29) к первому слагаемому, преобразуем уравнение (4.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = -\int_V \operatorname{div} \rho \vec{v} \, dV. \tag{4.2}$$

Применяя теорему Остроградского — Гаусса к правой части соотношения (4.2), получаем из закона сохранения массы

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = -\iint_\Sigma \rho v_n dS, \tag{4.3}$$

где Σ — поверхность, ограничивающая объем V.

Обсудим смысл уравнения (4.3). Левая часть соответствует изменению массы внутри некоторого объема, а правая часть — это интеграл от потока некоторого вектора через границу этого объема.

Вектор $\vec{q} = \rho\vec{v}$ будем называть *вектором плотности потока массы*. Рассмотрим площадку малой площадью ΔS на поверхности Σ с вектором нормали $\vec{n}$. Пусть жидкость (газ) пересекает эту поверхность со скоростью $\vec{v}$. Масса жидкости, протекающая через эту площадку за время Δt в направлении нормали, равна

$$\Delta m = \Delta S\, v_n\, \Delta t \rho. \tag{4.4}$$

В единицу времени через единицу площадки протекает масса

$$m_n = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t} = \rho v_n. \tag{4.5}$$

Таким образом, введенный выше вектор $\vec{q} = \rho\vec{v}$ действительно имеет смысл плотности потока массы.

В стационарном потоке из уравнения (4.3) следует

$$\iint\limits_{\Sigma} \rho v_n dS = 0. \tag{4.6}$$

Соотношение (4.6) означает, что поток массы через замкнутую поверхность Σ в этом случае равен нулю.

Рассмотрим в качестве контрольного объема *трубку тока*. Для этого мысленно представим в жидкости произвольный контур S и проведем через него линии тока. Полученная поверхность называется трубкой тока. Вектор скорости направлен по касательной к боковой поверхности трубки тока. Предположим, что течение стационарно (рис. 7). Тогда трубка тока — стационарная поверхность. Применим к ней закон сохранения массы (4.6). Интеграл по боковой поверхности $S_б$ равен нулю, так как $v_n\big|_{S_б} = 0,\ (\vec{v} \cdot \vec{n}\,) = 0$, поскольку на поверхности

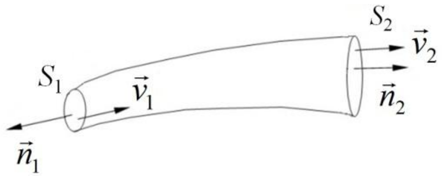

Рис. 7

трубки тока $\vec{v} \perp \vec{n}$. Тогда уравнение (4.6) можно переписать в виде суммы интегралов по сечениям $S_{1,2}$.

В случае, если трубка тока очень тонкая, интегрирование по соответствующим сечениям $S_{1,2}$ можно заменить произведением.

Полагая также, что площадки S_1 и S_2 перпендикулярны соответствующим векторам скорости, из (4.6) нетрудно получить соотношение $-\rho_1 S_1 v_1 + \rho_2 S_2 v_2 = 0$, т. е. вдоль тонкой трубки тока сохраняется величина

$$\rho S v = \text{const}. \tag{4.7}$$

Это *закон сохранения потока массы для тонкой трубки тока.*

4.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА. ТЕНЗОР ПОТОКА ИМПУЛЬСА

Теперь обратимся к закону сохранения импульса для его i-й проекции (ср. формулу (2.43)):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}. \tag{4.8}$$

Прибавим к уравнению (4.8) комбинацию $v_i\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right)\right)$, равную нулю в соответствии с законом сохранения массы. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}\right) = F_i. \tag{4.9}$$

Введем вектор $\vec{\Pi}_i = \left(\rho v_i v_j - \sigma_{ij}\right)\vec{x}_{0j} = \rho v_i \vec{v} - \sigma_{ij}\vec{x}_{0j}$. Очевидно, что получен закон сохранения i-й компоненты импульса в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right) + \operatorname{div} \vec{\Pi}_i = F_i. \tag{4.10}$$

Если проинтегрировать это уравнение по некоторому объему V и применить теорему Остроградского — Гаусса, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i dV = -\iint\limits_{\Sigma}\left[\vec{\Pi}_i\right]_n dS + \int\limits_V F_i dV. \tag{4.11}$$

При $F_i = 0$ изменение i-й компоненты импульса в объеме V равно потоку вектора $\vec{\Pi}_i$ через площадку, ограничивающую этот объем. Вектор $\vec{\Pi}_i$ называется *вектором плотности потока i-й компоненты импульса.* Таких векторов будет три, так как есть три проекции вектора скорости. Из формулы (4.11) видно, что $\left[\vec{\Pi}_i\right]_n$ — поток импульса через площадку, ориентированную перпендикулярно вектору $\vec{n}$.

Тогда проекция вектора $\vec{\Pi}_i$ на направление $\vec{x}_{0j}$ показывает поток i-й компоненты импульса через площадку, вектор нормали к которой направлен по $\vec{x}_{0j}$. Тогда выражение для проекции Π_{ij} является тензором:

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j - \sigma_{ij}. \tag{4.12}$$

Девять величин Π_{ij} образуют тензор (симметричный), который называется *тензором потока импульса*.

Приведем для вектора потока импульса и для закона сохранения импульса выражения в векторной и скалярной формах.

Поток импульса:

$$\left[\vec{\Pi}_i\right]_n = \left(\vec{\Pi}_i \cdot \vec{n}\right) = \rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j. \tag{4.13}$$

Для идеальной жидкости, где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$,

$$\Pi_{ij} = \rho v_i v_j + p\delta_{ij}, \tag{4.14}$$

$$\left[\vec{\Pi}_i\right]_n = \rho v_i v_n + p n_i. \tag{4.15}$$

Закон сохранения импульса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho v_i dV = -\iint\limits_\Sigma \left(\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right) dS + \int\limits_V F_i dV. \tag{4.16}$$

В векторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint\limits_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \sigma_{ij} n_j \vec{x}_{0i}\right) dS + \int\limits_V \vec{F}\, dV. \tag{4.17}$$

С учетом соотношения $\sigma_{ij} n_j \vec{x}_{0i} = \vec{\sigma}_n$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint\limits_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) + \int\limits_V \vec{F}\, dV. \tag{4.18}$$

Для идеальной жидкости формула (4.18) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int\limits_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint\limits_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}\right) dS + \int\limits_V \vec{F} dV. \tag{4.19}$$

Для стационарного течения жидкости в отсутствие внешних сил из (4.18) получим

$$\iint\limits_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0. \tag{4.20}$$

Для идеальной жидкости формула (4.20) примет вид

$$\iint\limits_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}\right) dS = 0. \tag{4.21}$$

Эти интегралы используются для вычисления сил, действующих на поверхности твердых тел. Соответствующий метод вычисления силы называется *методом контрольных поверхностей.*

4.3. МЕТОД КОНТРОЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть в жидкости имеется покоящееся твердое тело. Нужно найти силу, действующую на тело, если известно, что поток жидкости стационарный. Прежде всего выбирают так называемую контрольную поверхность, одна из частей которой прилегает к поверхности тела, а другие части выбираются из соображений удобства (рис. 8). Запишем закон сохранения импульса для замкнутой поверхности $\Sigma_T + \Sigma'$:

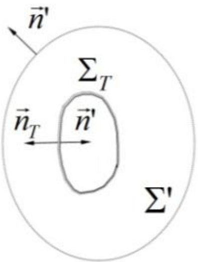

Рис. 8

$$\oiint\limits_{\Sigma_T+\Sigma'} \left(\rho\vec{v}v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0. \qquad (4.22)$$

На поверхности твердого тела $v_n = 0$, т. е. имеем

$$\iint\limits_{\Sigma_T} \left(-\vec{\sigma}_n dS\right) + \iint\limits_{\Sigma'} \left(\rho\vec{v}v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0. \qquad (4.23)$$

Но сила, действующая на тело со стороны жидкости, по определению $\vec{\sigma}_n$ и по третьему закону Ньютона

$$\vec{F} = \iint\limits_{\Sigma} \left(-\vec{\sigma}_n\right) dS, \qquad (4.24)$$

тогда из уравнения (4.23) следует

$$\vec{F} = -\iint\limits_{\Sigma'} \left(\rho v_n \vec{v} - \vec{\sigma}_n\right) dS. \qquad (4.25)$$

Таким образом, сила, действующая со стороны стационарно движущейся жидкости на тело произвольной формы, определяется равенством (4.25).

Закон сохранения энергии. Запишем закон сохранения полной энергии в виде

$$\rho\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v^2}{2} + u\right)\right] = \rho\, F_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} v_i\right) + q + \mathrm{div}\vec{Q}^{(e)} + q^{**}. \qquad (4.26)$$

Прибавляя к левой части уравнения комбинацию

$$\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_j\right)\right)=0, \tag{4.27}$$

получаем закон сохранения энергии в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)\right)+\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)-\sigma_{ij}v_i\vec{x}_{0j}-\vec{Q}^{(e)}\right)=F_iv_i+q+q^{**}. \tag{4.28}$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V, окруженному поверхностью Σ:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=-\oiint\limits_\Sigma\left(\rho v_n\left(\frac{v^2}{2}+u\right)-\sigma_{ij}n_jv_i\right)dS+\int\limits_V F_iv_idV+\\+\int\limits_V\left(q^{(e)}+\mathrm{div}\vec{Q}^{(e)}\right)dV+\int\limits_V q^{**}dV.\end{gathered} \tag{4.29}$$

Если нет внешних объемных сил $\left(\vec{F}_i=0\right)$ и отсутствует приток тепла $\left(q^{(e)}=\vec{Q}^{(e)}=q^{**}=0\right)$, то из формулы (4.20) следует

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV=-\oiint\limits_\Sigma\left(\rho v_n\left(\frac{v^2}{2}+u\right)-\left[\vec{\sigma}_n\right]_i v_i\right)dS. \tag{4.30}$$

Таким образом, изменение энергии сплошной среды в объеме V равно потоку вектора:

$$\vec{W}=\rho\vec{v}\left(\frac{v^2}{2}+u\right)-\sigma_{ij}v_i\vec{x}_{0j}. \tag{4.31}$$

Этот вектор называется *вектором потока энергии*. Для идеальной жидкости, где $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$,

$$\vec{W}=\vec{v}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+p\right). \tag{4.32}$$

Видно, что приток энергии в объем происходит не только за счет переноса энергии с потоком сплошной среды как «примеси», но и за счет работы поверхностных сил (в идеальной жидкости — за счет работы сил давления).

4.4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ В СТАЦИОНАРНОМ ПОТОКЕ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Будем рассматривать потенциальные объемные силы, т. е. $\vec{F} = -\rho\nabla\varphi$, тогда $F_i v_i = -\rho\left(\vec{v}\nabla\varphi\right) = -\operatorname{div}\rho\vec{v}\varphi + \varphi\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\right)$. Для стационарного потока $\operatorname{div}\rho\vec{v} = 0$, т. е. $\left(\vec{F}\cdot\vec{v}\right) = -\operatorname{div}\left(\rho\vec{v}\varphi\right)$. Тогда закон сохранения энергии (4.29) примет вид

$$\oiint\limits_{\Sigma} v_n \left[\rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) + p + \rho\varphi\right] dS = \int\limits_V \left(q + q^{**}\right) dV. \qquad (4.33)$$

Применим эту формулу к трубке тока с малой толщиной:

$$-S_1 v_1 \left[\rho_1\left(\frac{v_1{}^2}{2} + u_1\right) + p_1 + \rho_1\varphi_1\right] + S_2 v_2 \left[\rho_1\left(\frac{v_2{}^2}{2} + u_2\right) + p_2 + \rho_2\varphi_2\right] = Q. \quad (4.34)$$

Учитывая, что в тонкой трубке $dV = S(l)dl$ (где $S(l)$ — площадь поперечного сечения трубки тока), получим для объемных источников энергии Q

$$Q = \int\limits_{l_1}^{l_2} \left(q + q^{**}\right) S\left(l\right) dl. \qquad (4.35)$$

Примем во внимание закон сохранения потока массы для узкой трубки тока: $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2 = \rho v S$. Тогда из уравнения (4.34)

$$\left(\left(\frac{v_2^2}{2} + u_2\right) + \frac{p_2}{\rho_2} + \varphi_2\right) - \left(\left(\frac{v_1^2}{2} + u_1\right) + \frac{p_1}{\rho_1} + \varphi_1\right) = \frac{Q}{\rho v S}. \qquad (4.36)$$

Для адиабатического процесса $Q = 0$ и формула (4.36) принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi = \text{const}. \qquad (4.37)$$

Устремляя толщину трубки к нулю, получаем, что на линии тока для адиабатического процесса сохраняется величина (4.37).

Сравним выражение (4.37) с формулой Бернулли. Закон Бернулли утверждает, что на линии тока сохраняется величина

$$\frac{v^2}{2} + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho\left(p', L\right)} + \varphi = \text{const}\left(L\right), \qquad (4.38)$$

где $\int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp'}{\rho\left(p', L\right)} = P\left(p, L\right)$ — функция давления.

Следует подчеркнуть, что этот интеграл отличается от уравнения (4.37), соответствующего закону сохранения энергии. Сравнивая выражения (4.37) и (4.38), можно видеть, что при адиабатическом процессе, когда функция давления определяется через внутреннюю энергию и давление в виде

$$P(p, L) = u + p/\rho, \tag{4.39}$$

из закона сохранения потока энергии следует выражение для функции давления. Но еще раз подчеркнем, что формула Бернулли и закон сохранения потока энергии — это два разных интеграла движения сплошной среды.

4.5. ОДНОМЕРНОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

Одномерным называется такое течение газа, при котором скорость имеет единственную компоненту v_x, а все гидродинамические и термодинамические поля зависят от единственной координаты x. Для приближенных расчетов газовых потоков по трубам во многих случаях можно воспользоваться следующей упрощенной одномерной стационарной схемой.

Прежде всего запишем законы сохранения для тонких трубок. Пусть x — координата вдоль линии тока в центре этой трубки. Продифференцируем по x соответствующее равенство (4.7):

$$\frac{d}{dx}\left(\rho v S\right) = 0. \tag{4.40}$$

Поскольку вдоль линии тока справедлива формула Бернулли (3.42), то после ее дифференцирования по x получаем

$$v\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = 0. \tag{4.41}$$

Из закона сохранения потока энергии вдоль трубки тока

$$\left.\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi\right|_{x_0}^{x} = \frac{1}{\rho S v}\int\limits_{x_0}^{x} qS\left(l\right)dl$$

после дифференцирования по x имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi\right) = \frac{q + q^{**}}{\rho v}. \tag{4.42}$$

Добавляя сюда уравнение состояния $u = u(p, \rho)$, можно решать задачи о течении газа по тонким трубкам при заданных источниках тепла и потенциалах. Эти законы можно применять при решении задач о течении газа и жидкости по трубам переменного сечения, при расчете сопел и т. п.

Выясним, когда можно применять законы, сформулированные для тонких трубок тока, к изучению течения жидкости и газа по трубам конечного диаметра.

4.5.1. Одномерное течение сжимаемого газа по трубам конечной толщины

Пусть характерный размер трубы и масштаб изменения всех полей в продольном направлении равен $L_{\parallel}$, а характерный поперечный масштаб трубы — $L_{\perp}$ (это будет и поперечный масштаб всех полей) (рис. 9). Пусть $L_{\parallel} \gg L_{\perp}$. Из уравнения сохранения массы для стационарного течения следует

$$\operatorname{div} \rho\vec{v} = 0. \tag{4.43}$$

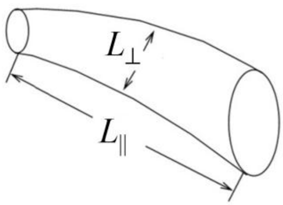

Рис. 9

Из этого уравнения нетрудно получить оценку:

$$\frac{\rho v_{\parallel}}{L_{\parallel}} \sim \frac{\rho v_{\perp}}{L_{\perp}}, \text{ т. е. } \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} = \frac{L_{\parallel}}{L_{\perp}} \gg 1. \tag{4.44}$$

Запишем уравнение Эйлера для стационарного течения:

$$\left(\vec{v}, \nabla\right)\vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{F}. \tag{4.45}$$

Пусть $\vec{F} = 0.$ Проекция уравнения на продольное направление:

$$v_{\parallel}\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial x_{\parallel}} + v_{\perp}\frac{\partial v_{\parallel}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{\parallel}}\frac{1}{\rho} = 0, \tag{4.46}$$

на поперечное направление:

$$v_{\parallel}\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{\parallel}} + v_{\perp}\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{\perp}}\frac{1}{\rho} = 0. \tag{4.47}$$

Покажем, что существует решение, которое можно представить в виде

$$p = p(x_{\parallel}) + p_1(x_{\parallel}, x_{\perp}), \text{ где } p_1 \ll p. \tag{4.48}$$

Подставим p в уравнение (4.47) и получим оценку $\dfrac{v_{\parallel}v_{\perp}}{L_{\parallel}} + \dfrac{v_{\perp}^2}{L_{\perp}} \sim \dfrac{p_1}{\rho L_{\perp}}.$

Эта оценка с учетом уравнения неразрывности $v_\parallel \sim v_\perp \dfrac{L_\parallel}{L_\perp}$ примет вид $\dfrac{p_1}{\rho L_\perp} \sim \dfrac{v_\perp^2}{L_\perp}$, т. е. $p_1 \sim \rho v_\perp^2$.

Подставим в уравнение (4.46) оценочное значение давления: $\dfrac{v_\parallel^2}{L_\parallel} + v_\perp \dfrac{v_\parallel}{L_\perp} + \dfrac{p}{\rho L_\parallel} = 0$, т. е. $p \sim \rho v_\parallel^2$. Поскольку $v_\perp \ll v_\parallel$, то $p_1 \ll p$, $p_1/p \sim (L_\perp/L_\parallel)^2$. Значит, с точностью до малых величин порядка $(L_\perp/L_\parallel)^2$ можно считать, что p зависит только от продольной координаты x. Но если p зависит только от x, т. е. сила зависит только от x, то можно считать, что $v_\parallel$ зависит только от x с точностью до малых величин порядка $(L_\perp/L_\parallel)^2$. Во всяком случае, такое решение существует. Получается, что по сечению трубы v и давление p постоянны. Значит, из закона сохранения массы следует, что и ρ постоянно. То есть для трубы конечной толщины применимо уравнение сохранения потока массы, полученное для тонкой трубки,

$$\frac{d(\rho v S)}{dx} = 0, \tag{4.49}$$

а также на любой линии тока (а они все одинаковы) справедливо соотношение, вытекающее из закона Бернулли и закона сохранения энергии для одномерного движения:

$$v\frac{dv}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} + \frac{d\varphi}{dx} = 0, \tag{4.50}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho} + \varphi\right) = q. \tag{4.51}$$

Чтобы система была замкнута, необходимо включить сюда еще уравнение состояния в виде, соответствующем, например, двухпараметрическим средам, к которым относится идеальная жидкость или газ:

$$u = u(p, \rho). \tag{4.52}$$

Задача об истечении газа из сосуда. Рассмотрим сосуд, в котором поддерживается газ плотностью ρ_0 и давлением p_0. Истечение газа происходит по трубке (соплу) переменного сечения $S(x)$ (рис. 10). Пусть $S(x)$ монотонно убывает. Требуется найти скорость истечения

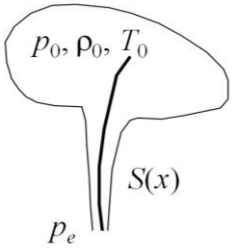

Рис. 10

газа из трубки и распределение параметров газа (давления, плотности, скорости) по ее длине.

Выберем линию тока, идущую через сопло из глубины сосуда, где $p = p_0$, $v = 0$. Применим систему уравнений для течения жидкости вдоль линии тока. Поскольку внешние массовые силы и источники тепла отсутствуют ($\varphi = 0$, $q = 0$), то законы течения газа по тонкой трубке примут следующий вид:

закон сохранения потока импульса:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2} + \int\limits_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho}\right) = 0; \tag{4.53}$$

закон сохранения потока энергии:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{p}{\rho}\right) = 0. \tag{4.54}$$

Считаем, что газ совершенный, тогда уравнение состояния имеет вид

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT. \tag{4.55}$$

Внутренняя энергия может быть описана с помощью следующего выражения:

$$u = \frac{c_V}{\mu} T = \frac{c_V}{R} \frac{p}{\rho}. \tag{4.56}$$

Эти уравнения справедливы на линии тока.

Начиная с некоторого x на выбранной линии тока внутри трубки тока течение газа можно считать одномерным и добавить закон сохранения потока массы в виде

$$d/dx(\rho v S(x)) = 0. \tag{4.57}$$

Чтобы решить задачу, надо совместно решать систему (4.53)—(4.57). Исключая v^2 из уравнений (4.53) и (4.54), с учетом уравнения состояния получаем уравнение адиабаты для совершенного газа. При постоянной удельной теплоемкости $c_V = \text{const}$ имеем

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}+\left(\frac{c_V}{R}+1\right)\frac{p}{\rho}\right)=0, \tag{4.58}$$

$$-\frac{dp}{\rho}+\left(\frac{c_V}{R}+1\right)\frac{dp}{\rho}-\frac{c_p}{R}\frac{p}{\rho^2}d\rho=0. \tag{4.59}$$

Отсюда $\dfrac{c_V dp}{p}=\dfrac{c_p}{\rho}d\rho$; $p=p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, где $\gamma=\dfrac{c_p}{c_V}$. Подставим полученную связь в формулу (4.53) или (4.54) и получим связь скорости движения газа с давлением:

$$\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho_0\left(p/p_0\right)^{1/\gamma}}=\text{const}. \tag{4.60}$$

Интегрирование этого выражения дает

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)}=\text{const}. \tag{4.61}$$

Константу в этом выражении находим из условия, что в глубине сосуда на линии тока $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $v = 0$, т. е.

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)}=\frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}. \tag{4.62}$$

Подставив сюда ρ как функцию p, получим зависимость скорости течения газа от давления:

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]}. \tag{4.63}$$

Заметим, что в силу стационарности течения p_0, ρ_0 в формуле (4.63) и в уравнении адиабаты одни и те же.

Чтобы вычислить значение скорости на выходе из сопла, приравняем значение p к давлению на выходе, p_e, и при произвольном $p_e < p < p_0$ получим значения скорости вдоль трубки. Казалось бы, задача почти решена. Надо только найти распределение всех величин по трубке при заданной зависимости $S(x)$ — зависимости сечения сопла от x. Для этого проинтегрируем уравнение (4.57):

$$\rho v S(x) = Q. \tag{4.64}$$

Здесь постоянная Q определяется граничными условиями, $S(x)$ — заданная убывающая функция по условию задачи. В таком случае

$\rho v = Q/S(x)$ — растущая функция. Найдем зависимость ρv от p; v определяется из формулы (4.63); а ρ — уравнением адиабаты: $\rho = \rho_0(p / p_0)^{1/\gamma}$. Тогда

$$\rho v = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma\, p_0}{\rho_0(\gamma - 1)} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \right]}. \tag{4.65}$$

Построим график функции $\rho v(p)/(\rho_0 v_0)$, где $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\gamma\, p_0}{\rho_0(\gamma - 1)}}$ (рис. 11). Обсудим возможность реализации этой зависимости. Давление вдоль трубки должно монотонно падать от p_0 до p_e (рис. 12).

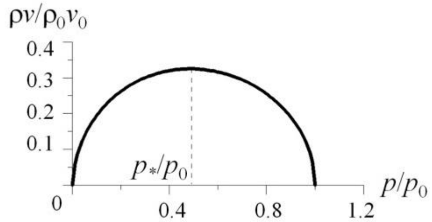

Рис. 11

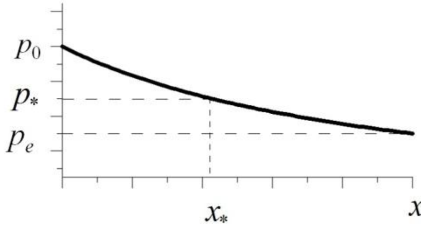

Рис. 12

Но тогда $\rho v(x)$ имеет немонотонный характер (рис. 13).

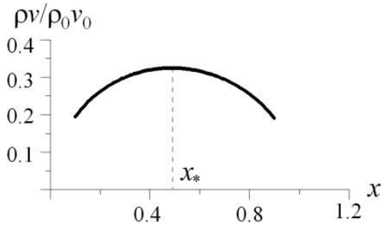

Рис. 13

Значит, при монотонной зависимости $S(x)$ условие $\rho v S(x) = Q =$ $=$ const не может быть выполнено, если $p_e < p_*$, где p_* — точка максимума функции $\rho v(p)$. Такое давление называется критическим.

Определим эту точку максимума:

$$d/dp[\rho v(p)] = 0. \tag{4.66}$$

Обозначим $y = p/p_0$. Надо найти максимум функции:

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{\gamma} y_*^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma} y_*^{\frac{1}{\gamma}} = 0, \qquad (4.67)$$

где $f(y) = y^{2/\gamma}\,(1 - y^{(\gamma-1)/\gamma})$. Отсюда для координаты получаем

$$y_*^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{2}{\gamma+1},$$

при этом давление и плотность равны

$$p_* = p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}. \qquad (4.68)$$

Скорость потока в точке максимума ρv найдем из уравнения Бернулли:

$$\frac{v_*^2}{2} + \frac{\gamma p_*}{(\gamma-1)\rho_*} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}. \qquad (4.69)$$

Подставив p_* и ρ_*, из формулы (4.68) получим

$$v_*^2 = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}\left(1 - \frac{2}{\gamma+1}\right) = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(1+\gamma)}. \qquad (4.70)$$

При $p = p_*$, $\rho = \rho_*$ скорость звука принимает значение

$$c_*^2 = \frac{\gamma p_*}{\rho_*} = v_*^2, \qquad (4.71)$$

т. е. в критической точке скорость потока равна скорости звука.

Заметим, что параметры потока в критической точке p_*, ρ_*, c_* однозначно связаны с параметрами газа на линии тока в точке, где газ покоится: p_0, ρ_0, c_0 — параметры торможения. Действительно,

$$\sqrt{\frac{\gamma p_*}{\rho_*}} = c_* = c_0\sqrt{\frac{2}{1+\gamma}}. \qquad (4.72)$$

Итак, соблюдение условия $\rho v S(x) = \mathrm{const}$ возможно при монотонной зависимости $S(x)$, только если давление на выходе трубки $p_e \ge p_*$ (критическое давление). Когда $p_e = p_*$, скорость газа в выходном сечении равна скорости звука c_*. То есть если снижается выходное давление от значения p_0 до p_*, то скорость газа в выходном сечении трубки монотонно растет от 0 до c_*.

Что произойдет, если мы будем дальше понижать давление на выходе из трубки? Газ выходит из трубки со скоростью звука. Уменьшим давление, т. е. создадим возмущение давления. Чтобы газ

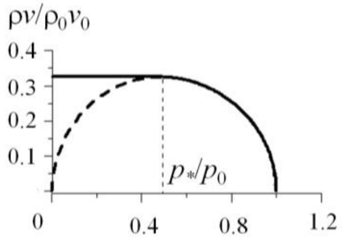

Рис. 14

внутри трубки «узнал», что давление снаружи понизилось, необходимо, чтобы возмущения давления распространились вверх по потоку. Но они распространяются со скоростью звука c_*, т. е. возмущения не смогут подняться вверх по потоку, и газ «не узнает», что давление снаружи изменилось. На выходе внутри трубки давление так и останется p_*, скорость $v = c_*$, а плотность ρ_*. Зависимость плотности потока газа от давления вне сосуда p_e для этих условий показана на рис. 14.

4.5.2. Сопло Лаваля

Как добиться того, чтобы газ в сосуде двигался со сверхзвуковой скоростью и на выходе из сосуда имел сверхзвуковую скорость? Из формулы (4.63) для $v(p)$ ясно, что для выполнения этого условия давление p_e должно быть меньше p_*. Однако выполнение одного этого условия оказывается недостаточным, необходимо также, чтобы величина $\rho v S(x)$ вдоль трубы сохранялась. Поскольку зависимость $\rho v(p)$ является немонотонной, этого можно добиться, только если зависимость $S(x)$ также будет немонотонной. Такое сопло с немонотонной зависимостью $S(x)$ называют *соплом Лаваля*. В нем действительно удается получить сверхзвуковой поток.

Рассмотрим задачу о течении сжимаемого газа по трубе переменного сечения более подробно. Итак, пусть задано $S(x)$. Внешние силы и источники тепла отсутствуют. Уравнения движения жидкости по трубе (на трубке тока) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Big(\rho v S\left(x\right)\Big) = 0, \\ v\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{dp}{dx}\dfrac{1}{\rho} = 0, \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v^2}{2} + u + \dfrac{p}{\rho}\right) = 0, \\ p = p(\rho, \bar{S}). \end{cases} \tag{4.73}$$

Здесь x — координата вдоль трубы в направлении потока, $\bar{S}$ — энтропия.

Из предпоследнего уравнения системы (4.73) с использованием основного термодинамического тождества

$$\frac{du}{dx} = T\frac{d\overline{S}}{dx} + \frac{p}{\rho^2}\frac{dp}{dx} \tag{4.74}$$

получим

$$v\frac{dv}{dx} + T\frac{d\overline{S}}{dx} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = 0. \tag{4.75}$$

Отсюда с учетом второго уравнения системы (4.73) получим, что $d\overline{S}/dx = 0.$ Но тогда

$$\frac{dp}{dx} = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\overline{S}}\frac{d\rho}{dx} + \left.\frac{\partial p}{\partial \overline{S}}\right|_{\rho}\frac{d\overline{S}}{dx}, \tag{4.76}$$

т. е. $\frac{dp}{dx} = c^2\frac{d\rho}{dx}$. Тогда первое и второе уравнения системы (4.73) примут следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d\rho}{dx}\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{dv}{dx}\dfrac{1}{v} + \dfrac{dS}{dx}\dfrac{1}{S} = 0, \\ v\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{d\rho}{dx} = 0. \end{cases} \tag{4.77}$$

Исключив отсюда $d\rho/dx$, получим

$$\frac{dS}{dx}\frac{1}{S} = \frac{v^2 - c^2}{c^2 v}\frac{dv}{dx}. \tag{4.78}$$

Определим, при каких условиях поток ускоряется, т. е. $dv/dx > 0$. При $v < c$ (в дозвуковом потоке) $dv/dx > 0$, когда $dS/dx < 0$, т. е. сопло должно сужаться. При $v > c$ (сверхзвуковой поток) $\frac{dv}{dx} > 0$, когда $dS/dx > 0$, т. е. сопло должно расширяться.

Какой физический смысл имеют эти условия?

Из уравнения Эйлера следует

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{\rho v}\frac{dp}{dx}, \tag{4.79}$$

т. е. для ускорения потока ($dv/dx > 0$) нужен отрицательный градиент давления $dp/dx < 0$. В очень медленных потоках, когда $v \ll c$ и газ можно считать несжимаемым, скорость газа при уменьшении толщины трубки увеличивается (это следует из закона сохранения массы), а давление падает (по формуле Бернулли). При большой скорости потока (v одного порядка с c) надо учитывать сжимаемость газа. Когда газ с большой скоростью поступает в узкую трубку, происходит адиабатическое сжатие и давление растет. Возникает конкуренция эффектов гидродинамического понижения давления и адиабатического повышения. При $v = c$ эти эффекты компенсируют друг друга. При $v > c$ более сильным становится эффект адиабатического сжатия, поэтому при сужении трубки сверхзвуковой поток замедляется. Чтобы он ускорился, надо расширить трубку, тогда из-за понижения давления при адиабатическом расширении поток будет ускоряться.

Из этих рассуждений ясно, что для того, чтобы получить из дозвукового потока сверхзвуковой, надо, чтобы газ двигался по трубке, которая сначала сужается и разгоняет его до скорости звука, а затем расширяется и разгоняет его дальше. При этом все величины (сечение трубки, давление и т. п.) должны быть согласованы. Тогда течение газа будет стационарным.

Итак, качественно мы знаем, как должно выглядеть сопло Лаваля. Выясним, как можно рассчитать такое сопло количественно. Пусть имеется резервуар, в котором поддерживается давление p_0, плотность ρ_0 при температуре T_0, давление на выходе p_e. Из сосуда выходит трубка, площадь сечения которой $S(x)$. Рассмотрим, как можно рассчитать профиль сечения трубки $S(x)$, чтобы поток на выходе имел заданную сверхзвуковую скорость. Удобной характеристикой потока газа является число Маха:

$$\mathrm{M} = v/c. \tag{4.80}$$

В дозвуковом потоке $\mathrm{M} < 1$; в сверхзвуковом $\mathrm{M} > 1$. В теории сопла Лаваля принято выражать все величины как функции числа Маха. Эти формулы называются изэнтропическими. Получим их для совершенного газа. Запишем формулу Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}. \tag{4.81}$$

С учетом выражения $c^2 = \gamma p/\rho$ имеем

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1} = \frac{c_0^2}{\gamma-1}. \tag{4.82}$$

Но $v = \mathrm{M}c$, отсюда получаем

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{M}^2}{2}(\gamma-1)}}; \quad v = \frac{c_0\mathrm{M}}{\sqrt{1+\frac{\mathrm{M}^2}{2}(\gamma-1)}}. \tag{4.83}$$

Воспользуемся тем фактом, что

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho}. \tag{4.84}$$

Тогда можно получить следующее выражение:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{\left(1+\frac{\mathrm{M}^2}{2}(\gamma-1)\right)}. \tag{4.85}$$

С учетом уравнения адиабаты $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ имеем

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1+\frac{\mathrm{M}^2(\gamma-1)}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}}, \quad p = \frac{p_0}{\left(1+\frac{\mathrm{M}^2(\gamma-1)}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}. \tag{4.86}$$

Плотность потока газа будет выражаться следующим образом:

$$\rho v = \frac{\rho_0 c_0 \mathrm{M}}{\left(1+\frac{\mathrm{M}^2(\gamma-1)}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}. \tag{4.87}$$

Построим получившиеся зависимости (рис. 15). Величины c_*, v_*, ρ_*, p_* находятся из изэнтропических формул при M = 1.

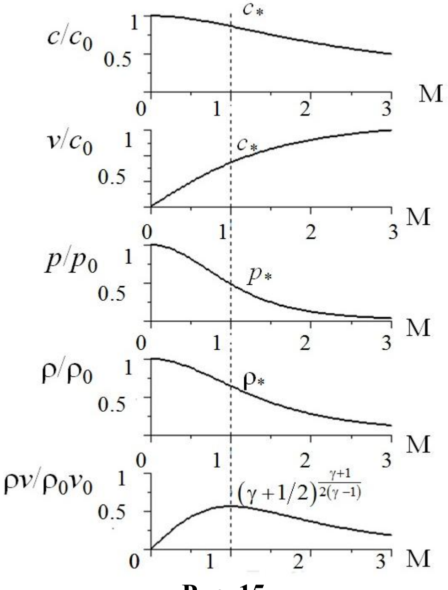

Рис. 15

Полученные зависимости представляют собой параметрические формулы, где параметром является число Маха M.

Чтобы выполнялось условие $\rho v S = Q$, надо, чтобы зависимость $S(\mathrm{M})$ была следующей:

$$S(\mathrm{M}) = \frac{Q}{\rho_0 c_0 \mathrm{M}} \left(1 + \frac{\mathrm{M}^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \tag{4.88}$$

Эта зависимость немонотонная. Она имеет минимум при M = 1 (рис. 16).

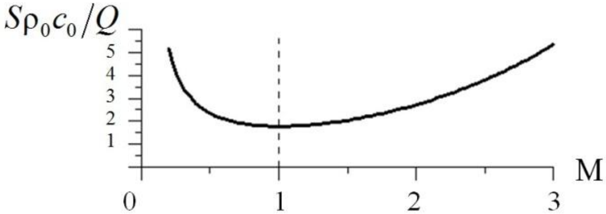

Рис. 16

Минимальное сечение сопла Лаваля называется критическим и определяется следующей формулой:

$$S(1) = S_* = \frac{Q}{\rho_0 c_0} \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \tag{4.89}$$

Отсюда можно получить зависимость произвольного сечения от M:

$$S(\mathrm{M}) = \frac{S_*}{\mathrm{M}} \left(\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\mathrm{M}^2(\gamma-1)}{2}\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}. \tag{4.90}$$

Теперь ясно, как получить поток газа с заданными свойствами. Необходимо создать заданную зависимость $\mathrm{M}(x)$ и значение M_e на выходе. Тогда по формуле (4.90) для $S(\mathrm{M})$ можно найти $S(x)$, а также все характеристики потока — p, v, c, ρ — как функции x. Все они являются согласованными. Если S_*/S_e задано, то задано и p_*/p_e, а поскольку p_* однозначно связано с p_0, то, значит, задано и отношение p_e/p_0. Такой режим работы сопла называется расчетным сверхзвуковым.

ЗАДАЧИ к разделу 4

Задача 1

Круглая струя жидкости площадью сечения S_0 падает на твердую стенку под углом α. Скорость жидкости в струе равна v_0, плотность жидкости равна ρ_0. Найти силу, действующую на единицу ширины стенки.

Решение. Для решения задачи выберем контрольную поверхность, охватывающую струю вместе с ее боковой поверхностью $\Sigma_б$ и поверхностью соприкосновения струи со стенкой $\Sigma_{ст}$. Пусть площадь сечения растекающейся струи на большом расстоянии от места соударения струи со стенкой равна Σ_1. Сила, с которой струя действует на стенку, равна

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma_{ст}} (p - p_0)\vec{n}dS.$$

Используем метод контрольных поверхностей; учтем при этом, что на боковой поверхности струи нормальная компонента скорости равна нулю:

$$\iint_{S_0} (p_0 + \rho_0 v_0^2)\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_1} (p_0 + \rho_0 v^2)\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_б} p_0\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_{ст}} p\vec{n}dS = 0.$$

Здесь p_0 — атмосферное давление, v — скорость растекающейся по стенке струи на большом расстоянии от места соударения струи со стенкой. Учтем, что

$$\iint_{S_0+\Sigma_1+\Sigma_б+\Sigma_{ст}} p_0\vec{n}dS = 0.$$

Тогда для силы, действующей со стороны струи на стенку, получим

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma_{ст}} (p - p_0)\vec{n}dS = -\left(\iint_{S_0} \rho_0 v_0^2 \vec{n}dS + \iint_{\Sigma_1} \rho_0 v^2 \vec{n}dS \right).$$

Проекция силы давления на направление, касательное к стенке, равна нулю. Нормальная проекция силы F:

$$F_n = -\iint_{S_0} \rho_0 v_0^2 \vec{n}dS = \rho_0 v_0^2 S_0 \sin\alpha.$$

Задача 2

В вертикальной трубе реализован стационарный поток идеального невязкого газа с постоянной удельной теплоемкостью. Определить, при какой зависимости площади поперечного сечения трубы от вертикальной координаты давление газа вдоль трубы будет постоянным.

Решение. Для решения задачи используем законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\rho v S) = 0, \\ v\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dp}{dz}\dfrac{1}{\rho} = g, \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{v^2}{2} + p + u\right)\rho v S = \dfrac{d(\rho g z v S)}{dz}. \end{cases}$$

Поскольку удельная теплоемкость газа постоянна,

$$u = c_V T, \quad \frac{p}{\rho} = RT \quad \Rightarrow \quad u = \frac{c_V p}{R\rho} = \frac{c_V}{c_P - c_V}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}.$$

Закон сохранения энергии в этом случае примет вид

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = g \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = g.$$

Вычитая из получившегося выражения $v\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dp}{dz}\dfrac{1}{\rho} = g$, получаем

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 0.$$

Отсюда следует, что ρ = const, поскольку по условию задачи p = const, т. е.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{v^2}{2} - gz\right) = 0, \\ \dfrac{d}{dz}(vS) = 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v^2 = v_0^2 + 2gz, \\ vS = v_0 S_0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad S = S_0\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}.$$

Здесь S_0, v_0 — значения площади сечения и скорости при $z = 0$.

5. ПОВЕРХНОСТИ РАЗРЫВА

До сих пор при введении основных понятий и при определении систем уравнений, связанных с моделями сплошной среды, предполагалось, что сами уравнения и их решения непрерывны вместе со своими производными. Однако эти предположения являются довольно сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных практических задач. Действительно, очень часто приходится рассматривать сплошные среды с резко различающимися свойствами. Наиболее типичной является граница раздела жидкость — твердое тело. В жидкости могут существовать различные типы движений, однако на границе с твердым телом нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в ноль — жидкость не протекает сквозь твердое тело. Кроме того, в идеальных жидкостях и газах возможно существование таких движений, при которых физические величины терпят разрыв внутри одного вещества. Уравнения идеальной гидродинамики допускают такие решения. Скачки гидродинамических величин наблюдаются на некоторых поверхностях, которые называются поверхностями разрыва. Эти поверхности не привязаны к определенным частицам жидкости или газа. Они движутся с некоторыми скоростями, которые называются скоростями движения поверхности разрыва. Частицы могут, вообще говоря, переходить с одной стороны поверхности разрыва на другую. Строго говоря, поверхности разрыва имеют конечную, но очень малую толщину по сравнению со всеми характерными масштабами задачи, но эта толщина определяется уже в рамках так называемой вязкой задачи. Для описания поверхностей разрыва на них формулируют граничные условия: соотношения, связывающие гидродинамические величины по разные стороны от поверхности разрыва, где движения предполагаются непрерывными.

5.1. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ НА РАЗРЫВЕ

Получим выражения для этих граничных условий из уравнений гидродинамики. Пусть S — поверхность разрыва. Выберем на поверхности S точку M и предположим, что скорость точки M в момент t была равна $\vec{u}$. Перейдем в инерциальную систему отсчета, которая движется со скоростью $\vec{u}$. Выберем индивидуальный объем ΔV в виде параллелепипеда со сторонами Δh и Δl (рис. 17), который в момент времени t содержит внутри себя поверхность разрыва. Найдем величину $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta S} \dfrac{d}{dt} \int\limits_V A dV$, где $\Delta S = \Delta l^2$.

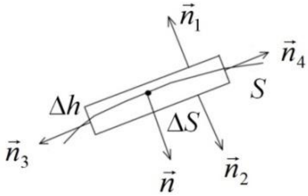

Рис. 17

Воспользуемся первой вспомогательной формулой в виде

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V A dV = \int\limits_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \oiint\limits_\Sigma A(\vec{v}\vec{n}) dS, \tag{5.1}$$

где A — произвольная скалярная величина. Применим эту формулу к малому индивидуальному объему ΔV, содержащему внутри себя поверхность разрыва, тогда получаем для первого слагаемого в правой части приближенное соотношение

$$\int\limits_{\Delta V} \frac{\partial A}{\partial t} dV \cong \Delta h \Delta S \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{5.2}$$

а для второго слагаемого

$$\oiint\limits_\Sigma A(\vec{v}\vec{n}) dS = \\ = \left(A_3\left(\vec{v}_3\vec{n}_3\right) + A_4\left(\vec{v}_4\vec{n}_4\right)\right)\Delta h \sqrt{\Delta S} + \left(A_1\left(\vec{v}_1\vec{n}_1\right) + A_2\left(\vec{v}_2\vec{n}_2\right)\right)\Delta S. \tag{5.3}$$

Далее примем во внимание, что

$$\left(A_3 v_{n3} + A_4 v_{n4}\right) \cong \frac{\partial}{\partial S}\left(A v\right)\sqrt{\Delta S}\ . \tag{5.4}$$

Учтем, что $\left(\vec{v}_1\vec{n}_1\right) = -\left(\vec{v}_1\vec{n}\right) = v_{1n}$, поскольку $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, а $\left(\vec{v}_2\vec{n}_2\right) = \left(\vec{v}_2\vec{n}\right) = v_{2n}$, поскольку $\vec{n}_2 = \vec{n}$. Тогда получим *третью вспомогательную формулу*, соответствующую случаю, когда интегрирование в $\lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{1}{\Delta S} \dfrac{d}{dt} \int\limits_V A dV$ происходит по индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V A dV = A_2 v_{2n} - A_1 v_{1n}. \qquad (5.5)$$

Применим эту формулу к законам динамики сплошной среды, записанным в интегральной форме, для того чтобы получить соотношения между физическими характеристиками сплошной среды на поверхностях разрыва.

1) *Непрерывность потока массы*. Запишем закон сохранения массы для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0. \qquad (5.6)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Используя третью вспомогательную формулу в виде (5.5), сразу получим

$$\rho_2 v_{n2} = \rho_1 v_{n1}. \qquad (5.7)$$

Это выражение представляет собой условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока массы.

2) *Непрерывность потока импульса*. Запишем закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i dV = \oiint_\Sigma \sigma_{ij} n_j dS + \int F_i dV. \qquad (5.8)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Применим третью вспомогательную формулу (5.5). Тогда левая часть дает

$$\rho_2 v_{2i} v_{n2} = \rho_1 v_{1i} v_{n1}. \qquad (5.9)$$

Вычислим теперь величину

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oiint_\Sigma \sigma_{ij} n_j dS,$$

где Σ — поверхность, содержащая внутри себя поверхность разрыва. Получим

$$\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta h\to 0}} \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij2} n_{j2} + \sigma_{ij1} n_{j1} = \sigma_{ij2} n_j - \sigma_{ij1} n_j. \qquad (5.10)$$

Поскольку $n_{2j} = n_j$, $n_{1j} = -n_j$ (нормаль к Σ со стороны 1 противоположна нормали к поверхности разрыва). Примем во внимание, что

$$\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta h\to 0}} \int_V F_i dV = 0. \qquad (5.11)$$

Окончательно граничные условия, следующие из закона сохранения импульса, примут вид

$$\left(\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right)\Big|_2 = \left(\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right)\Big|_1. \qquad (5.12)$$

Примем во внимание, что $v_n = v_j n_j$. Тогда граничное условие для импульса (5.12) будет иметь следующий вид:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j\right) n_j\Big|_1 = \left(\sigma_{ij} - \rho v_i v_j\right) n_j\Big|_2. \qquad (5.13)$$

Используя понятие тензора потока импульса, перепишем это выражение в виде

$$\Pi_{ij} n_j\Big|_1 = \Pi_{ij} n_j\Big|_2, \qquad (5.14)$$

где Π_{ij} — тензор потока импульса.

Выберем систему координат так, что $\vec{n} = (1, 0, 0)$, т. е. $n_1 = 1$; $n_2 = 0$; $n_3 = 0$. Тогда выражение для граничного условия (5.14) примет вид

$$\left(\sigma_{ix} - \rho v_i v_x\right)\Big|_1 = \left(\sigma_{ix} - \rho v_i v_x\right)\Big|_2. \qquad (5.15)$$

Индекс x (или индекс 1) обозначает нормальную компоненту.

В идеальной жидкости или газе тензор поверхностных напряжений шаровой, т. е. $\sigma_{i1} = -p\delta_{i1}$. С учетом этого граничные условия (5.15) можно записать в виде двух соотношений, в первое из которых входит только нормальная компонента скорости:

$$\left[p + \rho v_1^2\right]_1 = \left[p + \rho v_1^2\right]_2, \text{ или } \left[p + \rho v_n^2\right]_1 = \left[p + \rho v_n^2\right]_2, \qquad (5.16)$$

где $v_1 \equiv v_n$ — нормальная компонента скорости, а во второе — тангенциальные компоненты:

$$\begin{cases} \left[\rho v_1 v_2\right]_1 = \left[\rho_1 v_2\right]_2, \\ \left[\rho v_1 v_3\right]_1 = \left[\rho v_1 v_3\right]_2, \end{cases} \text{ или } \left[\rho v_n \vec{v}_\tau\right]_1 = \left[\rho v_n \vec{v}_\tau\right]_2, \qquad (5.17)$$

где $\vec{v}_\tau = (v_2, v_3)$ — тангенциальная компонента скорости.

3) *Непрерывность потока энергии*. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV = \int\limits_V \rho F_i v_i dV + \oiint\limits_\Sigma \sigma_{ij} v_i n_j dS + \int\limits_V q^{(e)} dV + \oiint\limits_\Sigma Q_n^{(e)} dS. \quad (5.18)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Тогда согласно третьей вспомогательной формуле

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta S}\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV = \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)v_n\Bigg|_1^2 = \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)v_j n_j\Bigg|_1^2, \quad (5.19)$$

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oiint\limits_\Sigma \sigma_{ij} v_i n_j dS = \sigma_{ij} v_i nj\Bigg|_1^2, \quad (5.20)$$

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta S}\oiint\limits_\Sigma Q_n^{(e)} dS Q_n^{(e)} = Q_j^{(e)} n_j\Big|_1^2. \quad (5.21)$$

Таким образом, закон сохранения потока энергии принимает вид

$$\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)v_j - \sigma_{ij} v_i - Q_j^{(e)}\right] n_j\Bigg|_1^2 = 0. \quad (5.22)$$

Если опять выбрать систему координат так, что $\vec{n} = (1, 0, 0)$, то выражение для закона сохранения потока энергии примет вид

$$\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)v_x - \sigma_{ix} v_i - Q_x^{(e)}\right]\Bigg|_1^2 = 0. \quad (5.23)$$

Предположим, что по обе стороны от поверхности разрыва находится идеальная жидкость или идеальный газ, тогда $\sigma_{ix} = -p\delta_{ix}$. Будем также предполагать, что к поверхности разрыва тепло не подводится ($Q_x^{(e)} = 0$), тогда получим условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока энергии в виде

$$\left[v_n\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+p\right)\right]_1 = \left[v_n\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+p\right)\right]_2. \quad (5.24)$$

Здесь $v_n \equiv v_1$ — нормальная скорость к поверхности разрыва.

Таким образом, на разрыве должны выполняться следующие законы сохранения:

закон сохранения потока массы:

$$\rho v_n\Big|_1^2 = 0;$$

закон сохранения потока импульса:

$$\left[\rho v_n^2 + p\right]\Big|_1^2 = 0,\ \ \rho v_n v_{\tau 1}\Big|_1^2 = 0,\ \ \rho v_n v_{\tau 2}\Big|_1^2 = 0;$$

закон сохранения потока энергии:

$$v_n\left(\rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) + p\right)\Bigg|_1^2 = 0.$$

Определим граничные условия на разрыве для энтропии. Запишем второе начало термодинамики для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\bar{S}dV = \int \frac{q^{(e)} + q'}{T}dV. \tag{5.25}$$

Заметим, что внутри разрыва может нарушаться предположение об идеальности газа, т. е. равенстве нулю нескомпенсированного тепла: $q' \neq 0$. Но тогда будет возникать скачок энтропии при переходе через разрыв. Как мы скоро увидим, это действительно может иметь место на поверхности разрыва.

5.2. ТИПЫ РАЗРЫВОВ

1) *Тангенциальный разрыв*. Пусть частицы не пересекают поверхность разрыва, т. е. нормальная скорость $v_{n1} = 0$ и $v_{n2} = 0$; при этом возможно $\rho_1 \neq \rho_2$. Тогда из непрерывности потока импульса следует, что $p_1 = p_2$, а тангенциальные компоненты скорости $v_{\tau 1,2}$ произвольны и могут терпеть произвольные разрывы. Такой разрыв называется *тангенциальным*.

2) *Ударные волны.* Пусть $v_n \neq 0$. Тогда закон сохранения потока массы дает $\rho v_n\Big|_1^2 = 0.$ Из закона сохранения потока импульса следует, что

$$\rho v_n^2 + p\Big|_1^2 = 0, \tag{5.26}$$

а обе тангенциальные компоненты скорости непрерывны:

$$v_{\tau 1}\Big|_1^2 = 0;\quad v_{\tau 2}\Big|_1^2 = 0. \tag{5.27}$$

Из непрерывности потока энергии

$$\rho v_n \left[\left(\frac{v_n^2 + v_{\tau 1}^2 + v_{\tau 2}^2}{2} \right) + u \right] + \frac{p}{\rho} \bigg|_1^2 = 0 \tag{5.28}$$

следует, что

$$u + \frac{v_n^2}{2} + \frac{p}{\rho} \bigg|_1^2 = 0. \tag{5.29}$$

Такие разрывы называются *ударными волнами*.

Заметим, что условия на поверхности разрыва записаны в неподвижной для разрыва системе отсчета. Если перейти в систему отсчета, в которой поверхность разрыва движется с некоторой скоростью w, то мы должны будем заменить во всех граничных условиях v_n на $\bar{v}_n - w$, где $\bar{v}_n$ — нормальная скорость разрыва в новой системе отсчета.

5.3. УДАРНАЯ АДИАБАТА (АДИАБАТА ГЮГОНИО)

Будем рассматривать разрывы типа ударных волн. Поскольку в условия на разрыве не входит никакой скорости, кроме v_n, то ее будем обозначать v, тогда получим условия на разрыве в виде

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \tag{5.30}$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2, \tag{5.31}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + u_2 + \frac{p_2}{\rho_2}. \tag{5.32}$$

Уравнения (5.30)—(5.32), связывающие между собой параметры сжимаемого газа (жидкости) до разрыва и после него, представляют собой систему уравнений относительно шести величин. Зная термодинамические параметры перед разрывом (например, плотность, давление) и задавая какую-нибудь величину, характеризующую ударную волну, например давлением за фронтом волны p_2, можно вычислить все остальные величины.

Введем обозначения $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ — плотность потока массы и $V_{1,2} = 1/\rho_{1,2}$ — удельные объемы. Тогда из системы (5.30)—(5.32) следует

$$\frac{j^2}{\rho_1} + p_1 = \frac{j^2}{\rho_2} + p_2 \quad \to \quad j^2 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1, \tag{5.33}$$

$$\frac{j^2}{2\rho_1^2}+\frac{p_1}{\rho_1}+u_1=\frac{j^2}{2\rho_2^2}+\frac{p_2}{\rho_2}+u_2 \;\to\; j^2\left(V_1^2-V_2^2\right)=2\left[p_2V_2-p_1V_1+u_2-u_1\right]. \tag{5.34}$$

Откуда с учетом введенного выше обозначения плотности потока массы имеем

$$\left(V_1+V_2\right)\left(p_2-p_1\right)=2\left(p_2V_2-p_1V_1+u_2-u_1\right), \tag{5.35}$$

$$p_2V_2+p_2V_1-p_1V_1-p_1V_2=2p_2V_2-2p_1V_1+2\left(u_2-u_1\right), \tag{5.36}$$

$$p_2\left(V_1-V_2\right)+p_1\left(V_1-V_2\right)=2\left(u_2-u_1\right). \tag{5.37}$$

Или

$$u_2-u_1=\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(V_1-V_2\right). \tag{5.38}$$

Таким образом, получено соотношение, связывающее внутреннюю энергию газа (жидкости) с соответствующими значениями давлений и объемов до и после разрыва, откуда нетрудно получить связь между значениями давлений и объемов на ударной волне. Действительно, поскольку рассматривается идеальная жидкость или газ, то внутренняя энергия определяется двумя параметрами, например давлением и удельным объемом, т. е. $u = (p, V)$. Таким образом, получается двухпараметрическое семейство кривых:

$$u\left(p_2,V_2\right)-u\left(p_1,V_1\right)=\frac{1}{2}\left(p_1+p_2\right)\left(V_1-V_2\right), \tag{5.39}$$

которые называются *ударными адиабатами*, или *адиабатами Гюгонио*.

Соотношение (5.39) действительно соответствует адиабатам, поскольку не происходит передачи тепла ($q^{(e)} = 0$) при переходе газа (жидкости) из состояния 1 в состояние 2. Но эти кривые отличаются от изоэнтроп, которые описывают состояние газа при непрерывном движении (адиабаты Пуассона). Действительно, если задано p_1, V_1, то определяется кривая (p, V), проходящая через эту точку, согласно соотношению (5.39):

$$u\left(p,V\right)-u\left(p_1,V_1\right)=\frac{1}{2}\left(p+p_1\right)\left(V_1-V\right). \tag{5.40}$$

Кривая (5.40) и кривая, описываемая соотношением

$$u\left(p,V\right)-u\left(p_2,V_2\right)=\frac{1}{2}\left(p+p_2\right)\left(V_2-V\right), \tag{5.41}$$

различны, но в силу равенства (5.39) пересекаются в двух точках: (p_1, V_1) и (p_2, V_2).

5.4. СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ РАЗРЫВА

Скорость движения разрыва зависит от выбранной системы отсчета. Выберем такую систему отсчета, в которой газ до прохождения ударной волны покоится, т. е. $\bar{v}_1 = 0$. Если скорость разрыва $w > 0$, то граничные условия (5.30), (5.31) примут вид

$$-\rho_1 w = \rho_2\left(\bar{v}_2 - w\right) \;\;\rightarrow\;\; w\left(\rho_2 - \rho_1\right) = \rho_2 \bar{v}_2, \tag{5.42}$$

$$\rho_1 w^2 + p_1 = \rho_2\left(\bar{v}_2 - w\right)^2 + p_2. \tag{5.43}$$

Отсюда следует, что $w = V_1\sqrt{\dfrac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}$, а $\bar{v}_2 = w\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)$. Смысл величин, входящих в формулы, следующий: w — скорость разрыва относительно невозмущенного газа; $\bar{v}_2$ — скорость газа за разрывом; $w - \bar{v}_2$ — скорость газа за разрывом относительно разрыва:

$$w - \bar{v}_2 = w\frac{V_2}{V_1} = V_2\sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}}. \tag{5.44}$$

Из этих формул следует, что если $p_2 > p_1$, то $V_1 > V_2$, или $\rho_2 > \rho_1$, т. е. после прохождения ударной волны растет плотность и давление. Такие ударные волны называются *скачками уплотнения*.

Если $p_2 < p_1$, то $\rho_2 < \rho_1$, т. е. после прохождения ударной волны плотность и давление падают. Такие ударные волны называют *скачками разрежения*.

Рассмотрим ударную адиабату. С учетом только что сказанного это убывающая функция $p(V)$. Рассмотрим две точки на адиабате Гюгонио (V_1, p_1) и (V_2, p_2). Проведем секущую через эти две точки:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}, \quad w = V_1\sqrt{\mathrm{tg}\alpha}. \tag{5.45}$$

Если известны параметры газа до скачка, то можно найти ударную адиабату по ее уравнению. Если задана скорость ударной волны w, по ней можно найти параметры после скачка.

5.5. ИЗМЕНЕНИЕ ЭНТРОПИИ ПРИ ПЕРЕХОДЕ ЧЕРЕЗ РАЗРЫВ

Вычислим изменение энтропии газа при прохождении через разрыв. Пусть (V_1, p_1) — начальное соотношение газа до прохождения ударной волны; (V_2, p_2) — соотношение газа после ее прохождения.

Будем рассматривать волну сжатия, т. е. случай, когда $V_2 < V_1$. Рассмотрим обратимый процесс, переводящий газ из состояния 1 в состояние 2 по адиабате Гюгонио. Запишем основное термодинамическое тождество:

$$Td\overline{S} = du + pdV. \tag{5.46}$$

Проинтегрируем это тождество от состояния 1 до состояния 2:

$$\int_1^2 du = u_2 - u_1 = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2). \tag{5.47}$$

Такое интегрирование применимо, поскольку внутренняя энергия является функцией состояния. Графически $u_2 - u_1$ представляет собой площадь трапеции $ABCD$ (рис. 18). В то же время

$$\int_1^2 pdV = -S_{TPA}. \tag{5.48}$$

Здесь S_{TPA} представляет собой площадь под кривой, задаваемой формулой адиабаты Гюгонио с обратным знаком, так как pdV величина отрицательная. Но тогда

$$\int_1^2 Td\overline{S} = S_{TPA} - S_{ABCD}. \tag{5.49}$$

Если кривая вогнутая, то для $V_1 > V_2$ (волна сжатия) энтропия возрастает при переходе через скачок, если $V_1 < V_2$ (волна разрежения), то энтропия убывает. Из второго закона термодинамики ясно, что при вогнутой форме адиабаты Гюгонио (как во всех нормальных веществах) могут существовать только ударные волны сжатия.

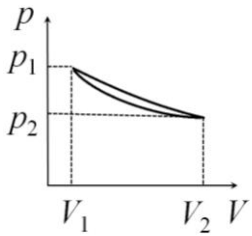

Рис. 18

Здесь необходимо сделать одно замечание. При выводе формул предполагалось, что никаких источников энергии, кроме теплопередачи и механической энергии, нет. Если же есть другие источники, например внешняя энергия, то возможны и ударные волны разрежения. Примером таких волн является фронт горения.

5.6. АДИАБАТА ГЮГОНИО И АДИАБАТА ПУАССОНА

Сравним адиабату Гюгонио и адиабату Пуассона. Пусть адиабата Гюгонио определяется начальными параметрами (V_1, p_1) и адиабата Пуассона проходит через эту же точку. Уравнение адиабаты Гюгонио:

$$u(p,V) = u_1 + \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V). \tag{5.50}$$

Уравнение адиабаты Пуассона:

$$\overline{S}\,(p, V) = \mathrm{const}, \tag{5.51}$$

где $\overline{S}$ — энтропия.

Найдем значения первых производных для адиабат Пуассона $\left.\frac{dp}{dV}\right|_{\overline{S}}(V_1)$ и Гюгонио $\left.\frac{dp}{dV}\right|_G(V_1)$.

Адиабата Гюгонио. Формула (5.50) представляет собой неявное задание функции $p(V)$. Дифференцируя по V, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|_G (V_1, p_1) \left.\frac{dp}{dV}\right|_G + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_G (V_1, p_1) = -p_1. \tag{5.52}$$

Отсюда

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_G (V_1) = -\frac{p_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_G (V_1, p_1)}{\left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|_G (V_1, p_1)}. \tag{5.53}$$

Адиабата Пуассона. Заметим, что в двухпараметрической среде можно представить внутреннюю энергию как

$$u = u(p, V). \tag{5.54}$$

Найдем $\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_{\overline{S}} (V_1, p_1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_{\overline{S}} = \left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|_{\overline{S}} (V_1, p_1) \left.\frac{dp}{dV}\right|_{\overline{S}} (V_1) + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_{\overline{S}} (V_1, p_1). \tag{5.55}$$

Из второго закона термодинамики следует

$$du = Td\overline{S} - pdV, \tag{5.56}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_{\overline{S}} = -p_1, \tag{5.57}$$

т. е. для адиабаты Пуассона получим

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_{\overline{S}}(V_1)=\frac{-p_1-\left.\dfrac{\partial u}{\partial V}\right|_{\overline{S}}(V_1,p_1)}{\left.\dfrac{\partial u}{\partial p}\right|_{\overline{S}}(V_1,p_1)}. \tag{5.58}$$

Таким образом, адиабаты Пуассона и Гюгонио, проведенные через точку (V_1, p_1), имеют общую касательную. Отсюда можно получить ряд следствий.

1) По определению квадрат скорости звука выражается как

$$c^2=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\overline{S}}. \tag{5.59}$$

Но

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\overline{S}}=\left.\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_{\overline{S}}=-\frac{1}{\rho^2}\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{\overline{S}}=-V^2\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{\overline{S}}. \tag{5.60}$$

Таким образом, на адиабате Пуассона

$$c_1^2=V_1^2\left.\frac{dp}{dV}\right|_{\overline{S}}(V_1). \tag{5.61}$$

Следовательно, наклон касательной к адиабате Гюгонио в точке (V_1, p_1) определяет скорость звука в среде 1 (до скачка).

2) В то же время мы видели, что скорость скачка относительно среды 1 (перед скачком) равна

$$w^2=V_1^2\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}, \tag{5.62}$$

$c_1 < w$, т. е. скачок движется со сверхзвуковой скоростью. Именно поэтому можно считать, что среда перед скачком не возмущена. Возмущения движутся со скоростью c_1, а скачок — со скоростью $w > c_1$.

Определим теперь скорость газа за скачком. Пусть адиабата 1 — это адиабата Гюгонио с начальной точкой (p_1, V_1); (p_2, V_2) — это параметры газа после скачка. Проведем адиабату 2 с начальным состоянием в точке (p_2, V_2) и продлим ее формально в нефизическую область $V > V_2$. Она обязательно пересечет адиабату 1 в точке (p_1, V_1) (это следует из уравнения адиабаты Гюгонио). Но тогда скорость потока газа за разрывом относительно разрыва

$$w-\overline{v}_2=V_2\sqrt{\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}}=V_2\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}, \tag{5.63}$$

а скорость звука за разрывом

$$c_2=V_2\sqrt{\operatorname{tg}\beta}. \tag{5.64}$$

Из вогнутости адиабаты Гюгонио ясно, что $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta$, т. е. скорость газа относительно разрыва меньше скорости звука в среде 2.

3) Если перепад параметров при переходе через разрыв мал (слабый разрыв), то

$$\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \cong -\left.\frac{dp}{dV}\right|_{V_1}, \tag{5.65}$$

т. е. $w^2 = c_1^2$; следовательно, слабый разрыв движется со скоростью звука.

5.7. АДИАБАТА ГЮГОНИО СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

В совершенном газе внутренняя энергия

$$u = \frac{C_V}{\mu} T = \frac{C_V}{R} pV = \frac{pV}{\gamma - 1}. \tag{5.66}$$

Формула для адиабаты Гюгонио:

$$\frac{pV}{\gamma - 1} - \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}(p_1 + p)(V_1 - V). \tag{5.67}$$

Разделим обе части на $p_1 V_1$:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{V}{V_1}\right) = \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{p}{p_1} + 1\right)\left(1 - \frac{V}{V_1}\right) + 1. \tag{5.68}$$

Выразим p/p_1 через V/V_1, получим

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) - \frac{V}{V_1}(\gamma - 1)}{\frac{V}{V_1}(\gamma + 1) - (\gamma - 1)}. \tag{5.69}$$

Таким образом, в идеальном газе с постоянной теплоемкостью ударная адиабата Гюгонио имеет вид (5.69) (рис. 19).

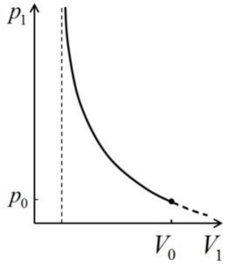

Рис. 19

6. ПРОСТЫЕ ВОЛНЫ

6.1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ПРОСТЫХ ВОЛН

При рассмотрении малых возмущений идеального газа было показано, что возмущения всех гидродинамических величин удовлетворяют волновому уравнению. Например, возмущения скорости в идеальной сжимаемой среде удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \tag{6.1}$$

где c_0 — скорость звука, определяемая равновесными параметрами среды. Решением этого уравнения являются бегущие волны:

$$u_1 = f_1\left(x - c_0 t\right) + f_2\left(x + c_0 t\right). \tag{6.2}$$

Пусть имеется решение в виде одной бегущей волны $u_1 = f_1(x - c_0 t)$. Но тогда все величины будут функциями $(x - c_0 t)$. А это, в свою очередь, значит, что все гидродинамические величины являются функциями друг друга, т. е. $\rho_1 = \rho(u_1)$, $p_1 = p(u_1)$ и т. д. Если рассматривать возмущения конечной амплитуды, то они не будут удовлетворять такому простому уравнению, однако в этом случае можно искать решение одномерных уравнений гидродинамики в виде, когда различные величины являются функциями друг друга, т. е. $\rho = \rho(u)$, $p = p(u)$ и т. д.

Система уравнений динамики жидкости для одномерных течений имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \dfrac{\partial u}{\partial x} + u \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ p = p(\rho). \end{cases} \tag{6.3}$$

Пусть все величины являются функциями u. Тогда система примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{d\rho}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{d\rho}\dfrac{d\rho}{du}\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{6.4}$$

Эта система совместна, если детерминант ее равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d\rho}{du} & \rho + u\dfrac{d\rho}{du} \\ 1 & u + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{du}\dfrac{dp}{d\rho} \end{vmatrix} = 0. \tag{6.5}$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 \frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{d\rho} = 1. \tag{6.6}$$

Это выражение дает возможность связать различные величины в волне. Кроме того, оно входит в уравнение для u:

$$\frac{u}{\partial t} + \left(u + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{du}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{6.7}$$

Подставляя решение уравнения (6.6) в виде $\dfrac{d\rho}{du} = \pm\rho\sqrt{\dfrac{d\rho}{dp}}$, получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \pm \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \tag{6.8}$$

Поскольку все гидродинамические величины являются функциями друг друга, то это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \big(u \pm c(u)\big)\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{6.9}$$

где $c = \sqrt{dp/d\rho}$ — локальная скорость звука, которая является функцией u.

Эту функцию можно легко найти из уравнения (6.6):

$$\frac{du}{d\rho} = \pm\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \quad \to \quad u = \pm\int \frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}. \tag{6.10}$$

Отсюда можно найти $u = u(\rho)$, $p = p(\rho)$. Это условие адиабатичности процесса. Можно найти далее $c(\rho)$ и выразить $\rho = \rho(u)$.

Проделаем эту процедуру для идеального газа с постоянной теплоемкостью. Уравнение состояния такого газа $p = A\rho^{\gamma}$, где A — константа, γ — показатель адиабаты, тогда

$$\frac{du}{d\rho} = \pm\frac{1}{\rho}\sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}. \qquad (6.11)$$

Интегрируя равенство, получим

$$u = \pm\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-3}{2}} + c_1. \qquad (6.12)$$

Константу c_1 можно найти из условия, что в отсутствие возмущений $u = 0$ при $\rho = \rho_0$, тогда

$$u = \pm\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right). \qquad (6.13)$$

Скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}. \qquad (6.14)$$

Сравнивая формулы (7.13) и (7.14), легко видеть, что

$$u = \pm\frac{2}{\gamma-1}(c - c_0). \qquad (6.15)$$

Отсюда для скорости звука получим

$$c = c_0 \pm \frac{\gamma-1}{2}u, \qquad (6.16)$$

где c_0 — скорость звука при равновесных параметрах, c — локальное значение скорости звука.

Входящая в уравнение для u комбинация может быть выражена следующим образом:

$$u \pm c(u) = \frac{\gamma+1}{2}u \pm c_0. \qquad (6.17)$$

Подставляя равенство (6.17) в формулу (6.8), получаем уравнение для u в идеальном газе в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\gamma+1}{2}u \pm c_0\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0. \qquad (6.18)$$

Найдем теперь решение уравнения (6.9) для u. Заметим, что $u = u(x, t)$.

Вычислим $\left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_u$ — значение производной $\dfrac{\partial x}{\partial t}$ при u = const. В этом случае $\dfrac{\partial u}{\partial x}\left.\dfrac{\partial x}{\partial t}\right|_u+\dfrac{\partial u}{\partial t}=0.$

Сравнивая это выражение с уравнением (6.9), легко видеть, что

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_u=u\pm c(u). \tag{6.19}$$

Выражение (6.19) описывает характеристики уравнения для u. На характеристиках величина u сохраняется. Это значит, что решение можно легко записать в виде

$$x=x_0(u)+(u\pm c(u))\,t. \tag{6.20}$$

Здесь $x_0(u)$ определяется начальными и граничными условиями.

Полученное решение называется *простой волной*. Это точное решение уравнений идеальной гидродинамики. Оно описывает изэнтропическое течение газа без потерь. Поскольку в такой волне все гидродинамические величины являются функциями друг друга, это означает, что все они сохраняются на характеристиках.

Исследуем качественно, как ведет себя решение (6.20). Рассмотрим волну, бегущую вправо:

$$x=x_0(u)+(u+c(u))\,t. \tag{6.21}$$

Для идеального газа

$$x=x_0(u)+\left(\frac{\gamma+1}{2}u+c_0\right)t, \tag{6.22}$$

$$u=\frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}-\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right)\ \to\ \rho=\left(\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}+\frac{(\gamma-1)u}{2\sqrt{A\gamma}}\right)^{2/(\gamma-1)},$$

где ρ — растущая функция u. Если u растет (ρ растет), то скорость распределения возмущения увеличивается.

Рассмотрим эволюцию возмущения в системе отсчета, бегущей со скоростью c_0. При этом крутизна фронта сжатия растет, а фронт разрежения растягивается. Наконец, на фронте сжатия образуется перехлест (неоднозначность). Это решение не имеет физического смысла. Действительно, не может быть в одной точке в один момент времени три значения скорости. Это означает на самом деле, что решение в виде простой волны перестает существовать, а на фронте сжатия образуется разрыв.

Точка, в которой нарушается однозначность функции $u(x)$, — это та точка, где $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_t = \infty$ или $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_t = 0$. Для идеального газа из равенства (6.22) получаем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \dot{x}_0(u) + \frac{\gamma+1}{2}t = 0 \quad \rightarrow \quad t = -\frac{2\dot{x}_0(u)}{\gamma+1}. \tag{6.23}$$

Надо определить, когда $\frac{\partial x}{\partial u}$ обращается в нуль впервые, т. е. когда $\dot{x}_0(u)$ минимально. Надо найти точку экстремума функции $\dot{x}_0(u)$, для этого надо приравнять к нулю ее производную $\ddot{x}_0(u) = 0.$ Отсюда определяется u, а далее и t.

Если $u(x)$ задано в виде импульса, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_t$ максимально, а $\frac{\partial x}{\partial u}$ минимально на краю, т. е. в точке, где $u = 0$. Таким образом, время образования разрыва равно

$$t = -\frac{2\dot{x}_0(0)}{\gamma+1}. \tag{6.24}$$

6.2. ИНВАРИАНТЫ РИМАНА И ХАРАКТЕРИСТИКИ

Сделаем ряд преобразований с уравнениями гидродинамики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ p = p(\rho). \end{cases} \tag{6.25}$$

Подставим $p = p(\rho)$ и с учетом $c^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{S}}$ получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho}c^2\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{6.26}$$

Последнее уравнение умножим на c/ρ для уравнивания размерностей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + u\dfrac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0. \end{cases} \qquad (6.27)$$

Сложим эти уравнения и вычтем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u+c)\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (u+c)\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + (u-c)\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (u-c)\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right) = 0. \end{cases} \qquad (6.28)$$

Введем две новые функции

$$J_{\pm} = u \pm \int \frac{c d\rho}{\rho}.$$

В них не входят явно x и t, а только u и ρ. Тогда из первого уравнения

$$\frac{\partial J_+}{\partial t} + (u+c)\frac{\partial J_+}{\partial x} = 0,$$

а из второго

$$\frac{\partial J_-}{\partial t} + (u-c)\frac{\partial J_-}{\partial x} = 0.$$

Отсюда видно, что величина J_+ сохраняется на характеристике $dx/dt = u + c$, а J_- — на характеристике $dx/dt = u - c$ (они называются характеристиками C_+ и C_-). J_+ и J_- называются *инвариантами Римана*. Введение этих величин, по существу, означает введение новых переменных вместо u, ρ. Для идеального газа очевидно, что

$$p = A\rho^{\gamma};\ c = \sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}}. \qquad (6.29)$$

Тогда

$$\int \frac{dp}{\rho c} = \int \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1} d\rho}{\sqrt{\gamma A}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}} = \sqrt{\gamma A}\int \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} d\rho = \sqrt{\gamma A}\frac{2}{\gamma-1}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{2c}{\gamma-1}. \qquad (6.30)$$

Складывая и вычитая выражения для инвариантов Римана, получаем

$$c = \frac{J_+ - J_-}{4}(\gamma - 1), \tag{6.31}$$

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2}, \tag{6.32}$$

$$\begin{cases} u + c = \dfrac{\gamma+1}{4} J_+ + \dfrac{3-\gamma}{4} J_-, \\ u - c = \dfrac{3-\gamma}{4} J_- + \dfrac{\gamma+1}{4} J_+. \end{cases} \tag{6.33}$$

Тогда уравнения для характеристик, выраженных через инварианты, имеют следующий вид:

для C_+

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\gamma+1}{4} J_+ + \frac{3-\gamma}{4} J_-,$$

для C_- (6.34)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3-\gamma}{4} J_- + \frac{\gamma+1}{4} J_+$$

(характеристики зависят только от J_+ и J_- и не зависят от *x* и *t*, поскольку *u*, *p*, ρ — функции J_+ и J_-).

Предположим, что J_- постоянно. Но тогда все гидродинамические величины являются функциями J_+ или выражаются друг через друга. То есть мы имеем простую волну, характеристики которой C_+ — прямые линии.

Рассмотрим, как можно реализовать простую волну. Пусть в трубе цилиндрического сечения имеется поршень, который закрывает ее слева. Справа труба настолько длинная, что ее можно считать бесконечной. При $t = 0$ координата поршня $x = 0$. Пусть в начальный момент времени поршень начинает двигаться, ускоряясь, в отрицательном направлении оси *x*. Рассмотрим, какое при этом возникнет движение газа. Его удобно описывать с помощью характеристик. Изобразим характеристики на плоскости (*x*, *t*) (рис. 20). При $t < 0$ (до начала движения поршня) $u = 0$ и характеристики представляют собой прямые $dx/dt = \pm c_0$, где c_0 — скорость звука в невозмущенном газе. *OA* — это характеристика $x = c_0 t$. Она описывает движение «головы» возмущения газа. Когда $t > 0$, при движении поршня возникают возмущения в газе, которые двигаются по характеристикам, пересекающим траекторию поршня и в момент τ проходящим через точку ($x(\tau)$, τ), т. е. пересекают траекторию поршня на плоскости (x, t).

Эти характеристики задаются уравнениями $dx/dt = u \pm c.$ Вблизи поршня u — скорость газа, равная скорости поршня, а c — местная скорость звука. Из этих двух характеристик в физическом пространстве (при $t > \tau$) лежит только характеристика $dx/dt = u + c\ (u < 0)$. На поршень могут приходить возмущения по характеристикам $dx/dt = u - c$ (для $t < \tau$). На этих характеристиках сохраняется инвариант Римана J_-. Однако все характеристики начинаются на полупрямой $x(t = 0)$. Но в начальный момент времени возмущение отсутствовало. Значит, J_- — это постоянная величина, соответствующая $u = 0$ и $c = c_0$. Но, как мы видели, в этом случае возмущение, распространяющееся по характеристикам $dx/dt = u - c$ от поршня, представляет собой простую волну.

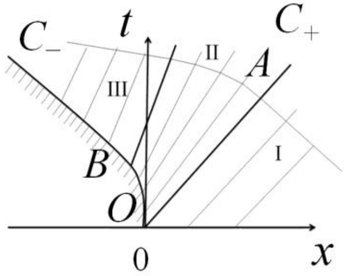

Рис. 20

Итак, из рис. 20 видно, что при $x > c_0 t$ возмущений нет, а при $x(\tau) < x < c_0 t$ с характеристикой $(u + c) = dx/dt$ возмущение описывается простой волной. Эту функцию можно найти. Так как $dx/dt = u + c,$ то уравнение простой волны можно записать как

$$x = (u + c)t + x_0(u), \tag{6.35}$$

где $x_0(u)$ — произвольная функция, определяемая движением поршня. Найдем ее.

На поршне в любой момент $t = \tau$

$$x = x(t)\big|_{t=\tau},\ \ u = \dot{x}(t)\big|_{t=\tau},$$

$$\begin{cases} x(\tau)=(u+c)\tau+x_0(u), \\ u=\dot{x}(\tau), \end{cases} \tag{6.36}$$

$x(\tau)$, $\dot{x}(\tau)$ являются известными функциями.

Эта запись представляет собой задание неизвестной произвольной функции $x_0(u)$ в параметрическом виде (τ — параметр), т. е.

$$\begin{cases} x_0(u)=x(\tau)-\left(\dot{x}(\tau)+c\right)\tau, \\ u=\dot{x}(\tau). \end{cases} \tag{6.37}$$

Рассмотрим пример.

Пусть задан закон движения поршня в виде

$$\begin{cases} x_n=-Ut-UT\left(e^{-\frac{t}{T}}-1\right), \\ \dot{x}_n=U\left(e^{-\frac{t}{T}}-1\right). \end{cases} \tag{6.38}$$

Тогда для $x_0(u)$ получим

$$x_0(u)=-UT\left(e^{-\frac{\tau}{T}}-1\right)-U\tau-(u+c)\tau, \tag{6.39}$$

где

$$u=U\left(e^{-\frac{\tau}{T}}-1\right), \quad \tau=-T\ln\left(\frac{u}{U}+1\right). \tag{6.40}$$

Таким образом,

$$x_0(u)=-uT+UT\ln\left(\frac{u}{U}+1\right)+(u+c)T\ln\left(\frac{u}{U}+1\right), \tag{6.41}$$

$$x=(u+c)t-uT+(U+u+c)T\ln\left(\frac{u}{U}+1\right). \tag{6.42}$$

Итак, при $x > c_0t$ функция $u(x, t)$ равна нулю, а при $x_n(t) < x < c_0t$ эта функция задается неявной формулой (6.42).

Посмотрим, как качественно выглядит это решение.

Траектория поршня при достаточно больших временах выходит на прямую $x = UT - Ut$, т. е. скорость на поршне $u = -U$. Но тогда все характеристики, выходящие от траектории поршня, имеют одинаковый наклон, поскольку

$$x = (c - U)\, t + x_0. \qquad (6.43)$$

Будем считать, что такой вид имеют характеристики, начиная от точки B (на рис. 19). А между точками O и B характеристики расходятся.

Рассмотрим теперь случай создания так называемой центрированной волны в трубе, когда поршень начинают вытягивать налево из трубы с постоянной скоростью $-U$, т. е. его скорость в момент $t = 0$ скачком меняется от 0 до $-U$. При $t > 0$ закон движения поршня $x = Ut$.

Будем анализировать решение также с помощью плоскости характеристик (x, t) (рис. 21), на которой проведена линия поршня $x = Ut$. Следует отметить, что все характеристики C, вышедшие с оси $x = 0$, переносят одинаковое значение инварианта J_-:

$$J_- = -2c_0 / (\gamma - 1).$$

С линии поршня эти характеристики выходить не могут. Значит, все физическое пространство (x, t) заполняется характеристиками C_-, несущими одинаковое значение J_-, т. е. здесь простая волна, распространяющаяся вправо. В области I характеристики C_+ также переносят одинаковое значение инварианта $J_+ = = 2c_0 / (\gamma - 1)$. Следовательно, область I — это область постоянного течения.

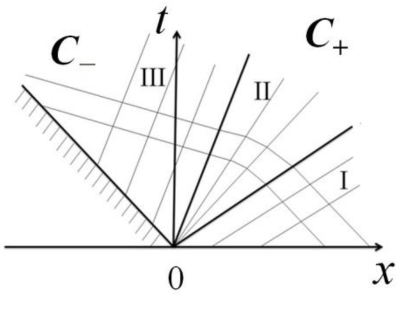

Рис. 21

В области III, ограниченной слева линией поршня, а справа характеристикой C_+, выходящей из точки $x = 0$, где $u = -U$ (скорости поршня) и $c = c_0 - (\gamma - 1)\, U/2$. Значит, область III — это тоже область постоянного течения, которое оставляет волна за своим хвостом.

В промежуточной области II между головой возмущения и хвостом справедливо решение $x=\left(c\left(u\right)+u\right)t$, т. е. $u = f\left[x - \left(c\left(u\right)+u\right)t\right]$. Для такой волны при $t > 0$ картина движения газа может быть получена из предыдущей (см. формулы (6.41), (6.42) и рис. 20), если переходную область стянуть в точку. В переходной области лежат характеристики $x = (c(u) + u)t$, у которых $c(-U) - U < c(u) + u < c_0$. Поскольку характеристики проходят через начало координат, то такая волна называется центрированной. В этом случае u является функцией только x/t. Это решение является автомодельным и представляет собой частный случай простой волны.

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma},$$

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \rightarrow \rho = \rho_0\left(1-\frac{(\gamma-1)u}{2c_0}\right)^{2/(\gamma-1)},$$

$$p = p_0\left(1-\frac{(\gamma-1)u}{2c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}.$$

Подставим в эти выражения значения скорости

$$u = \frac{2}{\gamma+1}\left(c_0 - \frac{x}{t}\right), \tag{6.44}$$

найденной из условия постоянства инварианта J_-, $c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}u$, и решения для центрированной волны $x = (u + c)t$.

Таким образом, можно сделать вывод, что скорость в центрированной волне зависит от координаты x линейно (рис. 22).

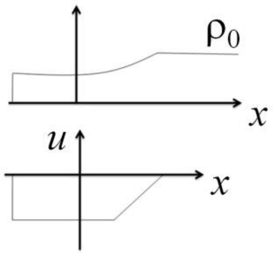

Рис. 22

Рассмотрим теперь, каким будет движение газа в том случае, если поршень вдвигается в трубу.

Пусть скорость поршня $u < c_0$. Предположим, что сначала поршень ускоряется и его скорость выходит на постоянное значение $U < c_0$. Характеристики, отходящие от траектории поршня в физическом пространстве, $dx/dt = (u + c)$, имеют наклон больше, чем c_0, поскольку $c(u) > c_0$ (газ сжат) и $u > 0$. Это значит, что характеристики в некоторой точке пересекутся и образуются разрыв и ударная волна.

Таким образом, можно сделать вывод, что решение в виде простой волны будет существовать до тех пор, пока не образуется разрыв.

Литература

1. *Ландау, Л. Д.* Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. — 3-е изд., перераб. — М. : Наука, 1986. — 736 с. — (Теоретическая физика : Т. VI.)
2. *Лойцянский, Л. Г.* / Л. Г. Лойцянский. Механика жидкости и газа. — Изд. 5-е, перераб. — М. : Наука, 1978. — 736 с.
3. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 1 / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 492 с.
4. *Седов, Л. И.* Механика сплошной среды. Т. 2 / Л. И. Седов. — М. : Наука, 1970. — 568 с.
5. *Бреховских, Л. М.* Введение в механику сплошных сред / Л. М. Бреховских, В. В. Гончаров. — М. : Наука, 1982. — 337 с.
6. *Зельдович, Я. Б.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений / Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер. — Изд. 3-е, испр. — М. : Физматлит, 2008. — 656 с.
7. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика : ч. I / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматгиз, 1963. — 584 с.
8. *Кочин, Н. Е.* Теоретическая гидромеханика : ч. II / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. — Изд. 4-е, перераб. — М. : Физматгиз, 1963. — 728 с.
9. *Эглит, М. Э.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 1. Теория и задачи / под ред. М. Э. Эглит. — М. : Московский лицей, 1996. — 396 с.
10. *Эглит, М. Э.* Механика сплошных сред в задачах. Т. 2. Ответы и решения / под ред. М. Э. Эглит. — М. : Московский лицей, 1996. — 394 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Научное издание

Ю. И. Троицкая, И. А. Соустова,
О. С. Ермакова, Д. А. Сергеев

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД

Методическое пособие

Часть 1

ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА И ЖИДКОСТИ

Редакторы *И. А. Кокорина, Н. Н. Кралина*
Компьютерная верстка *М. В. Башевой, Н. Н. Кралиной*
Технический редактор *Д. П. Семенова*
Дизайн обложки *А. А. Ереминой*

Подписано к печати 24.01.2018 г. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 6,25. Уч.-изд. л. 5,0. Темплан 2017 г. Поз. 10. Тираж 80 экз.

Отпечатано на ризографе в ФИЦ «Институт прикладной физики РАН»,
603950 Нижний Новгород, ул. Ульянова, 46