Зачётная задача
по квантовой теории поля

Можаров Андрей

25 декабря 2025 г.

Ответ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2 a^2 E^2 \pi}{4\beta^6} \left(1 - v^2 sin^2 \frac{\theta}{2}\right) exp\left(-\frac{2p^2}{\beta^2} sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

Решение:

В низшем порядке теории возмущений S-матрица процесса рассеяния электрона во внешнем поле $A^\mu(x)$ имеет вид:

$$S_{fi} = -ie \int d^4x\, \bar{\psi}_f(x) \gamma_\mu \psi_i(x) A^\mu(x)$$

Поскольку заданный потенциал статический ($A^0(x) = \varphi(\vec{x}) = ae^{-\beta^2|\vec{x}|^2}$ и $\vec{A} = 0$), энергия электрона сохраняется ($E_i = E_f = E$).

Тогда амплитуду перехода можно записать через потенциал в импульсном представлении:

$$\mathcal{M}_{fi} = e \left[\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)\right] \mathcal{F}\{\varphi\}(\vec{q})$$

где $\vec{q} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ — переданный импульс.

Рассчитаем Фурье-образ гауссова потенциала $\varphi(\vec{r}) = ae^{-\beta^2 r^2}$:

$$\mathcal{F}\{\varphi\}(\vec{q}) = \int d^3x\, e^{-i\vec{q}\cdot\vec{x}} a e^{-\beta^2 r^2} = a \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta^2 x^2 - iq_x x} dx\right)^3$$

Используя табличный интеграл Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ax^2 - Bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{A}} e^{B^2/4A}$$

получаем:

$$\mathcal{F}\{\varphi\}(\vec{q}) = a \left(\frac{\pi}{\beta^2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{q^2}{4\beta^2}\right)$$

Квадрат модуля переданного импульса связан с углом рассеяния θ формулой:

$$q^2 = (\vec{p}_f - \vec{p}_i)^2 = 2p^2(1 - \cos\theta) = 4p^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Дифференциальное сечение рассеяния в статическом поле дается формулой:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2|\mathcal{F}\{\varphi\}(\vec{q})|^2}{16\pi^2} \sum_{s_f} |\bar{u}(p_f, s_f)\gamma^0 u(p_i, s_i)|^2$$

Нам дано, что начальный электрон полностью поляризован (спиральность $\lambda = -1$). Конечная поляризация не фиксируется, поэтому мы суммируем по s_f.

Для расчета спиновой части используем оператор плотности для начального состояния с фиксированной поляризацией:

$$\rho_i = u_i \bar{u}_i = (\hat{p}_i + m)\frac{1+\gamma^5\hat{\zeta}}{2}$$

где ζ — 4-вектор поляризации и введено обозначение $\hat{a} = a_\mu \gamma^\mu$. Здесь

$$\frac{1+\gamma^5\hat{\zeta}}{2}$$

имеет смысл оператора проектирования на спин. Сумма по конечным спинам: $\sum_{s_f} u_f \bar{u}_f = \hat{p}_f + m$. Тогда:

$$\sum_{s_f} |\bar{u}_f \gamma^0 u_i|^2 = \mathrm{Tr}\left[\gamma^0(\hat{p}_i + m)\frac{1+\gamma^5\hat{\zeta}}{2}\gamma^0(\hat{p}_f + m)\right]$$

В электромагнитных взаимодействиях, сохраняющих четность, сечение рассеяния электрона с определенной спиральностью на скалярном (статическом) потенциале совпадает с неполяризованным сечением (так как след от члена с γ^5 обращается в нуль). Следовательно, результат эквивалентен обычному сечению Мотта:

$$\sum_{s_f} |\dots|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[\dots] \times 2 = 8E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

где $v = p/E$ — скорость электрона.

Подставляем все компоненты в формулу сечения:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2}{16\pi^2}\left[a^2\frac{\pi^3}{\beta^6}\exp\left(-\frac{2p^2\sin^2(\theta/2)}{\beta^2}\right)\right] \cdot 8E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

После сокращения коэффициентов получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\pi}{2\beta^6}E^2\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)\exp\left(-\frac{2p^2\sin^2(\theta/2)}{\beta^2}\right)$$

Ответ:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^2a^2\pi E^2}{2\beta^6}\left(1 - v^2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)e^{-\frac{2p^2\sin^2(\theta/2)}{\beta^2}}$$

где E — энергия, p — импульс, а v — скорость налетающего электрона.