МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

# ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА

*Практикум*

Рекомендовано методической комиссией радиофизического факультета
для студентов ННГУ, обучающихся по направлениям подготовки
03.03.03 «Радиофизика», 02.03.02 «Фундаментальная информатика и
информационные технологии» и специальностям
10.05.02 «Информационная безопасность телекоммуникационных
систем» и 11.05.02 «Специальные радиотехнические системы»

Нижний Новгород
2017

УДК 53
ББК 22.3
Б-19

Б-19 ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВОГО КОЛЕСА: Составители: Бакунов М.И., Бирагов С.Б., Жуков С.Н.: Практикум. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2017. – 9 с.

Рецензент: доктор физ.-мат. наук, профессор **В.Г. Гавриленко**

В лабораторной работе исследуется вращение твердого тела вокруг неподвижной оси и находится его момент инерции.

Практикум предназначен для студентов 1 курса радиофизического факультета, выполняющих работы в лабораториях общего практикума кафедры общей физики.

Ответственный за выпуск:
зам. председателя методической комиссии
радиофизического факультета ННГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор **Е.З. Грибова**

УДК 53
ББК 22.3

## Введение

Инерционные свойства твердого тела при вращении вокруг неподвижной оси характеризуются моментом инерции

$$I = \int_m r_\perp^2 dm,$$

где $r_\perp$ – расстояние от элемента массы $dm$ до оси вращения и интегрирование проводится по всей массе тела. Для тел простой формы данный интеграл удается вычислить аналитически. При сложном распределении массы относительно оси вращения момент инерции может быть рассчитан численно или измерен в опыте.

В данной работе момент инерции махового колеса, имеющего сложную форму, измеряется на опыте двумя методами – методом вращения и методом колебаний.

## Метод вращения

Колесо, момент инерции которого нужно измерить, имеет цилиндрическую ось, закрепленную в подшипниках горизонтально, и находится в состоянии безразличного равновесия, поскольку центр масс колеса лежит на оси вращения. Для раскручивания колеса на имеющийся на нем шкив со шпилькой наматывают нить с привязанным к ней грузом массы $m_г$ (рис. 1). Вращая колесо, нить наматывают на шкив так, что груз поднимается от пола на некоторую высоту $h$, затем колесо освобождают. Опускаясь, груз приводит колесо во вращательное движение.

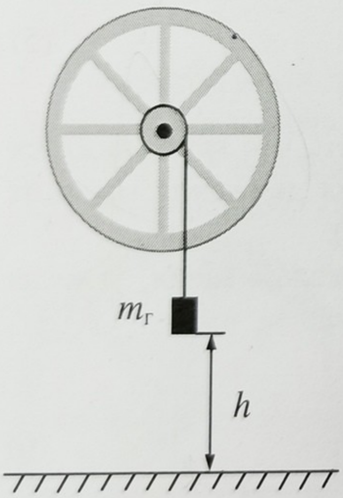

Рис. 1

Изменение механической энергии системы тел, состоящей из колеса (с осью и шкивом) и груза равно работе силы трения:

$$\Delta W_{мех} = A_{тр}. \tag{1}$$

Примем потенциальную энергию груза за нуль на уровне пола, тогда механическая энергия системы в начальном положении равна $W_{1мех} = m_г gh$, а непосредственно перед ударом груза о пол

$$W_{2мех} = \frac{m_г V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \tag{2}$$

где $V$ и $\omega$ - это скорость груза и угловая скорость колеса перед ударом груза о пол, а $I$ – момент инерции колеса. Потенциальная энергия колеса не меняется и поэтому опущена в формулах для $W_{1мех}$ и $W_{2мех}$. Будем считать, что действующая на колесо сила трения не зависит от скорости его вращения. Тогда работа силы трения пропорциональна числу оборотов $n_1$, совершенных колесом при опускании груза, т. е.

$$A_{тр} = A_{тр1} n_1, \tag{3}$$

где через $A_{тр1}$ обозначена работа силы трения за один оборот. Таким образом, уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{m_г V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - m_г g h = A_{тр1} n_1. \tag{4}$$

Уравнение (4) позволяет найти момент инерции $I$, если экспериментально определить входящие в это уравнение величины $m_г$, $h$, $V$, $A_{тр1}$, $\omega$ и $n_1$.

Учитывая, что за один оборот колеса груз проходит расстояние $2\pi r$ ($r$ – радиус шкива), число оборотов $n_1$ найдем по формуле

$$n_1 = \frac{h}{2\pi r}. \tag{5}$$

Для определения скорости груза перед ударом учтем, что груз движется равноускоренно и, следовательно, $V = 2h/t$, где $t$ - время движения груза от начального положения до пола (измеряется секундомером).

Поскольку нить разматывается со шкива без проскальзывания, угловая скорость колеса (и шкива) в момент удара груза о пол равна

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{2h}{rt}. \tag{6}$$

Чтобы найти работу $A_{тр1}$, рассмотрим замедленное движение колеса после того, как груз достиг пола и нить соскользнула со шкива. Будем считать, что эта работа остается той же, что и при раскручивании колеса под действием опускающегося груза. Работу силы трения от момента удара груза о пол до остановки колеса запишем как $A_{тр1}n_2$, где $n_2$ – число оборотов колеса на этапе замедленного движения. Число оборотов $n_2$ следует определить из эксперимента. Учитывая, что в момент удара груза о пол колесо обладало кинетической энергией $I\omega^2/2$, можно записать теорему об изменении кинетической энергии в виде

$$-\frac{I\omega^2}{2} = A_{тр1} n_2\,, \tag{7}$$

откуда находим

$$A_{тр1} = -\frac{I\omega^2}{2n_2}\,. \tag{8}$$

Поскольку число $n_2$ может получиться на опыте нецелым, для более точного его определения следует перед выполнением опыта провести дополнительное наблюдение: заметить положение покрашенной спицы колеса в момент касания грузом пола. Это позволяет подсчитать не только число полных оборотов колеса, но и определить долю последнего неполного оборота.

Воспользовавшись формулами (4), (5), (6) и (8), определим момент инерции колеса

$$I = m_г r^2\left(\frac{gt^2}{2h} - 1\right)\frac{n_2}{n_1 + n_2}\,. \tag{9}$$

## Метод колебаний

Навернув на штырек, находящийся на ободе колеса, груз (в виде стального цилиндра), превратим колесо в физический маятник. Маятник может совершать колебания около положения устойчивого равновесия, соответствующего нижнему положению груза. Для возникновения колебаний колесо следует повернуть так, чтобы груз отклонился от нижнего положения (от вертикали) и появился момент силы тяжести.

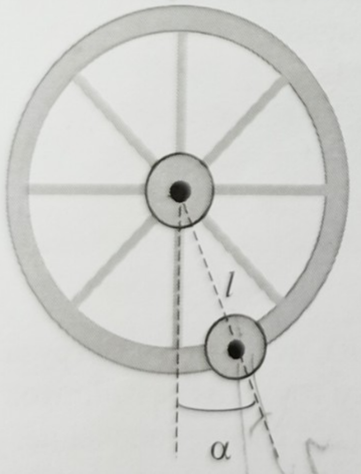


Рис. 2

Момент действующей на груз силы тяжести равен

$$M = -m_ц g l \sin\alpha\,, \tag{10}$$

где $m_ц$ – масса груза-цилиндра, $l$ – расстояние от центра тяжести груза до оси вращения, а $\alpha$ – угол отклонения груза от вертикали (см. рис. 2). Уравнение колебаний следует из уравнения вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси и имеет вид

$$I_м\ddot{\alpha} = -m_ц g l \sin\alpha\,, \tag{11}$$

$\Omega^2$

где $I_м$ – момент инерции маятника, а $\ddot{\alpha}$ – его угловое ускорение.



$$\ddot{\alpha} + \overbrace{\frac{mgl}{I}}^{=\Omega^2}\alpha = 0$$

Для малых углов отклонения груза от вертикали можно считать, что $\sin\alpha \approx \alpha$. При этом (11) превращается в уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{\alpha} + \Omega^2 \alpha = 0 \tag{12}$$

с собственной частотой $\Omega = \sqrt{m_ц gl / I_м}$. Решение этого уравнения описывает гармонические колебания маятника с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_м}{m_ц gl}}. \tag{13}$$

Отсюда выражаем момент инерции маятника:

$$I_м = \frac{m_ц glT^2}{4\pi^2}. \tag{14}$$

Измерив массу груза $m_ц$, расстояние $l$ и период колебаний $T$, из (14) можно найти момент инерции маятника $I_м$.

Момент инерции колеса $I$ находим, вычитая из $I_м$ момент инерции груза-цилиндра $I_ц$:

$$I = I_м - I_ц. \tag{15}$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции цилиндра радиуса $r_ц$, смещенного от оси вращения на расстояние $l$, дается формулой

$$I_ц = \frac{1}{2} m_ц r_ц^2 + m_ц l^2. \tag{16}$$

## Задание

1. Измерить момент инерции колеса методом вращения, используя два груза разной массы. Опыт повторить три раза для каждого груза, из результатов каждого опыта вычислить момент инерции и найти его среднее значение.
2. Измерить момент инерции колеса методом колебаний. При измерениях отклонять колесо с грузом от положения равновесия не более, чем на 15°. Для определения периода колебаний $T$ измерить время $t$ достаточно большого числа колебаний $n$ ($n > 10$) и найти период как $T = t/n$. Измерения повторить три раза и найти среднее значение периода. Найденное среднее значение подставить в (14) и вычислить момент

инерции физического маятника $I_{м}$, а затем найти момент инерции колеса $I$ по формуле (15).

3. Сравнить значения момента инерции колеса, полученные двумя методами. Вычислить абсолютную и относительную погрешности при измерении момента инерции колеса каждым методом. Указать основные источники ошибок в методе вращения и методе колебаний.
4. Оценить теоретически вклад обода и спиц колеса в его момент инерции. Плотность материала колеса равна $\rho = 7{,}8$ г/см$^3$.

## Контрольные вопросы

1. Для метода вращения написать уравнения движения колеса и груза. Как зависят угловое ускорение колеса и ускорение груза от момента инерции колеса, массы груза, радиуса шкива?
2. Вывести формулу (9).
3. Вычислить момент инерции однородного цилиндра относительно оси, перпендикулярной к оси симметрии цилиндра и проходящей через его центр. Масса цилиндра $M$, радиус $R$, высота $h$. Рассмотреть предельные случаи: $R << h$ и $R >> h$.
4. Как будет меняться период колебаний махового колеса, если груз-цилиндр передвигать ближе к оси? Рассмотреть случаи: $R < \sqrt{I/m}$ и $R > \sqrt{I/m}$ ($I$ – момент инерции колеса, $R$ – его радиус, $m$ – масса груза).
5. Как изменится период колебаний колеса с грузом-цилиндром, если этот груз не закреплен жестко на шпильке с резьбой, а свободно насажен на гладкую шпильку, находящуюся в том же месте колеса?
6. Колесо с привернутым грузом-цилиндром удерживают в положении, при котором груз находится строго над осью. После освобождения колесо, двигаясь под действием силы тяжести, проходит положение устойчивого равновесия с угловой скоростью $\omega$. Каким будет период колебаний этого колеса с грузом, если его отклонить от положения равновесия на небольшой угол?
7. Частота малых колебаний физического маятника равна $\omega_1$. После того, как к маятнику на линии, проходящей через ось и центр масс, прикрепили небольшое тело массы $m$, частота колебаний стала $\omega_2$. Найти момент инерции первоначального маятника. Рассмотреть случаи, когда центр масс маятника и прикрепленное тело находятся по одну и по разные стороны от оси вращения.
8. В сплошном однородном цилиндре радиуса $R$ сделана цилиндрическая полость радиуса $R/2$ с осью, проходящей параллельно оси цилиндра через середину его радиуса. Определить период малых колебаний, которые возникнут, если положить цилиндр на горизонтальную плоскость, слегка

отклонив его от положения равновесия. Считать, что цилиндр будет кататься без проскальзывания.

## Список литературы


1. Определение момента инерции махового колеса. Описание к лабораторной работе /Под ред. А. Г. Любиной. Горький: изд. ГГУ, 1961.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 1. Механика. М.: Физматлит, 2002.
3. Иродов И.Е. Механика. Основные законы. 3-е изд., перераб. и доп. М.: Высш. шк., 1985.