

Атомная физика

Лекция 18

М.Ю. Рябиков

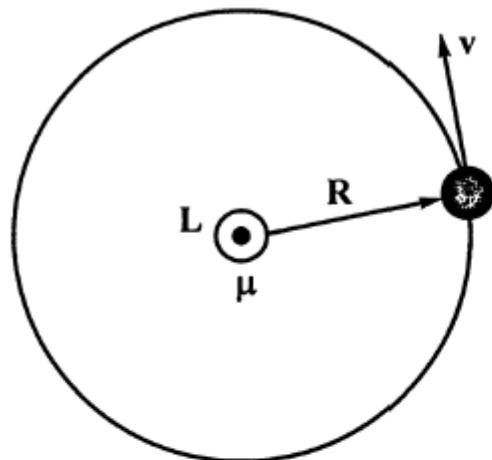
канд. физ.-мат. наук, в.н.с. ИПФ РАН

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, ВШОПФ

2025

Магнитные свойства атома водорода

Классическое гиromагнитное отношение



Рассмотрим классическую частицу с массой m_0 и электрическим зарядом q , равномерно движущуюся по окружности радиуса R . В нерелятивистском приближении момент импульса частицы дается классическим выражением

$$\mathbf{L} = m_0[\mathbf{R}\mathbf{v}], \quad (18.1)$$

где \mathbf{v} – скорость частицы, \mathbf{R} – её радиус-вектор в системе координат с центром, совмещенным с центром окружности.

Модуль момента импульса частицы выражается как

$$L = m_0 v R, \quad (18.2)$$

где v – модуль скорости частицы. Вектор момента импульса \mathbf{L} направлен, как изображено на рисунке.

Движущаяся по кругу заряженная частица эквивалентна витку с током → возникает магнитный момент μ . Вектор μ перпендикулярен плоскости движения частицы. Его направление находится по правилу буравчика: если вращать ручку буравчика в направлении тока, то направление магнитного момента будет совпадать с направлением поступательного движения буравчика.

Если заряд частицы положительный, то векторы \mathbf{L} и $\boldsymbol{\mu}$ параллельны, если отрицательный – антипараллельны.

Вычислим модуль магнитного момента, пользуясь его классическим определением:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{I}{c} \mathbf{S}, \quad (18.3)$$

где I – ток, S – площадь витка, c – скорость света в вакууме.

Выразим ток как заряд частицы, делённый на период её вращения:

$$I = \frac{q}{T}, \quad (18.4)$$

где период представим как

$$T = \frac{2\pi R}{v}. \quad (18.5)$$

Подставим (18.4), (18.5) в (18.3) \rightarrow

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{qR}{2c} \mathbf{v}. \quad (18.6)$$

Теперь для рассматриваемой классической частицы найдём отношение модулей её магнитного момента и момента импульса. Делим (18.6) на (18.2) →

$$\frac{\mu}{L} = \frac{q}{2m_0c}. \quad (18.7)$$

В векторном виде связь векторов μ и L запишется отсюда как

$$\mu = \frac{q}{2m_0c} L. \quad (18.8)$$

→ Векторы магнитного и механического моментов заряженной частицы, движущейся по окружности, пропорциональны друг другу. Коэффициент пропорциональности

$$\gamma = \frac{q}{2m_0c} \quad (18.9)$$

является скалярной величиной, называемой **гиромагнитным отношением**.

Обратим внимание, что величина γ не зависит от радиуса траектории и скорости движения, а определяется только массой и электрическим зарядом частицы, т.е. собственными параметрами объекта. Оказывается, что соотношение (18.9) остается справедливым и для произвольной по форме замкнутой траектории и неравномерного движения частицы, а также для тел произвольной формы с одинаковым видом распределения в них массы и электрического заряда.

В квантовой механике понятие траектории некорректно. Как найти аналог классического гиromагнитного отношения в рамках КМ подхода?

Воспользуемся тем, что в КМ соотношения между классическими величинами переносятся на операторы. Т.обр., мы можем ввести оператор магнитного момента частицы, связанный с оператором момента импульса соотношением, аналогичным (18.8). При этом учтем, что для электрона $q=-e$, $m_0=m_e \rightarrow$

$$\hat{\mu} = -\frac{e}{2m_e c} \hat{\mathbf{L}}. \quad (18.9)$$

Будем рассматривать стационарные состояния атома водорода, в которых у электрона проекция орбитального момента L_z имеет определённое значение. Из (18.9):

$$\mu_z = \frac{-e}{2m_e c} L_z. \quad (18.10)$$

→ Состояния с точно определённым значением z -проекции орбитального момента одновременно характеризуются точным значением z -проекции магнитного момента. Оказывается, что наиболее важной характеристикой магнетизма является не модуль, а проекция магнитного момента на выделенное направление в пространстве. Это направление, в частности, может быть задано внешним электрическим или магнитным полем.

Выражение (18.10) означает, что для атомарного электрона должно быть справедливо классическое гиromагнитное отношение, несмотря на неклассический характер его движения.

Дискретность спектра значений $L_z = \hbar m$, где m – магнитное квантовое число, означает, что магнитный момент электрона в атоме водорода тоже квантуется, т.е. принимает ряд значений, пропорциональных магнитному квантовому числу

$$\mu_z = \mu_B m, \quad (18.11)$$

где параметр

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \quad (18.12)$$

носит название **«магнетон Бора»**. Величина μ_B определяется только фундаментальными константами и равна приблизительно 0.927×10^{-20} эрг/Гс.

(18.11) → Как и z -проекция углового момента, z -проекция магнитного момента может принимать $2l+1$ значений, из которых l положительных и столько же отрицательных.

Выводы о квантовании z -проекции углового момента (а, следовательно, и магнитного момента) следовали уже из теории Бора-Зоммерфельда, появившейся ещё до создания квантовой механики. Эти выводы нуждались в экспериментальном подтверждении.

Первые эксперименты для проверки этих выводов были сделаны немецкими физиками О. Штерном и В. Герлахом в 1922 г.

Опыт Штерна-Герлаха.

Опыты по измерению магнитного момента электрона базируются на регистрации ускоренного движения частиц (например, атомов) с магнитным моментом, возникающего при их попадании в неоднородное магнитное поле.

В классической физике установлено, что в неоднородном магнитном поле на тело с магнитным моментом действует сила

$$\mathbf{F} = (\mu \nabla) \mathbf{B}. \quad (18.13)$$

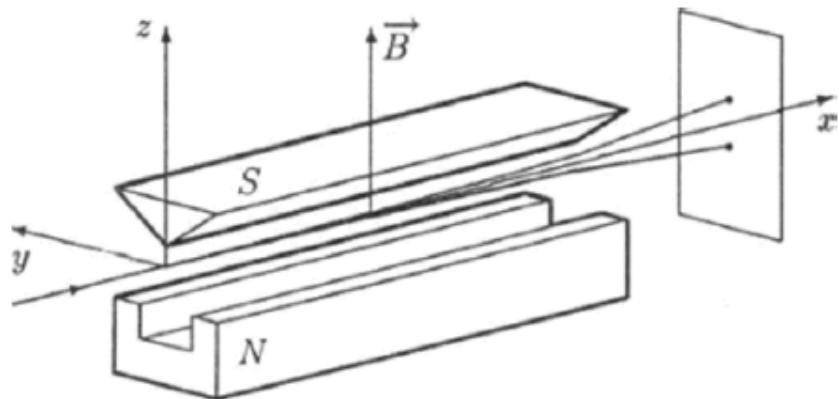
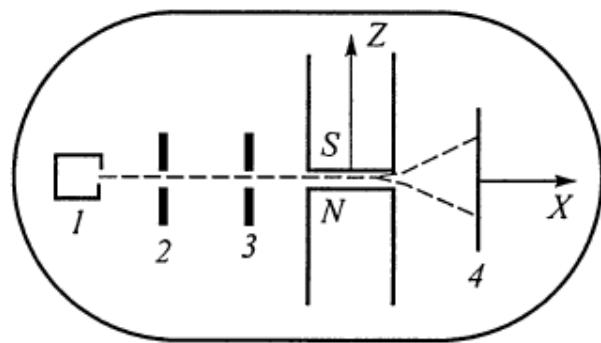
z-проекция этой силы имеет вид

$$F_z = \mu_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + \mu_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + \mu_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \quad (18.14)$$

(аналогично для F_x, F_y).

Методика измерения магнитного момента атома в стационарном состоянии путем пропускания узких атомарных пучков через неоднородное магнитное поле была впервые разработана П.Л. Капицей и Н.Н. Семёновым в 1920 г. Соответствующий эксперимент был проведён Штерном и Герлахом в 1922 г.

В опыте Штерна-Герлаха измерения проводились внутри сосуда, в котором создавался высокий вакуум (рисунок слева). Атомы вещества, нагретого в печке, получали скорости в несколько сотен м/с и разлетались в разные стороны. Диафрагмой вырезался узкий пучок, который проходил через область сильно неоднородного магнитного поля.



Для получения наблюдаемого эффекта неоднородность поля должна была быть очень значительной на атомных масштабах ($\sim 10^{-8}$ см). Для создания такого поля использовалась специальная форма полюсных наконечников магнитов с острыми рёбрами и канавками (рисунок справа). После прохождения этой области атомы попадали на экран с фотоэмulsionией.

Наибольшее влияние на атомарный пучок оказывает компонента силы F_z , т.е. проекция силы на направление магнитного поля. Эта компонента вызывает смещение атомов в вертикальном направлении. Величина и направление этого смещения зависят в основном от знака и величины z -проекции магнитного момента.

Величина смещения атома определяется средней проекцией силы

$$\overline{F}_z = \mu_z \frac{d\overline{B}_z}{dz}, \quad (18.15)$$

которая связана с усредненным градиентом компоненты поля B_z . Каждый атом с определенной энергией, т.е. находящийся в стационарном состоянии, имеет одно из разрешенных значений z -проекции орбитального момента L_z , а, значит, и магнитного момента μ_z . Как мы знаем, при этом проекции L_x и L_y не имеют определённых значений, и их средние значения \overline{L}_x и \overline{L}_y равны нулю. $\rightarrow \overline{\mu}_x = \overline{\mu}_y = 0$. \rightarrow Смещение пучка определяется только величиной μ_z .

Результаты измерений должны зависеть от того, квантуется величина μ_z или нет.

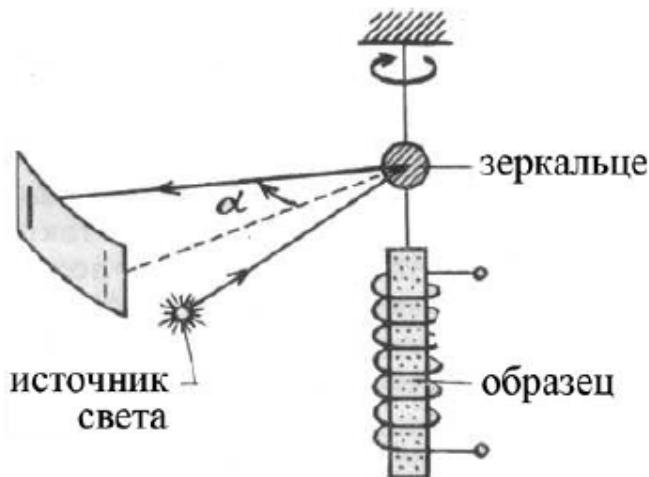
(1) Если она квантуется согласно (18.11), то пучок атомов должен разделиться на $2l+1$ отдельных пучков. Если атомы находятся в состоянии с $l=0$ и $m=0$, то пучок **не должен** отклоняться. Для атомов в состояниях с $l \neq 0$ количество пучков должно быть **обязательно нечётным**.

(2) Если же, согласно классической механике, μ_z может принимать непрерывное множество значений в интервале $[-\mu, \mu]$, то пучок должен **размазаться** в вертикальном направлении.

Опыты, проведённые Штерном и Герлахом, дали результаты, противоречащие **обоим** их этих предсказаний. Пучок атомов, заведомо находящихся в состоянии с нулевым орбитальным моментом, **расщеплялся**, причем на два пучка (**чётное** их количество). Проекция μ_z оказалась равной магнетону Бора.

Опыт Эйнштейна-де Гааза.

Экспериментальные сведения о величине гиromагнитного отношения для электрона были получены в исследованиях связи между механическим и магнитным моментами атомов. Эти опыты были проведены в 1915 г. де Гаазом, который реализовал идею, предложенную А. Эйнштейном.



На тонкой кварцевой нити подвешивался тонкий цилиндр из ферромагнетика или парамагнетика, помещённый в соленоид, по которому пропускался ток. При достаточно сильном токе магнитные моменты атомов в образце ориентируются в направлении магнитного поля соленоида. При смене направления тока ориентация магнитных моментов меняется на противоположную. Механические моменты атомов в соответствии с гиromагнитным соотношением также должны изменять своё направление.

Система является замкнутой → полный механический момент должен сохраняться: кристаллическая решётка материала цилиндра должна получить обратный механический момент (аналог явления отдачи). В результате цилиндр как целое должен повернуться и закрутить нить, на которой он подвешен.

Для усиления эффекта закручивания нити через соленоид пропускался переменный ток с частотой, равной собственной частоте крутильных колебаний цилиндра. К нити крепилось зеркальце, на которое направлялся узкий пучок света. По амплитуде колебаний светового пятна на экране можно определить угол закручивания нити, по которому рассчитать амплитуду изменения момента импульса цилиндра.

Эксперименты проводились на разных материалах. → Была обнаружена прямо пропорциональная связь между магнитными и механическими моментами. Но их отношение оказалось больше классического гиromагнитного отношения. Для железа и других ферромагнетиков это отношение оказалось **вдвое больше классического**.

Наблюдения тонкой структуры атомарных спектральных линий.

С увеличением разрешающей способности спектроскопов появились измерения, свидетельствующие о наличии **тонкой структуры** у большинства атомарных спектральных линий: эти линии представляют собой мультиплеты (дублеты, триплеты и т.д.) – группы близко расположенных спектральных линий. Тонкая структура была обнаружена даже в спектре атомов водорода: линии серии Лаймана оказались дублетами, линии серии Бальмера демонстрировали ещё более богатую структуру. Ещё более сложные спектральные картины наблюдались при воздействии на излучающие атомы магнитным полем. Экспериментальные наблюдения эффекта Зеемана дали результаты, радикально отличающиеся от предсказанных теорией Лоренца, основанной на модели атома Томсона (**«аномальный»** эффект Зеемана).

Гипотеза Уленбека-Гаудсмита.

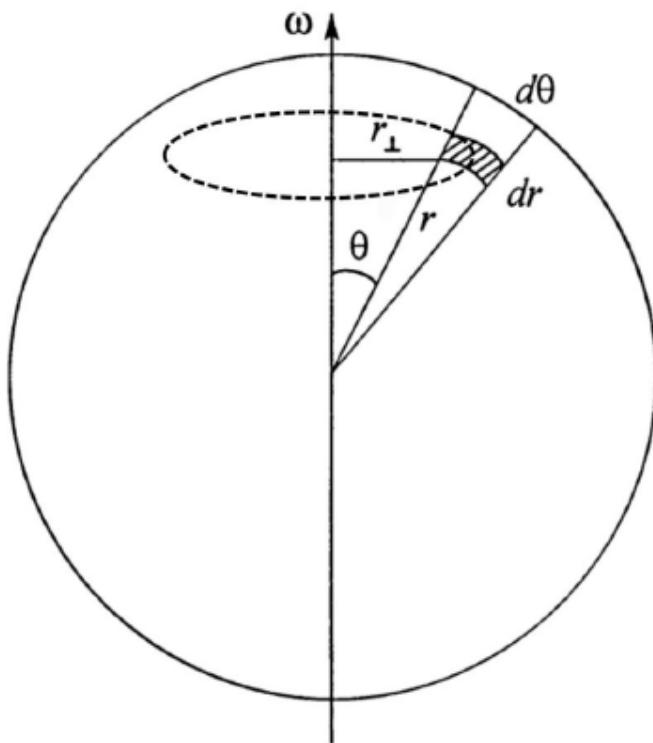
Все вышеизложенные трудности атомной физики были разрешены после того, как в 1925 г. студенты Лейденского университета Дж. Уленбек и С. Гаудсмит выдвинули гипотезу о наличии у электрона собственного магнитного момента, не зависящего от орбитального. Этот момент они связывали с вращением электрона вокруг своей оси. Отсюда возникло название такого момента – **спин** (от английского «вращение»). Поскольку электрон заряжен, его вращение вокруг своей оси, согласно гипотезе Уленбека и Гаудсмита, должно обеспечить существование собственного магнитного момента электрона. Такая трактовка, какказалось, ещё более укрепила позиции планетарной модели атома: электроны, подобно планетам, не только вращаются вокруг ядра, но и совершают вращение вокруг своей оси. Хотя сама по себе гипотеза о спине электрона оказалась верной, классическая трактовка этого феномена оказалась несостоятельной.

Классическая модель вращающегося электрона и её несостоятельность.

Представим электрон в виде заряженного шара радиуса R , вращающегося с частотой ω вокруг оси, проходящей через его центр. Предположим, что электрический заряд шара равномерно распределён по его объёму. → Плотность заряда выражается соотношением

$$\rho = \frac{e}{V} = \frac{3e}{4\pi R^3}, \quad (18.16)$$

где e – элементарный заряд.



Введём сферическую систему координат, начало которой совместим с центром шара, а полярную ось – с осью его вращения.

Выберем внутри шара произвольную точку с координатами r , θ и φ , где r – расстояние до точки от начала координат, θ и φ – полярный и азимутальный углы. Элементарный объём в окрестности этой точки:

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi. \quad (18.17)$$

Интегрирование по азимутальному углу в пределах от 0 до 2π даст элементарное кольцо, расположенное перпендикулярно оси вращения. Радиус кольца:

$$r_{\perp} = r \sin \theta. \quad (18.18)$$

Площадь поперечного сечения кольца:

$$d\sigma = r \, d\theta \, dr. \quad (18.19)$$

→ Объём элементарного кольца: $2\pi r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta$. Его электрический заряд:

$$dq = \rho \cdot 2\pi r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta. \quad (18.20)$$

Эквивалентный ток элементарного кольца получается делением заряда (18.20) на период вращения шара:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (18.21)$$

→ Ток $dj = dq/T$, создаваемый вращением элементарного заряженного элемента шара с объемом dV :

$$dj = \rho\omega r^2 \sin\theta dr d\theta. \quad (18.22)$$

Любой замкнутый ток создаёт магнитный момент, пропорциональный произведению силы тока на площадь, охватываемую контуром тока.

$$\mu = \frac{I}{c} S. \quad (18.23)$$

→ Каждый кольцевой ток даёт вклад в магнитный момент вращающегося шара, равный

$$d\mu = \frac{dj}{c} \pi r_{\perp}^2 = \frac{\rho\omega\pi}{c} r^4 \sin^3\theta dr d\theta. \quad (18.24)$$

Модуль магнитного момента всего шара вычисляется интегрированием (18.24).

Магнитный момент шара:

$$\mu = \frac{\rho\omega\pi}{c} \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\rho\omega\pi}{15c} R^5. \quad (18.25)$$

Подставим объёмную плотность заряда (18.16) в правую часть (18.25) →

$$\mu = \frac{e\omega}{5c} R^2. \quad (18.26)$$

Для оценки положим, что максимальное значение магнитного момента вращающегося шара (18.26) достигается, если точки на экваторе движутся со скоростью света. →

$$\mu = \frac{eR}{5}. \quad (18.27)$$

Магнитный момента электрона есть величина порядка магнетона Бора. Более точно, согласно теории Дирака, модуль магнитного момента свободного электрона равен $\mu = \sqrt{3} \mu_B$. Подставив это значение в (18.27), получаем оценку радиуса электрона: $R \sim 10^{-10}$ см, что на 3 порядка больше размера протона или нейтрона. Если же в (18.27) подставить реальное значение размера электрона (менее 10^{-16} см), то получается, что реалистичное значение магнитного момента обеспечивается лишь при скорости движения точек на экваторе шара на 6 порядков больше скорости света!

Проведенный анализ показывает, что спин не имеет классического аналога, являясь сугубо квантовомеханической характеристикой частиц.

Понятие спина было введено в квантовую механику Вольфгангом Паули. Поль Дирак (1928 г.) показал, что существование спина непосредственно вытекает из релятивистской квантовой теории.

Оператор спина.

Ниже приведены некоторые основные сведения об операторе спина (подробнее см. в курсах квантовой механики).

Спин обладает типичными свойствами квантовомеханического момента. В частности, собственные значения оператора квадрата спинового момента

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 \quad (18.28)$$

выражаются формулой

$$S^2 = \hbar^2 s(s+1), \quad (18.29)$$

где безразмерная величина s называется **спиновым квантовым числом**.

Спином обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы. Так, для частиц, из которых состоят атомы, т.е. электронов, протонов и нейтронов, $s=1/2$.

Возможные значения проекции спина на заданную ось (в дальнейшем – ось z) равны

$$S_z = \hbar m_s = -\hbar s, -\hbar(s-1), \dots, \hbar(s-1), \dots, \hbar s. \quad (18.30)$$

Количество возможных проекций спина на выбранную ось равно $2s+1$.

Для частицы с $s = 1/2$ (в том числе для электрона)

$$m_s = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}. \quad (18.31)$$

Оператор спина для частицы с $s = 1/2$ может быть выражен через матрицы Паули

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{\hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}, \quad (18.32)$$

где

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (18.33)$$

Можно убедиться в том, что

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.34)$$

→ Оператор квадрата спинового момента имеет вид

$$\hat{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.35)$$

Операторы проекций спина удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и операторы проекций момента импульса, в чём легко убедиться непосредственными вычислениями с помощью выражений (18.32) и (18.33):

$$\begin{aligned}\hat{S}_x \hat{S}_y - \hat{S}_y \hat{S}_x &= i\hbar \hat{S}_z, \\ \hat{S}_y \hat{S}_z - \hat{S}_z \hat{S}_y &= i\hbar \hat{S}_x, \\ \hat{S}_z \hat{S}_x - \hat{S}_x \hat{S}_z &= i\hbar \hat{S}_y.\end{aligned}\tag{18.36}$$

→ В данном состоянии спин может иметь только одну определённую проекцию. Нетрудно также убедиться, что оператор каждой проекции спина коммутирует с оператором квадрата спина:

$$\hat{S}_\alpha \hat{S}^2 - \hat{S}^2 \hat{S}_\alpha = 0 \quad (\alpha = x, y, z).\tag{18.37}$$

С учётом спина ВФ электрона должна представляться в виде произведения координатной и спиновой частей (при отсутствии спин-орбитального взаимодействия). Спиновую часть ВФ представляют в виде столбца:

$$\chi_\sigma = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix},\tag{18.38}$$

где в общем случае C_1 и C_2 – комплексные числа.

$|C_1|^2$ и $|C_2|^2$ – вероятности того, что проекция спина равна, соответственно, $S_z = \hbar/2$ и $S_z = -\hbar/2$. \rightarrow

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (18.39)$$

В частности, ВФ-я

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18.40)$$

описывает частицу с z -проекцией спина, равной $S_z = \hbar/2$. Соответственно, в состоянии, задаваемом ВФ-ей

$$\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (18.41)$$

z -проекция спина равна $S_z = -\hbar/2$.

Действительно, используя вид оператора \hat{S}_z (18.32), (18.33), получаем

$$\hat{S}_z \chi_+ = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \chi_+, \quad \hat{S}_z \chi_- = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \chi_-$$

Таким образом, стационарные состояния электрона в атоме водорода характеризуются не тремя, а четырьмя независимыми квантовыми числами:

$$n, l, m, m_s, \quad (18.42)$$

описывающими возможные значения энергии, квадрата углового момента и z -проекций углового и спинового моментов.

Квантовое число $s = 1/2$ является инвариантом и одним из важнейших параметров электрона, наряду с его массой и электрическим зарядом.

Существование спина обуславливает наличие у электрона собственного магнитного момента. Согласно теории Дирака, величина его z -проекции связана с z -проекцией спина не классическим гиромагнитным отношением, а удвоенным:

$$\mu_{S_z} = \frac{-e}{m_e c} S_z = 2\gamma S_z, \quad (18.43)$$

где γ – классическое гиромагнитное отношение для электрона. Учитывая правило квантования проекции спина (18.31), получаем

$$\mu_{S_z} = \pm \mu_B, \quad (18.44)$$

где μ_B – магнетон Бора. Таким образом в (18.43) удвоенное значение спинового гиромагнитного отношения компенсируется полуцелостью значения проекции спина. Аналогичное (18.43) соотношение между модулями собственного магнитного и спинового моментов получим, положив в (18.29) $s = 1/2$, откуда $\mu = \sqrt{3} \mu_B$.

Наличие у электрона собственного магнитного момента приводит к тому, что атом водорода даже в основном состоянии или каком-то другом состоянии с $l = 0$ обладает магнитным моментом. При $l = 0$ магнитный момент атомарного электрона определяется только спином, а его проекция μ_{Sz} принимает два различных значения противоположных знаков: $\pm \mu_B$. Этот вывод согласуется с результатами опыта Штерна-Герлаха с атомами в состоянии с $l = 0$. Атомы, в которых электрон находится в состоянии с $m_S = 1/2$, будут иметь проекцию момента $-\mu_B$ и в неоднородном магнитном поле будут отклоняться от направления прямолинейного распространения атомного пучка. Другие атомы, в которых электрон находится в состоянии с $m_S = -1/2$, будут иметь проекцию магнитного момента противоположного знака и отклоняться в противоположную сторону. → Сформируются два пучка, наблюдаемые в эксперименте.

Таким образом, наличие спина у электрона и связанное с этим удвоенное гиromагнитное отношение объясняют результаты опытов Штерна-Герлаха и Эйнштейна-де Гааза.

Если же атом находится в возбужденном стационарном состоянии с $l \neq 0$, то электрон обладает не только собственным, но и орбитальным магнитным моментом. Чему равна величина полного магнитного момента? Для решения этого вопроса необходимо вначале рассмотреть полный момент импульса электрона в стационарном состоянии атома водорода.

Полный момент импульса электрона.

Набор значений, которые могут принимать орбитальный и спиновый моменты, различается. Орбитальный момент может принимать различные значения, включая равное нулю, согласно правилу $L^2 = \hbar^2 l(l+1) \rightarrow$

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)}. \quad (18.45)$$

Спиновый момент имеет единственное значение: $s=1/2 \rightarrow S^2 = \hbar^2 s(s+1) = \hbar^2 \times 3/4 \rightarrow$

$$S = \hbar \sqrt{3}/2. \quad (18.46)$$

Полный момент импульса электрона складывается из орбитального \mathbf{L} и собственного \mathbf{S} . В классической физике эти моменты складываются, как любые вектора:

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (18.47)$$

причём угол между складываемыми векторами может быть любым.

Квантовомеханические правила сложения моментов излагаются в курсах квантовой механики. Ниже мы рассмотрим эти правила на простейшем примере суммирования орбитального и спинового моментов в атоме водорода.

Для полного момента справедливы те же правила квантования, которые обсуждались нами ранее для орбитального момента. В стационарных состояниях имеют определённые значения квадрат модуля полного момента J^2 и одна из его проекций J_z . Квадрат модуля полного момента квантуется по закону

$$J^2 = \hbar^2 j(j + 1), \quad (18.48)$$

где j – квантовое число модуля полного момента. Положительное число j зависит от орбитального числа l и связано с ним следующим образом:

$$j = \begin{cases} l \pm s & \text{при } l \neq 0, \\ s & \text{при } l = 0, \end{cases} \quad (18.49)$$

где $s=1/2$. Значения s – полуцелые \rightarrow значения j также полуцелые.

Согласно (18.49), в состояниях с определённым орбитальным числом $l \neq 0$ квантовое число j для электрона может принимать только два различных значения. \rightarrow
При заданном L модуль полного момента J может принимать только два разных значения

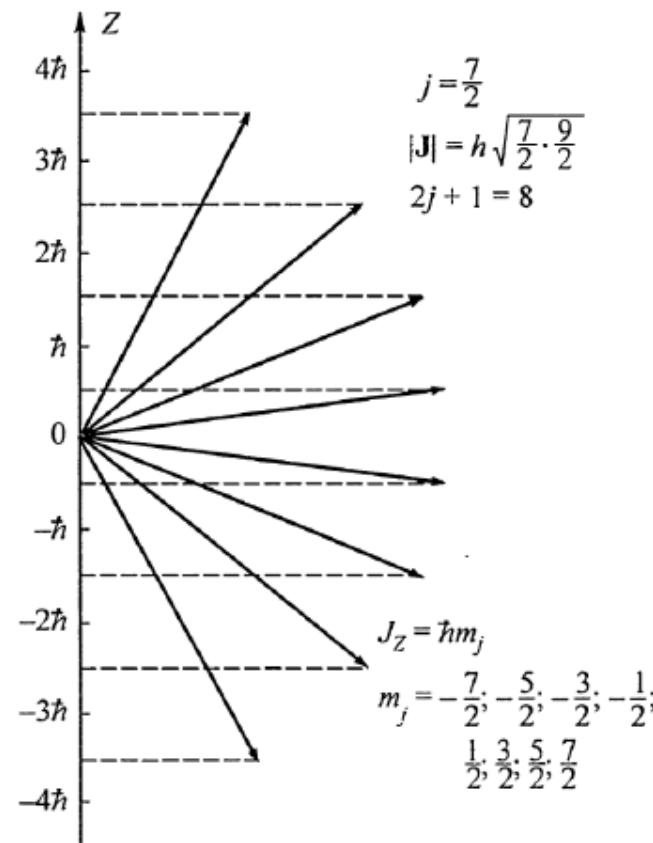
$$J_1 = \hbar \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{3}{2}\right)}, \quad J_2 = \hbar \sqrt{\left(l - \frac{1}{2}\right) \left(l + \frac{1}{2}\right)}. \quad (18.50)$$

Можно сказать, что, в отличие от классических векторов, орбитальный и спиновый моменты могут складываться лишь двумя способами.

Проекция полного момента квантуется по правилу

$$J_z = \hbar m_J. \quad (18.51)$$

Квантовое число модуля m_J пробегает ряд значений от $-j$ до j с шагом $\Delta m_J = 1$:



$$m_J = -j, -j + 1, \dots, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots, j - 1, j. \quad (18.52)$$

Все значения j – полуцелые \rightarrow значения m_J также полуцелые. При заданном j общее количество этих значений (а, значит, и значений J_z) равно $2j+1$.

Для графического представления квантования проекции полного момента можно воспользоваться векторной моделью, аналогичной рассмотренной нами ранее для изображения квантования проекций орбитального момента.

На рисунке приведен пример графического представления квантования проекции полного момента для случая $j = 7/2$. Рисунок наглядно демонстрирует 8 возможных проекций полного момента для этого случая.

Вернемся к вопросу о вычислении магнитного момента электрона в атоме водорода. Из факта существования определённых значений модуля J и одной из проекций полного механического момента J_z следует и существование определённых значений проекций полного магнитного момента μ_z , при этом можно ожидать, что величина μ_z пропорциональна проекции полного механического момента J_z .

Квантовомеханическое рассмотрение подтверждает наличие линейной связи между величинами μ_z и J_z . Эта связь может быть записана в виде

$$\mu_z = g \frac{-e}{2m_e c} J_z = g \gamma_{\text{кл}} J_z, \quad (18.53)$$

где безразмерный множитель g перед классическим гиromагнитным соотношением $\gamma_{\text{кл}}$ называется ***g-фактором*** или ***множителем Ланде***. Расчёты показывают, что для атома водорода g -фактор определяется квантовыми числами l и j согласно выражению

$$g = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}. \quad (18.54)$$

Множитель Ланде может меняться в довольно широких пределах. Например, в состоянии с $l = 1$ и $j = 1/2$ множитель Ланде равен $2/3$, а при $l = 1$ и $j = 3/2$ он равен $4/3$. При $l = 0$ ($j = s = 1/2$) получаем $g = 2$, чем объясняются результаты опыта де Гааза-Эйнштейна. При $l \rightarrow \infty$ имеем также $j \rightarrow l \rightarrow \infty$, отсюда $g \rightarrow 1$, т.е. в пределе больших квантовых чисел, в согласии с принципом соответствия, получаем классическое соотношение между механическим и магнитным моментами.