

УДК 53. Дифференцирование и интегрирование сигналов. Описание к лабораторной работе / Составитель И.Я. Королев. – Н.Новгород: Нижегородский государственный университет, 1992. – 9с.

В работе изучаются простейшие четырехполюсники, осуществляющие приближенное дифференцирование и интегрирование входных сигналов. Расчитаны коэффициенты передачи четырехполюсников, осуществляющих точное дифференцирование и интегрирование, и выведены условия, при которых практически осуществимые четырехполюсники могут удовлетворительно осуществлять эти операции. Приводятся описание экспериментальной установки и вопросы для самопроверки.

Рис. 3.

Составитель: И.Я. Королев

Рецензент: М.И. Бакунов

Нижегородский государственный университет  
им. Н.И.Лобачевского, 1992

В радиотехнических приборах часто требуется осуществить преобразование исходного электрического сигнала, носящее характер дифференцирования или интегрирования. Иными словами, если на вход некоего четырехполюсника подать сигнал  $u_{\text{вх}}(t)$ , то с выхода дифференцирующего четырехполюсника должен сниматься сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0 \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}, \quad (1)$$

а с выхода интегрирующего четырехполюсника – сигнал

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt, \quad (2)$$

где  $\tau_0$  – константа, имеющая размерность времени, которую в дальнейшем будем называть постоянной времени.

Поскольку дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции, то и на практике они осуществляются с помощью линейных четырехполюсников. Рассмотрим четырехполюсники, изображенные на рис.1.

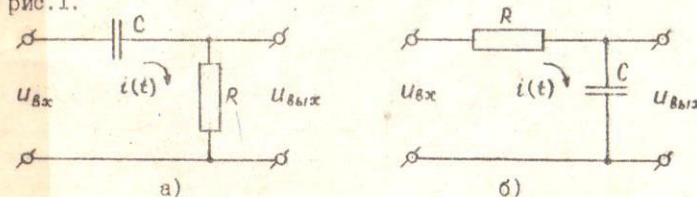


Рис.1

Подразумевая под входным сигналом электродвижущую силу, запишем уравнение второго закона Кирхгофа для этих схем:

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = u_{\text{вх}}(t). \quad (3)$$

Умножив это выражение на  $C$  и считая, что произведение  $RC$  равно постоянной времени цепи  $\tau_0 = RC$ , будем иметь:

$$\tau_0 i(t) + \int_{-\infty}^t i(t) dt = C u_{\text{вх}}(t). \quad (4)$$

Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого  $\tau_0$ . Если  $\tau_0$  очень мало, то можно пренебречь первым слагаемым в (4). Продифференцировав оставшееся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по  $t$ , получим:

$$i(t) \approx C \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$



Напряжение на резисторе  $R$ , пропорциональное току, будет, в свою очередь, пропорционально производной от входного сигнала

$$U_R = R i(t) \approx RC \frac{du_{\delta x}}{dt} = \tau_0 \frac{du_{\delta x}}{dt}$$

Таким образом, схема, приведенная на рис. 1а, у которой  $U_R = u_{\delta x}(t)$ , может осуществлять приближенное дифференцирование входного сигнала.

При очень больших  $\tau_0$  можно отбросить второе слагаемое в (4). Тогда ток будет пропорционален входному сигналу

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0} u_{\delta x}(t) = \frac{1}{R} u_{\delta x}(t),$$

а напряжение на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \approx \frac{1}{RC} \int_{-\infty}^t u_{\delta x}(t) dt = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\delta x}(t) dt$$

пропорционально интегралу от входного сигнала. Такое преобразование может приближенно осуществлять четырехполосник, приведенный на рис. 1б.

Уточним теперь приведенные выше понятия: "малое" и "большое"  $\tau_0$ . Проще всего это сделать на спектральном языке.

Известно, что практически все радиосигналы могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических составляющих, в частности, для периодических сигналов - в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n).$$

Этот же ряд, если воспользоваться формулой Эйлера, может быть записан в комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n e^{jn\Omega t},$$

где комплексная амплитуда  $n$ -ой гармоники определяется интегралом

$$\dot{A}_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) e^{-jn\Omega t} dt$$

Здесь  $T$  - период функции  $u(t)$ , связанный с угловой частотой соотношением  $T = 2\pi/\Omega$

Для непериодических сигналов аналогичные соотношения имеют вид:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Множитель  $S(j\omega) = S(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$  называют спектральной плотностью.

Связь между коэффициентами Фурье  $\dot{A}_n$  и спектральной плотностью  $S(j\omega)$  иллюстрируется рисунками 2а, б, на первом из которых изображены амплитудная и фазовая спектрограммы произвольной периодической последовательности импульсов, а на втором - спектр одиночного импульса из этой последовательности. Форма огибающей на рис. 2а в некотором масштабе повторяет вид функции на рис. 2б.

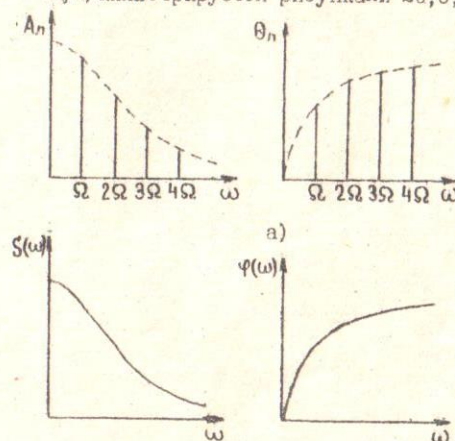


Рис. 2

Для четырехполосников вводится также понятие коэффициента передачи: комплексной функции вида

$$K(j\omega) = \frac{\dot{U}_{\delta x}}{\dot{U}_{\delta x}} = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

где  $\dot{U}_{\delta x}$  и  $\dot{U}_{\delta x}$  - комплексные амплитуды входного и выходного напряжений. (Напомним, что для сигнала вида  $u(t) = U e^{j(\omega t + \varphi)}$  комплексная амплитуда записывается в виде  $\dot{U} = U e^{j\varphi}$ ).

Модуль  $K(\omega)$  называют амплитудной характеристикой четырехполосника, а аргумент  $\varphi(\omega)$  - фазовой характеристикой.

Каждая гармоника входного сигнала даст на выходе линейного четырехполосника гармонический отклик той же частоты. Для его нахождения нужно эту гармонику умножить на коэффициент передачи четырехполосника. Просуммировав отклики по всем гармоникам, можно определить выходной сигнал. В частности, для непериодических сигналов выражение для выходного сигнала запишется в интегральной форме:

$$u_{\delta x}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (6)$$

где  $S(j\omega)$  - спектральная плотность входного сигнала.

Т.к. при дифференцировании напряжения  $u_{\delta x} = \tau_0 \frac{du_{\delta x}}{dt}$ , то используя (5) и (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} u_{\delta x}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \tau_0 \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] = \\ &= \tau_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned}$$



Из последнего равенства видно, что коэффициент передачи дифференцирующего четырехполосника

$$K(j\omega) = \tau_0 j\omega = \tau_0 \omega e^{j\pi/2} \quad (7)$$

Например, при дифференцировании гармонического напряжения типа  $e^{j\omega t}$  выражение для выходного сигнала имеет вид:

$$u_{вых}(t) = \tau_0 \frac{d}{dt} e^{j\omega t} = \tau_0 j\omega e^{j\omega t} = \tau_0 \omega e^{j\pi/2} e^{j\omega t}.$$

Иными словами, для получения требуемого выходного сигнала каждая гармоника входного сигнала домножается на коэффициент  $\tau_0 \omega$  и сдвигается по фазе на  $\pi/2$ .

Аналогичным образом для интегрирующей цепи можно получить

$$K(j\omega) = \frac{1}{\tau_0 j\omega} = \frac{1}{\tau_0 \omega} e^{-j\pi/2} \quad (8)$$

Показанные на рис. 1а, б четырехполосники имеют коэффициенты передачи

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = RC \frac{j\omega}{1 + RCj\omega} = \frac{\tau_0 j\omega}{1 + \tau_0 j\omega} \quad (9)$$

и

$$K(j\omega) = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega CR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}} = \frac{1}{\tau_0 j\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau_0 j\omega}} \quad (10)$$

соответственно.

Из сравнения выражений (7) и (9) следует, что для удовлетворительного дифференцирования необходимо выполнение условия:

$$\tau_0 \omega \ll 1,$$

а сравнивая выражения (8) и (10), приходим к выводу, что удовлетворительное интегрирование возможно, если

$$\tau_0 \omega \gg 1.$$

Причем, эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра входного сигнала (говоря о существенной части спектра входного сигнала, имеется в виду, что теоретически спектр любого сигнала бесконечен).

Из этих неравенств вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) коэффициент передачи четырехполосника, осуществляющего это преобразование. В пределе при идеальном преобразовании  $K(\omega) \rightarrow 0$ .

Вообще говоря, все предыдущие рассуждения о степени точности интегрирования или дифференцирования носили чисто качественный характер. Можно было бы, конечно, попытаться ввести какие-либо количест-

венные критерии, но вряд ли стоит это делать. На практике все выглядит достаточно просто: есть конкретный сигнал с конкретным спектром, который нужно продифференцировать или проинтегрировать с заданной степенью точности. Исходя из этого и выбираются параметры соответствующего четырехполосника.

В заключение отметим, что рассмотренные выше модели дифференцирующих и интегрирующих цепей практически являются элементами более сложных электронных устройств. Как правило, для этих целей применяются операционные усилители с обратной связью (в качестве элементов обратной связи и используются  $R$ ,  $C$  -цепочки). В этом случае удастся сочетать приемлемый коэффициент передачи с достаточно высоким качеством преобразования.

#### Описание экспериментальной установки

Дифференцирующий и интегрирующий четырехполосники смонтированы в одном корпусе, на переднюю панель которого выведены разъемы для подключения входного сигнала ("ВХОД") и снятия выходного напряжения ("ВЫХОД"), тумблер для переключения режима работы с дифференцирования на интегрирование (" $d \rightarrow \int$ ") и переключатели, позволяющие изменять значения резисторов и конденсаторов, с указанием соответствующих номиналов  $R$  и  $C$ .

В качестве источников входных сигналов используются генератор типа Г6-15 (или аналогичный ему) и любой звуковой генератор.

Для регистрации сигналов можно использовать любой осциллограф, имеющий разъем "вход X", калиброванную развертку и калиброванный коэффициент усиления по вертикали.

#### Задание

1. Для дифференцирующего четырехполосника с постоянной времени  $\tau_0 = 10$  мкс и интегрирующего четырехполосника с постоянной времени  $\tau_0 = 5$  мкс снимите зависимость модуля  $K(\omega)$  и аргумента  $\varphi(\omega)$  коэффициента передачи от частоты. Входной сигнал подавайте от звукового генератора, а величину выходного сигнала фиксируйте с помощью осциллографа, используя калиброванный коэффициент усиления. Сдвиг фаз определите по форме эллипса, который получается на экране осциллографа при подаче входного сигнала на вертикальный ("Y") канал, а выходного на горизонтальный ("X") канал.

Постройте графики зависимости  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . Попробуйте качественно оценить, для какой области частот приблизительно осуществляется дифференцирование и интегрирование.



2. При помощи схемы, изображенной на рис.3а, получите осциллограмму напряжения, представленную на рис.3б, среднее значение которого равно нулю (т.е. равны площади, обозначенные штриховкой).

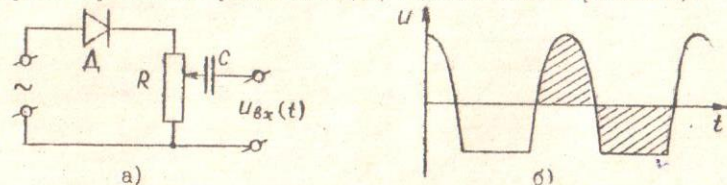


Рис.3

Разложите эту функцию в ряд Фурье. Нарисуйте ее амплитудный спектр. Считая существенными первые семь гармоник спектра, оцените параметры цепочек, пригодных для дифференцирования и интегрирования этой функции. Зарисуйте осциллограммы выходных напряжений для выбранных цепочек. По чертежу (рис.3б) постройте производную и интеграл функции  $U_{BX}(t)$  и сравните их с полученными осциллограммами.

3. Подайте на вход осциллографа сигналы с генератора импульсов (меандр-ПП, треугольник-ММ и пилу-ЛЛ). Зарисуйте их осциллограммы. Постройте графически производную и интеграл от этих сигналов.

4. Подключив выход генератора импульсов ко входу четырехполосников, получите осциллограммы преобразованных сигналов. При неизменной частоте следования импульсов убедитесь, как влияет изменение постоянной времени на качество преобразований. Оцените постоянные времени, при которых, на ваш взгляд, наступает удовлетворительное дифференцирование и интегрирование. Сравните ваши оценки с теоретическими.

5. Проведите то же задание, изменяя частоту следования импульсов при неизменной  $\tau_0$ .

При выполнении этих заданий зарисовывайте осциллограммы преобразованных сигналов как в режиме, когда дифференцирование и интегрирование еще не наступило, так и в режиме, когда, по-вашему, дифференцирование и интегрирование вполне удовлетворительно.

6. Выясните, какой из трех импульсных сигналов при прочих равных условиях "легче" дифференцируется или интегрируется. Обоснуйте ваш вывод со спектральной точки зрения.

# Вопросы

1. Выведите формулу (8).
2. Почему нельзя неограниченно увеличивать постоянную времени интегрирующего четырехполосника и неограниченно уменьшать - дифференцирующего?
3. Чем отличается спектр периодических и непериодических сигналов?
4. Каким условиям должны удовлетворять приборы, подключаемые ко входу и выходу исследуемых четырехполосников?
5. Поясните принцип работы схемы, изображенной на рис.3а.
6. Изобразите векторные диаграммы напряжений для четырехполосников, представленных на рис.1а,б. Проследите, как изменятся соотношения между  $U_{\text{вых}}$  и  $U_{\text{вх}}$  при изменении  $\tau_0$ .