Справка
«Решение задач механики методами механики Лагранжа»

Можаров А.Р.

15 ноября 2024 г.

Теория

Силы

1. **Потенциальные силы.** Сила $\vec{F}$ называется *потенциальной*, если существует такая скалярная функция Φ (*потенциал*) координат и времени, что сила может быть представлена как градиент этой функции (взятый с обратным знаком).

   $$\vec{F} = -grad\ \Phi \qquad \Phi = \Phi(x, y, z, t)$$

   Критерием потенциальности является

   $$rot\ \vec{F} = 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x},\ \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},\ \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

   (a) **Консервативные силы.** *Консервативная сила* — это потенциальная сила, потенциал которой не зависит от времени.

   $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \qquad \Phi = \Phi(x, y, z)$$

   Основными свойствами таких сил являются

   $$A_{1\to 2} = -(\Phi_2 - \Phi_1) \qquad \oint (\vec{F}, \vec{dl}) = 0$$

2. **Непотенциальные силы.**

Общий алгоритм

1. **Определить число степеней свободы.**

   Если система состоит из N материальных точек и имеет k голономных связей, то число степеней свободы s есть

   $$s = 3N - k$$

2. **Выбрать обобщённые координаты.** Выбрать s обобщённых координат, каждая из которых будет соответствовать одной степени свободы системы.

   Для этого может быть удобно использование недекартовых систем координат. Ниже приведены переходы в декартову (x, y, z) из цилиндрической (ρ, φ, z) и сферической (r, φ, θ) систем координат и связь между последними.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = r\sin\theta \\ \varphi = \varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

3. **Найти кинетическую и потенциальную энергии.** Выразить полные кинетическую T и потенциальную U энергии через обобщённы координаты.

   (a) **Кинетическая энергия.** Кинетическая энергия одной материальной точки выражается

$$T_{\text{дек.}} = \frac{m_i}{2}(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$
$$T_{\text{цил.}} = \frac{m_i}{2}(\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2\dot{\varphi}_i^2 + \dot{z}_i^2)$$
$$T_{\text{сфер.}} = \frac{m_i}{2}(\dot{r}_i^2 + r_i^2\dot{\varphi}_i^2\sin^2\theta_i + r_i^2\dot{\theta}_i^2)$$

   соответственно, в декартовой (x, y, z), в цилиндрической (ρ, φ, z) и в сферической (r, φ, θ) системах координат.

   (b) **Потенциальная энергия.**

4. **Записать Лагранжиан.**

$$L = T - U$$

5. **Определить законы сохранения.** Пункт необязательный, но может упростить решение путём упрощения получаемых дифференциальных уравнений.

   (a) **Закон сохранения обобщённого импульса.** При условии, что Лагранжиан не зависит явно от соответствующей обобщённой координаты (называемой *циклической*), сохраняется обобщённый импульс, соответствующий этой координате, который имеет вид

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = const$$

   (b) **Закон сохранения обобщённой энергии.** При условии, что Лагранжиан не зависит явно от времени, сохраняется обобщённая энергия, имеющая вид

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L = const$$

Если Лагранжиан представим в виде $L = L_0 + L_1 + L_2$, где L_2, L_1, L_0 являются однородными по обобщённым скоростям функциями второго, первого и нулевого порядка, соответственно, то обобщённая энергия может быть представлена в виде

$$H = L_2 - L_0$$

В том числе, если преобразования координат от естественных к обобщённым не содержат явно времени и потенциальная энергия не содержит обобщённых скоростей, то обобщённая энергия может быть выражена

$$H = T + U$$

6. **Записать уравнения движения.** Записать уравнения движения на не циклические координаты (т.к. из уравнений движения на циклические координаты получатся законы сохранения на соответствующие обобщённые импульсы).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

где Q_i — обобщённая непотенциальная сила по q_i, которая связана с исходными силами

$$Q_i = \sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_j}$$

где x_j — исходные натуральные координаты, а F_j — компоненты сил по этим координатам.

(если непотенциальных сил нет, то ноль)

7. **Решить уравнения движения.** Решить уравнения движения, причём в результате решения суммарно из законов сохранения и из уравнений движения должно получиться $2s$ свободных констант.