Задачи к зачёту по квантовой механике. Первый семестр 2024/2025.

1. Вычислите $e^{i\pi\hat{A}}$, где
$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Докажите, что для двух эрмитовых операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$, действующих в некотором линейном пространстве со скалярным произведением, и для любого вектора x из этого пространства имеет место неравенство
$$\left(x, \hat{A}^2 x\right)\left(x, \hat{B}^2 x\right) \geq \frac{1}{4}\left|\left(x, [\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}]x\right)\right|^2.$$

3. Частица, движущаяся в одномерном пространстве, имеет волновую функцию
$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2p_0\hbar^3}{\pi}}\frac{1}{\hbar^2 + p_0^2 x^2}$$
Определите вероятность того, что проекция импульса частицы на ось x лежит в интервале $(0, p_1)$.

4. Определите, как гамильтониан $\hat{H} = \hat{p}_x^2/(2m) + \alpha\delta(x)$ (α — действительное число) действует на волновую функцию в импульсном представлении.

5. Докажите, что в связанном состоянии в одномерном потенциале плотность потока вероятности равна нулю.

6. Для одномерного потенциала запишите волновую функцию, соответствующую налетающей на этот потенциал слева частице с определённой энергией. Укажите, как по волновой функции определяется вероятность отражения и прохождения через потенциал, и докажите, что сумма этих вероятностей равна единице.

7. Для гамильтониана $\hat{H} = \hat{p}_x^2/(2m) + \alpha\delta(x)$ найдите вероятности прохождения и отражения от δ-барьера (или ямы) для частицы с энергией $E > 0$.

8. Найдите собственные функции $\psi_\nu(x)$ оператора $\hat{\nu} = \hat{p}_x^3$, нормированные условием
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \psi_\nu(x)\psi_{\nu'}^*(x)dx = \delta(\nu - \nu').$$

9. Пусть $\hat{H}$ — гамильтониан с дискретным спектром. Докажите, что скалярное произведение $(\psi, \hat{H}\psi)$ больше или равно энергии основного состояния $\hat{H}$, если вектор ψ нормирован на единицу.

10. Докажите, что оператор эволюции для произвольного зависящего от времени гамильтониана является унитарным.

11. Для гамильтониана $\hat{H} = \hat{p}_x^2/(2m) + m\omega^2\hat{x}^2/2$ найдите операторы $\hat{x}$ и $\hat{p}_x$ в представлении Гейзенберга.

12. Для гармонического осциллятора с частотой ω и массой m найдите нормированные волновые функции основного и первого возбуждённого состояния. Для справки: оператор уничтожения равен
$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i\hat{p}_x}{m\omega} \right).$$

13. Для гармонического осциллятора с частотой ω и массой m вычислите средние значения и дисперсии координаты и проекции импульса в стационарном состоянии с энергией $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

14. Докажите, что $(\hat{l}_x + i\hat{l}_y) |l, m\rangle = \sqrt{(l-m)(l+m+1)}\, |l, m+1\rangle$ (с точностью до фазового множителя), где $|l, m\rangle$ – нормированный вектор состояния с квадратом орбитального момента $l(l+1)$ и проекцией момента m на ось z.

15. Найдите сферическую гармонику $Y_{22}(\theta, \varphi)$ (с точностью до фазового множителя). Для справки:
$$\hat{l}_+ = \hat{l}_x + i\hat{l}_y = e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i \cot\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \right).$$

16. Пусть E_l – наименьшая энергия связанного состояния частицы с орбитальным моментом l (с квадратом момента $l(l+1)$) в некотором центральном потенциале $U(r)$. Докажите, что $E_{l_1} < E_{l_2}$ при $l_1 < l_2$.

17. Определите плотность тока при движении электрона в магнитном поле.

18. Запишите оператор поворота спина электрона на 60° против часовой стрелки относительно оси Ox, если смотреть в направлении против оси Ox. Приведите ответ к форме, не содержащей матриц Паули в экспоненте.

19. Оператор плотности $\hat{\rho}$, действующий в пространстве квадратично интегрируемых функций, определён соотношением
$$\hat{\rho}\psi(x) = \int \rho(x, x')\psi(x')dx'$$
где $\rho(x, x')$ – матрица плотности. Докажите, что оператор плотности эрмитов, неотрицательно определён, и $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}) = 1$.