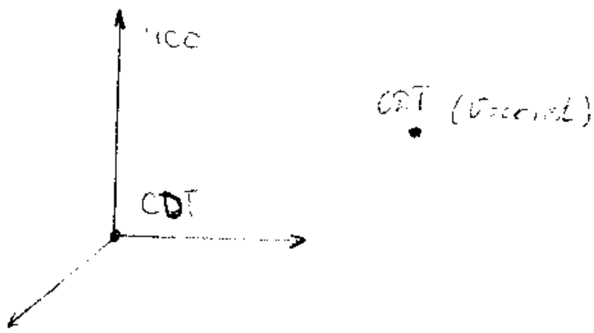
Билеты к экзамену по физике
1 семестр

~~Билет №1~~

Свободно движущееся тело. Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона.

Свободно-движущееся тело – тело, бесконечно удалённое от любых материальных тел.

Инерциальные системы отсчёта – неподвижная, относительно СДТ, система отсчёта.

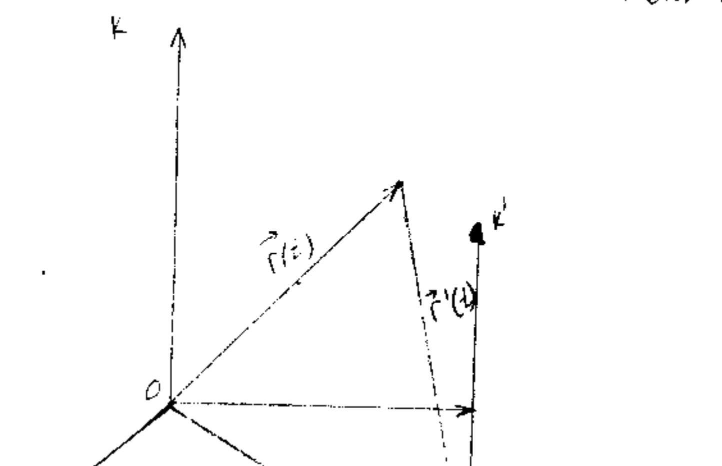


I закон Ньютона

По отношению к инерциальным системам отсчёта свободно движущееся тело всегда движется равномерно и прямолинейно, либо находится в состоянии покоя.

~~Билет №2~~:

Принцип относительности Галилея. Закон преобразований скоростей.



$\vec r(t) = \vec R(t) + \vec r'(t)$

Берём производную по времени ($\frac{d}{dt}$)

$\frac{d\vec r(t)}{dt} = \frac{d\vec R(t)}{dt} + d$

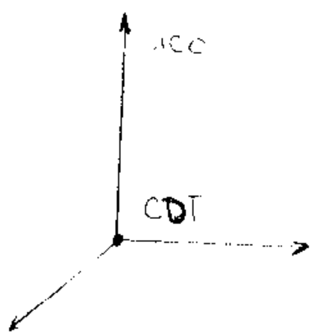
$\vec v(t) = V$

Билеты к экзамену по физике
1 семестр

Свободно движущееся тело. Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона.

Свободно-движущееся тело – тело, бесконечно удалённое от любых материальных тел.

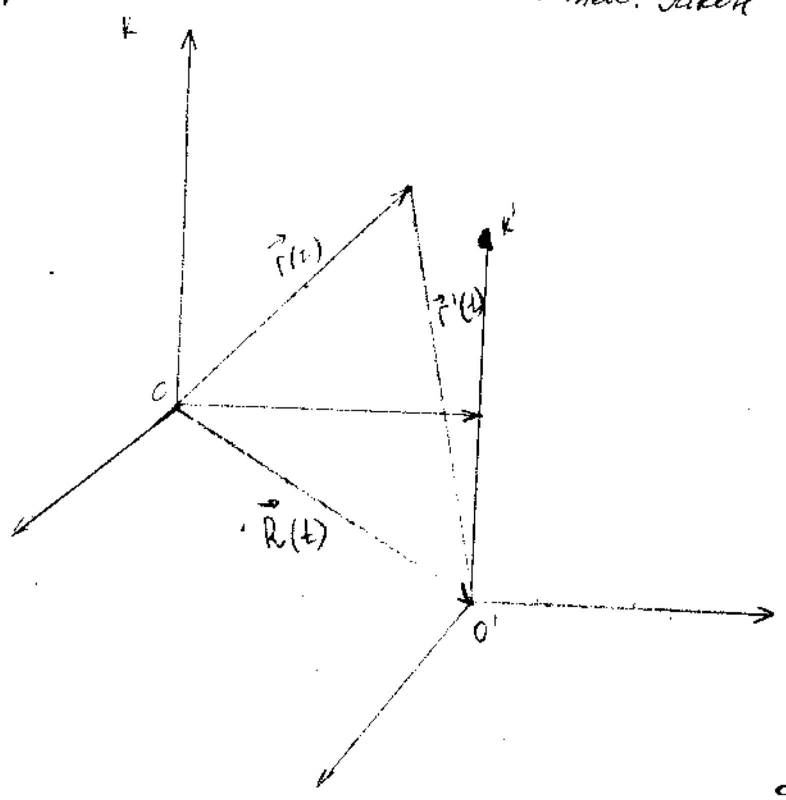
Инерциальные системы отсчёта – неподвижная, относительно СДТ, система отсчёта.



I закон Ньютона

По отношению к инерциальным системам отсчёта свободно движущееся тело всегда движется равномерно и прямолинейно, либо находится в состоянии покоя.

Принцип относительности Галилея. Закон преобразований скоростей.



$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t)$$

Берём производную по времени $\left(\frac{d}{dt}\right)$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} + \frac{d\vec{r}'(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = V(t) + v'(t)$$

Условия выполнения:
$dt = dt'$
$dl = dl'$
$v, v', V \ll c$

Принцип относительности:

Все физические законы в инерциальных системах отсчёта протекают одинаково, независимо от того неподвижна ли СО или находится в состоянии равномерного движения.

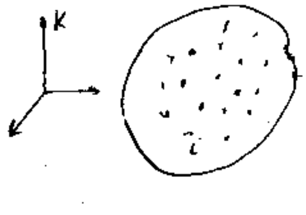
Отсюда следует, что все законы механики во всех инерциальных системах отсчёта выполняются одинаково.

[redacted]

Замкнутые системы. Импульс. Закон сохранения импульса. Инертная масса.

Замкнутая система тел – совокупность тел, у которых взаимодействия со внешними телами отсутствуют.

Рассмотрим замкнутую систему тел.



$i = 1, 2, \ldots, N$

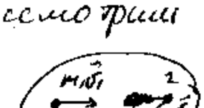
$\vec{v}_i(t)$ – меняется во времени

$\sum\limits_{i=1}^{N} \vec{v}_i(t) \neq const$

Но можно подобрать такой „коэффициент", называемый инертной массой, m_i, что

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i(t) = \vec{p} = const$$, где $m_i v_i = p$ - импульс отдельной частицы.

Рассмотрим замкнутую систему двух тел.



Тела взаимодействуют только друг с другом, в результате их скорости меняются, тогда $m_1 \Delta V_1 = m_2 \Delta V_2$, где

ΔV_1 - изменение скорости 1

ΔV_2 - изменение скорости 2

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{|\Delta V_2|}{|\Delta V_1|}$$

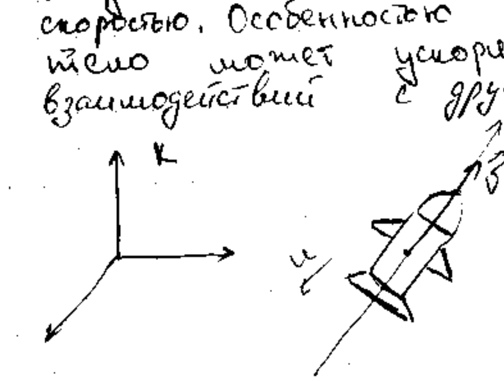
Импульс - вектор, равный произведению массы точки на её скорость.

Импульс замкнутой системы сохраняется

[redacted]

Реактивное движение

Реактивное движение – это движение, которое возникает при отделении от тела некоторой его части с определённой скоростью. Особенностью такого движения является то, что тело может ускоряться и замедляться без каких-либо взаимодействий с другими телами



$M \Rightarrow M + dM$

$\vec{v} \to \vec{v} + d\vec{v}$

Для ракеты выполняется ЗСИ

$$x|\; Mv = (M+dM)(v+dv) - dM(v+dv-u)$$

$$\cancel{Mv} = \cancel{Mv} + Mdv + \cancel{dMv} + \cancel{dMdv} - \cancel{dMv} - \cancel{dMdv} + udM$$

$$Mdv + udM = 0$$

$$Mdv = -udM$$

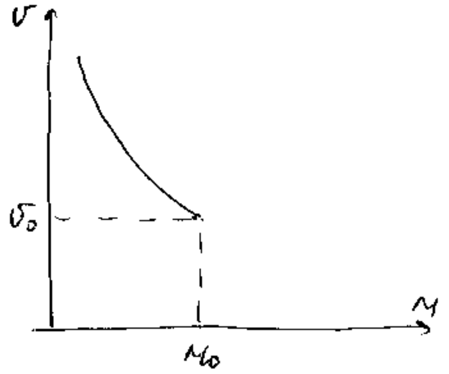
$$\frac{dv}{dM} = -\frac{u}{M}$$

$$v(M) = -\int \frac{u}{M} dM + const$$

$u = const$:

$$v(M) = -u\int\frac{dM}{M} + const = -u\ln M + const$$

$t=0 \quad v=v_0 \quad M=M_0 \Rightarrow v = v_0 + u\ln\frac{M_0}{M(t)}$ – формула Циолковского



Зависимость $v(M)$,

Билет №8.

Силы. Уравнение движения материальной точки (II закон механики). Третий (III) закон механики. Внешние и внутренние силы. Система мат. точек (уравнение движения).

А что, если $\vec p \neq const$? Значит $\vec p = \vec p(t)$, тогда

$$\frac{d\vec p}{dt} \neq 0$$

Ньютон назвал данную характеристику взаимодействия силой (всякая причина, изменяющая импульс движущегося тела)

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F, \quad p = m\vec v \Rightarrow m\frac{d\vec v}{dt} = \vec F, \quad m\vec a = \vec F, \quad m\frac{d^2\vec r}{dt^2} = \vec F$$

Уравнение движения мат. точки.

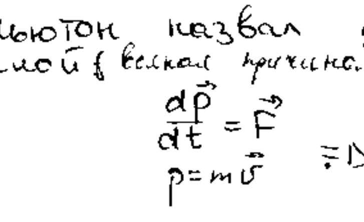
II закон механики (Ньютона)

Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

III закон механики (Ньютона)

Воздействие двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны.

Рассмотрим систему 2 тел (замкнутую)

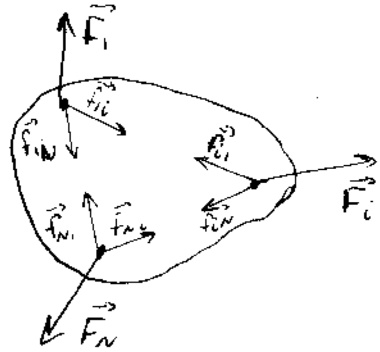


$\vec p = \vec p_1 + \vec p_2 = const$ (т.к. система замкнута)

$$\frac{d\vec p}{dt} = 0 \quad \frac{d\vec p_1}{dt} + \frac{d\vec p_2}{dt} = 0 \Rightarrow \vec F_{12} + \vec F_{21} = 0$$

(Силы $\vec F_{12}$ и $\vec F_{21}$ лежат на одной прямой, соединяющей две мат. точки)

Силы взаимодействия двух мат. точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти мат. точки.



$$\vec{F_i} = \vec{F}_{i\,внеш.} + \sum_{j\neq i}^{N} \vec{f_{ij}}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 = \sum_{i=1}^{N} (\vec{F}_{i\,внеш}) + \underbrace{\sum_{\substack{i\neq j\\ i=1}}^{N} \vec{f_{ij}}}_{0\ (\text{III з-н Н})} = 0$$

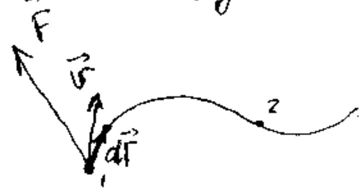
$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{i\,внеш} = 0$$

В замкнутой системе тел сумма внешних сил равна нулю.

[redacted]

Механическая работа. Кинетическая энергия.

Работой силы $\vec{F}$ на перемещении dS называется проекция F_S этой силы на направление перемещения, умноженная на само перемещение.



$$d\vec{p} = \vec{F}\cdot dt \quad | \cdot \vec{v}$$

$$\left[\begin{array}{l} \vec{p} = m\vec{v} \\ d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt \end{array} \right]$$

$$\vec{v}\cdot d\vec{p} = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt = \underbrace{\vec{F} d\vec{r}}_{\text{элементарная работа}}$$

$$dA = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$dA = F\cdot dr\cos\alpha = \sum_{i=1}^{3} F_i dx_i \qquad \text{элементарная работа}$$

! Если частица двигается перпендикулярно силе, действующей на нее, то работа этой силы равна нулю

$$A_{12} = \lim_{|\Delta\vec{r}|\to 0} \sum^{2} dA_i = \int_1^2 dA_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x(x,y,z)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y(x,y,z)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z(x,y,z)\,dz$$

$$dA = F_S\cdot dS = \int_{S_1}^{S_2} F_S\, dS$$

Кинетическая энергия

$$\vec{v}\cdot d\vec{p} = \vec{v}\cdot m\,d\vec{v} = m(\vec{v}\cdot d\vec{v}) = m\Big(\underbrace{v_x dv_x}_{d\left(\frac{v_x^2}{2}\right)} + \underbrace{v_y dv_y}_{d\left(\frac{v_y^2}{2}\right)} + \underbrace{v_z dv_z}_{d\left(\frac{v_z^2}{2}\right)}\Big) =$$

$$= m\,d\left(\frac{v_x^2+v_y^2+v_z^2}{2}\right) = \frac{m}{2} d v^2 = d\left(\frac{m v^2}{2}\right) \Rightarrow dA = dK$$

Кинетическая энергия — скалярная физ. величина, являющаяся мерой движения мат. точки и зависящая только от массы и модуля скорости мат. точки.

[redacted]

Центр инерции. Система центра инерции. Теорема Кенига

Центром масс или центром инерции системы называется такая воображаемая точка, радиус-вектор R которой выражается через радиус-векторы r_1, r_2, r_3 ... материальных точек по формуле

$$R_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}$$

$$R_c = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i} \quad \Big| \frac{d}{dt} \cdot m$$

$$m \dot{R}_c = m_1 \dot{r}_1 + m_2 \dot{r}_2 + \ldots$$

$$m V_c = m_1 V_1 + m_2 V_2 + \ldots$$

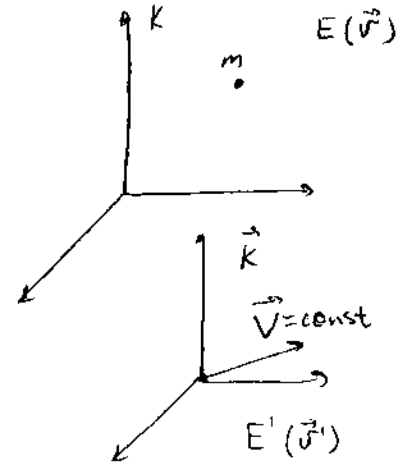
$$p = m V_c$$

$$m \frac{dV_c}{dt} = F$$

Отсюда, центр масс системы движется как мат. точка, масса которой равна сумме масс, где F - геометрическая сумма всех, действующих на систему сил.

Теорема Кенига.

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в её центре масс и движущейся вместе с ним, и кинетической энергии той же системы в её относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре масс.



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(v' + V)^2}{2} = \frac{m}{2}\left(v'^2 + V^2 + 2(\vec{v}'\vec{V})\right)$$

$$E = E' + \frac{mV^2}{2} + m(\vec{v}'\vec{V})$$

$$\sum(E) = \sum E'_i + \sum \frac{m_i V^2}{2} + \sum(\vec{v}_i'\vec{V}) m_i =$$

$$= E' + \frac{MV^2}{2} + \left(\sum(m_i v_i')\vec{V}\right) =$$

$$= E' + \frac{MV^2}{2} + (\vec{p}'\vec{V}_c)$$

В системе центра масс $\vec{V}_c = 0$, тогда теорема Кенига перепишется в виде:

$$E = E' + \frac{mV^2}{2}$$

Билет N11

Консервативные силы и неконсервативные. Потенциальная энергия.

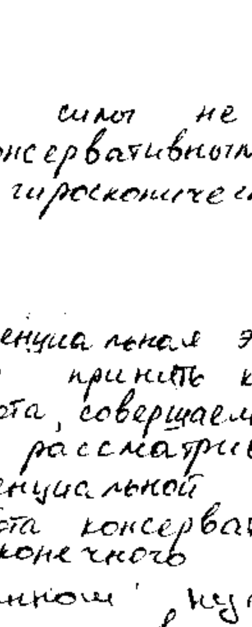
Если силы взаимодействия зависят только от конфигурации мат. точек (т.е. от их координат) и работа этих сил при перемещении системы из произвольного начального положения в произвольное конечное положение не зависит от пути перехода, а зависит только от начального и конечного положе-

ний системы, то такие силы называются консервативными.
Таковыми, например, являются сила тяжести и все центральные силы.

Все силы не являющиеся консервативными называются неконсервативными. К ним относятся диссипативные силы и гироскопические.

Потенциальная энергия

Если принять какое-либо положение тела за нулевое, то работа, совершаемая консервативными силами при переходе из рассматриваемого положения в нулевое, называется потенциальной энергией системы в этом положении. Так как работа консервативных сил зависит только от начального и конечного положений, то потенциальная энергия, при заданном нулевом положении, зависит только от состояния системы в рассматриваемом положении.

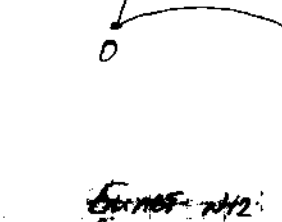


Значение потенциальной энергии зависит от нулевого положения. Если за нулевое положение O, то в положении 1 система будет иметь энергию $U = A_{10}$, а если O', то $U = A_{10'}$. Т.к. в системе действуют только консервативные силы $A_{10'} = A_{10} + A_{00'}$ или $U' = U + A_{00'}$

$$dA = -dU$$

~~Билет №2~~:
Закон сохранения механической энергии. Эквипотенциальные поверхности

Пусть система перешла из положения 1 в положение 2 по какому-либо пути 1-2. Работу A_{12}, совершенную консервативными силами при таком переходе, можно выразить через потенциальные энергии U_1 и U_2. Пусть переход происходит через нулевое положение, т.е. по пути 1O2.



Т.к. все силы консервативные, то $A_{12} = A_{1O2} = A_{1O} + A_{O2} = A_{1O} - A_{2O}$. Также, $A_{1O} = U_{1O}$ и $A_{2O} = U_{2O}$. Таким образом, $A_{12} = U_1 - U_2$. С другой стороны, $A_{12} = K_1 - K_2$. Следовательно,

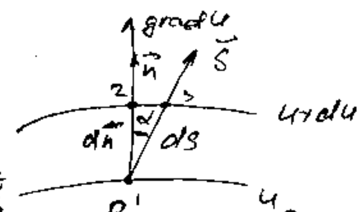
$$U_1 - U_2 = K_1 - K_2$$

$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$, $U_1 + K_1 = E_1$ и $U_2 + K_2 = E_2$, то $E_1 = E_2$.
То есть, в системе, в которой действуют только консервативные силы, полная механическая энергия сохраняется. Могут происходить только переходы кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

$$\boxed{E \equiv K + U = const}$$

Эквипотенциальные поверхности.

$\boxed{F = -\nabla U}$. Эквипотенциальные поверхности – поверхности, на которых скаляр U остается постоянным.



Пусть S - одна из таких поверхностей и пусть она проходит через точку 1, в которой имеется grad U. Поместим в этой точке начало координат, а ось x направим по нормали к поверхности $U=const$. Оси y, z находятся в плоскости, касательной к поверхности $U=const$. Отсюда $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$ в данной точке. Поэтому $grad U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}$. Заменим $\vec{i}$ на $\vec{n}$, а расстояние между U и dU – на dn. $\boxed{grad U = \frac{\partial U}{\partial n}\vec{n}}$

Градиент функции U есть вектор, направленный по нормали к поверхности уровня $U=const$ в сторону возрастания U; его длина численно равна производной по нормали функции U к той же поверхности.

~~Билет~~ №13.
Свойства потенциальных силовых полей. Примеры потенциальных сил. Диссипативные силы. Гироскопические силы.

Пусть $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \Rightarrow$
$F_x = F_x(x,y,z)$
$F_y = F_y(x,y,z)$
$F_z = F_z(x,y,z)$

Силовое поле называется потенциальным, если существует однозначная скалярная функция $U = U(x,y,z)$, зависящая только от координат точки и такая, что проекции силы на оси x, y, z равны соответствующим частным производным этой функции U: $F_x = \frac{\partial U}{\partial x}$; $F_y = \frac{\partial U}{\partial y}$; $F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$ $(F = -\nabla U)$

Свойства потенциальных полей:

Найдем dA - элементарную работу силы потенциального силового поля.

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

$dA = dU(x,y,z)$ - элементарная работа силы потенциального силового поля равная полному дифференциалу силовой функции зависящую от координат.

Полная работа на некотором перемещении.

$$A = \int_1^2 dA = \int_{U_1}^{U_2} U(x,y,z) = U_2(x,y,z) - U_1(x,y,z) \Rightarrow A = U_2 - U_1$$

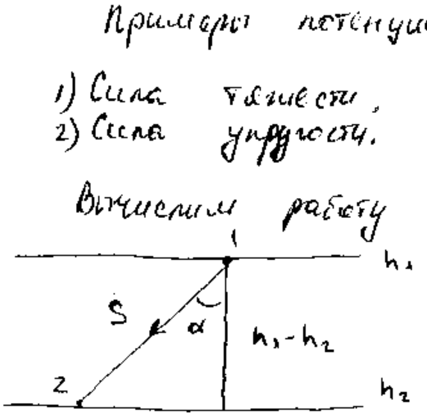
Работа силы потенциального силового поля не зависит не от закона движения мат. точки, не от формы траектории её движения, а определяется лишь значениями энергии в начальном и ~~конечном~~ положениях.

Работа силы на замкнутой траектории равна нулю.

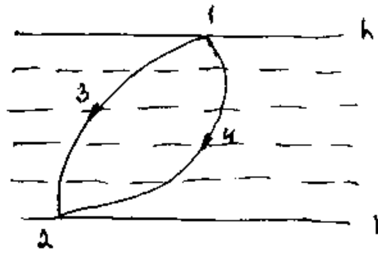
Примеры потенциальных сил.

1) Сила тяжести,
2) Сила упругости.

Вычислим работу силы тяжести,



$$A_{12} = mgS\cos\alpha = mgh_1 - mgh_2 \quad (1)$$



При перемещении по кривой 132 ее можно разбить на прямолинейные участки, где будет применима формула (1):

$$A_{12} = A_{13} + A_{32} = mgh_1 - \cancel{mgh_3} + \cancel{mgh_3} - mgh_2 = $$
$$= mgh_1 - mgh_2.$$

Также работа не зависит от того какой траекторией мы воспользуемся 132 или 142 (аналогично). Следовательно, работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положением точки. Отсюда следует, что сила тяжести является потенциальной.

Диссипативные силы.
Эти силы зависят не только от от конфигурации тел, но и от их относительных скоростей

1. Сила ортогональна вектору скорости (всегда!!!)

$$\vec{F} \perp \vec{v} \Rightarrow dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} \equiv 0$$

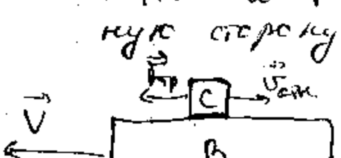
$$dK = dE = dA = 0 \Rightarrow K = \frac{mv^2}{2} = const$$

Например, $F_{\text{Лоренца}} = \frac{q}{c}[\vec{v}, \vec{B}]$

Гироскопические силы

К диссипативным относятся силы трения и сопротивление

$\vec{F} \parallel \vec{v}$ и $\vec{F} \uparrow\downarrow \vec{v}$ Сила трения всегда направлена в противоположную сторону от вектора относительной скорости тел.

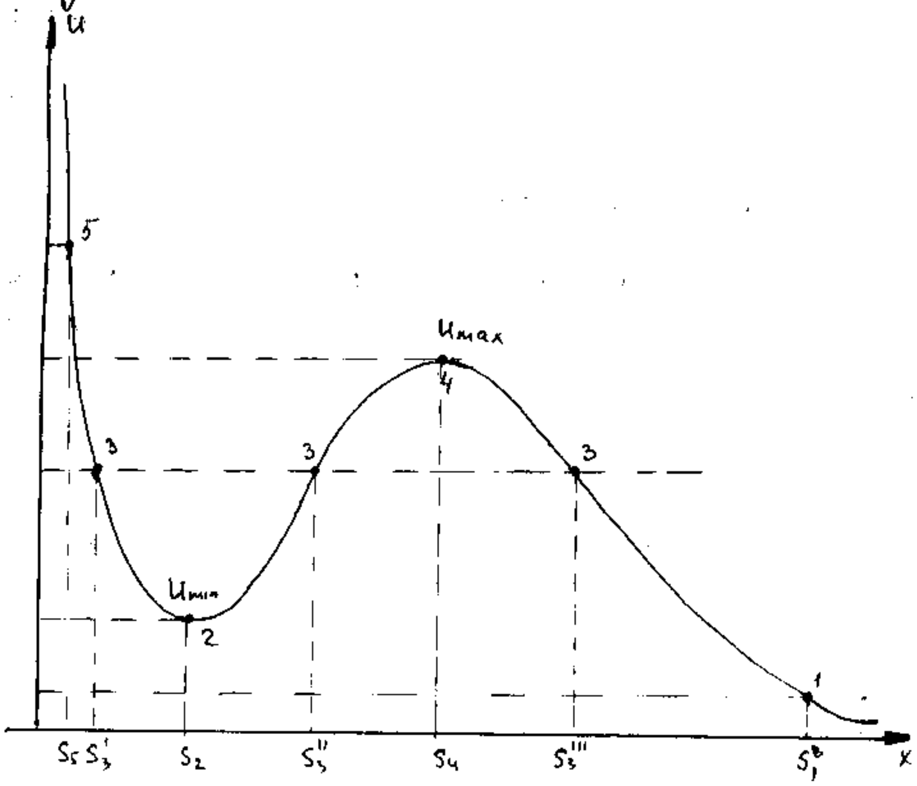


Пусть тело B тянут со скоростью $\vec{V}$. А в противоположном направлении по нему скользит тело C. Сила трения $\vec{F}_{тр}$ действует в противоположном направлении. Если $\vec{V} > \vec{v}_{отн}$, то тело C скользит со скоростью $\vec{V} - \vec{v}_{отн}$ в сторону, в которую действует $F_{тр}$. Сила трения совершает положительную работу $A_1 = \vec{F}_{тр}(\vec{v} - \vec{v}_{отн})$. Но если система замкнута, то полная работа всегда ~~замкнута~~ отрицательна. То, $A_2 = -\vec{F}_{тр}\vec{v}$. Тогда полная работа сил трения равна $A = A_1 + A_2 = -F_{тр} v_{отн}$. Отсюда вытекает, что диссипативными называют такие силы, работа которых при любых перемещениях в замкнутой системе всегда отрицательна.

[redacted]

Одномерное движение.

Одномерное движение - движение с одной степенью свободы.



1) $W < U_{min}$
точка постепенно сползет на бесконечность.

2) $W = U_{min}$
устойчивое положение равновесия.

3) $U_{min} < W' < U_{max}$
3.1) $x \in [S_3'; S_3'']$
точка находится в потенциальной яме и постепенно перейдет в (2), а так движение финитное.
3.2) $x \geqslant S_3'''$
точка ведет себя аналогично (1)

4) $W = U_{max}$
Если толкнуть влево, то она вернётся.
Если толкнуть вправо, то аналогично (1)
Это неустойчивое положение равнов

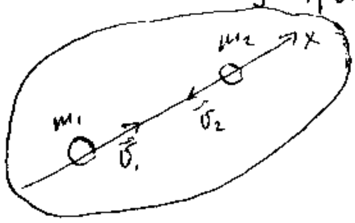
5) $W > U_{max}$
точка уйдёт на бесконечность.

[redacted] №16

Столкновение частиц.

Упругое столкновение - такой вид столкновения частиц, при котором выполняется закон сохранения энергии, т.е. не меняются их внутренние энергии.

1. Центральный удар
$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ - скорости располагаются на прямой, соединяющей центры шаров.



1) $m_1 \ll m_2$ - по сути задача сводится о столкновении 1 шара со стеной
$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_1'|$

2) $m_1 = m_2$

$$\begin{cases} \text{ЗСИ} & v_1 + v_2 = v_1' + v_2' \\ \text{ЗСЭ} & v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \end{cases} \Rightarrow$$

3) $m_1 \neq m_2$

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \dfrac{m_1 v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 v_2^2}{2} = \dfrac{m_2 v_2'^2}{2} + \dfrac{m_1 v_1'^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} v_1' = \\ v_2' = \end{matrix}$$

или в системе центра масс

$$V_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{M}$$

$$v_1' = -v_1 + 2V_c \qquad v_2' = -v_2 + 2V_c$$

2) Нецентральный удар

В начальный момент времени скорости не направлены вдоль линии, соединяющей шары.

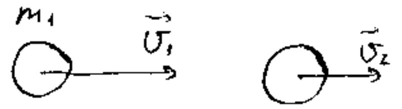
В данном случае следует разложить вектора $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на две пары неколинеарных $\vec{v}_{1n}$ и $\vec{v}_{1\tau}$ и $\vec{v}_{2n}$ и $\vec{v}_{2\tau}$, два из которых будут направлены вдоль линии, соединяющей центры шаров, а другая составляющая перпендикулярно ей.

$$m_1 v_{1n}' + m_2 v_{2n}' = m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}$$
$$m_1 v_{1\tau}' + m_2 v_{2\tau}' = m_1 v_{1\tau} + m_2 v_{2\tau}$$
$$m_1 (v_{1n}'^2 + v_{1\tau}'^2) + m_2 (v_{2n}'^2 + v_{2\tau}'^2) = m_1 (v_{1n}^2 + v_{1\tau}^2) + m_2 (v_{2n}^2 + v_{2\tau}^2)$$

Также, как следствие из закона сохранение всей механической энергии системы, не возникают силы, которые меняли бы тангенциальные составляющие скоростей. Отсюда, $v_{1\tau}' = v_{1\tau}$; $v_{2\tau}' = v_{2\tau}$

При столкновении гладких идеально упругих шаров их тангенциальные скорости не изменяются. Нормальные же скорости изменяются так же, как и скорости при центральном ударе.

Неупругое столкновение - вид удара, после которого частицы „слипаются" и движутся как одно целое



$\vec{v}_1 > \vec{v}_2$ => первый шар догонит второй

ЗСИ: $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$

$$v' = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

$K_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$ (до удара)

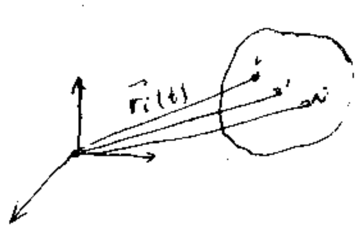
$K_2 = \frac{(m_1 + m_2) v'^2}{2}$ (после удара) => $\Delta K = \frac{\mu (v_1 - v_2)^2}{2}$, где $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$

Билет №14

Момент импульса. Закон сохранения момента импульса. Уравнение моментов.

Моментом импульса $\vec{p}$ относительно некоторой точки C называется векторное произведение радиус-вектора r на импульс $\vec{p}$.

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$$



$$\sum_i^n m_i \vec{v}_i = \vec{p} = \sum \vec{p}_i$$
$$\sum [\vec{r}_i \vec{p}_i] = \sum \vec{L}_i = \vec{L}$$

Закон сохранение момента импульса

В замкнутой системе момент импульса с течением времени не изменяется.

Уравнение моментов

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}] \Big| \frac{d}{dt} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \overbrace{[\vec{v} \times \vec{p}]}^{=0} + [\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}] = [\vec{r} \times \vec{F}] = \vec{M}$$ - момент силы F

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{F}_\Sigma \times \vec{r} = \vec{M}$$

системы мат. точек.

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \vec{M}_i = [\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\Sigma}] \right.$$

$$\vec{F}_{i\Sigma} = \underset{\text{внешние}}{\vec{F}_i} + \sum_{\substack{j \neq i \\ i=1}}^{N} f_{ij}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_i = \vec{M} = \sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_{\substack{j\neq i\\ i=1}}^{N} \vec{f}_{ij}]$$

$$\sum [\vec{r}_i, \vec{F}_i + \sum_{\substack{j\neq i\\ i=1}}^{N} \vec{f}_{ij}] = \sum \left([\vec{r}_i, \vec{f}_{ij}] + [\vec{r}_j, \vec{f}_{ji}] \right) = \sum (\underbrace{\vec{r}_i - \vec{r}_j, \vec{f}_{ij}}_{0})$$

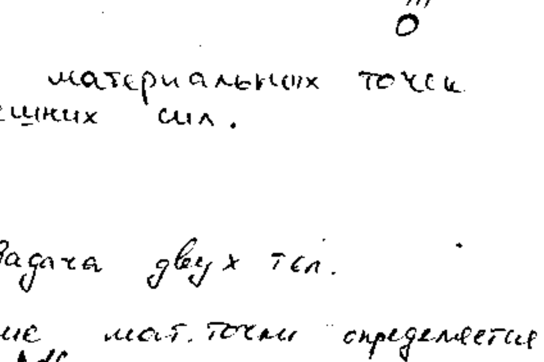
Момент импульса замкнутой системы материальных точек изменяет только момент ~~импульса~~ внешних сил.

Билет №...

Движение в поле центральных сил. Задача двух тел.

Пусть в момент времени t положение мат. точки определяется радиус-вектором $\vec{r}$. За время dt радиус-вектор получает приращение $\vec{v}dt$, описывая площадь бесконечно малого треугольника, которую можно изобразить вектором $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{v}]dt$

Тогда $\dot{\vec{S}} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{v}]$ определяет площадь, описываемую радиус-вектором в единицу времени. Она называется секториальной скоростью.



$$\boxed{L = m[\vec{r}\vec{v}] = 2m\dot{S}}$$

Если сила, действующая на тело, центральная и её направление проходит через полюс O, то вектор $\vec{L}$ не будет меняться во времени. В нерелятивистских случаях ЗСИ переходит в закон площадей: $\dot{\vec{S}} = const$

$\vec{r} \perp \dot{\vec{S}}$ и $\vec{v} \perp \dot{\vec{S}}$, т.к. $\dot{\vec{S}} = const$, то плоскость, в которой лежат $\vec{r}$ и $\vec{v}$ неизменна.

Отсюда, траектория мат. точки в поле центральных сил — плоская кривая. Радиус-вектор за равные промежутки времени заметает равные площади.

$\dot{\vec{L}} = \vec{M} = [\vec{r}\vec{F}] = 0 \Rightarrow \vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow$ линия силы все время проходит через точку O.

Значит, O - силовой центр, из которого должны исходить центральные силы, действующие на материальную точку.

Полная мех. энергия МТ при движении: $W = K + U(r) = const$

$\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ (ИСО связана с силовым центром) $\Rightarrow \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = const$

$\vec{p} = p_r\vec{e}_r + p_\varphi \vec{e}_\varphi$ (т.к. движение плоское)

$p_r = m\dot{r} \quad p_\varphi = m r\dot{\varphi}$

$L = p r \sin\theta = r p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$

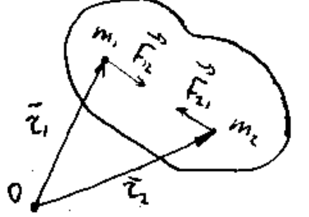
$$W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{m(r^2\dot{\varphi}^2)}{2} + U(r) = const \Rightarrow W = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{L^2}{2m}\cdot\frac{1}{r^2} + U(r) = const$$

переход двумерного движения в одномерное.

$U_{эф}(r) = \frac{L^2}{2m}\cdot\frac{1}{r^2} + U(r)$ — эффективная потенциальная энергия

Задача двух тел.

Пусть две МТ взаимодействуют между собой центральными силами. Используя понятие приведенной массы, можно свести задачу об их относительном движении к задаче о движении одной точки в поле неподвижного силового центра. В качестве такого силового центра можно взять одну из точек, относительно которой движется другая точка. Тогда радиус-вектор, проведенный от первой точки ко второй, будет в отноительном движении описывать равные площади за равные промежутки времени.

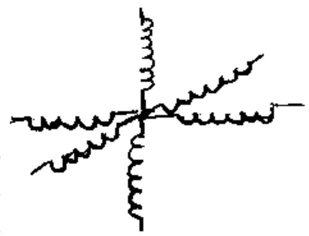


$$\vec{\rho} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \qquad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = \vec{F}(r)$$

$$\begin{cases} \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{1}{m_1} \cdot \vec{F}_{12} \\ \ddot{\vec{r}}_2 = \frac{1}{m_2} \cdot \vec{F}_{21} \end{cases} \qquad \ddot{\vec{\rho}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) \vec{F}_{12} = \mu F(r)$$

Движение в гравитационном поле

① Рассмотрим такую установку (6 пружин, попарно закрепленных на декартовых осях)

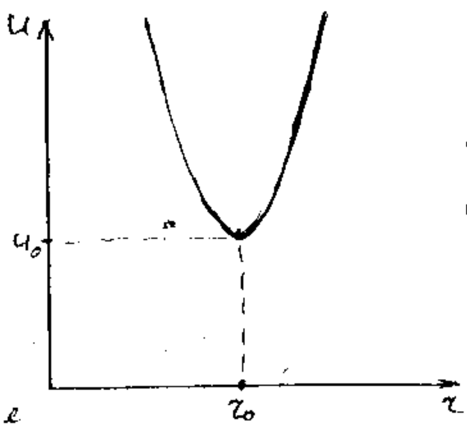


$$U(r) = \frac{kr^2}{2} \Rightarrow U_{эф}(r) = \frac{L^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{kr^2}{2}$$

1) $W = U_0 \qquad r = r_0 = const$

$v_r = \dot{r} = 0 \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} = \frac{L}{m r_0}$

$$\frac{dU_{эф}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{m} \cdot \frac{1}{r^3} + kr = 0$$



2) $W > U_0$ - финитное движение

Значение минимальной эффективной энергии

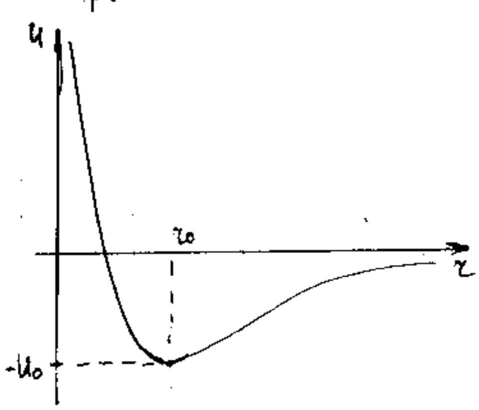
$$U_0 = \frac{1}{2} \frac{L\sqrt{k}}{m} + \frac{kL}{2\sqrt{km}} = L\sqrt{\frac{k}{m}}$$

если сообщить скорость не по r, а по φ, то

$$\dot{\varphi}_0 = \frac{L}{m} \cdot \frac{1}{r_0^2} = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad v_\varphi = r_0\dot{\varphi}_0 = \frac{\sqrt{L}}{(km)^{1/4}} \cdot \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{m}} = \left(\frac{L^2 k}{m^3}\right)^{1/4}$$

② $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$, где $\alpha = \begin{cases} GmM & \text{- гравитационное поле} \\ -Qq & \text{- кулоновское} \end{cases}$

$$U_{эф}(r) = \frac{L^2}{2m} \cdot \frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$$



1) $W = -U_0$

$$\frac{dU_{эф}}{dr} = 0 \Rightarrow -\frac{L^2}{m} \cdot \frac{1}{r_0^3} + \frac{\alpha}{r_0^2} = 0$$

$$\boxed{r_0 = \frac{L^2}{\alpha m}}$$

$$-U_0 = \frac{L^2}{2m} \cdot \frac{\alpha^2 m^2}{L^4} - \frac{\alpha^2 m}{L^2}$$

$$\boxed{U_0 = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2 m}{L^2}}$$

2) $-U_0 < W < 0$ - финитное движение

3) $W = 0 \qquad \dot{r} \to 0$ при $r \to \infty$

4) $W > 0 \qquad d\varphi = \frac{L}{m} \frac{dt}{r^2} \qquad dt = \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(W - U_{эф}(r))}} \quad \left(\frac{m\dot{r}^2}{2} = W - U_{эф}(r)\right)$

$$d\varphi = \frac{L}{m} \frac{dr}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(W - U_{эф}(r))}} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{L}{m} \cdot \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2}{m}(W - U_{эф}(r))}} \quad (\text{берём с } «+»)$$

$$\varphi(r) = \frac{L}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2\sqrt{W - \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}}} + const$$

$$q=\frac{1}{r} \Rightarrow \varphi(q) = -\frac{L}{\sqrt{2m}}\int\frac{dq}{\sqrt{W-\frac{L^2}{2m}q^2+\alpha q}}$$

$$\sqrt{W-\frac{L^2}{2m}q^2+\alpha q} = \sqrt{W-\frac{L^2}{2m}\left(q^2-\frac{2m\alpha}{L^2}q+\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2-\left(\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2\right)} =$$

$$=\sqrt{W-\frac{L^2}{2m}\left(q-\frac{m\alpha}{L^2}\right)^2+\frac{m\alpha^2}{2L^2}} = \sqrt{W+U_0-\frac{L^2}{2m}(q-q_0)^2}$$

$$\varphi(q) = \cancel{\pm\int\frac{dq}{\sqrt{\ }}} \quad -\frac{L}{\sqrt{2m}}\cdot\frac{\sqrt{2m}}{L}\int\frac{dq}{\sqrt{(W+U_0)\frac{2m}{L^2}-(q-q_0)^2}}$$

$$\gamma^2=\frac{2m}{L^2}(W+U_0)$$

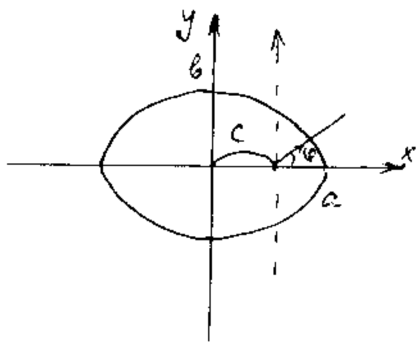
$$\varphi(q) = -\int\frac{dq}{\sqrt{\gamma^2-(q-q_0)^2}} = -\int\frac{d\,\frac{q-q_0}{\gamma}}{\sqrt{1-\left(\frac{q-q_0}{\gamma}\right)^2}} = -\arcsin\left(\frac{q-q_0}{\gamma}\right)+const$$

$$\varphi(q) = -\arcsin\left(\frac{q-q_0}{\gamma}\right)+const \Rightarrow \varphi(r) = -\arcsin\left(\frac{\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}}{\gamma}\right)+const$$

Пусть

$$-\sin(\varphi-\varphi_0) = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_0}\right)$$

Допустим, $\varphi_0=\pi/2 \Rightarrow r=\frac{r_0}{1+\gamma r_0\cos\varphi}$, т.е. $r=\frac{p}{1+e\cos\varphi}$ – кривая II порядка



$$e=\gamma r_0 = \sqrt{\frac{2m}{L^2}(W+U_0)}\cdot\frac{L^2}{\alpha m} = \sqrt{\frac{2(W+U_0)}{m}}\cdot\frac{L}{\alpha} =$$

$$=\sqrt{1+\frac{W}{U_0}}$$ Обобщение I з-на Кеплера

$$p=r_0=\frac{L^2}{\alpha m}$$

$$e^2a+p=\frac{1}{a}(c^2+b^2)=a$$

$$a=\frac{p}{1-e^2} \qquad b=\frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$a=\frac{L^2}{\alpha m}\Big/\left(-\frac{W}{U_0}\right)=\frac{L^2}{\alpha m}\cdot\frac{1}{|W|}\cdot\frac{\alpha^2 m}{2L^2}=\frac{\alpha}{2|W|} \Rightarrow$$ размер ~~большой~~ полуоси a не зависит от L.

$$b=\frac{L^2}{\alpha m}\cdot\frac{1}{\sqrt{|W|}}\cdot\frac{\alpha\sqrt{m}}{\sqrt{2}\,L}=\frac{L}{\sqrt{2m|W|}}$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{L}{m}\cdot\frac{1}{r^2} \Rightarrow \quad r^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{L}{m}dt$$

$$\int r^2(\varphi)d\varphi = \int\frac{L}{m}dt$$

$$\int r^2(\varphi)d\varphi=\frac{L}{m}T \quad (t-t_0)$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L^*}{2m} \Rightarrow S(t)=\frac{L}{2m}t+const$$ * обобщение II з-на Кеплера

$$S_{эл}=\frac{L}{2m}T=\pi ab \Rightarrow T=\frac{2\pi m}{L}\cdot\frac{\alpha}{2|W|}\cdot\frac{L}{\sqrt{2m|W|}}=\left(\frac{\alpha}{2|W|}\right)^{3/2}=a^{3/2}\,\frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{\alpha}}$$

$$T^2=4\pi^2\frac{ma^3}{\alpha}$$ – обобщение III з-на Кеплера

1) $v_\varphi = r\omega$ (дно потенциальной ямы)

$r=R_з=6{,}5\cdot10^8$ см

$\omega=2\pi/T \qquad T=2\pi\frac{1}{\sqrt{GM}}a^{3/2}$, где $a=R_з$

$$v_\varphi=R\cdot\frac{2\pi}{2\pi}\frac{\sqrt{GM}}{R^{3/2}}=\sqrt{\frac{GM}{R}}=\sqrt{gR}\approx 8\ \frac{км}{сек}$$ – I косм. скорость

1. Все вышесказанное для $W<0$ (эллиптическое дв-ие)
2. $W=\frac{mv^2}{2}-\frac{GMm}{r}=0$ – движение по параболе *

$v=\sqrt{\frac{2GM}{r}}$ при $r\to\infty \quad v\to0$

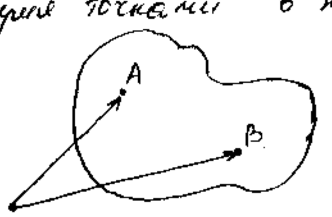
3. $W>0$ движение по гиперболе (если силы отталкивания)

$$v^*=\sqrt{\frac{2GM}{r}}=\sqrt{2}\,v_I\approx 11{,}2\ \frac{км}{сек}$$ – II косм. скорость

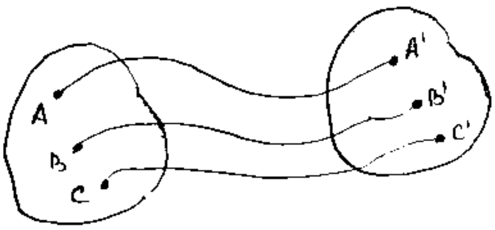
[redacted]

Способы описания движения твёрдого тела. Кинематические характеристики движения твёрдого тела.

Абсолютно твёрдое тело – тело, у которого расстояние между любыми двумя точками в процессе движения остаётся постоянным.



$$|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = const$$



Необходимо знать как движутся 3 точки этого тела.
Твердое тело является механической системой с шестью степенями свободы. Для описания движения такого тела требуется шесть независимых числовых уравнений. Вместо них можно взять 2 векторных:

- Уравнение движения центра масс

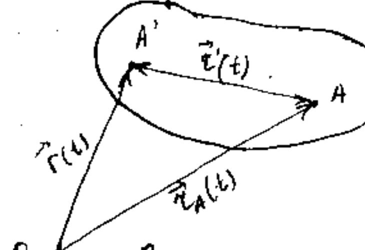
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш}$$

- Уравнение моментов относительно ц.м.

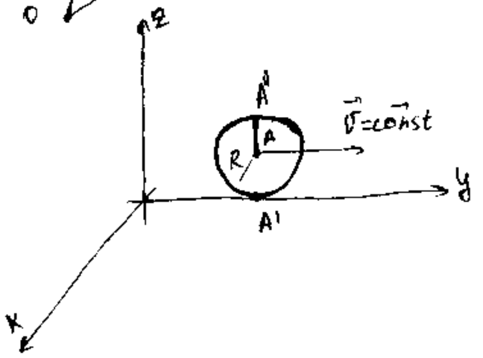
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш}.$$

Если АТТ покоится, то $\vec{F}_{внеш} = 0$ и $\vec{M}_{внеш} = 0$ – условия равновесия твёрдого тела. Но они – это необходимые условия равновесия. Они не являются достаточными, т.к. при выполнении этих условий центр масс по-прежнему может двигаться равномерно и прямолинейно с произвольной скоростью, а само тело может вращаться с сохранением вращательного импульса.

Уравнение моментов можно брать относительно произвольного начала или относительно произвольного неподвижного начала или относительно центра масс твёрдого тела. Можно также брать произвольно движущееся начало, при условии, что его скорость в любой момент времени параллельна скорости центра масс.



Рассмотрим твёрдое тело
A – опорная точка
A' – произвольная точка
тогда $\vec{r}(t) = \vec{r}_A(t) + \vec{r}\,'(t)$
$\vec{v}(t) = \vec{v}_A(t) + \vec{v}\,'(t)$
$v'(t) = [\vec{\omega}, \vec{r}\,'] \Rightarrow \vec{v}(t) = \vec{v}_A(t) + [\vec{\omega}, \vec{r}\,']$



Возьмём другую точку – A'':
$\vec{v}_{A''} = \vec{v}_{A'} + [\vec{\omega}, 2\vec{R}]$
$\vec{v}_A = \overset{0}{}[\vec{\omega}, 2\vec{R}] \Rightarrow v_{A''} = 2\omega R$

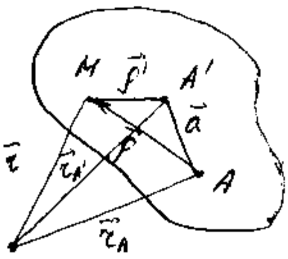
$\vec{v}_{A''} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{R}] \Rightarrow \quad v_{A''} = v_0 + \omega R$

$\omega' = \frac{\omega}{2} + \frac{v_0}{2R}$

При этом $\quad \vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, (-\vec{R})] = 0 \Rightarrow v_0 - \omega R = 0 \Rightarrow v_0 = \omega R$

$\omega' = \frac{\omega}{2} + \frac{v_0}{2R} = \omega$

Более общий случай



$\vec{v}_M = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{\rho}] = \vec{v}_{A'} + [\vec{\omega}', \vec{\rho}']$

$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_A + [\vec{\omega}, \vec{a}]$

$[\vec{\omega}, \vec{\rho}] = [\omega', \rho'] + [\vec{\omega}, \vec{a}]$

$[\vec{\omega}', \vec{\rho}'] = [\vec{\omega}, \underbrace{\vec{\rho} - \vec{a}}_{\vec{\rho}'}] \Rightarrow \boxed{\vec{\omega}' = \vec{\omega}}$

Значит, все точки тела вращаются с одинаковой угловой скоростью, следовательно, угловая скорость не зависит от выбора опорной точки.

За счёт опорной точки берём центр инерции (центр масс системы)

$$\vec{R}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$\vec{R}_c = \frac{\int \vec{r}\, dm}{\underbrace{\int dm}_{M}} = \frac{\int\limits_V \vec{r}\,(\rho(\vec{r}))\, dV}{\int\limits_V \rho(\vec{r})\, dV}$$

Пусть A и B - произвольные точки твердого тела

$(r_B - r_A)^2 = \mathrm{const} \;\Big|\, \frac{d}{dt} \Rightarrow (r_B - r_A)(\dot{\vec{r}}_B - \dot{\vec{r}}_A) = 0 \Rightarrow \vec{r}_{AB}\,(\vec{v}_B - \vec{v}_A) = 0$

Пусть $\vec{v}_A = 0$ (можно можем выбрать так ИСО) $\Rightarrow$

$\vec{r}_{AB} \cdot \vec{v}_B = 0 \Rightarrow \vec{r}_{AB} \perp \vec{v}_B$, т.е. направлена скорость по касательной к окружности с центром в т. A.

Отсюда

Мгновенное распределение скоростей в теле в рассматриваемый момент времени будет таким же, как и при вращении вокруг неподвижной оси, проходящей через т. A.

Движение тела в таком случае называют мгновенным вращением, а прямую, проходящую через неподвижную точку в рассматриваемый момент времени, мгновенной осью вращения.

[redacted]

Момент импульса твёрдого тела. Свободное вращение твёрдого тела (шаровой волчок, линейный ротатор, симметричный волчок)

Момент импульса твёрдого тела складывается из моментов импульсов отдельных точек системы:

$$\vec{L} = \sum \vec{L}_i = \sum [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum m_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \int\limits_V dm\, [\vec{r}, \vec{v}] = \int\limits_V \rho(\vec{r})\, [\vec{r}, \vec{v}]\, dV$$

$$\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}\,']$$

$\vec{r}\,'$ — радиус-вектор, определяющий положение данной точки относительно центра масс

$$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = \sum m_i \vec{v}_i \text{ — импульс твёрдого тела}$$

$$\vec{P} = \int dm\, \vec{v} = \underbrace{M\vec{v}_c}_{\vec{P}_c} + \int dm\, [\vec{\omega}, \vec{r}\,'] = M\vec{v}_c$$

$\vec{P}_c$ — импульс тела как целого; $\int dm\, [\vec{\omega}, \vec{r}\,'] = [\vec{\omega}, \int dm\, \vec{r}\,'] = 0$

$$\boxed{\vec{P} = M\vec{v}_c} \text{ — импульс твёрдого тела}$$

$$\vec{L} = \int dm\, [\vec{r}, \vec{v}] = \int dm\, [(\vec{R}_c + \vec{r}\,'), (\vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}\,'])] = \int dm\, [\vec{R}_c\, \vec{v}_c] +$$

$$+ \underbrace{\int dm\, [\vec{r}\,' \vec{v}_c]}_{0} + \underbrace{\int dm\, [\vec{R}_c [\vec{\omega}, \vec{r}\,']]}_{0} + \int dm\, [\vec{r}\,' [\vec{\omega}, \vec{r}\,']] =$$

$$= \underbrace{\int [\vec{R}_c, M\vec{v}_c]}_{\vec{L}_c} + \underbrace{\int dm\, \vec{\omega}\, (\vec{R}_c \vec{r}\,')}_{0} - \underbrace{\int dm\, \vec{r}\,' (\vec{R}_c \vec{\omega})}_{0} + \underbrace{\int dm\, [\vec{r}\,' [\vec{\omega}, \vec{r}\,']]}_{\vec{L}'}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}'$$

$$\vec{L}' = \int dm\, [\vec{r}\,', [\vec{\omega}, \vec{r}\,']] = \int dm\, \left((\vec{r}\,')^2 \vec{\omega} - \vec{r}\,' (\vec{\omega}\vec{r}\,') \right)$$

$$L_i' = \int dm\, \{ \omega_i x_i^2 - x_i (\omega_k x_k) \} \qquad k = x, y, z$$

Введем символ Кронекера (дельта Кронекера)

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases} \qquad \delta_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\omega_i = \delta_{ik} \omega_k = \delta_{i1} \omega_1 + \delta_{i2} \omega_2 + \delta_{i3} \omega_3$$

$$L_i' = \int dm\, (x_i^2 \delta_{ik} \omega_k - x_i x_k \omega_k) = \omega_k \underbrace{\int dm\, (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)}_{I_{ik}} = I_{ik} \omega_k$$

$$I_{ik} = \int dm\, (x_i \delta_{ik} - x_i x_k) \text{ — момент инерции}$$

$$\boxed{L_i' = I_{ik} \omega_k}$$

Момент инерции — сумма произведений масс материальных точек на квадрат расстояний их до оси вращения

$$L_1' = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3$$
$$L_2' = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3$$
$$L_3' = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3$$

$$I = \begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} +\int dm\,(y^2+z^2) & -\int dm\,xy & -\int dm\,xz \\ -\int dm\,yx & +\int dm\,(x^2+z^2) & -\int dm\,yz \\ -\int dm\,zx & -\int dm\,zy & +\int dm\,(x^2+y^2) \end{vmatrix}, \text{ где}$$

I - момент инерции, матрица - тензор инерции, I_{ik} - компонент тензора

Тензор инерции приводится к диагональному виду:

$$I = \begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}, \text{ тогда } \begin{cases} L_1' = I_1\omega_1 \\ L_2' = I_2\omega_2 \\ L_3' = I_3\omega_3 \end{cases}$$

Если тело обладает симметрией вращения вокруг некоторой оси, то его эллипсоид инерции обладает такой же симметрией

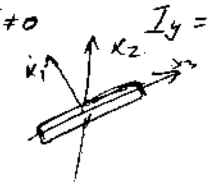
Свободное вращение твёрдого тела: внешние силы отсутствуют.

1) Шаровой волчок $I_1 = I_2 = I_3 = I$

У шарового волчка направления главных осей вращения могут быть выбраны произвольно. Это значит, что любая ось, проходящая через центр масс будет осью свободного вращения - при любом направлении $\vec{\omega}$ $\vec{L}$ совпадет с ней по направлению. Для шарового волчка вращение вокруг любой оси представляет собой равномерное вращение с сохранением оси в пространстве (её направления)

$$\vec{L} = const \Rightarrow I\vec{\omega} = const \Rightarrow \vec{\omega} = const$$

2) Линейный ротатор $I_1 = I_2 = I \neq 0$, $I_3 = 0$ $I_y = I_x = \frac{Ml^2}{12}$ (например)



$$\vec{\omega} = \frac{L^2}{I} = const$$

3) Симметричный волчок $I_1 = I_2 = I \neq I_3$

$\vec{v}_н = [\vec{\omega}, \vec{r}] \Rightarrow$ любая точка движется ортогонально плоскости чертежа. Чем дальше точка от центра масс, тем больше скорость вращения L вокруг $\vec{\omega} \Rightarrow$ прецессия

$$\omega_1 = \frac{L_1}{I_1} = \frac{L\sin\psi}{I_1}, \quad \omega_2 = \frac{L\cos\psi}{I_2} = \frac{L_2}{I_2} \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_{пр} + \vec{\omega}_0 \quad \vec{\omega}_0 \parallel x_3$$

$\omega_{пр} = \frac{\omega_1}{\sin\psi} = \frac{L}{I}$ не зависит от ориентации момента импульса

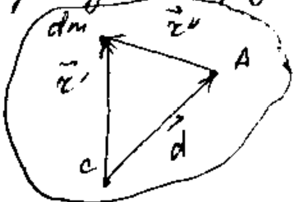
4) Несимметричный волчок $I_1 \neq I_2 \neq I \neq I_3 = 0$

$$\begin{cases} \tilde{\omega}_0 = \omega_3 - \omega_{пр} = \\ = L\cos\psi\left(\frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1}\right) \end{cases}$$

[redacted]

Кинетическая энергия твёрдого тела. ~~Тензор инерции~~. Теорема Штейнера

Найдём связь между моментами инерции относительно двух различных осей. Пусть они будут перпендикулярны рисунку и проходят через C и A.



$$\vec{\tau}'' = \vec{\tau}' - \vec{d}$$
$$x_i'' = x_i' - d_i$$
$$I_{ik}' = \int dm\left((x_l'')^2\delta_{ik} - x_i''x_k''\right) =$$ тензор инерции

$$= \int dm\left[(x_l' - d_l)^2\delta_{ik} - (x_i' - d_i)(x_k' - d_k)\right] = \int dm\left((x_l')^2\delta_{ik} - x_i x_k\right) +$$
$$+ M(d_l^2\delta_{ik} - d_i d_k) + \underbrace{\int dm\left(-2x_l' d_l \delta_{ik} + d_i x_k' + x_i' d_k\right)}_{0} = I_{ik} +$$
$$+ M(d_l\delta_{ik} + d_i d_k) \quad \text{или}$$

$$\boxed{I_A = I_c + md^2}$$ — Теорема Штейнера

Момент инерции тела относительно какой-либо оси равен его моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной md^2, где d — расстояние между осями.

~~Тензор инерции — билет №20~~

$$E = \int dm\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}\int dm\Big(v_c^2 + 2\underbrace{([\vec{\omega}, \vec{\tau}']\vec{v}_c)}_{0} + \omega^2(\tau')^2\sin^2\alpha\Big) = \underbrace{\frac{mv_c^2}{2}}_{E_{пост.}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int dm\,\omega^2\tau'^2\sin^2\alpha}_{E_{вр}}$$

$$\boxed{K = E_{поступ.} + E_{вращ.}}$$ — кинетическая энергия тв. тела

$$E_{вращ.} = \frac{1}{2}\int dm\,\omega^2(\tau')^2\sin^2\alpha = \frac{1}{2}\int dm\,\omega^2(\tau')^2(1 - \cos^2\alpha)$$
$$E_{вр} = \frac{1}{2}\int dm\left[(x_l')^2(\omega_k)^2 - (\omega_k x_k)(\omega_i x_i')\right] = \frac{1}{2}\omega_i\omega_k\int dm\left((x_l')^2\delta_{ik} - x_i'x_k'\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\omega_i\omega_k I_{ik}$$
$$E_{вр} = \frac{1}{2}I_i\omega_i^2 = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_3^2$$ — кинетическая энергия вращательного движения.

$$\boxed{E_{вр} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{L^2}{2I}}$$

[redacted]

Уравнения движения твёрдого тела

$$\vec{p} = \int dm\vec{v}$$ — импульс тела $\Rightarrow \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\int dm\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{внеш}$

т.к. внешние силы оказывают влияние на движение тв. тела, а внутренние — нет.

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{R}_c}{dt} \Rightarrow \boxed{M\frac{d^2\vec{R}_c(t)}{dt^2} = \vec{F}_{внеш}}$$

$$\vec{L} = \int[\vec{\tau}, \vec{v}]\,dm$$ — момент импульса тела
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int dm[\vec{\tau}, \vec{v}]\right) = \underbrace{\int dm[\dot{\vec{\tau}}, \vec{v}]}_{0} + \int dm[\vec{\tau}, \dot{\vec{v}}] = \vec{M}_{внеш}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{внеш.}}$$

$\vec{L} = \int dm[\vec{r}', \vec{v}]$ $\vec{v} = \vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}']$

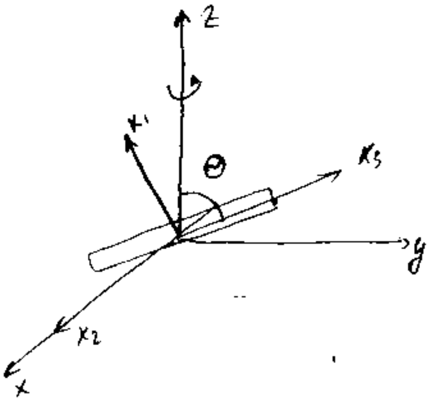
$\vec{L} = \int dm[\vec{r}', \vec{v}] = \int dm[\vec{r}', (\vec{v}_c + [\vec{\omega}, \vec{r}'])] =$

$= \int dm[\vec{r}', \vec{v}_c] + \int dm[\vec{r}'[\vec{\omega}, \vec{r}']] = D$

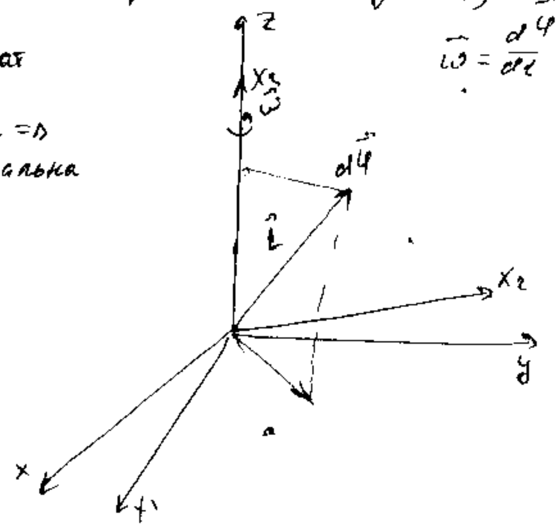
$\vec{L} = \vec{L}_c + \vec{L}'$, где $\vec{L}_c = M[\vec{R}_c, \vec{v}_c]$, $\vec{L}'$ характеризует вращение относит. центра масс.

Билет ~~№~~

Уравнения Эйлера (вывод и решение в простейших случаях)



система координат задана через оси симметрии тела => неинерциальна



$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$

$I \neq const$

Пусть $\omega \neq const$, тогда система отсчета будет неинерциальна, если взять в качестве осей координат главные оси симметрии

Пусть $d\vec{L}_2 = 0$, тогда $d\vec{L} = [d\vec{\varphi}, \vec{L}_2]$ т.к. произведение вертикальной компоненты на $d\varphi$ равно 0.

Если $d\vec{L}_2 \neq 0$ $d\vec{L} = d\vec{L}_2 + [d\vec{\varphi}, \vec{L}_2]$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_2}{dt} + [\vec{\omega}, \vec{L}_2] = \vec{M}$

$$\left.\begin{aligned}(L_2)_1 &= I_1\omega_1 \\ (L_2)_2 &= I_2\omega_2 \\ (L_2)_3 &= I_3\omega_3\end{aligned}\right\} (L_2)_i = I_{ik}\omega_k$$

$$[\vec{\omega}, \vec{L}_2] = \begin{vmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \vec{x}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \end{vmatrix} = \vec{x}_1\omega_2\omega_3(I_3 - I_2) + \vec{x}_2\omega_1\omega_3(I_1 - I_3) + \vec{x}_3\omega_1\omega_2(I_2 - I_1)$$

$$\begin{cases} I_1\frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = M_1 \\ I_2\frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = M_2 \\ I_3\frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = M_3 \end{cases}$$ — уравнения Эйлера

I_1, I_2, I_3 не меняются, но в результате уравнения нелинейны.

Частные случаи

1) $M_i = 0$ $\underset{\text{симметричный волчок}}{I_1 = I_2 \neq I_3 \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\frac{d\omega_3}{dt} = 0$ $\omega_3 = const$

$$\begin{cases} I\frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ I\frac{d\omega_2}{dt} + (I - I_3)\,\omega_1\omega_3 = 0 \\ \frac{d\omega_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\omega_3 = const$$

тогда $\begin{cases} \dot{\omega}_1 = -\Omega\,\omega_2 \\ \dot{\omega}_2 = \Omega\,\omega_1 \end{cases}$

Следовательно, $\ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$ – ур-ие гармонического осциллятора

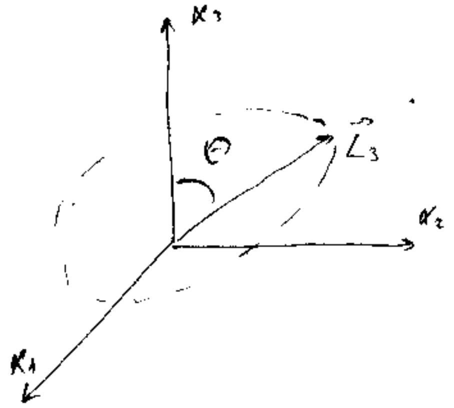
$X(t) = \omega_1(t) + i\omega_2(t)$, тогда $\dot{X} = i\Omega(\omega_1 + i\omega_2) = i\Omega X$

$\frac{dX}{X} = i\Omega\,dt \Rightarrow X(t) = Ae^{i\Omega t}$
$A = ae^{i\varphi}$

$\omega_1(t) + i\omega_2(t) = a[\cos(\Omega t + \varphi) + i\sin(\Omega t + \varphi)] \Rightarrow$ $\omega_1 = a\cos(\Omega t + \varphi)$
$\omega_2 = a\sin(\Omega t + \varphi)$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_3 + \vec{\omega}_\perp$, где $|\vec{\omega}_\perp| = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = a$

$(L_r)_1 = I\omega_1(t)$
$(L_r)_2 = I\omega_2(t)$ $\quad (L_r)_3 = I_3\omega_3 = const$



Скорость, с которой прецессирует волчок:

$$\Omega = \frac{I_3 - I}{I}\cdot\frac{L_3}{I_3} = \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{I_3}\right)L\cos\Theta$$

2) $M_i = 0 \qquad I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq 0$

$$\begin{cases} I_1\frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 = 0 \\ I_2\frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 = 0 \\ I_3\frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_1\omega_2 = 0 \end{cases}$$

– общий случай свободного вращения волчка

[redacted]
Свободное вращение твёрдого тела (общий случай): интегралы движения, устойчивость вращения относительно главных осей.

$M_i = 0$ (вращение в отсутствии внешних сил)

$I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq 0$ – самый общий случай

запишем ур-ие Эйлера:
$$\begin{cases} I_1\frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = 0 \quad |\cdot\omega_1 \\ I_2\frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 = 0 \quad |\,\omega_2 \\ I_3\frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = 0 \quad |\,\omega_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2E = const$$

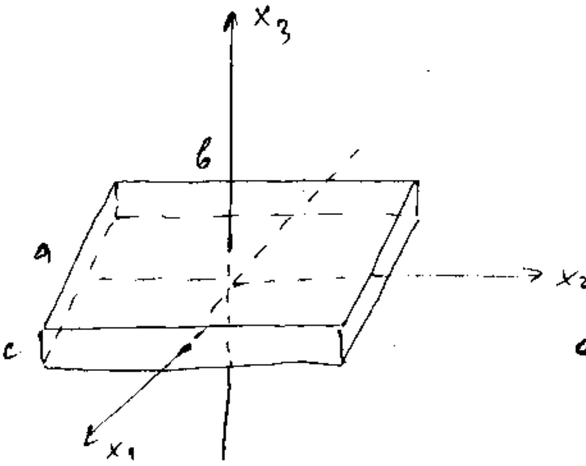
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} + \frac{I_3\omega_3^2}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L^2 = const$$

$$\begin{cases} I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = 2E = const & \Big| \cdot -\frac{L^2}{2E} \\ I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = L^2 = const \end{cases} +$$

$$I_1\omega_1^2\left(I_1 - \frac{L^2}{2E}\right) + I_2\omega_2^2\left(I_2-\frac{L^2}{2E}\right) + I_3\omega_3^2\left(I_3-\frac{L^2}{2E}\right)=0$$

$$\frac{L^2}{2E}=h^2 \Rightarrow I_1\omega_1^2(I_1-h^2)+I_2\omega_2^2(I_2-h^2)+I_3\omega_3^2(I_3-h^2)=0$$



$b>a>c \Rightarrow I_3>I_1>I_2>0$

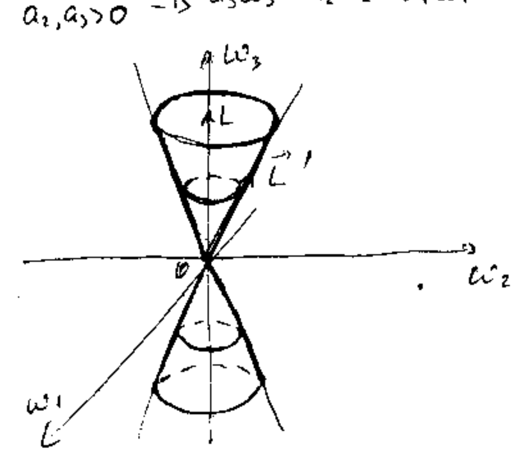
т.к. $I_1\omega_1^2(I_1-h^2)+I_2\omega_2^2(I_2-h^2)+I_3\omega_3^2(I_3-h^2)=0$

$$\begin{cases} h^2 \geq I_2 \\ h^2 \leq I_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} I_2<I_1<h^2 \; (1) \\ I_3>I_1>h^2 \; (2) \end{matrix}$$

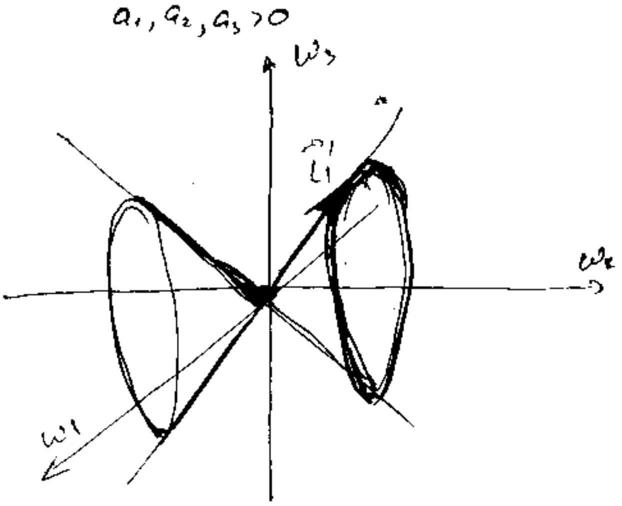
$a_1\omega_1^2 + a_2\omega_2^2 + a_3\omega_3^2 = 0$, где

$$\begin{cases} a_1 = I_1(I_1-h^2) \\ a_2 = I_2(I_2-h^2) \\ a_3 = I_3(I_3-h^2) \end{cases}$$

1) $a_1\omega_1^2 + a_3\omega_3^2 = a_2\omega_2^2$
$a_1<0$
$a_2, a_3>0 \Rightarrow a_3\omega_3^2 = a_2\omega_2^2 + a_1\omega_1^2$



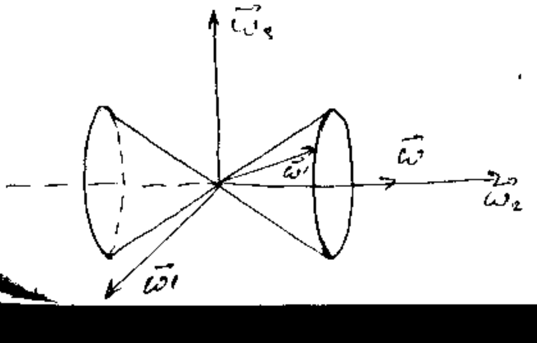
2) $a_1\omega_1^2 + a_3\omega_3^2 = a_2\omega_2^2$
$a_1, a_2, a_3>0$



1) пусть есть небольшое вращение (отн. x_3)
изначально $\vec L = \vec L_3 \Rightarrow \vec\omega = \vec\omega_3,\ \vec\omega_1, \vec\omega_2 = 0$
при возмущении $\vec L$ отклоняется от $\vec\omega_3 \Rightarrow h$ изменяется

$h_0^2 = I_3 \quad (h')^2 < h_0^2 \quad |h'^2 - h_0^2| \ll h_0^2 \Rightarrow \omega_1,\omega_2 \neq 0$, но $\omega_1,\omega_2 \ll \omega_3$)
угол отклонения задаётся возмущением
Значит, вращение устойчиво

2) Зададим вращение относительно оси x_2
$\vec L = \vec L_2 \Rightarrow \vec\omega = \vec\omega_2,\ \vec\omega_1, \vec\omega_3 = 0$



$h_0^2 = I_2$
$h'^2 > h^2 \Rightarrow \omega_1, \omega_3 \neq 0$
$\omega_1, \omega_3 \leq \omega_2$

Вращение устойчиво

3) Зададим вращение относительно оси x,

$\vec{L} = \vec{L}_1 \Rightarrow \vec{\omega} = \vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2, \vec{\omega}_3 = 0$

$h_0^2 = I_1 \Rightarrow$ 3.1) $h' > h$; 3.2) $h' < h$

3.1) $I_1 < h'^2 \to$ переходим к случаю 1

3.2) $I_1 > h'^2 \to$ переходим к случаю 2 вращение неустойчиво

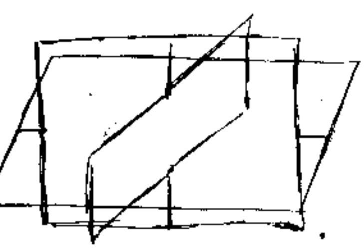
Устойчивость вращения зависит от того, вокруг какой главной оси телу сообщили вращение. Если вокруг оси наименьшего / наибольшего момента инерции, то вращение устойчиво, если вокруг „среднего", то вращение неустойчиво.

[redacted]

Гироскоп: гироскопическая сила (карданов подвес с 2 и 3 степенями свободы; примеры).

Гироскопом называется быстровращающееся тело, ось которого может изменять свое направление в пространстве.

Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп обычно помещают в Карданов подвес.



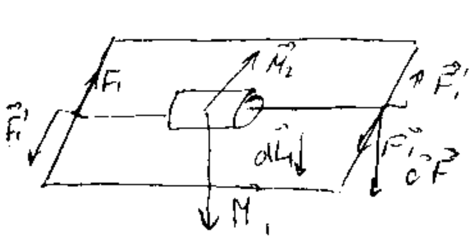
$\Sigma \vec{M} = 0 \quad \Sigma \vec{F} = 0$

$I_3 \geq I_1 = I_2 > 0$ (у хорошего гироскопа $I_3 \gg I_2$, $I_2 = I_1 > 0$)

Раскрутим гироскоп так сильно, что $L_3 \gg L_2 = L_1 > 0$

$\vec{L} \approx \vec{L}_3 \Rightarrow$ любое возмущение связано с изменением оси гироскопа.

Рассмотрим 1 часть подвеса:

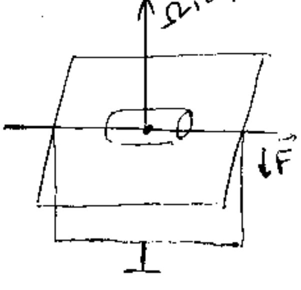


Если воздействие на подвес кратковременное, то ничего не происходит.

$d\vec{L} = \vec{M}\,dt$

$\vec{F}_1$ - сила вдоль рамки, создающая $\vec{M}_1$

Должен был возникнуть $\vec{M}_1$, но в результате возникла сила $\vec{F}_2$, скомпенсировавшая изменение момента импульса.



$\vec{\Omega} = const \quad \vec{F} = m\vec{g}$

$\cancel{d\vec{L}} = d\vec{L} = [d\vec{\varphi}, \vec{L}] \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\Omega}, \vec{L}] = \vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$

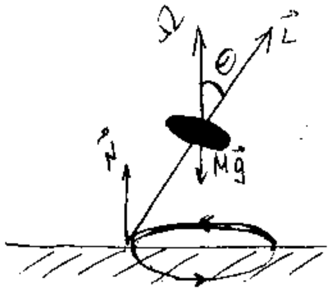
$[\vec{\Omega}, \vec{L}] = [\vec{r}, \vec{F}] \Rightarrow \vec{\Omega} = -\frac{r\vec{F}}{L} = -\frac{r}{I_3\omega_3} m\vec{g}$

$\Omega = \frac{r}{I_3\omega_3} m\vec{g} \qquad \Omega \ll \omega_3$

[redacted]

Гироскоп: симметричный волчок в гравитационном поле. Примеры.

① Сил трения нет

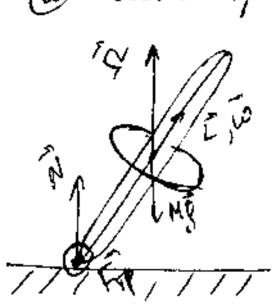


$$\Omega L \sin\Theta = r N \sin\Theta$$

$$\Omega L = rN \qquad N = mg$$

$$\boxed{\Omega = \frac{rmg}{L}}$$

② Силы трения есть



$\vec F_{тр} \uparrow\uparrow d\vec r \quad \vec N \perp \vec r$

Из-за трения $\vec\omega$ падает, $\vec\Omega$ растет, Θ уменьшается.

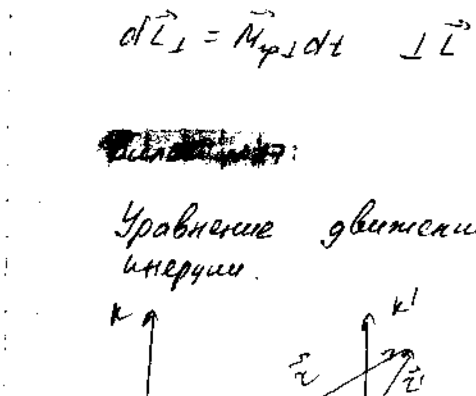
Если волчок успеет, то он встанет почти вертикально.

$$d\vec L_\parallel = \vec M_{тр\parallel}\, dt \quad \uparrow\downarrow \vec L$$

$$d\vec L_\perp = \vec M_{тр\perp}\, dt \quad \perp \vec L$$

[redacted]:

Уравнение движения в неинерциальной системе отсчёта. Силы инерции.



Пусть k - инерциальная система отсчета, а k' движется ускоренно, т.е. неинерциальна $\Rightarrow m\vec a = \vec F$

$$\frac{d\vec p}{dt} = \vec F(\vec r, \dot{\vec r}, t)$$

$$\vec r = \vec r(t)$$

Систему k' можно представить как абсолютно твердое тело

$$d\vec r = d\vec r_0 + (d\vec r')_k$$

по отношению к наблюдателю k

$$(d\vec r')_k = \underbrace{[d\vec\varphi, \vec r']}_{\text{учёт вращения}} + (d\vec r')_{k'}$$

$$d\vec r = d\vec r_0 + [d\vec\varphi, \vec r'] + (d\vec r')_{k'} \quad | : dt$$

$\vec v = \vec v_0 + [\vec\omega, \vec r'] + \vec v'$ - скорость МТ в неинерциальной СО.

$$d\vec v = d\vec v_0 + [\underbrace{d\vec\omega}_{\vec\eta\,dt}, \vec r'] + [\vec\omega, (d\vec r')_k] + (d\vec v')_k$$

$$(d\vec v')_k = [\underbrace{d\vec\varphi}_{\vec\omega\,dt}, \vec v'] + \underbrace{(d\vec v')_r}_{\vec a'\,dt}$$

$$d\vec v = d\vec v_0 + \vec a'dt + [\vec\omega, \vec v']dt + [\vec\eta, \vec r]dt + [\vec\omega, \vec v']dt +$$
$$+ [\vec\omega, [\vec\omega \vec r']]^{*}dt \quad /:dt$$

$$^{*}[\vec\omega, [\vec\omega, \vec r']] = [\vec\omega, [\vec\omega, \vec r_\perp]] = \vec\omega\,\underbrace{(\omega, \vec r_\perp)}_{0} - \vec r_\perp \omega^2$$

$$\vec a = \vec a_0 + \vec a' + (-\vec r_\perp' \omega^2) + [\vec\eta, \vec r'] + 2[\vec\omega' \vec v']$$

если МТ движется относительно неинерциальной системы отсчёта

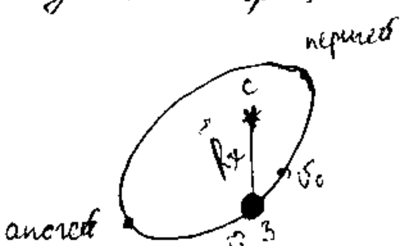
$$m\vec a' = \vec F - m\vec a_0 + m\omega^2 \vec r_\perp' + m[\vec r', \vec\eta] + 2m[\vec v'; \vec\omega]$$

сила инерции $F_{пост}$; центробежная сила инерции $\vec F_ц$; возникает при ускоренном вращении ; сила Кориолиса $\vec F_к$

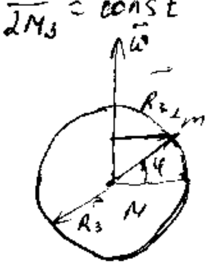
$\vec F_{пост}$ – разгоняет
$\vec F_ц$ – выбрасывает
$\vec F_к$ – отклоняет

[redacted]

Система отсчета, связанная с Землей. Эффекты, связанные с суточным вращением Земли



$\vec L_1 = M_З\,[\vec R_{сз}, \vec v_0] = const$
очевидно, что $\vec R_{сз}(t) = \vec v_0 \sim t$
II закон Кеплера: $\frac{dS}{dt} = \frac{L_1}{2M_З} = const$
$dS = \frac{1}{2} R_{сз}^2 d\varphi$
$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L_1}{M_З} \cdot \frac{1}{R_{сз}^2(t)}$



$$m\vec a' = \vec F - m\vec a_0 + m\omega^2 \vec r_\perp' + m[\vec r', \vec\eta] + 2m[\vec v', \vec\omega]$$

$\vec v_0 = \vec v_0(t)$

$\vec a_0 = -\frac{GM_c \vec R_{сз}}{R_{сз}^3} \quad \left(\vec F = -\frac{GM_c m_З}{R_{сз}^3} \vec R_{сз}\right)$

$\vec\Omega(t)$ – вращение относительно Солнца
$\vec\omega(t)$ – вращение вокруг собственной оси

$\vec F_\Omega = m\Omega^2 \vec R_{сз}$ $\quad \vec F_\omega = m\omega^2 \vec R_{З\perp}$

Сравним $\vec F_\Omega$ и $\vec F_\omega$, учитывая, что $R_{сз} = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ см, $R_З = 6{,}4 \cdot 10^8$ см

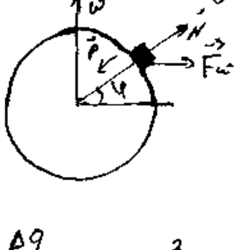
$$\left|\frac{\vec F_\Omega}{\vec F_\omega}\right| = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 \frac{R_{сз}}{R_З \cos\varphi} = \frac{1}{365^2} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{13}}{6{,}4 \cdot 10^8} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \simeq \frac{1}{1{,}3 \cdot 10^5} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^5}{6{,}4} \cdot \frac{1}{\cos\varphi} \approx \frac{0{,}2}{\cos\varphi}$$

Найдём $(\Delta F_c)_{(сз)}$ max – разницу сил, действующих на Землю со стороны Солнца в её центре и на поверхности (т.е. как сильно её плющит)

$$(\Delta \vec{F}_c)_{cз}\ max = \vec{e}_R \frac{G M_c m_з}{R_{cз}^2}\left(1 - \frac{R_{cз}^2}{(R_{cз} \mp R_з)^2}\right) \simeq \mp \vec{e}_R \frac{G M_c m_з}{R_{cз}^2} \cdot \frac{2R_з}{R_{cз}}$$

$$\frac{2R_з}{R_{cз}} \simeq \frac{12{,}8}{1{,}5} \cdot 10^{-5} \approx 8 \cdot 10^{-5} \approx 10^{-4} \Rightarrow$$ Землю несильно, но всё же плющит

Ещё один эффект центробежной силы.
Зависимость ускорения св. падения от географической широты



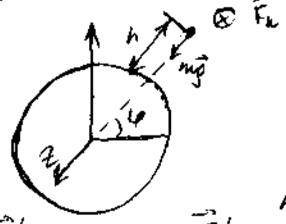
$\vec{N} = -\vec{P}$ $(N = mg)$

$-F_\omega \cos\varphi = m(g - \omega^2 R_з \cos^2\varphi) \Rightarrow$

$$(\Delta g)_{max} = \omega^2 R_з = \left(\frac{2\pi}{8{,}64 \cdot 10^4}\right)^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^8 = \frac{4\pi^2\ 6{,}4}{(8{,}64)^2}\left(\frac{см}{с^2}\right) \approx$$

$$\frac{\Delta g}{g} = 4 \cdot 10^{-3} \qquad \approx 3{,}4\ \frac{см}{сек^2}$$

Эффекты, связанные с действием силы Кориолиса.



$a' = g + 2[\vec{v}', \vec{\omega}]$
$2[\vec{v}', \vec{\omega}] \approx g \Rightarrow v' \approx \frac{g}{2\omega}$

Воспользуемся методом последовательных приближений:

1) $\vec{a}_0' = \vec{g} \Rightarrow \vec{v}_0' = \vec{g}t$

2) $\vec{a}_1' = \vec{g} + 2[\vec{v}_0', \vec{\omega}] = \vec{g} + 2[\vec{g}t, \vec{\omega}] = \vec{g} + 2t[\vec{g}, \vec{\omega}] \Rightarrow \vec{v}_1' = \vec{g}t + t^2[\vec{g}, \vec{\omega}]$

3) $\vec{a}_2' = \vec{g} + 2t[\vec{g}, \vec{\omega}] + 2t^2[[\vec{g}, \vec{\omega}], \vec{\omega}]$

$\vec{v}_2' = \vec{g}t + t^2[\vec{g}, \vec{\omega}] + \frac{2}{3}t^3[[\vec{g}, \vec{\omega}], \vec{\omega}]$

$\vec{r}_2' = \vec{g}\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}[\vec{g}, \vec{\omega}] + \frac{t^4}{6}[[\vec{g}, \vec{\omega}], \vec{\omega}]$

$$(\Delta z)' = (z'(t) - z'(0)) = \frac{gt^2}{2} - g\omega\cos\varphi\,\omega\cos\varphi\,\frac{t^4}{6} = \frac{gt^2}{2}\Big(1 - \underbrace{\omega^2\cos^2\varphi\,\frac{t^2}{3}}_{\ll 1 \text{ при малых углах}}\Big)$$

$t \ll \frac{1}{\omega} = \frac{T}{2\pi} \approx 4 сек$

$(\Delta x)' = \frac{t^3}{3} g\omega\cos\varphi = \frac{gt^2}{2} \cdot \frac{2}{3}\omega t\cos\varphi$; $(\Delta x')_{max} = \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} g\omega\cos\varphi$

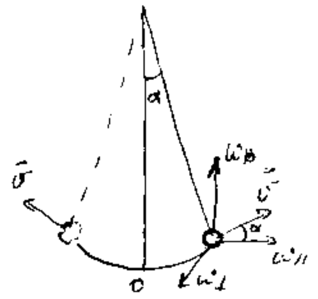
$(\Delta y)' = \frac{t^4}{12} g\omega^2 \sin 2\varphi = \frac{gt^2}{2}\frac{(t\omega)^2}{6}\sin 2\varphi$

Эффект отклонения свободно падающих тел от вертикали
Если скорость тела имеет большую вертикальную составляющую, сила Кориолиса направлена к востоку, что приводит к соответствующему отклонению траектории тела, свободно падающего (без начальной скорости) с высокой башни.
При рассмотрении в ИСО эффект объясняется тем, что вершина башни относительно центра Земли движется быстрее, чем основание, благодаря чему траектория тела оказывается узкой параболой и тело слегка опережает основание башни.

Маятник Фуко - массивный шар, подвешенный на достаточно длинной нити и совершающий малые колебания около положения равновесия.

Отклоним маятник от вертикали. Если бы Земля была инерциальной системой отсчёта, то на маятник действовали лишь $m\vec{g}$ и $\vec{T}$ ($F_{тр}$ и $F_{сопр}$ мы пренебрегаем). Обе эти силы находятся в одной вертикальной плоскости, т.е. плоскость колебаний не менялась бы. Т.к. система отсчёта, связанная с Землёй неинерциальна, то плоскость колебаний маятника на полюсе будет вращаться с той же угловой скоростью, что и Земля, относительно Земли, но в противоположном направлении.

Допустим теперь, что маятник находится в точке земной поверхности с широтой θ.



Маятник приобретает более сложное вращение, т.к. в неинерциальной системе отсчёта к обычным силам добавляется инерциальная сила Кориолиса $2m[\vec{v},\vec{\omega}]$, перпендикулярная плоскости колебаний маятника.

Разложим $\vec{\omega} = \vec{\omega}_B + \vec{\omega}_Г$, $\vec{\omega}_Г = \vec{\omega}_\parallel + \vec{\omega}_\perp$

Тогда $m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}\vec{\omega}_B] + 2m[\vec{v}\vec{\omega}_\parallel] + 2m[\vec{v}\vec{\omega}_\perp] + \vec{F}$

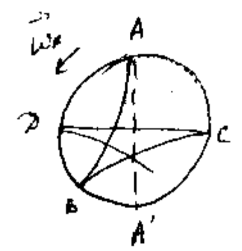
$2m[\vec{v}\,\vec{\omega}_\perp]$ направлена вдоль нити маятника, меняет только натяжение нити (и как следствие, период), но на положение плоскости качаний не влияет.

$2m[\vec{v}\,\vec{\omega}_B]$ перпендикулярна к плоскости качаний и влияет на вращение

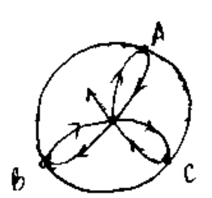
$2m[\vec{v}\,\vec{\omega}_\parallel]$ перпендикулярна к плоскости качаний, но при малых α мала, кроме того, периодически меняет направление.

В результате уравнение принимает вид $m\vec{a} = m\vec{g} + 2m[\vec{v}\vec{\omega}_B] + \vec{F}$
Движение аналогично движению на полюсе, только плоскость качаний вращается медленнее.

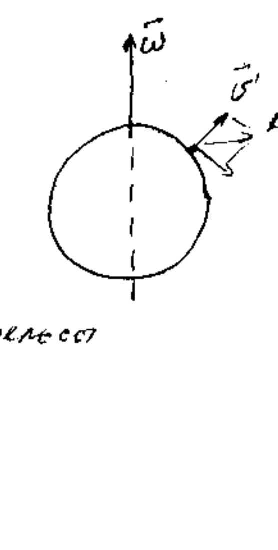
$\omega_B = \omega \sin\theta \Rightarrow \tau = \frac{2\pi}{\omega\sin\theta} = \frac{T}{\sin\theta}$ (время полного оборота плоскости качаний)



Из крайнего положения



Из положения равновесия



Закон Бэра. Реки размывают в северном полушарии правый берег (в южном - левый), который вследствие этого оказывается более крутым.

По такому же принципу стачиваются рельсы

№29.
Приливы - §69 Сивухин

Билет №30

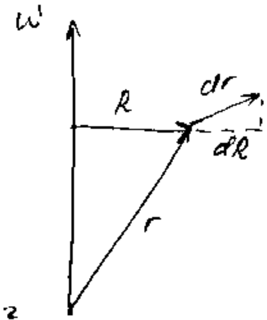
Законы сохранения в неинерциальных системах отсчёта

С учётом сил инерции уравнения движения в неинерциальной системе отсчёта не отличаются от уравнений движения в инерциальной системе отсчёта. Поэтому все следствия, вытекающие из уравнений движения остаются справедливыми.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{внеш.} + \sum \vec{F}_{инерц.}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum \vec{M}_{внеш.} + \sum \vec{M}_{инерц.}$$

Центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб} = m\omega^2 R$ является консервативной. Ее работа равна:



$$A_{цб} = \int_1^2 F_{цб} dr = m\omega^2 \int_1^2 R dr$$

Из рисунка видно, что проекция dr на R равна dR. Следовательно,

$$R dr = R dR = d\left(\frac{R^2}{2}\right)$$

Тогда, $A_{цб} = m\omega^2 \int_1^2 d\left(\frac{R^2}{2}\right) = \frac{m\omega^2 R_2^2}{2} - \frac{m\omega^2 R_1^2}{2}$ – выражение не зависит от формы пути.

Т.к. $F_{цб}$ консервативная можно ввести потенциальную энергию частицы $U_{цб}$ (центробежную энергию), убыль которой определяет работу центробежной силы инерции:

$$A_{цб} = U_{цб_1} - U_{цб_2}$$

Следовательно, $U_{цб} = -\frac{1}{2} m\omega^2 R^2$