

Лабораторная работа

"Маховое колесо"

Можаров А.Р.

25 апреля 2023 г.

Цель работы:

Измерить момент инерции махового колеса двумя способами (методом вращения и методом колебаний), сравнить полученные значения, оценить теоретически вклад обода и спиц.

Оборудование:

- 1). Экспериментальная установка «маховое колесо»
- 2). Секундомер $\Delta t = 0,2$ с, линейка $\Delta l = 0,1$ см, штангенциркуль $\Delta r = 0,005$ см
- 3). Грузы с массами 200, 500, 1450, 1900 г ($\Delta m = 0,5$ г)

1 Теоретическая часть

Для тел простой формы момент инерции вычисляется аналитически. При сложном распределении массы относительно оси вращения момент инерции может быть рассчитан численно или измерен в опыте. Для измерения момента инерции махового колеса можно пользоваться двумя методами: методом вращения (секция 1.1) и методом колебаний (секция 1.2).

1.1 Метод вращения

Колесо имеет цилиндрическую ось и находится в состоянии равновесия, т.к. центр масс его лежит на оси вращения. На шкив со шпилькой намотаем нить с грузом массы m_{Γ} . Груз поднимется от пола на высоту h , освободим колесо. Груз, опускаясь, приведет его во вращательное движение. Часть механической энергии системы колесо-ось-шкив перейдет в работу силы трения:

$$\Delta W_{\text{мех.}} = A_{\text{тр.}} \quad (1)$$

Если принять за ноль потенциальной энергии уровень пола, то механическая энергия равна:

$$W_{\text{мех.1}} = m_{\Gamma}gh \quad (2)$$

А перед ударом груза об пол:

$$W_{\text{мех.2}} = \frac{m_{\Gamma}V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (3)$$

где V — скорость груза, ω — угловая скорость колеса, I — момент инерции колеса.

Если считать, что сила трения не зависит от скорости, то сила трения равна произведению значения силы трения за один оборот на число оборотов, совершённых грузом при опускании груза $A_{\text{тр.об.}}n_{\text{об.1}}$. Тогда выражение 1 перейдёт в:

$$\frac{m_{\Gamma}V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - m_{\Gamma}gh = A_{\text{тр.об.}}n_{\text{об.1}} \quad (4)$$

Число оборотов находится по формуле:

$$n = \frac{h}{2\pi r} \quad (5)$$

где r — радиус шкива. Т.к. груз движется равноускоренно, то:

$$V = \frac{2h}{t} \quad (6)$$

Будем считать, что нить разматывается без проскальзывания. Тогда угловая скорость в момент удара об пол:

$$\omega = \frac{2h}{rt} \quad (7)$$

Рассмотрим движение после того, как груз достиг пола и нить соскользнула со шкива, тогда колесо будет продолжать своё замедленное движение до тех пор, пока сила трения не остановит его. Будем считать, что работа сила трения за один оборот для этого случая будет такой же, как и с грузом — $A_{\text{тр.1}}n_2$, где n_2 — число оборотов колеса на этом временном промежутке.

Согласно теореме об изменении кинетической энергии:

$$-\frac{I\omega^2}{2} = A_{\text{тр.1}}n_2 \quad (8)$$

Тогда из уравнений 4–8 получим формулу для момента инерции махового колеса:

$$I = mr^2 \cdot \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \cdot \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) \quad (9)$$

1.2 Метод колебаний

Навернем на штырек колеса груз, превратив маховое колесо в физический маятник. Момент сил, действующих на груз:

$$M = -mgl \cdot \sin(\alpha) \quad (10)$$

Момент импульса груза:

$$L = I_{\text{м}}\dot{\alpha} \quad (11)$$

где $I_{\text{м}}$ — момент инерции маятника относительно точки подвеса.

Уравнение моментов тогда выглядит следующим образом:

$$I_{\text{м}}\ddot{\alpha} = -mgl \cdot \sin(\alpha) \quad (12)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_{\text{м}}} \sin(\alpha) = 0 \quad (13)$$

Если считать колебания малыми:

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_{\text{м}}} \alpha = 0 \quad (14)$$

Это уравнение гармонического осциллятора. Тогда:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_{\text{м}}}} \quad (15)$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{м}}}{mgl}} \quad (16)$$

Выразим момент инерции маятника:

$$I_{\text{м}} = \frac{mglT^2}{4\pi^2} \quad (17)$$

Тогда можно найти момент инерции колеса, вычитая из момента инерции физического маятника момент инерции груза, который определяется формулой (по Теореме Гюйгенса-Штейнера):

$$I_{\text{груза}} = \frac{mr^2}{2} + ml^2 \quad (18)$$

$$I_{\text{колеса}} = I_{\text{м}} - I_{\text{груза}} \quad (19)$$

2 Практическая часть

	$R, \text{ см}$	$L, \text{ см}$	$I, \text{ г} \cdot \text{ см}^2$
ось	0,9	7,4	59,45
утолщение	1,25	17	508,26
шквив	3,7	3,27	7504,97

2.1 Метод вращения

m, Γ	№	$h, \text{ CM}$	$r, \text{ CM}$	$t, \text{ c}$	$n_2, \text{ Oб}$	$I, \Gamma \cdot \text{ CM}^2$	$I_{\text{ср.}, \Gamma \cdot \text{ CM}^2}$	$I_{\Gamma, \Gamma \cdot \text{ CM}^2}$
500	1	13,4	3,7	15,1	258	5,63	5,53	1,074
	2			15,2	156	5,58		
	3			16,0	253	6,32		
200	1	142		24,9	56	5,33		0,809
	2			24,7	58	5,14		
	3			24,0	59	4,94		

Т.к. $I_{\text{колеса}} = I_{\text{системы}} - (I_{\text{оси}} + I_{\text{утолщения}} + I_{\text{квива}})$, то $I_{\text{колеса}} = (I_{\text{ср}} - (0,00026 + 0,0076 + 0,000059)) \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2] \approx 5,45 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2]$.

2.2 Метод колебаний

$m, \text{ г}$	N	n	$R, \text{ см}$	$L, \text{ см}$	$t, \text{ с}$	$I, 10^6 \text{ г} \cdot \text{ см}^2$	$I_{\text{ср}}, 10^6 \text{ г} \cdot \text{ см}^2$	$I_{\text{г}}, 10^6 \text{ г} \cdot \text{ см}^2$
1900	1	10	5,1	23,5	25,67	7,31	7,20	1,37
	2				25,11	6,99		
	3				25,67	7,31		
1450	1		3,43		29,08	7,16	7,20	0,81
	2				29,23	7,22		
	3				29,22	7,21		

Т.к. $I_{\text{колеса}} = I_{\text{системы}} - (I_{\text{оси}} + I_{\text{утолщения}} + I_{\text{квива}})$, тогда $I_{\text{к1}} = (7,2 - (1,37 + 0,00026 + 0,0076 + 0,000059)) \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2] \approx 5,78 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2]$ и $I_{\text{к2}} = (7,2 - (0,81 + 0,00026 + 0,0076 + 0,000059)) \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2] \approx 6,34 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2]$

Оценим вклад обода и спиц колеса в его момент инерции, положив спицы равными тонкими стержнями, а обод – разностью двух цилиндров:

$$I_{\text{обода}} \approx 6,37 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2], I_{\text{шквива}} \approx 0,008 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2], I_{\text{спиц}} \approx 0,23 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2]$$

$$I_{\text{колеса}} = I_{\text{обода}} + I_{\text{шквива}} + I_{\text{спиц}} \approx 6,61 \cdot 10^6 [\text{г} \cdot \text{см}^2]$$