

Отчет по лабораторной работе № 115

«Эллипсоид инерции»

Цель работы: изучить эллипсоиды инерции однородных твердых тел, при этом изучить один из экспериментальных методов измерения момента инерции (метод крутильных колебаний)

Оборудование: трифилярный подвес, однородные цилиндры, однородный параллелепипед с квадратным сечением, секундомер

Теоретическая часть

Тела инерции	Размеры, мм			Масса, г
	a	b	L	
Параллелепипед	49,85	99,00	149,0	2005
Призма	68,00	68,25	199,6	2558
Куб	85,75	85,75	85,75	1700
Цилиндр(длинный)	89,85	89,85	149,0	2652
Цилиндр(короткий)	95,85	95,85	82,00	1668,5
Подвес	30,13	128,5	2191,0	1000

Тензор инерции

$$I = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int xy dm & \int (z^2 + x^2) dm & - \int yz dm \\ - \int xz dm & - \int yz dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Тензор инерции для параллелепипеда в главных осях

$$I = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} b^2 + L^2 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 + a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

Тензор инерции для цилиндра в главных осях

$$I = \frac{m}{12} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} a^2 + L^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} a^2 + L^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} a^2 \end{pmatrix}$$

Теорема Штейнера

$$I = I_0 + m d^2$$

Формула для экспериментального определения момента инерции

$$I = \frac{gab}{4\pi^2 l} [T^2(m+m_0) - m_0 T_0^2]$$

Экспериментальная часть

Измерение моментов инерции

$$T_0 = 2,61$$

Тела	n=20			T ₁ ось, с	T ₂ ось, с	T ₃ ось, с	I ₁ ось, г*см ²	I ₂ ось, г*см ²	I ₃ ось, г*см ²
	t ₁ ось, с	t ₂ ось, с	t ₃ ось, с						
Параллелепипед	48,3	45,2 6	38,1 8	2,42	2,27	1,93	4743000 ± 17 000	3826000 ± 15 000	1900000 ± 10 000
	48,58	45,6 2	38,6 9						
	48,32	45,4 4	38,6 3						
Призма	53,95	34,7 5	39,1 6	2,71	1,75	1,98	8510000 ± 27 000	1800000 ± 10 000	3165000 ± 13 000
	54,32	35,0 4	39,7 4						
	54,49	35,2 2	40,1 5						
Куб	40,36	40,4 3	x	2,04	2,01	x	1926000 ± 10 100	1790000 ± 10 000	x
	40,82	39,9	X						
	40,96	40,1 3	x						
Цилиндр (длинный)	36,56	46,8 3	39,0 2	1,84	2,33	1,97	2447000 ± 11 000	5750000 ± 20 000	3224000 ± 13 000
	36,94	46,9	39,4 4						
	36,95	46,3	39,6 1						
Цилиндр (короткий)	40,41	40,4 6	39,6 7	2,03	2,01	2,00	1818000 ± 10 000	1744000 ± 10 000	1700000 ± 10 000
	40,52	40,1 7	39,9 4						
	40,57	39,9 3	40,4						

Формула для расчета погрешности

$$\Delta I = \frac{1}{4\pi^2} \left(2 \Delta T \left| T a b g \frac{m+m_0}{l} \right| + 2 \Delta T_0 \left| T_0 a b g \frac{m_0}{l} \right| + \Delta a \left| b g \frac{T^2 (m+m_0) - T_0^2 m_0}{l} \right| + \right. \\ \left. + \Delta b \left| a g \frac{T^2 (m+m_0) - T_0^2 m_0}{l} \right| + \Delta l \left| a b g \frac{T^2 (m+m_0) - T_0^2 m_0}{l^2} \right| + \Delta m \left| T^2 a b \frac{g}{l} \right| + \Delta m_0 \left| a b g \frac{T^2 - T_0^2}{l} \right| \right)$$

Сравнение значений с теоретическими

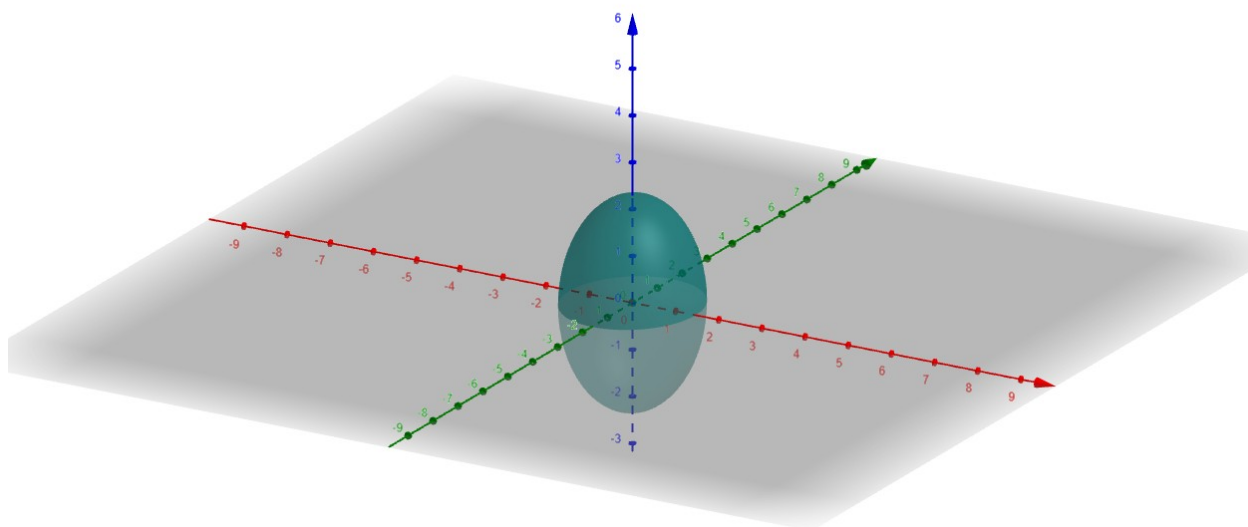
Тело	Ось	Теоретическое, $\text{г}^*\text{мм}^2$	Практическое, $\text{г}^*\text{мм}^2$	Расхождение, %
Параллелепипед	I1	5347000	4743000	11,30
	I2	4124620	3826000	7,24
	I3	2052790	1900000	7,44
Призма	I1	7434911	8510000	12,63
	I2	1550877	1800000	13,84
	Не главная ось	2594494	3165000	18,03
Куб	I1	2083370	1926000	7,55
	Не главная ось	2083370	1790000	14,08
Цилиндр (длинный)	I1	2676207	2447000	8,56
	I2	6244524	5750000	7,92
	Не главная ось	3494690	3224000	7,75
Цилиндр (короткий)	I1	1916110	1818000	5,12
	I2	1892970	1744000	7,87
	Не главная ось	1902935	1700000	10,66

Проверка теоремы Штейнера

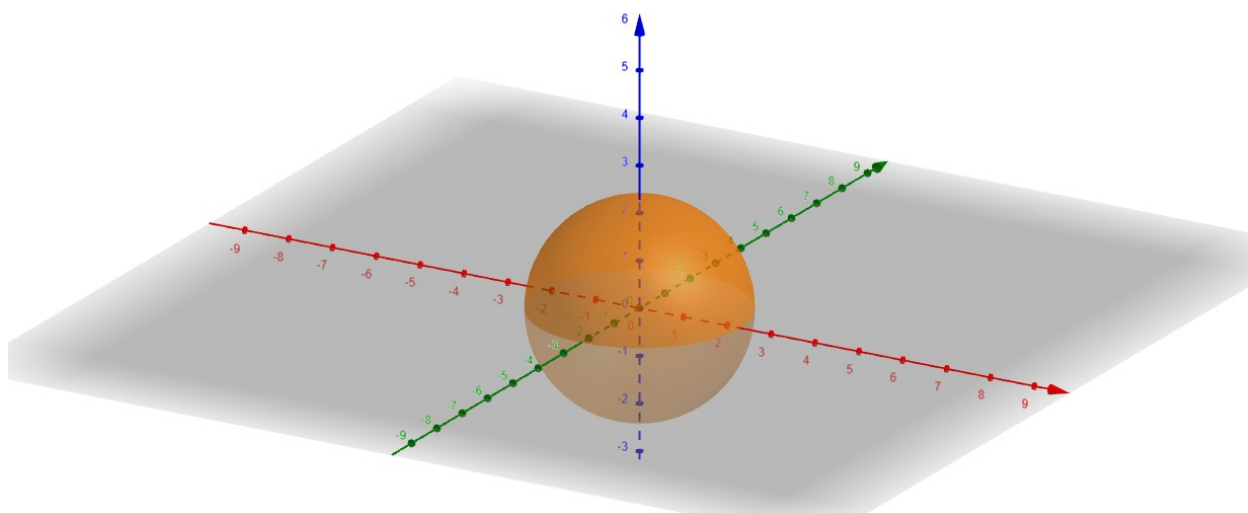
Два цилиндра				
T, с	I, $\text{г}^*\text{мм}^2$	$I_{\text{ср}}$, $\text{г}^*\text{мм}^2$	$I_{\text{теор}}$, $\text{г}^*\text{мм}^2$	Расхождение, %
2,6615	10628592	10839791	11520600	5,909493
2,685	10923331			
2,6885	10967450			

Построение эллипсоидов

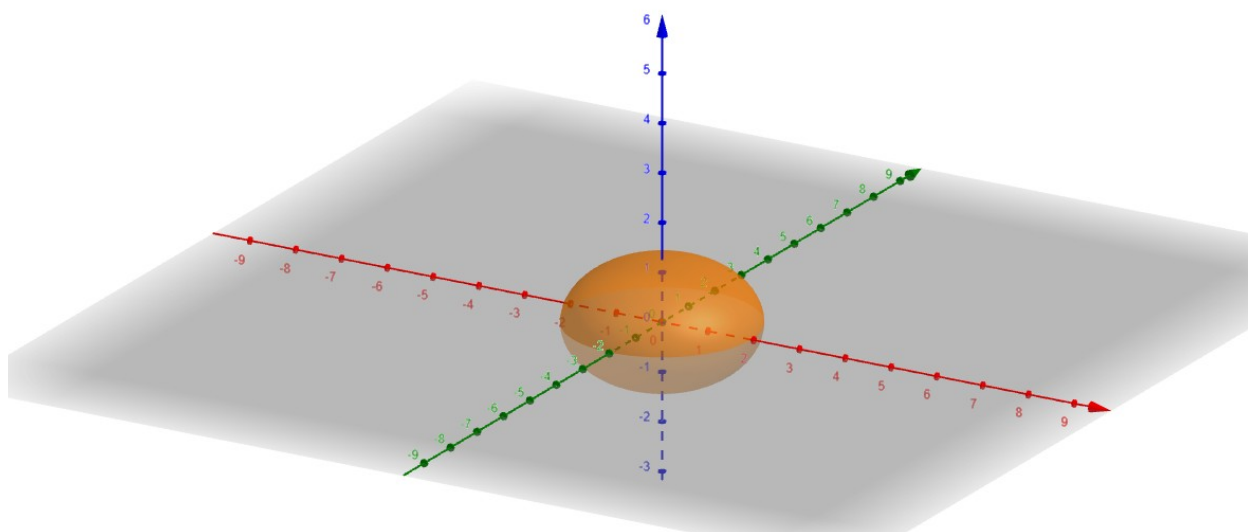
Параллелепипед



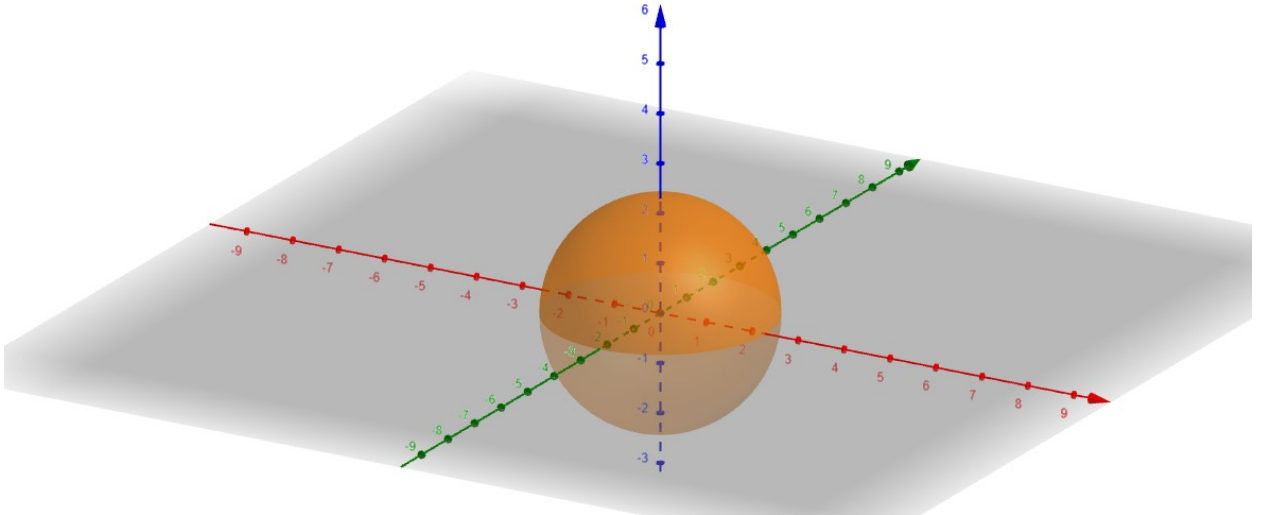
Куб



Цилиндр (большой)



Цилиндр (малый)



Выясним, есть ли связь между формой цилиндра (отношением его высоты h к радиусу сечения r) и формой эллипсоида инерции.

Главные моменты инерции цилиндра:

$$I_1 = I_2 = m \left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = \frac{mr^2}{4} \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)$$

$$I_1 = I_2 = \frac{I_3}{2} \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)$$

$$I_3 = \frac{mr^2}{2}$$

Чем больше отношение $\frac{h}{r}$, тем больше растянут эллипсоид инерции в плоскости $I_1 I_2$.

Выясним, есть ли связь между формой параллелепипеда (отношением его ребер l_1/l_2) и формой эллипсоида инерции.

Главные моменты инерции:

$$I_1 = \frac{ml_2^2}{6} \quad I_2 = I_3 = \frac{m}{12} (l_1^2 + l_2^2) = \frac{ml_2^2}{12} \left(\left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2 + 1 \right)$$

Чем больше отношение $\frac{l_1}{l_2}$, тем больше растянут эллипсоид инерции в плоскости $I_2 I_3$,