Теоретическая часть

Для измерения сопротивлений, ёмкостей и индуктивностей часто применяют мостовые схемы. В таких схемах элементы цепи соединяют «четырехугольником», в одну диагональ которого включают источник напряжения, а в другую – измерительный прибор. При определенном соотношении между параметрами элементов измерительный прибор показывает отсутствие напряжения в диагонали (баланс моста). В данной работе измерительный мост используется для измерения емкости конденсатора.

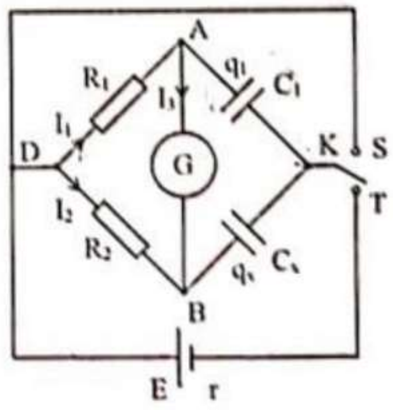


Рис. 1

где R_1 и R_2 – магазины сопротивлений; C_1 и C_x – конденсаторы известной и неизвестной емкости соответственно; G – прибор для измерения напряжений; $\mathcal{E}$ – источник напряжения; K – ключ, может быть замкнут на контакт T, где конденсаторы заряжаются от источника напряжения, или S, где они разряжаются через сопротивления R_1 и R_2.

Процесс зарядки конденсаторов (ключ в положении T):
Для упрощения выкладок считаем R_G - бесконечно большим, r – пренебрежимо малым ($R_G \gg R_1, R_2 \gg r$) Контур DATD, правило Кирхгофа:

$$i_1 R_1 + \frac{q_1}{C_1} = \mathcal{E},$$

где: i_1 – ток, текущий через сопротивление R_1, q_1 – заряд конденсатора C_1.

Ток через G мал (R_G велико), поэтому $i_1 = \frac{dq_1}{dt}$, подставим:

$$\frac{dq_1}{dt} R_1 + \frac{q_1}{C_1} = \mathcal{E}$$

$$\frac{dq_1}{q_1 - \mathcal{E} C_1} = -\frac{dt}{C_1 R_1}$$

$$\ln(\mathrm{q}_1 - \mathcal{E}\mathrm{C}_1) = -\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1} + const$$

$$\mathrm{q}_1(t = 0) = \mathcal{E}\mathrm{C}_1 \Rightarrow const = \mathcal{E}\mathrm{C}_1$$

$$\mathrm{q}_1(t) = \mathcal{E}\mathrm{C}_1 + \mathcal{E}\mathrm{C}_1 e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}} = \mathcal{E}\mathrm{C}_1(1 + e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}})$$

Произведение $\mathrm{R}_1\mathrm{C}_1$ имеет размерность времени и называется постоянной времени RC-цепи. Величина постоянной времени определяет, насколько быстро заряжается конденсатор. Как видно из формулы, за время $\tau = \mathrm{R}_1\mathrm{C}_1$ заряд конденсатора достигает значения $\mathrm{q}_1(t) = \mathrm{C}_1\mathcal{E}(1 + e^{-1}) \approx 0{,}63\mathrm{C}_1\mathcal{E}$

$$\mathrm{q}_1(t) = \mathcal{E}\mathrm{C}_1(1 + e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}})$$

$$\mathrm{U}_1(t) = \mathcal{E}(1 + e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}})$$

Аналогично DBTD:

$$\mathrm{U}_\mathrm{x}(t) = \mathcal{E}(1 + e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_\mathrm{x}\mathrm{R}_2}})$$

Напряжение U_G на измерительном приборе (между A и B) равно разности напряжений на конденсаторах:

$$\mathrm{U}_\mathrm{G}(t) = \mathrm{U}_1(t) - \mathrm{U}_\mathrm{x}(t) = \mathcal{E}(e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_\mathrm{x}\mathrm{R}_2}} - e^{-\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{C}_1\mathrm{R}_1}})$$

Откуда следует, что при равенстве $\mathrm{R}_1\mathrm{C}_1 = \mathrm{R}_2\mathrm{C}_\mathrm{x}$ напряжение $\mathrm{U}_\mathrm{G}(t) = 0$. Это условие называется условием баланса моста. Графики напряжений в отсутствие баланса моста могут выглядеть так:

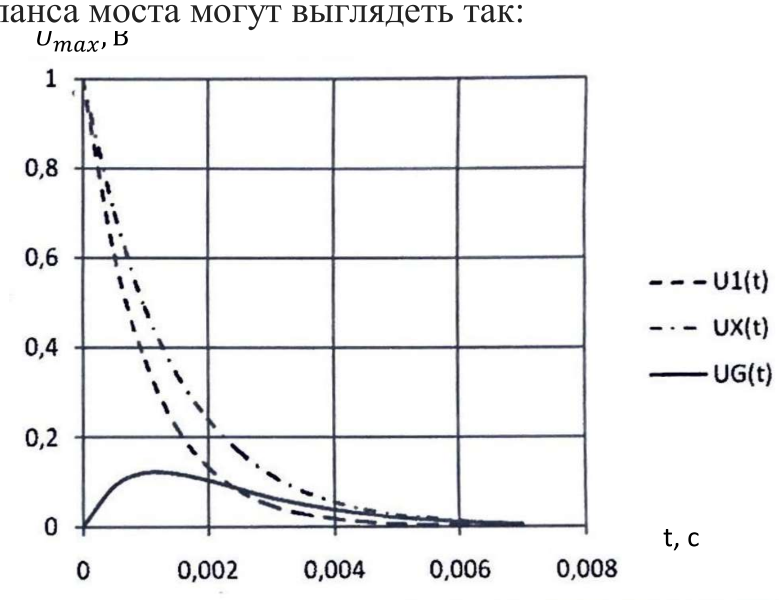


Рисунок 1. графики напряжений при отсутствии баланса

Процесс разрядки конденсаторов (ключ в положении S):

$$U_1(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{C_1 R_1}}$$

$$U_x(t) = \mathcal{E} e^{-\frac{t}{C_x R_2}}$$

$$U_G(t) = \mathcal{E}\left(e^{-\frac{t}{C_1 R_1}} - e^{-\frac{t}{C_x R_2}}\right)$$

При балансе моста U_G будет так же равно нулю, тогда для измерения ёмкости конденсатора C_x следует, подбирая значения сопротивлений R_1 и (или) R_2, добиться баланса моста, тогда $C_x = C_1 \frac{R_1}{R_2}$.

Времена зарядки или разрядки конденсаторов (следовательно, и импульса U_G) оказываются малыми и поэтому отклик измерительного прибора будет зависеть не только от чувствительности прибора, но и от его инерционных свойств.

При *безинерционном* (малоинерционном) наблюдении прибор успевает отслеживать все изменения измеряемой величины. В качестве такого прибора в работе используется осциллограф, обладающий достаточным быстродействием для наблюдения импульсов U_G. О величине разбаланса моста можно судить по максимальному значению напряжения U_G.

При *инерционном* (баллистическом) наблюдении прибор не успевает отслеживать все изменения измеряемой величины. Высокочувствительный нуль-гальванометр, установленный в диагональ моста, является типичным прибором, реализующим инерционное наблюдение. Время установки стрелки в таком гальванометре существенно больше времени зарядки/разрядки конденсаторов. Процесс измерения в этом случае можно представить в виде двух последовательных этапов: сначала, из-за проходящего через гальванометр кратковременного тока, рамка гальванометра приобретает некоторую угловую скорость, а затем, когда ток уже прекратился, эта рамка отклоняется на некоторый угол. Отклонение стрелки гальванометра пропорционально прошедшему через гальванометр заряду.

Как правило, у чувствительных гальванометров условие $R_G \gg R_{1,2}$ не выполняется, но т.к. между A и B разность потенциалов отсутствует, то ток через измерительный прибор будет равен нулю при любом значении R_G и, следовательно, величина R_G на условие баланса моста влиять не будет.

Практическая часть

Собрав схему (рисунок 3), измеряем время, за которое конденсатор заряжается (разряжается) на (до) $\frac{1}{e}$ от его максимального заряда. Во время эксперимента магазин сопротивлений R_1 был выставлен на 99999 Ом, поэтому ток через конденсатор C_1 будем считать нулевым. Найдем ёмкость конденсатора C_x

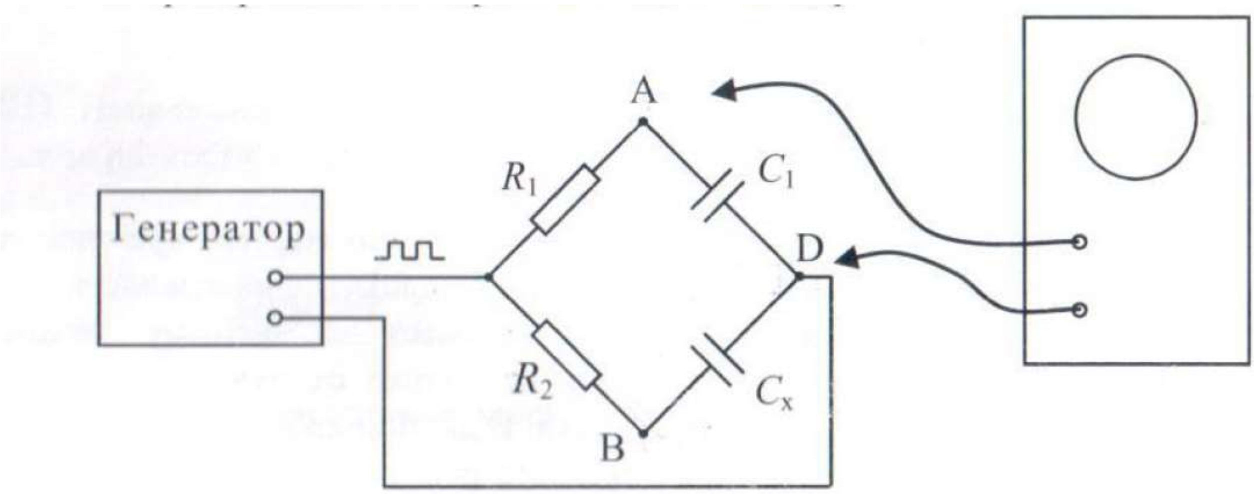
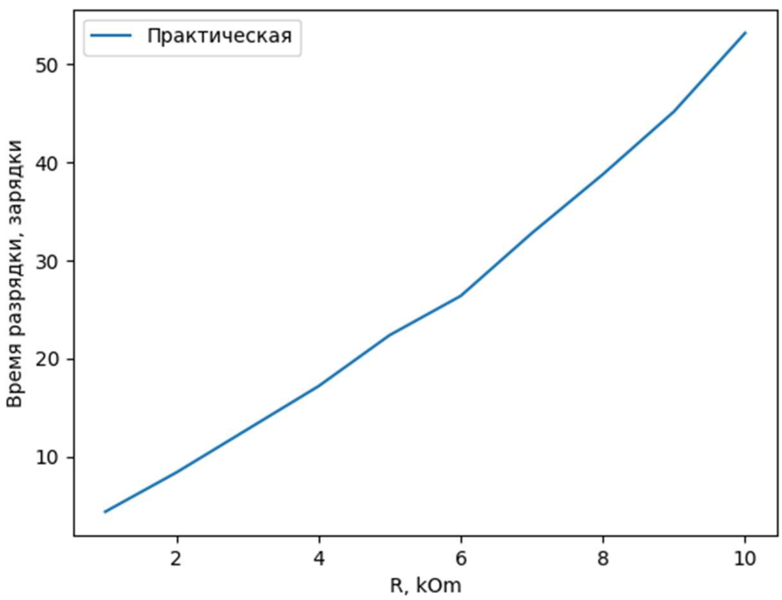


Рисунок 2. схема установки с осциллографом

Таблица экспериментальных данных:

R_1	1000	2000	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000
τ	4.4	8.4	12.8	17.2	22.4	26.4	32.8	38.8	45.2



По графику мы видим, что полученную зависимость с хорошим приближением можно считать линейной, что совпадает с теорией, так как $\tau = R_1 C_1$

3. Теперь присоединим осциллограф, а затем гальванометр, к точкам А и В и попытаемся достичь нулевой разности потенциалов, регулируя $R2$ при фиксированном $R1$ (условие баланса моста). На реальных измерительных приборах невозможно определить отсутствие тока, так как присутствуют шумы (осциллограф) или большая инерция (гальванометр), поэтому выбирались границы, в которых можно считать ток нулевым. Таблицы экспериментальных данных и советующее им значение ёмкости конденсатора, вычисленное по формуле $C_x = C_1 \frac{R_1}{R_2}$:

Осциллограф, U =

R_1	R_2 -	R_2 0	R_2 +	C_x мкФ
100	24,4	25	25,5	4
300	72,1	74	74,1	4,05
1000	242	245	249	4,08
2000	485	488	494	4,09
3000	727	732	737	4,09

Гальванометр, U = 12

R_1	R_2 -	R_2 0	R_2 +	C_x мкФ
100	19	24,5	29	4,1
300	66	72,3	78	4,15
1000	233	240	251	4,17
2000	474	485	493	4,12
3000	710	722	737	4,16

Гальванометр, U = 24

R_1	R_2 -	R_2 0	R_2 +	C_x мкФ
100	21.5	25	28	4
300	68	72	76	4,17
1000	237	241	245	4,15
2000	478	483	487	4,14
3000	718	723	730	4,15

Среднее значение емкости конденсатора в цепи с осциллографом: C_x = 4,06

Среднее значение емкости конденсатора при U = 12 В и цепи с гальванометром: C_x = 4,14

Среднее значение емкости конденсатора при U = 24 В и цепи с гальванометром: C_x = 4,12

Рассчитаем погрешность измерения C_x по формуле $\Delta C_x = \varepsilon_{C_x} \cdot \overline{C_x}$:

$\varepsilon_{C_x} = \sqrt{{\varepsilon_{R_2}}^2 + {\varepsilon_{C_1}}^2 + {\varepsilon_{R_1}}^2}$, где $\varepsilon_{R_1} = 0{,}01\left(0{,}2 + 0{,}5\frac{m}{R_1}\right) \approx 0{,}002$ (*m* – число ненулевых декад магазина, во всех экспериментах *m = 1*); $\varepsilon_{C_1} = 0{,}002$, $\varepsilon_{R_2} = 0{,}01\left(0{,}2 + 0{,}5\frac{m}{R_2}\right)$, затем усредним значение инструментальной погрешности:

$$\Delta C_x = \overline{C_x} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{5} \varepsilon_{C_x}{}^{i}}{5}$$

$C_x^{осц}$ = (4,06 $\pm$ 0,01) мкФ

C_x^{12} = (4,14 $\pm$ 0,01) мкФ

C_x^{24} = (4,12 $\pm$ 0,01) мкФ

Исследуем, как погрешность δR_2 зависит от R_1, задаваемым нами сопротивлением:

Погрешность, вносимая конечной чувствительностью нуль-индикатора:

$$\delta R_2 = \frac{\Delta R_2}{R_{2ср}}$$

где $\Delta R_2 = \frac{R_{2\,max} - R_{2\,min}}{2}$, $R_{2ср} = \frac{R_{2\,max} + R_{2\,min}}{2}$

Осциллограф:

$$\delta R_2^G \approx \frac{eU_{min}}{\varepsilon},$$

где e – основание натурального логарифма, ε – ЭДС источника, U_{min} – минимальное напряжение которое регистрируется осциллографом, в эксперименте $U_{min} = 100$ мВ. Получается, что погрешность не зависит от сопротивлений $R1$ и $R2$, а также убывает с ростом напряжения от источника.

Гальванометр:

$$\delta R_2 = Q_{min} \frac{1 + \frac{C_1}{C_x} + \frac{R_G}{R_1}}{C_1 \varepsilon},$$

где Q_{min} - минимальный заряд, прохождение которого мы можем заметить. Его можно оценить, зная какой ток отклоняет стрелку гальванометра на деление, в эксперименте брался минимальный ток в 1 деление, чтобы найти заряд нужно ток умножить на характерное время для эксперимента $\tau = RC$. Оценка минимального заряда: $Q_{min} = \tau\, I_{дел}^G = \frac{R_G C_1 R_1}{R_1 + R_{2ср}}\ I_{дел}^G$, где $I_{дел}^G = 0{,}3$ мкрА. Итоговая формула: $\delta R_2 = I_{дел}^G \left(\frac{R_G C_1 R_1}{R_1 + R_{2ср}}\right)\left(\frac{1 + \frac{C_1}{C_x} + \frac{R_G}{R_1}}{C_1 E}\right)$.

Осциллограф U =

R_1 Ом	100	300	1000	2000	3000
δR_2					

Нуль-гальванометр U = 12В

R_1 Ом	100	300	1000	2000	3000
δR_2					

Нуль-гальванометр U = 24 В

R_1 Ом	100	300	1000	2000	3000
δR_2					

Вывод: Во время проведения работы емкость конденсатора была измерена двумя разными методами. При увеличении сопротивлении, т.е. времени зарядки-разрядки конденсатора, погрешность измерения емкости конденсатора уменьшается. Также при увеличении напряжения при измерении при помощи нуль-гальванометра, погрешность уменьшается.