Федеральное агентство научных организаций
(ФАНО)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ
ФИЗИКИ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК»
(ИПФ РАН)

МЕХАНИКА СПЛОШНЫХ СРЕД
ЧАСТЬ 1.

Учебно-методическое пособие для студентов очной формы обучения

Нижний Новгород, 2016

Введение

Механика сплошных сред изучает поведение всевозможных сред (твердые тела, жидкости, газы) в различных физических условиях. При этом в зависимости от целей исследования и от внешних условий для описания физических процессов, происходящих в одной и той же среде, используются различные физические модели. Эти модели изучаются в различных разделах механики сплошных сред (МСС), таких, например, как гидро- и газо- динамика, теория упругости и т.д. В настоящем пособии мы будем уделять основное внимание изучению динамических процессов в жидкостях и газах. *Хотя молекулярный механизм, посредством которого жидкость оказывает сопротивление деформации, не такой, как у газов (между молекулами газа действуют чрезвычайно слабые силы притяжения, в то время как в жидкости молекула , наоборот, находится все время под воздействием интенсивного поля сил соседних молекул), уравнения , определяющие, например, скорость изменения деформации, имеют одинаковую форму в обоих случаях*. Прежде чем обсуждать основные уравнения динамики жидкости и газов, остановимся на так называемой гипотезе сплошной среды.

Введем понятие сплошной среды. Известно, что все тела состоят из отдельных движущихся дискретных частиц (атомов, молекул и т.д.). Однако в любом интересующем нас объеме их число достаточно велико, так что тело можно рассматривать как среду, заполняющую пространство непрерывным образом. При этом среда называется **сплошной**, если распределение вещества можно считать непрерывным в любом, сколь угодно малом объеме V. Следует понимать, что это понятие – непрерывное распределение вещества – является определенной идеализацией для среды, состоящей из дискретных частиц, и зависит от изучаемых физических процессов. Предположим, что в сплошной среде можно выделить два характерных масштаба: L – характерный масштаб исследуемых физических процессов, l – характерное расстояние между молекулами в сплошной среде. При этом среду можно считать сплошной, если характерные масштабы L рассматриваемых процессов велики по сравнению с характерным расстоянием между молекулами l.

На первый взгляд, кажется, что введение гипотезы сплошности – это усложнение, поскольку мы переходим от рассмотрения системы, состоящей из конечного, пусть большого, числа N частиц, к рассмотрению непрерывного континуума. И это действительно было бы усложнением, если бы мы рассматривали динамику этого континуума вместо динамики N дискретных частиц. Но МСС использует совершенно другие методы.

Гипотеза о сплошной среде позволяет <u>описывать движение среды с помощью непрерывных функций пространственных координат и времени, которые удовлетворяют системе уравнений в частных производных.</u> Такое описание возможно потому, что гипотеза о сплошной среде позволяет определить дифференциалы координат и времени. Это так называемый феноменологический подход, очень распространенный в механике сплошных сред.

Механика сплошных сред (МСС) возникла более 200 лет назад как обобщение механики Ньютона для описания сред, непрерывно заполняющих пространство. Казалось бы, в МСС не должно остаться нерешенных задач. Но, как мы увидим в дальнейшем, уравнения МСС – это нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. Их решения можно найти только в очень ограниченном числе случаев. Причем, сильная нелинейность проявляется уже при обычных условиях. В связи с этим много практически важных задач МСС остаются нерешенными.

Итак, будем полагать, что сплошная среда – это непрерывная совокупность материальных точек. Что будет являться материальной точкой сплошной среды? Очевидно, это не молекула. Как мы говорили выше, гипотеза сплошной среды может быть введена только при рассмотрении таких движений, масштаб которых L *велик по сравнению* с масштабом l – расстоянием между частицами. Выберем малый объем сплошной среды, линейный размер которого λ удовлетворяет соотношению $l << \lambda << L$. Будем рассматривать характеристики среды, усредненные по малому объему $V \sim \lambda^3$. Используя гипотезу сплошной среды о том, что вещество непрерывно заполняет пространство, мы можем формально стягивать этот объем в точку. Но в нем остается все равно большое число молекул сплошной среды. Материальными точками сплошной среды в таком случае называются бесконечно малые объемы с линейным размером порядка λ. Иногда эти объемы называют жидкими частицами. Поэтому исследование движения сплошной среды (жидкости, газа, твердых тел) будет означать исследование движения всех ее **материальных точек**.

1. Кинематика сплошной среды. Описания движения жидкости с помощью Эйлеровых и Лагранжевых переменных.

1.1 Сплошная среда представляет собой непрерывную совокупность **материальных точек**. По определению: знать движение сплошной среды – это знать движение всех ее точек. При этом нужно ввести правило индивидуализации отдельных (одинаковых с геометрической точки зрения) точек континуума.

1.1.1. Описание Лагранжа. Лагранжевы переменные

Будем следить за движением отдельных жидких частиц, изучая изменение различных величин, характеризующих состояние сплошной среды: например, температуры, скорости, плотности и т.д. Для того, чтобы индивидуализировать жидкие частицы, будем ставить в соответствие каждой частице 3 числа (ξ_1, ξ_2, ξ_3) – обычно это координаты жидких частиц в начальный момент времени. Эти координаты называются лагранжевыми координатами, при этом положение частицы в произвольный момент времени будет определяться радиусом-вектором $\vec{r}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, т.е. в декартовых координатах функциями $x_1\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $x_2\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, $x_3\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. При описании движения жидких частиц в переменных Лагранжа основной кинематической характеристикой является радиус-вектор всех материальных точек (жидких частиц) в любой момент времени t, т.е. $\vec{r}\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$. Таким образом, при описании Лагранжа состояние сплошной среды будет определяться значениями физических величин (например, поля температуры T, поля скорости $\vec{v}$ и т.д.), как функциями переменных ξ_1, ξ_2, ξ_3, t. При этом скорость жидкой частицы определяется выражением:

$$\vec{v}\left(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t\right) = \left.\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\right|_{\xi} \equiv \frac{d\,\vec{r}}{d\,t}, \tag{1.1}$$

а ускорение частицы:

$$\vec{a} = \left.\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right|_{\xi} = \left.\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2}\right|_{\xi} \equiv \frac{d^2 \vec{r}}{d\,t^2} \tag{1.2}$$

Производная по времени в лагранжевых координатах называется материальной или полной производной. В дальнейшем для ее обозначения мы будем использовать знак полной производной. При описании Лагранжа движение сплошной среды считается известным, если для каждой материальной точки заданы скорость, ускорение, температура и другие характеристики, как функции времени.

1.1.2. Описание Эйлера. Эйлеровы переменные

Возможен и другой подход к описанию движения сплошной среды, когда изучается временная зависимость параметров сплошной среды для каждой фиксированной точки пространства в некоторой системе отсчета. Такой подход называется описанием Эйлера. При описании Эйлера характеристики движения сплошной среды и происходящие в ней процессы рассматриваются как функции координат (x_1 , x_2, x_3) и времени t. В отличие от описания Лагранжа наблюдатель не движется вместе с частицами сплошной среды, а находится в фиксированной точке пространства, в которую приходят разные частицы сплошной среды. В каждый момент времени t в точке с координатами (x_1 , x_2 , x_3) находится частица, скорость которой равна $\vec{v}\,(x_1 , x_2 , x_3 , t)$. Поле скорости $\vec{v}\,(x_1 , x_2, x_3 , t)$ является основной кинематической характеристикой сплошной среды при эйлеровом описании. Таким образом, в случае эйлерова описания мы наблюдаем физические величины в заданных точках пространства. При этом движение сплошной среды считается известным, если заданы скорость, ускорение, температура и другие характеристики, как функции координат и времени.

1.1.3. Переход от эйлерова к лагранжеву описанию и наоборот

Переход от переменных Лагранжа к переменным Эйлера

Пусть нам известен закон движения сплошной среды, т.е. известен радиус-вектор любой жидкой частицы в момент t – $\vec{r}\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t)$. Предположим также, что известны термодинамические и гидродинамические характеристики физических величин в среде, которые обозначим как $A(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t)$. Требуется найти все физические величины как функции переменных Эйлера x_1 , x_2 x_3. Для этого из системы трансцендентных уравнений, определяющих компоненты радиуса вектора $\vec{r}\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t) \\ x_2 &= x_2\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t) \\ x_3 &= x_3\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

можно выразить $\xi_1 = \xi_1(x_1 , x_2\ x_3 , t)$, $\xi_2 = \xi_2(x_1 , x_2\ x_3 , t)$, $\xi_3 = \xi_3(x_1 , x_2\ x_3 , t)$. Тогда все физические величины – поля скорости, температуры, плотности и т.д. можно представить функциями переменных Эйлера. Следовательно, переход от движения, описываемого в переменных Лагранжа, к описанию движения в переменных Эйлера, сводится к разрешению алгебраических уравнений для неявных функций (1.3).

Переход от описания движения в переменных Эйлера к описанию движения в переменных Лагранжа

Предположим, что известно поле скорости $\vec{v}\,(x_1 , x_2\ x_3 , t)$ и все другие физические величины сплошной среды как функции x_1 , x_2 x_3 и времени t. Перейдем к описанию движения в переменных Лагранжа, т.е. найдем радиус-вектор $\vec{r}\,(\xi_1 ,\xi_2, \xi_3, t)$ всех лагранжевых частиц. Мы знаем, что поле скорости $\vec{v}\,(x_1 , x_2\ x_3 , t)$ характеризует скорость частицы, которая в момент времени t находится в точке с координатами x_1 , x_2 x_3, т.е.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}\left(\vec{r}, t\right) \tag{1.4}$$

с начальными условиями $\vec{r}\big|_{t=0} = \vec{\xi}(\ \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$.

Решая эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить радиус-векторы лагранжевых частиц $\vec{r} = \vec{r}\left(t, \vec{\xi}\ \right)$, т.е. основную кинематическую характеристику сплошной среды при описании Лагранжа. При этом все физические характеристики сплошной среды будут функциями лагранжевых переменных, т.е. $\left(\vec{r}\left(t, \vec{\xi}\right), t\right)$. Отсюда ясно, почему производная по времени в лагранжевых переменных называется полной.

Действительно, с формальной точки зрения переход от эйлерова описания к лагранжеву – это замена переменных. Выразим лагранжеву производную по времени какой-нибудь физической величины, заданной в эйлеровых переменных. Пусть, например, скалярное поле A *(поле плотности, температуры и.т.д.)* выражено в эйлеровых переменных, т.е. $A(x_1\,,\, x_2\ \ x_3\,,\, t)$. Тогда:

$$\frac{dA}{dt} = \left.\frac{\partial\, A}{\partial\, t}\right|_{\xi} = \frac{\partial}{\partial\, t} A\left(x_1, x_2, x_3, t\right)\Big|_{\xi} \tag{1.5}$$

Но как мы показали выше, можно перейти от переменных Эйлера к переменным Лагранжа. При этом $x_i = x_i\ (\xi_1\,, \xi_2,\ \xi_3,\ t)$, где i=1, 2, 3. Но тогда:

$$\left.\frac{\partial}{\partial\, t} A\right|_{\xi} = \left.\frac{\partial\, A}{\partial\, t}\right|_{x} + \left.\frac{\partial\, A}{\partial\, x_i}\frac{\partial\, x_i}{\partial\, t}\right|_{\xi} \tag{1.6}$$

Учитывая, что $\left.\dfrac{\partial\, x_i}{\partial\, t}\right|_{\xi} = v_i\left(\vec{x}_1, x_2, x_3, t\right)$ – по определению скорость частицы, нетрудно видеть, что:

$$\left.\frac{\partial\, A}{\partial\, t}\right|_{\xi} = \frac{dA}{dt} = \frac{\partial\, A}{\partial\, t} + \left(\vec{v}, \nabla\right) A \tag{1.7}$$

Если $A = v_i$ – компоненты скорости, то из (1.7) сразу имеем выражение для лагранжева ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\, \vec{v}}{\partial\, t} + \left(\vec{v}, \nabla\right)\vec{v} \tag{1.8}$$

1.1.4.Траектории и линии тока

При изучении движения сплошной среды необходимо вводить в рассмотрение скалярные и векторные величины (температуру T, скорость $\vec{v}$ и др.). *Совокупность значений той или иной величины, заданной в каждой точке рассматриваемой области, называется скалярным или векторным* ***полем*** *этой величины.* Для любого векторного поля соответствующей физической величины можно построить семейство так называемых векторных линий. Выясним их смысл на примере векторных линий поля скорости, называемых линиями тока. ***Линия тока*** *– кривая, касательная к которой в каждой точке параллельна вектору скорости. Уравнения для линий тока получаются из их определения*:

$$\frac{dx_i}{v_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right)} = dS \quad \text{или} \quad \frac{dx_i}{dS} = v_i\left(\vec{x}, t\right) \tag{1.9}$$

Следует подчеркнуть, что на практике часто бывает весьма необходимо знать линии тока. Их можно определить экспериментально. Это связано с разработкой методов визуализации течений.

При лагранжевом описании для наглядности вводят ***траектории жидких частиц*** *— геометрическое место их положений*. Формула $\vec{r} = \vec{r}\left(\vec{\xi}, t\right)$ представляет собой параметрическое задание траекторий. Уравнение траектории можно найти, если известно поле скорости при эйлеровом описании. Для этого надо решить систему:

$$\begin{cases} \left.\dfrac{dx_i}{dt}\right|_{\xi} = v_i\left(\vec{x}, t\right) \\ \left.x_i\right|_{t=0} = \xi_i \end{cases} \tag{1.10}$$

Сравнивая уравнения (1.9) и (1.10), ясно, что в общем случае линии тока и траектории отличаются. Действительно, в (1.9) время t рассматривается как параметр, в уравнении же (1.10) время t следует считать переменной. Если $\vec{v}$ не зависит от t (***стационарное*** поле скорости), то линии тока и траектории удовлетворяют одним и тем же уравнениям, т.е. линии тока и траектории частиц совпадают.

1.2 Основные законы движения сплошной среды в интегральной форме

Вначале мы постулируем основные законы движения сплошной среды (жидкости, газа) в интегральной форме для индивидуального объема, состоящего из одних и тех же частиц.

1.2.1.Закон сохранения массы

Будем считать, что жидкость (газ) не может препятствовать произвольно малым приложенным силам деформировать ее таким образом, чтобы объем жидкости оставался неизменным. Это утверждение можно рассматривать как опытно установленный факт, верный при определенных приближениях. Назовем ***индивидуальным*** *объем сплошной среды, состоящий из одних и тех же частиц*. В процессе движения этот объем искажается, но масса его (в силу сделанного выше утверждения) должна сохраняться.

Подобно ньютоновской механике, фундаментальным законом МСС является сохранение массы любого индивидуального объема, т.е. $m = const$. Этот закон можно записать еще в другой форме, а именно:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \tag{1.11}$$

Для того, чтобы сформулировать закон сохранения массы в интегральной форме, введем понятие плотности. Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды V, состоящий из малых индивидуальных объемов ΔV. Пусть их масса равна Δm. Используя гипотезу сплошной среды, можно перейти к пределу при $\Delta V \to 0$, т.е. стянуть этот объем в точку. Плотностью называется предел отношения:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \tag{1.12}$$

Тогда масса конечного индивидуального объема может быть выражена через плотность следующим образом $m = \int\limits_V \rho dV$. При этом закон сохранения массы для конечного индивидуального объема примет вид:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = 0 \tag{1.13}$$

Заметим, что если ввести сравнение жидкости и газа по простейшему макроскопическому параметру, а именно по плотности, то жидкость окажется значительно ближе к твердым телам, чем к газам.

1.2.2.Закон сохранения импульса

Прежде чем формулировать закон сохранения импульса (аналог второго закона Ньютона) введем понятие импульса конечного индивидуального объема. Рассмотрим индивидуальный объем сплошной среды V, состоящий из малых индивидуальных объемов ΔV с массой Δm. Пусть этот объем ΔV движется со скоростью $\vec{v}$. Тогда его импульс можно определить как $\Delta\vec{Q} = \Delta m\vec{v}$, а плотность импульса – как предел отношения:

$$\vec{q} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{Q}}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}\vec{v} = \rho\,\vec{v} \tag{1.14}$$

Импульс конечного индивидуального объема будет определяться как интеграл $\vec{Q} = \int\limits_V \rho\vec{v} dV$.

Введя импульс конечного индивидуального объема $\vec{Q}$, постулируем <u>2-й закон Ньютона для индивидуального объема сплошной среды.</u>

Скорость изменения импульса индивидуального объема равна сумме всех действующих на него внешних сил. Таким образом, для любого индивидуального объема V можно записать уравнение изменения количества движения в виде:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\vec{v} dV = \int\limits_V \vec{F} dV + \iint\limits_\Sigma \vec{\sigma}_n dS \tag{1.15}$$

Здесь 1-е слагаемое в правой части (1.15) – ***объемная сила***, действующая на конечный индивидуальны объем, $\vec{F}$ – плотность объемных сил. Объемная сила вводится следующим образом. Пусть имеется малый объем Δ*V*. На него действует объемная сила $\Delta \vec{f}$. Если существует предел:

$$\vec{F} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \vec{f}}{\Delta V}, \tag{1.16}$$

то он называется плотностью объемных сил. При этом сила, действующая на конечный индивидуальный объем сплошной среды, выражается интегралом:

$$\vec{f} = \int_V \vec{F}\, dV \tag{1.17}$$

Пример объемной силы – сила тяжести. Действительно, если на объем Δ*V* массой Δ*m* действует сила тяжести $\Delta \vec{f} = \Delta m \vec{g}$, то ее плотность, согласно (1.16) определяется соотношением $\vec{F} = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta m}{\Delta V} \vec{g} = \rho\, \vec{g}$.

Сила тяжести, действующая на конечный индивидуальный объем, равна:

$$\vec{f} = \int_v \rho\, \vec{g}\, dV = m\vec{g}. \tag{1.18}$$

Вернемся к формуле (1.15). 2-е слагаемое в (1.15) – ***поверхностные силы***, а $\vec{\sigma}_n$ – ***вектор поверхностных напряжений.*** Он вводится следующим образом. Рассмотрим элемент поверхности Σ, окружающей индивидуальный объем dV, имеющий площадь Δ*S*, вектор нормали к которому $\vec{n}$. На этот элемент поверхности действуют сила $\Delta\vec{\sigma}_n$. Если существует предел $\vec{\sigma}_n = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \dfrac{\Delta \vec{\sigma}}{\Delta S}$, то он называется вектором поверхностных напряжений. Тогда поверхностная сила, действующая на всю поверхность, равна $\oiint \vec{\sigma}_n ds$. Примером поверхностной силы является, например, сила давления.

Уравнение (1.15) является основным постулируемым динамическим соотношением МСС. Подобно тому, как второй закон Ньютона является исходным уравнением в механике точки, уравнение (1.15) положено в основу МСС.

1.2.3. Уравнение для момента импульса

Это уравнение в механике сплошных сред также не выводится, а постулируется по аналогии с уравнением для момента импульса системы материальных точек.

Для материальной точки уравнение для момента импульса следует из II закона Ньютона: $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$. Момент импульса материальной точки равен $\vec{M} = [\vec{r} \times m\vec{v}]$, так что его изменение, равно моменту сил, действующих на материальную точку:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}\right] + \left[\vec{r} \times \frac{md\vec{v}}{dt}\right] = \vec{v} \times m\vec{v} + \left[\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt}\right] = \left[\vec{r} \times \vec{f}\right] \tag{1.19}$$

Для системы *N* материальных точек изменение момента импульса равно сумме моментов импульсов внешних сил $\vec{F}_i^{(e)}$, действующих на материальные точки; при этом моменты внутренних сил, действующих между точками внутри системы $\vec{F}_i^{(i)}$, взаимно компенсируются. Таким образом, для системы материальных точек имеем:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right]$$
$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i\right] = \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right] + \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(i)}\right] \qquad (1.20)$$
$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)}\right]$$

По аналогии вводится уравнение моментов импульса для объема сплошной среды. Пусть индивидуальный объем V состоит из малых индивидуальных объемов ΔV, и движется со скоростью $\vec{v}$. Момент количества движения конечного индивидуального объема равен сумме моментов количества движения малых объемов. Переходя к пределу, имеем:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V_i \to 0} \sum_i \left[\vec{r}_i \times \rho_i \Delta V_i \vec{v}_i\right] = \int_V \left[\vec{r} \times \rho\, \vec{v}\right] dV \qquad (1.21)$$

Уравнение для момента количества движения индивидуального объема постулируется по аналогии с уравнением для системы материальных точек, т.е.:

$$\frac{d}{dt}\int_V \left[\vec{r} \times \rho\, \vec{v}\right] dV = \int_V \left[\vec{r} \times \vec{F}\right] dV + \oiint_{\Sigma} \left[\vec{r} \times \vec{\sigma}_n\right] dS \qquad (1.22)$$

Таким образом, изменение момента импульса индивидуального объема сплошной среды равно сумме моментов внешних объемных и поверхностных сил, действующих на этот индивидуальный объем. Здесь мы его записали в простейшей постановке, не учитывающей, например, возможные внутренние вращения и др. степени свободы у среды. Эти более сложные случаи мы рассматривать не будем.

1.3. Основные уравнения механики сплошной среды в дифференциальной форме в эйлеровых координатах.

Для того, чтобы записать уравнения механики сплошной среды в дифференциальной форме, нам потребуется доказать несколько математических соотношений.

1.3.1.Вспомогательная формула

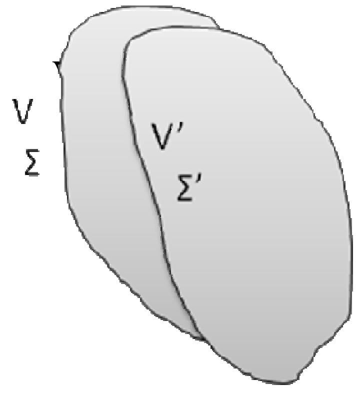
Предположим, что мы имеем индивидуальный объем V, ограниченный поверхностью Σ. Пусть этот объем переместился за время t так, что, деформируясь, он принял значение V' с поверхностью Σ'(рис.1). Найдем изменение интеграла $\frac{d}{dt}\int_V A dV$, где A – произвольная скалярная величина, V – произвольный индивидуальный объем. По определению производной имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_V A(\vec{r},t)\,dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V'} A(\vec{r},t+\Delta t)\,dV - \int_V A(\vec{r},t)\,dV}{\Delta t} \qquad (1.23)$$

Прибавим и вычтем под знаком первого интеграла в (1.23) $A(\vec{r},t)$, тогда получим:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V'}\left[A(\vec{r},t+\Delta t)-A(\vec{r},t)\right]dV + \int_{V'} A(\vec{r},t)\,dV - \int_V A(\vec{r},t)\,dV}{\Delta t} \qquad (1.24)$$

Внося в первом слагаемом *lim* под знак интеграла и вычисляя предел, получим вместо (1.23):



$$\int_V \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r},t)\,dV + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\int_{V'-V} A(\vec{r},t)\,dV}{\Delta t} \qquad (1.25)$$

По определению определенного интеграла как предела частичных сумм имеем:

$$\int_{V'-V} A(\vec{r},t)dV = \lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)\Delta V_i \qquad (1.26)$$

Рис.1.

Очевидно, что $\Delta V_i = \Delta S_i v_n(\vec{r}_i,t)\Delta t$, где ΔS_i - это *i*-й элемент поверхности, а $v_n(\vec{r}_i,t)$ – нормальная проекция вектора скорости. Тогда имеем:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)\Delta V_i = \lim_{\Delta V\to 0}\sum_i A(\vec{r}_i,t)v_n\Delta S_i\Delta t \qquad (1.27)$$

А этот последний предел в (1.27) равен (по определению) $\oiint_\Sigma A v_n dS\Delta t$.

Окончательно имеем из (1.23) первую вспомогательную формулу:

$$\frac{d}{dt}\int_V A(\vec{r},t)\,dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}(\vec{r},t)\,dV + \oiint_\Sigma A v_n dS \qquad (1.28)$$

Формула(1.28) в таком виде понадобится нам в дальнейшем, когда мы будем рассматривать разрывы сплошной среды, т.е. области, в которых параметры среды изменяются на масштабах порядка расстояния между молекулами. Если же $A(\vec{r},t)$ – непрерывная функция координат, то можно применить формулу Остроградского-Гаусса в (1.28), тогда имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_V A\left(\vec{r},t\right)dV=\int_V\left(\frac{\partial A}{\partial t}+div\,A\vec{v}\right)dV \qquad (1.29)$$

Этой формулой мы воспользуемся при выводе дифференциальной формы основных уравнений МСС.

1.3.2.Закон сохранения массы

Будем исходить из закона сохранения массы в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV=0 \qquad (1.30)$$

Эта формула справедлива для любого индивидуального объема. Воспользуемся вспомогательной формулой в виде (1.29), тогда интегральный закон сохранения массы примет вид:

$$\int_V\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\,\rho\,\vec{v}\right)dV=0 \qquad (1.31)$$

Поскольку выбран произвольный индивидуальный объем, то из предыдущей формулы следует закон сохранения массы в дифференциальной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+div\,\rho\,\vec{v}=0 \qquad (1.32)$$

1.3.3.Вторая вспомогательная формула

Докажем еще одну вспомогательную формулу.

Вычислим производную $\frac{d}{dt}\int_V \rho\, A\left(\vec{r},t\right)dV$, где $A\left(\vec{r},t\right)$ – произвольное скалярное поле, а ρ – плотность среды. Согласно первой вспомогательной формуле (1.28) имеем:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho A dV=\int_V\left[\frac{\partial(\rho A)}{\partial t}+div\left(\rho A\vec{v}\right)\right]dV=\int_V\left[\rho\frac{\partial A}{\partial t}+A\frac{\partial \rho}{\partial t}+A div\left(\rho\vec{v}\right)+\rho\left(\vec{v}\nabla\right)A\right]dV \qquad (1.33)$$

Второе и третье слагаемые в последней сумме дают нуль с учетом закона сохранения массы (1.32). Принимая во внимание выражение для материальной производной, имеем из (1.33):

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, A\left(\vec{r},t\right)dV=\int_V \rho\frac{dA}{dt}dV \qquad (1.34)$$

1.3.4.Закон сохранения импульса

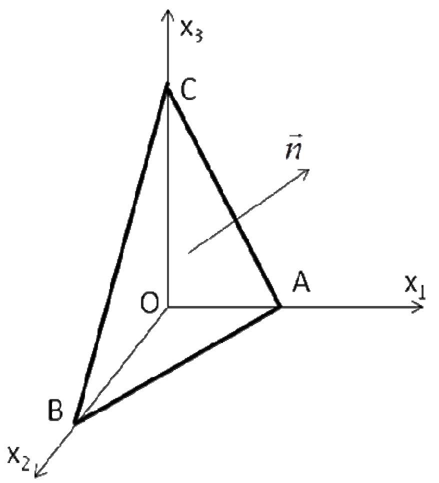
Исходная формула – закон сохранения импульса в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\,\vec{v}dV=\int_V \vec{F}dV+\oint\!\!\oint_S \vec{\sigma}_n dS \qquad (1.35)$$

Основное свойство поверхностных напряжений. Тензор напряжений.

Прежде, чем выводить закон сохранения импульса в дифференциальной форме рассмотрим основное свойство поверхностных напряжений. Поверхностное напряжение $\vec{\sigma}_n$ зависит от ориентации площадки, к которой приложена поверхностная сила, определяемой вектором нормали к ней $\vec{n}$. Покажем, что в самом общем случае $\vec{\sigma}_n$ – это линейная функция от компонент вектора $\vec{n}$. Применим закон сохранения импульса к индивидуальному объему ΔV в виде малого тетраэдра, стороны которого совпадают с осями прямоугольной системы координат (Рис.2). Сначала запишем выражение для поверхностной силы $\oiint\limits_S \vec{\sigma}_n dS$, считая тетраэдр малым, так что интегрирование по поверхности можно заменить произведением:

$$\oiint\limits_S \vec{\sigma}_n dS = \vec{\sigma}_{\underset{(-1)}{BOC}} S_{BOC} + \vec{\sigma}_{\underset{(-2)}{AOC}} S_{AOC} + \vec{\sigma}_{\underset{(-3)}{AOB}} S_{AOB} + \vec{\sigma}_n S_{ABC} \tag{1.36}$$



Индексы (–1, –2, –3) в (1.34) означают, что внешняя нормаль, например, к площадке BOC направлена по $-\vec{x}_{01}$ и т.д. По III закону Ньютона сила, действующая на поверхность, нормаль к которой направлена по $\vec{x}_{01}$, равна $-\vec{\sigma}_{BOC} S_{BOC} = -\vec{\sigma}_1 S_1$ и т.д. Из геометрических соображений ясно, что площади граней соответственно равны $S_i = n_i S_{ABC}$, где n_i – i-я проекция нормали к площадке ABC. Итак, имеем:

$$\oiint \vec{\sigma}_n dS = S_{ABC}\left[\vec{\sigma}_n - \left(\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3\right)\right] \tag{1.37}$$

Рис. 2.

Объемная сила, действующая на этот индивидуальный объем, равна:

$$\int\limits_V \vec{F} dV = \vec{F}\,\Delta V = \frac{1}{3} S_{ABC}\, h\vec{F}\,, \tag{1.38}$$

здесь h – высота тетраэдра, опущенная из точки O на плоскость ABC. Применим вторую вспомогательную формулу к закону сохранения импульса в интегральной форме. Пусть скалярное поле $A = v_i$, т.е. равно i - ой проекции скорости. Тогда согласно (1.33) получим, что скорость изменения i - ой проекции импульса индивидуального объема равна:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\,\vec{v} dV = \int\limits_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \tag{1.39}$$

Но, учитывая малость индивидуального объема, имеем:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV \approx \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \Delta V = \rho \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC}\, h \tag{1.40}$$

Итак, из закона сохранения импульса следует:

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} \frac{1}{3} h\, S_{ABC} = \vec{F} \frac{1}{3} S_{ABC}\, h + S_{ABC} \left[\vec{\sigma}_n - \left(\vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3 \right) \right] \tag{1.41}$$

Сокращаем обе части в (1.41) на S_{ABC}, устремляем $h \to 0$. Тогда из (1.41) имеем:

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_1 n_1 + \vec{\sigma}_2 n_2 + \vec{\sigma}_3 n_3 = \vec{\sigma}_i n_i \tag{1.42}$$

Таким образом, напряжение, приложенное к произвольной площадке с нормалью $\vec{n}$, можно представить в виде линейной комбинации напряжений, приложенных к площадкам с нормалями, ориентированными по ортам выбранной системы координат, а коэффициентами в этом разложении являются направляющие косинусы вектора нормали в этой системе координат.

Разложим вектор $\vec{\sigma}_i$ по ортам произвольной выбранной системы координат, т.е. представим $\vec{\sigma}_i$ в виде $\vec{\sigma}_i = \sigma_{ji} \vec{x}_{0j}$, тогда $\vec{\sigma}_n = \sigma_{ji} n_i \vec{x}_{0j}$, где σ_{ji} называется ***тензором поверхностных напряжений***.

Смысл компонент тензора напряжений: σ_{ji} – это поверхностная плотность силы, действующей в направлении $\vec{x}_{0j}$ на площадку, ориентированную так, что нормаль к ней направлена по вектору $\vec{x}_{0i}$, т.е.1-й индекс – j задает направление силы; 2-й индекс – i направление нормали к площадке. По существу, тензор напряжений σ_{ji} задает линейное преобразование от вектора нормали к вектору напряжений. Действительно, j-я проекция вектора $\vec{\sigma}_n$ равна $\left[\vec{\sigma}_n\right]_j = \sigma_{ji} n_i$.

Теперь можно записать закон сохранения импульса в дифференциальной форме. Для произвольного индивидуального объема имеем:

$$\int_V \rho \frac{d\vec{v}}{dt} dV = \int_V \vec{F} dV + \oiint_\Sigma \vec{\sigma}_n dS, \tag{1.43}$$

где поверхностный интеграл в правой части можно представить как:

$$\oiint_\Sigma \vec{\sigma}_n dS = \oiint_\Sigma \sigma_{ji}\, n_i\, \vec{x}_{0j}\, dS. \tag{1.44}$$

Рассмотрим проекцию уравнения (1.43) на направление *k:*

$$\int_V \rho \frac{dv_к}{dt} dV = \int_V F_k dV + \oiint_\Sigma \sigma_{ki}\, n_i dS \tag{1.45}$$

Введем вспомогательный вектор $\vec{\Sigma}_k = \sigma_{ki} \vec{x}_{0i}$, тогда, $\sigma_{ki} n_i = \left(\vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n}\right)$, а поверхностный интеграл по теореме Остроградского-Гаусса можно заменить интегралом по объему $\oiint_\Sigma \sigma_{ki}\, n_i dS = \oiint_\Sigma \vec{\Sigma}_k \cdot \vec{n}\, dS = \int_V \left(div\, \vec{\Sigma}_k \right) dV$. Учитывая определение дивергенции вектора

$div\vec{\Sigma}_k = \dfrac{\partial\,\sigma_{ki}}{\partial\,x_i}$, а также произвольность индивидуального объема V, имеем из (1.43) закон сохранения импульса в дифференциальной форме в эйлеровых координатах:

$$\rho\,\frac{dv_k}{dt} = F_k + \frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial\,x_i} \tag{1.46}$$

С учетом выражения лагранжевой производной в эйлеровых координатах, имеем:

$$\rho\left(\frac{\partial\,v_k}{\partial\,t} + \left(\vec{v},\nabla\right)v_k\right) = F_k + \frac{\partial\,\sigma_{ki}}{\partial\,x_i} \tag{1.47}$$

Для того чтобы понять физический смысл слагаемого, определяющего силу поверхностных напряжений, рассмотрим поверхностную силу, действующую в k-м направлении на малый объем в виде прямоугольника (рис.3):

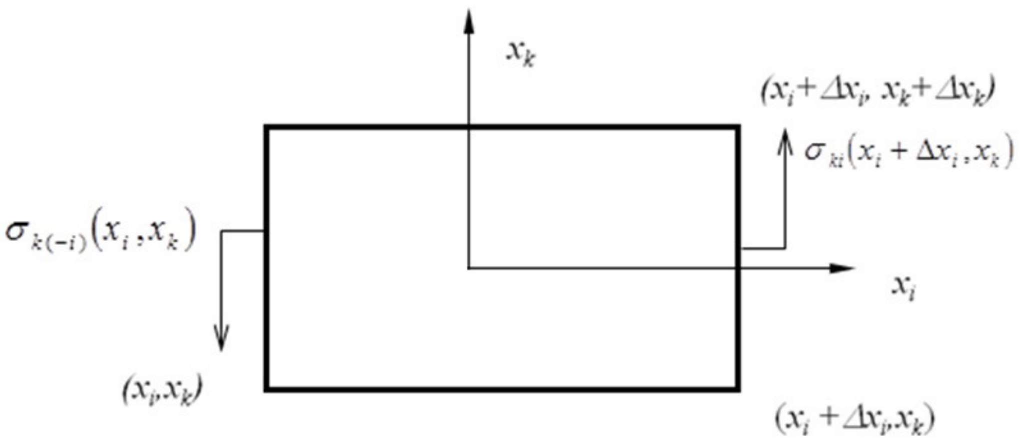


Рис.3

$$\Delta F_k = \left(\sigma_{ki}\left(x_i+\Delta\,x_i\right) - \sigma_{ki}\left(x_i\right)\right)\Delta x_k\Delta x_j = \frac{\partial\,\sigma_{ki}}{\partial\,x_i}\Delta x_i\Delta x_j\Delta x_k = \frac{\partial\,\sigma_{ki}}{\partial\,x_i}\Delta V \tag{1.48}$$

Если просуммировать выражение в правой части по всем i и учесть объемную силу F_k, то второй закон Ньютона для малого индивидуального объема ΔV можно записать в виде:

$$\Delta m\frac{dv_k}{dt} = \frac{\partial\sigma_{ki}}{\partial x_i}\Delta V + F_k\Delta V \tag{1.49}$$

Делим обе части (1.49) на ΔV, переходя к пределу при $\Delta V\to 0$, получаем снова закон сохранения импульса в форме (1.46).

1.3.5.Закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме

Запишем сначала этот закон в интегральной форме для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt}\int_V [\vec{r}\times\rho\vec{v}]dV = \int_V [\vec{r}\times\vec{F}]dV + \oint\!\!\oint_\Sigma [\vec{r}\times\vec{\sigma}_n]dS \qquad (1.50)$$

k-ая компонента векторного произведения: $[\vec{r}\times\rho\vec{v}]_k = \varepsilon_{ijk}\rho x_i v_j$

где $\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 \quad \text{если} \quad \text{i, j, k образуют четную перестановку чисел 1,2,3} \\ -1 \quad \text{если} \quad \text{i, j, k образуют четную перестановку чисел 1,2,3} \\ \quad 0 \quad \text{если есть совпадающие индексы} \end{cases}$,

Рассмотрим k-ю проекцию закона сохранения момента импульса:

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\,\varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int_v \varepsilon_{ijk} x_i F_j + \oint\!\!\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk} x_i [\vec{\sigma}_n]_j\, dS \qquad (1.51)$$

По основному свойству поверхностных напряжений:

$$[\vec{\sigma}_n]_j = \sigma_{jm} n_m = \sigma_{jm}(\vec{x}_{om}\vec{n}) \qquad (1.52)$$

Тогда:

$$\oint\!\!\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk} x_i [\vec{\sigma}_n]_j dS = \oint\!\!\oint_\Sigma \varepsilon_{ijk}\left(x_i \sigma_{jm}(\vec{x}_{0m}\vec{n})\right)dS = \int_v \varepsilon_{ijk}\, div\left(x_i\sigma_{jm}\vec{x}_{0m}\right)dV =$$

$$= \int_v \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(x_i\sigma_{jm}\right)dV = \int_v \varepsilon_{ijk}\left[\frac{\partial\sigma_{jm}}{\partial x_m} + \sigma_{jm}\delta_{im}\right]dV \qquad (1.53)$$

С использованием второй вспомогательной формулы:

$$\frac{d}{dt}\int_v \rho\varepsilon_{ijk} x_i v_j dV = \int_v \rho\frac{d}{dt}\left(\varepsilon_{ijk} x_i v_j\right)dV =$$

$$\int_v \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt} + \varepsilon_{ijk} v_j \frac{dx_i}{dt}\right)dV = \int_v \rho\left(\varepsilon_{ijk} x_i \frac{dv_j}{dt}\right)dV \qquad (1.54)$$

Тогда можно получить, что:

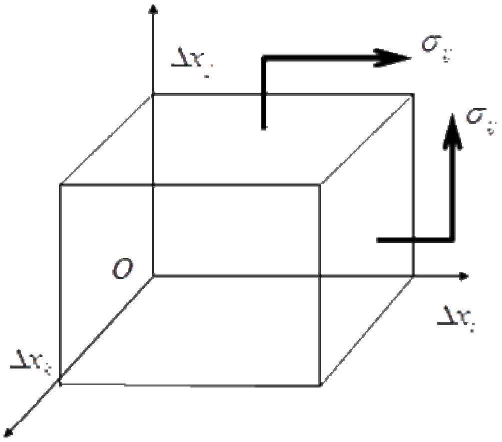
$$\int_v \varepsilon_{ijk}\left[x_i\left(\rho\frac{dv_j}{dt} - F_j - \frac{\partial\sigma_{jm}}{\partial x_m}\right) + \sigma_{ji}\right]dV = 0 \qquad (1.55)$$

Первое слагаемое в (1.55) равно 0 в силу закона сохранения импульса. Тогда остается $\int_v \varepsilon_{ijk}\,\sigma_{ji}\,dV = 0$. Поскольку объем V произвольный, то $\varepsilon_{ijk}\,\sigma_{ji} = 0$. Отсюда сразу следует ***изотропия тензора поверхностных напряжений***:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}\,. \qquad (1.56)$$

Это и есть закон сохранения момента импульса в дифференциальной форме для классических сред. Его обычно не используют отдельно, а просто считают, что тензор напряжений симметричен.

Получим это утверждение из простых физических соображений. Рассмотрим малый индивидуальный объем в форме параллелепипеда и рассмотрим закон сохранения момента импульса для него относительно одной из вершин (например, точки О). Запишем уравнение для момента импульса в интегральной форме:



$$\int_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\rho\dot{\vec{v}}\right]dV = \int_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]dV + \oint\!\!\oint_{\Delta\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{\sigma}_n\right]dS \tag{1.57}$$

Рис.4.

Будем считать, что параллелепипед настолько мал, что интегрирование можно заменить умножением. Рассмотрим k-ю проекцию уравнения для импульса и оценим слагаемые:

$$\left[\int_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\rho\frac{d\vec{v}}{dt}\right]dV\right]_k = o\left(\rho\frac{dv_k}{dt}\right)(\Delta V)^{4/3}$$

$$\left[\int_{\Delta V}\left[\vec{r}\times\vec{F}\right]dV\right]_k = o\left(F_k\right)\left(\Delta V\right)^{4/3} \tag{1.58}$$

Из рис. 4 видно, что:

$$\oint\!\!\oint_{\Delta\Sigma}\left[\vec{r}\times\vec{\sigma}_n\right]_k dS \approx -\sigma_{ij}\Delta x_j\Delta x_i\Delta x_k + \sigma_{ji}\Delta x_i\Delta x_j\Delta x_k = \left(-\sigma_{ij}+\sigma_{ji}\right)\Delta V \tag{1.59}$$

Подставляем эти выражения в уравнение для момента импульса, делим на ΔV и стягиваем параллелепипед в точку, получаем $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ для любых $i{\neq}j$. Итак, симметричность тензора поверхностных напряжений при отсутствии внутренних вращательных степеней свободы означает, что момент сил, создаваемых поверхностными напряжениями в бесконечно малом объеме равен нулю.

1.4. Уравнения гидродинамики в лагранжевых координатах

1.4.1.Закон сохранения массы

Рассмотрим элемент жидкости, который в начальный момент времени имеет форму параллелепипеда с центром в точке (ξ_1, ξ_2, ξ_3). Его объем dV_0, а масса $dm = \rho_0\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\,dV_0$.

В момент времени t все точки параллелепипеда сместятся. Их новые координаты и, в частности, координаты центра будут связаны со старыми законами движения $x_i\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)$, где i=1,2,3, которые, по существу представляют собой преобразование координат. Но тогда в момент t объем элемента жидкости $dV = JdV_0$, где $J = \dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}$ – якобиан преобразования от эйлеровых координат к лагранжевым. Масса индивидуального объема в момент t будет равна $\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)dV = dm$. Отсюда по закону сохранения массы имеем:

$$\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)\, dV_0 = \rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t)\, JdV_0 \tag{1.60}$$

Окончательно имеем уравнение неразрывности в лагранжевых координатах:

$$\rho(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \frac{\rho_0(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{J} \tag{1.61}$$

1.4.2.Закон сохранения импульса

Чтобы найти уравнения движения частиц, надо знать законы их движения. Запишем их в лагранжевой форме. В эйлеровых координатах x_1, x_2, x_3, t – независимые переменные. Поле скорости $\vec{v}$ – неизвестная. В лагранжевых координатах x_1, x_2, x_3 – неизвестные, а независимые переменные – ξ_1, ξ_2, ξ_3, t .

Будем исходить из уравнения для импульса в эйлеровых координатах:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.62}$$

В лагранжевых координатах $\dfrac{d}{dt} = \left.\dfrac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi}$; а $v_i = \left.\dfrac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi}$, т.е. уравнение движения примет вид:

$$\rho \left.\frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2}\right|_{\xi} = F_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{1.63}$$

В лагранжевых уравнениях не должно быть производных по неизвестным функциям, в частности по пространственной переменной x_j (x_j – неизвестна). Поэтому необходимо совершить преобразование координат к переменным Лагранжа. Воспользуемся при этом правилом дифференцирования сложных функций. Тогда, например:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} = \frac{\partial(f, x_2, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J} \tag{1.64}$$

Аналогично:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial(x_1, f, x_3)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J}; \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \frac{\partial(x_1, x_2, f)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{J} \tag{1.65}$$

Рассмотри частный случай одномерного движения идеальной жидкости. Выражая производные от тензора поверхностных напряжений через производные по Лагранжевым координатам, получим уравнение Эйлера, выраженное через координаты Лагранжа:

$$\rho \left.\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\right|_{\xi} = F + \frac{\partial p}{\partial \xi}\frac{1}{J} \tag{1.66}$$

В случае отсутствия массовых сил с учетом закона сохранения массы в форме (1.61), из (1.64) можно получить следующее выражение для одномерного уравнения Эйлера:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{\xi} = \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial \xi} \tag{1.67}$$

Приведенные уравнения применимы для описания механики индивидуального объема сплошной среды. Однако такой объем может обмениваться теплом с окружающей средой, в связи с этим для более полного описания движения сплошной среды требуется знание ее термодинамики.

Задачи к разделу 1

Задача 1. Ввести лагранжевы координаты и найти закон движения среды, если оно происходит с полем скорости $v_1 = \frac{x_1}{t+\tau}$, $v_2 = \frac{2x_2 t}{t^2+\tau^2}$, $v_3 = \frac{3x_3 t^2}{t^3+\tau^3}$, $\tau = const$.

Решение: В лагранжевых координатах скорости связаны с координатами следующими выражениями:

$$v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_{\xi}, \quad \frac{d}{dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_{\xi}$$

Тогда уравнения движения с заданным полем скорости примут следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t+\tau}, \ \frac{dx_2}{dt} = \frac{2x_2 t}{t^2+\tau^2}, \ \frac{dx_3}{dt} = \frac{3x_3 t^2}{t^3+\tau^3}.$$

Интегрируя полученные дифференциальные уравнения методом разделения переменных, получим:

$$x_1 = C_1(t+\tau), \quad x_2 = C_2(t^2+\tau^2), \quad x_3 = C_3(t^3+\tau^3),$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования. Учитывая, что при t=0:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2, \quad x_3 = \xi_3,$$

где ξ_1, ξ_2, ξ_3 – координаты Лагранжа, получим, что движение среды происходит по закону:

$$x_1 = \xi_1\left(\frac{t}{\tau}+1\right), \quad x_2 = \xi_2\left(\frac{t^2}{\tau^2}+1\right), \quad x_3 = \xi_3\left(\frac{t^3}{\tau^3}+1\right).$$

Задача 2. Движение среды происходит по закону $x_1 = \xi_1, \quad x_2 = \xi_2(\frac{t}{\tau}+1), \quad x_3 = \frac{\xi_3}{1+\frac{t}{\tau}}$.

Определить поле скорости и ускорения $v(x, t)$, $a(x, t)$. Найти траектории и линии тока.

Решение: По определению в Лагранжевых координатах $v_i = \left.\frac{\partial x_i}{\partial t}\right|_\xi, \quad \frac{d}{dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_\xi$,

тогда получим для поля скорости следующие выражения:

$$v_1 = \left.\frac{\partial x_1}{\partial t}\right|_{\xi 1} = 0, \quad v_2 = \left.\frac{\partial x_2}{\partial t}\right|_{\xi_2} = \frac{\xi_2}{\tau}, \quad v_3 = \left.\frac{\partial x_3}{\partial t}\right|_{\xi_3} = -\frac{\xi_3}{\tau}\frac{1}{\left(1+\frac{t}{\tau}\right)^2}.$$

Выразим $\xi_1, \ \xi_2, \xi_3$ через $x_1, \ x_2, x_3$:

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = \frac{x_2}{(1+\frac{t}{\tau})}, \quad \xi_3 = x_3\left(1+\frac{t}{\tau}\right).$$

Подставляя полученные соотношения в выражения для скоростей, получим, что поле скорости имеет следующий вид:

$$v_1 = 0, \quad v_2 = \frac{x_2}{t+\tau}, \quad v_3 = -\frac{x_3}{t+\tau}.$$

Проделывая аналогичные выкладки для ускорения с учетом соотношений $a_i = \left.\frac{\partial v_i}{\partial t}\right|_\xi, \quad \frac{d}{dt} = \left.\frac{\partial}{\partial t}\right|_\xi$, получим:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{2x_3}{(t+\tau)^2}.$$

Определим линии тока и траектории. По определению линий тока $\frac{dx_i}{v_i(x_1, x_2, x_3, t)} = dS, \quad \frac{dx_i}{dS} = v_i(\vec{x}, t)$. Тогда:

$$\frac{dx_1}{dv_1} = \frac{dx_2}{dv_2} = \frac{dx_3}{dv_3}.$$

Подставляя полученные выражения для скоростей, получим:

$$\frac{dx_2}{dx_2} = -\frac{dx_3}{dx_3}, \quad x_2 = \frac{C}{x_3}.$$

Определим траектории движения, для этого выразим: $1+\frac{t}{\tau} = \frac{x_2}{\xi_2}$. Тогда получим:

$$x_1 = \xi_1, \quad x_3 = \frac{\xi_2 \xi_3}{x_2}.$$

Задача 3. В некоторой точке тела в декартовой системе координат компоненты тензора напряжений заданы матрицей:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Определить вектор напряжений на площадке с нормалью: $\vec{n} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Решение: По определению тензора поверхностных напряжений:

$$[\vec{\sigma}_n]_i = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij}(\vec{x}_{oj}\vec{n})$$

Тогда

$$[\vec{\sigma}_n]_1 = \sigma_{1j} n_j = 0$$

$$[\vec{\sigma}_n]_2 = \sigma_{2j} n_j = -\frac{10}{3}$$

$$[\vec{\sigma}_n]_3 = \sigma_{3j} n_j = \frac{4}{3}$$

$$\vec{\sigma}_n = -\frac{10}{3}\vec{y}_0 + \frac{4}{3}\vec{z}_0$$

2. Основные законы термодинамики. Понятие идеальной сплошной среды (жидкости, газа).

Итак, в предыдущем разделе мы получили уравнения, описывающие движение индивидуального объема сплошной среды. Этот объем может обмениваться теплом с окружающей его жидкостью, газом, что в свою очередь также может вызывать движения сплошной среды. Кроме того, ясно, что полученная система уравнений незамкнута – следует определить, например, тензор поверхностных напряжений, либо (для идеальной среды) давление как функцию, например, плотности или температуры. Это означает, что для полного описания движения сплошной среды требуется знание ее термодинамики.

Кратко изложим ее основные положения.

2.1. Первое начало термодинамики или закон сохранения энергии

Первое начало термодинамики, или закон сохранения энергии, постулирует невозможность вечного двигателя 1-го рода, т.е. тепловой машины, которая совершает полезную работу в цикле без затрат энергии. Следствием этого постулата является то, что можно определить энергию как функцию состояния термодинамической системы и ввести дифференциал полной энергии $d\varepsilon = d(E+U)$, где E – механическая энергия, U – внутренняя энергия.

Сформулируем теперь ***1-й закон термодинамики***.

Изменение *полной энергии* $d\varepsilon$ *термодинамической системы при малом изменении ее состояния равно сумме:*

1) механической работы внешних сил над системой $dA^{(e)}$

2) количества тепла, передаваемого системе извне $dQ^{(e)}$

3) количества немеханической и нетепловой энергии, передаваемой системе dQ^{**}

$$d\varepsilon = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^{**} \qquad (2.1)$$

$dA^{(e)}$, $dQ^{(e)}$, dQ^{**} не являются полными дифференциалами, $d\varepsilon$ – полный дифференциал.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем сплошной среды V. Выделим внутри этого объема малый объем ΔV, полная энергия которого равна $\Delta\varepsilon$. Тогда плотность энергии можно определить как:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta V}=\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta E+\Delta U}{\Delta V}=\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right), \qquad (2.2)$$

где $\Delta E = \Delta m(v^2/2)$ – механическая энергия, $\Delta U= \Delta mu$ – внутренняя энергия, Δm – масса в обьеме ΔV, $v^2/2$, u – массовая плотность механической и внутренней энергии соответственно. Полная энергия всего объема будет при этом равна:

$$\varepsilon=\int_v \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV \qquad (2.3)$$

Пусть за время dt энергия индивидуального объема изменяется на $d\int_v \rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)dV$.

Рассмотрим возможные источники изменения энергии индивидуального объема.

1. Во-первых, энергия может меняться за счет механической работы объемных и поверхностных сил.

Работа объемных сил. Выделим внутри индивидуального объема малый объем ΔV. Предположим, что на него действует массовая внешняя сила с плотностью $\vec{F}$. Пусть объем ΔV за время dt переместился на расстояние $d\vec{r}=\vec{v}dt$, тогда работа этой силы $d\left(\Delta A_1^{(e)}\right)=\vec{F}\vec{v}dt\Delta V$, а работа, совершаемая над всем объемом

$$dA_1^{(e)}=\left(\int_V \vec{F}\,\vec{v}\,dV\right)dt \qquad (2.4)$$

Работа поверхностных сил. На объем V, действует поверхностная сила, плотность которой $\vec{\sigma}_n$. Рассмотрим элемент поверхности ΔS, на который действует сила $\vec{\sigma}_n\Delta S$. Работа, совершаемая этой силой при перемещении элемента поверхности на расстояние $d\vec{r}$ за время dt, *равна* $d\Delta A_2^{(e)}=\left(\vec{\sigma}_n\vec{v}\right)dt\Delta S$. При этом работа, совершаемая на всей поверхности этой поверхностной силой, определяется выражением:

$$dA_2^{(e)}=\left[\oiint_\Sigma \vec{\sigma}_n\vec{v}dS\right]dt \qquad (2.5)$$

Замечание. Внутри индивидуального объема мы можем выделить внутренние индивидуальные объемы, каждый из которых окружен своей поверхностью. При этом на каждую из поверхностей действуют поверхностные силы, которые также совершают работу. Однако вклад этих работ в изменение полной энергии выделенного объема сплошной среды равен нулю. В то же время эти внутренние поверхностные силы могут вносить вклад в изменение отдельно механической и внутренней энергии.

2.Во-вторых, энергия индивидуального объема может меняться за счет процессов теплообмена.

Количество тепла и нетепловой энергии, передаваемые индивидуальному объему

Пусть в единицу времени в объеме ΔV выделяется количество тепла Δq. Можно ввести плотность количества тепла, выделяемого в единицу времени в единице объема:

$$q^{(e)} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{2.6}$$

Тогда во всем объеме V за время dt выделяется тепло:

$$dQ_1^{(e)} = \int_V q^{(e)} dV dt \tag{2.7}$$

Ясно, что передача тепла может происходить и через границу индивидуального объема. Пусть через участок поверхности площадью ΔS, ориентированный перпендикулярно нормали $\vec{n}$ (см. рис.2) передается в единицу времени количество тепла ΔQ_n. Тогда плотность потока тепла определится выражением:

$$Q_n^{(в)} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta Q_n}{\Delta S} \tag{2.8}$$

При этом количество тепла, передаваемое системе за время dt равно:

$$dQ_2^{(e)} = \left[\oiint_\Sigma Q_n^{(в)} dS \right] dt \tag{2.9}$$

Аналогично можно ввести количество нетепловой энергии, передаваемой системе:

$$dQ^{**} = \dot{d}t \left[\int_V q^{**} dV + \oiint_\Sigma Q_n^{**} dS \right] \tag{2.10}$$

Таким образом, закон сохранения энергии для индивидуального объема принимает вид:

$$\begin{gathered} d\int_v \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV = \\ dt\left[\int_V (\vec{F}\vec{v}) dV + \oiint_\Sigma (\vec{\sigma}_n \vec{v}) dS + \int_V q^{(в)} dV + \oiint_\Sigma Q_n^{(в)} dS + \int_V q^{**} dV + \oiint_\Sigma Q_n^{**} dS \right] \end{gathered} \tag{2.11}$$

Если обе части этого соотношения разделить на dt, получим выражение для изменения полной энергии индивидуального объема в интегральной форме:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\int_v \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV = \\ \left[\int_V (\vec{F}\vec{v}) dV + \oiint_\Sigma (\vec{\sigma}_n \vec{v}) dS + \int_V q^{(в)} dV + \oiint_\Sigma Q_n^{(в)} dS + \int_V q^{**} dV + \oiint_\Sigma Q_n^{**} dS \right] \end{gathered} \tag{2.13}$$

2.1.1.Закон сохранения энергии в дифференциальной форме

Начнем с того, что определим вектор потока тепла. Как и ранее при определении вектора поверхностных напряжений рассмотрим индивидуальный объем в виде малого тетраэдра с гранями, ориентированными вдоль осей некоторой декартовой системы координат (Рис.2). Пусть тепло поступает в этот объем только через боковые грани, тогда передаваемое количество тепла равно:

$$\oiint\limits_{\Xi} Q_n^{(в)} dS = Q_n^{(в)} S_{ABC} + q_1 S_{BOC} + q_2 S_{AOC} + q_3 S_{AOB} = \\ = S_{ABC}(Q_n^{(в)} + q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3) \tag{2.14}$$

Количество тепла, поступающего в этот объем, должно иметь порядок этого объема О(1/3 S_{ABC} h), (здесь h – высота тэтраэдра, опущенная из точки O), т.е. S_{ABC} ($Q^{(e)}{}_n + q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3$) = 1/3 S_{ABC} h. Устремляя $h \to 0$, имеем $Q^{(e)}{}_n = -(q_1 n_1 + q_2 n_2 + q_3 n_3)$, т.е. поток тепла можно представить в виде скалярного произведения вектора нормали к площадке $\vec{n}$ на вектор $\vec{Q}^{(e)}$ с проекциями ($-q_1$; $-q_2$; $-q_3$), т.е. $Q^{(e)}{}_n = (\vec{Q}^{(e)}\,\vec{n})$.При этом i-ая проекция вектора $\vec{Q}^{(e)}$ имеет смысл плотности потока тепла через площадку, вектор нормали к которой $\vec{x}_{0i}$.

Аналогичные рассуждения можно провести для потока энергии нетепловой природы. Преобразуем слагаемые, входящие в интегральный закон сохранения энергии (2.13), которые выражаются поверхностными интегралами, в соответствии с формулой Остроградского- Гаусса:

$$\oiint\limits_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS = \oiint\limits_{\Sigma} (\vec{Q}^{(в)}\vec{n}) dS = \int\limits_V div\,\vec{Q}^{(в)} dV \tag{2.15}$$

$$\oiint\limits_{\Xi} (\vec{v}\vec{\sigma}_n) dS = \oiint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j v_i dS = \oiint\limits_{\Sigma} (\sigma_{ij} v_i (\vec{x}_{0j}\vec{n})) dS = \\ \int\limits_V div(\sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j}) dV = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i \sigma_{ij})\, dV \tag{2.16}$$

Используя вторую вспомогательную формулу (1.34), запишем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV = \int\limits_V \rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV \tag{2.18}$$

Таким образом, закон сохранения энергии (2.13) можно преобразовать к виду:

$$\int\limits_v dV\left(\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) - (\vec{F}\vec{v}) - \frac{\partial}{\partial x_i}(v_i\sigma_{ij}) - q^{(в)} - div\,Q^{(в)} - q^{**} - div\,Q^{**}\right) = 0 \tag{2.20}$$

Учитывая произвольность индивидуального объема V, приравняем подынтегральное выражение к нулю, что и дает закон сохранения энергии в дифференциальной форме:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) = (\vec{F}\vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(v_i\sigma_{ij}) + q^{(e)} + div\vec{Q}^{(e)} + q^{**} + div\vec{Q}^{**} \tag{2.21}$$

Это закон сохранения полной энергии, который мы постулировали из термодинамических предположений.

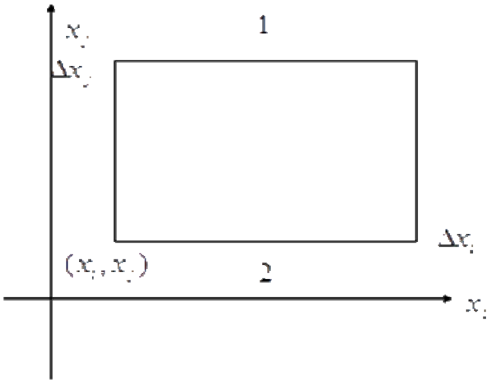
2.1.2.Законы сохранения механической энергии и внутренней энергии

Покажем, что из уравнения для изменения импульса индивидуального объема, следует закон изменения механической энергии. Действительно, умножив обе части уравнения (1.47) на v_i и сложив по i, получим:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right) = \left(F_i v_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} v_i\right) - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \qquad (2.22)$$

Из сравнения (2.21) и (2.22) ясно, что 1-е и 2-е слагаемые в правой части (2.22) входят в уравнение для закона сохранения полной энергии (2.21) и имеют смысл плотности мощности внешних массовых и поверхностных сил. Последнее слагаемое в (2.22) называется ***работой внутренних поверхностных напряжений***.

Чтобы разобраться с физическим смыслом этого слагаемого, рассмотрим малый объем ΔV в форме параллелепипеда. Мы уже вычисляли силу, действующую на этот объем за счет поверхностных напряжений в направлении i. Она равна (см. раздел 1 (1.49)) – $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\Delta V$; при этом по всем индексам j предполагается суммирование.



Если скорость перемещения жидкого объема ΔV равна $\vec{v}$, то за время dt эта сила совершает работу:

$$dA_V = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} v_i dt\,\Delta V \qquad (2.23)$$

Рис.5

Рассмотрим теперь поверхность, ограничивающую объем ΔV. На поверхности (2)(см.рис.5) действует сила σ_{ij} (x_j $+\Delta x_j$, ...)ΔS, скорость перемещения этой поверхности равна v_i (x_j $+\Delta x_j$, ...). За время dt эта сила совершит работу σ_{ij} v_i (x_j $+\Delta x_j$, ...)ΔSdt. На поверхности (1) аналогичная сила равна – σ_{ij} (x_j , ...)ΔS. Совершенная работа определится соотношением – σ_{ij} v_i (x_j , ...)ΔSdt. Таким образом, полная работа, производимая поверхностными силами над частицами, находящимися на поверхностях (1) и (2) равна:

$$dA_s = \left(\sigma_{ij} v_i\left(x_j + \Delta x_j, ...\right) - \sigma_{ij} v_i\left(x_j, ...\right)\right) dt\,\Delta S \cong \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} v_i\right)\Delta V\, dt \qquad (2.24)$$

Чтобы найти полную работу, совершаемую на поверхности, ограничивающей объем ΔV, надо просуммировать по всем i и j. Из сравнения выражений (2.23) и (2.24) для dA_s и dA_V ясно, что

$$dA_V = dA_S - \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\Delta V\, dt \qquad (2.25)$$

Строго говоря, поверхностные силы действуют на поверхности, и непосредственно над ними совершают работу. В этом смысле dA_V – величина формальная и ее разумно представить как сумму работ, совершаемых на поверхностях внутри объема ΔV. В связи с этим величину $\sigma_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$ называют ***работой внутренних поверхностных напряжений*** (или напряжений на внутренних поверхностях).

Если из уравнения (2.21) для полной энергии вычесть уравнение (2.22) для механической энергии, то получится соотношение, описывающее изменение внутренней энергии:

$$\rho\frac{du}{dt} = \sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + div\left(\vec{Q}^{(e)} + \vec{Q}^{**}\right) + q^{(e)} + q^{**} \tag{2.26}$$

Из (2.26) ясно, что работа внутренних поверхностных напряжений обеспечивает изменение внутренней энергии сплошной среды. Это уравнение называют общим уравнением теплопередачи. Оно эквивалентно закону сохранения энергии (2.21), т.к. закон сохранения механической энергии есть следствие уже известного уравнения – закона сохранения импульса.

2.2. 2-е начало термодинамики.

2-е начало термодинамики утверждает, что невозможно существование вечного двигателя 2-го рода, т.е. тепловой машины, в которой полезная работа совершается за счет передачи тепла от тела с более низкой температурой к телу с более высокой температурой. Следствием этого является введение функции состояния – энтропии.
Обратимся к математической формулировке 2-го начала термодинамики:

Пусть произвольная термодинамическая система (жидкость, газ и т.д.) переходит из состояния 1 в близкое состояние 2. Тогда можно ввести изменение энтропии по формуле:

$$dS = \frac{dQ^{(e)} + dQ'}{T}, \tag{2.27}$$

где $dQ^{(e)}$ – количество тепла, переданное системе извне, а dQ' – нескомпенсированное тепло; причем $dQ' \geq 0$. Для обратимых процессов полагают, что $dQ' = 0$.

Рассмотрим в качестве термодинамической системы индивидуальный объем V с энтропией S. Выделим внутри этого объема малый объем ΔV. Энтропия этого объема равна ΔS. Поскольку энтропия непрерывная функция координат, то можно ввести массовую плотность энтропии:

$$S = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta S}{\rho\Delta V} \tag{2.28}$$

При этом полная энтропия объема V равна $\int\limits_V S\rho dV$.

Пусть сплошная среда внутри малого объема ΔV переходит из состояния (1) в близкое состояние (2) за время dt. Тогда изменение энтропии равно:

$$dS = d\left(\rho S\Delta V\right) \tag{2.29}$$

Пусть при этом этот объем получает извне количество тепла:

$$d\Delta Q^{(e)} = q^{(e)}\Delta V dt + \left[\iint\limits_{\Delta\Sigma} Q_n^{(e)} dS\right] dt \tag{2.30}$$

1-е слагаемое описывает объемное тепловыделение, а 2-е – количество тепла, поступающего через поверхность $\Delta\Sigma$. Применяя теорему Остроградского-Гаусса ко второму слагаемому в (2.30) и учитывая малость объема V, по которому проводится интегрирование в (2.30), имеем:

$$d\Delta Q^{(e)} = \left(q^{(e)} + div\vec{Q}^{e}\right)\Delta V dt \tag{2.31}$$

Нескомпенсированное тепло, выделяемое в объеме ΔV, запишем в виде:

$$d\Delta Q' = q'\Delta V dt \tag{2.32}$$

где q' – плотность нескомпенсированного тепла, выделяемого в единицу времени. С учетом этого 2-й закон термодинамики (2.27) для малого объема ΔV можно записать в виде:

$$d\left(\rho S\Delta V\right) = \frac{\left[q^{(e)} + div\vec{Q}^{(e)}\right]\Delta V dt + q'\Delta V dt}{T} \tag{2.33}$$

Если мы теперь проинтегрируем это уравнение по индивидуальному объему V, то получим математическую формулировку 2-го начала термодинамики для конечного индивидуального объема.

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho S dV = \int_V \frac{q^{(e)} + div\vec{Q}^{(e)} + q'}{T} dV \tag{2.34}$$

Из (2.34) можно сразу получить 2-е начало термодинамики в дифференциальной форме. Примем во внимание, что при изменении состояния объема ΔV его масса $\rho\Delta V$ сохраняется, т.е. $d(\rho S\Delta V) = \rho\Delta V dS$

Тогда из (2.34) следует ***2-е начало термодинамики в дифференциальной форме***:

$$\rho\frac{dS}{dt} = \frac{q^{e} + div\vec{Q}^{(e)} + q'}{T} \tag{2.35}$$

2.3. Основные уравнения механики и термодинамики сплошной среды в дифференциальной форме:

Выпишем теперь в дифференциальной форме все полученные уравнения.

(1) Закон сохранения массы:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div\rho\vec{v} = 0 \tag{2.36}$$

(2) Закон сохранения импульса:

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\vec{v},\nabla\right)v_i\right) = F_i + \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \tag{2.37}$$

(3) Закон сохранения момента импульса:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{2.38}$$

(4) Закон сохранения полной энергии:

$$\rho\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) = \left(\vec{F},\vec{v}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon\sigma_{ij}v_i\right) + q^{(e)} + div\vec{Q}^{e} + q^{**} + div\vec{Q}^{**} \tag{2.39}$$

(5) Уравнение теплопередачи:

$$\rho\frac{du}{dt}=\sigma_{ij}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+q^{(e)}+div\vec{Q}^e+q^{**}+div\vec{Q}^{**} \tag{2.40}$$

(6) Второе начало термодинамики:

$$\rho\frac{dS}{dt}=\frac{q^{(e)}+div\vec{Q}^e+q'}{T} \tag{2.41}$$

Система уравнения (2.36-2.41) МСС незамкнута, т.к. в ней не определены σ_{ij}, потоки тепла $\vec{Q}^{(e)}$, нескомпенсированное тепло q' и т.д. Все эти величины определяются на основании опыта, т.е. строятся феноменологические модели механики сплошных сред. В разных средах будут свои уравнения для этих величин. Первой моделью сплошной среды является модель идеальной жидкости или идеального газа.

2.4. Идеальная жидкость или идеальный газ

Рассмотрим модель идеальной жидкости или газа. ***Идеальной жидкостью (или газом)*** называют сплошную среду, в которой:
1. Тензор поверхностных напряжений шаровой, т.е. $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$.

Выясним смысл скалярной функции p,входящей в выражение для тензора поверхностных напряжений. Найдем проекцию вектора поверхностных напряжений на i-ое направление $\left[\vec{\sigma}_n\right]_i=-pn_i$, т.е. $\vec{\sigma}_n=-p\vec{n}$. Таким образом, сила, действующая на площадку противоположно направлению нормали, – это давление.

2. Среда является двухпараметрической, т.е. такой, в которой уравнение состояния определяется двумя термодинамическими функциями. Например, плотность внутренней энергии $u = u(\rho, S)$ является функцией плотности и энтропии или плотности и давления, т.е.$u=u(p, \rho)$

3. Все термодинамические процессы являются обратимыми. Это означает, что если некоторая последовательность состояний образует в пространстве состояний обратимый процесс, то эту последовательность система может проходить как в прямом, так и в обратном направлении, при этом нескомпенсированное тепло $q'=0$. Заметим, что могут быть необратимые процессы, для которых $q'=0$, но не наоборот.
Для такой среды система уравнений МСС (2.36-2.41) примет вид:

Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div\rho\vec{v}=0 \tag{2.42}$$

Уравнение Эйлера :

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+\left(\vec{v},\nabla\right)v_i\right)=F_i-\frac{\partial p}{\partial x_i} \tag{2.43}$$

или в векторной форме $\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)\vec{v}\right)=\vec{F}-\nabla p$

Уравнение притока тепла:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(\vec{v},\nabla u)\right]=-pdiv\vec{v}+q^{(e)}+divQ^{(e)}+q^{**}+div\vec{Q}^{**} \qquad (2.44)$$

Уравнение состоянии:-

$$u=u(\rho,S) \qquad (2.45)$$

Уравнение энтропии:

$$\rho\left(\frac{\partial S}{\partial t}+(\vec{v},\nabla)S\right)=\frac{q}{T}, \qquad (2.46)$$

Где $q=q^{e}+div\vec{Q}^{(e)}$.

Из этой системы уравнений можно получить основное термодинамическое соотношение, которое является следствием 1-го и 2-го начал термодинамики для идеального газа. Допустим, что источники немеханической и нетепловой энергии отсутствуют, тогда уравнение притока тепла(2.44) можно записать в виде:

$$\rho\frac{du}{dt}=-pdiv\vec{v}+q\ , \qquad (2.47)$$

где $q=q^{(e)}+div\vec{Q}^{(e)}$

Из уравнения непрерывности при этом имеем:

$$div\vec{v}=-\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \qquad (2.48)$$

т.е.(2.47) примет вид:

$$\rho\frac{du}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+q \qquad (2.49)$$

Из уравнения для изменения энтропии (2.46) следует, что:

$$\rho\frac{dS}{dt}=\frac{q}{T} \qquad (2.50)$$

Исключая q из (2.50) получим из (2.49):

$$\rho\frac{du}{dt}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+T\rho\frac{dS}{dt} \qquad (2.51)$$

Или, поделив обе части на ρ, имеем:

$$\frac{du}{dt}=T\frac{dS}{dt}-p\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\rho}\right) \qquad (2.52)$$

Как мы видели раньше, *d/dt* – это производная по времени от заданной лагранжевой частицы. Для фиксированной частицы можно в (2.52) перейти к дифференциалам и получить ***основное термодинамическое соотношение*** в виде:

$$du = TdS - pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{2.53}$$

Таким образом, в идеальной жидкости (газе) приращение внутренней энергии определяется приращением энтропии и плотности в заданной лагранжевой частице.

3. Приближение гидростатики. Стационарное течение идеальной жидкости (газа)

Изучение механики идеальной жидкости или газа начнем с так называемого приближения гидростатики. Пусть течение жидкости (газа) отсутствует, т.е. $\vec{v} = 0$ (среда неподвижна). Тогда из уравнения сохранения массы следует, что $\partial \rho / \partial t = 0$, а значит $\rho = \rho(x, y, z)$. Уравнения Эйлера при этом сводится к виду:

$$\nabla p = \vec{F} \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) часто называют уравнением гидростатики, из которого следует, что в отсутствии внешних объемных сил ($\vec{F} = 0$) внутри покоящейся жидкости (газа) давление $p = const$. Это закон Паскаля, который известен из школьного курса физики.

Таким образом, в отсутствие внешних массовых сил плотность жидкости ρ является произвольной функцией координат, при этом давление p постоянно и не зависит, например, от формы сосуда, в который налита жидкость.

Рассмотрим условия, которым должны удовлетворять внешние объемные силы, чтобы идеальная жидкость могла находиться в условиях гидростатического равновесия.

3.1. Общие условия равновесия идеальной жидкости (газа) в поле массовых сил.

Пусть $\vec{F} = \rho \vec{f}$, где $\vec{f}$ - массовая плотность объемных сил. Вычислим *rot* от выражения (3.1). Поскольку, согласно (3.1), $\nabla p = \rho \vec{f}$, то

$$rot\, \rho \vec{f} = \rho\, rot\, \vec{f} + [\nabla \rho, \vec{f}\,] = 0 \tag{3.2}$$

Умножим (3.2) на $\vec{f}$ скалярно, тогда получим условие, которому должны удовлетворять плотность объемных сил, чтобы идеальная жидкость находилась в состоянии гидростатического равновесия :

$$\vec{f}\ rot\ \vec{f} = 0\,. \tag{3.3}$$

Важным является случай, когда внешние силы имеют потенциал, т.е. $\vec{F} = \rho \nabla \varphi$. Пример такой силы – сила тяжести. Оказывается, что потенциальный характер массовых сил накладывает дополнительные ограничения на пространственное распределение плотности. Действительно, если $\vec{F} = \rho \nabla \varphi$, то $rot\, \vec{f} \equiv 0$, а из (3.2) следует, что $[\nabla \rho \times \nabla \varphi] = 0$. Это означает, что векторы $\nabla \rho$ *и* $\nabla \varphi$ *должны быть коллинеарными.* Но тогда $\rho = \rho(\varphi)$, и из уравнения гидростатики (3.1) следует, что давление также является функцией потенциала, т.е. $p = p(\varphi)$. Таким образом, при гидростатическом равновесии поверхности равных значений потенциала φ (φ = const) являются поверхностями равного давления и плотности.

Рассмотрим в качестве примера покоящуюся жидкость (газ), находящуюся в поле силы тяжести, плотность которой является функцией только давления, т.е. $\rho(p)$. ***Такая жидкость называется баротропной, а равновесие баротропным.*** В этом случае $\vec{F} = \rho\vec{g}$, а $\varphi = -gz$; тогда $p = p(z)$ и $\rho = \rho(z)$.

Рассмотрим основные случаи баротропного равновесия в поле тяжести.

1. Пусть $\rho = \rho_0 = const$ – жидкость (газ) несжимаема. В этом случае $p = p_0 - \rho_0 g(z - z_0)$, т.е. равновесное давление является линейной функцией вертикальной координаты. Заметим, что в этом соотношении и заключена вся школьная гидростатика – и закон Паскаля , и одинаковый уровень жидкости в сообщающихся сосудах.

2. ***Газ, в котором молекулы взаимодействуют только при столкновениях, так называемый совершенный газ***. Примером совершенного газа может являться газ атмосферы. В совершенном газе давление, плотность и температура связаны уравнением Клапейрона:

$$\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\mu} RT(z), \tag{3.4}$$

где $\mathrm{R} = 8,3144 \cdot 10^7$ *эрг\мол·град* – универсальная газовая постоянная, μ – молекулярная масса газа. Заметим также, что внутренняя энергия совершенного газа пропорциональна его абсолютной температуре, т.е. $u = c_V T$, здесь c_V – это величина, описывающая теплоемкость совершенного газа при постоянном объеме. Подставляя уравнение состояния (3.4) в (3.1) находим равновесное распределение давления:

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{pg}{RT(z)}, \tag{3.5}$$

отсюда после интегрирования получаем:

$$p = p_0 e^{-\int\limits_{z_0}^{z} \frac{g}{RT(z')} dz'}, \tag{3.6}$$

где p_0 – давление при z=0.

Таким образом, мы получили так называемую барометрическую формулу, описывающую изменение плотности (давления) с высотой. При $T=const$ (изотермический термодинамический процесс) мы получаем известную барометрическую формулу для изотермической атмосферы. Аналогичная формула описывает изменение давления (плотности) газа с высотой в атмосфере, если известно распределение $T(z)$.

В следующем разделе остановимся еще на одном, известном из курса средней школы понятии, следующем из закона гидростатики – на силе Архимеда.

3.2. Закон Архимеда

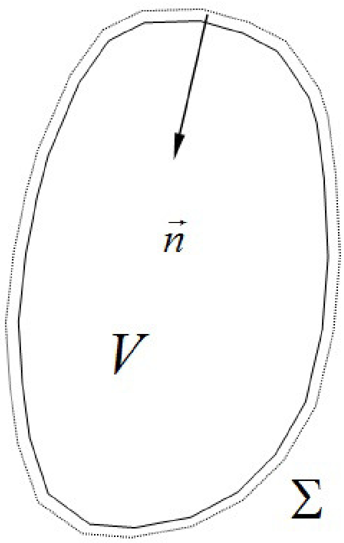


Рис.6

Найдем силу, действующую на тело объема V, погруженное в жидкость, находящуюся в равновесии и имеющую плотность $\rho(z)$. Проведем в жидкости поверхность Σ, расположенную близко к телу. (Рис. 6). Вычислим силу, действующую на жидкость на этой поверхности. Заметим, что вектор внешней нормали к поверхности для жидкости является вектором внутренней нормали для тела. Для i-й проекции силы, действующей на жидкость на этой поверхности, имеем:

$$F_{fi} = \oiint_{\Sigma} [\vec{\sigma}_n]_i \, dS = \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j dS = \oiint_{\Sigma} (-p)\,\delta_{ij} n_j dS \qquad (3.7)$$

Уберем тело и заполним образовавшуюся полость жидкостью с тем же распределением плотности. Применим теорему Остроградского-Гаусса к вычислению поверхностного интеграла в (3.7). Поскольку внешняя нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ является внутренней по отношению к поверхности, ограничивающей объем V, из (3.7) следует:

$$\oiint_{\Sigma} p n_i dS = -\int_V div\; p\,\vec{x}_{0i} dV = -\int_V \frac{\partial\, p}{\partial\, x_i} dV\,. \qquad (3.8)$$

Таким образом, сила, действующая на жидкость в объеме V, определяется выражением:

$$\vec{F}_f = \vec{g}\int_V \rho\left(z\right) dV = m_f\,\vec{g} \qquad (3.9)$$

Следовательно, сила, действующая на тело объема V со стороны окружающей жидкости, по третьему закону Ньютона, равна по величине силе (3.9) и противоположна ей по направлению, т.е.:

$$\vec{F}_b = -\vec{F}_f = -m_f\,\vec{g}\,, \qquad (3.10)$$

где $m_f = \int\limits_V \rho\left(z\right) dV$ – масса жидкости в объеме тела. Таким образом, сила, действующая на тело объема V со стороны окружающей жидкости равна по модулю весу жидкости в объеме тела. Выражение (3.10) описывает так называемую ***силу Архимеда***.

3.3. Устойчивость распределения плотности в поле силы тяжести

Рассмотрим условие устойчивости равновесного распределения плотности жидкости в поле тяжести. Распределение плотности $\rho\left(z\right)$ будет устойчиво, если при отклонении жидкой частицы от положения равновесия на нее действует возвращающая сила, стремящаяся вернуть частицу к положению равновесия.

Пусть жидкость с профилем плотности $\rho(z)$ находится в равновесии в поле сил тяжести. Направим ось z вверх, тогда в покоящейся жидкости распределение давления $p(z)$ удовлетворяет общей барометрической формуле:

$$p = p_0 - \int_{Z_0}^{Z} \rho(Z')\, g dZ' \qquad (3.11)$$

В соответствии с уравнением состояния идеального газа ($p = p\ (\rho\ ,\ S\ )$) давление и энтропия также являются функциями вертикальной координаты z.

Рассмотрим малый индивидуальный объем ΔV, находящийся в равновесии на уровне z. Пусть его плотность на этом уровне равна $\rho\,(z)$, а масса $\Delta m = \rho\,(z)\Delta V$. Предположим, что этот жидкий объем сместился вверх на высоту $z + \Delta\, z$, где равновесное давление отличается от давления на уровне z. В силу сжимаемости и плотность жидкости в объеме ΔV будет отличаться от плотности на уровне z. Обозначим плотность в этом индивидуальном объеме ρ', а сам перемещенный индивидуальный объем – $\Delta V'$. Отметим, что масса этого объема $\Delta m = \rho'\Delta V'$ сохраняется. На перемещенный индивидуальный объем действует сила тяжести $\rho'\Delta V' g$, направленная вниз, и выталкивающая сила $\rho\ (z\ +\ \Delta\ z\ )\Delta V' g$, направленная вверх, где $\rho\ (z\ +\ \Delta z)$ – равновесная плотность на новом уровне z+Δz. Для того, чтобы индивидуальный объем вернулся назад, сила тяжести должна быть больше, чем выталкивающая сила – сила Архимеда, т.е. $\rho'\Delta V' g > \rho\ (\ Z\ +\ \Delta Z\ )\Delta V' g$, а следовательно:

$$\rho' > \rho(\, Z + \Delta Z) \qquad (3.12)$$

Будем считать, что смещение индивидуального объема происходит при ***отсутствии притока внешнего тепла и теплообмена между соседними частицами***. ***Такие процессы называются адиабатическими***. Подчеркнем, что при этом сохраняется энтропия. Тогда с учетом уравнения состояния из (3.12)следует:

$$\rho\,(\,p\,(z + \Delta\, z\,);\, S\,(z\,)) > \rho\,(\,p\,(z + \Delta\, z\,);\, S\,(z + \Delta\, z\,)) \qquad (3.13)$$

Разложим это выражение по z, полагая $\Delta z / z \ll 1$:

$$\rho\left(z\right) + \left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_S \frac{dp}{dz}\Delta z > \rho\left(z\right) + \left(\left.\frac{\partial \rho}{\partial p}\right|_S \frac{dp}{dz} + \left.\frac{\partial \rho}{\partial S}\right|_p \frac{dS}{dz}\right)\Delta z \qquad (3.14)$$

Учитывая, что $\Delta z > 0$, условие устойчивости (3.14) примет вид:

$$\left.\frac{\partial \rho}{\partial S}\right|_p \frac{dS}{dz} < 0 \qquad (3.15)$$

Это одна из форм записи условия устойчивости распределения плотности в поле силы тяжести.

Более наглядным является условие устойчивости, выраженное через градиент распределения плотности. Вернемся снова к условию (3.13), переписав его с учетом уравнения состояния, в виде:

$$\rho\,(\,p\,(z+\Delta\,z\,);\,S\,(z))>\rho\,(z+\Delta\,z) \qquad (3.16)$$

Разложив (3.16) в ряд по Δz, получим:

$$\rho\left(z\right)+\left.\frac{\partial\,\rho}{\partial\,p}\right|_{S}\frac{dp}{dz}\Delta z>\rho\left(z\right)+\frac{d\,\rho}{dz}\Delta z\,, \qquad (3.17)$$

С учетом уравнения гидростатики в поле тяжести имеем:

$$\frac{dp}{dz}=-\rho(z)\,g, \qquad (3.18)$$

имеем:

$$\left(\left.\frac{\partial\,\rho}{\partial\,p}\right|_{S}\rho\,g+\frac{d\rho}{dz}\right)\Delta z<0 \qquad (3.19)$$

Учитывая, что $\Delta z > 0$, $\left.\frac{\partial\rho}{\partial p}\right|_{S}=\frac{1}{\left.\left(\partial p/\partial\rho\right)\right|_{S}}$, запишем условие устойчивости (3.19) в виде:

$$\frac{d\rho}{dz}+\frac{g\,\rho\left(z\right)}{\left.\partial\,p/\partial\,\rho\right|_{S}}<0 \qquad (3.20)$$

Как мы увидим дальше, $\left.\frac{\partial\,p}{\partial\,\rho}\right|_{S}=c^{2}$ имеет смысл скорости звука. Во всех известных случаях c^2 – большая величина, поэтому условие устойчивости можно записать в виде:

$$\frac{d\rho}{dZ}<0 \qquad (3.21)$$

Таким образом, устойчивым является распределение плотности, соответствующее ее убыванию с высотой. Заметим, что переходя к условию (3.21), мы, по существу, положили $\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{S}=\infty$, т.е. предположили, что жидкость несжимаема. Ниже мы остановимся подробнее на введенном выше понятии скорости звука.

3.4. Скорость звука

Определим физический смысл величины $\left.\frac{\partial p}{\partial\rho}\right|_{S}$, входящей в условие устойчивости равновесного распределения плотности. Рассмотрим уравнение для малых возмущений состояния идеального газа (жидкости). Эти уравнения мы в дальнейшем будем называть линейными. Пусть жидкость (газ) находится в состоянии равновесия с постоянным давлением p_0, плотностью ρ_0, энтропией S_0 , причем p_0 связано с ρ_0 и S_0 уравнением состояния $p_0 = p_0\ (\rho_0, S_0)$.

Предположим, что возникли малые возмущения, зависящие только от одной пространственной координаты x и от времени t. Запишем уравнения движения идеальной жидкости в одномерном случае:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\rho v=0 \text{ — закон сохранения массы,}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{g}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \text{ — уравнение Эйлера,} \qquad (3.22)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+v\frac{\partial S}{\partial x}=0 \text{ — второе начало термодинамики,}$$

$$p = p\ (\ \rho\ ,\ S\ ) \text{ — уравнение состояния.}$$

Представим термодинамические и гидродинамические величины в виде сумм средних и возмущений, полагая, что средние по времени от возмущений равны нулю:

$$\rho = \rho_0 + \rho_1\ (x,t)$$
$$v = v_1\ (x,t)$$
$$S = S_0 + S_1\ (x,t)$$
$$p = p_0 + p_1\ (x,t)$$

Будем считать, что отклонение величин от равновесных значений мало. Представим все слагаемые, входящие в уравнения (3.22) в виде рядов по малым переменным и отбросим все слагаемые выше 1-го порядка малости. Тогда из (3.22) получим линейную систему уравнений гидро (газо) динамики идеальной жидкости (газа):

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial x}=0$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}+\frac{\partial p_1}{\partial x}\right)=0$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial t}=0 \qquad (3.23)$$

$$p_1=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S \rho_1+\left.\frac{\partial p}{\partial S}\right|_\rho S_1$$

Отсюда видно, что возмущение равновесной энтропии можно положить равной нулю(S_1 =0). Подставим в уравнение Эйлера p_1, выраженное из линеаризованного уравнения состояния, тогда получим вместо (3.23) два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \rho_1}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial x}\right]=0$$

(3.24)

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t}+\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S\frac{\partial \rho_1}{\partial x}\right]=0$$

Исключая v_1, имеем из (3.24) волновое уравнение для возмущения давления:

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - \frac{\partial p}{\partial \rho}\bigg|_S \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.25)$$

Известно, что его решение можно представить в виде суммы двух волн сжатия (или разрежения), распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\rho = R_1\,(x - ct) + R_2\,(x + ct) \qquad (3.26)$$

Итак, параметр $c = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}\Big|_S}$, входящий в условие равновесия жидкости(газа) в поле тяжести, имеет смысл ***скорости звука***, т.е. скорости распространения звуковых волн малой амплитуды. Пусть $\rho = const$, т.е. независимо от давления плотность не меняется. Это соответствует пределу несжимаемой жидкости. Тогда скорость звука $c = \infty$. , т.е. в несжимаемой жидкости скорость распространения малых возмущений бесконечна. На самом деле скорость звука конечна, но в этом пределе достаточно велика. Отсюда ясно, что любую среду можно считать несжимаемой, если рассматриваемые в ней процессы много медленнее, чем процесс, связанный с распространением звука. Сформулируем это условие более точно. Пусть характерный пространственный масштаб процесса L, а характерный временной масштаб - T. Тогда жидкость или газ можно считать несжимаемыми, если:

$$\frac{L}{T} << C \qquad (3.27)$$

Чем определяется скорость звука? Из определения скорости звука следует, что она определяется сжимаемостью среды: если сжимаемость плохая (плотность меняется слабо, например, при адиабатическом изменении давления), то скорость звука велика. Приведем выражение для скорости звука совершенного газа. Уравнение состояния совершенного газа имеет вид:

$$\frac{p}{\rho} = (R/\mu)T \qquad (3.28)$$

При адиабатическом процессе изменения термодинамического состояния газа давление p и плотность ρ связаны формулой так называемой политропной формулой:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \qquad (3.29)$$

где $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$ – показатель адиабаты, равный отношению теплоемкостей при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

Поэтому скорость звука для совершенного идеального газа при адиабатическом процессе сжатия определяется следующим соотношением:

$$C = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \rho^{\gamma-1}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT} \qquad (3.30)$$

Видно, что скорость звука в идеальном газе зависит только от абсолютной температуры.

3.5. Стационарное течение идеальной жидкости. Интеграл Бернулли.

Перейдем теперь к описанию движения в жидкости или газе. Начнем с так называемых стационарных движений. ***Течение называют стационарным***, если в соответствующих уравнениях идеальной жидкости (газа) (2.42) –(2.46) $\partial/\partial t = 0$, т.е. скорость жидкости в каждой точке не зависит от времени. Запишем уравнения движения идеальной жидкости (газа) в случае стационарного течения. Из системы (2.42) –(2.46) нетрудно получить:

$$div\left(\rho\vec{v}\right)=0 \tag{3.31}$$

$$\left(\vec{v},\nabla\right)\vec{v}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}=\vec{F} \tag{3.32}$$

$$\rho\left(\vec{v}\nabla\right)u=q-pdiv\vec{v} \tag{3.33}$$

$$\rho\left(\vec{v},\nabla\right)S=\frac{q}{T} \tag{3.34}$$

Следует отметить, что уравнения (3.33) и (3.34), вытекающие из уравнений теплопередачи и из второго закона термодинамики, иногда заменяются уравнениями состояния.

Уравнение (3.32) в случае установившихся движений идеальной жидкости (газа) имеет первый интеграл. Предположим, что объемная сила потенциальна т.е. $\vec{F}$ = –$\rho\nabla\varphi$. Воспользуемся формулой из векторного анализа:

$$\left(\vec{v},\nabla\vec{v}\right)=\frac{1}{2}\nabla v^2+\left[rot\,\vec{v},\vec{v}\right] \tag{3.35}$$

Тогда уравнение Эйлера (3.32) примет **вид Громеки-Лэмба:**

$$\frac{1}{2}\nabla v^2+\left[rot\,\vec{v}\times\vec{v}\right]+\frac{1}{\rho}\nabla p=-\nabla\varphi \tag{3.36}$$

Проведем в жидкости семейство линий. Обозначим координату вдоль линии – l, а различные линии будем определять параметром L. Эти линии, вообще говоря, не являются линиями тока. Найдем проекцию уравнения Эйлера (3.36) на произвольную линию из этого семейства:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{v^2}{2}+\varphi\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}=-\left[rot\,\vec{v},\vec{v}\right]_l \tag{3.37}$$

На каждой линии $p = p(l, L)$, а $\rho = \rho\,(l, L)$. А значит на данной линии (при фиксированном L) $\rho = \rho\,(p, L)$. Но тогда:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l}=\frac{\partial}{\partial l}\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho\left(p',L\right)} \tag{3.38}$$

Функция

$$P\left(p,L\right)=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho\left(p',L\right)} \tag{3.39}$$

называется функцией давления. Она различна, вообще говоря, на разных линиях L. С учетом функции давления уравнение Эйлера(3.37) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[\frac{v^2}{2}+\varphi+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho\left(p',L\right)}\right]=-\left[rot\vec{v},\vec{v}\right]_l \tag{3.40}$$

Допустим, что в качестве семейства линий мы выбрали семейство линий тока. Очевидно, что вектор $[rot\ \square]_l$ направлен перпендикулярно вектору $\square$. Значит, его проекция на линию тока равна 0. Отсюда следует, что на линии тока сохраняется величина:

$$\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}+\varphi=C(L) \tag{3.42}$$

Этот интеграл и называется ***формулой Бернулли***.
Рассмотрим некоторые частные случаи формулы Бернулли.

1. Допустим, что движение жидкости представляет собой баротропный процесс, т.е. плотность есть функция только от давления $\rho=\rho(p)$, а поле скорости безвихревое, т.е. $rot\ \vec{v}=0$. Тогда независимо от линии тока из (3.42) имеем:

$$\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p')}+\varphi=const \tag{3.43}$$

Частным случаем баротропного процесса является процесс, происходящий в несжимаемой жидкости, плотность которой во всех точках одинакова. В этом случае $\rho=\rho_0=const$. Интеграл Бернулли (3.42) для безвихревого течения в несжимаемой жидкости принимает вид:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\varphi=const \tag{3.44}$$

2. Если же движение произвольно, т.е. $rot\vec{v}\neq 0$, то интеграл Бернулли принимает вид:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{p}{\rho}+\varphi=const(L) \tag{3.45}$$

Рассмотрим в следующем разделе ряд интегралов движения стационарного течения идеальной жидкости.

Задачи к разделу 3

Задача 1. Найти силу, действующую на стенку квадратного аквариума, до краев наполненного жидкостью с плотностью ρ. Высота стенки аквариума равна H. На какой высоте от дна находится точка приложения этой силы?

Решение: Жидкость в аквариуме находится в состоянии гидростатического равновесия, тогда давление жидкости внутри аквариума описывается следующим выражением:

$$\nabla p=\rho\vec{g}$$

В проекции на ось z, направленную вертикально вверх:

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g$$

Выберем начало отсчета оси z на дне аквариума, тогда интегрируя выражение для давления, получим:

$$p = p_a - \rho g(z - H)$$

Вычислим силу давления, действующую на стенку аквариума на единицу его длины:

$$F = \vec{n}\int_0^H (p - p_a)dz = -\rho g\vec{n}\int_0^H (z - H)dz = \frac{\rho g H^2}{2}\vec{n}$$

Определим точку приложения вычисленной силы. Для этого найдем отношение момента силы давления к модулю этой силы:

$$z_F = \frac{\int_0^H (p - p_a)zdz}{|F|} = \frac{H}{3}$$

Таким образом, точка приложения интегральной силы давления, действующей со стороны покоящейся жидкости на стенку прямоугольного аквариума, оказывается смещенной ближе к дну аквариума и расположена на расстоянии 1/3 высоты аквариума, отсчитываемого от его дна.

4.Законы сохранения в стационарном потоке идеальной жидкости. Метод контрольных поверхностей.

В механике сплошных сред зачастую не требуется обладать детальной информацией обо всех характеристиках течений, при этом достаточно лишь определить некоторые интегральные характеристики, например, суммарные силы, действующие на твердое тело в жидкости (газе) и т.д. Для получения интегральных характеристик течений зачастую используется метод, основанный на определении интегралов от уравнений динамики и термодинамики сплошной среды по некоторым объемам, называемым контрольными объемами. Эти объемы не являются индивидуальными, их выбирают таким образом, чтобы на них характеристики течений были либо известны, либо их можно было определить. Проинтегрируем уравнения механики сплошных сред (3.31)-(3.34) по такому объему, и посмотрим, какие при этом получатся следствия для стационарных течений.

4.1. Закон сохранения массы.

Проинтегрируем уравнения (2.42) сохранения массы по некоторому произвольному стационарному объему:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, \rho\, \vec{v}\right] dV = 0 \tag{4.1}$$

и используя вторую вспомогательную формулу (1.29), преобразуем первое слагаемое в (4.1) к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\int_V div\, \rho\, \vec{v}\, dV \tag{4.2}$$

Применяя теорему Остроградского-Гаусса к правой части соотношения (4.2), имеем из закона сохранения массы:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, dV = -\iint_\Sigma \rho\, v_n dS \tag{4.3}$$

Где Σ – поверхность, ограничивающая объем V. Обсудим смысл уравнения (4.3): левая часть (4.3) соответствует изменению массы внутри некоторого объема, а правая часть – это интеграл от потока некоторого вектора через границу этого объема. **Вектор $\vec{q} = \rho\vec{v}$ будем называть вектором плотности потока массы**. Действительно, рассмотрим площадку малой площади ΔS *на поверхности* Σ с вектором нормали $\vec{n}$. Пусть жидкость (газ) пересекает эту поверхность со скоростью $\vec{v}$. Масса жидкости, протекающая через эту площадку за время Δt *в направлении нормали, равна*:

$$\Delta m = \Delta S\, v_n \,\Delta t \cdot \rho \tag{4.4}$$

В единицу времени через единицу площадки протекает масса:

$$m_n = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t} = \rho v_n \tag{4.5}$$

Таким образом, введенный выше вектор $\vec{q} = \rho\vec{v}$, действительно имеет смысл плотности потока массы.

В стационарном потоке из (4.3) следует:

$$\iint_{\Sigma} \rho v_n dS = 0 \tag{4.6}$$

Соотношение (4.6) означает, что поток массы через замкнутую поверхность Σ в этом случае равен 0.

Рассмотрим в качестве контрольного объема ***трубку тока***. Для этого мысленно представим в жидкости произвольный контур S и проведем через него линии тока. Полученная поверхность называется трубкой тока. Вектор скорости направлен по касательной к боковой поверхности трубки тока. Предположим, что течение стационарно. Тогда трубка тока – стационарная поверхность. Применим к ней закон сохранения массы (4.6). Интеграл по боковой поверхности $S_б$ равен 0, т.к. $v_n\big|_{S_б} = 0$, $(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$, поскольку на поверхности трубки тока $\vec{v} \perp \vec{n}$. Тогда (4.6) можно переписать в виде суммы интегралов по сечениям $S_{1,2}$.

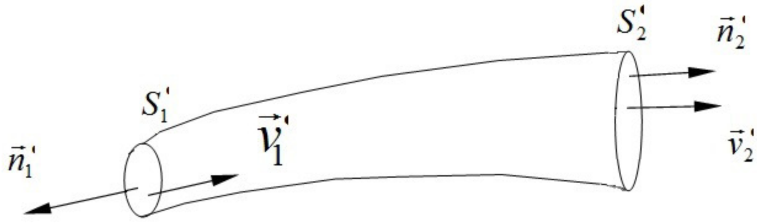


Рис. 7

В случае, если трубка тока очень тонкая, интегрирование по соответствующим сечениям $S_{1,2}$ можно заменить произведением. Полагая также, что площадки S_1 и S_2 перпендикулярны соответствующим векторам скорости, из (4.6) нетрудно получить соотношение: $-\rho_1 S_1 v_1 + \rho_2 S_2 v_2 = 0$, т.е. вдоль тонкой трубки тока сохраняется величина:

$$\rho S v = const \tag{4.7}$$

Это закон сохранения потока массы для тонкой трубки тока.

4.2. Закон сохранения импульса. Тензор потока импульса.

Теперь обратимся к закону сохранения импульса для его i-й проекции(ср.2.37):

$$\rho\left(\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)=F_i+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} \qquad (4.8)$$

Прибавим к уравнению (4.8) комбинацию $v_i\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_j\right)\right)$, равную нулю в соответствии с законом сохранения массы. Тогда имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho v_i v_j-\sigma_{ij}\right)=F_i \qquad (4.9)$$

Введем вектор $\vec{\Pi}_i=\left(\rho v_i v_j-\sigma_{ij}\right)\vec{x}_{0j}=\rho v_i\vec{v}-\sigma_{ij}\vec{x}_{0j}$**.** Тогда очевидно, что мы получили закон сохранения i-й компоненты импульса в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho v_i\right)+div\left(\vec{\Pi}_i\right)=F_i \qquad (4.10)$$

Если мы теперь проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V и применим теорему Остроградского-Гаусса, то получим из (4.10):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V\rho v_i dV=-\iint_\Sigma\left[\vec{\Pi}_i\right]_n dS+\int_V F_i dV \qquad (4.11)$$

При $F_i = 0$ изменение i-й компоненты импульса в объеме V равно потоку вектора $\vec{\Pi}_i$ через площадку, ограничивающую этот объем. ***В связи с этим вектор*** $\vec{\Pi}_i$ ***называется вектором плотности потока i-й компоненты импульса***. Таких векторов будет 3, так как есть три проекции вектора скорости. Из интегральной формулы (4.11) видно, что $\left[\vec{\Pi}_i\right]_n$ – поток импульса через площадку, ориентированную перпендикулярно вектору $\vec{n}$. Тогда проекция вектора $\vec{\Pi}_i$ на направление $\vec{x}_{0j}$ показывает поток i-й компоненты импульса через площадку, вектор нормали к которой направлен по $\vec{x}_{0j}$. Поэтому выражение для проекцииΠ_{ij} является тензором:

$$\Pi_{ij}=\rho\, v_i\, v_j-\sigma_{ij} \qquad (4.12)$$

Девять величин Π_{ij} образуют тензор (симметричный), который называется тензором потока импульса. Приведем разные типы выражений для вектора потока импульса и разные выражения для закона сохранения импульса.

<u>1. Поток импульса</u>

$$\left[\vec{\Pi}_i\right]_n=\left(\vec{\Pi}_i\cdot\vec{n}\right)=\rho\, v_i\, v_n-\sigma_{ij}\, n_j \qquad (4.13)$$

Для идеальной жидкости, где $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}$

$$\Pi_{ij}=\rho\, v_i\, v_j+p\delta_{ij} \qquad (4.14)$$

$$\left[\vec{\Pi}_i\right]_n=\rho v_i v_n+pn_i \qquad (4.15)$$

<u>2. Закон сохранения импульса</u>

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho v_i dV = -\iint_\Sigma \left(\rho v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right) dS + \int_V F_i dV \qquad (4.16)$$

В векторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \sigma_{ij} n_j \, \vec{x}_{0i}\right) dS + \int_V \vec{F}\, dV \qquad (4.17)$$

с учетом определения $\sigma_{ij} n_j \, \vec{x}_{0i} = \vec{\sigma}_n$ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) + \int_V \vec{F}\, dV \qquad (4.18)$$

Для идеальной жидкости в векторном виде:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho \vec{v} dV\right) = -\iint_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}\right) dS + \int_V \vec{F} dV \qquad (4.19)$$

Для стационарного течения жидкости в отсутствие внешних сил имеем:

$$\iint_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0 \qquad (4.20)$$

Или для идеальной жидкости:

$$\iint_\Sigma \left(\rho \vec{v} v_n + p\vec{n}\right) dS = 0 \qquad (4.21)$$

Эти интегралы используются для вычисления сил, действующих на поверхности твердых тел. Соответствующий метод вычисления силы называется методом контрольных поверхностей

4.3 Метод контрольных поверхностей.

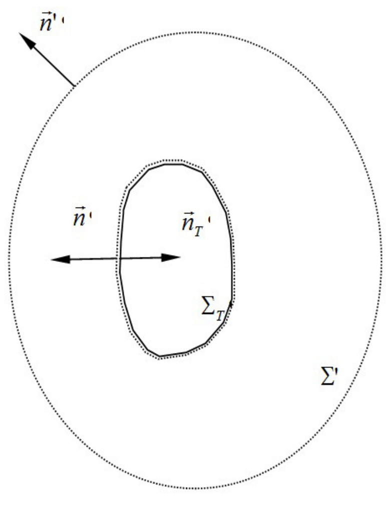


Рис.8

Пусть в жидкости имеется покоящееся твердое тело. Нужно найти силу, действующую на тело, если известно, что поток жидкости стационарный. Прежде всего, выбирают так называемую контрольную поверхность, одна из частей которой прилегает к поверхности тела, а другие части выбираются из соображений удобства (рис.8). Запишем тогда закон сохранения импульса для замкнутой поверхности $\Sigma_T + \Sigma'$:

$$\iiint_{\Sigma_T + \Sigma'} \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0 \qquad (4.23)$$

На поверхности твердого тела $v_n = 0$, т.е. имеем:

$$\iint_{\Sigma_T} \left(-\vec{\sigma}_n dS\right) + \iint_{\Sigma'} \left(\rho \vec{v} v_n - \vec{\sigma}_n\right) dS = 0; \qquad (4.23)$$

Но сила, действующая на тело со стороны жидкости, по определению $\vec{\sigma}_n$ и по третьему закону Ньютона $\vec{F} = \iint\limits_{\Sigma} (-\vec{\sigma}_n) dS$, тогда из (4.23) следует:

$$\vec{F} = -\iint\limits_{\Sigma'} (\rho v_n \vec{v} - \vec{\sigma}_n) dS \tag{4.24}$$

Таким образом, сила, действующая со стороны стационарно движущейся жидкости на тело произвольной формы равна:

$$\vec{F} = -\iint\limits_{\Sigma'} (\rho v_n \vec{v} - \vec{\sigma}_n) dS \tag{4.25}$$

<u>3. Закон сохранения энергии.</u>

Запишем закон сохранения полной энергии (ср.2.39):

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{v^2}{2} + u\right)\right] = \rho F_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{ij} v_i\right) + q + div\,\vec{Q}^{(e)} + q^{**} \tag{4.26}$$

Прибавляя к левой части (4.26) равную нулю комбинацию:

$$\left(\frac{v^2}{2} + u\right)\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_j\right)\right) = 0, \tag{4.27}$$

имеем закон сохранения энергии в дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right)\right) + div\left(\rho \vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) - \sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j} - \vec{Q}^{(e)}\right) = \left(F_i v_i + q + q^{**}\right) \tag{4.28}$$

Проинтегрируем это уравнение по некоторому объему V окруженному поверхностью Σ, имеем:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV = -\oiint\limits_{\Sigma}\left(\rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + u\right) - \sigma_{ij} n_j v_i\right) dS + \int\limits_V F_i v_i dV + \\ + \int\limits_V \left(q^e + div\,\vec{Q}^{(e)}\right) dV + \int\limits_V q^{**} dV\end{gathered} \tag{4.29}$$

Если нет внешних объемных сил $\left(\vec{F}_i = 0\right)$ и отсутствует приток тепла, также других видов энергии $\left(q^e = \vec{Q}^e = q^{**} = 0\right)$, то из (4.20) следует, что:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right) dV = -\oiint\limits_{\Sigma}\left(\rho v_n \left(\frac{v^2}{2} + u\right) - [\vec{\sigma}_n]_i v_i\right) dS \tag{4.30}$$

Таким образом, изменение энергии сплошной среды в объеме V равно потоку вектора:

$$\vec{W} = \rho \vec{v}\left(\frac{v^2}{2} + u\right) - \sigma_{ij} v_i \vec{x}_{0j} \tag{4.31}$$

Этот вектор называется вектором потока энергии. Для идеальной жидкости, где $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$

$$\vec{W}=\vec{v}\left(\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+p\right) \tag{4.32}$$

Видно, что приток энергии в объем происходит не только за счет переноса энергии с потоком сплошной среды как “примеси”, но и за счет работы поверхностных сил (в идеальной жидкости – за счет работы сил давления).

4.4.Закон сохранения энергии в стационарном потоке идеальной жидкости.

Будем рассматривать потенциальные объемные силы, т.е. $\vec{F}=-\rho\nabla\varphi$, тогда $F_i v_i=\left(-\rho\vec{v}\nabla\varphi\right)=-div\rho\vec{v}\varphi+\varphi div\left(\rho\vec{v}\right)$.

Для стационарного потока $div\rho\vec{v}=0$, т.е. $\left(\vec{F}\cdot\vec{v}\right)=-div\left(\rho\vec{v}\varphi\right)$.

Тогда закон сохранения энергии (4.29) примет вид:

$$\oiint_{\Sigma} v_n\left[\rho\left(\frac{v^2}{2}+u\right)+p+\rho\varphi\right]dS=\int_V\left(q+q^{**}\right)dV \tag{4.33}$$

Применим эту формулу к трубке тока малой толщины, имеем:

$$-S_1v_1\left[\rho_1\left(\frac{v_1^{\,2}}{2}+u_1\right)+p_1+\rho_1\varphi_1\right]+S_2v_2\left[\rho_1\left(\frac{v_2^{\,2}}{2}+u_2\right)+p_2+\rho_2\varphi_2\right]=Q \tag{4.34}$$

Учитывая, что в тонкой трубке *dV=S(l)dl* (где *S(l)* - площадь поперечного сечения трубки тока), получим для объемных источников энергии Q:

$$Q=\int_{l_1}^{l_2}\left(q+q^{**}\right)S\left(l\right)dl \tag{4.35}$$

Примем во внимание закон сохранения потока массы для узкой трубки тока: $\rho_1 v_1 S_1=\rho_2 v_2 S_2=\rho v S$, имеем из (4.34):

$$\left(\left(\frac{v_2^2}{2}+u_2\right)+\frac{p_2}{\rho_2}+\varphi_2\right)-\left(\left(\frac{v_1^2}{2}+u_1\right)+\frac{p_1}{\rho_1}+\varphi_1\right)=\frac{Q}{\rho v S} \tag{4.36}$$

Для адиабатического процесса $Q=0$ и закон сохранения энергии (4.25) принимает вид:

$$\frac{v^2}{2}+u+\frac{p}{\rho}+\varphi=const \tag{4.37}$$

Устремляя толщину трубки к 0, имеем, что на линии тока для адиабатического процесса сохраняется величина (4.37).

Сравним (4.37) с формулой Бернулли: закон Бернулли утверждает, что на линии тока сохраняется величина:

$$\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho\left(p',L\right)}+\varphi=const\left(L\right) \tag{4.38}$$

где $P(p,L)=\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}$ – функция давления.

Следует подчеркнуть, что этот интеграл отличается от (4.37), соответствующего закону сохранения энергии. Сравнивая интегралы (4.37) и (4.38), можно видеть, что при адиабатическом процессе, когда функция давления выражается через внутреннюю энергию и давление в виде:

$$P(p, L) = u + p/\rho \tag{4.39}$$

из закона сохранения потока энергии следует выражение для функции давления. Но еще раз подчеркнем, что формула Бернулли и закон сохранения потока энергии – это два разных интеграла движения сплошной среды.

4.5.Одномерное течение идеального газа

Одномерным называется такое течение газа, при котором скорость имеет единственную компоненту v_x, а все гидродинамические и термодинамические поля зависят от единственной координаты x. Мы увидим, что довольно много задач может быть рассмотрено в этом приближении. Для приближенных расчетов газовых потоков по трубам во многих случаях можно воспользоваться следующей упрощенной одномерной стационарной схемой

Прежде всего запишем законы сохранения для тонких трубок. Пусть x – координата вдоль линии тока в центре этой трубки.

1. Закон сохранения потока массы(ρvS) вдоль трубки тока. Продифференцируем по x *соответствующий закон* (4.7):

$$\frac{d}{dx}(\rho vS)=0 \tag{4.40}$$

2. Поскольку вдоль линии тока справедлива формула Бернулли: $\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp'}{\rho(p',L)}+\varphi=C(L)$, то после ее дифференцирования по x имеем:

$$v\frac{dv}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}=0 \tag{4.41}$$

3. Из закона сохранения потока энергии вдоль трубки тока $\left.\frac{v^2}{2}+u+\frac{p}{\rho}+\varphi\right|_{x_0}^{x}=\frac{1}{\rho Sv}\int\limits_{x_0}^{x}qS(l)\,dl$ после дифференцирования по x имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}+u+\frac{p}{\rho}+\varphi\right)=\frac{q+q^{**}}{\rho\,v} \tag{4.42}$$

Добавляя сюда уравнение состояния $u = u(p, \rho)$, можно решать задачи о течении газа по тонким трубкам при заданных источниках тепла и потенциалах. Эти законы можно применять при решении задач о течении газа и жидкости по трубам переменного сечения, при расчете сопел и т.п. Выясним, когда можно применять законы, сформулированные для тонких трубок тока к изучению течения жидкости и газа по трубам конечного диаметра.

4.5.1. Одномерное течение сжимаемого газа по трубам конечной толщины.

Пусть характерный масштаб изменения всех полей и диаметра трубы в продольном направлении равен $L_{\parallel}$, а характерный поперечный масштаб трубы – $L_{\perp}$ (это будет и поперечный масштаб всех полей) (см. рис.9). Пусть $L_{\parallel} >> L_{\perp}$. Из уравнения сохранения массы для стационарного течения следует, что:

$$div \rho \vec{v} = 0 \tag{4.43}$$

Из этого уравнения нетрудно получить оценку:

$$\frac{\rho v_{II}}{L_{II}} \sim \frac{\rho v_{\perp}}{L_{\perp}}, \text{ т.е. } \frac{v_{II}}{v_{\perp}} = \frac{L_{II}}{L_{\perp}} >> 1 \tag{4.44}$$

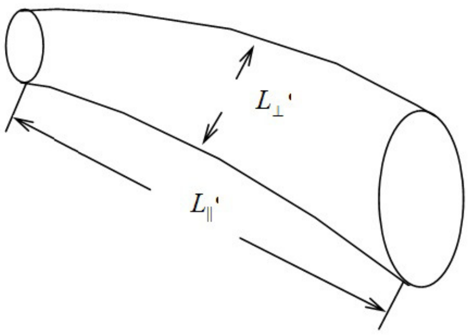


Рис.9

Запишем уравнение Эйлера для стационарного течения

$$\left(\vec{v}, \nabla\right)\vec{v} + \frac{\nabla p}{\rho} = \vec{F} \tag{4.45}$$

Пусть $\vec{F} = 0$. Проекция уравнения на продольное направление:

$$v_{II}\frac{\partial v_{II}}{\partial x_{II}} + v_{\perp}\frac{\partial v_{II}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{II}}\frac{1}{\rho} = 0 \tag{4.46}$$

На поперечное направление:

$$v_{II}\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{II}} + v_{\perp}\frac{\partial v_{\perp}}{\partial x_{\perp}} + \frac{\partial p}{\partial x_{\perp}}\frac{1}{\rho} = 0. \tag{4.47}$$

Покажем, что существует такое решение, которое можно представить в виде:

$$p = p(x_{\parallel}) + p_1(x_{\parallel}, x_{\perp}), \text{ где } p_1 << p \tag{4.48}$$

Подставим p в уравнение (4.47), получим оценку: $\frac{v_{II} v_{\perp}}{L_{II}} + \frac{v_{\perp}^2}{L_{\perp}} \sim \frac{p_1}{\rho L_{\perp}}$, которая с учетом уравнения непрерывности $v_{II} \sim v_{\perp}\frac{L_{II}}{L_{\perp}}$, примет вид $\frac{p_1}{\rho L_{\perp}} \sim \frac{v_{\perp}^2}{L_{\perp}}$, т.е. $p_1 \sim \rho v_{\perp}^2$.

Подставим в уравнение (4.46) оценочное значение давления: $\frac{v_{II}^2}{L_{II}} + v_{\perp}\frac{v_{II}}{L_{\perp}} + \frac{p}{\rho L_{II}} = 0$, т.е. $p \sim \rho v_{II}^2$, поскольку $v_{\perp} << v_{II}$, то $p_1 << p$, $\frac{p_1}{p} \sim \left(\frac{L_{\perp}}{L_{II}}\right)^2$. Значит, с точностью до малых величин порядка $\left(\frac{L_{\perp}}{L_{II}}\right)^2$ можно считать, что p зависит только от продольной координаты x. Но если p зависит только от x, т.е. сила зависит только от x, то можно считать, что v_{II} зависит только от x, с точностью до малых порядка $\left(\frac{L_\perp}{L_{II}}\right)^2$. Во всяком случае, такое решение существует. Получается, что по сечению трубки v – постоянно и p – постоянно. Значит, из закона сохранения массы следует, что и ρ постоянно. Т.е. мы получаем, что для трубки конечной толщины применимо уравнение сохранения потока массы, полученное для тонкой трубки:

$$\frac{d(\rho v S)}{dx}=0 \tag{4.49}$$

а также на любой линии тока (а они все одинаковы) справедливо соотношение, вытекающее из закона Бернулли и закона сохранения энергии для одномерного движения:

$$v\frac{dv}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}+\frac{d\varphi}{dx}=0 \tag{4.50}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}+u+\frac{p}{\rho}+\varphi\right)=q \tag{4.51}$$

Чтобы система была замкнута, необходимо включить сюда еще уравнение состояния в виде, соответствующем, например, двухпараметрическим средам, к которым относится идеальная жидкость или газ:

$$u = u(p, \rho) \tag{4.52}$$

Задача об истечении газа из сосуда

Рассмотрим задачу об истечении газа из сосуда, в котором поддерживается давление p_0, а плотность газа ρ_0. Истечение газа происходит по трубке (соплу) переменного сечения $S(x)$. Пусть $S(x)$ монотонно убывает. Задача состоит в том, чтобы найти скорость истечения газа из трубки и распределение параметров газа (давления, плотности, скорости) по ее длине.

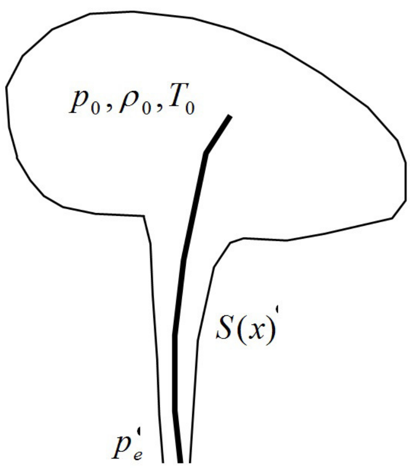


Рис.10

Выберем линию тока, проходящую из глубины сосуда, где $p = p_0$, $v = 0$ через сопло. Применим систему уравнений для течения жидкости вдоль линии тока. Поскольку внешние массовые силы и источники тепла отсутствуют (φ=0, q=0), то законы течения газа по тонкой трубке примут вид:

-закон сохранения потока импульса:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}\right)=0 \tag{4.53}$$

-закон сохранения потока энергии:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{v^2}{2}+u+\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{4.54}$$

Считаем, что газ совершенный, тогда уравнение состояния:

$$\frac{p}{\rho}=\frac{1}{\mu}RT \tag{4.55}$$

Тогда внутренняя энергия может быть описана с помощью следующего выражения:

$$u=\frac{c_V}{\mu}T=\frac{c_V}{R}\frac{p}{\rho} \tag{4.56}$$

Эти уравнения справедливы на линии тока.

Начиная с некоторого x на выбранной линии тока, внутри трубки тока, течение газа можно считать одномерным и добавить закон сохранения потока массы в виде:

$$d/dx(\rho v S(x)) = 0 \tag{4.57}$$

Чтобы решить задачу, надо совместно решать систему (4.53-4.57). Исключая из уравнений (4.53) и (4.54) v^2, с учетом уравнения состояния мы получим уравнение адиабаты для совершенного газа. При постоянной удельной теплоемкости $c_V = \text{const}$ имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(-\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho}+\left(\frac{c_V}{R}+1\right)\frac{p}{\rho}\right)=0 \tag{4.58}$$

$$-\frac{dp}{\rho}+\left(\frac{c_V}{R}+1\right)\frac{dp}{\rho}-\frac{c_p}{R}\frac{p}{\rho^2}d\rho=0 \tag{4.59}$$

Отсюда $\dfrac{c_V dp}{p}=\dfrac{c_p}{\rho}d\rho$; $p = p_0\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$, где $\gamma=\dfrac{c_p}{c_V}$. В результате получаем уравнение адиабаты.

Подставляем полученную связь в (4.53) или в (4.54), получим связь скорости с давлением

$$\frac{v^2}{2}+\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho_0\left(\dfrac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}}=const \tag{4.60}$$

Интегрирование этого выражения дает:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)}=const \tag{4.61}$$

Константу в выражении (4.61) находим из условия, что в глубине сосуда на линии тока $p = p_0$, $\rho = \rho_0$, $v = 0$ т.е.:

$$\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma p}{\rho(\gamma-1)}=\frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)} \tag{4.62}$$

Подставляя сюда ρ как функцию p, получим зависимость скорости течения газа от давления:

$$v=\sqrt{\frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{4.63}$$

Заметим, что в силу стационарности течения p_0, ρ_0 в (4.63) и в уравнении адиабаты одни и те же. Чтобы получить значение скорости на выходе из сопла, приравняем значение p в (4.63) к p_e, а при произвольном $p_e < p < p_0$ получим значения скорости вдоль трубки. Казалось бы, задача почти решена. Надо найти только распределение всех величин по трубке при заданной зависимости $S(x)$ – зависимости сечения сопла от x. Для этого проинтегрируем уравнение (4.57):

$$\rho v S(x) = Q \tag{4.64}$$

здесь постоянная Q определяется граничными условиями, $S(x)$ – заданная убывающая функция по условию задачи, в таком случае $\rho v = \dfrac{Q}{S(x)}$ – растущая функция. Найдем зависимость ρv от p; v определяется из (4.63); а ρ определяется уравнением адиабаты – $\rho = \rho_0\,(p\,/\,p_0)^{1/\gamma}$. Тогда:

$$\rho v = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma\,\mathrm{p}_0}{\rho_0(\gamma-1)}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right]} \tag{4.65}$$

Построим график функции $\rho v(p)/\rho_0 v_0$,где $v_0 = \sqrt{\dfrac{2\gamma\,\mathrm{p}_0}{\rho_0(\gamma-1)}}$.

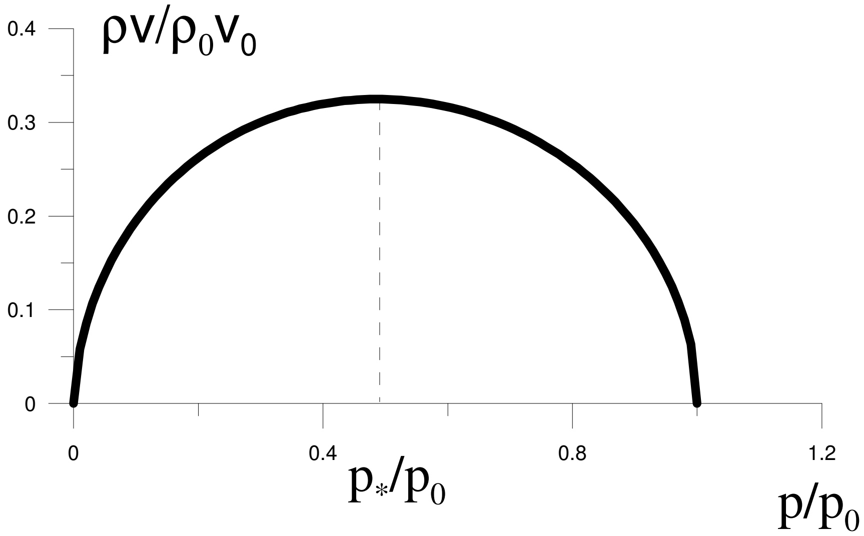


Рис.11

Обсудим возможность реализации этой зависимости. Давление вдоль трубки должно монотонно падать от p_0 до p_e.

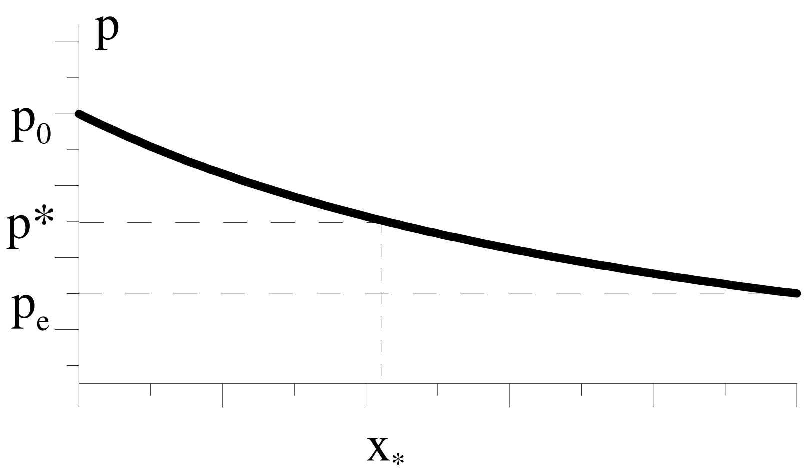


Рис.12

Но тогда $\rho v(x)$ имеет немонотонный характер:

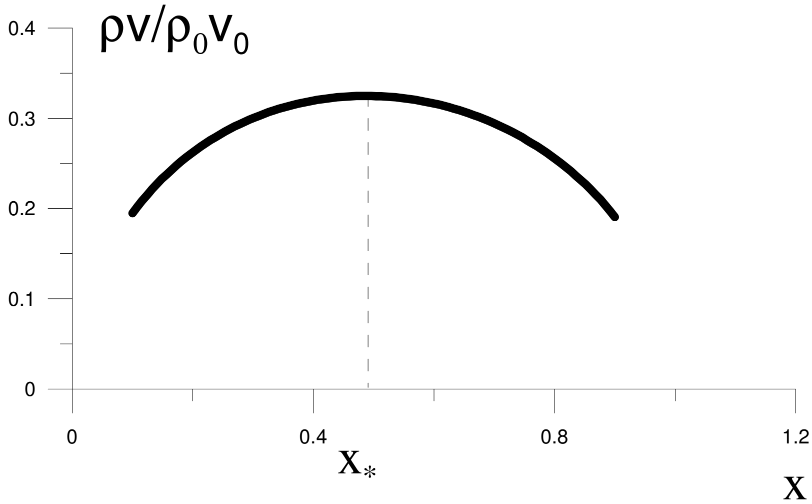


Рис.13

Значит, при монотонной зависимости $S(x)$ условие $\rho v S(x)=Q=const$. не может быть выполнено, если $p_e< p_*$, где p_* – точка максимума функции $\rho v(p)$. Это давление называется критическим.

Определим эту точку максимума:

$$d/dp[\rho v(p)] = 0 \tag{4.66}$$

Обозначим $y = p/p_0$.

Тогда надо найти максимум функции:

$$\frac{df}{dy} = \frac{2}{\gamma} y_*^{\frac{2-\gamma}{\gamma}} - \frac{\gamma+1}{\gamma} y_*^{\frac{1}{\gamma}} = 0 \tag{4.67}$$

где $f(y) = y^{2/\gamma}(1 - y^{(\gamma-1)/\gamma})$.

Отсюда для координаты имеем $y_*^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \dfrac{2}{\gamma+1}$, при этом давление и плотность равны:

$$p_* = p_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \rho_* = \rho_0\left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{4.68}$$

Скорость потока в точке максимума ρv найдем из уравнения Бернулли:

$$\frac{v_*^2}{2} + \frac{\gamma p_*}{(\gamma-1)\rho_*} = \frac{\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)} \tag{4.69}$$

Подставляя p_* и ρ_*, из (4.68), получим:

$$v_*^2 = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(\gamma-1)}\left(1-\frac{2}{\gamma+1}\right) = \frac{2\gamma p_0}{\rho_0(1+\gamma)} \tag{4.70}$$

Заметим, что при $p = p_*$, $\rho = \rho_*$ скорость звука принимает значение:

$$c_*^2 = \frac{\gamma p_*}{\rho_*} = v_*^2 \tag{4.71}$$

т.е. в критической точке скорость потока равна скорости звука.

Заметим, что параметры потока в критической точке p_*, ρ_*, c_* однозначно связаны с параметрами газа на линии тока в точке, где газ покоится: p_0, ρ_0, c_0 – параметры торможения. Действительно:

$$\sqrt{\frac{\gamma p_*}{\rho_*}} = c_* = c_0\sqrt{\frac{2}{1+\gamma}} \tag{4.72}$$

Итак, соблюдение условия $\rho vS(x) = const$ возможно при монотонной зависимости $S(x)$, только если давление на выходе трубки $p_e \geq p_*$ (критическое давление). Когда $p_e = p_*$, то скорость газа в выходном сечении равна скорости звука c_*. То есть, если мы снижаем выходное давление от значения p_0 до p_*, то скорость газа в выходном сечении трубки монотонно растет от 0 до c_*. Что будет, если мы теперь будем дальше понижать давление на выходе из трубки? Будем рассуждать. Газ выходит из трубки со скоростью звука. Уменьшим давление, т.е. создадим возмущение давления. Чтобы газ внутри трубки "узнал", что давление снаружи понизилось, необходимо, чтобы возмущения давления распространились вверх по потоку. Но они распространяются со скоростью звука c_*, т.е. возмущения не смогут подняться вверх по потоку, и газ "не узнает", что давление снаружи изменилось. На выходе внутри трубки давление так и останется p_*, скорость $v = c_*$, а плотность ρ_*. Зависимость плотности потока газа от давления вне сосуда p_e для этих условий показана на рис.14.

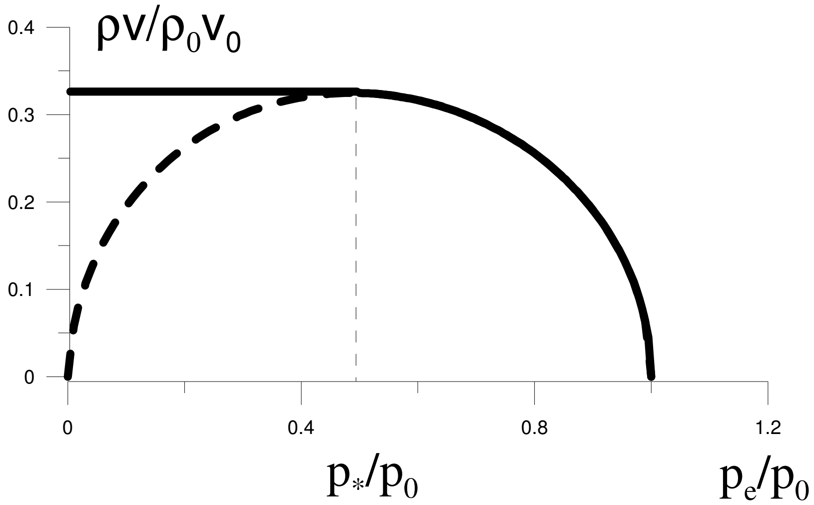


Рис.14

4.5.2 Сопло Лаваля

Как добиться того, чтобы газ в сосуде двигался со сверхзвуковой скоростью и на выходе из сосуда имел бы сверхзвуковую скорость? Из формулы для $v(p)$ ясно, что для выполнения этого условия давление p_e должно быть меньше p_*. Однако выполнение одного этого условия оказывается недостаточным, необходимо также, чтобы величина $\rho vS(x)$ вдоль трубы сохранялась. Поскольку зависимость $\rho v(p)$ является немонотонной, этого можно добиться, только если зависимость $S(x)$ также будет немонотонной. Такое сопло с немонотонной зависимостью $S(x)$ называют соплом Лаваля. В нем действительно удается получить сверхзвуковой поток.

Рассмотрим задачу о течении сжимаемого газа по трубе переменного сечения более подробно. Итак, пусть задано $S(x)$. Внешние силы и источники тепла отсутствуют. Уравнения движения жидкости по трубе (на трубке тока) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\rho\, vS(x)\right)=0 \\ v\dfrac{dv}{dx}+\dfrac{dp}{dx}\dfrac{1}{\rho}=0 \\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{v^2}{2}+u+\dfrac{p}{\rho}\right)=0 \\ p=p(\rho,\overline{s}) \end{cases} \tag{4.73}$$

Здесь x – координата вдоль трубы в направлении потока, $\overline{s}$ - энтропия.

Из предпоследнего уравнения системы (4.73), с использованием основного термодинамического тождества:

$$\frac{du}{dx}=T\frac{d\overline{s}}{dx}+\frac{p}{\rho^2}\frac{dp}{dx} \tag{4.74}$$

получим:

$$v\frac{dv}{dx}+T\frac{d\overline{s}}{dx}+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}=0 \tag{4.75}$$

Отсюда с учетом второго уравнения системы (4.73) получим, что $\frac{d\bar{s}}{dx}=0$.

Но тогда:

$$\frac{dp}{dx}=\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_{\bar{s}}\frac{d\rho}{dx}+\left.\frac{\partial p}{\partial \bar{s}}\right|_{\rho}\frac{d\bar{s}}{dx} \tag{4.76}$$

т.е. $\frac{dp}{dx}=c^2\frac{d\rho}{dx}$.

Тогда 1-е и 2-е уравнения системы (4.73) примут следующий вид:

$$\begin{cases}\frac{d\rho}{dx}\frac{1}{\rho}+\frac{dv}{dx}\frac{1}{v}+\frac{d\bar{s}}{dx}\frac{1}{\bar{s}}=0\\ v\frac{dv}{dx}+\frac{c^2}{\rho}\frac{d\rho}{dx}=0\end{cases} \tag{4.77}$$

Исключая отсюда $d\rho/dx$, получим:

$$\frac{d\bar{s}}{dx}\frac{1}{\bar{s}}=\frac{v^2-c^2}{c^2v}\frac{dv}{dx} \tag{4.78}$$

Определим, при каких условиях поток ускоряется, т.е. $dv/dx > 0$.

При $v<c$ (в дозвуковом потоке) $\frac{dv}{dx}>0$ при $dS/dx < 0$, т.е. сопло должно сужаться. При $v>c$ (сверхзвуковой поток) $\frac{dv}{dx}>0$ $dS/dx > 0$, т.е. сопло должно расширяться.

Какой это имеет физический смысл? Из уравнения Эйлера следует, что:

$$\frac{dv}{dx}=-\frac{1}{\rho v}\frac{dp}{dx} \tag{4.79}$$

т.е. для ускорения потока ($dv/dx>0$) нужен отрицательный градиент давления $dp/dx<0$. В очень медленных потоках, когда $v<<c$, и газ можно считать несжимаемым, скорость газа при уменьшении толщины трубки увеличивается (это следует из сохранения массы), а давление падает (по формуле Бернулли). При большой скорости потока (v порядка c) надо учитывать сжимаемость газа. Газ с большой скоростью поступает в узкую трубку, при этом необходимо учитывать эффект адиабатического сжатия, при котором давление растет. Возникает конкуренция эффектов гидродинамического понижения давления и адиабатического повышения. При $v=c$ эти эффекты компенсируют друг друга. При $v>c$ более сильным становится эффект адиабатического сжатия, поэтому при сужении трубки сверхзвуковой поток замедляется. Чтобы он ускорился, надо расширить трубку, тогда за счет понижения давления при адиабатическом расширении поток будет ускоряться.

Из этих рассуждений ясно, что для того, чтобы получить из дозвукового потока сверхзвуковой, надо, чтобы газ двигался по трубке, которая сначала сужается и разгоняет его до скорости звука, а затем расширяется и разгоняет его дальше. При этом все величины: сечение трубки, давление и т.п. должны быть согласованы. Тогда течение газа будет стационарным.

Итак, качественно мы выяснили, как должно выглядеть сопло Лаваля. Рассмотрим, как можно рассчитать такое сопло количественно. Пусть имеется резервуар, в котором поддерживается давление p_0, плотность ρ_0 при температуре T_0, давление на выходе p_e. Из сосуда выходит трубка, площадь сечения которой $S(x)$. Рассмотрим, как можно рассчитать профиль сечения трубки $S(x)$, чтобы поток на выходе имел заданную сверхзвуковую скорость. Удобной характеристикой потока газа является число Маха:

$$M = v/c \tag{4.80}$$

В дозвуковом потоке $M<1$; в сверхзвуковом $M>1$. В теории сопла Лаваля принято выражать все величины как функции числа Маха. Эти формулы называются изэнтропическими. Получим их для совершенного газа. Запишем формулу Бернулли:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\gamma\, p}{\rho(\gamma - 1)} = \frac{\gamma\, p_0}{\rho_0(\gamma - 1)}\;; \tag{4.81}$$

с учетом выражения $c^2 = \gamma\, p / \rho$ имеем:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma - 1} = \frac{c_0^2}{\gamma - 1} \tag{4.82}$$

Но $v=Mc$, отсюда получим тогда:

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{1 + \frac{M^2}{2}(\gamma - 1)}}\,;\; v = \frac{c_0 M}{\sqrt{1 + \frac{M^2}{2}(\gamma - 1)}}\,; \tag{4.83}$$

Воспользуемся тем фактом, что

$$\frac{c^2}{c_0^2} = \frac{p}{p_0}\frac{\rho_0}{\rho} \tag{4.84}$$

Тогда можно получить следующее выражение:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}\frac{1}{\left(1 + \frac{M^2}{2}(\gamma - 1)\right)} \tag{4.85}$$

С учетом уравнения адиабаты $\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}$ имеем:

$$\rho = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}}, \qquad p = \frac{p_0}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}}} \tag{4.86}$$

Плотность потока газа будет выражаться следующим образом:

$$\rho v = \frac{\rho_0 c_0 M}{\left(1 + \frac{M^2(\gamma - 1)}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}} \tag{4.87}$$

Построим получившиеся зависимости. Величины c_*, v_*, ρ_*, p_* получаются из изэнтропических формул при $M=1$.

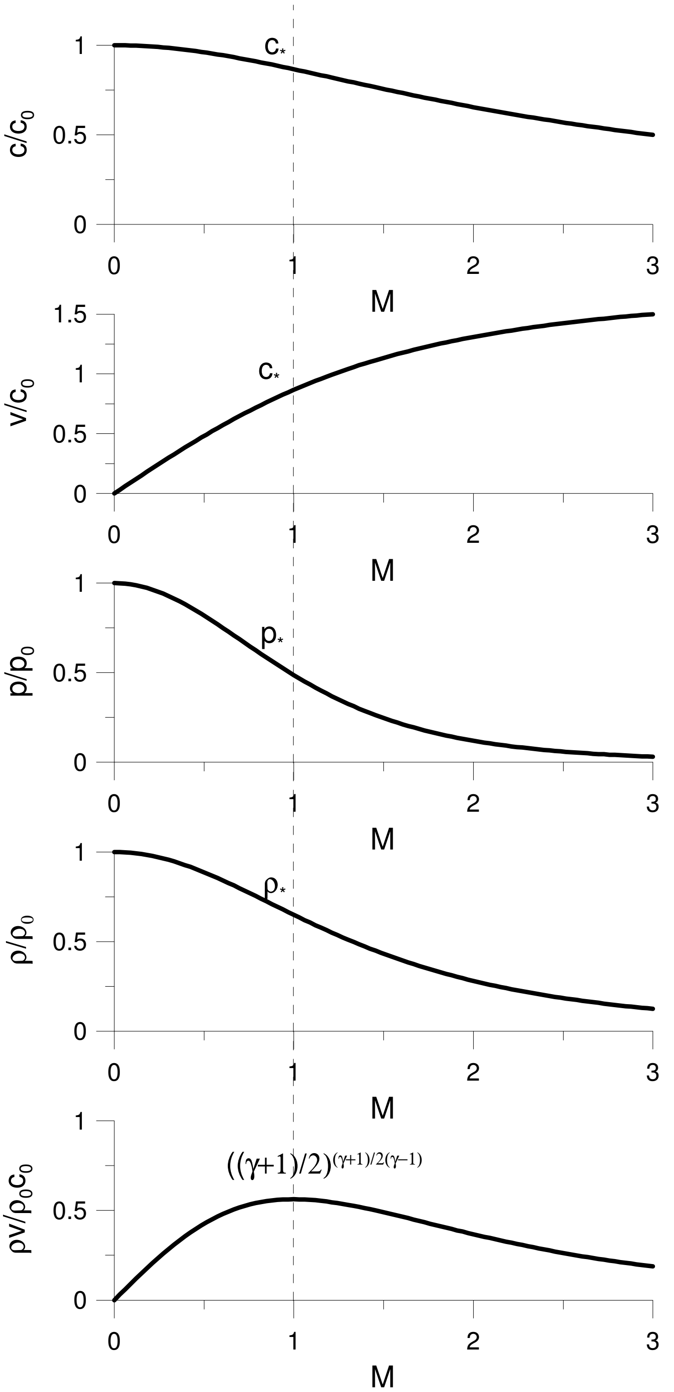


Рис.15

Полученные зависимости представляют собой параметрические формулы, где параметром является число Маха M. Чтобы выполнялось условие $\rho v S=Q$ надо, чтобы зависимость $S(M)$ была следующей

$$S(M)=\frac{Q}{\rho_0 c_0 M}\left(1+\frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \tag{4.88}$$

Эта зависимость немонотонная. Она имеет минимум при $M = 1$:

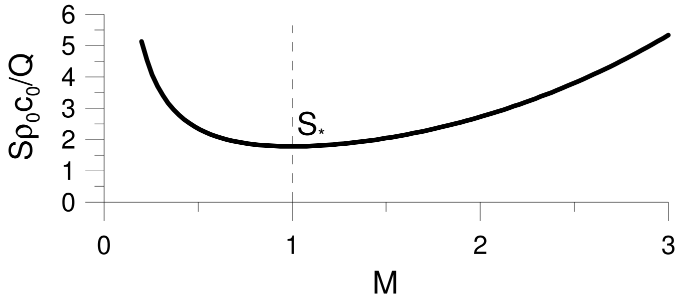


Рис.16

Минимальное сечение сопла Лаваля называется критическим:

$$S(1) = S_* = \frac{Q}{\rho_0 c_0}\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad (4.89)$$

Отсюда можно получить, что произвольное сечение зависит от M следующим образом:

$$S(M) = \frac{S_*}{M}\left(\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{M^2(\gamma-1)}{2}\right)\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \qquad (4.90)$$

Теперь ясно, как получить поток газа с заданными свойствами. Необходимо создать заданную зависимость $M(x)$ и значение M_e на выходе. Тогда по формуле для $S(M)$ мы находим $S(x)$, а также все характеристики потока p, v, c, ρ как функции x. Все они являются согласованными. Если S_* /S_e задано, то задано и p_* /p_e, а поскольку p_* однозначно связано с p_0, то, значит, задано и отношение p_e/p_0. Такой режим работы сопла называется расчетным сверхзвуковым.

Задачи к разделу 4

Задача 1. Круглая струя жидкости площадью сечения S_0 падает на твердую стенку под углом α. Скорость жидкости в струе равна v_0, плотность жидкости равна ρ_0. Найти силу, действующую на единицу ширины стенки.

Решение: Для решения задачи выберем контрольную поверхность, охватывающую струю вместе с ее боковой поверхностью $\Sigma_б$ и поверхностью соприкосновения струи со стенкой $\Sigma_{ст}$. Пусть площадь сечения растекающейся струи на большом расстоянии от места соударения струи со стенкой равна Σ_1. Сила, с которой струя действует на стенку, равна:

$$\vec{F} = \iint_{\Sigma_{cm}} (p - p_0)\vec{n}dS$$

Используем метод контрольных поверхностей, учтем при этом, что на боковой поверхности струи нормальная компонента скорости равна нулю:

$$\iint_{S_0} (p_0 + \rho_0 v_0^2)\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_1} (p_0 + \rho_0 v^2)\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_б} p_0\vec{n}dS + \iint_{\Sigma_{cm}} p\vec{n}dS = 0\,,$$

здесь p_0 – атмосферное давление, v – скорость растекающейся по стенке струи на большом расстоянии от места соударения струи со стенкой. Учтем, что:

$$\iint\limits_{S_0+\Sigma_1+\Sigma_б+\Sigma_{cm}} p_0\vec{n}dS = 0$$

Тогда для силы, действующей со сторону струи на стенку, получим:

$$\vec{F} = \iint\limits_{\Sigma_{cm}} (p - p_0)\vec{n}dS = -(\iint\limits_{S_0} \rho_0 v_0^2\vec{n}dS + \iint\limits_{\Sigma_1} \rho_0 v^2\vec{n}dS)$$

Проекция силы давления на направление, касательное к стенке равна нулю. Нормальная проекция силы F:

$$F_n = -\iint\limits_{S_0} \rho_0 v_0^2\vec{n}dS = \rho_0 v_0^2 S_0 \sin\alpha$$

Задача 2. В вертикальной трубе реализован стационарный поток идеального невязкого газа с постоянной удельной теплоемкостью. Определить при какой зависимости площади поперечного сечения трубы от вертикальной координаты давление газа вдоль трубы будет постоянным.

Круглая струя жидкости площадью сечения S_0 падает на твердую стенку под углом α. Скорость жидкости в струе равна v_0, плотность жидкости равна ρ_0. Найти силу, действующую на единицу ширины стенки.

Решение: Для решения задачи используем законы сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(\rho v S) = 0 \\ v\dfrac{dv}{dz} + \dfrac{dp}{dz}\dfrac{1}{\rho} = g \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{v^2}{2} + p + u\right)\rho v S = \dfrac{d(\rho g z v S)}{dz} \end{cases}$$

Поскольку газ имеет постоянную удельную теплоемкость, имеем:

$$u = c_V T, \quad \frac{p}{\rho} = RT \Rightarrow u = \frac{c_V p}{R\rho} = \frac{c_V}{c_P - c_V}\frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{p}{\rho}$$

Закон сохранения энергии в этом случае примет вид:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}\right) = g \Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) = g$$

Вычитая из получившегося выражения закон сохранения импульса, получим:

$$\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{d}{dz}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = 0$$

Отсюда следует, что $\rho = const$, поскольку по условию задачи $p = const$, т.е.:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{v^2}{2} - gz\right) = 0 \\ \dfrac{d}{dz}(vS) = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} v^2 = v_0^2 + 2gz \\ vS = v_0 S_0 \end{cases} \quad \Rightarrow S = S_0 \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gz}}$$

Здесь S_0, v_0 – значения площади сечения и скорости при z=0.

5.Поверхности разрыва.

До сих пор при введении основных понятий и при определении систем уравнений, связанных с моделями сплошной среды, предполагалось, что сами уравнения и их решения непрерывны вместе со своими производными. Однако эти предположения являются довольно сильным ограничением, неприемлемым в ряде важных практических задач Действительно очень часто приходится рассматривать сплошные среды с резко различающимися свойствами. Наиболее типичной является граница раздела жидкость - твердое тело: в жидкости могут существовать различные типы движений, однако на границе с твердым телом нормальная компонента скорости жидкости должна обращаться в ноль – жидкость не протекает сквозь твердое тело. Кроме того, в идеальных жидкостях и газах возможно существование таких движений, при которых физические величины терпят разрыв внутри одного вещества. Уравнения идеальной гидродинамики допускают такие решения. Скачки гидродинамических величин наблюдаются на некоторых поверхностях, которые называются поверхностями разрыва. Эти поверхности не привязаны к определенным частицам жидкости или газа. Они движутся с некоторыми скоростями, которые называются скоростями движения поверхности разрыва. Частицы могут, вообще говоря, переходить с одной стороны поверхности разрыва на другую. Строго говоря, поверхности разрыва имеют конечную, но очень малую толщину по сравнению со всеми характерными масштабами задачи, но эта толщина определяется уже в рамках так называемой вязкой задачи. Для описания поверхностей разрыва на них формулируют граничные условия: соотношения, связывающие гидродинамические величины по разные стороны от поверхности разрыва, где движения предполагаются непрерывными.

5.1. Граничные условия на разрыве

Получим выражения для этих граничных условий из уравнений гидродинамики. Пусть S – поверхность разрыва. Выберем на поверхности S точку M. Предположим, что скорость точки M в момент t была равна $\vec{u}$. Перейдем в инерциальную систему отсчета, которая движется со скоростью $\vec{u}$. Выберем индивидуальный объем ΔV в виде параллелепипеда со сторонами Δh и Δl (см. рис.17), который в момент времени t содержит внутри себя поверхность разрыва. Найдем величину:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V A dV \,, \tag{5.1}$$

где $\Delta S = \Delta l^2$.

Воспользуемся 1-й вспомогательной формулой, которая имеет вид:

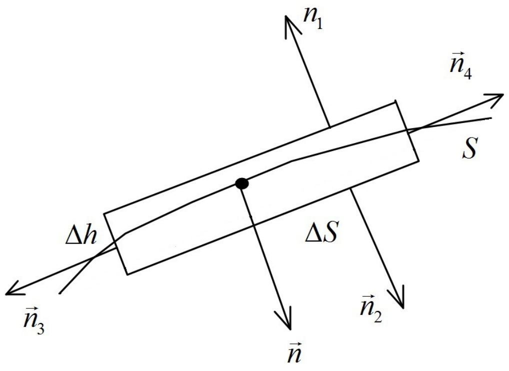


Рис. 17

$$\frac{d}{dt}\int_V AdV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t}dV + \oiint_\Sigma A(\vec{v}\vec{n})dS\,, \quad (5.2)$$

где A – произвольная скалярная величина. Применим эту формулу к индивидуальному объему ΔV, содержащему внутри себя поверхность разрыва, тогда имеем для первого слагаемого правой части (5.2) приближенное соотношение:

$$\int_{\Delta V}\frac{\partial A}{\partial t}dV \cong \Delta h \Delta S\frac{\partial A}{\partial t} \quad (5.3)$$

А для второго:

$$\oiint_\Sigma A(\vec{v}\vec{n})dS = \left(A_3\left(\vec{v}_3\vec{n}_3\right) + A_4\left(\vec{v}_4\vec{n}_4\right)\right)\Delta h\sqrt{\Delta S} + \left(A_1\left(\vec{v}_1\vec{n}_1\right) + A_2\left(\vec{v}_2\vec{n}_2\right)\right)\Delta S \quad (5.4)$$

Далее примем во внимание, что $\left(A_3 v_{n3} + A_4 v_{n4}\right) \cong \dfrac{\partial}{\partial S}\left(Av\right)\sqrt{\Delta S}$. Учтем, что $\left(\vec{v}_1\vec{n}_1\right) = -\left(\vec{v}_1\vec{n}\right) = v_{1n}$, поскольку $\vec{n}_1 = -\vec{n}$, а $\left(\vec{v}_2\vec{n}_2\right) = \left(\vec{v}_2\vec{n}\right) = v_{2n}$, поскольку $\vec{n}_2 = \vec{n}$. Тогда получим 3-ю вспомогательную формулу, соответствующую случаю, когда интегрирование в (5.1) происходит по индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва:

$$\lim_{\Delta V \to 0}\frac{1}{\Delta S}\frac{d}{dt}\int_V AdV = A_2 v_{2n} - A_1 v_{1n} \quad (5.5)$$

Применим эту формулу к законам динамики сплошной среды, записанным в интегральной форме, для того, чтобы получить соотношения между физическими характеристиками сплошной среды на поверхностях разрыва.

5.2. Непрерывность потока массы

Запишем закон сохранения массы для индивидуального объема

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = 0 \quad (5.6)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Используя 3-ю вспомогательную формулу в виде (5.5), сразу получим:

$$\rho_2 v_{n2} = \rho_1 v_{n1} \quad (5.7)$$

Это выражение представляет собой условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока массы.

5.3.Непрерывность потока импульса

Запишем закон сохранения импульса:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, v_i\, dV = \oiint_\Sigma \sigma_{ij} n_j dS + \int F_i dV \quad (5.8)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Применим 3-ю вспомогательную формулу (5.5). Тогда левая часть дает:

$$\rho_2 v_{2i} v_{n2} = \rho_1 v_{1i} v_{n1} \qquad (5.9)$$

Вычислим теперь величину $\lim\limits_{\Delta V\to 0}\dfrac{1}{\Delta S}\oiint\limits_{\Sigma}\sigma_{ij} n_j dS$, где Σ поверхность, содержащая внутри себя поверхность разрыва, получим:

$$\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta h\to 0}}\oiint_{\Sigma}\sigma_{ij} n_j = \sigma_{ij2} n_{j2} + \sigma_{ij1} n_{j1} = \sigma_{ij2} n_j - \sigma_{ij1} n_j \qquad (5.10)$$

Поскольку $n_{2j}=n_j$, $n_{1j}=-n_j$ (нормаль к Σ со стороны 1 направлена противоположно направлению нормали к поверхности разрыва). Примем во внимание, что:

$$\lim_{\substack{\Delta S\to 0\\ \Delta h\to 0}}\int_V F_i dV = 0 \qquad (5.11)$$

Окончательно, граничные условия, следующие из закона сохранения импульса, примут вид:

$$\left(\rho\, v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right)\Big|_2 = \left(\rho\, v_i v_n - \sigma_{ij} n_j\right)\Big|_1 \qquad (5.12)$$

Примем во внимание, что $v_n = v_j\, n_j$. Тогда граничное условие для импульса (5.12) ,будет иметь следующий вид:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho\, v_i v_j\right) n_j\Big|_1 = \left(\sigma_{ij} - \rho\, v_i v_j\right) n_j\Big|_2 \qquad (5.13)$$

Или, используя понятие тензора потока импульса, перепишем (5.13) в виде:

$$\Pi_{ij} n_j\Big|_1 = \Pi_{ij} n_j\Big|_2 \qquad (5.14)$$

где Π_{ij} – тензор потока импульса.

Выберем систему координат так, что $\vec{n} = (1,0,0)$, т.е. $n_1=1$; $n_2=0$; $n_3=0$. Тогда выражение для граничного условия (5.14) примет вид:

$$\left(\sigma_{ix} - \rho v_i v_x\right)\Big|_1 = \left(\sigma_{ix} - \rho v_i v_x\right)\Big|_2 \qquad (5.15)$$

Индекс x (или индекс 1) обозначает нормальную компоненту.

В идеальной жидкости или газе тензор поверхностных напряжений шаровой, т.е.$\sigma_{i1}=-p\delta_{i1}$. С учетом этого граничные условия (5.15) можно записать в виде двух соотношений, в первое из которых входит только нормальная компонента скорости:

$$\left[p + \rho v_1^2\right]_1 = \left[p + \rho v_1^2\right]_2 \text{ или } \left[p + \rho v_n^2\right]_1 = \left[p + \rho v_n^2\right]_2, \qquad (5.16)$$

где $v_1 \equiv v_n$ – нормальная компонента скорости, а во второе – тангенциальные компоненты:

$$\left.\begin{aligned}\left[\rho\, v_1 v_2\right]_1 &= \left[\rho\, v_1 v_2\right]_2\\ \left[\rho\, v_1 v_3\right]_1 &= \left[\rho\, v_1 v_3\right]_2\end{aligned}\right\} \quad \text{или} \quad \left[\rho\, v_n \vec{v}_\tau\right]_1 = \left[\rho\, v_n \vec{v}_\tau\right]_2 \qquad (5.17)$$

где $\vec{v}_\tau = (v_2, v_3)$ – тангенциальная компонента скорости.

5.4.Непрерывность потока энергии

Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\frac{v^2}{2} + u\right)dV = \int_V \rho\, F_i v_i dV + \oiint_{\Sigma}\sigma_{ij} v_i n_j dS + \int_V q^{(e)} dV + \oiint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS \qquad (5.18)$$

Применим этот закон к индивидуальному объему, содержащему внутри себя поверхность разрыва, который затем стянем в точку. Тогда, согласно третьей вспомогательной формуле:

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \frac{d}{dt} \int_V \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) dV = \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \left. v_n \right|_1^2 = \rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) \left. v_j n_j \right|_1^2 \tag{5.19}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oiint_{\Sigma} \sigma_{ij} v_i n_j dS = \left. \sigma_{ij} v_i n_j \right|_1^2 \tag{5.20}$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta S} \oiint_{\Sigma} Q_n^{(e)} dS = \left. Q_n^{(e)} \right|_1^2 = \left. Q_j^{(e)} n_j \right|_1^2 \tag{5.21}$$

Таким образом, закон сохранения потока энергии принимает вид:

$$\left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) v_j - \sigma_{ij} v_i - Q_j^{(e)} \right] \left. n_j \right|_1^2 = 0 \tag{5.22}$$

Если опять выбрать систему координат так, что $\vec{n} = (1,0,0)$, то выражение для закона сохранения потока энергии примет вид:

$$\left. \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) v_x - \sigma_{ix} v_i - Q_x^{(e)} \right] \right|_1^2 = 0 \tag{5.23}$$

Предположим, что по обе стороны от поверхности разрыва находится идеальная жидкость или идеальный газ, тогда $\sigma_{ix} = -p\delta_{ix}$. Будем также предполагать, что к поверхности раздела тепло не подводится ($Q_x^{(e)} = 0$), тогда получим условие непрерывности нормальной компоненты вектора потока энергии в виде:

$$\left[v_n \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) + p \right) \right]_1 = \left[v_n \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) + p \right) \right]_2 \tag{5.24}$$

Здесь $v_n \equiv v_1$ – нормальная скорость к поверхности раздела.

Итак, на разрыве должны выполняться следующие законы сохранения:

1. ***Сохранение потока массы***: $\left. \rho v_n \right|_1^2 = 0$
2. ***Сохранение потока импульса***: $\left. \left[\rho v_n^2 + p \right] \right|_1^2 = 0$, $\left. \rho v_n v_{\tau 1} \right|_1^2 = 0$, $\left. \rho v_n v_{\tau 2} \right|_1^2 = 0$
3. ***Сохранение потока энергии***: $\left. v_n \left(\rho \left(\frac{v^2}{2} + u \right) + p \right) \right|_1^2 = 0$

Определим граничные условия на разрыве для энтропии. Запишем второе начало термодинамики для индивидуального объема:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho S dV = \int \frac{q^e + q'}{T} dV \tag{5.25}$$

Заметим, что внутри разрыва может нарушаться предположение об идеальности газа, т.е. равенстве нулю нескомпенсированного тепла: $q' \neq 0$. Но тогда будет возникать скачок энтропии при переходе через разрыв. Как мы скоро увидим, это действительно может иметь место на поверхности разрыва.

5.5.Типы разрывов

1. Тангенциальный разрыв.

Пусть частицы не пересекают поверхность разрыва, т.е. нормальная скорость $v_{n1}=0$ и $v_{n2}=0$; при этом возможно $\rho_1 \neq \rho_2$. Тогда из непрерывности потока импульса следует, что $p_1=p_2$, а тангенциальные компоненты скорости $v_{\tau 1,2}$ произвольны и могут терпеть произвольные разрывы. Такой разрыв называется ***тангенциальным***.

2. Ударные волны.

Пусть $v_n \neq 0$. Тогда закон сохранения потока массы дает $\rho v_n \big|_1^2 = 0$. Из закона сохранения потока импульса следует, что

$$\rho v_n^2 + p\Big|_1^2 = 0 \tag{5.26}$$

а обе тангенциальные компоненты скорости непрерывны:

$$v_{\tau 1}\Big|_1^2 = 0; \quad v_{\tau 2}\Big|_1^2 = 0 \tag{5.27}$$

Из непрерывности потока энергии:

$$\rho v_n \left[\left(\frac{v_n^2 + v_{\tau 1}^2 + v_{\tau 2}^2}{2}\right) + u\right] + \frac{p}{\rho}\Bigg|_1^2 = 0 \tag{5.28}$$

следует, что:

$$u + \frac{v_n^2}{2} + \frac{p}{\rho}\Bigg|_1^2 = 0 \tag{5.29}$$

Такие разрывы называются ***ударными волнами.***
Заметим, что условия на поверхности разрыва записаны в неподвижной для разрыва системе отсчета (СО). Если мы перейдем в СО, в которой поверхность разрыва движется с некоторой скоростью – w, то мы должны будем заменить во всех граничных условиях v_n на $\bar{v}_n - w$, где $\bar{v}_n$ – нормальная скорость разрыва в новой СО.

5.6. Ударная адиабата (адиабата Гюгонио).

Будем рассматривать разрывы типа ударных волн. Поскольку в условия на разрыве не входит никакой скорости кроме v_n, то ее будем обозначать v, тогда получим условия на разрыве в виде:

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \tag{5.30}$$

$$\rho_1 v_1^2 + p_1 = \rho_2 v_2^2 + p_2 \tag{5.31}$$

$$\frac{v_1^2}{2} + u_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{v_2^2}{2} + u_2 + \frac{p_2}{\rho_2} \tag{5.32}$$

Уравнения (5.30)-(5.32), связывающие между собой параметры сжимаемого газа (жидкости) до разрыва и после него, представляют собой систему уравнений относительно шести величин, зная термодинамические параметры перед разрывом (например, плотность, давление) и задаваясь какой-нибудь величиной, характеризующей ударную волну, например, давлением за фронтом волны p_2, можно вычислить все остальные величины.

Введем обозначения $j = \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ – плотность потока массы и $V_{1,2}=1/\rho_{1,2}$ – удельные объемы. Тогда из (5.30)-(5.32) следует:

$$\frac{j^2}{\rho_1} + p_1 = \frac{j^2}{\rho_2} + p_2 \rightarrow j^2\left(V_1 - V_2\right) = p_2 - p_1 \tag{5.33}$$

$$\frac{j^2}{2\rho_1^2} + \frac{p_1}{\rho_1} + u_1 = \frac{j^2}{2\rho_2^2} + \frac{p_2}{\rho_2} + u_2 \quad \rightarrow \quad j^2\left(V_1^2 - V_2^2\right) = 2\left[p_2V_2 - p_1V_1 + u_2 - u_1\right] \tag{5.34}$$

Откуда с учетом введенного выше обозначения плотности потока массы, имеем:

$$\left(V_1 + V_2\right)\left(p_2 - p_1\right) = 2\left(p_2V_2 - p_1V_1 + u_2 - u_1\right) \tag{5.35}$$

$$p_2V_2 + p_2V_1 - p_1V_1 - p_1V_2 = 2p_2V_2 - 2p_1V_1 + 2\left(u_2 - u_1\right) \tag{5.36}$$

$$p_2\left(V_1 - V_2\right) + p_1\left(V_1 - V_2\right) = 2\left(u_2 - u_1\right) \tag{5.37}$$

Или

$$u_2 - u_1 = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)\left(V_1 - V_2\right) \tag{5.38}$$

Таким образом, получено соотношение, связывающее внутреннюю энергию газа (жидкости) с соответствующими значениями давлений и объемов до и после разрыва, откуда нетрудно получить связь между значениями давлений и объемов на ударной волне. Действительно, поскольку мы рассматриваем идеальную жидкость или газ, то внутренняя энергия определяется двумя параметрами, например, давлением и удельным объемом, т.е. $u=(p, V)$. Таким образом, мы имеем двухпараметрическое семейство кривых:

$$u\left(p_2, V_2\right) - u\left(p_1, V_1\right) = \frac{1}{2}\left(p_1 + p_2\right)\left(V_1 - V_2\right), \tag{5.39}$$

которые называются ***ударными адиабатами*** или ***адиабатами Гюгонио***, в отличие от адиабаты Пуассона (изоэнтропы), справедливой для адиабатического процесса в идеальном газе при непрерывном его движении. Соотношение (5.39) действительно соответствует адиабатам, поскольку не происходит передачи тепла ($q^e=0$) при переходе газа (жидкости) из состояния 1 в состояние 2. Но эти кривые отличаются от изоэнтроп, которые описывают состояние газа при непрерывном движении. Это двухпараметрическое семейство кривых: действительно, если задано p_1, V_1, то определяется кривая (p, V), проходящая через эту точку, согласно соотношению (5.39):

$$u\left(p, V\right) - u\left(p_1, V_1\right) = \frac{1}{2}\left(p + p_1\right)\left(V_1 - V\right) \tag{5.40}$$

Кривая (5.40) и кривая:

$$u(p,V)-u(p_2,V_2)=\frac{1}{2}(p+p_2)(V_2-V) \qquad (5.41)$$

различны, но в силу равенства (5.39) пересекаются в двух точках (p_1, V_1) и (p_2, V_2).

5.7.Скорость движения разрыва.

Скорость движения разрыва зависит от выбранной системы отсчета. Выберем такую СО, в которой газ до прохождения ударной волны покоится, т.е. $\overline{v}_1=0$. Если скорость разрыва $w>0$, то граничные условия (5.30), (5.31) примут вид:

$$-\rho_1 w=\rho_2(\overline{v}_2-w)\to w(\rho_2-\rho_1)=\rho_2\overline{v}_2, \qquad (5.42)$$

$$\rho_1 w^2+p_1=\rho_2(\overline{v}_2-w)^2+p_2. \qquad (5.43)$$

Отсюда следует, что $w=V_1\sqrt{\dfrac{p_2-p_1}{V_1-V_2}}$, а $\overline{v}_2=w\left(1-\dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)$. Смысл величин, входящих в формулы, следующий: w – скорость разрыва относительно невозмущенного газа; $\overline{v}_2$ – скорость газа за разрывом; $w-\overline{v}_2$ – скорость газа за разрывом относительно разрыва:

$$w-\overline{v}_2=w\frac{V_2}{V_1}=V_2\sqrt{\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}} \qquad (5.44)$$

Из этих формул следует, что, если $p_2>p_1$, то $V_1>V_2$, или $\rho_2>\rho_1$, т.е. после прохождения ударной волны растет плотность и давление. Такие ударные волны называются ***скачками уплотнения***.

Если $p_2<p_1$, то $\rho_2<\rho_1$, т.е. после прохождения ударной волны плотность и давление падают. Такие ударные волны называют ***скачками разрежения***.

Рассмотрим ударную адиабату. Исходя из только что сказанного, это убывающая функция $p(V)$. Рассмотрим две точки на адиабате Гюгонио (V_1, p_1) и (V_2, p_2). Проведем секущую через эти две точки:

$$tg\,\alpha=\frac{p_2-p_1}{V_1-V_2}, \text{ тогда } w=V_1\sqrt{tg\,\alpha} \qquad (5.45)$$

Если знаем параметры газа до скачка, то можем найти ударную адиабату по ее уравнению. Если задана скорость ударной волны w, по ней можно найти параметры после скачка.

5.8. Изменение энтропии при переходе через разрыв

Вычислим изменение энтропии газа при прохождении через разрыв. Пусть (V_1, p_1) – начальное соотношение газа до прохождения ударной волны; (V_2, p_2) – после ее прохождения. Будем рассматривать волну сжатия, т.е. случай, когда $V_2<V_1$. Рассмотрим обратимый процесс, переводящий газ из состояния 1 в 2 по адиабате Гюгонио. Запишем основное термодинамическое тождество:

$$TdS=du+pdV \qquad (5.46)$$

Проинтегрируем это тождество от состояния 1 до состояния 2:

$$\int_1^2 du=u_2-u_1=\frac{1}{2}(p_1+p_2)(V_1-V_2) \qquad (5.47)$$

Такое интегрирование применимо, поскольку внутренняя энергия является функцией состояния. Графически $u_2 - u_1$ представляет собой площадь трапеции $ABCD$ см. рис. 18. В то же время:

$$\int_1^2 pdV = -S_{TPA}, \qquad (5.48)$$

здесь S_{TPA} представляет собой площадь под кривой, задаваемой формулой адиабаты Гюгонио с обратным знаком, т.к. pdV величина отрицательная. Но тогда:

$$\int_1^2 TdS = S_{TPA} - S_{ABCD} \qquad (5.49)$$

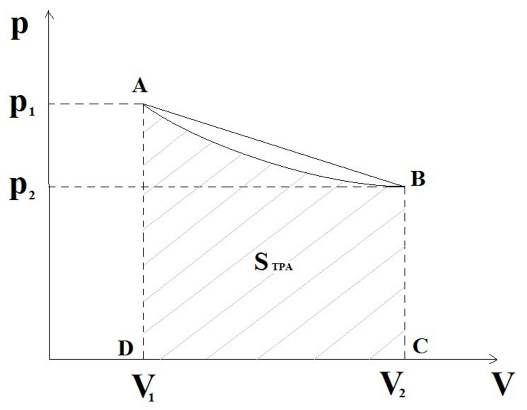


Рис. 18.

Если кривая вогнутая, то если $V_1>V_2$ (волна сжатия), то энтропия возрастает при переходе через скачок, если $V_1<V_2$ (волна разрежения), то энтропия убывает. Из второго закона термодинамики ясно, что при вогнутой форме адиабаты Гюгонио (как во всех нормальных веществах) могут существовать только ударные волны сжатия.

Здесь необходимо сделать одно замечание. При выводе формул предполагалось, что никаких источников энергии, кроме теплопередачи и механической энергии нет. Если же есть другие источники, например, внешняя энергия, то возможны и ударные волны разрежения. Примером таких волн является фронт горения.

5.9. Адиабата Гюгонио и адиабата Пуассона

Сравним адиабату Гюгонио и адиабату Пуассона. Пусть адиабата Гюгонио определяется начальными параметрами (V_1, p_1), адиабата Пуассона проходит через эту же точку. Уравнение адиабаты Гюгонио:

$$u(p,V) = u_1 + \frac{1}{2}(p + p_1)(V_1 - V) \qquad (5.50)$$

Уравнение адиабаты Пуассона:

$$S(p,V) = \text{const}, \qquad (5.51)$$

где S – энтропия.

Найдем значения первых производных для адиабат Пуассона $\left.\frac{dp}{dV}\right|_S (V_1)$ и Гюгонио $\left.\frac{dp}{dV}\right|_G (V_1)$.

1. *Адиабата Гюгонио*. Формула (5.50) представляет собой неявное задание функции $p(V)$. Дифференцируя по V, имеем:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|_G (V_1, p_1)\left.\frac{dp}{dV}\right|_G + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_G (V_1, p_1) = -p_1 \qquad (5.52)$$

отсюда

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_G (V_1) = -\frac{p_1 + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_G (V_1, p_1)}{\left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|_G (V_1, p_1)} \tag{5.53}$$

2. *Адиабата Пуассона*. Заметим, что в двухпараметрической среде можно представить внутреннюю энергию как:

$$u=u(p,V) \tag{5.54}$$

Найдем $\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_S (V_1, p_1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_S = \left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|(V_1, p_1)\left.\frac{dp}{dV}\right|_S (V_1) + \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_S (V_1, p_1) \tag{5.55}$$

Из второго закона термодинамики имеем:

$$du=TdS-pdV \tag{5.56}$$

Из него следует:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_S = -p_1 \tag{5.57}$$

т.е. для адиабаты Пуассона имеем:

$$\left.\frac{dp}{dV}\right|_S (V_1) = \frac{-p_1 - \left.\frac{\partial u}{\partial V}\right|_S (V_1, p_1)}{\left.\frac{\partial u}{\partial p}\right|(V_1, p_1)} \tag{5.58}$$

Т.е. адиабаты Пуассона и Гюгонио, проведенные через точку (V_1, p_1), имеют общую касательную. Отсюда можно получить ряд следствий.

1.По определению квадрат скорости звука

$$C^2 = \left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S \tag{5.59}$$

Но

$$\left.\frac{\partial p}{\partial \rho}\right|_s = \left.\frac{\partial p}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \rho}\right|_s = -\frac{1}{\rho^2}\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_s = -V^2\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_s \tag{5.60}$$

Таким образом, на адиабате Пуассона:

$$C_1^2 = V_1^2\left.\frac{dp}{dV}\right|_S (V_1) \tag{5.61}$$

Следовательно, наклон касательной к адиабате Гюгонио в точке (V_1, p_1) определяет скорость звука в среде 1 (до скачка).

2.В то же время мы видели, что скорость скачка относительно среды 1 (перед скачком) равна:

$$w^2 = V_1^2 \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \tag{5.62}$$

$C_1<w$, т.е. скачок движется со сверхзвуковой скоростью. Именно поэтому можно считать, что среда перед скачком не возмущена. Возмущения движутся со скоростью C_1, а скачок – со скоростью $w>C_1$.

Определим теперь скорость газа за скачком. Пусть адиабата 1 – это адиабата Гюгонио с начальной точкой (p_1, V_1); (p_2, V_2) – это параметры газа после скачка. Проведем адиабату 2 с начальным состоянием в точке (p_2, V_2) и продлим ее формально в нефизическую область $V>V_2$. Тогда она обязательно пересечет адиабату 1 в точке (p_1, V_1) (это следует из уравнения адиабаты Гюгонио). Но тогда скорость потока газа за разрывом относительно разрыва:

$$w - \bar{v}_2 = V_2 \sqrt{\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2}} = V_2 \sqrt{tg\, \alpha} \tag{5.63}$$

а скорость звука за разрывом:

$$C_2 = V_2 \sqrt{tg\, \beta_2} \tag{5.64}$$

Из вогнутости адиабаты Гюгонио ясно, что tg $\alpha <$ tg β, т.е. скорость газа относительно разрыва меньше скорости звука в среде 2.

3.Если перепад параметров при переходе через разрыв мал (слабый разрыв), то:

$$\frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} \cong -\left.\frac{dp}{dV}\right|_{V_1} \tag{5.65}$$

т.е. $w^2 = C_1^2$, т.е. слабый разрыв движется со скоростью звука.

5.10. Адиабата Гюгонио совершенного газа

В совершенном газе внутренняя энергия:

$$u = \frac{C_V}{\mu} T = \frac{C_V}{R} pV = \frac{pV}{\gamma - 1} \tag{5.66}$$

Формула для адиабаты Гюгонио:

$$\frac{pV}{\gamma - 1} - \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1} = \frac{1}{2}(p_1 + p)(V_1 - V) \tag{5.67}$$

Разделим обе части на $p_1 V_1$:

$$\left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{V}{V_1}\right) = \frac{\gamma - 1}{2}\left(\frac{p}{p_1} + 1\right)\left(1 - \frac{V}{V_1}\right) + 1 \tag{5.68}$$

Выразим p/p_1 через V/V_1, получим:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(\gamma + 1) - \frac{V}{V_1}(\gamma - 1)}{\frac{V}{V_1}(\gamma + 1) - (\gamma - 1)} \tag{5.69}$$

6. Простые волны

При рассмотрении малых возмущений идеального газа мы показали, что возмущения всех гидродинамических величин удовлетворяют волновому уравнению, например, возмущения скорости:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0 \tag{6.1}$$

Решением этого уравнения являются бегущие волны:

$$u_1 = f_1(x - c_0 t) + f_2(x + c_0 t) \tag{6.2}$$

Пусть имеется решение в виде одной бегущей волны $u_1 = f_1\,(x - c_0 t)$. Но тогда все величины будут функциями $(x - c_0 t)$. А это, в свою очередь, значит, что все гидродинамические величины являются функциями друг друга, то есть: $\rho_1 = \rho\,(u_1)$, $p_1 = p(u_1)$ и т.д. Если мы будем рассматривать возмущения конечной амплитуды, то они не будут удовлетворять такому простому уравнению, однако в этом случае можно пробовать искать решение одномерных уравнений гидродинамики в виде, когда различные величины являются функциями друг друга, т.е. $\rho = \rho\,(u)$, $p = p(u)$ и т.д.

Система уравнений динамики жидкости для одномерных течений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \dfrac{\partial u}{\partial x} + u \dfrac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ p = p(\rho) \end{cases} \tag{6.3}$$

Пусть все величины являются функциями u. Тогда система примет вид:

$$\frac{d\rho}{du}\frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{d\rho}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Эта система совместна, если детерминант ее равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{d\rho}{du} & \rho + u\dfrac{d\rho}{du} \\ 1 & u + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{d\rho}{du}\dfrac{dp}{d\rho} \end{vmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

$$\frac{d\rho}{du}u+\frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\frac{dp}{d\rho}-\rho-u\frac{d\rho}{du}=0$$

В результате получим следующее уравнение:

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\frac{1}{\rho^2}\frac{dp}{d\rho}=1 \qquad (6.6)$$

Выражение (6.6) дает возможность связать различные величины в волне. Кроме того, оно входит в уравнение для u:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u+\frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{d\rho}{du}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (6.7)$$

Подставляя решение уравнения (6.6) в виде $\frac{d\rho}{du}=\pm\rho\sqrt{\frac{d\rho}{dp}}$, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\pm\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (6.8)$$

Поскольку все гидродинамические величины являются функциями друг друга, то уравнение (6.8) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\left(u\pm c(u)\right)\frac{\partial u}{\partial x}=0, \qquad (6.9)$$

где $c=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ - локальная скорость звука, которая является функцией u.

Эту функцию можно легко найти из (6.6):

$$\frac{du}{d\rho}=\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad u=\pm\int\frac{d\rho}{\rho}\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (6.10)$$

Отсюда можно найти $u=u(\rho)$, $p=p(\rho)$ - это условие адиабатичности процесса. Можно найти далее $c(\rho)$ и выразить $\rho=\rho(u)$.

Проделаем эту процедуру для идеального газа с постоянной теплоемкостью. Уравнение состояния такого газа $p=A\rho^{\gamma}$, где A – константа, тогда:

$$\frac{du}{d\rho}=\pm\frac{1}{\rho}\sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \qquad (6.11)$$

Интегрируя (6.11), получим:

$$u=\pm\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-3}{2}}+C_1 \qquad (6.12)$$

Константу C_1 можно найти из условия, что в отсутствие возмущений $u = 0$ при $\rho = \rho_0$, тогда:

$$u = \pm\frac{2}{\gamma-1}\sqrt{A\gamma}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) \qquad (6.13)$$

Скорость звука:

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}} = \sqrt{A\gamma}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \qquad (6.14)$$

Сравнивая эти формулы (6.13) и (6.14), легко видеть, что:

$$u = \pm\frac{2}{\gamma-1}\left(C - C_0\right) \qquad (6.15)$$

отсюда для скорости звука получим

$$C = C_0 \pm \frac{\gamma-1}{2}u \qquad (6.16)$$

Где C_0 – скорость звука при равновесных параметрах, C – локальное значение скорости звука.

Входящая в уравнение для u комбинация может быть выражена следующим образом:

$$u \pm C(u) = \frac{\gamma+1}{2}u \pm C_0 \qquad (6.17)$$

Подставляя (6.17) в (6.8), получим, что уравнение для u в идеальном газе принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(\frac{\gamma+1}{2}u \pm C_0\right)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (6.18)$$

Найдем теперь решение уравнения (6.9) для u. Заметим, что $u=u(x,t)$.

Найдем $\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_u$ – значение производной $\frac{\partial x}{\partial t}$ при $u=const$, в этом случае $0 = \frac{\partial u}{\partial x}\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_u + \frac{\partial u}{\partial t}$.

Сравнивая это выражение с уравнением (6.9), легко видеть, что:

$$\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_u = u \pm c(u) \qquad (6.19)$$

Выражение (6.19) описывает характеристики уравнения для u. На характеристиках величина u сохраняется. Это значит, что решение можно легко записать в виде:

$$x = x_0(u) + (u \pm c(u))t\,, \qquad (6.20)$$

здесь $x_0(u)$ определяется начальными и граничными условиями.

Полученное решение называется простой волной. Это точное решение уравнений идеальной гидродинамики. Оно описывает изэнтропическое течение газа без потерь. Поскольку в такой волне все гидродинамические величины являются функциями друг друга, это означает, что все они сохраняются на характеристиках.

Исследуем качественно, как ведет себя решение (6.20). Рассмотрим волну, бегущую вправо:

$$x = x_0(u) + (u + c(u))t \tag{6.21}$$

Для идеального газа:

$$x = x_0(u) + \left(\frac{\gamma+1}{2}u + c_0\right)t \tag{6.22}$$

$$u = \frac{2\sqrt{A\gamma}}{\gamma-1}\left(\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} - \rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}}\right) \to \rho = \left(\rho_0^{\frac{\gamma-1}{2}} + \frac{(\gamma-1)u}{2\sqrt{A\gamma}}\right)^{2/(\gamma-1)}$$

ρ – растущая функция u.

Если u больше (ρ больше), то скорость распределения возмущения больше.

Рассмотрим эволюцию возмущения в СО, бегущей со скоростью c_0. При этом фронт сжатия укручается, а фронт разрежения растягивается. Наконец, на фронте сжатия образуется “перехлест” (неоднозначность). Это решение не имеет физического смысла. Действительно, не может быть в одной точке в один момент времени 3 значения скорости. Это означает, на самом деле, что решение в виде простой волны перестает существовать, а на фронте сжатия образуется разрыв.

Точка, в которой нарушается однозначность функции $u(x)$ – это та точка, где $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_t = \infty$ или $\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_t = 0$. Для идеального газа из (6.22) получаем:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \dot{x}_0(u) + \frac{\gamma+1}{2}t = 0,\ t = -\frac{2\dot{x}_0(u)}{\gamma+1} \tag{6.23}$$

Надо определить, когда $\frac{\partial x}{\partial u}$ обращается в 0 впервые, т.е. когда $\dot{x}_0(u)$ минимально. Надо найти точку экстремума функции $\dot{x}_0(u)$, для этого надо приравнять нулю ее производную $\ddot{x}_0(u) = 0$, отсюда определяется u, а далее и t.

Если $u(x)$ задано в виде импульса, то $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_t$ максимально, а $\frac{\partial x}{\partial u}$ минимально на краю, т.е. в точке, где u=0. Таким образом, время образования разрыва:

$$t = -\frac{2\dot{x}_0(0)}{\gamma+1} \tag{6.24}$$

6.1. Инварианты Римана и характеристики

Сделаем ряд преобразований с уравнениями гидродинамики:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ p=p(\rho) \end{cases} \tag{6.25}$$

Подставим $p=p(\rho)$, с учетом $c^2=\left.\dfrac{\partial p}{\partial \rho}\right|_S$ имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{1}{\rho}c^2\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases} \tag{6.26}$$

Последнее уравнение умножим на $\dfrac{c}{\rho}$ для уравнивания размерностей. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+u\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{c^2}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial x}=0 \\ \dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+u\dfrac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \end{cases} \tag{6.27}$$

Сложим эти уравнения и вычтем. Получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u+c)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+(u+c)\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)=0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}+(u-c)\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{c}{\rho}\left(\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+(u-c)\dfrac{\partial \rho}{\partial x}\right)=0 \end{cases} \tag{6.28}$$

Введем две новые функции $J_\pm = u \pm \int \dfrac{c\,d\rho}{\rho}$. В них не входят явно x и t, а только u и ρ.

Тогда из 1-го уравнения $\dfrac{\partial J_+}{\partial t}+(u+c)\dfrac{\partial J_+}{\partial x}=0$, а из второго $\dfrac{\partial J_-}{\partial t}+(u-c)\dfrac{\partial J_-}{\partial x}=0$

Отсюда видно, что величина J_+ сохраняется на характеристике $\dfrac{dx}{dt}=u+c$, а J_- – на характеристике $\dfrac{dx}{dt}=u-c$ (они называются характеристиками c_+ и c_-). J_+ и J_- называются инвариантами Римана. Введение этих величин, по-существу, означает введение новых переменных вместо u, ρ. Для идеального газа очевидно, что:

$$p = A\rho^{\gamma};\quad c=\sqrt{A\gamma}\;\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} \tag{6.29}$$

Тогда:

$$\int \frac{dp}{\rho c} = \int \frac{\gamma A \rho^{\gamma-1} d\rho}{\sqrt{\gamma A}\rho^{\frac{\gamma+1}{2}}} = \sqrt{\gamma A}\int \rho^{\frac{\gamma-3}{2}} d\rho = \sqrt{\gamma A}\frac{2}{\gamma-1}\rho^{\frac{\gamma-1}{2}} = \frac{2c}{\gamma-1} \qquad (6.30)$$

Складывая и вычитая выражения для инвариантов Римана, получим:

$$c = \frac{J_+ - J_-}{4}(\gamma-1) \qquad (6.31)$$

$$u = \frac{J_+ + J_-}{2} \qquad (6.32)$$

$$\begin{cases} u + c = \dfrac{\gamma+1}{4}J_+ + \dfrac{3-\gamma}{4}J_- \\ u - c = \dfrac{3-\gamma}{4}J_- + \dfrac{\gamma+1}{4}J_+ \end{cases} \qquad (6.33)$$

Тогда уравнения для характеристик, выраженных через инварианты:

$$\begin{aligned} C_+ &: \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma+1}{4}J_+ + \frac{3-\gamma}{4}J_- \\ C_- &: \frac{dx}{dt} = \frac{3-\gamma}{4}J_- + \frac{\gamma+1}{4}J_+ \end{aligned} \qquad (6.34)$$

(характеристики зависят только от J_+ и J_- и не зависят от x и t, поскольку u, p, ρ – функции J_+ и J_-).

Предположим, что J_- постоянно. Но тогда все гидродинамические величины являются функциями J_+, или выражаются друг через друга. Т.е. мы имеем простую волну, характеристики которой C_+ – прямые линии.

Рассмотрим, как можно реализовать простую волну. Пусть имеется поршень в трубе цилиндрического сечения, который закрывает ее слева. Справа труба настолько длинная, что ее можно считать бесконечной.

При $t = 0$ координата поршня $x = 0$. Пусть в начальный момент времени поршень начинает двигаться в отрицательном направлении оси x, ускоряясь.

Рассмотрим, какое при этом возникнет движение газа. Его удобно описывать с помощью характеристик. Изобразим характеристики на плоскости (x, t) (см. рис.19). При $t < 0$ (до начала движения поршня) $u = 0$, и характеристики представляют собой прямые $\frac{dx}{dt} = \pm c_0$, где c_0 - скорость звука в невозмущенном газе. OA – это характеристика $x = c_0 t$. Она описывает движение “головы” возмущения газа. При $t > 0$ при движении поршня возникают возмущения в газе, которые двигаются по характеристикам, которые пересекают траекторию поршня, и в момент τ проходят через точку ($x(\tau)$, τ). Т.е. пересекают траекторию поршня на плоскости (x, t).

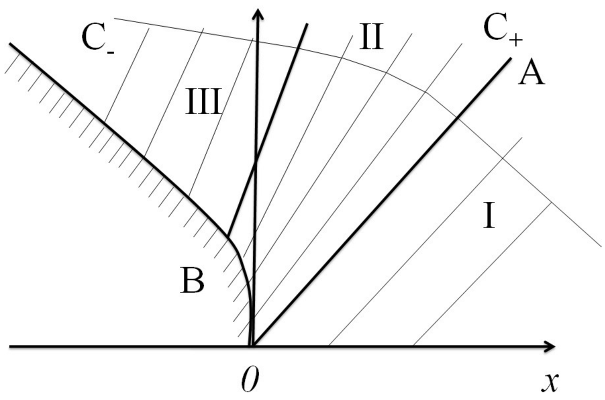


Рис. 19

Эти характеристики задаются уравнениями $\frac{dx}{dt} = u \pm c$, где вблизи поршня u – скорость газа, которая равна скорости поршня, а c – местная скорость звука. Из этих двух характеристик в физическом пространстве (при $t > \tau$) лежит только характеристики $\frac{dx}{dt} = u + c(u < 0)$. На поршень могут приходить возмущения по характеристикам $\frac{dx}{dt} = u - c$ (при $t < \tau$). При этом на этих характеристиках сохраняется инвариант Римана J_-. Однако все эти характеристики начинаются на полупрямой $x(t = 0)$. Но в начальный момент времени возмущение отсутствовало. Значит, J_- – это постоянная величина, соответствующая $u = 0$. Но, как мы видели, в этом случае возмущение, распространяющееся по характеристикам $\frac{dx}{dt} = u - c$ от поршня, представляет собой простую волну.

Итак, из рис. 20 видно, что при $x > c_0 t$ возмущений нет, а при $x(\tau) < x < c_0 t$ с характеристикой $(u + c) = dx/dt$ возмущение описывается простой волной. Эту функцию можно найти. Итак, $\frac{dx}{dt} = u + c$, отсюда уравнение простой волны:

$$x = (u + c)t + x_0(u) \tag{6.35}$$

$x_0(u)$ – произвольная функция, определяемая движением поршня. Найдем ее:
На поршне в любой момент $t = \tau$:

$$x = x(t)\big|_{t=\tau} \qquad u = \dot{x}(t)\big|_{t=\tau}$$

$$\begin{cases} x(\tau) = (u + c)\tau + x_0(u) \\ u = \dot{x}(\tau) \end{cases} \tag{6.36}$$

$x(\tau)$ – является известной функцией, $\dot{x}(\tau)$ – также известна.

Эта запись представляет собой задание неизвестной произвольной функции $x_0(u)$ в параметрическом виде (τ – параметр), т.е.:

$$\begin{cases} x_0(u) = x(\tau) - (\dot{x}(\tau) + c)\tau \\ u = \dot{x}(\tau) \end{cases} \tag{6.37}$$

Рассмотрим пример. Пусть задан закон движения поршня:

$$\begin{cases} x_n = -Ut - UT\left(e^{-\frac{t}{T}} - 1\right) \\ \dot{x}_n = U\left(e^{-\frac{t}{T}} - 1\right) \end{cases} \tag{6.38}$$

Тогда для $x_0\,(u)$ получим:

$$x_0\left(u\right) = -UT\left(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1\right) - U\tau - \left(u + c\right)\tau \tag{6.39}$$

где

$$u = U\left(e^{-\frac{\tau}{T}} - 1\right),\ \tau = -T\ln\left(\frac{u}{U} + 1\right) \tag{6.40}$$

Таким образом, получим:

$$x_0\left(u\right) = -uT + UT\ln\left(\frac{u}{U} + 1\right) + \left(u + c\right)T\ln\left(\frac{u}{U} + 1\right), \tag{6.41}$$

$$x = \left(u + c\right)t - uT + \left(U + u + c\right)T\ln\left(\frac{u}{U} + 1\right). \tag{6.42}$$

Итак, при $x > c_0 t,\ \ u = 0$, а при $x_n(\ t\ ) < x < c_0\ t$ задается неявной формулой (6.42)

Посмотрим, как качественно выглядит это решение. Траектория поршня при достаточно больших временах выходит на прямую $x = UT - Ut$. Т.е. скорость на поршне $u = -U$. Но тогда все характеристики, выходящие от траектории поршня, имеют одинаковый наклон, поскольку:

$$x = (c - U)\ t + x_0 \tag{6.43}$$

Будем считать, что такой вид имеют характеристики, начиная от точки В (на рис. 19). А между точками О и В характеристики “расходятся”.

Допустим, что закон движения поршня $x = Ut$ при $t > 0$, т.е. его скорость скачком меняется от 0 до $-U$.

Удобно анализировать решение с помощью плоскости характеристик (x,t) (рис.20)

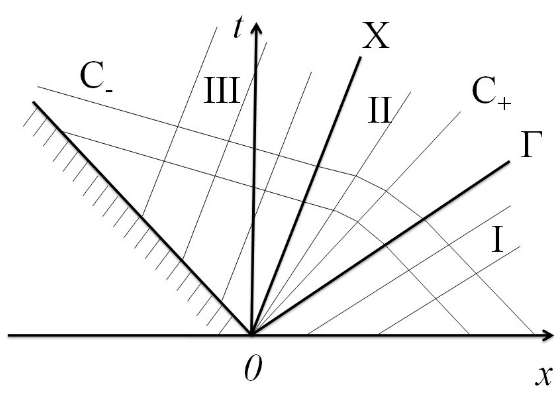


Рис. 20

Для центрированной волны при t>0:

$$u = \begin{cases} 0 \quad I; \quad x > c_0 t \\ x = \left(c(u) + u\right)t; \quad II \quad c_0 t < x < \left(c(-U) - U\right)t \\ U \quad III \quad x < \left(c(-U) - U\right)t \end{cases}$$

Рассмотрим движение газа в этом случае. (рис.20)

Эта картина может быть получена из предыдущей, если переходную область стянуть в точку. В переходной области лежат характеристики $x = (c\ (u) + u)t,$ у которых $c(-U) - U < c(u) + u < c_0$. Поскольку характеристики проходят через начало координат, то такая волна называется центрированной. В этом случае u является функцией только x/t. Это решение является автомодельным и представляет собой частный случай простой волны.

Для идеального газа с постоянной теплоемкостью:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma}, \quad c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = c_0^2\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma-1} \to \rho = \rho_0\left(1-\frac{(\gamma-1)u}{2c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}, \quad p = p_0\left(1-\frac{(\gamma-1)u}{2c_0}\right)^{2/(\gamma-1)}$$

Подставляя в эти выражения значения скорости u, найденной из условия постоянства Инварианта J_- $c = c_0 - \frac{\gamma-1}{2}u$ и решения для центрированной волны $x = (u + c)t$:

$$u = \frac{2}{\gamma+1}\left(c_0 - \frac{x}{t}\right) \qquad (6.44)$$

Таким образом, можно сделать вывод, что скорость в центрированной волне зависит от координаты x линейно см. рис. 21.

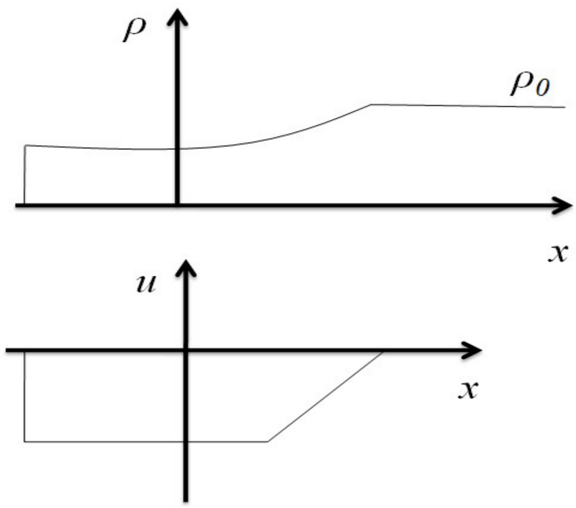


Рис. 21

Рассмотрим теперь, каким будет движение газа в том случае, если поршень вдвигается в трубу. Пусть скорость поршня $u < c_0$. Предположим, что сначала поршень ускоряется, и его скорость выходит на постоянное значение $U < c_0$. Характеристики, отходящие от траектории поршня в физическом пространстве - $dx/dt = (u + c)$, имеют наклон больше, чем c_0, поскольку $c(u) > c_0$ (газ сжат) и $u > 0$.Это значит, что характеристики в некоторой точке пересекутся и в этом случае образуется разрыв и ударная волна. Таким образом, можно сделать вывод, что решение в виде простой волны будет существовать до тех пор, пока не образуется разрыв.

7. Гидродинамика несжимаемой жидкости

Изучение неодномерных течений идеальной жидкости или газа представляет значительные трудности. Основным допущением, сыгравшим важную роль при описании практически важных задач, явилось два предположения. Во-первых, предположение о несжимаемости и, во-вторых, – об отсутствии в движущейся идеальной несжимаемой жидкости завихренности, т.е. $\Omega = rot\vec{v} = 0$. Обсудим каждое из этих предположений.

По определению жидкость называется несжимаемой, если при движении сохраняется индивидуальный объем:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V dv = 0 \tag{7.1}$$

Применим первую вспомогательную формулу $\frac{d}{dt}\int\limits_V A dv = \int\limits_V \left(\frac{\partial A}{\partial t} + div\, A\vec{v}\right) dv$ к выражению (7.1). В нашем случае A = 1, т.е. $\int\limits_V div\,\vec{v} = 0$. Тогда условие несжимаемости примет следующий вид:

$$div\ \vec{v} = 0 \tag{7.2}$$

Уравнение сохранения массы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\rho + \rho div \vec{v} = 0 \tag{7.3}$$

С учетом (7.2) из (7.3) получим:

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{7.4}$$

Т.е. плотность жидкой частицы сохраняется. Запишем систему уравнений гидродинамики несжимаемой жидкости:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\vec{v} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \vec{p}}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla)\rho = 0 \\ div\ \vec{v} = 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

Условие несжимаемости (7.2) играет роль уравнения состояния. Действительно, как мы только что видели, следствием выражения $div\ \vec{v} = 0$ является сохранение плотности индивидуальной частицы. А это означает, что $dp\,/d\rho = \infty$ – скорость звука в несжимаемой жидкости, т.е. рассматриваются процессы, имеющие такие характерные масштабы по пространству L, времени T и скорости v, что $L\,/\,T,\ v << C$.

Чтобы полностью поставить задачу, необходимо задать граничные и начальные условия. Можно представить себе 2 типа граничных условий для решения задачи: граничные условия на разрыве между двумя несжимаемыми жидкостями и граничные условия на поверхности твердого тела.

1. Граничные условия на разрыве. В несжимаемой жидкости может быть только тангенциальный разрыв. Ударные волны невозможны, так как они имеют скорость больше скорости звука, а в несжимаемой жидкости она равна бесконечности.

Пусть $S(\vec{r},t)$ – граница раздела, которая вообще говоря, неизвестна.

Граничные условия включают в себя:

1.1. **Кинематическое граничное условие или граничное условие не протекания:**

$$v_{1n}\big|_S = U_n\big|_S \tag{7.6}$$

т.е. есть дополнительно неизвестная функция, для которой с другой стороны от разрыва выполняется соотношение:

$$v_{2n}\big|_S = U_n\big|_S, \tag{7.7}$$

где U_n – это скорость движения границы раздела.

1.2. **Динамическое граничное условие:**

$$p_1\big|_S = p_2\big|_S \tag{7.8}$$

2. Граничные условия на поверхности твердого тела. Предположим теперь, что граница известна – это поверхность твердого тела *S*, т.е.

$$v_n\big|_S = U_n\big|_S, \tag{7.9}$$

где U_n – нормальная проекция скорости движения твердого тела. Больше граничных условий не требуется, так как поверхность *S* задана.

Покажем теперь, что для несжимаемой жидкости условие потенциальности может быть выполнено только в случае однородной жидкости (ρ = *const*). Запишем уравнение Эйлера:

$$\vec{v}_t + (\vec{v},\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g}, \tag{7.10}$$

Действительно, предположим, что $rot\vec{v} = 0$. Тогда из уравнения Эйлера можно получить следующее выражение:

$$[\nabla p, \nabla\rho] = 0, \tag{7.11}$$

Полученное выражение (7.11) означает, что $\rho = \rho\,(\,p\,)$, т.е. процесс баротропный. Но для каждой жидкой частицы $\rho\ = const$, поскольку жидкость несжимаема, т.е. $\dfrac{d\rho}{dp} = 0$, т.е. $\rho\ = const$ везде и, следовательно, жидкость однородна.
С учетом того, что для потенциального течения по определению можно ввести потенциал скорости φ, связанный со скоростью соотношением $\vec{v} = \nabla\varphi$, уравнение Эйлера примет вид:

$$\frac{\partial\,\nabla\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\left(\left|\nabla\varphi\right|^2\right) + \frac{1}{\rho}\nabla p = \vec{g} \tag{7.12}$$

Отсюда получим, что $\nabla\left(\varphi_{\,t} + \dfrac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 + \dfrac{p}{\rho} + gz\right) = 0$, если ось oz направлена вверх.

Интегрируя полученное соотношение, получим:

$$\varphi_{\,t} + \frac{1}{2}\left|\nabla\varphi\right|^2 + \frac{p}{\rho} + gz = F(t). \tag{7.13}$$

Функция F (t) может быть положена равной 0 без ограничения общности, поскольку можно сделать замену переменных:

$$\varphi = \varphi' + \int F(t)dt\,, \tag{7.14}$$

которая не влияет на поле скорости $\vec{v} = \nabla\varphi = \nabla\varphi'$. Из уравнения (7.13) сразу можно найти давление на поверхности твердого тела.

Итак, мы получили 1-й интеграл уравнения Эйлера для потенциального движения – **интеграл Коши-Лагранжа для нестационарного потенциального движения несжимаемой жидкости** (см. выражение (7.13)).

При $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ из (7.13) следует **формула Бернулли**:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = const \tag{7.15}$$

Поскольку условие несжимаемости содержит только скорость $\vec{v}$, то оно дает полную кинематическую характеристику движения сплошной среды в эйлеровом описании. Отсюда ясно, что условия несжимаемости часто достаточно, чтобы определить, как происходит движение жидкости, т.е. чтобы определить поле скоростей. Далее из уравнения сохранения массы можно найти плотность, а из уравнения Эйлера – давление.

7.1. Потенциальное течение несжимаемой жидкости

Пусть движение жидкости таково, что везде выполняется условие $rot\,\vec{v} = 0$. Найдем решение уравнений гидродинамики для такого случая. Вопрос о реализации этого условия в любой другой момент времени обсудим позже.

Если $\Omega = rot\vec{v} = 0$, то можно ввести потенциал скорости φ, так что $\vec{v} = \nabla\varphi$. Но тогда уравнение несжимаемости (7.2) дает:

$$\Delta\varphi = 0 \tag{7.16}$$

Таким образом, потенциал скорости есть гармоническая функция. Зададим граничные условия, необходимые для решения уравнения Лапласа (7.16).

1.На поверхности твердого тела эти условия имеют вид:

$$v_n\big|_S = U_n \text{ или } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = U_n \tag{7.17}$$

Распределение давления по поверхности S может быть найдено из уравнения Эйлера.

2.Аналогично можно задать граничные условия на границе раздела двух жидкостей, в которых движение потенциально:

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_S = U_n \,, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_S = U_n \,, \; p_1 = p_2, \tag{7.18}$$

где p_1 и p_2 определяются из формулы Коши-Лагранжа, а U_n выражается через уравнение поверхности S.

Рассмотрим задачу об обтекании твердого тела. Задача состоит в том, чтобы найти распределение скорости в жидкости, когда в ней движется твердое тело. Потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа (7.16) с граничным условием непротекания на границе твердого тела $\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = U_n$ – и с условием спадания возмущений при удалении от тела, т.е. φ=0 при $\vec{r}\to\infty$, где $\vec{r}$ – радиус-вектор системы координат, проходящей через центр тела.

Эта задача может быть сформулирована также и в системе отсчета, в которой тело покоится. Тогда на поверхности тела должно выполняться условие:

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{7.19}$$

А при $\vec{r}\to\infty$, скорость должна быть противоположна скорости набегающего потока, т.е. $\vec{v} = -\vec{U}, \quad \vec{v}$ – скорость движения тела в 1-й задаче.

В силу линейности уравнения Лапласа (8.7) его решение, убывающее при $\vec{r}\to\infty$, можно искать в виде разложения по мультиполям:

$$\varphi = \frac{a}{r} + \left(\vec{A},\nabla\right)\frac{1}{r} + \ldots = -\frac{a}{r} - \frac{\left(\vec{A}\,\vec{r}_0\right)}{r^2} + \ldots \tag{7.20}$$

где $\vec{r}_0$ – единичный вектор в направлении $\vec{r}$.

Отсюда можно найти поле скорости:

$$\vec{v} = \nabla\varphi = +\frac{a\,\vec{r}_0}{r^2} - \nabla\frac{\left(\vec{A}\,\vec{r}\right)}{r^3} + \ldots = -\frac{a\,\vec{r}_0}{r^2} + \frac{3\left(\vec{A}\,\vec{r}_0\right)\vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} \tag{7.21}$$

1-е слагаемое в правой части выражения (7.21) описывает монопольное распределение, 2-е – дипольное распределение поля скорости.

Монополь. Рассмотрим смысл первого слагаемого в (7.21).Скорость течения, определяемого формулой (7.21), направлена по радиусу.
Проведем большую сферу радиуса R и вычислим поток массы через нее:

$$\iint_S \rho\, v_n dS = 4\pi\, R^2\left(-\frac{a}{R^2}\right) = -4\pi\, a \tag{7.22}$$

Таким образом, монопольный член в (7.20) описывает источник массы. В обычных условиях потенциального обтекания твердого тела источник массы отсутствует, т.е. $a = 0$. Следовательно, поле скорости на больших расстояниях от тела описывается дипольным источником:

$$\vec{v} = \frac{3\left(\vec{A}\,\vec{r}_0\right)\vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} \tag{7.23}$$

В системе отсчета, где тело покоится, имеем для скорости потенциального обтекания:

$$\vec{u} = \vec{v} - \vec{U} = \frac{3\left(\vec{A}\,\vec{r}_0\right)\vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U} \tag{7.24}$$

Дипольный момент A, а также коэффициенты при высших мультиполях, определяются из граничных условий.

Сила, действующая на тело при потенциальном обтекании. Будем рассматривать движение жидкости в СО, в которой тело покоится. Окружим тело сферической поверхностью радиуса R, расположенной достаточно далеко от него. Применим метод контрольных поверхностей к двусвязной области, ограниченной поверхностью тела S, имеющей площадь Σ_T, и поверхностью Σ_R.
Закон сохранения импульса

$$\iint_{\Sigma_R}\left(p\vec{n} + \rho\, v_n\vec{v}\right)dS + \iint_{\Sigma_T} p\vec{n}\; dS = 0 \tag{7.25}$$

в этой системе отсчета $v_n\big|_S = 0$.
Сила, действующая на жидкость со стороны тела на поверхности S, равна: $\vec{F}_{ж\leftarrow т} = -\iint_{\Sigma} p\vec{n}\; dS = -\vec{F}_{т\leftarrow ж}$ – по 3-ему закону Ньютона.

Таким образом, сила, действующая на тело, со стороны жидкости, определяется соотношением:

$$\vec{F}_{T\leftarrow ж} = -\iint_{\Sigma_R}\left(p\vec{r}_0 + \rho\, u_r\vec{v}\right)dS\,, \tag{7.26}$$

Достаточно далеко поле обтекания — это поле диполя, поэтому входящая в (7.26) скорость определяется формулой:

$$\vec{u} = \frac{3\left(\vec{A}\,\vec{r}_0\right)\vec{r}_0 - \vec{A}}{r^3} - \vec{U} = \vec{v} - \vec{U} \qquad (7.27)$$

Давление при этом можно найти по формуле Бернулли, справедливой пери стационарном обтекании:

$$p + \frac{\rho\left|\vec{v} - \vec{U}\right|^2}{2} = p_\infty \frac{\rho\, U^2}{2} \qquad (7.28)$$

Тогда из (7.26) имеем:

$$\vec{F}_{T+\text{ju}} = -\oiint\limits_{\Sigma R}\left[\left(p_\infty + \frac{\rho v^2}{2} - \frac{\rho U^2}{2} - \frac{\rho v^2}{2}\right)\vec{r}_0 - \rho\left(\vec{U}\vec{v}\right)\vec{r}_0 + \left(v_r - U_r\right)\left(\vec{v} - \vec{U}\right)\right]dS \qquad (7.29)$$

Интегралы от постоянных векторов в (7.29) равны нулю:

$$\oiint p_\infty \vec{r}_0 dS = 0\,,\;\; \vec{U}\oiint \vec{U}\vec{r}_0 dS = 0 \qquad (7.30)$$

Остаются ненулевые слагаемые:

$$\vec{F}_{m\leftarrow x} = -\oiint\limits_{\Sigma R}\left[-\frac{\rho\, v^2}{2}\vec{r}_0 - \rho\left(\vec{U}\vec{v}\right)\vec{r}_0 + \rho\, v_r\vec{v} - U_r\vec{v} - \vec{U}v_r\right]dS \qquad (7.31)$$

Для дипольного обтекания $v \sim \frac{1}{R^3}$, а $dS \sim R^2\, dv$. Поскольку поверхность Σ_R выбрана произвольно, то можно R устремить к ∞. Но тогда:

$$\vec{F}_{m\leftarrow \partial H} = 0 \qquad (7.32)$$

т.е. **при стационарном потенциальном обтекании на тело в идеальной несжимаемой жидкости сила не действует. Это так называемый парадокс Даламбера.** Он имеет ясный физический смысл. В идеальной жидкости должна сохраняться энергия. Если бы на тело со стороны жидкости действовала сила, то над телом бы совершалась работа. В этом случае, очевидно, что закон сохранения энергии нарушается. Парадокс Даламбера это следствие принятой нами идеализации: идеальная, несжимаемая, безграничная жидкость и потенциальное обтекание.

Рассмотрим теперь случай, когда тело в жидкости движется с ускорением. Тогда парадокс Даламбера не работает, тело увлекает за собой жидкость, она ускоряется, а на тело со стороны жидкости действует сила.

7.1.1 Присоединенная масса

Итак, пусть на тело массы m действует сила $\vec{f}$. Тело погружено в идеальную безграничную несжимаемую жидкость. Найдем ускорение тела. Согласно 2-му закону Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{f} + \vec{f}_{ж\to т} \tag{7.33}$$

На жидкость со стороны тела действует сила:

$$\vec{f}_{т\to ж} = -\vec{f}_{ж\to т} \tag{7.34}$$

Сила, действующая на жидкость $\vec{f}_{т\to ж} = \dfrac{d\vec{p}_n}{dt}$ – равна изменению импульса жидкости. Казалось бы, дальше задача решается просто.

1. Находим поле скорости в жидкости. Для этого решаем уравнение Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \varphi_n\big|_S = U_n(t) \end{cases} \tag{7.35}$$

$U_n(t)$ — нормальная проекция скорости на поверхности тела. Решение будет точно таким же, как в случае равномерного прямолинейного движения. Далее находим импульс жидкости: $\vec{p}_n = \int\limits_{V_\infty} \rho\nabla\varphi dV$. Но $\nabla\varphi \sim \dfrac{1}{r^3}$, а $dV \sim r^2\, dr$. Такой интеграл расходится, а значит, таким способом вычислить импульс жидкости не удастся.

Будем рассуждать следующим образом. Импульс жидкости – это количество движения, которое нужно сообщить жидкости, чтобы создать из состояния покоя рассматриваемое движение. Предположим, что это движение мы создаем за счет движения того же самого тела, которое действует на жидкость силой $G(t)$:

$$\frac{d\vec{p}_n}{dt} = \vec{G}(t); \vec{p}_n = \int_0^t \vec{G}(t)\, d\tau \tag{7.36}$$

При этом тело совершает над жидкостью работу:

$$A = \int_0^t \vec{U}(\tau)\vec{G}(\tau)\, d\tau \tag{7.37}$$

где $\vec{U}(\tau)$ – скорость тела. При этом, поскольку в начальный момент времени жидкость покоилась, то ее кинетическая энергия была равна 0, т.е. кинетическая энергия жидкости в момент времени t равна $A(t)$, т.е.

$$E = \int_0^t \vec{G}(\tau)\vec{U}(\tau)\, d\tau$$

или

$$\frac{dE}{dt}=\vec{U}(t)\vec{G}(t)=\vec{U}(t)\frac{d\vec{p}_n}{dt} \tag{7.38}$$

Таким образом, изменение импульса жидкости выражается через изменение ее кинетической энергии. При этом кинетическую энергию жидкости можно вычислить:

$$E=\int_{V_\infty}\frac{\rho v^2}{2}dV \tag{7.39}$$

поскольку интеграл (7.39) является сходящимся.

Заметим, что поле скорости получается из решения линейного уравнения ($\Delta\varphi$ = 0), значение скорости входит в граничные условия, т.е. поле скорости жидкости – линейная функция скорости тела. Но при этом кинетическая энергия жидкости будет представлять собой квадратичную форму от скорости тела, т.е.

$$E=\frac{m_{ij}U_iU_j}{2} \tag{7.40}$$

из симметрии ясно, что $m_{ij} = m_{ji}$. Тогда:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{m_{ij}}{2}\left(\frac{dv_i}{dt}U_j+\frac{dv_j}{dt}U_i\right)=U_im_{ij}\frac{dv_j}{dt}=U_i\frac{dp_{ni}}{dt} \tag{7.41}$$

Таким образом

$$\frac{dp_{ni}}{dt}=m_{ij}\frac{dv_j}{dt}\text{, а }\quad p_{ni} = U_j\, m_{ij} \tag{7.42}$$

Отметим, что данные рассуждения являются недостаточно строгими. Необходимо, вообще говоря, доказать, что сила, действующая на тело $\iint\limits_{\Sigma_T} pndS$, так связана с изменением кинетической энергии жидкости.

Вернемся к задаче, сформулированной в начале. Найдем ускорение погруженного тела, на которое действует сила $\vec{f}$. Проекция на ось i.

$$m\frac{dv_i}{dt}=F_i+m_{ij}\frac{dv_j}{dt} \tag{7.43}$$

Итак

$$\left(m\delta_{ij}+m_{ij}\right)\frac{dv_j}{dt}=f_i \tag{7.44}$$

В силу того, что ***тело ускоряет увлекаемую за ним жидкость, это эквивалентно увеличению массы и возникновению других составляющих ускорения, отличных от направления силы.*** Эти эффекты описываются величиной $\boldsymbol{m_{ij}}$, которая называется ***тензором присоединенной массы.***

Рассмотрим пример потенциального обтекания шара идеальной несжимаемой жидкостью.

7.2. Движение шара в жидкости. Потенциальное обтекание.

Пусть шар радиуса a движется в идеальной несжимаемой жидкости со скоростью U. Определим поле скорости, распределение давления по поверхности шара и присоединенную массу. Система уравнений, описывающая движение шара включает в себя уравнение Лапласа и граничные условия на поверхности шара и на бесконечности:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = U\cos\Theta \\ \left.\varphi\right|_{r\to\infty} \to 0 \end{cases} \tag{7.45}$$

Будем решать задачу в сферических переменных, тогда для уравнения Лапласа:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\Theta}\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right)=0 \tag{7.46}$$

Решение уравнения Лапласа будем искать методом разделения переменных:

$$\varphi = Q(\Theta)R(r) \tag{7.47}$$

Тогда уравнение Лапласа:

$$\frac{\dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)}{R}+\frac{\dfrac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\dfrac{dQ}{d\Theta}\right)}{\sin\Theta Q}=0 \tag{7.48}$$

Для функций Q и R получим систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dr}\left(r^2\dfrac{dR}{dr}\right)-2R=0 \\ \dfrac{d}{d\Theta}\left(\sin\Theta\dfrac{dQ}{d\Theta}\right)+2Q\sin\Theta=0 \end{cases} \tag{7.49}$$

Решение второго уравнения системы (7.49):

$$Q=\cos\Theta; \tag{7.50}$$

Функцию $R(r)$ будем искать в степенном виде:

$$R=r^m \tag{7.51}$$

Подставляя предложенную степенную функцию в первое уравнение системы (7.49), получим:

$$m(m+1)-2=0 \;\Rightarrow\; m_1=-2,\quad m_2=1 \tag{7.52}$$

Граничному условию при $r\to\infty$ соответствует $m_1 = -2$, т.е.:

$$\varphi = \frac{A\cos\Theta}{r^2} \tag{7.53}$$

Из граничного условия на поверхности сферы имеем:

$$A = -\frac{Ua^3}{2} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{Ua^3\cos\Theta}{2r^2} \tag{7.54}$$

Тогда для проекций поля скорости можно получить следующие выражения:

$$v_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Ua^3\cos\Theta}{r^3} \qquad v_\psi = \frac{1}{r\sin\Theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi} = 0 \qquad v_\Theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta} = \frac{Ua^3}{2r^3}\sin\Theta \tag{7.55}$$

7.2.1. Распределение давления по поверхности шара

Перейдем в систему отсчета, в которой тело покоится. Тогда поле скорости в жидкости:

$$\vec{v} = v_r\vec{r}_0 + v_0\vec{\Theta}_0 - \vec{U}, \quad U_r = U\cos\Theta; \quad U_\Theta = -U\sin\Theta$$

$$v_r = \left(\frac{Ua^3}{r^3} - U\right)\cos\Theta; \quad v_\theta = \left(\frac{Ua^3}{2r^3} + U\right)\sin\Theta \tag{7.56}$$

Распределение давления на поверхности шара найдем по теореме Бернулли:

$$p\big|_{r=a} + \left.\frac{\rho\left(v_r^2 + v_\theta^2\right)}{2}\right|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} \tag{7.57}$$

Подставляя сюда выражения для скорости (7.56), получим:

$$p = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2}\left(1 - \frac{9}{4}\sin^2\Theta\right) \tag{7.58}$$

7.2.2. Присоединенная масса

Определим величину присоединенной массы в случае шара, движущегося в идеальной несжимаемой жидкости. Для этого сначала найдем кинетическую энергию движения жидкости:

$$E = \int \frac{\rho\left(v_r^2 + v_\Theta^2\right)}{2}dV = 2\pi\int_a^\infty r^2 dr\int_0^\pi \sin\Theta d\Theta\left[\frac{\rho}{2}\frac{U^2a^6}{r^6}\left(\cos^2\Theta + \frac{\sin^2\Theta}{4}\right)\right] = \frac{\rho U^2 a^3\pi}{3} \tag{7.59}$$

По определению присоединенной массы:

$$E = \frac{m_{ij} U_i U_j}{2} \tag{7.60}$$

Сравнивая эти два выражения, имеем:

$$m_{ij} = \delta_{ij} \frac{2\pi}{3} \rho a^3 \tag{7.61}$$

Можно сделать вывод о том, что при движении шара в жидкости, присоединенная масса равна 1/2 массы жидкости в объеме тела.

Задачи к разделу 7

Задача 1. Найти распределение давления на поверхности цилиндра, обтекаемого потоком несжимаемой жидкости, имеющей на бесконечности скорость U. Радиус цилиндра равен a.

Решение: Для решения задачи используем уравнение Лапласа и два граничных условия - граничное условие непротекания на поверхности цилиндра и граничное условие на бесконечности, состоящее в том, что скорость жидкости на бесконечности стремится к скорости невозмущенного потока U:

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 \\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \\ \left.\varphi\right|_{r\to\infty} \to U\cos\Theta \end{cases}$$

Решение уравнения Лапласа будем искать в виде суммы диполя и невозмущенного потока:

$$\varphi = \frac{\alpha}{r}\cos\Theta + Ur\cos\Theta$$

Используя граничное условие непротекания, получим для константы α:

$$\alpha = Ua^2$$

Тогда потенциал течения жидкости, возникающего при движении цилиндра:

$$\varphi = \frac{Ua^2}{r}\cos\Theta + Ur\cos\Theta$$

Поскольку течение стационарно, для него применима формула Бернулли:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v_r^2 + v_\theta^2}{2} = const$$

На поверхности цилиндра:

$$v_r = 0, v_\Theta = \frac{\partial \varphi}{r \partial \Theta} = -\left(\frac{U}{r^2} a^2 + U \right) \sin \Theta = -2U \sin \Theta$$

Учитывая, что $v_\infty = U$, получим:

$$\frac{p|_{r=a}}{\rho} + 2U^2 \sin^2 \Theta = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}$$

Тогда давление на поверхности цилиндра:

$$p|_{r=a} = p_\infty + \frac{\rho U^2}{2} (1 - 4 \sin^2 \Theta)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, теория упругости.
2. Фейнмановские лекции по физике, т7.
3. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды.
5. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред.
6. Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.
7. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. I и II ч.