Билеты по курсу «*Квантовая теория поля*»

Google Gemini 3 Pro
Александр Актанаев (оператор ИИ)
Андрей Можаров (вёрстка LaTeX)

26 декабря 2025

Оглавление

Билет №1 Уравнение Дирака. Свойства γ-матриц. 4

1 Вывод уравнения Дирака . . . 4

1.1 Свойства матриц α_i и β . . . 4

2 Ковариантная форма уравнения Дирака . . . 5

3 Свойства γ-матриц . . . 5

3.1 Эрмитово сопряжение . . . 5

3.2 Матрица γ^5 . . . 6

4 Вычисление следов (Trace technology) . . . 6

5 Свертки матриц (Contraction identities) . . . 6

6 Представления матриц Дирака . . . 7

6.1 Стандартное представление (Дирака-Паули) . . . 7

6.2 Спинорное представление (Вейля, киральное) . . . 7

6.3 Представление Майораны . . . 7

Билет №2 Парадокс Клейна (формулировка). 8

1 Постановка задачи . . . 8

1.1 Волновые функции . . . 8

2 Режимы рассеяния . . . 9

3 Вычисление токов и Парадокс . . . 9

4 Физическая интерпретация . . . 10

Билет №3 Симметрии и законы сохранения. Теорема Нетер. Интегралы движения. 11

1 Вывод теоремы Нетер . . . 11

2 Основные виды симметрий и интегралы движения . . . 12

2.1 Трансляционная инвариантность (Сдвиг в пространстве-времени) . . . 12

2.2 Лоренц-инвариантность (Вращения и бусты) . . . 12

2.3 Внутренние симметрии (Фазовые преобразования) . . . 12

3 Резюме . . . 13

Билет №4 Канонический формализм. Квантование скалярного поля. Классическая теория скалярного поля. 14

0.1 Переход к Гамильтонову формализму . . . 14

1 Каноническое квантование . . . 14

2 Разложение по плоским волнам (Моды) . . . 15

2.1 Коммутаторы операторов рождения и уничтожения . . . 15

3 Пространство состояний (Пространство Фока) . . . 15

4 Гамильтониан и проблема нулевых колебаний . . . 15

5 Импульс системы . . . 16

6 Причинность . . . 16

Билет №5 Фейнмановский пропагатор скалярного поля. 17

1 Определение через Т-произведение . . . 17
2 Функция Грина уравнения Клейна-Гордона . . . 17
3 Импульсное представление . . . 18
4 Контур интегрирования (Правило Фейнмана) . . . 18
5 Связь с другими функциями Грина . . . 19

Билет №6 Нормальное произведение операторов. 20
1 Определение нормального произведения . . . 20
1.1 Для бозонных полей . . . 20
1.2 Для фермионных полей . . . 21
2 Свойства нормального произведения . . . 21
3 Примеры использования . . . 21
3.1 Гамильтониан скалярного поля . . . 21
3.2 Ток в КЭД . . . 22
4 Обобщение: Теорема Вика . . . 22

Билет №7 Спинорное поле. Импульсное представление. 23
1 Решения в виде плоских волн (Классический уровень) . . . 23
1.1 Явный вид спиноров (в представлении Дирака-Паули) . . . 23
1.2 Свойства спиноров . . . 24
2 Квантование (Разложение по модам) . . . 24
3 Антикоммутационные соотношения . . . 24
4 Гамильтониан и энергия . . . 25

Билет №8 Фейнмановский пропагатор поля Дирака. 26
1 Определение через Т-произведение . . . 26
2 Дифференциальное уравнение . . . 26
3 Импульсное представление . . . 27
4 Связь со скалярным пропагатором . . . 27
5 Структура пропагатора (Частицы и Античастицы) . . . 27

Билет №9 Матрица рассеяния. Представление взаимодействия. 28
1 Представления в квантовой механике . . . 28
1.1 Представление Шредингера (Sch) . . . 28
1.2 Представление Гейзенберга (Heis) . . . 28
1.3 Представление взаимодействия (Int) . . . 28
2 Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия . . . 29
3 Оператор временной эволюции . . . 29
4 Ряд Дайсона . . . 29
5 S-матрица . . . 30

Билет №10 Электромагнитное взаимодействие. Матричные элементы S-матрицы. Правила Фейнмана. 31
1 Матричные элементы S-матрицы . . . 31
2 Инвариантная амплитуда $\mathcal{M}$ . . . 32
3 Правила Фейнмана для КЭД (в импульсном пространстве) . . . 32
3.1 Элементы диаграммы . . . 32
3.2 Построение выражения . . . 33
4 Пример: Рассеяние электрона на мюоне ($e^-\mu^- \to e^-\mu^-$) . . . 33

Билет №11 Эффективные линии. Уравнения Дайсона для функций Грина. 34
1 Собственно-энергетические части . . . 34
1.1 Собственная энергия электрона $\Sigma(p)$ . . . 34
1.2 Поляризационный оператор фотона $\Pi^{\mu\nu}(q)$ . . . 34
2 Уравнение Дайсона для электрона . . . 35
2.1 Графический вывод . . . 35
2.2 Аналитический вид . . . 35
3 Уравнение Дайсона для фотона . . . 35
4 Полная система уравнений Дайсона-Швингера . . . 36
5 Эффективные линии и перенормировка . . . 36

Билет №1

Уравнение Дирака. Свойства γ-матриц.

Исторически П. Дирак (1928 г.) искал релятивистски ковариантное уравнение для электрона, которое было бы лишено недостатков уравнения Клейна-Гордона (проблемы с вероятностной интерпретацией плотности тока и энергии).

Основные требования к уравнению:

1. **Релятивистская инвариантность:** Уравнение должно быть симметричным относительно пространства и времени, т.е. содержать первые производные как по времени ($\partial/\partial t$), так и по координатам ($\partial/\partial x^i$).

2. **Линейность:** Уравнение должно быть линейным, чтобы выполнялся принцип суперпозиции.

3. **Соответствие классической физике:** В пределе должно получаться соотношение Эйнштейна для энергии-импульса: $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$.

1 Вывод уравнения Дирака

Будем искать гамильтониан H в форме, линейной по импульсу $\vec{p}$:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi = (\vec{\alpha} \cdot \hat{\vec{p}} + \beta m)\psi = (-i\vec{\alpha} \cdot \nabla + \beta m)\psi, \tag{1}$$

где $\psi(\vec{x}, t)$ — некоторая многокомпонентная волновая функция (спинор), а $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и β — матрицы, которые нужно определить.

Чтобы удовлетворить релятивистскому соотношению энергии $E^2 = p^2 + m^2$, возведем оператор энергии в квадрат:

$$H^2 = (\alpha_i p_i + \beta m)(\alpha_j p_j + \beta m) = \alpha_i \alpha_j p_i p_j + (\alpha_i \beta + \beta \alpha_i) p_i m + \beta^2 m^2. \tag{2}$$

Учитывая, что $p_i p_j = p_j p_i$, перепишем первое слагаемое как $\frac{1}{2}\{\alpha_i, \alpha_j\} p_i p_j$. Сравнивая с $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$, получаем условия на матрицы:

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = 2\delta_{ij} \cdot I, \tag{3}$$

$$\{\alpha_i, \beta\} = 0, \tag{4}$$

$$\beta^2 = I. \tag{5}$$

Здесь $\{A, B\} = AB + BA$ — антикоммутатор.

1.1 Свойства матриц α_i и β

Из алгебраических свойств (3)-(5) следует:

- Матрицы должны быть эрмитовыми ($\alpha_i^\dagger = \alpha_i$, $\beta^\dagger = \beta$), чтобы гамильтониан был эрмитовым.

- Собственные значения матриц α_i и β равны ± 1 (так как их квадраты равны единичной матрице).

- След матриц равен нулю ($\mathrm{Tr}(\alpha_i) = \mathrm{Tr}(\beta) = 0$). Это следует из антикоммутации, например: $\beta = -\alpha_i \beta \alpha_i^{-1} \Rightarrow \mathrm{Tr}(\beta) = -\mathrm{Tr}(\beta)$.

- Минимальная размерность матриц, удовлетворяющих этим условиям, — 4×4. Следовательно, волновая функция ψ должна быть четырехкомпонентным столбцом (биспинором).

2 Ковариантная форма уравнения Дирака

Для перехода к явно лоренц-ковариантному виду введем γ-матрицы (гамма-матрицы). Умножим уравнение (1) слева на β:

$$i\beta \frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\beta \vec{\alpha} \cdot \nabla \psi + \beta^2 m \psi. \tag{6}$$

Введем обозначения:

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{7}$$

Используя 4-вектор производной $\partial_\mu = (\partial_0, \nabla)$ и соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, уравнение принимает вид:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \tag{8}$$

Или, используя "слэш обозначение Фейнмана ($\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$):

$$(i\not{\partial} - m)\psi = 0. \tag{9}$$

3 Свойства γ-матриц

Матрицы Дирака γ^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) являются генераторами **алгебры Клиффорда**. Их определяющее свойство (фундаментальное антикоммутационное соотношение):

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot I, \tag{10}$$

где $g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ — метрический тензор Минковского.

3.1 Эрмитово сопряжение

Из определения через эрмитовы α и β следует:

- γ^0 — эрмитова: $(\gamma^0)^\dagger = \beta^\dagger = \beta = \gamma^0$.

- γ^i — антиэрмитовы: $(\gamma^i)^\dagger = (\beta\alpha_i)^\dagger = \alpha_i^\dagger \beta^\dagger = \alpha_i \beta = -\beta\alpha_i = -\gamma^i$.

Оба свойства можно объединить в одну формулу:

$$\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \tag{11}$$

3.2 Матрица γ^5

Важную роль играет матрица γ^5, определяемая как произведение четырех основных матриц (иногда с множителем i):

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma. \tag{12}$$

Свойства γ^5:

- Антикоммутирует со всеми γ^μ: $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.
- В квадрате дает единицу: $(\gamma^5)^2 = I$.
- Эрмитова: $(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5$.
- Используется для определения операторов киральности (проекторов): $P_{L,R} = \frac{1\mp\gamma^5}{2}$.

4 Вычисление следов (Trace technology)

Для вычисления сечений рассеяния в КЭД часто требуется находить следы произведений γ-матриц. Основные тождества:

1. **Линейность и цикличность:**
$$\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B), \quad \mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA). \tag{13}$$
2. **След нечетного числа матриц:** След произведения любого нечетного количества γ-матриц равен нулю.
$$\mathrm{Tr}(\gamma^{\mu_1}\dots\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0. \tag{14}$$
Доказательство: Вставляем $(\gamma^5)^2 = I$ под знак следа и используем $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$.
3. **След двух матриц:**
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = \mathrm{Tr}(2g^{\mu\nu} - \gamma^\nu\gamma^\mu) = 8g^{\mu\nu} - \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) \Rightarrow \mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}. \tag{15}$$
В общем случае: $\mathrm{Tr}(\not{a}\not{b}) = 4(a\cdot b)$.
4. **След четырех матриц:**
$$\mathrm{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}). \tag{16}$$
5. **Следы с γ^5:**
$$\mathrm{Tr}(\gamma^5) = 0, \quad \mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu) = 0. \tag{17}$$
$$\mathrm{Tr}(\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{18}$$

5 Свертки матриц (Contraction identities)

В вычислениях часто встречаются выражения вида $\gamma_\mu A\gamma^\mu$. Полезные формулы (d — размерность пространства, обычно $d = 4$):

$$\gamma_\mu\gamma^\mu = d\cdot I = 4I, \tag{19}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\mu = (2-d)\gamma^\nu = -2\gamma^\nu, \tag{20}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\mu = 4g^{\nu\rho} + (d-4)\gamma^\nu\gamma^\rho = 4g^{\nu\rho}, \tag{21}$$
$$\gamma_\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\mu = -2\gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\nu. \tag{22}$$

6 Представления матриц Дирака

Существует несколько способов выбрать конкретный вид матриц 4×4, удовлетворяющих алгебре (10). Физические результаты не зависят от выбора представления.

6.1 Стандартное представление (Дирака-Паули)

Удобно для описания частиц в нерелятивистском пределе.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Здесь σ^i — матрицы Паули, I — единичная матрица 2×2.

6.2 Спинорное представление (Вейля, киральное)

Удобно для ультрарелятивистских частиц ($E \gg m$) и изучения киральной симметрии. γ^5 здесь диагональна.

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{24}$$

В этом представлении верхние две компоненты биспинора описывают левую (L) спиральность, а нижние — правую (R).

6.3 Представление Майораны

Выбирается так, чтобы все матрицы γ^μ были чисто мнимыми. Тогда уравнение Дирака становится действительным, что позволяет описывать истинно нейтральные частицы (майорановские фермионы).

Билет №2

Парадокс Клейна (формулировка).

Парадокс Клейна (O. Klein, 1929) — это физическое явление, возникающее при рассмотрении рассеяния релятивистской частицы (электрона) на высоком потенциальном барьере (ступеньке).

Суть парадокса заключается в том, что при высоте барьера V_0, превышающей порог рождения пары ($V_0 > E + mc^2$), коэффициент отражения электронов от барьера может стать меньше единицы, даже если их кинетическая энергия в области барьера формально отрицательна. Это противоречит интуиции нерелятивистской квантовой механики, где частица с энергией $E < V_0$ должна полностью отражаться (коэффициент отражения $R = 1$), а в глубь барьера проникает лишь экспоненциально затухающая волна.

1 Постановка задачи

Рассмотрим одномерное движение релятивистского электрона с энергией E и массой m вдоль оси z. Пусть на него действует электростатический потенциал ступенчатого вида:

$$V(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \quad \text{(Область I)} \\ V_0, & z > 0 \quad \text{(Область II)} \end{cases} \tag{1}$$

Стационарное уравнение Дирака имеет вид:

$$(c\alpha_z \hat{p}_z + \beta mc^2 + V(z))\psi = E\psi. \tag{2}$$

Здесь $\hat{p}_z = -i\hbar \frac{d}{dz}$. Для простоты будем использовать систему единиц $\hbar = c = 1$.

1.1 Волновые функции

Решение ищется в виде плоских волн.

- **В области I ($z < 0$, $V = 0$):** Электрон падает на барьер справа. Импульс падающей частицы $p > 0$.

  $$p = \sqrt{E^2 - m^2}. \tag{3}$$

  Волновая функция ψ_I представляет собой сумму падающей и отраженной волн:

  $$\psi_I(z) = Ae^{ipz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix} + Be^{-ipz} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-p}{E+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

  Здесь мы выбрали спин, направленный вверх, и использовали стандартное представление матриц Дирака. Множители определяются из уравнения Дирака для свободной частицы.

- **В области II ($z > 0$, $V = V_0$):** Здесь уравнение имеет вид $(E - V_0)\psi = (-i\alpha_z \frac{d}{dz} + \beta m)\psi$. Импульс p' в этой области определяется соотношением:

  $$(E - V_0)^2 = p'^2 + m^2 \quad \Rightarrow \quad p' = \pm\sqrt{(E - V_0)^2 - m^2}. \tag{5}$$

Волновая функция прошедшей волны:

$$\psi_{II}(z) = Ce^{ip'z}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p'}{E-V_0+m} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

2 Режимы рассеяния

Поведение решения критически зависит от величины V_0.

1. **Нерелятивистский барьер ($V_0 < E - m$):** Классическое прохождение. p' — вещественно.

2. **Слабый потенциал ($E - m < V_0 < E + m$):** Здесь $(E - V_0)^2 < m^2$, поэтому импульс p' становится чисто мнимым: $p' = i\kappa$. Волна в области II экспоненциально затухает ($\psi_{II} \sim e^{-\kappa z}$), происходит полное внутреннее отражение. Это соответствует классической ситуации «туннелирования нет».

3. **Сильный потенциал (Парадокс Клейна) ($V_0 > E + m$):** В этом случае $(E - V_0)^2 > m^2$, и импульс p' **снова становится вещественным**. Это означает, что в области II, где классически частица находиться не может (ее полная энергия меньше потенциальной), снова возможно распространение незатухающих осциллирующих волн.

3 Вычисление токов и Парадокс

Рассмотрим случай сильного поля ($V_0 > E + m$). Из условия непрерывности волновой функции в точке $z = 0$ ($\psi_I(0) = \psi_{II}(0)$) находим соотношения между коэффициентами A, B, C. Для токов вероятности $j = \psi^\dagger \alpha_z \psi$ получаем:

$$j_{inc} \sim |A|^2 \frac{p}{E+m}, \tag{7}$$

$$j_{ref} \sim |B|^2 \frac{p}{E+m}, \tag{8}$$

$$j_{trans} \sim |C|^2 \frac{p'}{E-V_0+m}. \tag{9}$$

Парадокс возникает при выборе знака импульса p' в прошедшей волне. Согласно теории групп (или требованию положительности групповой скорости), в области II мы должны выбрать решение, описывающее поток энергии *от* границы. Для электронов с «отрицательной кинетической энергией» групповая скорость $v_{gr} = \frac{dE}{dp'}$ направлена противоположно импульсу. Это приводит к тому, что для описания уходящей частицы нужно выбирать решение с током, направленным *вправо*.

При $V_0 > E + m$ коэффициент отражения $R = |j_{ref}|/|j_{inc}|$ оказывается:

$$R = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2, \quad \text{где } r = \frac{p'}{p}\frac{E+m}{E-V_0+m}. \tag{10}$$

В сильном поле величина $r < 0$ (так как $E - V_0 + m < 0$). Следовательно, $R < 1$ не получается (как можно было бы ожидать для поглощения), а наоборот: Если строго следовать математике Дирака, ток прошедшей волны оказывается отрицательным (поток античастиц), и для сохранения полного потока отраженный ток должен быть **больше** падающего: $R > 1$. (В некоторых интерпретациях говорят о $R < 1$, но с отрицательной проводимостью, суть одна — сохранение заряда требует учета рождения частиц).

4 Физическая интерпретация

По Ландау-Лифшицу (Т. 4, §32, 35): Парадокс разрешается отказом от одночастичной интерпретации уравнения Дирака в сильных полях.

- Когда $V_0 > E + m$, потенциальная энергия настолько велика, что она «перекрывает» щель между положительным и отрицательным континуумом энергий ($2mc^2$).
- Уровень энергии электрона E справа от барьера оказывается на одной высоте с позитронными уровнями (состояниями с отрицательной энергией) сплошного спектра.
- Происходит процесс **рождения электрон-позитронных пар**.
- Падающий электрон отражается от барьера. Сильное электрическое поле на границе рождает пару $e^- e^+$. Электрон пары улетает вместе с отраженным электроном (увеличивая j_{ref}), а позитрон пары уходит в глубь барьера (в область II).
- В области II движется позитрон с положительной энергией. В терминах уравнения Дирака это описывается как электрон с отрицательной энергией, движущийся вспять во времени.

Таким образом, «прошедшая волна» в области II — это не электрон, прошедший сквозь барьер, а поток позитронов, рожденных полем и уходящих на бесконечность. Это явление демонстрирует нестабильность вакуума в сверхкритических полях.

Билет №3

Симметрии и законы сохранения. Теорема Нетер. Интегралы движения.

В теории поля существует фундаментальная связь между свойствами симметрии физической системы и законами сохранения. Эта связь устанавливается **первой теоремой Нетер** (Эмми Нетер, 1918).

Утверждение теоремы: *Каждой непрерывной однопараметрической группе симметрий действия S соответствует закон сохранения, то есть существование тока $j^\mu(x)$, дивергенция которого равна нулю ($\partial_\mu j^\mu = 0$).*

Интеграл по пространству от временной компоненты этого тока $Q = \int d^3x\, j^0$ является сохраняющейся величиной (интегралом движения), то есть $\frac{dQ}{dt} = 0$.

1 Вывод теоремы Нетер

[(по книге Пескина-Шредера, §2.2)

Пусть лагранжиан системы $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$ зависит от набора полей $\phi(x)$ и их производных. Рассмотрим инфинитезимальное преобразование полей:

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta\phi(x), \tag{1}$$

где α — бесконечно малый параметр, а $\Delta\phi(x)$ — деформация формы поля.

Если данное преобразование является симметрией, то действие $S = \int d^4x \mathcal{L}$ должно быть инвариантным (с точностью до поверхностных членов, которые не влияют на уравнения движения). Это означает, что вариация лагранжиана должна иметь вид 4-дивергенции некоторого вектора $\mathcal{J}^\mu$:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \tag{2}$$

С другой стороны, прямое вычисление вариации лагранжиана как функции полей дает:

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(\alpha\Delta\phi) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu(\alpha\Delta\phi). \tag{3}$$

Используя уравнения движения Эйлера-Лагранжа $\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$, перепишем первое слагаемое в (3). Тогда вариация примет вид полной производной:

$$\delta\mathcal{L} = \alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Delta\phi\right). \tag{4}$$

Приравнивая это выражение к (2), получаем:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Delta\phi\right) = \partial_\mu \mathcal{J}^\mu. \tag{5}$$

Следовательно, ток, определяемый как:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\Delta\phi - \mathcal{J}^\mu, \tag{6}$$

сохраняется:

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{7}$$

2 Основные виды симметрий и интегралы движения

В зависимости от типа преобразования, получаются различные физические величины.

2.1 Трансляционная инвариантность (Сдвиг в пространстве-времени)

Преобразование координат: $x^\mu \to x^\mu - a^\mu$. Поле меняется как скаляр (для скалярного поля): $\phi(x) \to \phi(x+a) \approx \phi(x) + a^\nu \partial_\nu \phi$. Здесь $\Delta\phi = \partial_\nu \phi$, а вектор $\mathcal{J}^\mu$ возникает из того, что лагранжиан тоже сдвигается в аргументе: $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + a^\nu \partial_\nu \mathcal{L} = \mathcal{L} + a^\nu \partial_\mu (\delta^\mu_\nu \mathcal{L})$.

Подставляя в формулу Нетер (6), получаем 4 сохраняющихся тока (по одному для каждого индекса ν), которые образуют **канонический тензор энергии-импульса** $T^\mu{}_\nu$:

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}. \tag{8}$$

Закон сохранения: $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Интегралы движения:

- **Энергия (Гамильтониан):** $H = P^0 = \int d^3x \, T^{00}$.
- **Импульс:** $P^i = \int d^3x \, T^{0i}$.

2.2 Лоренц-инвариантность (Вращения и бусты)

Преобразование координат: $x^\mu \to x^\mu + \omega^\mu{}_\nu x^\nu$ (где $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$). Поле преобразуется с учетом своего спина: $\phi(x) \to (1 + \frac{1}{2}\omega_{\rho\sigma} S^{\rho\sigma})\phi(x - \omega x)$.

Соответствующий ток (имеющий три индекса) называется тензором момента количества движения $M^{\mu\rho\sigma}$. Он сохраняется: $\partial_\mu M^{\mu\rho\sigma} = 0$. Его можно выразить через тензор энергии-импульса и спиновую часть:

$$M^{\mu\rho\sigma} = x^\rho T^{\mu\sigma} - x^\sigma T^{\mu\rho} + S^{\mu\rho\sigma}_{spin}. \tag{9}$$

Интегралы движения:

- **Момент импульса:** $J^{ij} = \int d^3x \, M^{0ij}$. (Пространственные вращения).
- **Интеграл центра инерции:** $K^{0i} = \int d^3x \, M^{00i}$. (Лоренцевы бусты).

2.3 Внутренние симметрии (Фазовые преобразования)

Рассмотрим комплексное поле (например, заряженное скалярное или дираковское). Лагранжиан инвариантен относительно глобального изменения фазы (группа $U(1)$):

$$\phi \to e^{i\alpha}\phi \approx (1 + i\alpha)\phi. \tag{10}$$

Здесь $\Delta\phi = i\phi$, $\Delta\phi^* = -i\phi^*$. Лагранжиан не меняется ($\mathcal{J}^\mu = 0$).

Ток Нетер:

$$j^\mu = i\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)}\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)}\phi^*\right]. \tag{11}$$

Для дираковского поля ($\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi$) это векторный ток:

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{12}$$

Интеграл движения:

- **Электрический заряд** (или число частиц минус число античастиц): $Q = \int d^3x \, j^0$.

3 Резюме

Симметрия	**Сохраняющийся ток**	**Интеграл движения**
Трансляции времени	Тензор $T^{\mu\nu}$	Энергия E
Трансляции координат	Тензор $T^{\mu\nu}$	Импульс $\vec{P}$
Вращения пространства	Тензор момента $M^{\mu\rho\sigma}$	Момент импульса $\vec{J}$
Фазовые преобразования	Векторный ток j^{μ}	Заряд Q

Билет №4

Канонический формализм. Квантование скалярного поля. Классическая теория скалярного поля.

Рассмотрим действительное скалярное поле $\phi(x)$, описывающее свободные частицы со спином 0 и массой m (нейтральные мезоны). Динамика поля определяется лагранжевой плотностью (Лагранжианом):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 = \frac{1}{2}[\dot{\phi}^2 - (\nabla\phi)^2 - m^2\phi^2]. \tag{1}$$

Уравнение движения, следующее из принципа наименьшего действия (уравнение Эйлера-Лагранжа), есть уравнение Клейна-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0 \quad \text{или} \quad (\Box + m^2)\phi = 0. \tag{2}$$

0.1 Переход к Гамильтонову формализму

Для квантования нам необходимо определить канонически сопряженный импульс $\pi(x)$:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x). \tag{3}$$

Плотность гамильтониана $\mathcal{H}$ строится через преобразование Лежандра:

$$\mathcal{H} = \pi\dot{\phi} - \mathcal{L} = \pi^2 - \left[\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2\right] = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2. \tag{4}$$

Полный гамильтониан системы: $H = \int d^3x\, \mathcal{H}$.

1 Каноническое квантование

Процедура квантования заключается в замене классических полей $\phi(x)$ и $\pi(x)$ на операторы, действующие в Гильбертовом пространстве состояний, и наложении на них **одновременных канонических коммутационных соотношений** (ETCR — Equal Time Commutation Relations).

По аналогии с квантовой механикой ($[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}$), для полей постулируется:

$$[\phi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = i\delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \tag{5}$$
$$[\phi(\vec{x}, t), \phi(\vec{y}, t)] = 0, \tag{6}$$
$$[\pi(\vec{x}, t), \pi(\vec{y}, t)] = 0. \tag{7}$$

(Здесь и далее $\hbar = 1$).

2 Разложение по плоским волнам (Моды)

Так как уравнение Клейна-Гордона линейно, поле можно представить в виде суперпозиции плоских волн. В квантовой теории коэффициенты разложения становятся операторами рождения и уничтожения.

Общее решение записывается как интеграл Фурье:

$$\phi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2E_p}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} + a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right) \Big|_{p^0=E_p}, \tag{8}$$

где $E_p = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}$, а $p\cdot x = E_p t - \vec{p}\cdot\vec{x}$. Соответственно, для импульса $\pi = \dot{\phi}$:

$$\pi(\vec{x},t) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (-i) \sqrt{\frac{E_p}{2}} \left(a_{\vec{p}} e^{-ip\cdot x} - a_{\vec{p}}^\dagger e^{ip\cdot x} \right). \tag{9}$$

2.1 Коммутаторы операторов рождения и уничтожения

Используя соотношения для полей ϕ и π, можно найти коммутаторы для операторов $a_{\vec{p}}$ и $a_{\vec{p}}^\dagger$:

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q}), \tag{10}$$

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{q}}] = [a_{\vec{p}}^\dagger, a_{\vec{q}}^\dagger] = 0. \tag{11}$$

Нормировочный множитель $(2\pi)^3$ является стандартным в релятивистской теории (в отличие от δ_{pq} в квантовой механике в ящике).

3 Пространство состояний (Пространство Фока)

- **Вакуум $|0\rangle$:** Состояние с наименьшей энергией, определяемое тем, что оно уничтожается любым оператором уничтожения:

$$a_{\vec{p}}|0\rangle = 0 \quad \text{для всех } \vec{p}. \tag{12}$$

- **Одночастичное состояние:** Действие оператора рождения на вакуум создает частицу с импульсом $\vec{p}$:

$$|\vec{p}\rangle = \sqrt{2E_p}\, a_{\vec{p}}^\dagger |0\rangle. \tag{13}$$

  Множитель $\sqrt{2E_p}$ введен для релятивистски-инвариантной нормировки состояний: $\langle\vec{p}|\vec{q}\rangle = 2E_p(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{q})$.

- **Многочастичные состояния:** Строятся путем многократного действия операторов рождения. Так как все $a^\dagger$ коммутируют между собой, состояния симметричны относительно перестановки частиц, что соответствует статистике **Бозе-Эйнштейна**.

4 Гамильтониан и проблема нулевых колебаний

Выразим гамильтониан $H = \int d^3x(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2)$ через операторы $a_{\vec{p}}$ и $a_{\vec{p}}^\dagger$. Подставляя разложение (8) и интегрируя по x, получаем:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \left(a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} + \frac{1}{2}[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}}^\dagger] \right). \tag{14}$$

Используя $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}] = \delta(0) \to \infty$, видим, что второе слагаемое дает бесконечную энергию вакуума (сумма энергий нулевых колебаний осцилляторов $\frac{1}{2}\hbar\omega$ по всем модам):

$$E_{vac} = \frac{1}{2}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \cdot (2\pi)^3 \delta(0) \to \infty. \tag{15}$$

Так как в эксперименте измеряется только разность энергий, эту бесконечную константу отбрасывают. Формально это делается с помощью процедуры **нормального упорядочения** (обозначается $:\cdots:$), при которой все операторы рождения ставятся левее операторов уничтожения:

$$: a_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{p}} := a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}. \tag{16}$$

Перенормированный (нормальный) гамильтониан:

$$: H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}. \tag{17}$$

Для этого гамильтониана $H|0\rangle = 0$.

5 Импульс системы

Аналогично, оператор полного импульса поля $\vec{P} = -\int d^3x \pi \nabla\phi$ в нормальном упорядочении принимает вид:

$$: \vec{P} := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}. \tag{18}$$

6 Причинность

В квантовой теории поля причинность выражается требованием, чтобы измерения в пространственно-подобных точках (интервал $(x-y)^2 < 0$) не влияли друг на друга. Это значит, что коммутатор полей должен исчезать вне светового конуса:

$$[\phi(x), \phi(y)] = 0, \quad \text{если } (x-y)^2 < 0. \tag{19}$$

Прямое вычисление показывает:

$$[\phi(x), \phi(y)] = D(x-y) - D(y-x), \tag{20}$$

где $D(x-y)$ — амплитуда распространения частицы. Вне светового конуса амплитуда перехода частицы $x \to y$ точно сокращается с амплитудой перехода $y \to x$, что обеспечивает причинность.

Билет №5

Фейнмановский пропагатор скалярного поля.

В квантовой теории поля процессы рассеяния и распространения частиц описываются с помощью функций Грина. Для построения диаграммной техники Фейнмана ключевую роль играет **фейнмановский пропагатор** (причинная функция Грина).

Физически пропагатор $D_F(x-y)$ представляет собой амплитуду вероятности того, что частица, рожденная в точке y, распространится (пропагирует) в точку x.

1 Определение через T-произведение

Фейнмановский пропагатор для вещественного скалярного поля $\phi(x)$ определяется как вакуумное среднее от хронологически упорядоченного произведения операторов поля:

$$D_F(x-y) = \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle, \tag{1}$$

где символ T-упорядочения действует следующим образом:

$$T\phi(x)\phi(y) = \begin{cases} \phi(x)\phi(y), & \text{если } x^0 > y^0 \\ \phi(y)\phi(x), & \text{если } y^0 > x^0 \end{cases} = \theta(x^0-y^0)\phi(x)\phi(y) + \theta(y^0-x^0)\phi(y)\phi(x). \tag{2}$$

Это определение обеспечивает причинность: частица всегда движется из более раннего момента времени в более поздний. В случае комплексного поля это соответствует распространению частицы из y в x (если $x^0 > y^0$) или античастицы из x в y (если $y^0 > x^0$).

2 Функция Грина уравнения Клейна-Гордона

Пропагатор $D_F(x-y)$ является функцией Грина для оператора Клейна-Гордона:

$$(\partial^2 + m^2)D_F(x-y) = -i\delta^{(4)}(x-y). \tag{3}$$

Доказательство: Применим оператор $(\partial^2 + m^2) = (\partial_0^2 - \nabla^2 + m^2)$ к выражению (1). Дифференцирование ступенчатых функций $\theta(t)$ по времени дает $\delta(t)$.

$$\begin{aligned} \partial_0[T\phi(x)\phi(y)] &= \delta(x^0-y^0)\phi(x)\phi(y) - \delta(y^0-x^0)\phi(y)\phi(x) + T(\partial_0\phi(x))\phi(y) \\ &= 0 + T\pi(x)\phi(y) \quad (\text{так как коммутатор полей при } x^0 = y^0 \text{ равен } 0). \end{aligned}$$

Вторая производная:

$$\partial_0^2[T\phi(x)\phi(y)] = \delta(x^0-y^0)[\pi(x),\phi(y)] + T(\partial_0^2\phi(x))\phi(y).$$

Используя одновременной коммутатор $[\pi(\vec{x}),\phi(\vec{y})] = -i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ и уравнение движения $(\partial^2 + m^2)\phi = 0$, получаем искомое равенство.

3 Импульсное представление

Для вычислений удобнее работать в импульсном пространстве. Сделаем преобразование Фурье:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{D}_F(p). \tag{4}$$

Подставляя это в уравнение $(\partial^2+m^2)D_F = -i\delta$, получаем алгебраическое уравнение $(-p^2+m^2)\tilde{D}_F(p) = -i$. Отсюда

$$\tilde{D}_F(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{5}$$

Бесконечно малая добавка $i\varepsilon$ ($\varepsilon \to +0$) вводится для того, чтобы правильно обойти полюса при интегрировании.

4 Контур интегрирования (Правило Фейнмана)

Знаменатель в (5) имеет полюса в точках:

$$p^2 - m^2 + i\varepsilon = (p^0)^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon = 0 \quad \Rightarrow \quad p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2 - i\varepsilon} \approx \pm(E_{\vec{p}} - i\varepsilon). \tag{6}$$

Полюса смещены с вещественной оси:

- Полюс $+E_{\vec{p}}$ смещен вниз (в нижнюю полуплоскость).
- Полюс $-E_{\vec{p}}$ смещен вверх (в верхнюю полуплоскость).

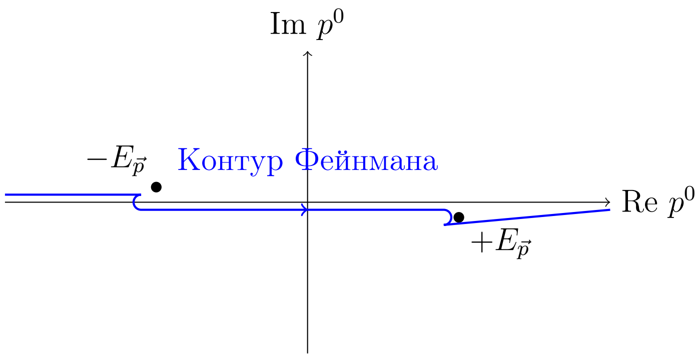


Рис. Билет №5.1: Расположение полюсов и контур интегрирования для фейнмановского пропагатора.

При вычислении интеграла по p^0:

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{x}-\vec{y})} \int \frac{dp^0}{2\pi} \frac{ie^{-ip^0(x^0-y^0)}}{(p^0 - E_{\vec{p}} + i\varepsilon)(p^0 + E_{\vec{p}} - i\varepsilon)}. \tag{7}$$

- Если $x^0 > y^0$ ($t > 0$), замыкаем контур в нижней полуплоскости ($e^{-ip^0t} \to 0$ при Im $p^0 \to -\infty$). В контур попадает полюс $+E_{\vec{p}}$. Это дает вклад $e^{-iE_{\vec{p}}t}$ (положительно-частотная мода, частица).
- Если $x^0 < y^0$ ($t < 0$), замыкаем контур в верхней полуплоскости. В контур попадает полюс $-E_{\vec{p}}$. Это дает вклад $e^{iE_{\vec{p}}t}$ (отрицательно-частотная мода, античастица).

Таким образом, один и тот же контур (Фейнмановский) автоматически учитывает T-упорядочение.

5 Связь с другими функциями Грина

Помимо фейнмановского (D_F), существуют другие пропагаторы, отличающиеся правилом обхода полюсов:

- **Запаздывающий (D_R):** Оба полюса обходятся сверху. $D_R(x) = 0$ при $x^0 < 0$.
- **Опережающий (D_A):** Оба полюса обходятся снизу. $D_A(x) = 0$ при $x^0 > 0$.

Фейнмановский пропагатор можно выразить через них как:

$$D_F(x) = \theta(x^0)D^{(+)}(x) - \theta(-x^0)D^{(-)}(x), \tag{8}$$

где $D^{(\pm)}$ — частотные части функции Паули-Йордана.

Билет №6

Нормальное произведение операторов.

В квантовой теории поля операторы полей $\phi(x)$ строятся линейно из операторов рождения $a_k^\dagger$ и уничтожения a_k. При построении составных операторов (например, гамильтониана H или тока j^μ) часто возникают произведения полей в одной точке.

Если просто перемножить операторы полей, возникают расходимости. Например, гамильтониан свободного скалярного поля (см. Билет 4) имеет вид:

$$H = \sum_k E_k(a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}). \tag{1}$$

Слагаемое $\sum \frac{1}{2}E_k$ дает бесконечную энергию вакуума. Аналогично, вакуумное среднее от простого произведения полей $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ не равно нулю (оно равно пропагатору).

Для устранения этих вакуумных вкладов и приведения операторов к виду, в котором они "аннулируют"вакуум (т.е. $\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = 0$), вводится процедура **нормального упорядочения**.

1 Определение нормального произведения

Нормальным произведением (или N-произведением) операторов поля называется такой порядок сомножителей, при котором **все операторы рождения стоят слева от всех операторов уничтожения**.

Обозначение: $:\hat{A}\hat{B}\cdots:$ или $N(\hat{A}\hat{B}\dots)$.

1.1 Для бозонных полей

Пусть $\phi(x)$ — скалярное поле. Разложим его на положительно-частотную часть $\phi^+(x)$ (содержит операторы уничтожения a) и отрицательно-частотную часть $\phi^-(x)$ (содержит операторы рождения $a^\dagger$):

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x). \tag{2}$$

Примечание по обозначениям: В книгах (например, у Боголюбова) часто используется обозначение ϕ^- для уничтожения и ϕ^+ для рождения. Здесь мы следуем конвенции Пескина-Шредера, где $\phi^+ \sim e^{-ipx}a$ (частота $E > 0$ в экспоненте) и $\phi^- \sim e^{ipx}a^\dagger$. Главное — разделить операторы a и $a^\dagger$.

Нормальное произведение двух полей определяется как:

$$:\phi(x)\phi(y): = \phi^+(x)\phi^+(y) + \phi^-(x)\phi^+(y) + \phi^-(y)\phi^+(x) + \phi^-(x)\phi^-(y). \tag{3}$$

Здесь слагаемое, которое в обычном произведении стояло бы "неправильно"($\phi^+(x)\phi^-(y) \sim aa^\dagger$), переставлено местами ($\phi^-(y)\phi^+(x) \sim a^\dagger a$).

В общем случае для набора операторов рождения и уничтожения:

$$:a_{k_1}a_{k_2}^\dagger a_{k_3}: = a_{k_2}^\dagger a_{k_1}a_{k_3}. \tag{4}$$

Порядок среди самих операторов рождения (или уничтожения) не важен для бозонов, так как они коммутируют: $[a_k^\dagger, a_q^\dagger] = 0$.

1.2 Для фермионных полей

Для фермионов (поля Дирака $\psi, \bar{\psi}$) операторы антикоммутируют. При перестановке фермионных операторов в процессе нормального упорядочения необходимо учитывать знак.

Правило: Переставляем операторы рождения налево, уничтожения направо, домножая на (-1) за каждую перестановку между фермионными операторами.

Пример для двух полей: Пусть $\psi = \psi^+ + \psi^-$ (где ψ^+ уничтожает частицы, ψ^- рождает античастицы).

$$: \psi_\alpha \psi_\beta := \psi_\alpha^+ \psi_\beta^+ + \psi_\alpha^- \psi_\beta^+ + \psi_\beta^- \psi_\alpha^+ + \psi_\alpha^- \psi_\beta^- . \tag{5}$$

Но если мы берем произведение ψ и $\bar{\psi}$:

$$: a_p a_q^\dagger := -a_q^\dagger a_p. \tag{6}$$

2 Свойства нормального произведения

1. **Нулевое вакуумное среднее:** По определению, справа в каждом слагаемом нормального произведения стоит оператор уничтожения (действующий на $|0\rangle_R$) или слева стоит оператор рождения (действующий на $\langle 0|_L$). Поэтому:

$$\langle 0| : \hat{A}\hat{B} \cdots : |0\rangle = 0. \tag{7}$$

(За исключением случая, когда произведение состоит только из c-чисел).

2. **Линейность и дистрибутивность:** Операция нормального упорядочения линейна:

$$: (\alpha \hat{A} + \beta \hat{B})\hat{C} := \alpha : \hat{A}\hat{C} : + \beta : \hat{B}\hat{C} : . \tag{8}$$

3. **Связь с обычным произведением (Теорема Вика для двух операторов):** Разница между обычным и нормальным произведением — это c-число (коммутатор или антикоммутатор). Для бозонных полей:

$$\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + \underbrace{[\phi^+(x), \phi^-(y)]}_{\text{спаривание}}. \tag{9}$$

Величина $D(x-y) = [\phi^+(x), \phi^-(y)] = \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ называется **спариванием** (contraction). В итоге:

$$\phi(x)\phi(y) =: \phi(x)\phi(y) : + \langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle. \tag{10}$$

3 Примеры использования

3.1 Гамильтониан скалярного поля

Классический гамильтониан $H = \int d^3x \frac{1}{2}(\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2)$. В квантовой теории мы постулируем, что физический гамильтониан — это нормальное произведение классического выражения:

$$: H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p : (a_p a_p^\dagger + a_p^\dagger a_p) : \cdot \frac{1}{2} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p a_p^\dagger a_p. \tag{11}$$

Энергия вакуума $\langle 0| : H : |0\rangle = 0$ автоматически отброшена.

3.2 Ток в КЭД

Ток фермионов $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Вакуумное среднее $\langle 0|\bar{\psi}\gamma^\mu\psi|0\rangle$ в "наивной"теории бесконечно (суммирование по всем состояниям моря Дирака). Физический ток определяется как нормальное произведение:

$$j^\mu(x) =: \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) : . \tag{12}$$

Это определение гарантирует, что в вакууме нет тока и заряда. Также это обеспечивает симметрию заряда: $Q = \int : j^0 : d^3x \sim N_{e^-} - N_{e^+}$. Без нормального упорядочения заряд позитрона имел бы тот же знак, что и электрона (из-за бесконечного фона моря Дирака), или возникали бы бесконечные константы.

4 Обобщение: Теорема Вика

(Подробнее в вопросах про S-матрицу, но суть важна здесь). Нормальное произведение является основой для разложения T-произведения (хронологического), которое входит в формулу Дайсона для S-матрицы.

$$T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n)) =: \phi(x_1)\dots\phi(x_n) : + \sum \text{все возможные спаривания.} \tag{13}$$

Это позволяет вычислять матричные элементы процессов рассеяния, сводя их к комбинаторике нормальных произведений.

Билет №7

Спинорное поле. Импульсное представление.

Спинорное поле $\psi(x)$ описывает фермионы со спином $1/2$ (например, электроны и кварки). Свободное поле подчиняется уравнению Дирака:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0. \tag{1}$$

Для перехода к квантовой теории и импульсному представлению необходимо найти полный набор решений этого уравнения в виде плоских волн, а затем разложить поле по этим модам.

1 Решения в виде плоских волн (Классический уровень)

Будем искать решения в виде плоских волн с определенным 4-импульсом p^μ ($p^2 = m^2, p^0 > 0$). Существует два типа решений:

1. **Решения с положительной энергией** (соответствуют частицам):
$$\psi(x) = u^s(p)e^{-ip\cdot x}. \tag{2}$$

2. **Решения с отрицательной энергией** (соответствуют античастицам):
$$\psi(x) = v^s(p)e^{ip\cdot x}. \tag{3}$$

Здесь $s = 1, 2$ — индекс спина (поляризации).

Подставляя эти анзацы в уравнение Дирака, получаем алгебраические уравнения для биспиноров (спиноров) $u(p)$ и $v(p)$:

$$(\not{p} - m)u^s(p) = 0, \tag{4}$$
$$(\not{p} + m)v^s(p) = 0. \tag{5}$$

где $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$.

1.1 Явный вид спиноров (в представлении Дирака-Паули)

В системе покоя частицы ($p^\mu = (m, 0, 0, 0)$) уравнения (4)-(5) дают:

$$u^s(p_{rest}) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}\xi^s \\ 0\end{pmatrix}, \quad v^s(p_{rest}) = \sqrt{2m}\begin{pmatrix}0 \\ \eta^s\end{pmatrix}, \tag{6}$$

где ξ^s и η^s — двухкомпонентные спиноры Паули (например, $\binom{1}{0}$ и $\binom{0}{1}$). Множитель $\sqrt{2m}$ выбран для релятивистской нормировки.

Для произвольного импульса p спиноры получаются действием оператора буста или прямым решением уравнения:

$$u^s(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\xi^s \\ \sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\xi^s\end{pmatrix}, \quad v^s(p) = \begin{pmatrix}\sqrt{p\cdot\sigma}\eta^s \\ -\sqrt{p\cdot\bar{\sigma}}\eta^s\end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $\sigma^\mu = (1, \vec{\sigma})$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\vec{\sigma})$.

1.2 Свойства спиноров

Для квантования критически важны соотношения ортогональности, нормировки и полноты.

1. **Лоренц-инвариантная нормировка:**
$$\bar{u}^r(p)u^s(p) = 2m\delta^{rs}, \tag{8}$$
$$\bar{v}^r(p)v^s(p) = -2m\delta^{rs}, \tag{9}$$
$$\bar{u}^r(p)v^s(p) = \bar{v}^r(p)u^s(p) = 0. \tag{10}$$
(Здесь $\bar{u} = u^\dagger\gamma^0$ — дираковское сопряжение). Обратите внимание: $u^\dagger u = 2E_p\delta^{rs}$ (плотность вероятности $\sim E$, испытывает Лоренцево сокращение).

2. **Соотношения полноты (Spin sums):** При вычислении сечений рассеяния часто нужно суммировать по поляризациям конечных частиц и усреднять по начальным.
$$\sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p) = \not{p} + m, \tag{11}$$
$$\sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p) = \not{p} - m. \tag{12}$$

2 Квантование (Разложение по модам)

В квантовой теории поля $\psi(x)$ становится оператором. Мы раскладываем его по полному набору плоских волн, вводя операторы рождения и уничтожения. Так как спиноры описывают фермионы, частицы и античастицы различаются (электрон e^- и позитрон e^+).

Разложение поля:
$$\psi(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}\left(a^s_{\vec{p}}u^s(p)e^{-ip\cdot x} + b^{s\dagger}_{\vec{p}}v^s(p)e^{ip\cdot x}\right). \tag{13}$$

Дираковски сопряженное поле:
$$\bar{\psi}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2E_p}}\sum_{s=1,2}\left(b^s_{\vec{p}}\bar{v}^s(p)e^{-ip\cdot x} + a^{s\dagger}_{\vec{p}}\bar{u}^s(p)e^{ip\cdot x}\right). \tag{14}$$

Здесь введены два типа операторов:

- $a^s_{\vec{p}}$ — оператор уничтожения частицы (электрона) с импульсом $\vec{p}$ и спином s.
- $b^{s\dagger}_{\vec{p}}$ — оператор рождения античастицы (позитрона) с импульсом $\vec{p}$ и спином s.

Обратите внимание: при e^{ipx} (отрицательная частота) стоит оператор рождения античастицы, чтобы энергия состояния была положительной.

3 Антикоммутационные соотношения

Для фермионов статистика требует, чтобы операторы подчинялись **антикоммутационным** соотношениям ($\{A, B\} = AB + BA$):
$$\{a^r_{\vec{p}}, a^{s\dagger}_{\vec{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta^{rs}, \tag{15}$$
$$\{b^r_{\vec{p}}, b^{s\dagger}_{\vec{q}}\} = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{p} - \vec{q})\delta^{rs}. \tag{16}$$

Все остальные антикоммутаторы (например, $\{a, a\}$, $\{b, b\}$, $\{a, b^\dagger\}$) равны нулю.

Это приводит к принципу Паули: $(a^{s\dagger}_{\vec{p}})^2 = 0$ (нельзя создать два фермиона в одном состоянии).

4 Гамильтониан и энергия

Классический гамильтониан поля Дирака:

$$H = \int d^3x \bar{\psi}(-i\vec{\gamma} \cdot \nabla + m)\psi. \tag{17}$$

Подставляя разложение (13) и используя ортогональность спиноров, получаем:

$$H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a^{s\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} - b^s_{\vec{p}} b^{s\dagger}_{\vec{p}}). \tag{18}$$

Знак «минус» перед вторым слагаемым возникает из-за антикоммутации. Чтобы энергия была положительной, мы используем нормальное упорядочение для фермионов (перестановка операторов меняет знак, $: bb^\dagger := -b^\dagger b$):

$$: H := \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} E_p \sum_s (a^{s\dagger}_{\vec{p}} a^s_{\vec{p}} + b^{s\dagger}_{\vec{p}} b^s_{\vec{p}}). \tag{19}$$

Теперь энергия системы равна сумме энергий частиц (N_e) и античастиц ($N_{\bar{e}}$), и она всегда положительно определена.

Билет №8

Фейнмановский пропагатор поля Дирака.

Фейнмановский пропагатор для поля Дирака $S_F(x-y)$ — это причинная функция Грина, описывающая распространение фермионов (электронов и позитронов) между двумя точками пространства-времени. В диаграммной технике он соответствует внутренней фермионной линии, соединяющей две вершины.

1 Определение через T-произведение

Аналогично скалярному случаю, пропагатор определяется как вакуумное среднее от хронологически упорядоченного произведения полей. Однако для фермионов определение T-произведения включает знак минус при перестановке операторов:

$$S_F(x-y) = \langle 0|T\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle, \tag{1}$$

где

$$T\psi(x)\bar{\psi}(y) = \begin{cases} \psi(x)\bar{\psi}(y), & \text{если } x^0 > y^0 \\ -\bar{\psi}(y)\psi(x), & \text{если } y^0 > x^0 \end{cases} \tag{2}$$

Знак минус необходим для сохранения лоренц-инвариантности и связи со спином (статистика Ферми-Дирака). Операторы полей антикоммутируют вне светового конуса, и минус компенсирует перестановку.

2 Дифференциальное уравнение

Пропагатор $S_F(x-y)$ является функцией Грина для оператора Дирака. Подействуем оператором $(i\not{\partial}_x - m)$ на определение (2):

$$\begin{aligned} (i\not{\partial}_x - m)S_F(x-y) &= (i\gamma^0\partial_0 + i\vec{\gamma}\cdot\nabla - m)\left[\theta(x^0-y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \theta(y^0-x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x)\right] \\ &= \langle 0|T(i\not{\partial} - m)\psi(x)\cdot\bar{\psi}(y)|0\rangle \\ &\quad + i\gamma^0\left[\partial_0\theta(x^0-y^0)\psi(x)\bar{\psi}(y) - \partial_0\theta(y^0-x^0)\bar{\psi}(y)\psi(x)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

Первое слагаемое равно нулю, так как $\psi(x)$ удовлетворяет уравнению Дирака. Во втором слагаемом используем $\partial_0\theta(t) = \delta(t)$:

$$\dots = i\gamma^0\delta(x^0-y^0)\langle 0|\{\psi(x),\bar{\psi}(y)\}|0\rangle. \tag{4}$$

Используя одновременной антикоммутатор $\{\psi(\vec{x}),\psi^\dagger(\vec{y})\} = \delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$ (помня, что $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, то есть $\{\psi,\bar{\psi}\} = \gamma^0\delta^{(3)}$), получаем $\gamma^0\gamma^0 = 1$. Итоговое уравнение:

$$(i\not{\partial} - m)S_F(x-y) = i\delta^{(4)}(x-y). \tag{5}$$

(Обратите внимание: множитель i справа — это стандартная конвенция в физике частиц, отличающаяся от математической теории функций Грина).

3 Импульсное представление

Сделаем преобразование Фурье:

$$S_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip\cdot(x-y)} \tilde{S}_F(p). \tag{6}$$

Подставляя в уравнение, получаем алгебраическое соотношение для матрицы 4×4:

$$(\not{p} - m)\tilde{S}_F(p) = i. \tag{7}$$

Формально решение записывается как обратная матрица:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m}. \tag{8}$$

Чтобы избавиться от матрицы в знаменателе, домножим числитель и знаменатель на $(\not{p} + m)$ и воспользуемся тождеством $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$:

$$\tilde{S}_F(p) = \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}. \tag{9}$$

Здесь, как и в скалярном случае, добавка $+i\varepsilon$ определяет правило обхода полюсов (Фейнмановский обход), соответствующее причинному распространению.

4 Связь со скалярным пропагатором

Пропагатор Дирака можно выразить через скалярный пропагатор $D_F(x-y)$:

$$S_F(x-y) = (i\not{\partial} + m)D_F(x-y). \tag{10}$$

Это следует из того, что $(\not{p} + m)$ в числителе в координатном пространстве переходит в оператор $(i\not{\partial}+m)$. Это отражает тот факт, что частица со спином $1/2$ переносит не только массу (как скаляр), но и спиновую информацию.

5 Структура пропагатора (Частицы и Античастицы)

Рассмотрим вычеты в полюсах $p^0 = \pm E_p$.

1. **При $x^0 > y^0$ (распространение вперед во времени):** Контур интегрирования замыкается снизу, захватывая полюс $p^0 = +E_p$. Числитель $(\not{p} + m)$ на массовой поверхности (где $\not{p}u = mu$) можно переписать через спиновые суммы:

$$\not{p} + m = \sum_{s=1,2} u^s(p)\bar{u}^s(p). \tag{11}$$

   Это означает, что пропагатор переносит частицу (электрон) из y в x, суммируя по всем возможным спиновым состояниям.

2. **При $y^0 > x^0$ (распространение назад во времени):** Контур замыкается сверху, полюс $p^0 = -E_p$. Здесь работает проектор на состояния с отрицательной энергией:

$$\not{p} - m = \sum_{s=1,2} v^s(p)\bar{v}^s(p). \tag{12}$$

   Это интерпретируется как распространение античастицы (позитрона) из x в y.

Таким образом, формула Фейнмана автоматически объединяет распространение электронов и позитронов в одну функцию.

Билет №9

Матрица рассеяния. Представление взаимодействия.

Основной задачей квантовой теории поля является вычисление вероятностей переходов между состояниями в процессах столкновения частиц. Пусть в далеком прошлом ($t \to -\infty$) система находится в начальном состоянии $|i\rangle$ (in-state), представляющем собой набор свободных частиц. В результате взаимодействия в далеком будущем ($t \to +\infty$) система переходит в конечное состояние $|f\rangle$ (out-state).

Амплитуда вероятности этого перехода определяется матричным элементом оператора рассеяния $\hat{S}$:

$$S_{fi} = \langle f|\hat{S}|i\rangle. \tag{1}$$

Оператор $\hat{S}$ называется **матрицей рассеяния**. Он унитарен ($S^\dagger S = I$), что гарантирует сохранение полной вероятности (сумма вероятностей перехода во все возможные конечные состояния равна 1).

1 Представления в квантовой механике

Для вычисления $\hat{S}$ удобно использовать **представление взаимодействия** (Interaction Picture), которое является промежуточным между представлением Шредингера и представлением Гейзенберга.

Разделим полный гамильтониан системы на свободную часть H_0 и гамильтониан взаимодействия H_{int}:

$$H = H_0 + H_{int}. \tag{2}$$

1.1 Представление Шредингера (Sch)

- Операторы не зависят от времени (если нет явной зависимости): $\hat{O}_S$.
- Состояния зависят от времени и подчиняются уравнению Шредингера:

$$i\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle = (H_0 + H_{int})|\psi_S(t)\rangle. \tag{3}$$

1.2 Представление Гейзенберга (Heis)

- Состояния не зависят от времени: $|\psi_H\rangle = |\psi_S(0)\rangle$.
- Операторы эволюционируют с полным гамильтонианом: $\hat{O}_H(t) = e^{iHt}\hat{O}_S e^{-iHt}$.

1.3 Представление взаимодействия (Int)

Здесь мы хотим «спрятать» тривиальную эволюцию свободных частиц в операторы, а сложную динамику взаимодействия оставить в состояниях.

Определим вектор состояния в представлении взаимодействия $|\psi_I(t)\rangle$ через шредингеровский вектор:

$$|\psi_I(t)\rangle = e^{iH_0 t}|\psi_S(t)\rangle. \tag{4}$$

Операторы в представлении взаимодействия определяются как:

$$\hat{O}_I(t) = e^{iH_0t}\hat{O}_S e^{-iH_0t}. \tag{5}$$

В частности, операторы поля $\phi_I(x)$ в этом представлении удовлетворяют **свободным** уравнениям движения (Клейна-Гордона или Дирака), что позволяет использовать для них разложение по плоским волнам (как в Билетах 4 и 7).

2 Уравнение Шредингера в представлении взаимодействия

Найдем, как меняется состояние $|\psi_I(t)\rangle$ со временем. Дифференцируем определение:

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle &= i\frac{d}{dt}(e^{iH_0t}|\psi_S(t)\rangle) \\ &= i(iH_0)e^{iH_0t}|\psi_S(t)\rangle + e^{iH_0t}i\frac{d}{dt}|\psi_S(t)\rangle \\ &= -H_0|\psi_I(t)\rangle + e^{iH_0t}(H_0 + H_{int})|\psi_S(t)\rangle \\ &= -H_0|\psi_I(t)\rangle + e^{iH_0t}H_0e^{-iH_0t}|\psi_I(t)\rangle + e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t}|\psi_I(t)\rangle. \end{aligned} \tag{6}$$

Первые два члена сокращаются. Последний член — это гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия:

$$H_I(t) = e^{iH_0t}H_{int}e^{-iH_0t}. \tag{7}$$

Таким образом, уравнение эволюции принимает вид (аналог уравнения Шредингера, но только с H_I):

$$i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = H_I(t)|\psi_I(t)\rangle. \tag{8}$$

Важно: В отличие от H_{int} (который обычно постоянен), $H_I(t)$ зависит от времени.

3 Оператор временной эволюции

Введем унитарный оператор эволюции $U(t, t_0)$, который переводит состояние из момента t_0 в момент t:

$$|\psi_I(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi_I(t_0)\rangle. \tag{9}$$

Подставляя это в уравнение (8), получаем уравнение для оператора:

$$i\frac{d}{dt}U(t, t_0) = H_I(t)U(t, t_0), \tag{10}$$

с начальным условием $U(t_0, t_0) = 1$.

4 Ряд Дайсона

Уравнение (10) можно переписать в интегральной форме:

$$U(t, t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1)U(t_1, t_0). \tag{11}$$

Решаем его методом итераций:

1. Нулевое приближение: $U^{(0)} = 1$.
2. Первое приближение:
$$U^{(1)}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1). \tag{12}$$
3. Второе приближение (подставляем $U^{(1)}$ под интеграл):
$$U^{(2)}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^{t} dt_1 H_I(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2). \tag{13}$$
Обратите внимание на пределы интегрирования во втором члене: $t_0 < t_2 < t_1 < t$. Операторы стоят в хронологическом порядке (более ранний t_2 справа).

Этот ряд можно записать компактно с помощью символа T-произведения (хронологического упорядочения), который автоматически расставляет операторы по времени и позволяет расширить пределы интегрирования до t:
$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_I(t_1) H_I(t_2) = \frac{1}{2!} \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 T[H_I(t_1) H_I(t_2)]. \tag{14}$$
Общая формула для оператора эволюции (ряд Дайсона):
$$U(t, t_0) = T \exp\left(-i \int_{t_0}^{t} dt' H_I(t')\right). \tag{15}$$

5 S-матрица

Матрица рассеяния — это предел оператора эволюции, когда начальный момент уходит в $-\infty$, а конечный в $+\infty$:
$$\hat{S} = U(\infty, -\infty) = T \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \mathcal{H}_I(x)\right). \tag{16}$$
Здесь мы перешли от гамильтониана $H_I(t) = \int d^3x \mathcal{H}_I(x)$ к плотности гамильтониана взаимодействия $\mathcal{H}_I(x)$.

Это выражение является отправной точкой для построения теории возмущений. Разложение экспоненты в ряд дает слагаемые разного порядка по константе связи, которые графически изображаются с помощью диаграмм Фейнмана.

Билет №10

Электромагнитное взаимодействие. Матричные элементы S-матрицы. Правила Фейнмана.

Квантовая электродинамика (КЭД) описывает взаимодействие спинорного поля (электронов/позитронов) с векторным электромагнитным полем (фотонами). Лагранжиан взаимодействия строится на основе принципа *минимальной связи* (замена обычной производной на ковариантную: $\partial_\mu \to D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$).

Плотность гамильтониана взаимодействия (в представлении взаимодействия):

$$\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int} = j^\mu A_\mu = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu, \tag{1}$$

где:

- $e > 0$ — элементарный заряд (заряд электрона равен $-e$).
- $\psi(x)$ — оператор электрон-позитронного поля.
- $A_\mu(x)$ — оператор электромагнитного поля.

1 Матричные элементы S-матрицы

Амплитуда вероятности перехода из начального состояния $|i\rangle$ в конечное $|f\rangle$ дается элементом S-матрицы:

$$S_{fi} = \langle f|\hat{S}|i\rangle = \langle f|T\exp\left(-i\int d^4x e\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)A_\mu(x)\right)|i\rangle. \tag{2}$$

Разложение экспоненты в ряд теории возмущений дает:

$$S = 1 + S^{(1)} + S^{(2)} + \dots \tag{3}$$

- $S^{(1)} \sim \int(\bar{\psi}A\psi)$: Описывает процессы с участием 3 частиц (рождение фотона электроном и т.д.). В свободном пространстве запрещено законами сохранения энергии-импульса.
- $S^{(2)} \sim \frac{(-ie)^2}{2!}\int d^4xd^4yT[(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu)_x(\bar{\psi}\gamma^\nu\psi A_\nu)_y]$. Описывает основные процессы: рассеяние электрона на электроне, комптон-эффект и т.д.

Для вычисления матричных элементов используется **Теорема Вика**: T-произведение операторов сводится к сумме нормальных произведений $(: \cdots :)$ со всеми возможными спариваниями (пропагаторами).

- Спаривание полей $\psi(x)$ и $\bar{\psi}(y)$ дает фермионный пропагатор $S_F(x-y)$.
- Спаривание полей $A_\mu(x)$ и $A_\nu(y)$ дает фотонный пропагатор $D_F^{\mu\nu}(x-y)$.
- Неспаренные операторы действуют на внешние состояния $|i\rangle$ и $|f\rangle$, рождая или уничтожая частицы.

2 Инвариантная амплитуда $\mathcal{M}$

Матричный элемент всегда содержит дельта-функцию, обеспечивающую сохранение полного 4-импульса:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i(2\pi)^4\delta^{(4)}(P_f - P_i)\mathcal{M}_{fi}. \tag{4}$$

Величина $\mathcal{M}$ называется **инвариантной амплитудой** (или матричным элементом Фейнмана). Именно для вычисления $i\mathcal{M}$ формулируются правила Фейнмана.

3 Правила Фейнмана для КЭД (в импульсном пространстве)

Чтобы вычислить $i\mathcal{M}$ для заданного процесса, нужно нарисовать все топологически различные диаграммы данного порядка теории возмущений и сопоставить элементам диаграммы аналитические выражения.

3.1 Элементы диаграммы

1. **Вершина взаимодействия:** В каждой точке, где сходятся две фермионные линии и одна фотонная:

   $$\Rightarrow \quad -ie\gamma^{\mu}$$

   (Интегрирование по координатам дает $(2\pi)^4\delta(\sum p)$, что учитывается в сохранении импульса в каждом узле).

2. **Внутренние линии (Пропагаторы):**

   - **Фотон** (линия с импульсом k, соединяющая индексы μ и ν):

     $$\frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \tag{5}$$

     (В фейнмановской калибровке).

   - **Фермион** (электрон/позитрон, линия с импульсом p):

     $$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \tag{6}$$

3. **Внешние линии (Поляризационные волновые функции):**

   - **Входящий электрон** (импульс p, спин s): $u^s(p)$.
   - **Выходящий электрон** (импульс p, спин s): $\bar{u}^s(p)$.
   - **Входящий позитрон** (античастица): $\bar{v}^s(p)$.
   - **Выходящий позитрон**: $v^s(p)$.
   - **Входящий фотон** (импульс k, поляризация λ): $\varepsilon_{\mu}^{\lambda}(k)$.
   - **Выходящий фотон**: $\varepsilon_{\mu}^{\lambda *}(k)$.

3.2 Построение выражения

1. **Направление:** Фермионные линии имеют стрелки. Выражение для фермионной цепочки записывается *против* направления стрелок (справа налево в матричном смысле):

$$\bar{u}(p')\dots\gamma^\mu\dots u(p)$$

2. **Сохранение импульса:** В каждой вершине выполняется закон сохранения 4-импульса (сумма входящих равна сумме выходящих).

3. **Интегрирование:** По каждому внутреннему импульсу q, который не фиксирован законом сохранения (петли), проводится интегрирование $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$.

4. **Знаки:**

   - Каждый замкнутый фермионный цикл дает множитель (-1).
   - Знак минус возникает при перестановке тождественных фермионов в конечном состоянии (статистика Ферми).

5. **Симметрийные факторы:** В КЭД они обычно равны 1, но нужно быть внимательным с тождественными фотонами.

4 Пример: Рассеяние электрона на мюоне ($e^-\mu^- \to e^-\mu^-$)

В низшем порядке (e^2) есть одна диаграмма: обмен виртуальным фотоном. Пусть p_1, p_2 — импульсы начальных электрона и мюона, p_3, p_4 — конечных. Обменный импульс $q = p_1 - p_3 = p_4 - p_2$.

Амплитуда $i\mathcal{M}$:

$$i\mathcal{M} = \underbrace{[\bar{u}(p_3)(-ie\gamma^\mu)u(p_1)]}_{\text{электронный ток}} \cdot \underbrace{\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}}_{\text{пропагатор}} \cdot \underbrace{[\bar{u}(p_4)(-ie\gamma^\nu)u(p_2)]}_{\text{мюонный ток}}. \tag{7}$$

Итого:

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{q^2}(\bar{u}_3\gamma^\mu u_1)(\bar{u}_4\gamma_\mu u_2). \tag{8}$$

Квадрат модуля этой амплитуды (после суммирования по спинам) дает сечение рассеяния.

Билет №11

Эффективные линии. Уравнения Дайсона для функций Грина.

В теории возмущений мы оперируем свободными пропагаторами (тонкими линиями на диаграммах), которые описывают распространение невзаимодействующих частиц. Однако в полной теории частица постоянно взаимодействует с вакуумными флуктуациями (виртуальными парами, фотонами и т.д.).

Эффективная линия (или точный пропагатор, одетая линия) описывает распространение частицы с учетом всех возможных взаимодействий с вакуумом. На диаграммах эффективные линии обычно обозначаются жирными линиями или линиями с заштрихованным кружком.

Соотношения, связывающие точные пропагаторы с «голыми» (свободными) пропагаторами и собственно-энергетическими частями, называются **уравнениями Дайсона** (F. Dyson, 1949).

1 Собственно-энергетические части

Для построения уравнений Дайсона необходимо ввести понятие одночастично-неприводимых (1PI — One-Particle Irreducible) диаграмм.

1.1 Собственная энергия электрона $\Sigma(p)$

Рассмотрим все диаграммы, имеющие две внешние электронные линии. Выделим из них те, которые *нельзя* разделить на две несвязные части, разрезав одну внутреннюю электронную линию. Сумма всех таких диаграмм (без внешних пропагаторов) называется **собственно-энергетической частью** электрона (или массовым оператором $M(p)$ в терминологии Ландау-Лифшица). Обозначим её $-i\Sigma(p)$.

Примеры вкладов в $\Sigma(p)$:

- Однопетлевая диаграмма (собственная энергия 2-го порядка): испускание и поглощение виртуального фотона.
- Двухпетлевые диаграммы и т.д.

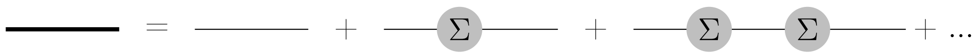
1.2 Поляризационный оператор фотона $\Pi^{\mu\nu}(q)$

Аналогично, для фотона рассматриваются диаграммы с двумя внешними фотонными линиями, которые нельзя разбить разрезанием одной фотонной линии. Сумма таких диаграмм называется **поляризационным оператором**. Обозначим его $i\Pi^{\mu\nu}(q)$. В силу калибровочной инвариантности $\Pi^{\mu\nu}(q) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\Pi(q^2)$.

2 Уравнение Дайсона для электрона

2.1 Графический вывод

Точный пропагатор электрона $S(p)$ (или $G(p)$) представляет собой сумму ряда, где частица может произвольное число раз испытывать виртуальные взаимодействия, описываемые $\Sigma(p)$. Этот ряд представляет собой геометрическую прогрессию:



Обозначим свободный пропагатор $S_0(p) = \frac{i}{\not{p}-m_0}$. Тогда ряд записывается как:

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)(-i\Sigma(p))S_0(p) + S_0(p)(-i\Sigma(p))S_0(p)(-i\Sigma(p))S_0(p) + \dots \tag{1}$$

Это можно переписать в виде рекуррентного уравнения (уравнения Дайсона):

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)(-i\Sigma(p))S(p). \tag{2}$$

Здесь справа стоит **точный** пропагатор $S(p)$, что соответствует суммированию всего «хвоста» прогрессии.

2.2 Аналитический вид

Умножим уравнение на $S_0^{-1}(p)$ слева и на $S^{-1}(p)$ справа:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - (-i\Sigma(p)) = S_0^{-1}(p) + i\Sigma(p). \tag{3}$$

Вспоминая явный вид $S_0^{-1}(p) = -i(\not{p}-m_0)$ (с точностью до i, в зависимости от конвенции), получаем выражение для точного пропагатора:

$$S(p) = \frac{i}{\not{p} - m_0 - \Sigma(p)}. \tag{4}$$

Физический смысл: Взаимодействие приводит к сдвигу массы частицы. Физическая масса m определяется полюсом точного пропагатора: $\not{p} - m_0 - \Sigma(\not{p} = m) = 0$.

3 Уравнение Дайсона для фотона

Аналогично строится уравнение для точного фотонного пропагатора $D_{\mu\nu}(q)$ (в Ландау-Лифшице обозначается $\mathcal{D}_{\mu\nu}$). Пусть свободный пропагатор $D_{0\mu\nu}(q) = \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$. Суммирование вставок поляризационного оператора дает:

$$D_{\mu\nu}(q) = D_{0\mu\nu}(q) + D_{0\mu\rho}(q)(i\Pi^{\rho\sigma}(q))D_{\sigma\nu}(q). \tag{5}$$

Для скалярной части пропагатора (в фейнмановской калибровке) это дает:

$$D(q^2) = \frac{-i}{q^2(1 - \Pi(q^2))}. \tag{6}$$

В общем виде для обратных пропагаторов (символически):

$$D^{-1} = D_0^{-1} - \Pi. \tag{7}$$

4 Полная система уравнений Дайсона-Швингера

В более строгой формулировке (Боголюбов-Ширков, Ландау-Лифшиц §107) уравнения Дайсона связывают точные пропагаторы не просто с Σ и Π, а выражают сами Σ и Π через точные пропагаторы и **точную вершинную часть** Γ^μ.

1. **Уравнение для массового оператора:** Массовый оператор $\Sigma(p)$ сам выражается через точный фотонный пропагатор D, точный электронный пропагатор S и точную вершину Γ:
$$\Sigma(p) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(p+k) \Gamma^\nu(p+k, p) D_{\mu\nu}(k). \tag{8}$$
Графически это означает, что «блоб» собственной энергии раскрывается в однопетлевую структуру, но с жирными линиями и закрашенной вершиной.

2. **Уравнение для поляризационного оператора:**
$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 \mathrm{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \gamma^\mu S(p+q) \Gamma^\nu(p+q, p) S(p). \tag{9}$$

Таким образом, мы имеем систему интегральных уравнений (уравнения Дайсона-Швингера) для точных функций Грина S, D, Γ. Эта система незамкнута (уравнение для Γ будет включать более сложные функции), но является основой для непертурбативных методов и анализа перенормировок.

5 Эффективные линии и перенормировка

Введение эффективных линий позволяет переписать ряды теории возмущений более компактно (скелетные диаграммы), где вместо обычных линий используются жирные. Это ключевой шаг в процедуре перенормировки:

- Бесконечности, возникающие в петлях Σ и Π, «прячутся» в перенормировку массы ($m_0 \to m$) и волновой функции (Z-факторы).

- Вблизи массовой поверхности ($p^2 \approx m^2$) точный пропагатор ведет себя как свободный, умноженный на константу перенормировки Z_2:
$$S(p) \approx \frac{iZ_2}{\not{p} - m}. \tag{10}$$