Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И
Лобачевского»

Отчёт по лабораторной работе

«Исследование колебательных процессов в электрическом контуре»

Выполнили студенты группы 10191

Елясин Андрей Алексеевич
Петрова Ирина Александровна

Проверил: Водопьянов Александр Валентинович

Нижний Новгород

Цель работы: экспериментальное исследование колебательных процессов в линейном осцилляторе с потерями.

Теоретическая часть

Уравнение гармонического осциллятора с затуханием

Дифференциальное уравнение, описывающее процессы в исследуемом контуре, имеет вид:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t) \qquad (1)$$

где q – заряд на конденсаторе,
$\delta = R/2L$ – коэффициент затухания,
$\omega_0 = {}^{1}\!/_{\sqrt{LC}}$ – собственная частота,
f – вынуждающая сила.

Уравнение (1) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением 2 порядка с постоянными коэффициентами, его решение можно представить в виде суммы частного решения уравнения (1) и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$$

Исследуем решения уравнения (1), при анализе выделим 3 случая: $\delta < \omega_0$; $\delta > \omega_0$; $\delta = \omega_0$

1) $\delta < \omega_0$ решения уравнения (1) записывается:

$$q = Ae^{-\delta}cos(\Omega + \varphi), \qquad \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

2) В случае $\delta > \omega_0$ процесс называется апериодическим, зависимость заряда на конденсаторе от времени:

$$q = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t}, \qquad \alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

3) Условие $\delta = \omega_0$ определяет критический режим колебаний, а соответствующее этому условию сопротивление называется критическим сопротивлением контура $R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Логарифмический декремент затухания

Логарифм отношения значений заряда на пластинах конденсатора в двух последовательных максимумах называется логарифмическим декрементом затухания.

$$d = \ln\left(\frac{q_n}{q_{n+1}}\right) = \delta T, \qquad N = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\delta T} = \frac{1}{d}$$

Часто для характеристики затухание используют добротность контура $Q = \pi N$ или

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} \qquad (2)$$

Вынужденные колебания под действием гармонической силы

Вынужденные колебания под действием внешней гармонической силы с частотой ω описываются уравнением:

$$\ddot{q} + 2\delta\dot{q} + \omega_0^2 q = F_0 cos\omega t$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = B(\omega)\cos(\omega t + \gamma)$$

$$B(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2) + 4\delta^2\omega^2}}, tg\gamma = \frac{2\delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \tag{3}$$

Для последовательного RLC контура, учитывая, что $F_0 = \varepsilon_0/L$, формула амплитуды и фазы записываются:

$$B(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\omega\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad tg\gamma = \frac{R}{\omega L - {}^{1}/_{\omega C}}$$

Выразим величины, исследуемые в практической части:

$$I_0 = \omega B(\omega) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$U_L = I_0\omega L = \frac{\omega L\varepsilon_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$U_C = \frac{q}{C} = \frac{\varepsilon_0}{\omega C\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

$$U_R = I_0 R = \frac{\varepsilon_0 R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

Найдём частоту, при которой достигается максимум напряжения на резисторе, конденсаторе, катушке:

$$\omega_{max_R} = \sqrt{{}^{1}/_{LC}}, \qquad \omega_{max_C} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \approx \omega_0\left(1 + \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right);$$

$$\omega_{max\_L} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{2\delta^2}{\omega_0^2}}} \approx \omega_0\left(1 - \frac{\delta^2}{\omega_0^2}\right)$$

Процессы установления колебаний в контуре описываются уравнением:

$$q(t) = Ae^{-\delta t}\cos(\omega_s t + \varphi) + B(\omega)\cos(\omega t + \gamma)$$

В случае $q(0) = 0, \dot{q}(0) = 0$ решение записывается

$$q(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \omega_0^2}(cos\omega t - cos\omega_0 t)$$

Практическая часть

Рассмотрим, как выглядят осциллограммы напряжения на конденсаторе (верхняя) и на резисторе (нижняя) на рисунке 1.

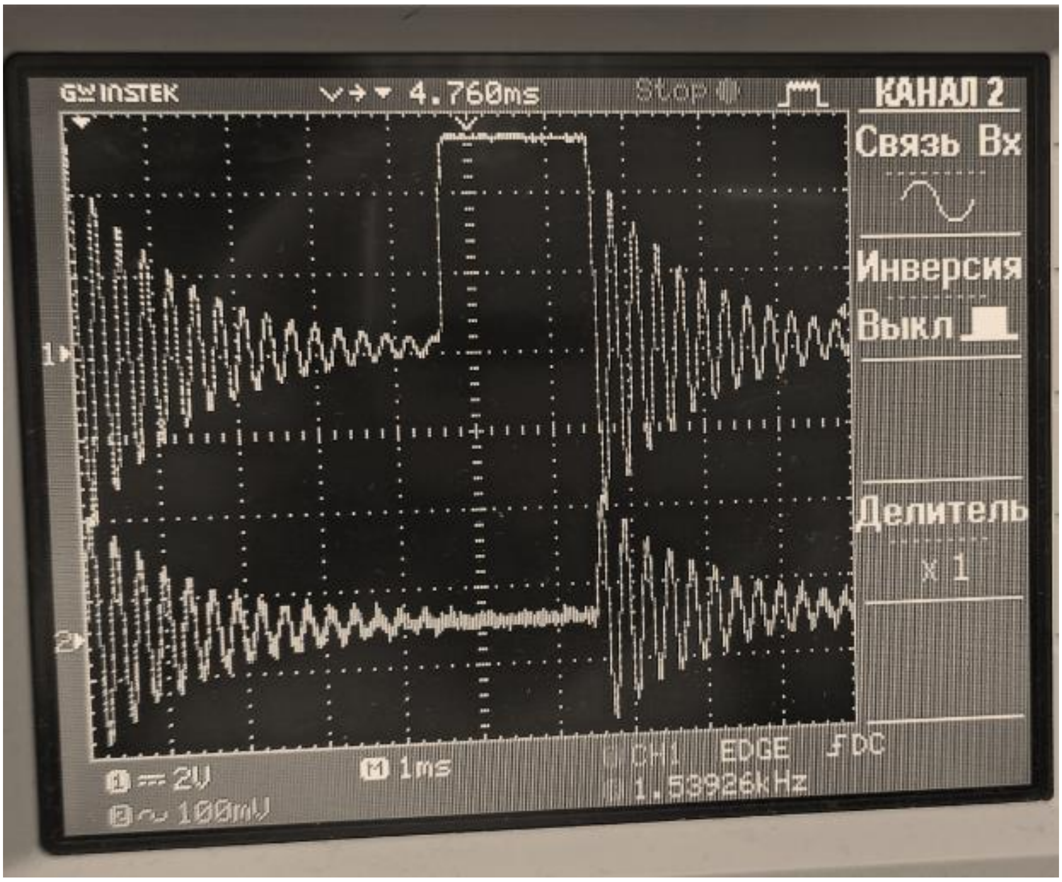


Рисунок 1. Осциллограммы напряжений на конденсаторе и на резисторе

Измерим период и логарифмический декремент затухания: для нахождения периода колебаний с хорошей точностью – измерим время, за которое проходит несколько периодов колебаний и поделим на число колебаний, аналогичную схему используем для нахождения декремента затухания: измерим отношение между максимумами через несколько периодов и поделим на количество декрементов затухания, укладываемых в период. Данные запишем в таблицу 1.

R, кОм	T, мс	q1	qn	n	d
0	0,4725	10,6	2	16	0,104232
0,02	0,472941	10,2	1,4	17	0,116819
0,05	0,473333	9,8	1	14	0,163027
0,1	0,4725	11,6	0,8	11	0,243104
0,23	0,475	7,8	0,6	7	0,366421
0,5	0,476667	5,4	0,2	4	0,823959
1	0,49	11,8	0,16	3	1,43356
2,3	0,54	11,6	0,24	1	3,878121

Таблица 1. Экспериментальные данные

где q1 – значение заряд в первом максимуме, qn – в n-ном, n – количество декрементов затухания между qn и q1.

Построим графики d(R), T(R):

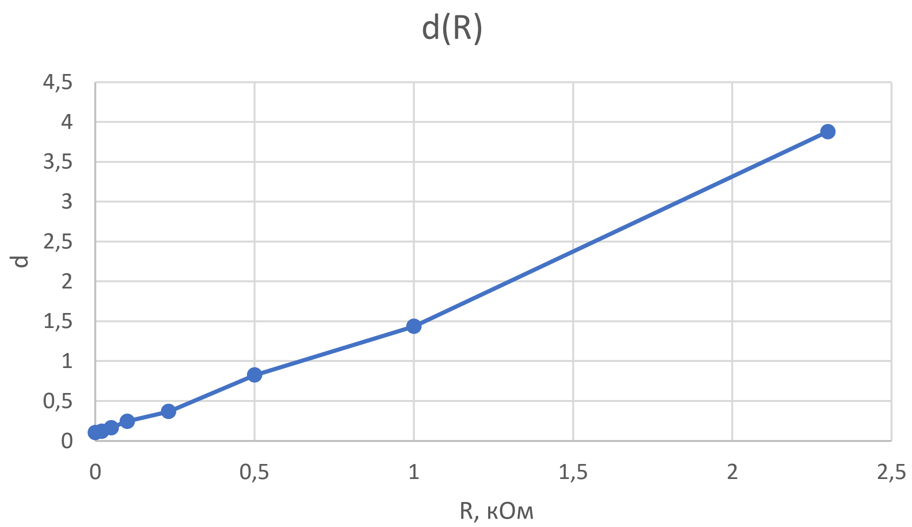


Рисунок 2. График зависимости логарифмического декремента от сопротивления

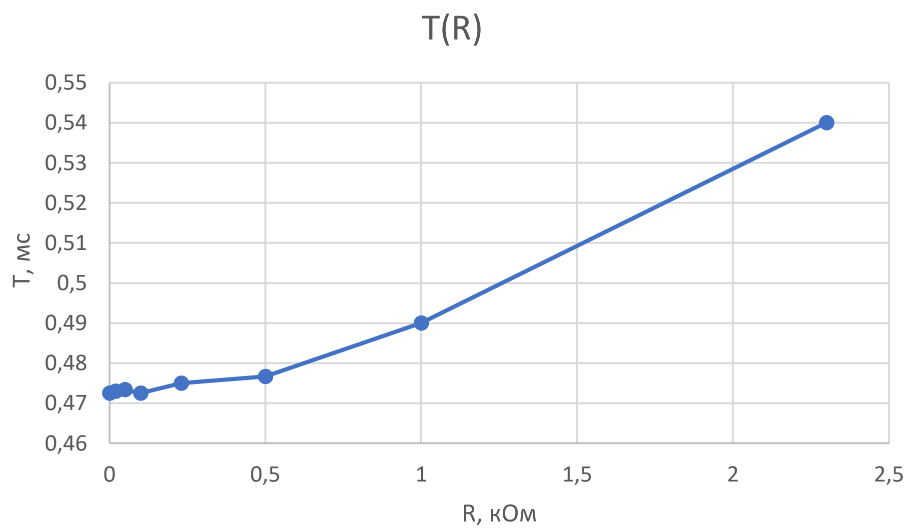


Рисунок 3. График зависимости периода колебаний от сопротивления

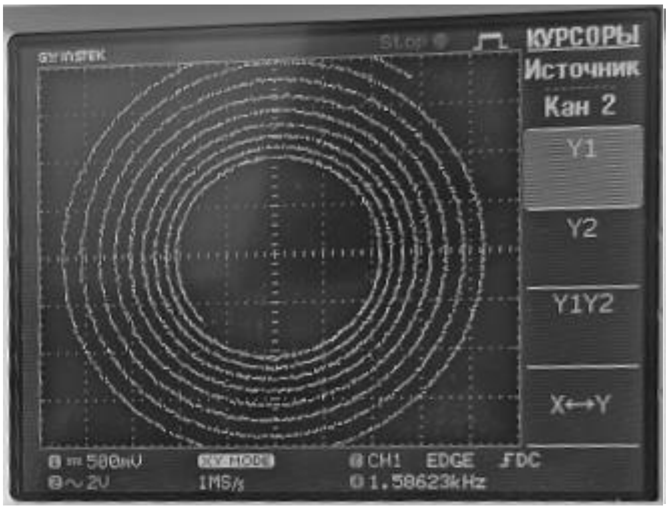
Рассчитаем значение добротности и индуктивности для значения R = 230 Ом. Добротность найдём по формуле $Q = {}^{\pi}/_{d}$, а для поиска индуктивности сначала найдём частоту собственных колебаний по формуле:

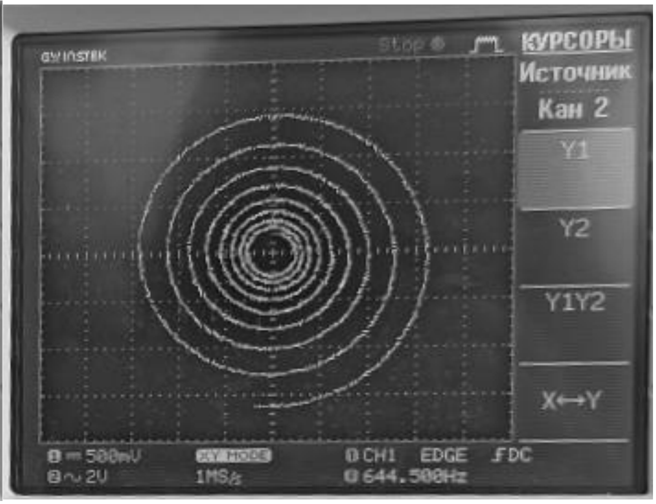
$$\omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2 \; - \delta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2} \;=\; \omega_0\sqrt{1 \;- \frac{1}{4Q^2}} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

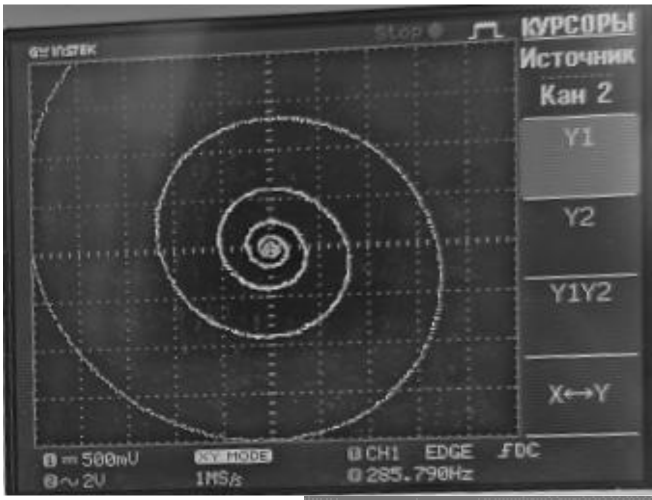
Для сопротивления в 230 Ом получим:

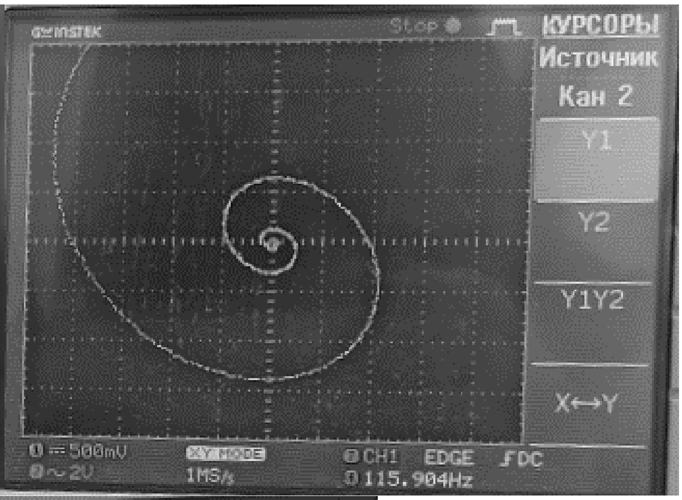
$$Q_{230} \;=\; 8{,}574, \qquad L_{230} = \; 172{,}45 \text{ мГн}$$

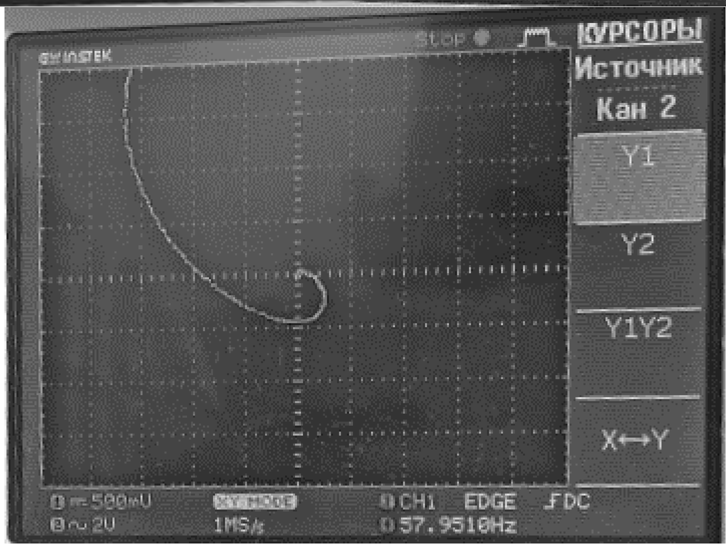
Получим фазовые картинки для нескольких значений сопротивлений в координатах $(\dot{q}, q)$











Сопротивления соответственно – 0; 0,1; 0,5; 1; 2,3 кОм.

Исследуем зависимость амплитуд напряжений от частоты вынуждающей силы, данные представим в виде графиков:

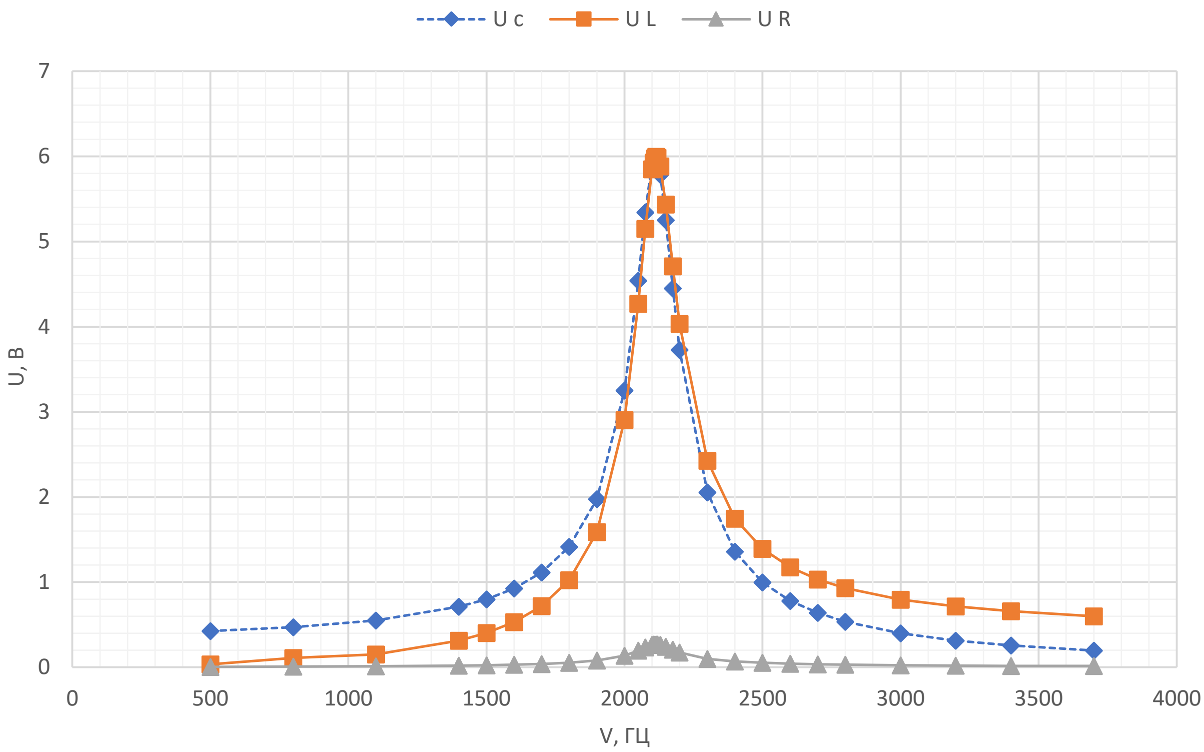


Рисунок 4. График зависимости напряжений от частоты вынуждающей силы 0,1 кОм

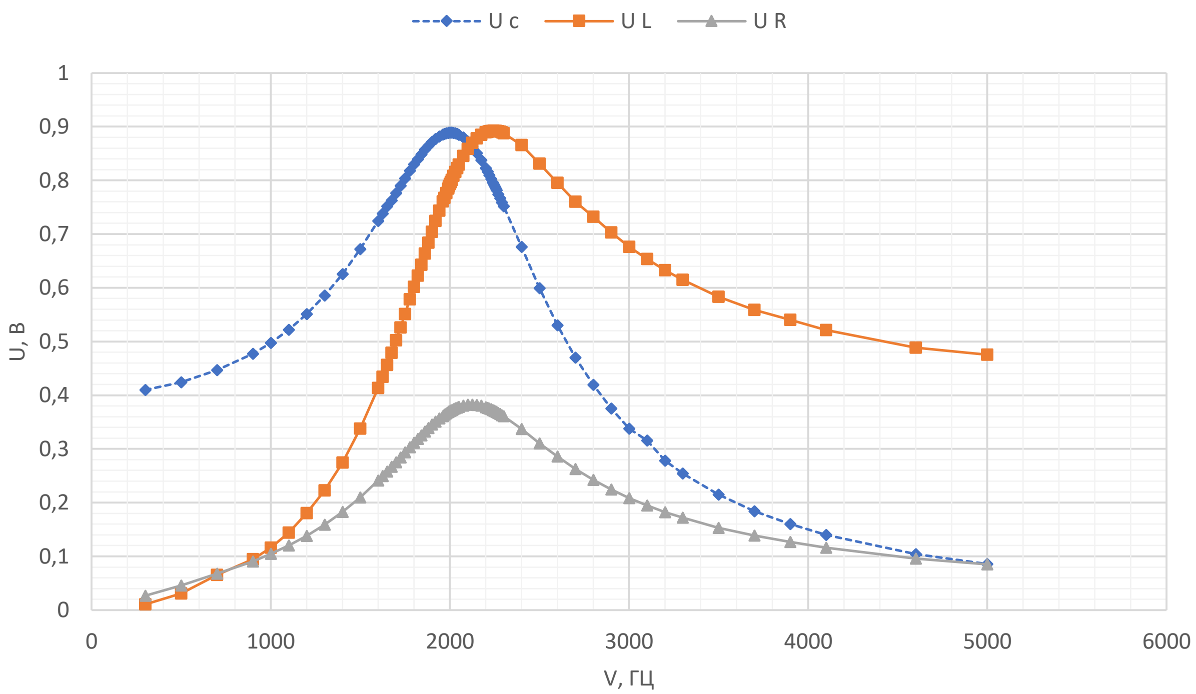


Рисунок 5. Графи зависимости напряжений от частоты вынуждающей силы при сопротивлении 1 кОм

По экспериментальным данным резонансная частота контура $\omega_0 = 13351{,}77\ ^{\text{рад}}/_{\text{с}}$. Уточним значение индуктивности - $L\ \approx 171{,}02$ мГн, уточним и значение сопротивления нашей установки, воспользовавшись формулой для добротности: $Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\omega_0}{R}L$, тогда сопротивление: $R = \frac{\omega_0 L}{Q}$, значит более точное сопротивление для 0,1 кОм - 118,5 Ом, а для 1кОм уточнять не будем, так как точность определения добротности мала (логарифмический декремент затухания измерен за малое количество периодов). Построим теоретические графики используя формулы (3) и (2).

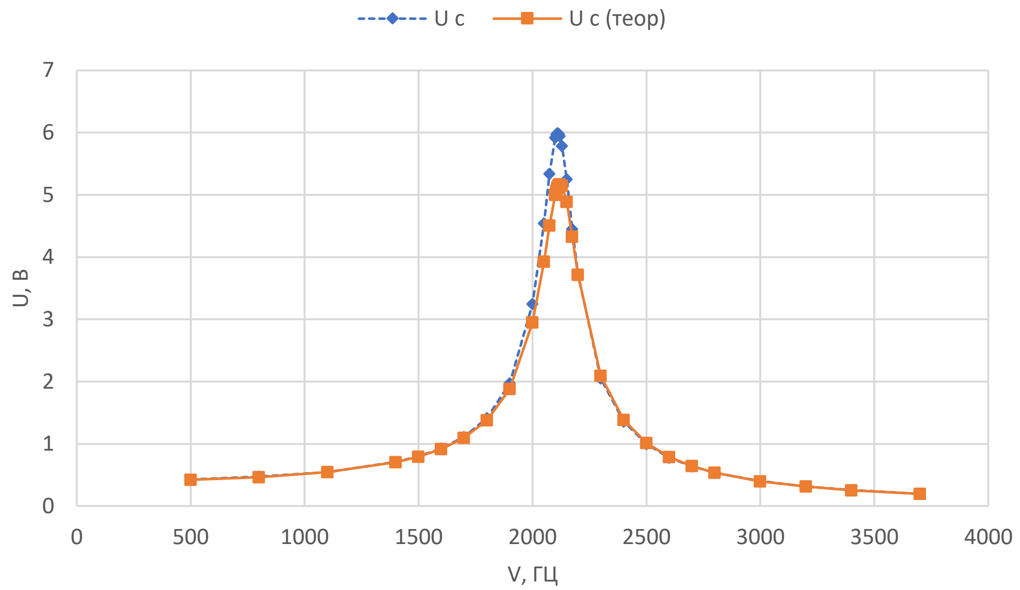


Рисунок 6. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на конденсаторе, R = 118,5 Ом.

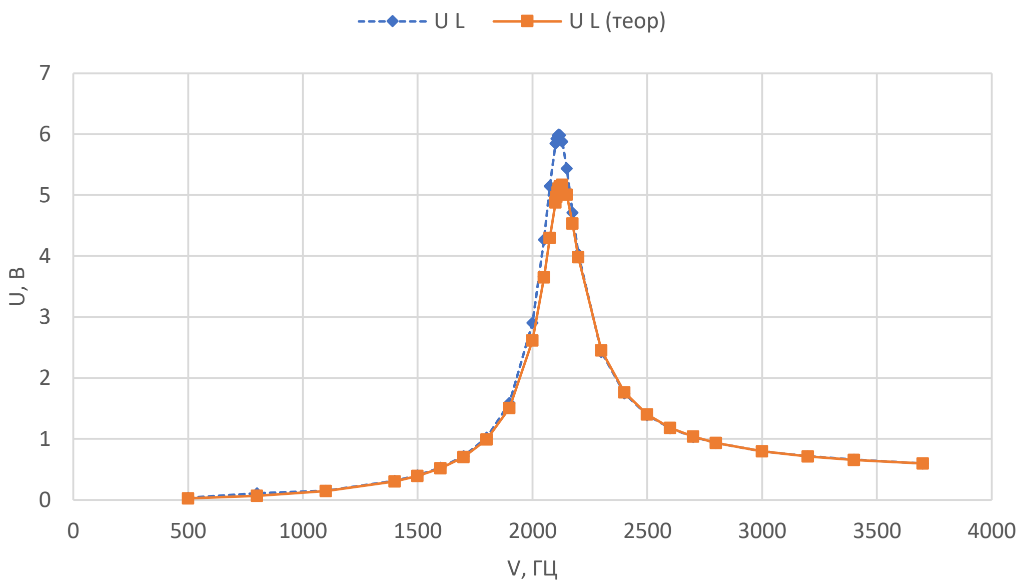


Рисунок 7. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на катушке, R = 118,5 Ом.

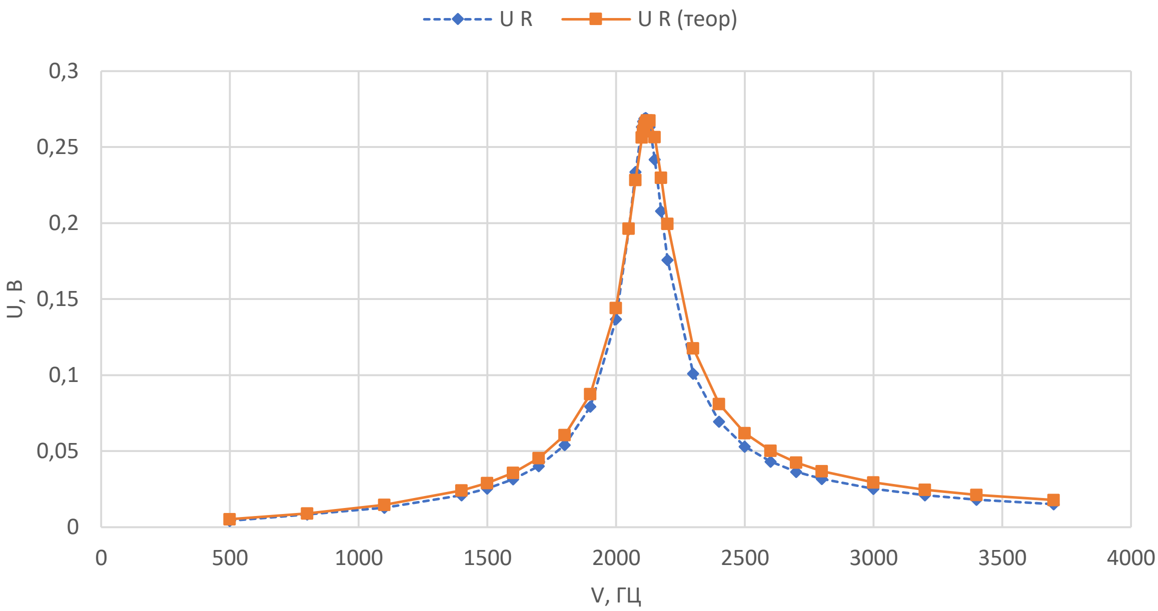


Рисунок 8. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на резисторе, R = 118,5 Ом.

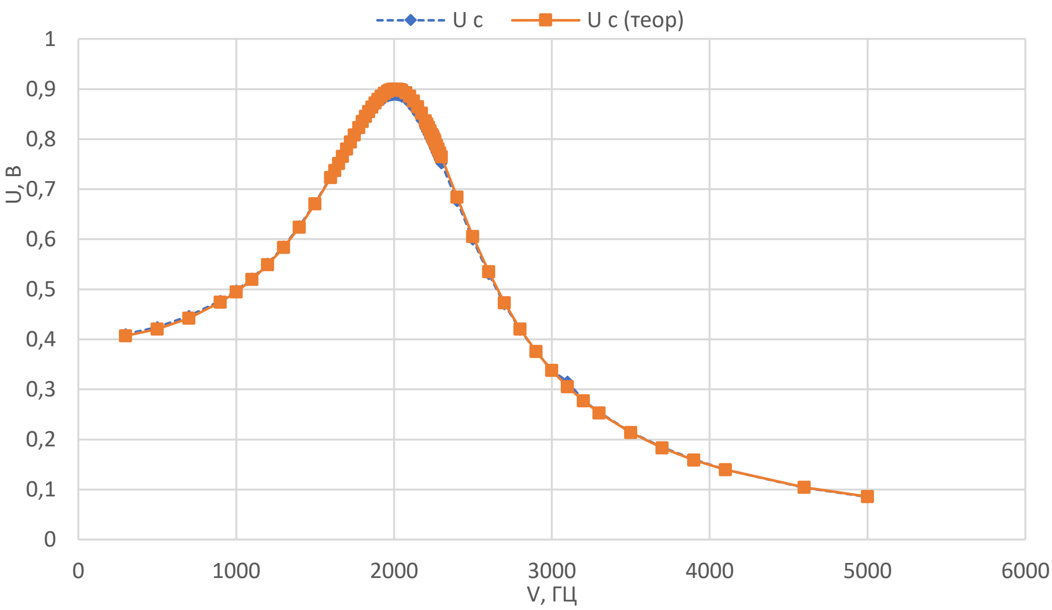


Рисунок 9. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на конденсаторе, R = 1кОм.

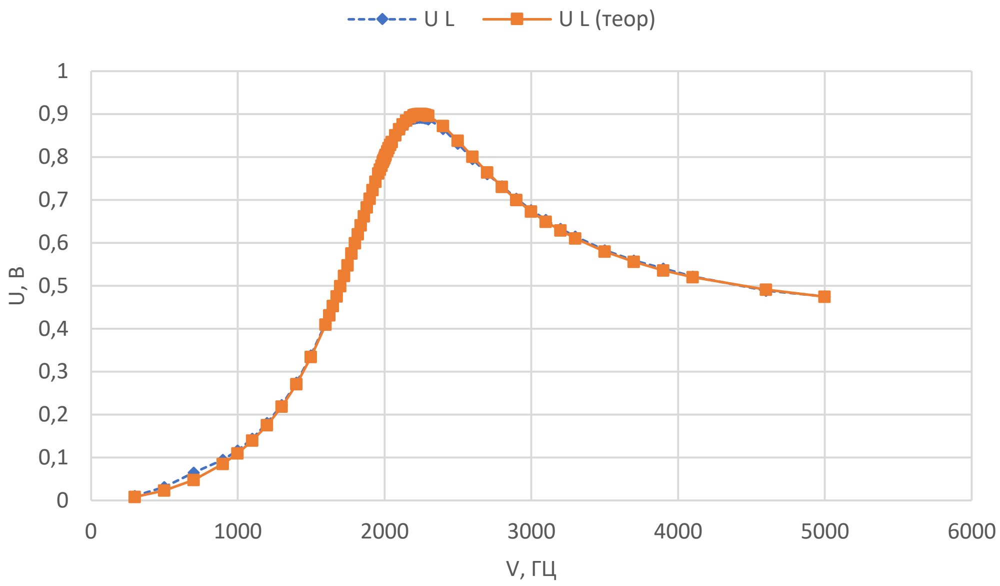


Рисунок 10. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на катушке, R = 1кОм.

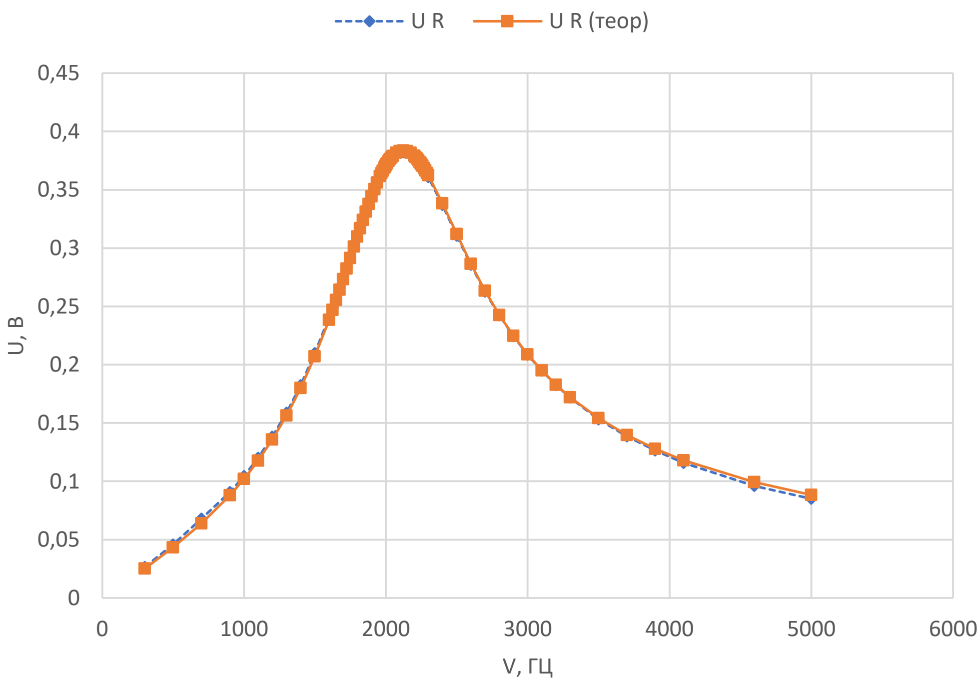
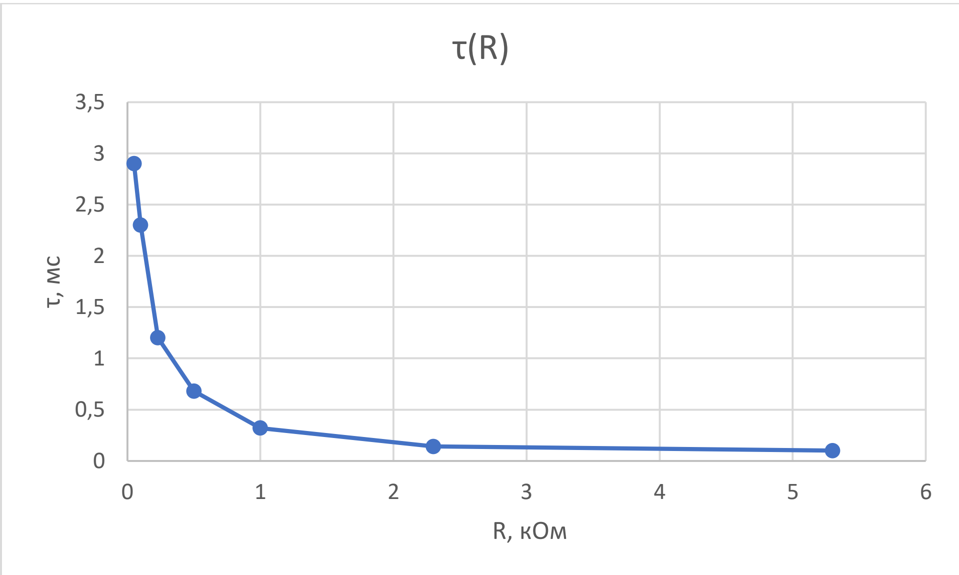


Рисунок 11. Экспериментальные и теоретические графики зависимости напряжения на резисторе, R = 1кОм.

Уточним сопротивление контура «1кОм», для этого воспользуемся тем, что на собственной частоте контура амплитуда напряжения на резисторе максимальна и равна отношению амплитуды силы тока к сопротивлению, поэтому точное сопротивление – 1041,97 Ом. Определим добротность контура с сопротивлением «1 кОм» по формуле $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$, получим – $Q_R \approx 2{,}1915$. Найдём добротность контура и другим способом: отношение напряжений $\frac{U_C U_L}{U_R^2} = \frac{L}{CR^2} = Q^2$, при резонансе $Q \approx 2{,}265$. Существует и другой способ определения добротности: ширина резонансной кривой (диапазон частот от значения амплитуды в два раза меньшей резонансной слева до значения в два раза меньшей резонансной справа) равна $\frac{\omega_0}{Q}$, таким образом, получим: $Q_R \approx 1{,}25$; $Q_C \approx 1$, а ширину резонансной кривой по L по нашим данным не определить точно. Этот метод даёт большое расхождение с данными, полученными нами по определению логарифмического декремента затухания ($Q \approx 2{,}1915$), потому что выражение $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ использует приближение $Q \gg 1$, что в нашем случае – неверно.

Исследуем зависимость времени установления колебаний в контуре от сопротивления контура, по экспериментальным данным построим график:



Время установления - это время, за которое вынужденные колебания становятся больше собственных, в терминах решения уравнения (1) – время, за которое общее решение становится много меньше частного.

Вывод:

- Провели исследования собственных колебаний в электрическом контуре, получили зависимости периода и логарифмического декремента затухания от значения сопротивления в цепи;
- Рассчитали значения добротности и индуктивности для значения R = 230 Ом: $Q_{230} = 8{,}574$, $L_{230} = 172{,}45$ мГн;
- Рассмотрели фазовые плоскости, описывающие колебания при различных значениях R;

- При исследовании вынужденных колебаний были получены следующие зависимости: $U_c(\nu), U_L(\nu), U_R(\nu)$, сравнили их с теоретическими кривыми. Расхождение между экспериментом и теорией обусловлено неточными данными цепи, влияющие на теоретические кривые.
- Установили, что время установления колебаний уменьшается при увеличении сопротивления в цепи.