Билеты по курсу
«*Физика конденсированного состояния*»

Google Gemini 3 Pro Андрей Можаров

27 января 2026 г.

Оглавление

Билет №1 **4**
1 Принцип запрета Паули и свойства идеального газа свободных электронов в основном состоянии. 4
1.1 Введение: Модель свободных электронов (Квантовая теория Зоммерфельда) 4
1.2 Принцип запрета Паули 4
1.3 Основное состояние ($T = 0$) 4
2 Теорема о связи семейств атомных плоскостей с векторами обратной решётки. 5
2.1 Основные определения 5
2.2 Формулировка теоремы 6
2.3 Доказательство 6

Билет №2 **7**
1 Температурное разложение Зоммерфельда. Расчёт удельной теплоёмкости вырожденного электронного газа. 7
2 Кристаллические структуры и решётки с базисом. Примитивная (элементарная) ячейка, ячейка Вигнера-Зейтца и условная ячейка. 7

Билет №3 **8**
1 Магнетизм электронного газа. Теорема Бора - Ван Леевен. 8
2 Приближение почти свободных электронов: теория возмущений по слабому периодическому псевдопотенциалу, поведение уровней энергии вблизи брэгговских плоскостей. 8

Билет №4 **9**
1 Магнитная восприимчивость больцмановского газа электронов с учётом их собственного магнитного момента. Закон Кюри. 9
2 Решётка Бравэ и её свойства. 9

Билет №5 **10**
1 Парамагнетизм вырожденного электронного газа, связанный с существованием собственного магнитного момента у электрона (парамагнетизм Паули). 10
2 Гексагональная плотноупакованная структура. 10

Билет №6 **11**
1 Электро- и теплопроводность металлов: закон Ома; температурная зависимость удельного сопротивления; закон Фурье; коэффициент теплопроводности; закон Видемана-Франца. 11
2 Граничные условия Борна-Кармана для блоховских электронов и число разрешённых значений квазиимпульса. Критерии металла и изолятора. 11

Билет №7 **12**

1 Простая, объёмно-центрированная и гранецентрированная кубические решётки. . . . 12
2 Статическая электропроводность металлов в рамках квантовой модели свободных электронов Зоммерфельда. . . . 12

Билет №8 **13**
1 Структуры типа хлорида натрия, алмаза и цинковой обманки. . . . 13
2 Коэффициент теплопроводности металлов в рамках квантовой модели свободных электронов Зоммерфельда. Закон Видемана- Франца. . . . 13

Билет №9 **14**
1 Координационное число и коэффициент компактности (упаковочный множитель). Алгоритм построения различных плотноупакованных структур. . . . 14
2 Решение уравнения Больцмана в пределе малых градиентов электрического потенциала и температуры. Транспортное время свободного пробега электронов. . . . 14

Билет №10 **15**
1 Поворотные оси симметрии. Теорема о симметрии кристаллических решёток по отношению к поворотам. . . . 15
2 Общая структура и свойства интеграла столкновений. Принцип детального баланса. . . . 15

Билет №11 **16**
1 Обратная решётка и её свойства. Обратные решётки для г.ц.к. и о.ц.к. решёток. 16
2 Эффект Зеебека. Оценка дифференциальной термо-э.д.с. металлов в рамках элементарной кинетической теории Друде. . . . 16

Билет №12 **17**
1 Электропроводность металла под действием нестационарного, но однородного электрического поля в модели свободных электронов Друде. . . . 17
2 Разрешённые и запрещённые энергетические зоны в кристаллах. Отсутствие вклада в электрический ток от полностью заполненных зон (инертность заполненных зон). Критерии металла и диэлектрика. . . . 17

Билет №13 **18**
1 Теорема Блоха о виде волновой функции электрона в периодическом потенциале. Квазиимпульс и эго свойства. . . . 18
2 Теория электропроводности металлов Друде. Среднее время и средняя длина свободного пробега. . . . 18

Билет №14 **19**
1 Определение собственного и орбитального магнитного моментов электрона. Намагниченность и магнитная восприимчивость электронного газа. Диамагнетизм и парамагнетизм. . . . 19
2 Теорема о средней скорости блоховского электрона. . . . 19

Билет №15 **20**
1 Плотность одноэлектронных уровней энергии в модели свободных электронов Зоммерфельда. Расчёт температурной зависимости химического потенциала для сильно вырожденного электронного газа. . . . 20

2 Геометрические формулировки условий конструктивной интерференции рентгеновских лучей в кристалле: построения Бриллюэна и Эвальда. 20

Билет №16 **21**

1 Принцип запрета Паули и волновая функция невзаимодействующих электронов. Модель свободных электронов Зоммерфельда. 21

2 Экспериментальные методы определения кристаллических структур: метод Лауэ, метод вращающегося кристалла, порошковый метод (метод Дебая-Шеррера). 21

Билет №17 **22**

1 Условия конструктивной интерференции рентгеновских лучей в кристалле в формулировках Брэгга и Лауэ. Доказательство эквивалентности этих формулировок. 22

2 Распределение Ферми-Дирака. Температура Ферми, химический потенциал и условие вырождения электронного газа. 22

Билет №18 **23**

1 Теория теплопроводности металлов Друде. Закон Видемана-Франца в рамках модели Друде. 23

2 Геометрический структурный фактор кристаллических структур. 23

Билет №19 **24**

1 Агрегатные состояния и термодинамические фазы вещества. Фазовые переходы, критические точки, полиморфизм. 24

2 Расчёт дифференциальной термо-э.д.с. металлов в рамках кинетического уравнения Больцмана. 24

Билет №20 **25**

1 Атомные плоскости и семейства атомных плоскостей. Индексы Миллера и их геометрическая интерпретация. 25

2 Свойства энергетического спектра электронов вблизи экстремумов энергии в зоне Бриллюэна. Тензор обратных эффективных масс блоховского электрона и его свойства. 25

Билет №21 **26**

1 Количественный критерий принадлежности твёрдого тела к металлу или диэлектрику. Диэлектрики, полупроводники, металлы и полуметаллы. . . . 26

2 Эффективные массы блоховских электронов в двузонной модели. 26

Билет №1

1 Принцип запрета Паули и свойства идеального газа свободных электронов в основном состоянии.

1.1 Введение: Модель свободных электронов (Квантовая теория Зоммерфельда)

В отличие от классической теории Друде, теория Зоммерфельда рассматривает электроны как **квантовый газ**, подчиняющийся статистике Ферми-Дирака.

- **«Свободные»** означает, что потенциальная энергия взаимодействия электрона с ионами решетки и другими электронами полагается равной нулю ($U = 0$).
- Электроны находятся в потенциальном ящике объемом V (кристалл).

1.2 Принцип запрета Паули

Это фундаментальное положение, определяющее поведение электронной системы.

- **Суть:** Электроны являются фермионами (спин $s = 1/2$). Согласно принципу Паули, в одном квантовом состоянии не может находиться более одного фермиона.
- **Квантовое состояние:** Характеризуется волновым вектором $\vec{k}$ и проекцией спина σ ($\uparrow$ или $\downarrow$). Следовательно, каждое пространственное состояние $\vec{k}$ может быть занято **не более чем двумя** электронами (с противоположными спинами).

1.3 Основное состояние ($T = 0$)

«Основное состояние» означает состояние системы при абсолютном нуле температуры. В классической физике энергия всех частиц была бы равна нулю. В квантовой физике из-за принципа Паули это невозможно: электроны вынуждены заполнять энергетические уровни, начиная с нижнего, "этаж за этажом".

Сфера Ферми и волновой вектор Ферми

Разрешенные значения волнового вектора определяются граничными условиями Борна-Кармана (периодическими):

$$k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L} n_{x,y,z} \qquad \text{где } n_i \text{ — целые числа}$$

В k-пространстве одно разрешенное значение $\vec{k}$ занимает объем $(2\pi L)^3 = 8\pi^3/V$.

При $T = 0$ N электронов заполняют сферу в пространстве импульсов (сферу Ферми) радиуса k_F. Объем этой сферы $\Omega = 4/3\pi k_F^3$.

Число электронов N в объеме V связано с k_F формулой (учитываем фактор 2 за счет спина):

$$N = 2 \cdot \frac{V_{\text{сферы}}}{V_{\text{на одно состояние}}} = 2 \cdot \frac{4/3\pi k_F^3}{(2\pi)^3/V} = \frac{V k_F^3}{3\pi^2}$$

Отсюда выводится важнейшее соотношение для концентрации электронов $n = N/V$:

$$n = \frac{k_F^3}{3\pi^2} \Rightarrow k_F = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

Энергия Ферми

Энергия электрона с волновым вектором $\vec{k}$ равна:

$$\varepsilon(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Максимальная энергия занятого состояния при $T = 0$ называется **энергией Ферми**:

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$$

Физический смысл: Это химический потенциал системы при $T = 0$. Все состояния с $\varepsilon < \varepsilon_F$ заняты, а с $\varepsilon > \varepsilon_F$ свободны.
Порядок величины: Для металлов ε_F составляет несколько электрон-вольт (1.5–10 эВ), что соответствует гигантской «температуре Ферми» $T_F = \varepsilon_F / k_B \approx 10^4 - 10^5$ К.

Полная и средняя энергия

Даже при абсолютном нуле электронный газ обладает огромной энергией. Полная энергия E получается суммированием энергий всех электронов внутри сферы Ферми (интегрированием по слоям сферы):

$$E = 2 \sum_{k<k_F} \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

В Ашкрофте-Мермине (Том 1, стр. 47) приводится знаменитый результат для средней энергии на один электрон:

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5}\varepsilon_F$$

Это означает, что средняя энергия электрона составляет 60% от максимальной.

Давление вырожденного газа

Из-за высокой кинетической энергии электронный газ оказывает давление на стенки кристалла, даже если температура равна нулю. Это давление (давление вырождения) можно получить из термодинамического соотношения $P = -(\partial E / \partial V)_N$.

$$P = \frac{2}{3}\frac{E}{V} = \frac{2}{3} n \cdot \frac{3}{5}\varepsilon_F = \frac{2}{5} n \varepsilon_F$$

Именно это давление удерживает кристалл от сжатия (противодействует притяжению ионов).

2 Теорема о связи семейств атомных плоскостей с векторами обратной решётки.

2.1 Основные определения

- **Обратная решетка:** Множество векторов $\mathbf{K}$, удовлетворяющих условию $e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{R}} = 1$ для любого вектора прямой решетки Бравэ $\mathbf{R}$.
- **Семейство атомных плоскостей:** Набор параллельных, равноотстоящих плоскостей, которые содержат все узлы решетки Бравэ.

- **Индексы Миллера (h, k, l):** Три целых числа (взаимно простых), определяющих ориентацию плоскости. Плоскость пересекает оси примитивных векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ в точках $x_1\mathbf{a}_1, x_2\mathbf{a}_2, x_3\mathbf{a}_3$, где отрезки отсечения обратно пропорциональны индексам:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l}$$

2.2 Формулировка теоремы

Для любого семейства плоскостей решетки, отстоящих друг от друга на расстояние d и определяемых индексами Миллера (h, k, l), существует вектор обратной решетки $\mathbf{K}_{hkl} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$, такой что:

1. Вектор $\mathbf{K}_{hkl}$ перпендикулярен плоскостям этого семейства.
2. Длина вектора $|\mathbf{K}_{hkl}|$ связана с межплоскостным расстоянием формулой:

$$d_{hkl} = \frac{2\pi}{|\mathbf{K}_{hkl}|}$$

2.3 Доказательство

Доказательство перпендикулярности ($\mathbf{K} \perp$ плоскости)

Рассмотрим плоскость, проходящую через точки пересечения с осями: $\mathbf{a}_1/h$, $\mathbf{a}_2/k$, $\mathbf{a}_3/l$. Построим два вектора, лежащих в этой плоскости:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}_1}{h} - \frac{\mathbf{a}_2}{k}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{a}_1}{h} - \frac{\mathbf{a}_3}{l}$$

Вычислим скалярное произведение вектора обратной решетки $\mathbf{K} = h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3$ с вектором $\mathbf{u}$, используя соотношение $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{a}_j = 2\pi\delta_{ij}$:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = (h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3) \cdot \left(\frac{\mathbf{a}_1}{h} - \frac{\mathbf{a}_2}{k}\right)$$

$$= h\frac{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1}{h} - k\frac{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{a}_2}{k} = 2\pi - 2\pi = 0$$

Аналогично $\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} = 0$. Так как $\mathbf{K}$ перпендикулярен двум не коллинеарным векторам в плоскости, он перпендикулярен самой плоскости.

Доказательство формулы для расстояния d

Расстояние от начала координат до ближайшей плоскости (являющееся также межплоскостным расстоянием d) равно проекции любого вектора, соединяющего начало координат с точкой на плоскости, на направление нормали $\mathbf{n}$.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|}$$

В качестве точки на плоскости выберем пересечение с осью $\mathbf{a}_1$: $\mathbf{r} = \mathbf{a}_1/h$.

$$d = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = \frac{\mathbf{K}}{|\mathbf{K}|} \cdot \frac{\mathbf{a}_1}{h}$$

Раскрывая $\mathbf{K}$:

$$d = \frac{(h\mathbf{b}_1 + k\mathbf{b}_2 + l\mathbf{b}_3) \cdot \mathbf{a}_1}{h|\mathbf{K}|} = \frac{h(\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{a}_1)}{h|\mathbf{K}|} = \frac{2\pi}{|\mathbf{K}|}$$

Что и требовалось доказать.

Билет №2

1 Температурное разложение Зоммерфельда. Расчёт удельной теплоёмкости вырожденного электронного газа.

2 Кристаллические структуры и решётки с базисом. Примитивная (элементарная) ячейка, ячейка Вигнера-Зейтца и условная ячейка.

Билет №3

1 Магнетизм электронного газа. Теорема Бора - Ван Леевен.

2 Приближение почти свободных электронов: теория возмущений по слабому периодическому псевдопотенциалу, поведение уровней энергии вблизи брэгговских плоскостей.

Билет №4

1 Магнитная восприимчивость больцмановского газа электронов с учётом их собственного магнитного момента. Закон Кюри.

2 Решётка Бравэ и её свойства.

Билет №5

1 **Парамагнетизм вырожденного электронного газа, связанный с существованием собственного магнитного момента у электрона (парамагнетизм Паули).**

2 **Гексагональная плотноупакованная структура.**

Билет №6

1 Электро- и теплопроводность металлов: закон Ома; температурная зависимость удельного сопротивления; закон Фурье; коэффициент теплопроводности; закон Видемана-Франца.

2 Граничные условия Борна-Кармана для блоховских электронов и число разрешённых значений квазиимпульса. Критерии металла и изолятора.

Билет №7

1 Простая, объёмно-центрированная и гранецентрированная кубические решётки.

2 Статическая электропроводность металлов в рамках квантовой модели свободных электронов Зоммерфельда.

Билет №8

1 Структуры типа хлорида натрия, алмаза и цинковой обманки.

2 Коэффициент теплопроводности металлов в рамках квантовой модели свободных электронов Зоммерфельда. Закон Видемана- Франца.

Билет №9

1 Координационное число и коэффициент компактности (упаковочный множитель). Алгоритм построения различных плотноупакованных структур.

2 Решение уравнения Больцмана в пределе малых градиентов электрического потенциала и температуры. Транспортное время свободного пробега электронов.

Билет №10

1 **Поворотные оси симметрии. Теорема о симметрии кристаллических решёток по отношению к поворотам.**

2 **Общая структура и свойства интеграла столкновений. Принцип детального баланса.**

Билет №11

1 Обратная решётка и её свойства. Обратные решётки для г.ц.к. и о.ц.к. решёток.

2 Эффект Зеебека. Оценка дифференциальной термо-э.д.с. металлов в рамках элементарной кинетической теории Друде.

Билет №12

1 Электропроводность металла под действием нестационарного, но однородного электрического поля в модели свободных электронов Друде.

2 Разрешённые и запрещённые энергетические зоны в кристаллах. Отсутствие вклада в электрический ток от полностью заполненных зон (инертность заполненных зон). Критерии металла и диэлектрика.

Билет №13

1 Теорема Блоха о виде волновой функции электрона в периодическом потенциале. Квазиимпульс и эго свойства.

2 Теория электропроводности металлов Друде. Среднее время и средняя длина свободного пробега.

Билет №14

1 Определение собственного и орбитального магнитного моментов электрона. Намагниченность и магнитная восприимчивость электронного газа. Диамагнетизм и парамагнетизм.

2 Теорема о средней скорости блоховского электрона.

Билет №15

1 **Плотность одноэлектронных уровней энергии в модели свободных электронов Зоммерфельда. Расчёт температурной зависимости химического потенциала для сильно вырожденного электронного газа.**

2 **Геометрические формулировки условий конструктивной интерференции рентгеновских лучей в кристалле: построения Бриллюэна и Эвальда.**

Билет №16

1 Принцип запрета Паули и волновая функция невзаимодействующих электронов. Модель свободных электронов Зоммерфельда.

2 Экспериментальные методы определения кристаллических структур: метод Лауэ, метод вращающегося кристалла, порошковый метод (метод Дебая-Шеррера).

Билет №17

1 **Условия конструктивной интерференции рентгеновских лучей в кристалле в формулировках Брэгга и Лауэ. Доказательство эквивалентности этих формулировок.**

2 **Распределение Ферми-Дирака. Температура Ферми, химический потенциал и условие вырождения электронного газа.**

Билет №18

1 Теория теплопроводности металлов Друде. Закон Видемана-Франца в рамках модели Друде.

2 Геометрический структурный фактор кристаллических структур.

Билет №19

1 **Агрегатные состояния и термодинамические фазы вещества. Фазовые переходы, критические точки, полиморфизм.**

2 **Расчёт дифференциальной термо-э.д.с. металлов в рамках кинетического уравнения Больцмана.**

Билет №20

1 Атомные плоскости и семейства атомных плоскостей. Индексы Миллера и их геометрическая интерпретация.

2 Свойства энергетического спектра электронов вблизи экстремумов энергии в зоне Бриллюэна. Тензор обратных эффективных масс блоховского электрона и его свойства.

Билет №21

1 Количественный критерий принадлежности твёрдого тела к металлу или диэлектрику. Диэлектрики, полупроводники, металлы и полуметаллы.

2 Эффективные массы блоховских электронов в двузонной модели.