Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Отчет по лабораторной работе № 114

«Измерение момента инерции махового колеса»

Дата протокола 02.03.23
Дата отчета __.__.23

Выполнили:
Студент 1 курса ВШОПФ
Парфенов Ярослав и Даниил Кульшин

Цель работы: измерить момент инерции махового колеса двумя способами (методом вращения и методом колебаний), сравнить полученные значения, оценить теоретически вклад обода и спиц

Оборудование: маховое колесо, груз m=(500,0±0.5)г, груз m=(200±0,5)г, груз m=(1900,0±0,5)г, груз m=(1450,0±0,5)г, секундомер, линейка, штангенциркуль, Δt=0,2с, Δm=0,5г, Δr=0,005см, Δh=0,1см, ΔR=0,005см, ΔL=0,1см

Теоретическая часть

Для тел простой формы момент инерции вычисляется аналитически. При сложном распределении массы относительно оси вращения момент инерции может быть рассчитан численно или измерен в опыте. Для измерения момента инерции махового колеса можно пользоваться двумя методами: методом вращения и методом колебаний.

1.Метод вращений

Колесо имеет цилиндрическую ось и находится в состоянии равновесия, т.к. центр масс его лежит на оси вращения. На шкив со шпилькой намотаем нить с грузом массы $m_г$ (см. Рис.1). Груз поднимется от пола на высоту h, освободим колесо. Груз, опускаясь, приведет его во вращательное движение. Часть механической энергии системы колесо-ось-шкив перейдет в работу силы трения:

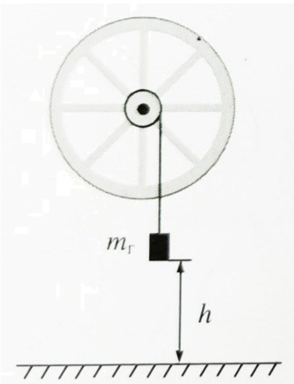

Рис. 1

$$\Delta W_{мех} = A_{тр} \quad (1)$$

Если принять за нулевую потенциальную энергию на уровне пола, то механическая энергия в начальном положении равна

$$W_{мех1} = m_г gh \quad (2),$$

а перед ударом груза о пол:

$$W_{мех2} = m_г \frac{V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (3),$$

где V и ω – скорость груза и угловая скорость колеса в данный момент, I – его момент инерции. Считаем, что сила трения не зависит от скорости вращения, тогда можно сказать, что сила трения равна силе трения за один оборот на число оборотов, совершенных колесом при опускании груза

$$A_{mp} = A_{mp_1} n_1 \qquad (4),$$

Тогда (1) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{m_г V^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - m_г gh = A_{mp_1} n_1 \quad (5)$$

За один оборот колесо проходит расстояние $2\pi r$ (r – радиус шкива), тогда число оборотов находится по формуле:

$$n_1 = \frac{h}{2\pi r} \qquad (6)$$

Учтем что груз движется равноускоренно, тогда

$$V = \frac{2h}{t} \qquad (7)$$

Поскольку нить разматывается со шкива без проскальзывания, угловая скорость колеса в момент удара о пол будет равна:

$$\omega = \frac{2h}{rt} \qquad (8)$$

Рассмотрим движение после того, как груз достиг пола и нить соскользнула со шкива, тогда колесо будет продолжать своё замедленное движение до тех пор, пока сила трения не остановит его. Будем считать, что работа сила трения за один оборот для этого случая будет такой же, как и с грузом - $A_{mp1} n_2$ **(9)**,где n_2 – число оборотов колеса на этом временном промежутке.

Запишем теорему об изменении кинетической энергии в виде $\frac{-I\omega^2}{2} = A_{mp_1} n_2$. Откуда:

$$A_{mp_1} = \frac{-I\omega^2}{2n_2} \quad (10).$$

Воспользовавшись формулами (5)-(10), определим момент инерции колеса:

$$I = mr^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right) \left(\frac{n_2}{n_1 + n_2} \right) \qquad (11).$$

2. Метод колебаний

Навернем на штырек колеса груз, превратив маховое колесо в физический маятник. Момент сил, действующих на груз:

$$M = -mgl \sin \sin \alpha \qquad (12).$$

Момент импульса груза:

$$L = I_м \dot{\alpha} \qquad (13).$$

где $I_м$- момент инерции маятника относительно точки подвеса.

Уравнение моментов тогда выглядит следующим образом:

$$I_м \ddot{\alpha} = -mgl \sin \sin \alpha \qquad (14)$$

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_м} \sin \sin \alpha = 0 \qquad (15)$$

В приближении малых колебаний получим уравнение гармонического осциллятора

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{I_м} \alpha = 0 \qquad (16)$$

А значит,

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_м}} \qquad (17)$$

$$\text{и } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I_м}{mgl}} \qquad (18).$$

Выразим момент инерции маятника

$$I_м = \frac{mglT^2}{4\pi^2} \qquad (19).$$

Тогда можно найти момент инерции колеса, вычитая из момента инерции физического маятника момент инерции груза, который определяется формулой (по Теореме Гюйгенса-Штейнера):

$$I_{груза} = \frac{mr^2}{2} + ml^2 \qquad (20),$$

$$I_{колеса} = I - I_{груза} \qquad (21).$$

Практическая часть

	ρ, г/см^3	R, см	L, см	I, г см^2
ось	7,8	0,9	7,4	59,456
утолщение	7,8	1,25	17	508,26
шкив	7,8	3,7	3,27	7504,97

1. Измерим моменты инерции методом вращения, используя грузы массой 500г и 200г и формулы (6, 11). Данные занесем в таблицу 1:

m,г	N	h,см	r,см	t,с	n_2	I, 10^6г*см^2	$I_{ср}$, 10^6г*см^2	$\underline{I}$,10^6г*см^2	$I_г$, 10^6 г*см^2
				15,98	154 по ч	6,16			
500	1	134	3,7	15,17	258 пр ч	5,63	5,93	5,53	1,074
	2			15,21	156 по ч	5,58			
	3			16,07	253 пр ч	6,32			
200	1	142		24,9	56	5,33			0,809
	2			24,7	58	5,14			
	3			24,0	59	4,94	5,137		

Таблица 1

Т.к. $I_{колеса} = I_{системы} - (I_{оси} + I_{утолщения} + I_{шкива})$ (22), а последние три слагаемых можно вычислить по формуле для момента инерции цилиндра $I = \frac{mR^2}{2} = \rho\pi L\frac{R^4}{2}$,(**23**) то момент инерции колеса

$I_{колеса} = (ср\,знач - (0{,}00026 + 0{,}0076 + 0{,}000059)) * 10^6 \cong 5{,}45 * 10^6$(г*см^2)

2. Измерим моменты инерции колеса методом колебаний (используя формулы 19-21). Отклонять колесо с грузом от положения равновесия будем не более, чем на 15°. Результаты см. Таблица 2

m,г	N	n	$R_{г,см}$	L, см	t,с	I, 10^6г*см^2	$\underline{I}$,10^6г*см^2	$I_г$, 10^6г*см^2
1900	1	10	5,1	23,5	25,67	7,31	7,20	1,37
	2				25,11	6,99		
	3				25,67	7,31		
1450	1		3,43		29,08	7,16	7,20	0,81
	2				29,23	7,22		
	3				29,22	7,21		

Таблица 2

Получим среднее значение для момента инерции колеса в двух случаях:

Т.к. $I_{колеса}=I_{системы}-\left(I_{оси}+I_{утолщения}+I_{шкива}\right)(22)$, а последние три слагаемых можно вычислить по формуле для момента инерции цилиндра $I=\frac{mR^2}{2}=\rho\pi L\frac{R^4}{2}$,(**23**) то момент инерции колеса

$I_{колеса}=\left(7{,}2-\left(1{,}37+0{,}00026+0{,}0076+0{,}000059\right)\right)*10^6\cong 5{,}78*10^6$(г*см^2)

$I_{колеса}=\left(7{,}2-\left(0{,}81+0{,}00026+0{,}0076+0{,}000059\right)\right)*10^6\cong 6{,}34*10^6$(г*см^2)

$I_{к,}=5{,}78*10^6$ г*см^2

$I_{к,}=6{,}34*10^6$ г*см^2

3. Заметим, что получились разные значения момента инерции колеса. С помощью формул (24-26) найдем абсолютные и относительные погрешности для каждого результата

$$A=\underline{a}\pm\sqrt{\left(t_{\alpha,n-1}S_0\right)^2+\left(t_{\alpha,\infty}\frac{\delta}{3}\right)^2}\quad(24)$$

$$\Delta Z=\sqrt{¿¿}\quad(25)$$

$$\varepsilon_z=\frac{\Delta Z}{\underline{Z}}\quad(26)$$

Где А – измеряемая величина, $\underline{a}$ – её среднестатистическое значение, $t_{\alpha,n-1}$ – коэффициент Стьюдента, S_0 – среднеквадратичное отклонение от среднего значения, δ- приборная погрешность, ΔZ – абсолютная погрешность косвенного измерения, $\Delta A\left(B,C,\ldots\right)$ - абсолютная погрешность величины А(B,C,…), ε_Z – относительная погрешность.

Получим для метода вращений(для кривых результатов): $\Delta I = 1{,}111*10^6$ и $\varepsilon_I \cong 0{,}201$, а для метода колебаний $\Delta I = 0{,}1*10^6$ и $\varepsilon_I \cong 0{,}15$. Большое влияние оказывает трение в осях и очень быстрое затухание колебаний.

4. Оценим вклад обода и спиц колеса в его момент инерции, используя формулу (23) и положив спицы ровными тонкими стержнями, а обод – разностью двух цилиндров:

$I_{обода} \cong 6{,}37*10^6$ г*см², $I_{шкива} \cong 0{,}008*10^6$ г*см², $I_{спиц} \cong 0{,}23*10^6$ г*см²,
$I_{колеса} = I_{обода} + I_{шкива} + I_{спиц} \cong 6{,}61*10^6$ г*см².

Вывод

- В ходе работы определили момент инерции махового колеса двумя методами – вращения и колебаний, причем результат, полученный методом колебаний оказался ближе к теоретическому, чем полученный методом вращения. Это можно объяснить количеством косвенных измерений (в первом случае их меньше, а значит, точность результата должна получаться выше), а так же тем, что зафиксировать количество оборотов колеса намного труднее, чем определить период колебаний;
- Но с другой стороны, в этом методе получается большая погрешность, что может быть связано с трением в осях, быстрым затуханием колебаний, немалым вкладом дополнительных грузов в момент инерции колеса;
- Результат первого метода оказался заниженным, т.к. мы не учитывали сопротивление воздуха при относительно быстром свободном вращении колеса;
- Спицы вносят очень малый вклад в момент инерции всего колеса, демонстрируя влияние распределения массы тела на его инертные характеристики.