

Отчет по лабораторной работе № 110

«Гироскоп»

Дата протокола _____.____.20

Дата отчета _____.____.20

Выполнила:
Студентка 1 курса ВШ ОПФ
Петрова Ирина
Проверил: к.ф.-м.н.
Викторов Михаил Евгеньевич

Цель работы: исследовать гироскопические эффекты на примере симметричного волчка в кардановом подвесе, определить зависимость периода прецессии гироскопа, момента инерции волчка и угловой скорости его вращения.

Оборудование: гироскоп в кардановом подвесе, блок питания, вольтметр, секундомер, съемные грузы m_1 , m_2 , линейка.

Теоретическая часть

I. Общие сведения о гироскопе

Гироскоп – это твёрдое тело, вращающееся с большой скоростью вокруг оси симметрии. Чтобы ось гироскопа могла свободно поворачиваться в пространстве, гироскоп укрепляют в кардановом подвесе (см. рис.1). Тело гироскопа закрепляется на оси, которая может свободно вращаться в подшипниках внутреннего кольца. Полуоси кольца вставлены в подшипники наружного кольца, полуоси которого свободно вращаются в подшипниках стойки.

При таком креплении тело гироскопа может свободно поворачиваться вокруг трёх осей, пересекающихся в одной точке (центре подвеса), и ось тела гироскопа может иметь любую ориентацию в пространстве. Движение его, как движение твёрдого тела, описывается уравнением моментов:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M}, (1)$$

где \vec{N} – момент импульса самого гироскопа, а \vec{M} – результирующий момент внешних сил относительно неподвижной точки.

Если центр масс тела гироскопа совмещён с центром карданового подвеса, момент сил тяжести относительно этой точки будет равен нулю. Такой гироскоп называется свободным, его момент импульса не изменяется, значит, ось гироскопа не меняет своей ориентации. Свободный гироскоп не реагирует на кратковременные воздействия, и при давлении на ось гироскопа она перемещается в направлении, перпендикулярном силе давления.

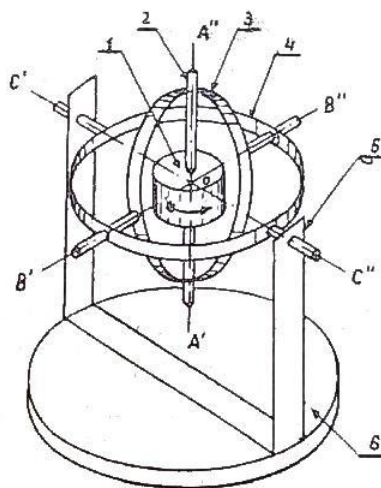


Рис. 1:

- 1-маховичок,
- 2-ось маховичка,
- 3-внутреннее кольцо,
- 4-наружное кольцо;
- 5-стойка;
- 6-платформа

Если же закреплено наружное кольцо, то гироскоп лишается возможности вращения вокруг одной оси (становится гироскопом с двумя степенями свободы). В отличие от свободного гироскопа данный является «попкорным» и «выстраивает» свою ось вращения по направлению оси вращения платформы, на которой он установлен.

II. Прецессия гироскопа

Медленное, по сравнению с собственным вращением, движение оси гироскопа называется прецессией. В лабораторной установке она вызвана действием груза массы m , закрепленного на стержне, который ввертывается в защитный чехол тела гироскопа (см. рис.2). Запишем уравнение моментов относительно центра масс гироскопа:

$$\frac{d\vec{N}}{dt} = \vec{M} = [\vec{OA}, m\vec{g}], (2)$$

где \vec{OA} - радиус вектор до центра масс груза m .

Момент силы $m\vec{g}$ перпендикулярен \vec{N} , значит, модуль второго остаётся неизменным, а конец его

перпендикулярной составляющей \vec{N}_\perp описывает окружность радиуса $(|\vec{N}| \cdot \sin \alpha)$ (α – угол между вертикалью и прямой, содержащий вектор \vec{N}). За малый промежуток времени dt вектор повернется на угол:

$$d\varphi = \frac{dN}{N_\perp} = \frac{M dt}{N \sin \alpha} (3)$$

Угловая скорость прецессии, согласно приближенной теории гироскопа, будет равна:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{N \sin \alpha} = \frac{||[\vec{OA}, m\vec{g}]||}{N \sin \alpha} = \frac{mg \cdot OA \cdot \sin \alpha}{I \omega \alpha} = \frac{mg \cdot OA}{I \omega}, (4)$$

Причем эта скорость не зависит от угла прецессии α . Исследуем зависимость периода прецессии $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ от положения груза m на стержне. Обычно расстояние OA на практике измерить непросто, в эксперименте фиксируют расстояние l от верхней риски на стержне до верхней плоскости груза. Тогда формула (4) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{T} = Al + B (5),$$

$$\text{где } A = \frac{mg}{2\pi I \omega}, B = \frac{mg(a+b)}{2\pi I \omega} (6).$$

При исследовании прецессии необходимо знать частоту собственного вращения тела гироскопа, которую можно выразить из формулы (4):

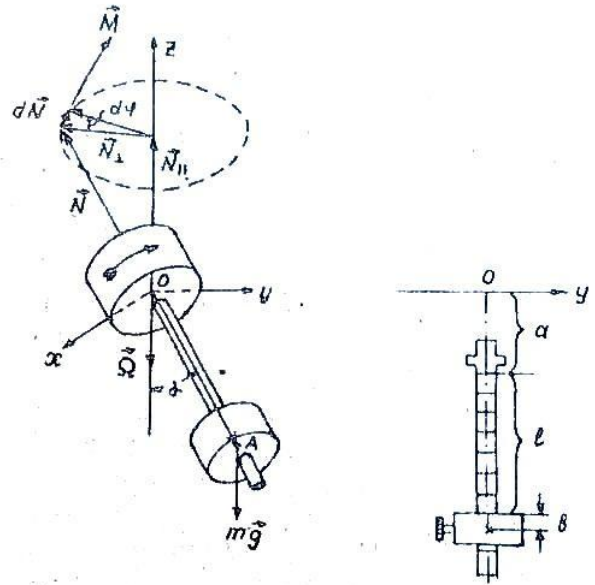


Рис. 2

$$\omega = \frac{mg \cdot OA}{\Omega \cdot I} \quad (7).$$

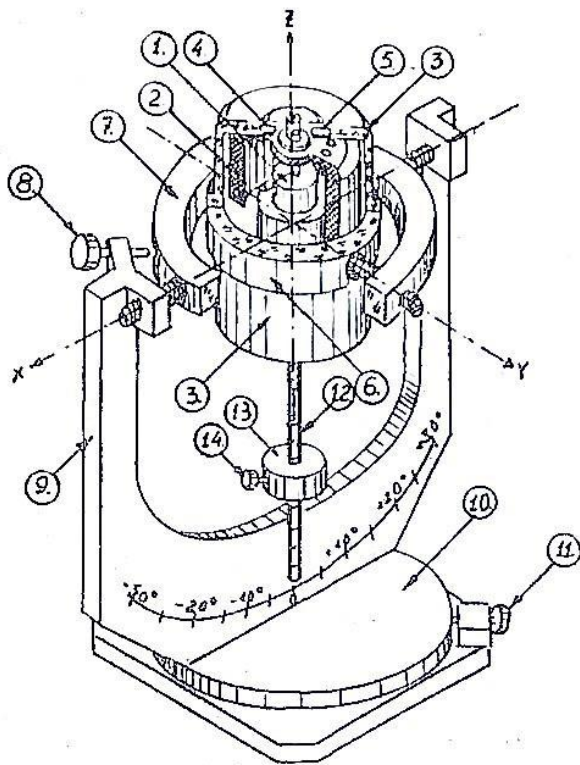


Рис. 3 :

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1-электродвигатель; | 8-защелка; |
| 2-маховичок; | 9-стойка; |
| 3-защитный чехол; | 10-платформа; |
| 4-светодиод; | 11-зажим платформы; |
| 5-фототранзистор; | 12-стержень; |
| 6-внутренняя обойма; | 13-груз; |
| 7-наружная обойма; | 14-зажим груза |

3. Лабораторная установка

Конструкция гироскопа, находящегося в кардановом подвесе и установленного на вращающейся платформе, позволяет изучить поведение свободного гироскопа, гироскопа с двумя степенями свободы и исследовать прецессию. Основные детали гироскопа изображены на рис.3. Телом гироскопа служит маховичок (полый стальной цилиндр), ось его вращается в двух шариковых подшипниках. Маховичок приводится в движение электродвигателем, а защитный чехол является внутренней обоймой карданова подвеса. Чехол вращается на шариковых подшипниках, посаженных на полуоси, вмонтированные в наружную обойму, которая, в свою очередь, установлена на вращающейся платформе.

Получить гироскоп с двумя степенями свободы можно, зафиксировав наружную обойму. Для создания вынуждающего момента сил, который вызывает прецессию гироскопа, в защитный чехол ввертывается стержень с перемещаемым по нему грузом, который закрепляется зажимным винтом.

Экспериментальная часть

1. Исследуем поведение свободного гироскопа

«Разгоним» гироскоп, т.е. включим блок питания электродвигателя. Осторожно вращая платформу, будем следить за ориентацией гироскопа. Кратковременное силовое воздействие не поменяло оси вращения гироскопа, а длительное – повернуло её в плоскости, ортогональной направлению этого воздействия. Значит, наши наблюдения полностью совпадают с теоретическими положениями, описанными ранее, а свободный гироскоп с тремя степенями свободы «непослушен».

2. Исследуем поведение гироскопа с двумя степенями свободы

При кратковременном воздействии на гироскоп, ось его отклонялась в соответствующем направлении, а при вращении платформы гироскоп поворачивался

вместе с платформой, что соответствует теоретическим положениям о движении данного гироскопа.

3. Исследуем прецессию гироскопа

Для этого рассчитаем момент инерции тела гироскопа согласно чертежу (см. рис.4), как «разность» двух цилиндров с поправкой:

$$I = \frac{\pi \rho}{32} (h_1 D_1^4 - h_2 D_2^4 + h_3 D_3^4),$$

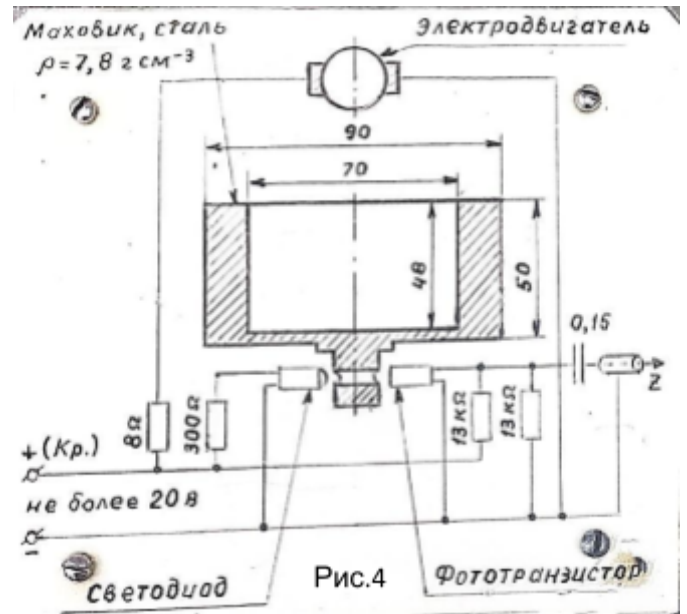
где исходя из чертежа $h_1 = 5\text{см}$, $h_2 = 4,8\text{см}$, $h_3 = 2\text{мм}$,

$D_1 = 9\text{см}$, $D_2 = 7\text{см}$, $D_3 = 0,7\text{см}$.

Получим $I \approx (1,63 \pm 0,12) \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$

Вернем стержень с грузом m , закрепим вращающуюся платформу и «разгоним» гироскоп. Далее измерим период прецессии при закреплении груза на стержне в нижнем положении, отклонив гироскоп на небольшой угол ($\approx \frac{\pi}{6}$), результаты измерений занесем в таблицу 1 (в ней используются следующие обозначения: l – длина видимой части стержня, a – расстояние от крепления стержня к гироскопу до его центра масс, b – расстояние от крепления стержня к грузу до его центра масс, см. рис.2). Т.к. трение в экспериментальной установке достаточно велико и прецессия быстро затухает, то измерения проводим при $n=3$ оборотах. Вместе с формулой (7) используем следующую:

$$T_{\text{пр}} = \frac{1}{t_{\text{ср}}} = \frac{2\pi}{\Omega}.$$



Масса груза, г	U, В	l, см	a, см	b, см	OA, см	$t_1, \text{с}$	$t_2, \text{с}$	$t_3, \text{с}$	$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$T_{\text{пр}}, \text{с}$	$\Omega, \text{Гц}$	$\omega, \text{Гц}$
374	15	7	6	1	14	12,9	12,9	13	12,9	4,3	1,5	$210,1 \pm 18,7$
	18					15,2	15,1	15,4	15,2	5,1	1,2	$262,6 \pm 22,8$

Таблица 1

Измерим период прецессии при различных положениях груза при $n=3$ оборота и, используя формулы (5) и (6), занесем полученные данные в таблицу 2. Далее построим графики зависимости $\frac{1}{T_{\text{пр}}}(l)$ для обоих значений напряжения электродвигателя (15В и 18В, см. рис.5 и 6).

m,г	U, В	l, см	t_1, c	t_2, c	t_3, c	t_{cp}, c	T_{nn}, c	$1/T_{nn}$	$\omega, \Gamma\Omega$
374	15	1	20,9	20,5	20,6	20,7	6,9	0,145	$210,1 \pm 18,7$
		1,5	19,5	19,4	19,5	19,5	6,5	0,154	
		2	18,3	18,3	18,3	18,3	6,1	0,164	
		2,5	17,7	17,6	17,8	17,7	5,9	0,17	
		3	16,9	17,1	17,2	17,1	5,7	0,175	
		3,5	16	16	15,7	15,9	5,3	0,189	
		4	15,4	15,6	15,5	15,5	5,2	0,193	
		5	14,4	13,9	14	14,1	4,7	0,213	
		6	13,3	13,1	13,2	13,2	4,4	0,227	
	18	1	25,4	26	26	25,8	8,6	0,116	$262,6 \pm 22,8$
		1,5	25	24,8	24,6	24,8	8,3	0,121	
		2	23,4	22,0	23	23,1	7,7	0,13	
		2,5	22	22,1	22	22	7,3	0,137	
		3	21,4	21,3	21,4	21,4	7,1	0,141	
		3,5	19,5	19,7	20	19,7	6,6	0,152	
		4	18,9	19,2	19,1	19	6,4	0,156	
		5	18	17,9	18	18	6	0,167	
		6	16,2	16,5	16,4	16,4	5,5	0,182	

Таблица 2

Коэффициенты прямых А и В рассчитаем с помощью метода наименьших квадратов по следующим формулам:

$$A = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, (8)$$

$$\Delta A = 2 \sqrt{\frac{1}{n-2} \left(\frac{S_y^2}{S_x^2} - A^2 \right)^2}, (9)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}, (10)$$

$$\Delta B = \sqrt{S_x^2 + \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2} \Delta A (11)$$

где $n=9$ – количество пар $x_i y_i$, $x_i = l$, $y_i = \frac{1}{T_{np}}$, $S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right)^2$, $S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} \right)^2$.

а. Для $U=15$ В имеем:

$$A=0,0164109 \pm 1,004 \cdot 10^{-6}, B=0,129143 \pm 3,53835 \cdot 10^{-6}.$$

Тогда из формулы (6) можем найти момент инерции тела гироскопа $I = \frac{mg}{2\pi \cdot A \cdot \omega}$ (12).

В данном случае $I_1 = (1,693 \pm 0,151) \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Как видно из графика (см. рис.5), зависимость $\frac{1}{T_{\text{пр}}}(l)$ линейная, т.к. все полученные точки практически лежат на одной прямой, что подтверждается формулой (5).

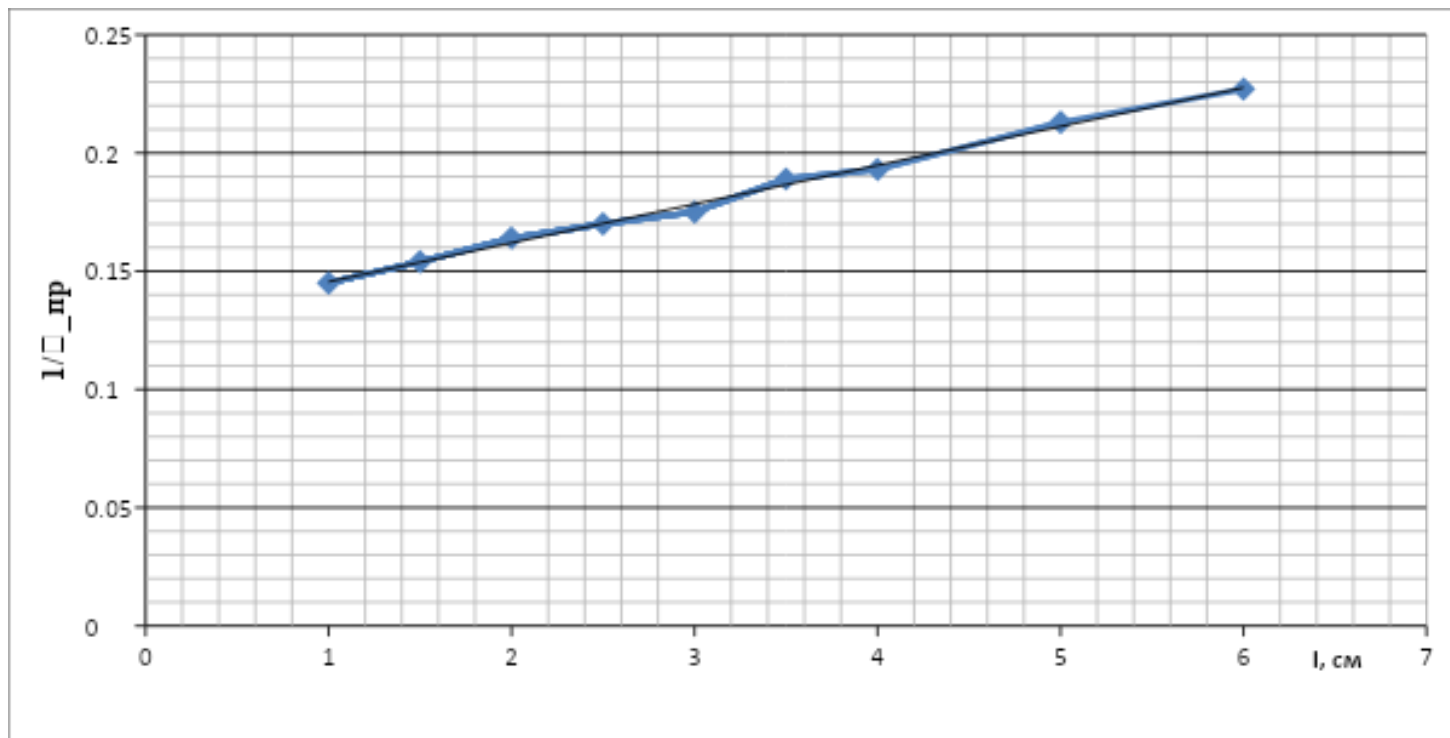


Рис.5. U=15 В

б. Для U=18 В имеем:

$A=0,0131628 \pm 6,65744 \cdot 10^{-7}$, $B=0,102984 \pm 2,3459 \cdot 10^{-6}$. Пользуясь формулой (12), находим $I_2 = (1,689 \pm 0,147) \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

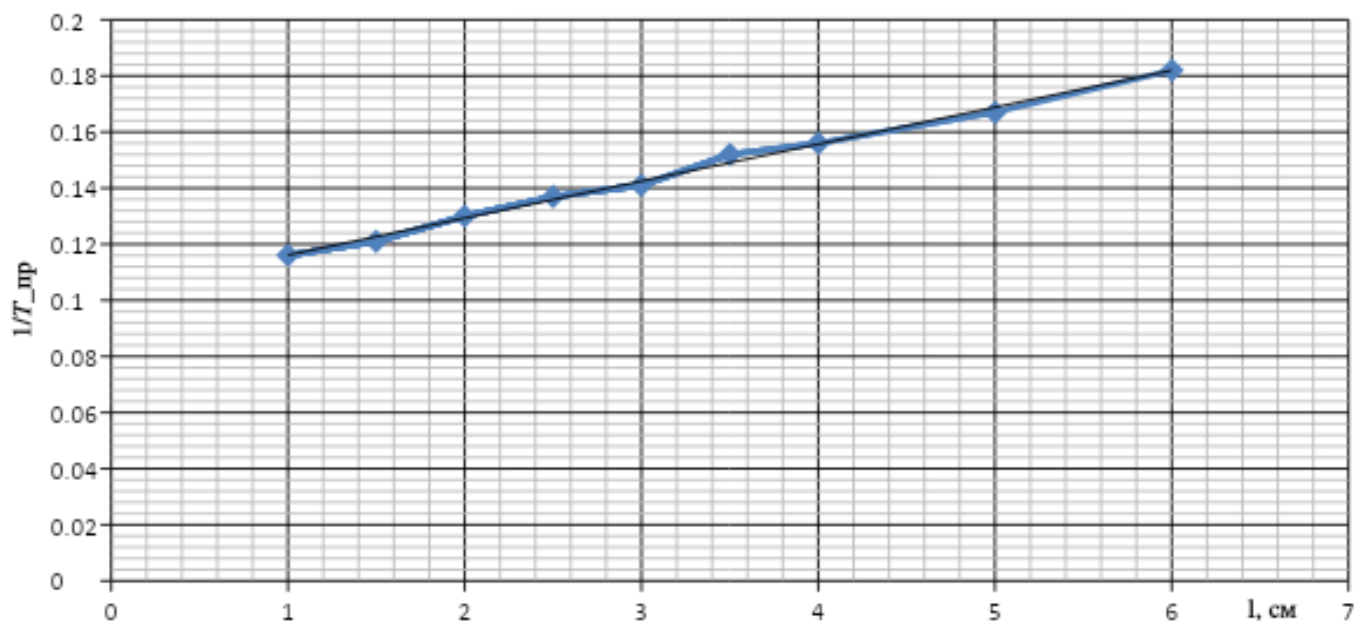


Рис.6. U=18 В+

Получим, что среднее экспериментальное значение момента инерции гироскопа:

$$I_{\text{ср}} \approx (1,69 \pm 0,15) \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2.$$

Сравним полученное значение с тем, что мы рассчитали с помощью чертежа гироскопа в задании 3: $I \approx (1,63 \pm 0,12) \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^2$. Заметим, что это значение с точностью до погрешности принадлежит доверительному интервалу (при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$; погрешность результата около 4%).

Вывод:

- Исследовали особенности движения волчка в кардановом подвесе как с двумя, так и с тремя степенями свободы. Все наблюдения соответствовали теоретическим ожиданиям.
- Через определение периода прецессии гироскопа выяснили, что экспериментальное значение момента инерции с точностью до погрешности соответствует моменту инерции тела, рассчитанному по чертежу.