Задачи по курсу *Квантовая теория поля *

Билет 1. (Чертовских А.)

1.Плотность лагранжиана для действительного скалярного поля имеет вид:

$$L=\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}-\frac{m^2\varphi^2}{2}-\frac{\lambda\varphi^4}{4}.$$

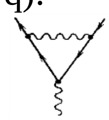
Найти тензор энергии-импульса этого поля и, используя уравнения движения, показать, что он удовлетворяет уравнению непрерывности.

2. Вычислить $\sigma^{\mu\alpha}\sigma_{\mu\alpha}$, *где* $\sigma_{\mu\alpha}=\frac{i}{2}\left[\gamma_\mu,\gamma_\alpha\right]$.

Билет 2. (Актанаев А.)

1. Показать, что плотность лагранжиана для безмассового свободного спинорного поля $\psi(x)$ инвариантна относительно киральных преобразований $\psi(x)\to\exp(i\beta\gamma_5)\psi(x)$, где $\beta=const$ и найти соответствующий сохраняющийся ток.

2. Написать выражение для поправки к вершине в КЭД (внешним сплошным линиям отвечают импульсы p_1 и p_2, волнистой- q):



Билет 3. (Гордеев К.)

1. Найти волновую функцию свободного дираковского электрона $\psi\left(t>0,\mathbf{x}\right)$, если $\psi\left(t=0,\mathbf{x}\right)=\delta\left(\mathbf{x}\right)\left(1,\quad 0,\quad 0,\quad 0\right)^T$.

2. Вычислить $Tr\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma_5\right)$.

Билет 4. (Горячев С.)

1. Получить интегральное выражение для функции Грина $G\left(x-x'\right)$, удовлетворяющей уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu\partial x^\mu}+m^2\right)G\left(x-x'\right)=-\delta^4\left(x-x'\right)$$

и условию $G\left(x-x'\right)=0$ при $t<t'$. Найти явное выражение для $G\left(x-x'\right)$ при $m=0$.

2. Расставьте значения импульсов и напишите математическое выражение, отвечающее этой диаграмме Фейнмана .

Билет 5. (Оськин И.)

1. Гамильтониан взаимодействия скалярного действительного поля с двумя точечными источниками имеет вид

$$\hat{H}_{\text{int}} = \int \hat{h}(\vec{r})d\vec{r},\ \hat{h}(\vec{r}) = g\left(\delta\left(\vec{r}-\vec{R}_1\right)+\delta\left(\vec{r}-\vec{R}_2\right)\right)\hat{\varphi}(\vec{r}),$$

где $\hat{\varphi}(\vec{r})$- оператор свободного скалярного поля в шредингеровском представлении , т.е. $\hat{\varphi}(\vec{r},t=0)$, g -константа взаимодействия. Используя стандартную теорию возмущений, найти (с точностью до членов 2-го порядка по g) зависящую от расстояния между источниками поправку к энергии скалярного поля.

Билет 6. (Девятайкин И.)

1. Пусть $\psi_2(x), \psi_1(x)$ - произвольные решения уравнения Дирака для свободной частицы. Доказать соотношение

$$c\bar{\psi}_2\gamma^{\mu}\psi_1 = \frac{1}{2m}\left(\bar{\psi}_2\hat{p}^{\mu}\psi_1 - \left(\hat{p}^{\mu}\bar{\psi}_2\right)\psi_1\right) - \frac{i\hat{p}_{\nu}}{2m}\left(\bar{\psi}_2\sigma^{\mu\nu}\psi_1\right),$$

c -скорость света.

2. Для действительного скалярного поля найти интеграл $\int d^3x\left[\hat{H},\hat{\varphi}(x)\right]e^{-i\mathbf{px}}$.

Билет 7. (Кульшин Д.)

1. В спинорном представлении $\left(\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}\right)$ найти закон преобразования компонент волновой функции $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ ($\psi_L(x)$ и $\psi_R(x)$ - левый и правый 2-х компонентные спиноры) при бесконечно-малом преобразовании группы Лоренца. Как при этом преобразуется спинор $\sigma^y\psi_L^*(x)$?

2. Найти зарядово-сопряженный биспинор для $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$.

Билет 8. (Карпов Д.)

1. Для квантованного действительного скалярного поля произведение операторов поля можно представить через N- произведение:

$$\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y) = \hat{N}\left(\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\right) + D(x-y).$$

Здесь $\hat{N}$ - оператор нормального упорядочивания.

а) Найти общее выражение для функции $D(x-y)$.

б) Вычислить $D(x-y)$ для безмассового скалярного поля, заданного в *двумерном* пространстве-времени (t, x).

2. Для действительного скалярного поля вычислить коммутатор $\left[\hat{H}, \hat{a}^{+}(\mathbf{k})\hat{a}(\mathbf{q})\right]$.

Билет 9. (Грачев И.)

В низшем порядке теории возмущений найти дифференциальное сечение рассеяния для неполяризованных электронов в поле $A^{\mu}(r) = \left(0,0,0,\frac{g}{r}e^{-r/a}\right)$, где g,a – постоянные.

Билет 10. (Можаров А.)

В низшем порядке теории возмущений найти дифференциальное сечение рассеяния поляризованных электронов (спиральность $\lambda = -1$), во внешнем электромагнитном поле, потенциал которого $A^{\mu}(r) = \left(ae^{-\beta^2 r^2},0,0,0\right)$, a и β –постоянные. Поляризация рассеянных частиц не учитывается.

Билет 11. (Романов А.)

В низшем порядке теории возмущений найти сечение рождения электрон-позитронной пары в электромагнитном поле $A^{\mu} = \left(0,ae^{-i\omega t},0,0\right)$, a,ω -постоянные.

Билет 12. (Постолов С.)

Уравнение Дирака для структурированных частиц (протонов или нейтронов) во внешнем электромагнитном поле содержит дополнительное слагаемое, описывающее взаимодействие аномального магнитного момента с этим полем

$$\left[\gamma^{\mu}\left(\hat{p}_{\mu} - \frac{e_i}{c}A_{\mu}\right) - \frac{\hbar\delta_i}{4m_i c^2}\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - m_i c\right]\Psi(x) = 0,\ i = e,p,n \qquad (1)$$

где e_{i} -заряд частицы, $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right]$, $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$. Параметр δ_{i}, определенный опытным путем, равен: δ_{e} =0 (для электрона), δ_{p}=1.79e (для протона), $\delta_n = -1.91e$ (для нейтрона), (e-абсолютная величина заряда электрона). а) Найти соответствующий (1) гамильтониан. Проверить его эрмитовость. б) Выразить слагаемое $\sigma_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ через напряженности полей $\vec{E}$ и $\vec{B}$. в) Найти магнитный момент частицы.

Билет 13. (Рассулов И.)

1. Рассчитать эффект Казимира для действительного безмассового скалярного поля $\varphi(t,x)$, заданного на интервале $0 \le x \le l$ и удовлетворяющего условиям

$$\varphi(t,0) = \left(\frac{\partial\varphi(t,\text{x})}{\partial x}\right)_{x=l} = 0\,.$$

2. Найти среднее $\langle 0|\hat{a}_k\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}(y)\hat{a}_p^{+}|0\rangle$, $\hat{\varphi}(x)$ - действительное свободное скалярное поле.

Билет 14. (Минеев С.)

Вычислить $\bar{S}_x$ в состоянии $\psi(\mathbf{r},\mathrm{t}) = C_1\psi_{\mathbf{p},\lambda=\mathbf{1}}(\mathbf{r},\mathrm{t}) + C_2\psi_{\mathbf{p},\lambda=-\mathbf{1}}(\mathbf{r},\mathrm{t})$, где $\psi_{\mathbf{p},\lambda}(\mathbf{r},\mathrm{t})$ - волновая функция электрона с импульсом $\mathbf{p} = (0,0,p)$, энергией $E = \varepsilon_p > 0$ и спиральностью λ; $C_1 = e^{i\beta}\cos\alpha,\ C_2 = e^{-i\beta}\sin\alpha$ (*α, β*-произвольные постоянные).

Билет 15. (Парамонова Ю.)

Найти явный вид матриц Дирака ($\beta, \vec{\alpha}, \gamma^{\mu}, \vec{\Sigma}$) в *спинорном* представлении, переход к которому от стандартного представления осуществляется матрицей $U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$, (*I*- единичная матрица 2×2). Определить, как при преобразованиях Лоренца (бустах и пространственных вращениях) преобразуется комбинация $\eta^{+}\xi$, где ξ, η - компоненты биспинора $\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ в этом представлении.

Билет 16. (Лютов А.)

1. Для безмассового скалярного поля $\hat{\Phi}(x_0, x)$ в 2-х измерениях найти среднее по вакууму $\langle 0|\hat{\Phi}(x_0, x)\hat{\Phi}(y_0, \mathrm{y})|0\rangle$.
2. Для двух соударяющихся электронов найти величину

$$J = \frac{\sqrt{\left(p_{1\mu}p^{2\mu}\right)^2 - (mc)^4}}{p_{10}p_{20}},$$

где $p_{1\mu}$ и $p_{2\mu}$ – компоненты 4-импульсов электронов,

а). в системе отсчёта, где один из электронов покоится, а импульс второго равен $\vec{p}$;

б). в системе центра масс.

Билет 17. (Рассохин А.)

Пусть $\hat{\varphi}(x) = \int d\mathbf{k}\left(f_{\mathbf{k}}(x)\hat{a}(k) + f^{*}{}_{\mathbf{k}}(x)\hat{a}^{+}(k)\right)$ - скалярное поле. Определим "сглаженное" поле: $\hat{\varphi}_g(x) = \int d\mathbf{y}\, g(\mathbf{x}-\mathbf{y})\hat{\varphi}(t,\mathbf{y})$, где $g(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \frac{1}{(\pi a^2)^{3/2}}\exp\left(-(\mathbf{x}-\mathbf{y})^2/a^2\right)$.

Вычислить среднее по вакууму $\langle 0|\hat{\varphi}_g^2(t,\mathbf{x})|0\rangle$. Обсудить предел массы m→0.

Билет 18. (Сполохов Д.)

а) Показать, что уравнение Клейна-Гордона $\left(\Box+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\Phi(x)=0$ можно записать в гамильтоновой форме

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\hat{H}\psi,\ \hat{H}=\frac{\tau_3+i\tau_2}{2m}\hat{\vec{p}}^2+\tau_3 mc^2, \qquad (1)$$

где τ_i -матрицы Паули, $\psi=\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$, $\varphi+\chi=\Phi$, $mc^2(\varphi-\chi)=i\hbar\frac{\partial\Phi}{\partial t}$.

б). Выразить $\rho(x)$ и $\vec{j}(x)$ через $\psi(x)$.

в). Найти решения (1), отвечающие определённому импульсу.

Билет 19. (Кузьмичев А.)

В низшем порядке теории возмущений найти дифференциальное сечение рассеяния электронов с положительной спиральностью в электромагнитном поле вида $A^\mu=\left(\mathrm{U}_0 \mathrm{e}^{-\frac{r}{R}},0,0,0\right)$, где U_0,R –постоянные; $\lambda_f=\pm1$.

Билет 20. (Кукушкин Ю.)

Гамильтониан дираковской безмассовой частицы имеет вид

$$\hat{H}=\upsilon\sigma_x\hat{p}_x\ , \qquad (1)$$

где υ - эффективная скорость, σ_x - матрица Паули. Предположим, что для некоторой гетероструктуры $\upsilon=\upsilon(x)$. Очевидно, что (1) в этом случае не является эрмитовым.

а). Показать, что эрмитовым обобщением (1) является оператор $\hat{H}=\sqrt{\upsilon(x)}\sigma_x\hat{p}_x\sqrt{\upsilon(x)}$;

б). Для “step-like” координатной зависимости $\upsilon(x)=\upsilon_-\theta(-x)+\upsilon_+\theta(x)$ ($\upsilon_\pm$ - постоянные) найти коэффициент отражения от границы x=0.

Билет 21. (Зинягин А.)

Лагранжиан бесспинового шредингеровского поля имеет вид:

$$L=i\psi^+\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2m}\nabla\psi^+\nabla\psi-V(\mathbf{r})\psi^+\psi$$

1). Получить уравнения движения для ψ и ψ^+.

2). Провести каноническое квантование поля.

3). Выразить свободные поля $\hat{\psi}, \hat{\psi}^{+}$ через операторы рождения и уничтожения и найти коммутационные соотношения между ними.

4). Найти функцию Грина $G\left(x_0, \mathbf{x}, \mathrm{y}_0, \mathbf{y}\right) = -i\left\langle 0\left|\hat{\psi}\left(x_0, \mathbf{x}\right)\hat{\psi}^{+}\left(\mathrm{y}_0, \mathbf{y}\right)\right|0\right\rangle \theta\left(x_0 - \mathrm{y}_0\right)$ и показать, что она удовлетворяет уравнению

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\Delta}{2m}\right)G\left(t, \mathbf{x}, 0, 0\right) = \delta\left(t\right)\delta\left(\mathbf{x}\right).$$

Билет 22. (Калинин Д.)

Лагранжиан спинорного поля имеет вид

$$L = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\frac{\partial\psi}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x^{\mu}}\gamma^{\mu}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi + im_1\bar{\psi}\gamma_5\psi\,.$$

а) Является ли данный лагранжиан эрмитовым?

б) Используйте киральное преобразование $\psi\left(x\right) \to \psi'\left(x\right) = \exp\left(i\beta\gamma_5\right)\psi\left(x\right)$ (β – параметр преобразования) для того чтобы исключить последнее слагаемое в L (псевдоскалярный член). Какова будет масса получившегося дираковского поля?

Вопросы к зачету.

1. Уравнение Дирака. Свойства γ – матриц.
2. Парадокс Клейна (формулировка).
3. Симметрии и законы сохранения. Теорема Нетер. Интегралы движения.
4. Канонический формализм. Квантование скалярного поля.
5. Фейнмановский пропагатор скалярного поля.
6. Нормальное произведение операторов.
7. Спинорное поле. Импульсное представление.
8. Фейнмановский пропагатор поля Дирака.
9. Матрица рассеяния. Представление взаимодействия.
10. Электромагнитное взаимодействие. Матричные элементы S-матрицы. Правила Фейнмана.
11. Эффективные линии. Уравнения Дайсона для функций Грина.