

Нижегородский государственный университет имени Н. И.  
Лобачевского  
Высшая школа общей и прикладной физики

Отчет по лабораторной работе:  
«Измерение момента инерции махового колеса»

Выполнили:  
Горячев С. А.  
Лютов А. О.

Нижний Новгород, 2023 г.

## Цель работы:

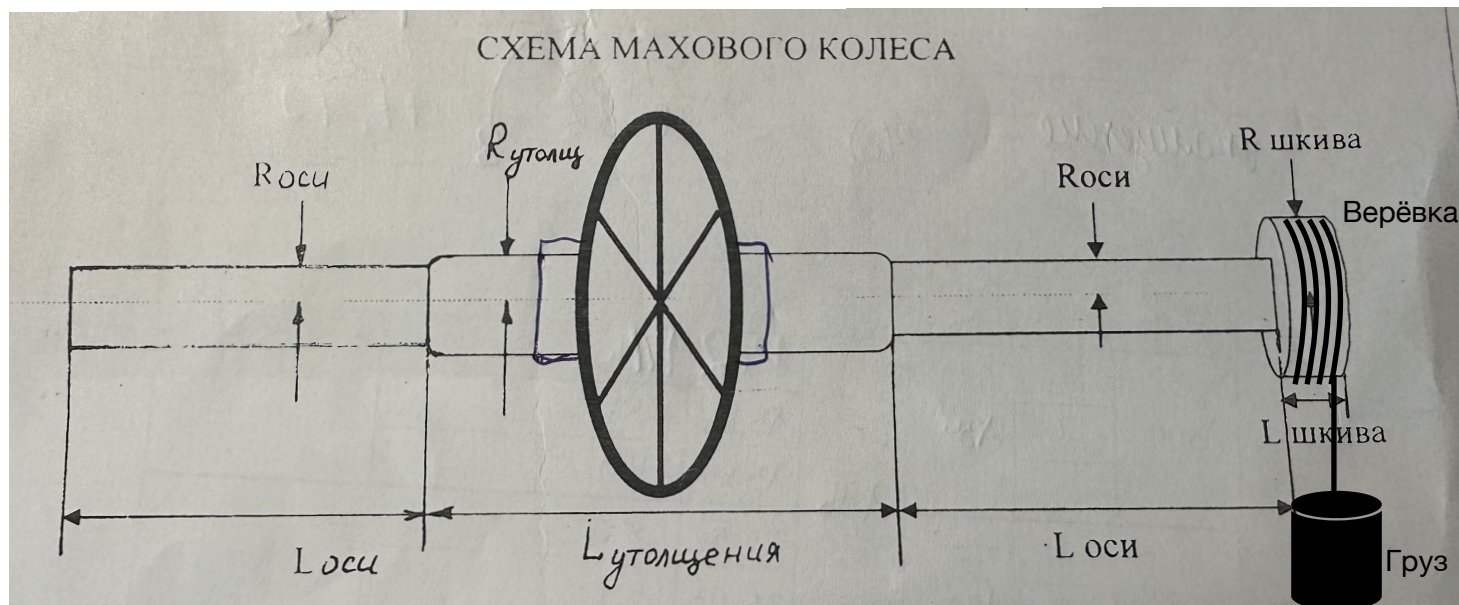
Измерить момент инерции махового колеса двумя способами (методом вращения и методом колебаний), сравнить полученные значения, оценить теоретически вклад обода и спиц.

## Оборудование:

- маховое колесо;
- груз  $m=(500,0\pm0,5)\text{г}$ ;
- груз  $m=(200\pm0,5)\text{г}$ ;
- груз  $m=(1900,0\pm0,5)\text{г}$ ;
- груз  $m=(1450,0\pm0,5)\text{г}$ ;
- секундомер;
- линейка;
- штангенциркуль

## Теоретическое обоснование:

## Метод вращения:



На шкив наматывается нить с прикреплённым к ней грузом. Падая груз разматывает нить и приводит систему (маховое колесо, шкивы и ось) во вращательное движение. При этом потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию вращательного движения системы.

На основании закона сохранения энергии можно записать:

$$E_p = E_k + E_w + A,$$

где  $E_p$  – потенциальная энергия груза в верхнем положении,  $E_w$  и  $E_k$  – соответственно кинетическая энергия груза и кинетическая энергия вращающейся системы в тот момент, когда нить полностью размотается;  $A$  – энергия, затраченная на работу против сил трения.

Введём обозначения:  $m$  – масса груза;  $h$  – максимальная высота его подъёма;  $v$  – скорость груза в нижнем положении;  $R$  – радиус шкива;  $I$  – момент инерции системы;  $w$  – её угловая скорость в момент, когда груз достигает нижнего положения. Тогда уравнение может быть переписано в виде:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Iw^2}{2} + A$$

Так как момент сил трения не зависит от скорости вращения, то движение системы будет равноускоренным. Зная высоту  $h$  и время движения груза  $t$ , легко подсчитать его скорость в нижнем положении:

$$v = \frac{2h}{t}$$

Если нить разматывается без скольжения, то линейная скорость точек на поверхности шкива равна скорости груза и

$$w = \frac{2h}{Rt}$$

Работа против сил трения пропорциональна числу оборотов, совершаемых системой, то есть

$$A = \sum_{n=1}^n A' * n1,$$

где  $A'$  – работа против сил трения за один оборот. Тогда получается, что

$$n1 = \frac{h}{2 * \pi * R}$$

В момент достижения грузом нижнего положения нить отделяется от шкива, а система продолжает вращаться, совершая работу против сил трения за счёт приобретённой кинетической энергии

$$\frac{I * w^2}{2} = A' * n2,$$

где  $n2$  – число оборотов системы до полной остановки.

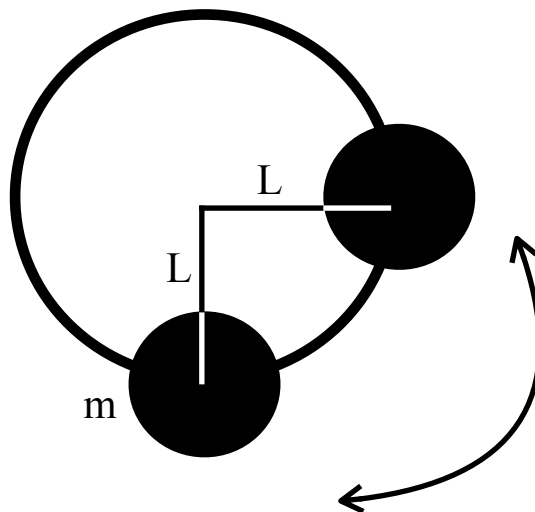
Используя все выше названное, можно вывести:

$$mgh = \frac{2mh^2}{t^2} + \frac{2Ih^2}{R^2t^2} + \frac{2Ih^2}{r^2t^2} * \frac{n1}{n2},$$

Откуда:

$$I = \frac{m(gt^2 - 2h)R^2n2}{2h(n1 + n2)}$$

## Метод колебаний:



Если на некотором расстоянии  $l$  от центра колеса прикрепить к нему дополнительный груз, то система превращается в физический маятник. Выведенный из положения равновесия, маятник будет совершать колебания под действием момента силы тяжести дополнительного груза. Пренебрегая силами трения, можно записать уравнение движения маятника в виде:

$$I \frac{\delta w}{\delta t} = mgl\phi, \text{ где при малых углах можно сделать допущение: } \sin\phi = \phi$$

Это уравнение также называется основным уравнением динамики вращательного движения. Запишем его в виде:

$$\frac{\delta w}{\delta t} + \frac{mgl}{I} \phi = 0$$

Это уравнение гармонических колебаний с периодом:

$$T = 2 * \pi * \sqrt{\frac{I}{mgl}}, \text{ тогда:}$$

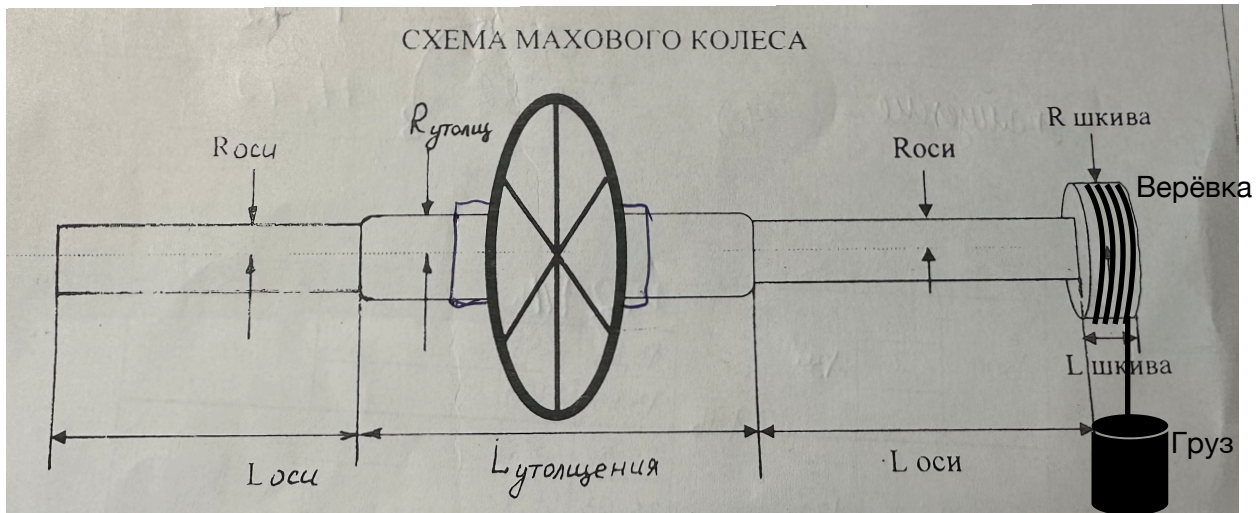
$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2}, \text{ тогда}$$

Момент инерции колеса будет равен разности момента инерции всей системы, найденный выше, и момента инерции цилиндра, где момент инерции цилиндра равен:

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2, \text{ где } r - \text{ радиус цилиндра, тогда}$$

$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2} - \left(\frac{1}{2}mr^2 + ml^2\right) - \text{ момент инерции колеса}$$

Практическая часть:  
Метод вращения:



$$I_{\text{колеса}} = I_{\text{всей системы}} - (I_{\text{оси}} + I_{\text{утолщ}} + I_{\text{шкива}})$$

	$\rho, \text{ г/см}^3$	$R, \text{ см}$	$L, \text{ см}$	$I, \text{ г см}^2$
ось	7,8	0,9	7,31	58,7625
утолщение		1,16	17,72	393,109375
шкив		3,675	3,29	7257,545

$I_{\text{всей системы}}$

$$I = \frac{m(gt^2 - 2h)R^2n^2}{2h(n_1 + n_2)}$$

m, г	№ п/п	h, см	R, см	t, сек	n2	I всей системы, г см <sup>2</sup>	I - среднее	I - среднее
500	1	134	3,675	12,82	171,4	3999166,690	4396436,667	5264920,740
	2			13,83	169,1	4653120,770		
	3			13,65	174,2	4537022,541		
200	1	134	3,675	25,52	62	6000116,583	6133404,814	5264920,740
	2			26,03	64,8	6265589,411		
	3			25,83	60,3	6134508,449		

$$n1 = \frac{h}{2 * \pi * R} = \frac{134}{2 * 3,675 * 3,14} = 5,8$$

Тогда, имеем:

$$I = 5264920,740 - 7256,545 - 393,109375 - 58,7625 = 5257212,323 \text{ г см}^2$$

Метод колебаний:

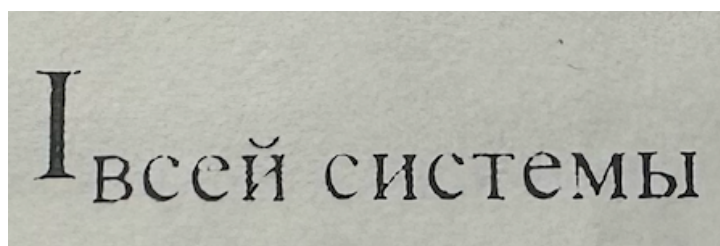
$$I_{\text{колеса}} = I_{\text{всей системы}} - (I_{\text{доп. груза}} + I_{\text{шкива}} + I_{\text{оси}} + I_{\text{утолщения}})$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2 + ml^2 - \text{момент инерции цилиндра}$$

$$\text{Для первого опыта: } I = \frac{1}{2} * 1900 * 5^2 + 1900 * 23,5^2 = 1073025$$

$$\text{Для второго опыта: } I = \frac{1}{2} * 1450 * 3,3^2 + 1450 * 23,5^2 = 808657,75$$

	$\rho, \text{ г/см}^3$	R, см	L, см	I, г см <sup>2</sup>
<b>ось</b>	7,8	0,9	7,31	58,7625
<b>утолщение</b>		1,16	17,72	393,109375
<b>шкив</b>		3,675	3,29	7257,545



$$I = \frac{mglT^2}{4\pi^2}$$

т, г	№ п/п	п	R доп. груза, см	L, см	t, сек	I всей системы, г см <sup>2</sup>	I - среднее	I - среднее
1900	1	10	5	23,5	25,41	7302491,441	7116735,622	7091027,598
	2				24,76	6933667,431		
	3				25,08	7114047,995		
1450	1	3,3		28,88	7179030,599	7065319,573		
	2			27,94	6737967,802			
	3			29,04	7278960,319			

Тогда имеем:

Для первого случая:

$$I = 7116735,622 - 1037025 - 58,7625 - 393,109375 - 7257,545 = 6072001,205 \text{ г см}^2$$



Для второго случая:

$$I = 7065319,573 - 808657,75 - 58,7625 - 393,109375 - 7257,545 = 6248952,406 \text{ г см}^2$$

Тогда имеем:

$$I = \frac{6072001,205 + 6248952,406}{2} = 6160476,806 \text{ г см}^2$$

Теперь оценим момент инерции:

$$I_{\text{колеса}} = I_{\text{обода}} + I_{\text{шквива}} + I_{\text{спиц}} \cong 6,61 \cdot 10^6 \text{ г см}^2$$

$$I_{\text{обода}} \cong 6,37 \cdot 10^6 \text{ г см}^2$$

$$I_{\text{шквива}} \cong 0,008 \cdot 10^6 \text{ г см}^2$$

$$I_{\text{спиц}} \cong 0,23 \cdot 10^6 \text{ г см}^2$$

Момент инерции, посчитанный теоретически	Метод вращения	Метод колебаний
$6,61 \cdot 10^6 \text{ г см}^2$	$5257212,323 \text{ г см}^2$	$6160476,806 \text{ г см}^2$

Расчет погрешностей:

Метод вращения:

Для 500 г:

Суммарная погрешность результата:

1)  $\Delta I = \sqrt{(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2}$ , где первый член - это случайная погрешность, а второй член - это абсолютная погрешность нашей величины, полученной в результате косвенных измерений.



2)  $\Delta I1 = t * \sigma$ , где  $t$  - коэффициент Стьюдента, а  $\sigma$  - стандартное отклонение

$t = 9,9$  для 3 измерений с вероятностью 99%, он был взят из таблицы

коэффициентов Стьюдента

$$\sigma = \sqrt{\frac{(4396436,667 - 3999166,690)^2 + (4396436,667 - 4653120,770)^2 + (4396436,667 - 4537022,541)^2}{3 * 2}} = 201442$$

$$\Delta I1 = t * \sigma = 9,9 * 201442 = 1994275,8 \text{ г см}^2$$

3)  $\Delta I2 = \epsilon(I) * I$

$$\epsilon(I) = \epsilon(m(gt^2 - 2h)R^2n2) + \epsilon(2h(n2 + n1)) = \epsilon(m) + \epsilon(gt^2 - 2h) +$$

$$+ \epsilon(R^2) + \epsilon(n2) + \epsilon(n2 + n1) + \epsilon(2h) = \frac{\Delta m}{m} + \frac{g * 2 * t * \Delta t - 2 * \Delta h}{g * t^2 - 2h} + 2 * \frac{\Delta R}{R} +$$

$$+ \frac{h * 2\pi * \Delta R + 2\pi * R * \Delta h}{4\pi^2 * R^2 * (n1 + n2)} + \frac{\Delta h}{h} \text{ и } \epsilon(I) - \text{максимальный из 3}$$

ОПЫТОВ

Опыт №1

$$\epsilon(I) = 0,034066$$

Опыт №2

$$\epsilon(I) = 0,031778$$

Опыт №3

$$\epsilon(I) = 0,031159, \text{ тогда}$$

$$\Delta I2 = 4396436,667 * 0,034066 = 149769,01150 \text{ г см}^2$$

$$\Delta(I) = \sqrt{1994275,8^2 + 149769,01150^2} = 1999891,678 \text{ г см}^2$$

Для 200 г:

Суммарная погрешность результата:

1)  $\Delta I = \sqrt{(\Delta I1)^2 + (\Delta I2)^2}$ , где первый член - это случайная погрешность, а второй член - это абсолютная погрешность нашей величины, полученной в результате косвенных измерений.

2)  $\Delta I1 = t * \sigma$ , где  $t$  - коэффициент Стьюдента, а  $\sigma$  - стандартное отклонение

$t = 9,9$  для 3 измерений с вероятностью 99%, он был взят из таблицы коэффициентов Стьюдента

$$\sigma = \sqrt{\frac{(6133404,814 - 6000116,583)^2 + (6133404,814 - 6265588,411)^2 + (6133404,814 - 6134508,449)^2}{3 * 2}} = 76637$$

$$\Delta I1 = t * \sigma = 9,9 * 76637 = 758706,3 \text{ г см}^2$$

3)  $\Delta I2 = \epsilon(I) * I$

$$\epsilon(I) = \epsilon(m(gt^2 - 2h)R^2n2) + \epsilon(2h(n2 + n1)) = \epsilon(m) + \epsilon(gt^2 - 2h) +$$

$$+ \epsilon(R^2) + \epsilon(n2) + \epsilon(n2 + n1) + \epsilon(2h) = \frac{\Delta m}{m} + \frac{g * 2 * t * \Delta t - 2 * \Delta h}{g * t^2 - 2h} + 2 * \frac{\Delta R}{R} +$$

$$+ \frac{h * 2\pi * \Delta R + 2\pi * R * \Delta h}{4\pi^2 * R^2 * (n1 + n2)} + \frac{\Delta h}{h} \text{ и } \epsilon(I) - \text{максимальный из 3}$$

ОПЫТОВ

Опыт №1

$$\epsilon(I) = 0,01911$$

Опыт №2

$$\epsilon(I) = 0,01879$$

Опыт №3

$$\epsilon(I) = 0,01892$$

$$\Delta I2 = 6133404,814 * 0,01911 = 117209,3650 \text{ г см}^2$$

$$\Delta(I) = \sqrt{758706,3^2 + 117209,3650^2} = 767706,510 \text{ г см}^2, \text{ тогда}$$

$\Delta I$  среднего =  $(\Delta I \text{ для } 500 \text{ г} + \Delta I \text{ для } 200 \text{ г}) \setminus 2$ , тогда

$I = 5264920,740 \pm 1383799,094 \text{ г см}^2$ , где  $I$  - момент инерции всей системы, тогда для момента инерции колеса

$\Delta I$  колеса =  $\Delta I$  всей системы +  $\Delta I$  оси +  $\Delta I$  утолщения +  $\Delta I$  шкива, тогда

$I \text{ колеса} = 5257212,323 \pm 1384073,910 \text{ г см}^2$

Метод колебаний:

Для 1900 г:

Суммарная погрешность результата:

1)  $\Delta I = \sqrt{(\Delta I1)^2 + (\Delta I2)^2}$ , где первый член - это случайная погрешность, а второй член - это абсолютная погрешность нашей величины, полученной в результате косвенных измерений.

2)  $\Delta I1 = t * \sigma$ , где  $t$  - коэффициент Стьюдента, а  $\sigma$  - стандартное отклонение

$t = 9,9$  для 3 измерений с вероятностью 99%, он был взят из таблицы коэффициентов Стьюдента

$$\sigma = \sqrt{\frac{(7116735,622 - 7302491,441)^2 + (7116735,622 - 6933667,431)^2 + (7116735,622 - 7114047,995)^2}{3 * 2}} = 106478,80085$$

$$\Delta I1 = t * \sigma = 9,9 * 106478,80085 = 1054140,128 \text{ г см}^2$$

$$3) \Delta I2 = \epsilon(I) * I$$

$$\epsilon(I) = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta t}{t}$$

Опыт №1

$$\epsilon(I) = 0,02043$$

Опыт №2

$$\epsilon(I) = 0,02067$$

Опыт №3

$$\epsilon(I) = 0,02048$$

$$\Delta I_2 = 7116735,622 * 0,02067 = 147102,91245 \text{ г см}^2$$

$$\Delta(I) = \sqrt{1054140,128^2 + 147102,91245^2} = 1064354,582 \text{ г см}^2$$

Для 1450 г:

Суммарная погрешность результата:

1)  $\Delta I = \sqrt{(\Delta I_1)^2 + (\Delta I_2)^2}$ , где первый член - это случайная погрешность, а второй член - это абсолютная погрешность нашей величины, полученной в результате косвенных измерений.

2)  $\Delta I_1 = t * \sigma$ , где  $t$  - коэффициент Стьюдента, а  $\sigma$  - стандартное отклонение

$t = 9,9$  для 3 измерений с вероятностью 99%, он был взят из таблицы коэффициентов Стьюдента

$$\sigma = \sqrt{\frac{(7065319,573 - 7179030,599)^2 + (7065319,573 - 6737967,802)^2 + (7065319,573 - 7278960,319)^2}{3 * 2}} = 166198,48151$$

$$\Delta I_1 = t * \sigma = 9,9 * 166198,48151 = 1645364,967 \text{ г см}^2$$

$$3) \Delta I_2 = \epsilon(I) * I$$

$$\epsilon(I) = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta t}{t}$$

Опыт №1

$$\epsilon(I) = 0,01153$$

Опыт №2

$$\epsilon(I) = 0,01176$$

Опыт №3

$$\epsilon(I) = 0,01149$$

$$\Delta I_2 = 7065319,573 * 0,01176 = 83088,15818 \text{ г см}^2$$

$$\Delta(I) = \sqrt{1645364,967^2 + 83088,15818^2} = 1647461,537 \text{ г см}^2, \text{ тогда}$$

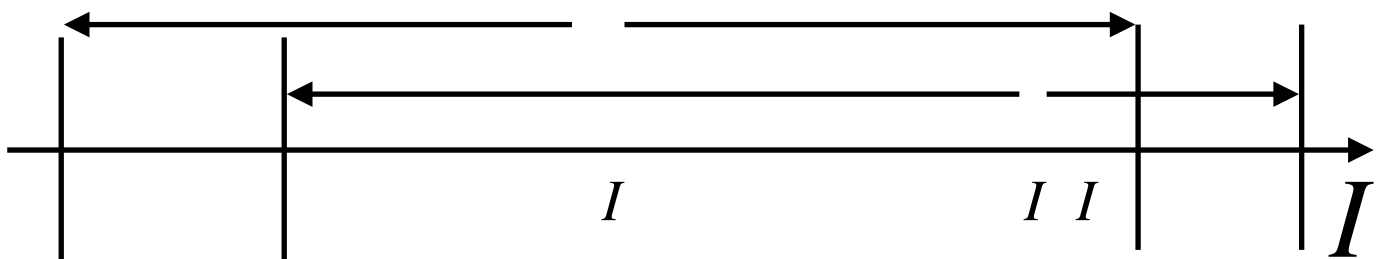
$\Delta I$  среднего = ( $\Delta I$  для 1900 г +  $\Delta I$  для 1450 г) \ 2, тогда

$I = 7091027,598 \pm 1355908,060 \text{ г см}^2$ , где  $I$  - момент инерции всей системы, тогда для момента инерции колеса

$\Delta I$  колеса =  $\Delta I$  всей системы +  $\Delta I$  оси +  $\Delta I$  утолщения +  $\Delta I$  шкива +  $\Delta I$  цилиндра, тогда

$$I \text{ колеса} = 6160476,806 \pm 1356201,095 \text{ г см}^2$$

Момент инерции, посчитанный теоретически	Метод вращения	Метод колебаний
$6,61 * 10^6 \text{ г см}^2$	$5257212,323 \pm 1384073,910 \text{ г см}^2$	$6160476,806 \pm 1356201,095 \text{ г см}^2$



Вывод: Измерили момент инерции двумя способами. Вычислили погрешность измерений. Сравнили с теоретическим значением. С учетом погрешности величины совпадают. Большая погрешность получилась из-за оценочного значения работы сил трения.