

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского»

Отчёт по лабораторной работе № 212  
«Дифференцирование и интегрирование  
СИГНАЛОВ»

Выполнили:

Студенты 2 курса, ВШОПФ

Зинягин Алексей

Мурзина Полина

2022 г.

**Дата допуска:** 14.12.22 г.

**Дата лабораторной работы:** 14.12.22 г.

**Дата отчета:** 18.12.22 г.

**Цель работы:** разобраться в устройстве дифференцирующих и интегрирующих цепочек, снять зависимость производной и интеграла сигналов в зависимости от частоты и постоянного времени.

**Оборудование:** установка для исследования сигналов различной формы (пила, меандр, треугольник), осциллограф, звуковой генератор.

### Теоретические обоснования.

В радиотехнических приборах часто требуется осуществлять преобразование исходного электрического сигнала, носящее характер дифференцирования или интегрирования. Иными словами, если на вход некоего четырёхполюсника подать сигнал  $u_{\text{вх}}(t)$ , то с выхода дифференцирующего четырёхполюсника должен сниматься сигнал

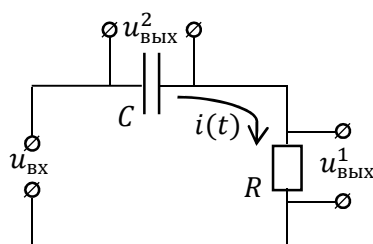
$$u_{\text{вых}}(t) = \tau_0 \cdot \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt},$$

а с выхода интегрирующего четырёхполюсника – сигнал:

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{\tau_0} \cdot \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) \cdot dt,$$

где  $\tau_0$  – константа, имеющая размерность времени, которую в дальнейшем будем называть постоянной времени.

Поскольку дифференцирование и интегрирование – линейные математические операции, то на практике они осуществляются с помощью линейных четырёхполюсников



Подразумевая под входным сигналом ЭДС, запишем уравнение второго закона Кирхгофа для этих схем:

$$R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int_{-\infty}^t i(t) \cdot dt = u_{\text{вх}}(t).$$

Домножив это выражение на  $C$ , и считая, что произведение  $RC$  равно постоянной времени цепи  $\tau_0 = RC$ , получим:

$$\tau_0 \cdot i(t) + \int_{-\infty}^t i(t) \cdot dt = C \cdot u_{\text{вх}}(t). \quad (*)$$

Рассмотрим два крайних случая: очень малого и очень большого  $\tau_0$ . Если  $\tau_0$  очень мало, то можно пренебречь первым слагаемым в (\*). Продифференцировав оставшееся после отбрасывания этого слагаемого уравнение по  $t$ , получим:

$$i(t) \approx C \cdot \frac{du_{\text{вх}}(t)}{dt}.$$

Напряжение на резисторе  $R$ , пропорциональное току будет в свою очередь, пропорционально производной от входного сигнала

$$u_{\text{вх}}^1 \approx \tau_0 \frac{du_{\text{вх}}}{dt}$$

Таким образом, напряжение, снимаемое с резистора приближённо равно произведению производной входного сигнала на постоянную времени.

При больших  $\tau_0$ , можно отбросить второе слагаемое в (\*). Тогда ток будет пропорционален входному сигналу

$$i(t) \approx \frac{C}{\tau_0} u_{\text{вх}}(t) = \frac{1}{R} u_{\text{вх}}(t),$$

а напряжение на конденсаторе

$$u_{\text{вх}}^2 = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \approx \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt$$

пропорционально интегралу от входного сигнала.

Таким образом, напряжение, снимаемое с конденсатора приближённо равно частному от интеграла от входного сигнала на постоянную времени.

Известно, что практически все радиосигналы могут быть представлены в виде суперпозиции гармонических составляющих, в частности, для периодических сигналов в виде ряда Фурье:

$$u(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(n\Omega t - \theta_n).$$

Этот же ряд, если воспользоваться формулой Эйлера, может быть записан в комплексном виде

$$u(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n e^{in\Omega t},$$

где комплексная амплитуда  $n$ -ой гармоники определяется интегралом:

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t) e^{-in\Omega t} dt$$

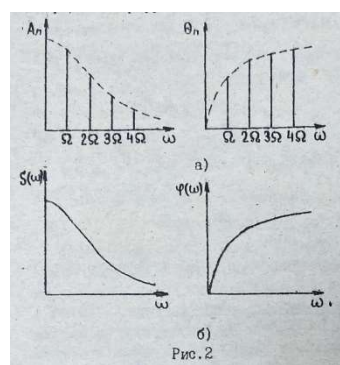
Здесь  $T$  – период функции  $u(t)$ , связанный с угловой частотой соотношением  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ .

Для непериодических сигналов аналогичные соотношения имеют вид:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (1)$$

$$S(i\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Множитель  $S(i\omega) = S(\omega) e^{i\varphi(\omega)}$ , называют спектральной плотностью.



Связь между коэффициентами Фурье  $A_n$  и спектральной плотностью  $S(i\omega)$  иллюстрируется рисунками 2а,б на первом из которых изображены амплитудная и фазовая спектрограммы произвольной периодической последовательности импульсов, а на втором – спектр одиночного импульса из этой последовательности. Форма огибающей на рисунке 2а в некотором масштабе повторяет вид функции на рисунке 2б.

Для четырёхполосников вводится также понятие коэффициента передачи: комплексной функции вида

$$K(i\omega) = \frac{U_{\text{ВЫХ}}}{U_{\text{ВХ}}} = K(\omega) e^{i\varphi(\omega)}, \text{ где } U_{\text{ВХ}} \text{ и } U_{\text{ВЫХ}} - \text{комплексные амплитуды входного}$$

и выходного напряжений. (Для сигнала вида  $u(t) = U e^{i(\omega t + \varphi)}$  комплексная амплитуда записывается в виде  $U = U e^{i\varphi}$ ). Модуль  $K(\omega)$  называют амплитудной характеристикой четырёхполосника, а аргумент  $\varphi(\omega)$  – фазовой характеристикой.

Каждая гармоника входного сигнала даст на выходе линейного четырёхполосника гармонический отклик той же частоты. Для его нахождения нужно эту гармонику умножить на коэффициент передачи четырёхполосника. Просуммировав отклики по всем гармоникам, можно определить выходной сигнал. В частности, для непериодических сигналов выражение для выходного сигнала запишется в интегральной форме:

$$u_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (2)$$

где  $S(i\omega)$  – спектральная плотность входного сигнала.

Так как при дифференцировании напряжения  $u_{\text{ВЫХ}} = \tau_0 \frac{du_{\text{ВХ}}}{dt}$ , то используя (1) и (2), получим

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \tau_0 \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] = \\ &= \tau_0 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) i\omega e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Из последнего равенства видно, что коэффициент передачи дифференцирующего четырёхполосника

$$K(i\omega) = \tau_0 i\omega = \tau_0 \omega e^{i\frac{\pi}{2}} \quad (3).$$

Например, при дифференцировании гармонического напряжения типа  $e^{i\omega t}$  выражение для выходного сигнала имеет вид:  $u_{\text{ВЫХ}}(t) = \tau_0 \cdot \frac{d}{dt} e^{i\omega t} = \tau_0 \cdot i\omega \cdot e^{i\omega t} = \tau_0 \cdot$

$$\omega \cdot e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}.$$

Иными словами, для получения требуемого выходного сигнала каждая гармоника входного сигнала домножается на коэффициент  $\tau_0 \omega$  и сдвигается по фазе на  $\frac{\pi}{2}$ .

Получим похожую формулу для интегрирования.

При интегрировании напряжения  $u_{\text{вых}} = \frac{1}{\tau_0} \int_{-\infty}^t u_{\text{вх}}(t) dt$ , то используя (1) и (2), получим:

$$\begin{aligned} u_{\text{вых}}(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) K(i\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\tau_0} \cdot \int_{-\infty}^t \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \right] = \\ &= \frac{1}{\tau_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S(i\omega) (i\omega)^{-1} e^{i\omega t} d\omega. \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что коэффициент передачи интегрирующего четырёхполюсника

$$K(i\omega) = \frac{1}{\tau_0 i\omega} = \frac{1}{\tau_0 \omega} e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad (4)$$

Показанные выше четырёхполюсники имеют коэффициенты передачи

$$K(i\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{i\omega C}} = RC \cdot \frac{i\omega}{1 + RCi\omega} = \frac{\tau_0 i\omega}{1 + \tau_0 i\omega} = \frac{\tau_0^2 \omega^2}{1 + \tau_0^2 \omega^2} + i \cdot \frac{\tau_0 \omega}{1 + \tau_0^2 \omega^2} \quad (5)$$

и

$$K(i\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{i\omega CR} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{i\omega CR}} = \frac{1}{\tau_0 i\omega} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\tau_0 i\omega}} = \frac{\frac{1}{\tau_0^2 \omega^2}}{1 + \frac{1}{\tau_0^2 \omega^2}} - i \cdot \frac{\frac{1}{\tau_0 \omega}}{1 + \frac{1}{\tau_0^2 \omega^2}} \quad (6)$$

Сравнивая выражения (3) и (5) следует, что для удовлетворительного дифференцирования необходимо выполнение условия:  $\tau_0 \omega \ll 1$

Сравнивая выражения (4) и (6) следует, что для удовлетворительного интегрирования необходимо выполнение условия:  $\tau_0 \omega \gg 1$

Причём эти условия должны выполняться для всех частот в существенной части спектра входного сигнала.

Из этих неравенств вытекает также следующее принципиальное положение: чем точнее дифференцирование или интегрирование, тем меньше (по модулю) коэффициент передачи четырёхполюсника, осуществляющего это преобразование. В пределе при идеальном преобразовании  $K(\omega) \rightarrow 0$ .

### Экспериментальная часть.

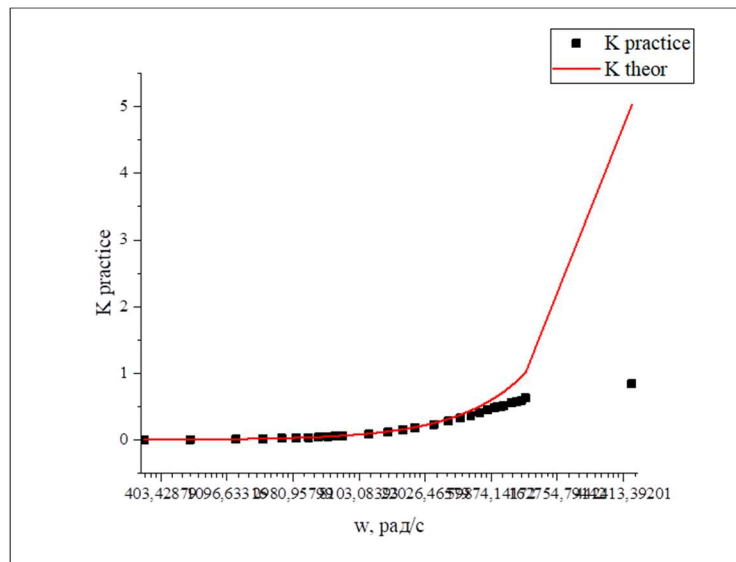
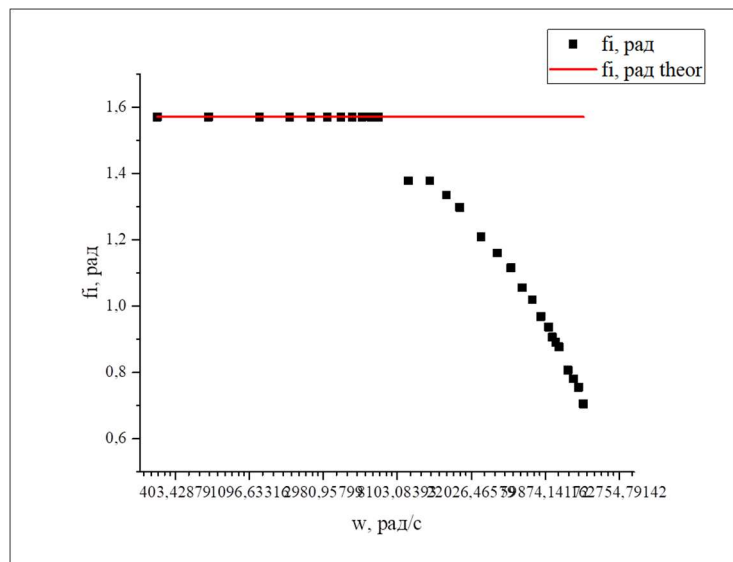
1. Для дифференцирующего четырехполосника с постоянной времени  $\tau_0 = 10\text{мкс}$  и интегрирующего четырехполосника с постоянной времени  $\tau_0 = 5\text{мс}$  сняли зависимость модуля  $K(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  коэффициента передачи от частоты. Подали входной сигнал от звукового генератора, величину выходного сигнала фиксировали с помощью осциллографа, используя калиброванный коэффициент усиления. Сдвиг фазы определяли по форме эллипса, который получается на экране осциллографа при подаче сигнала на вертикальный Y-канал, а выходной на горизонтальный X-канал. Результаты занесли в табл.1-2.

1) Дифференцирующий четырехполосник с постоянной времени 10 мкс.

$\nu$ , Гц	$\omega$ , рад/с	2OG	2OF	U <sub>вх</sub>	U <sub>вых</sub>	$\varphi$ практ	K прак	K теор
50	314,2	-	21,4	21,4	0,076	1,571	0,003551	0,003142
100	628,3	-	21,2	21,2	0,14	1,571	0,006604	0,006283
200	1256,6	-	21,6	21,6	0,254	1,571	0,011759	0,012566
300	1885	-	21,6	21,6	0,4	1,571	0,018519	0,01885
400	2513,3	-	21,6	21,6	0,524	1,571	0,024259	0,025133
500	3141,6	-	21,6	21,6	0,652	1,571	0,030185	0,031416
600	3769,9	-	21,6	21,6	0,776	1,571	0,035926	0,037699
700	4398,2	-	21,6	21,6	0,908	1,571	0,042037	0,043982
800	5026,5	-	21,6	21,6	1,03	1,571	0,047685	0,050265
900	5654,9	-	21,6	21,6	1,16	1,571	0,053704	0,056549
1000	6283,2	-	21,6	21,6	1,27	1,571	0,058796	0,062832
1500	9424,8	21,2	21,6	21,6	1,87	1,378	0,086574	0,094248
2000	12566,4	21,2	21,6	21,6	2,52	1,378	0,116667	0,125664
2500	15708	21	21,6	21,6	3,16	1,335	0,146296	0,15708
3000	18850	20,8	21,6	21,6	3,76	1,298	0,174074	0,188496
4000	25132,7	20,2	21,6	21,6	5	1,209	0,231481	0,251327
5000	31415,9	19,8	21,6	21,6	6,04	1,159	0,27963	0,314159
6000	37699,1	19,4	21,6	21,6	7,12	1,116	0,32963	0,376991
7000	43982,3	18,8	21,6	21,6	7,96	1,056	0,368519	0,439823
8000	50265,5	18,4	21,6	21,6	8,92	1,019	0,412963	0,502655
9000	56548,6	17,8	21,6	21,6	9,68	0,969	0,448148	0,565487

10000	62831,85	17,4	21,6	21,6	10,4	0,934	0,481481	0,628319
10500	65973,45	17	21,6	21,6	10,7	0,906	0,49537	0,659734
11000	69115,04	16,8	21,6	21,6	10,9	0,891	0,50463	0,69115
11500	72256,63	16,6	21,6	21,6	11,2	0,877	0,518519	0,722566
13000	81681,41	15,6	21,6	21,6	12	0,807	0,555556	0,816814
14000	87964,59	15,2	21,6	21,6	12,4	0,781	0,574074	0,879646
15000	94247,78	14,8	21,6	21,6	12,8	0,755	0,592593	0,942478
16000	100531	14	21,6	21,6	13,6	0,705	0,62963	1,00531
80000	502654,8	3,64	20,8	20,8	17,5	0,176	0,841346	5,026548

Табл.1

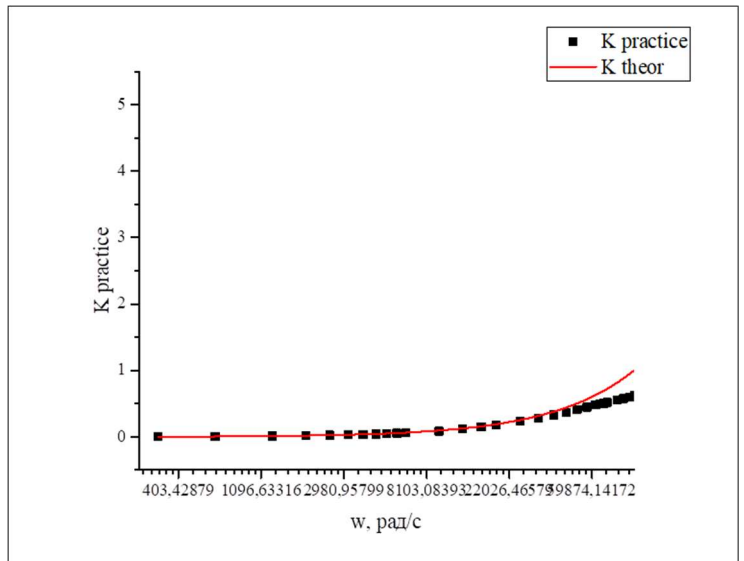
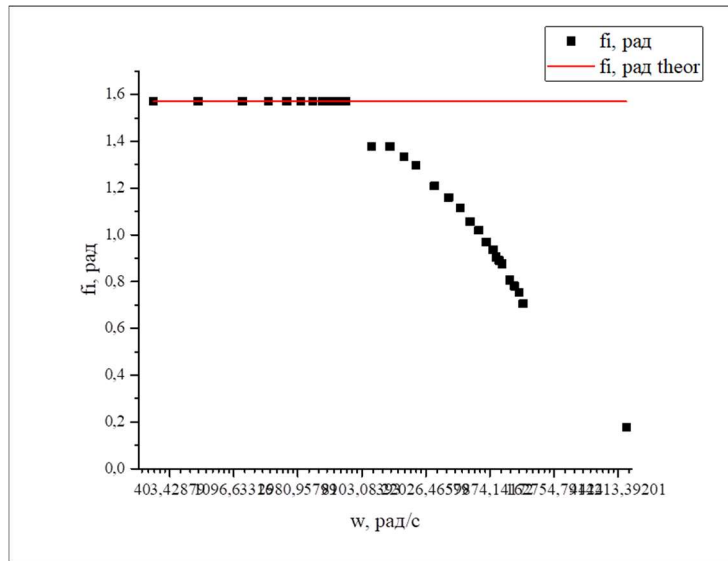


## 2) Интегрирующий четырехполосник с постоянной времени 5 мс.

$\nu$ , Гц	$\omega$ , рад/с	2OG	2OF	Увх	Увых	$\phi$ практ	К практ	К теор
50	314	12,6	21,2	21,2	8,44	-0,636	0,398113	0,636943
100	628	17,4	21,2	21,2	6,08	-0,963	0,286792	0,318471
200	1256	20	21,6	21,6	3,54	-1,183	0,163889	0,159236
300	1884	20,6	21,6	21,6	2,44	-1,265	0,112963	0,106157
400	2512	20,4	21,6	21,6	1,86	-1,236	0,086111	0,079618
500	3140	20,2	21,2	21,2	1,49	-1,262	0,070283	0,063694
600	3768	19,8	21,2	21,2	1,21	-1,205	0,057075	0,053079
700	4396	19,4	21,2	21,2	1,04	-1,156	0,049057	0,045496
800	5024	18,6	21,2	21,2	0,904	-1,07	0,042642	0,039809

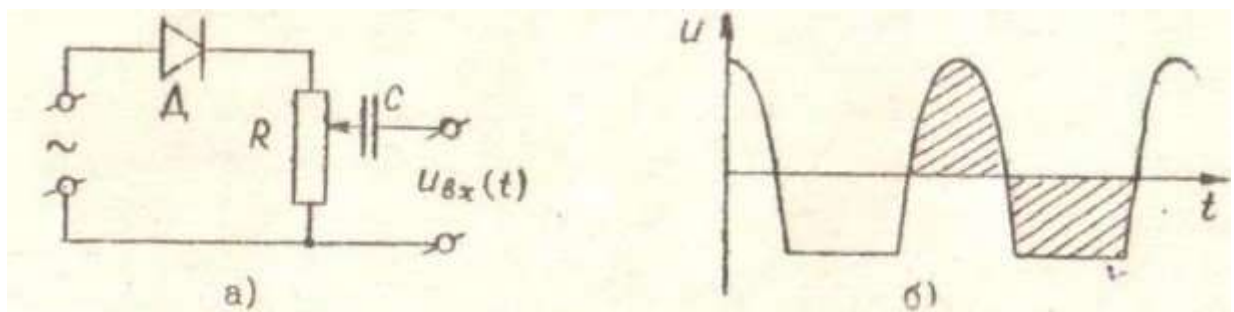
1000	6280	18	21,6	21,6	0,784	-0,985	0,036296	0,031847
4000	25120	20	21,2	21,2	0,208	-1,233	0,009811	0,007962

Табл.2



3) Попытались качественно оценить для какой области частот приближенно осуществляется дифференцирование и интегрирование.

2. При помощи схемы, изображенной на рис.а, получили осциллограмму напряжения, среднее значение которого равно нулю (рис.б):

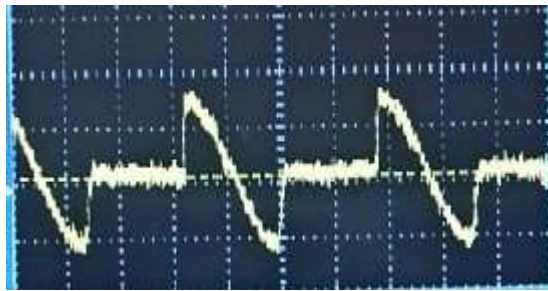


1) производная



Рис. №1 Снизу- хорошее дифференцирование усеченного синуса (100 Гц), сверху – плохое дифференцирование усеченного синуса (10 кГц, 1 кГц)





2) интеграл

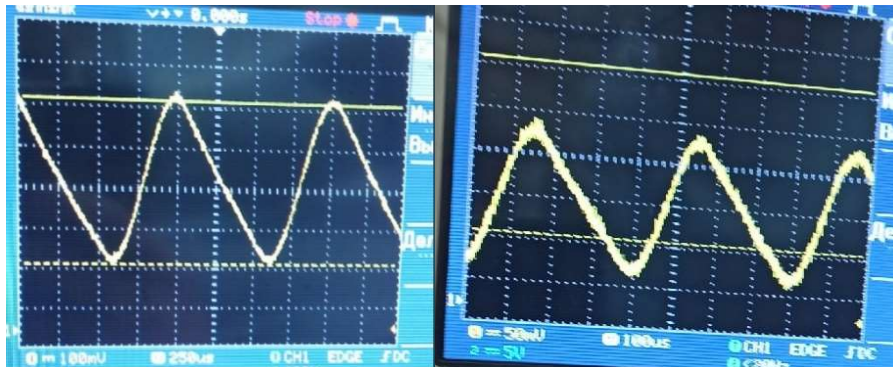
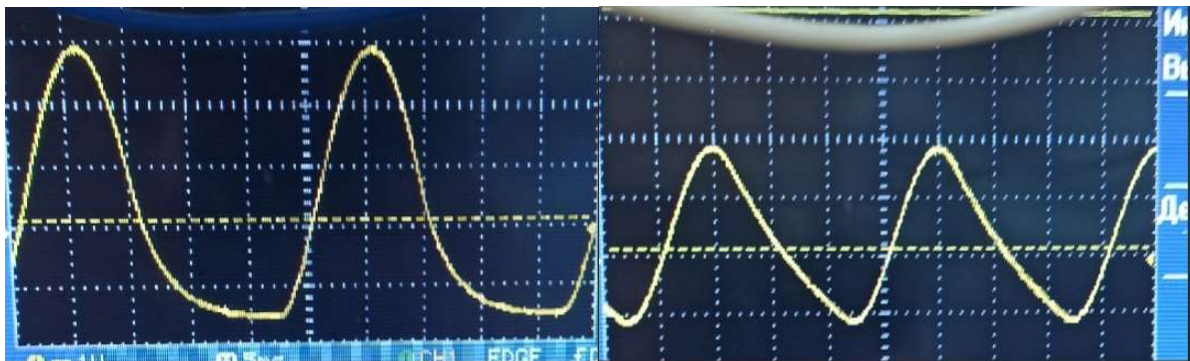


Рис. №2 Сверху - хорошее интегрирование усеченного синуса (1 кГц, 2,5 кГц), справа – плохое интегрирование усеченного синуса (40 Гц)



Разложим эту функцию в ряд Фурье и нарисуем ее амплитудный спектр. Считая существенными первые 12 гармоник спектра. Построим осциллограммы выходных напряжений для выбранных цепочек.

Разложение усечённого синуса в ряд Фурье:

Пусть  $f_1(t) = \begin{cases} -\sin(\omega t) & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ 0 & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$ , тогда усечённый синус из фото  $f(t) = f_1(t) - \frac{a_0}{2}$ , где  $a_0$  – коэффициент Фурье при 1.

Тогда, если  $f_1(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t))$ , то

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)).$$

Найдём данное разложение.

1) Найдём  $a_n$ .

$$a_n = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 \sin(\omega t) \cos(n\omega t) dt = -\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 (\sin((1-n)\omega t) + \sin((1+n)\omega t)) dt$$

$$= -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-n^2} [\cos((n+1)\pi) - 1]$$

Следовательно, остаются только чётные гармоники, тогда  $a_{2k} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4k^2}$

2) Найдём  $b_n$ .

$$a_n = -\frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt = -\frac{\omega}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 (\cos((1-n)\omega t) + \cos((1+n)\omega t)) dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1-n^2} [\sin((n+1)\pi)]$$

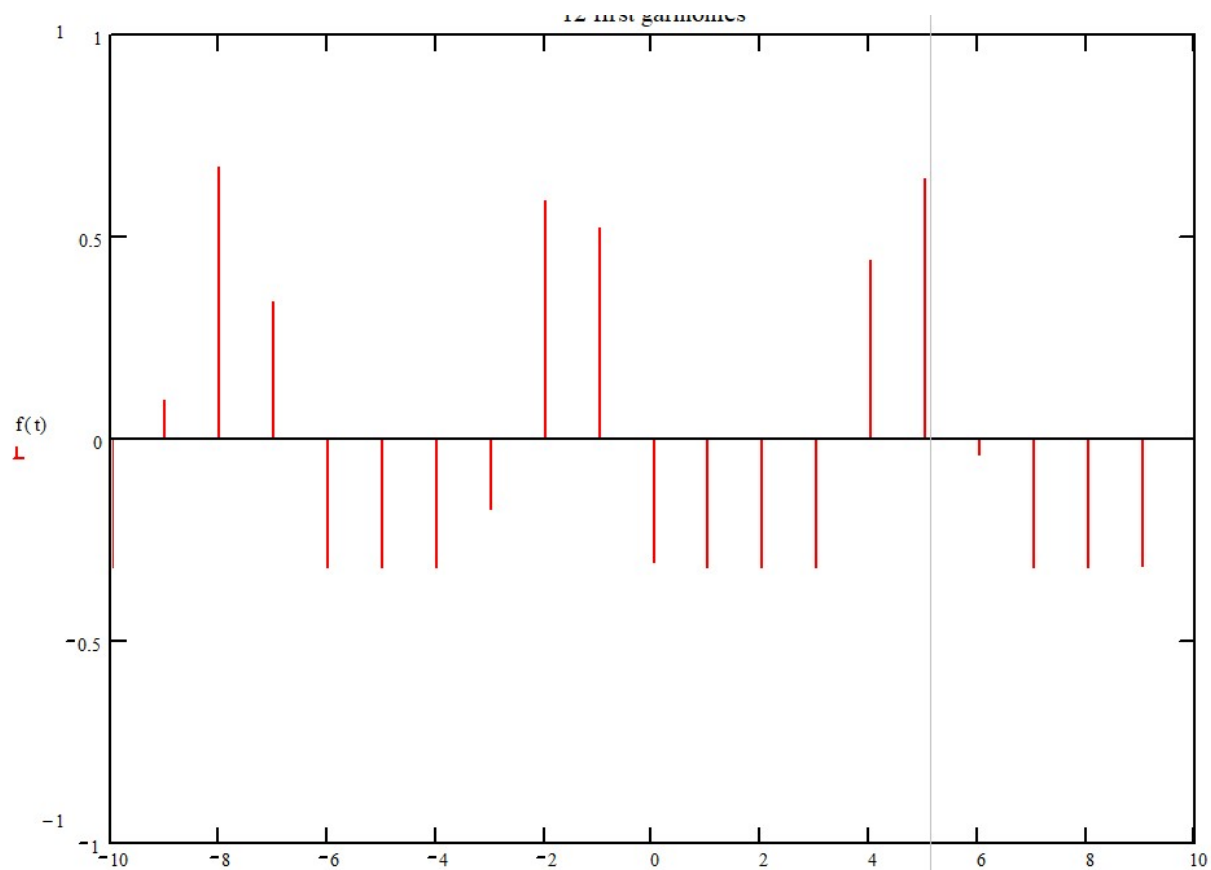
Следовательно, все гармоники кроме первой зануляются.

3) Искомое разложение усечённого синуса.

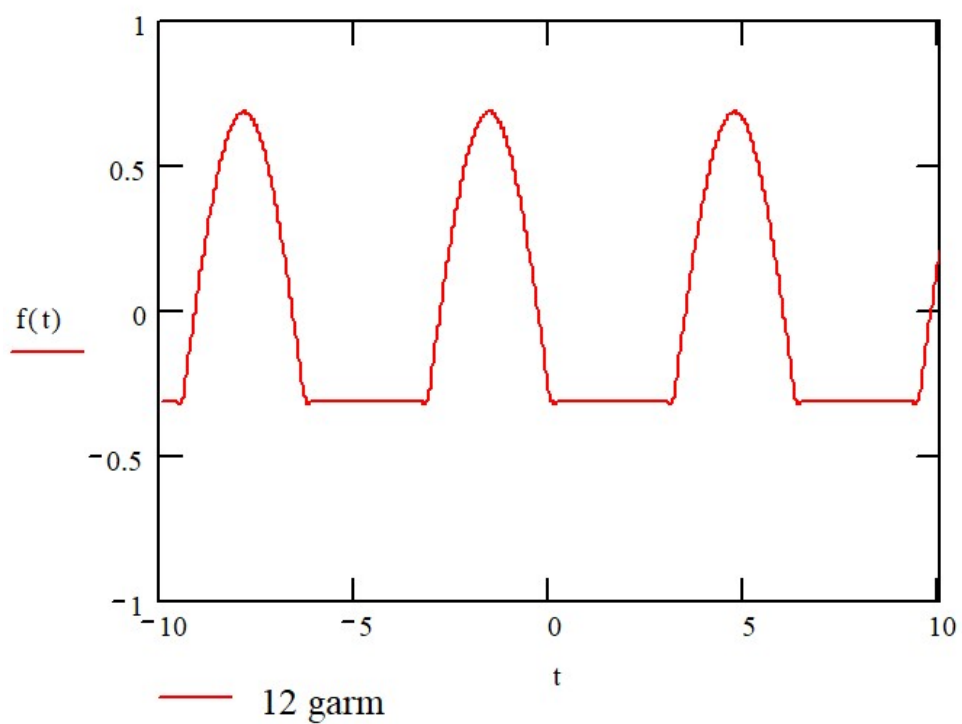
$$f(t) = -\frac{1}{2} \sin(\omega t) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-4k^2} \cdot \cos(2k\omega t)$$

4) Амплитудный спектр:





Рис№3 . Амплитудный спектр усечённого синуса



Рис№4 . Первые 12 гармоник усечённого синуса

3. Подали на вход осциллографа сигналы с генератора импульсов (меандр, треугольник и пилу). Сфотографировали их осциллограммы, производную и интегралы от этих сигналов.

#### 1) Меандр.

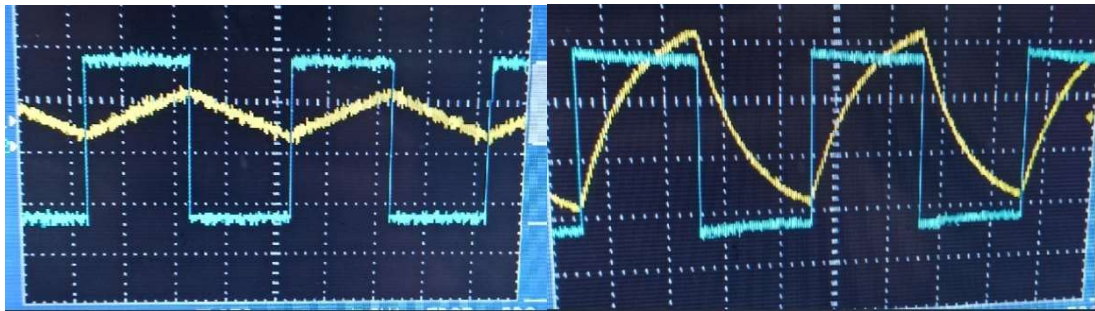


Рис. №5 Слева- хорошее интегрирование меандра (1 кГц), справа – плохое интегрирование меандра (100 Гц)

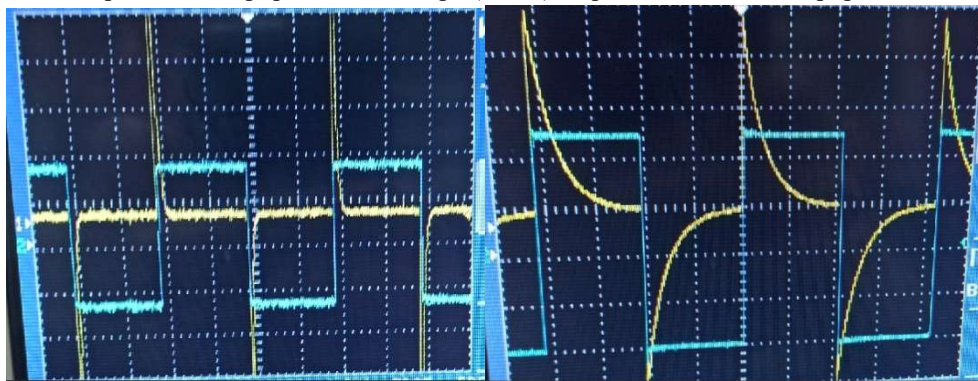


Рис. №6 Слева- хорошее дифференцирование меандра (1 кГц), справа – плохое дифференцирование меандра (10 кГц)

#### 2) Треугольник

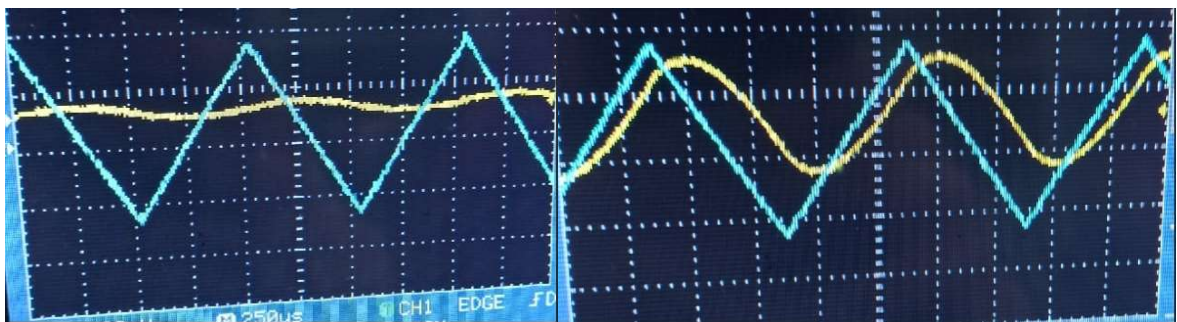


Рис. №7 Слева- хорошее интегрирование треугольника (1 кГц), справа – плохое интегрирование треугольника (100 Гц)

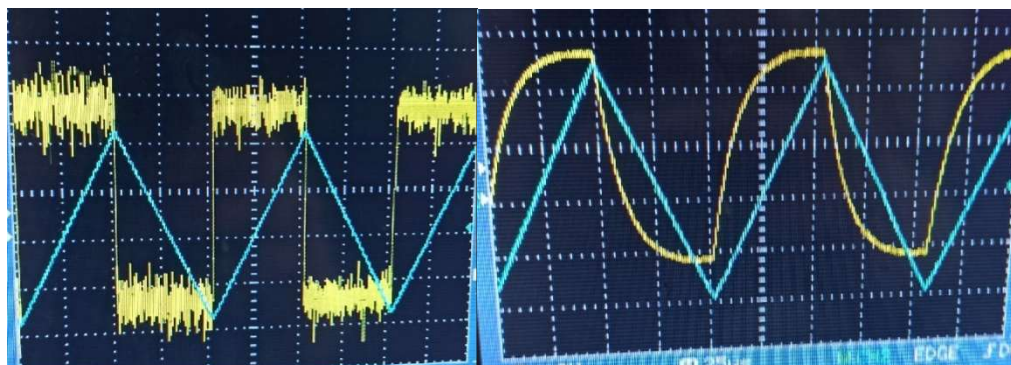




Рис. №8 Слева- хорошее дифференцирование треугольника (1 кГц), справа – плохое дифференцирование треугольника (10 кГц)

### 3) Пила

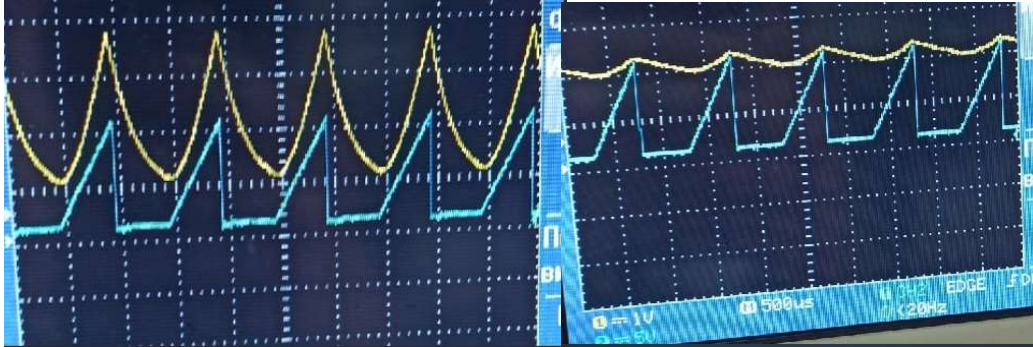


Рис. №9 Слева- хорошее интегрирование пилы (100 Гц), справа – плохое интегрирование пилы (1 кГц)

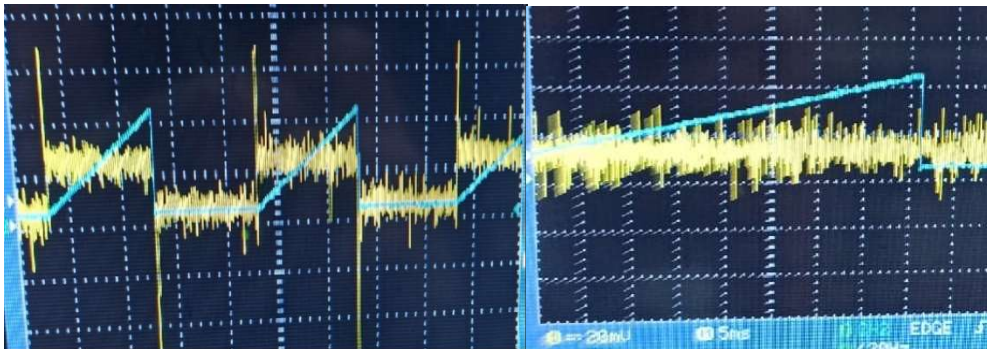


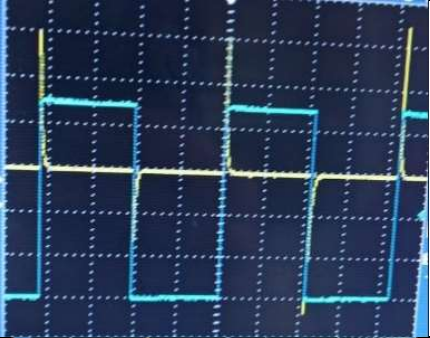
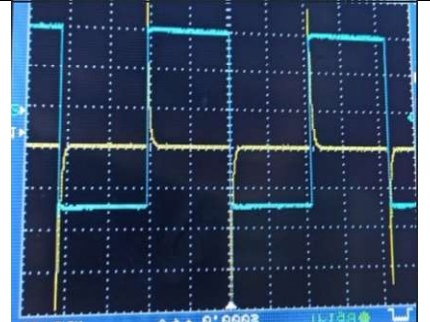
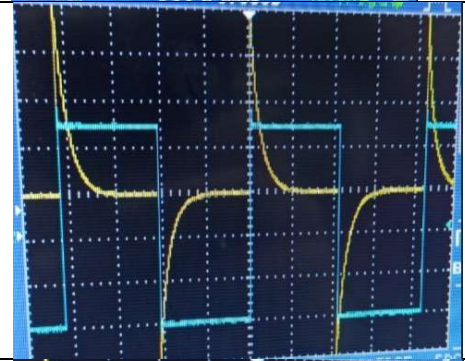

Рис. 10 Слева- хорошее дифференцирование пилы (1кГц), справа – плохое дифференцирование пилы (10 Гц)

4. Подключив выход генератора импульсов ко входу четырехполосников, получили осциллограммы преобразования сигналов. Для эксперимента выбрали меандр.

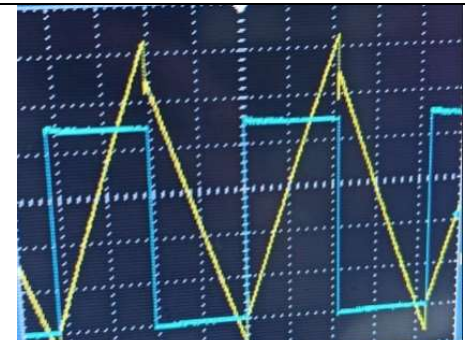
1) При неизменной частоте следования импульсов, увидели, как влияет изменение постоянной времени на качество преобразования.

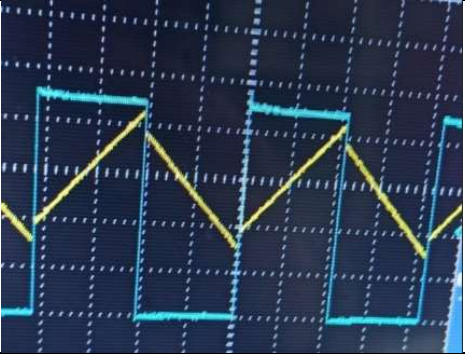
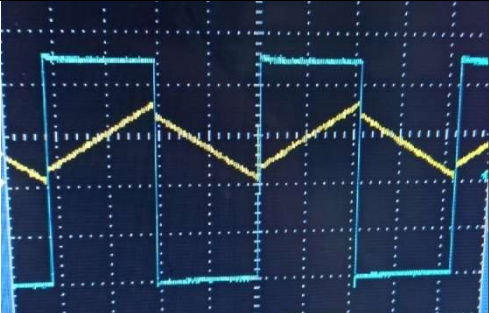
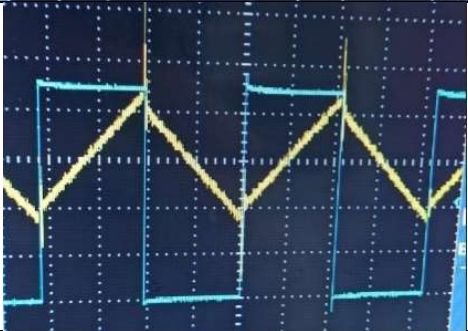
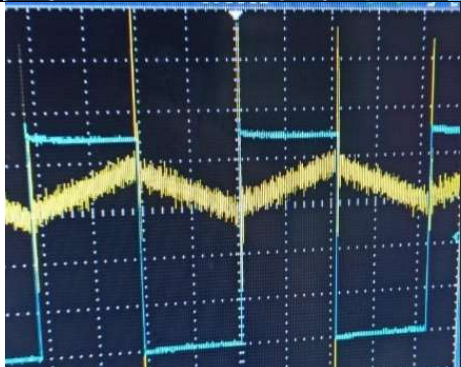
Дифференцирование:



$\tau_0 = 5 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 200 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 1000 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 10000 \text{ мс}$	

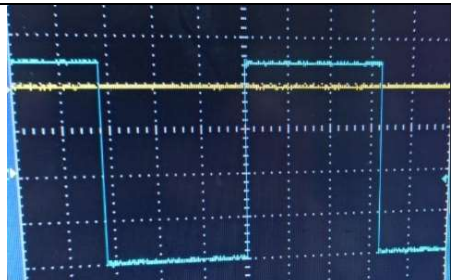
Интегрирование:

$\tau_0 = 0,5 \text{ мс}$	
---------------------------	--

$\tau_0 = 2,5 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 5 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 10 \text{ мс}$	
$\tau_0 = 50 \text{ мс}$	

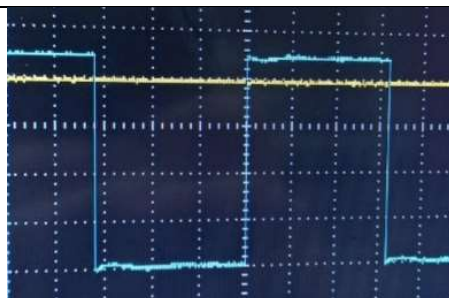
2) Теперь будет изменять частоту следования импульсов при неизменной постоянной времени.

Дифференцирование:

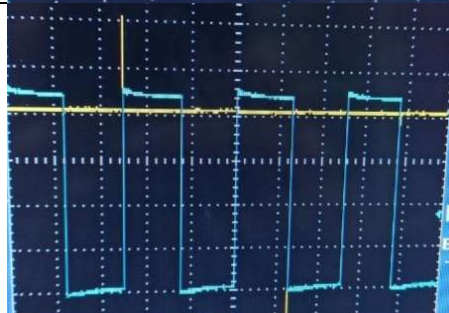
$\nu = 1,5 \text{ Гц}$	
------------------------	--



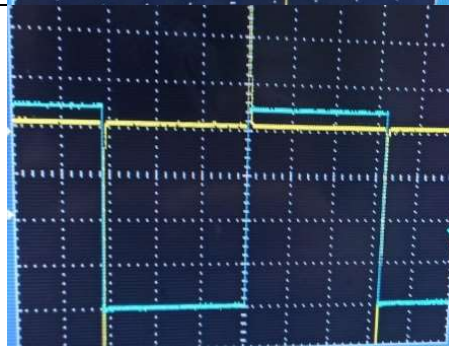
$$\nu = 15 \text{ Гц}$$



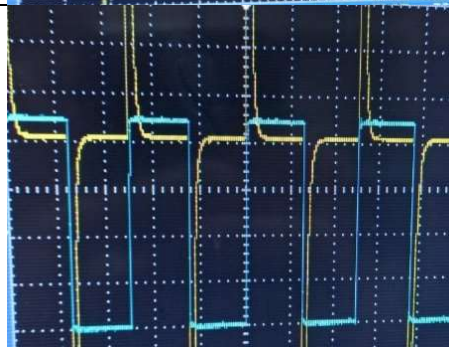
$$\nu = 150 \text{ Гц}$$



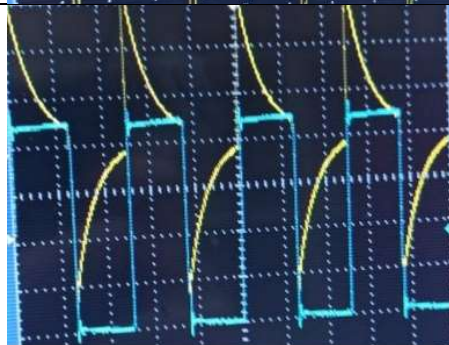
$$\nu = 1500 \text{ Гц}$$



$$\nu = 15000 \text{ Гц}$$



$$\nu = 150000 \text{ Гц}$$



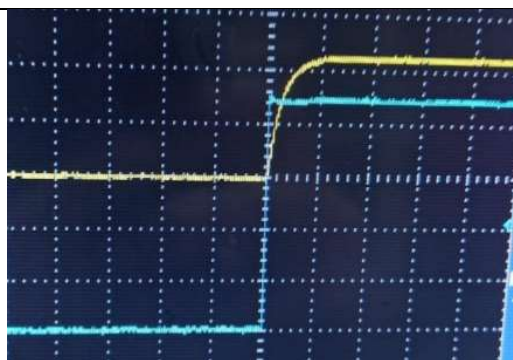


$$\nu = 10^6 \text{ Гц}$$

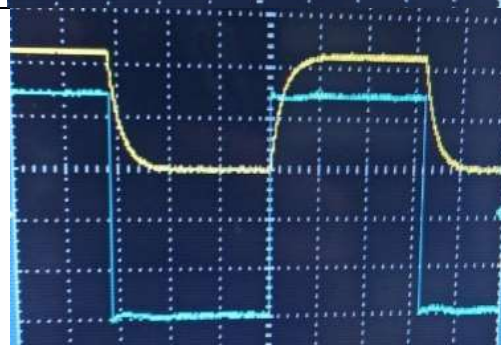


Интегрирование:

$$\nu = 1,5 \text{ Гц}$$



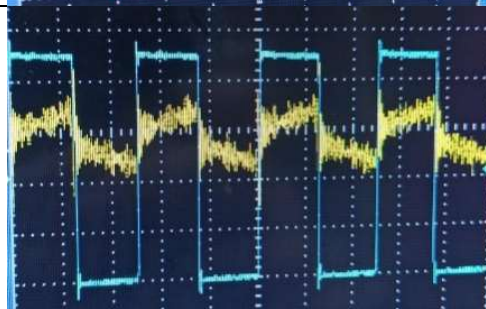
$$\nu = 15 \text{ Гц}$$



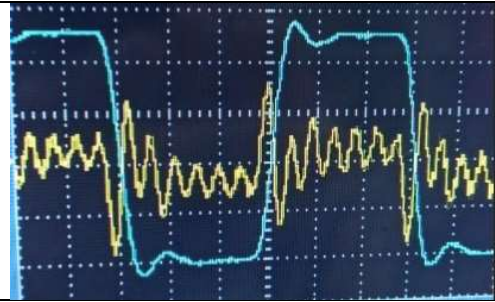
$$\nu = 1500 \text{ Гц}$$



$$\nu = 1,7 * 10^5 \text{ Гц}$$



$$\nu = 1,7 * 10^6 \text{ Гц}$$



5. Выяснили, какой из трех импульсов сигналов при прочих равных условиях легче дифференцируется или интегрируется. Обоснуем наш вывод со спектральной точки зрения.

1) Разложим меандр в ряд Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} a & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ -a & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Заметим, что данная функция нечётная, поэтому её разложение будет иметь вид:  $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(\omega n t)$ .

Найдём  $b_n$ .

$$b_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \sin(\omega n t) dt = \frac{\omega}{\pi} a \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 \sin(\omega n t) dt - \frac{\omega}{\pi} a \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega n t) dt = \frac{2a}{\pi n} (\cos(\pi n) - 1)$$

Таким образом, остаются только гармоники вида  $b_{2k+1}$ .

Тогда разложение меандра в ряд Фурье:  $f(t) = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4a}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)\omega t)$

2) Разложим треугольник в ряд Фурье.

$$\text{Пусть } f(t) = \begin{cases} \frac{2a\omega}{\pi} t + a & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ -\frac{2a\omega}{\pi} t + a & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$$

Так как данная функция чётная, то  $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\omega n t)$ .

Очевидно, что для данного  $f(t)$ ,  $a_0 = 0$ .

Пусть  $k = \frac{2a\omega}{\pi}$ .

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(t) \cos(\omega n t) dt = \frac{\omega}{\pi} \left[ \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^0 (kt + a) \cos(\omega n t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} (-kt + a) \cos(\omega n t) dt \right] \\ &= \frac{2k}{\omega \pi n^2} (1 - \cos(\pi n)) \end{aligned}$$

То есть остаются только  $a_{2n-1} = \frac{4k}{\omega\pi(2n-1)^2} = \frac{8a}{\pi^2(2n-1)^2}$

Тогда  $f(t) = \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos((2n-1)\omega t)$

3) Разложим пилу в ряд Фурье.

Пусть  $f_1(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{\pi}{\omega} < t < 0 \\ \frac{a\omega}{\pi} t & 0 < t < \frac{\pi}{\omega} \end{cases}$

Тогда  $f(t) = f_1(t) - \frac{a_0}{2}$

Тогда  $a_n = \frac{\omega}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f_1(t) \cos(\omega n t) dt = \frac{a\omega^2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} t \cdot \cos(\omega n t) dt = \frac{a}{\pi^2 n^2} (\cos(\pi n) - 1)$ , то есть

$$a_{2k-1} = -\frac{2a}{\pi^2(2k-1)^2}$$

Найдём  $b_n$ .

$$b_n = \frac{a\omega^2}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{\omega}} t \cdot \sin(\omega n t) dt = -\frac{a}{\pi n} \cos(\pi n)$$

Таким образом, искомое разложение:

$$f(t) = -\frac{2a}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)\omega t) + \frac{a}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\omega t)$$

Из разложений можем заметить, что легче дифференцируется и интегрируется треугольник (т.к. он быстрее всех сходится), далее идёт меандр, и хуже всех дифференцируется и интегрируется пила.