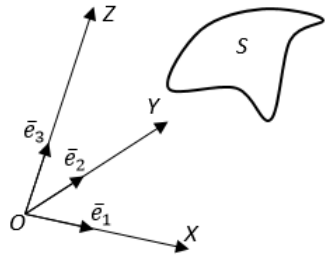
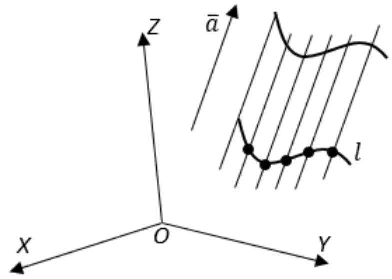
2.8 Поверхности второго порядка

Пусть S есть некоторая поверхность в пространстве и $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \sim OXYZ$ декартова система координат



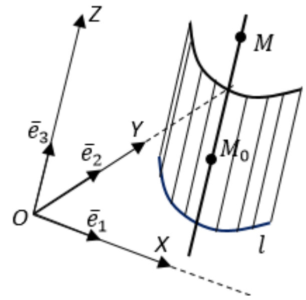
Определение 2.17. Уравнение $F(x,y,z) = 0$ называем уравнением поверхности S и пишем $S\colon F(x,y,z) = 0$ в системе $OXYZ$, если координаты любой точки $M(x,y,z)$ удовлетворяют данному уравнению и обратно.

Цилиндрические поверхности (цилиндры)



Пусть l есть некоторая линия в пространстве и $\bar{a}$ есть некоторый ненулевой вектор ($\bar{a} \neq \bar{0}$).

Определение 2.18. Совокупность всех прямых, проходящих через l и параллельных $\bar{a}$, называем цилиндрической поверхностью или цилиндром. Каждая такая прямая называется образующей цилиндра, а l – направляющей цилиндра.



Пусть уравнение поверхности S не содержит одну из координат, например z:

$S\colon F(x,y) = 0.$

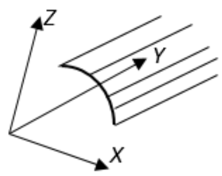
На плоскости OXY это уравнение можно рассматривать как уравнение линии

$l\colon F(x,y) = 0.$

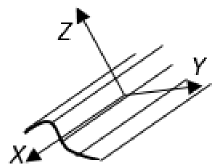
Пусть точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ принадлежит S. Тогда все точки $M(x_0, y_0, z) \in S$. Следовательно, вся прямая M_0M принадлежит S (см. рис.). Прямая $M_0M \parallel OZ$, так как $\overline{M_0M} \parallel \bar{e}_3$. Вывод:

$F(x,y) = 0$ – это цилиндрическая поверхность с образующими параллельными оси OZ. Совершенно аналогично:

$F(x,z) = 0$ – цилиндр с образующими $\parallel OY$



$F(y,z) = 0$ – цилиндр с образующими $\parallel OX$

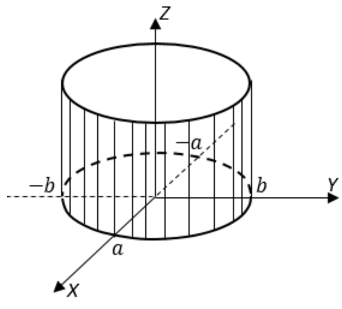


Цилиндрические поверхности 2-го порядка

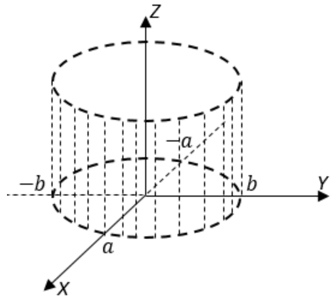
Здесь и всюду далее будем считать, что $\{O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\} \sim OXYZ$ есть прямоугольная декартова система координат. Рассмотрим цилиндры с образующими параллельными оси OZ: $F(x,y) = 0$.

Если направляющая $l\colon F(x,y) = 0$ есть алгебраическая линия 2-го порядка, то будем получать цилиндрические поверхности 2-го порядка. В соответствии с классификацией кривых 2-го порядка получим 9 типов цилиндров 2-го порядка:

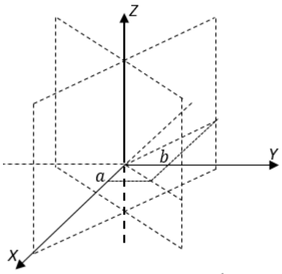
(1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$ – Вещественный цилиндр эллиптического типа



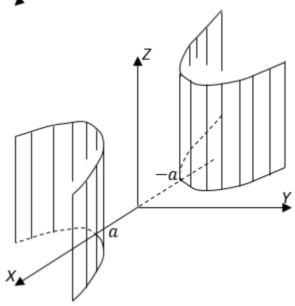
(2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ – Мнимый эллиптический цилиндр
$(a \geqslant b > 0)$



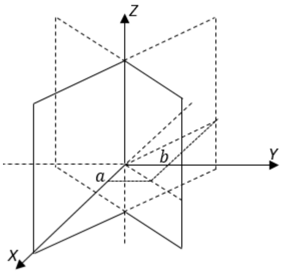
(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – Две мнимые плоскости пересекающиеся по действительной оси OZ



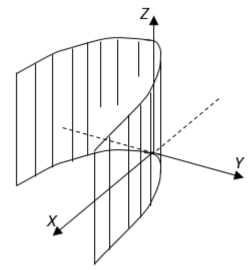
(4) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – Гиперболический цилиндр



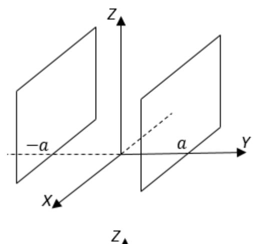
(5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ – Две действительные пересекающиеся плоскости



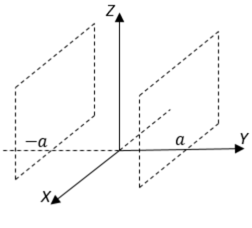
(6) $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ – Параболический цилиндр



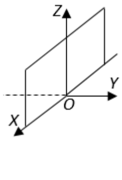
(7) $y^2 - a^2 = 0$ – Две действительные параллельные плоскости



(8) $y^2 + a^2 = 0$ – Две мнимые параллельные плоскости



(9) $y^2 = 0$ – Две слившиеся плоскости



Прежде чем ввести следующий тип поверхности, введем следующее определение:

Определение 2.19. Функция $F(x, y, z) = 0$ называется однородной функцией (или формой) степени s, если $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s F(x, y, z)$.

Например

(1) $F(x, y, z) = Ax+By+Cz$. Тогда $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = A\lambda x+B\lambda y+C\lambda z = \lambda(Ax+By+Cz) = \lambda F(x, y, z)$ и, следовательно, $F(x, y, z) = Ax+By+Cz$ – однородная функция степени $s = 1$ (или форма 1-й степени).

(2) $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$. Тогда $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = A\lambda x + B\lambda y + C\lambda z + D = \lambda(Ax + By + Cz) + D \neq \lambda(Ax + By + Cz + D)$, т.е $F(x, y, z) = Ax + By + Cz + D$ – не однородная функция.

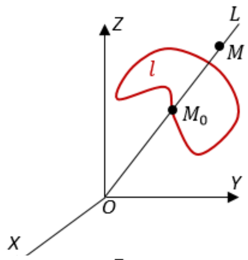
(3) $F(x, y, z) = 2x^2-3xy+z^2-5xz$. Тогда $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = 2(\lambda x)^2-3\lambda x\lambda y+(\lambda z)^2-5\lambda x\lambda z = \lambda^2(2x^2 - 3xy + z^2 - 5xz) = \lambda^2 F(x, y, z)$, т.е $F(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + z^2 - 5xz$ – однородная функция степени $s = 2$ (или квадратичная форма).

Конические поверхности (конусы)

Пусть поверхность S определена уравнением $S\colon F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – однородная функция степени s. В этом случае имеет место

Утверждение 2.6. Если точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$, то точка $M(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in S$.

Доказательство. Из того, что точка $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$ следует $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Рассмотрим $F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) = \lambda^s F(x_0, y_0, z_0) = \lambda^s \cdot 0 = 0$, т.е. точка $M(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in S$. □

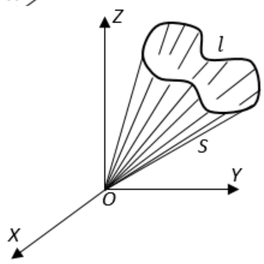


Рассмотрим далее прямую $L\colon OM_0$ (см. рис.).

Так как $\overline{OM_0} = \{x_0, y_0, z_0\}$, то точка $M \in L$ если $\overline{OM_0} \parallel \overline{OM}$, т.е. $\overline{OM} = \lambda\overline{OM_0}$. Следовательно, $\overline{OM} = \{\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0\}$.

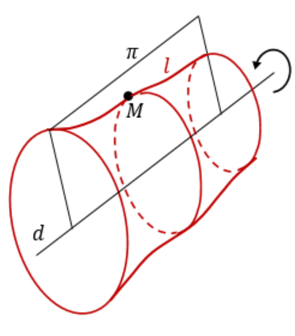
Так как точка $M(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0) \in S$, то $L \subset S$.

Если точка M_0 движется по контору l, то S – совокупность прямых, проходящих через точку $O(0, 0, 0)$ и пересекающих l. Такие прямые называем образующими конуса, а l – направляющей конической поверхности S.



Определение 2.20. Если поверхность S определена уравнением $S\colon F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – однородная функция степени s, то S называем конической поверхностью (конусом) s-го порядка.

Поверхности вращения



Рассмотрим в пространстве прямую d и плоскость π, где $d \subset \pi$. Пусть на π задана линия l. Будем вращать π вокруг d. Тогда произвольная точка $M \in l$ будет описывать окружность и тем самым в пространстве будет определяться поверхность S – поверхность вращения вокруг d.

Для системы $OXYZ$ в качестве плоскости π возьмем координатную плоскость OXZ, а в качестве d – ость OZ. Пусть уравнение линии l в плоскости OXZ есть:

$l\colon F(x, z) = 0 \qquad (*)$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y, z) \in S$. Пусть точка M находится на окружности радиуса $O'M = R$, где $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. На этой же окружности рассмотрим точку $M_1(x_1, 0, z_1) \in \pi$. Тогда

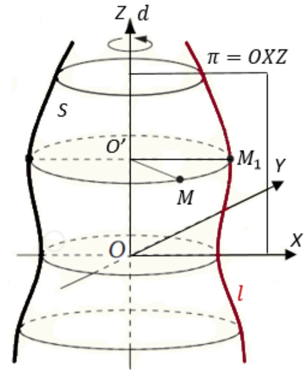
$$\left.\begin{array}{l} z_1 = z \\ |x_1| = R \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \qquad (**)$$

Так как точка $M_1 \in l$ то ее координаты удовлетворяют уравнению линии l $(*)$: $F(x_1, z_1) = 0$ и учитывая $(**)$ получим

$F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$ – уравнение поверхности вращения вокруг OZ и, аналогично:

$F(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0$ – уравнение поверхности вращения вокруг OX;

$F(y, \pm\sqrt{x^2+z^2}) = 0$ – уравнение поверхности вращения вокруг OY.



Конусы второго порядка

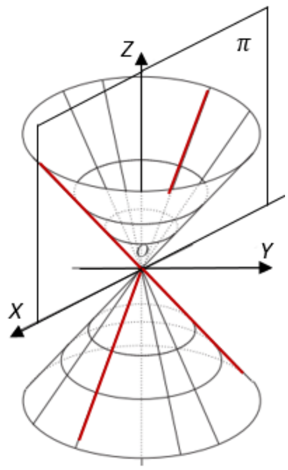
Выше мы дали самое общее определение конической поверхности. Сейчас рассмотрим частный, но для нас важным случай. Рассмотрим в плоскости $\pi = OXZ$ уравнение двух действительных пересекающихся прямых:

$l\colon a^2x^2 - c^2z^2 = 0 \qquad (*)$

и построим уравнение поверхности, полученной вращением l вокруг OZ. Согласно формуле $F(x, z) = F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$

$S\colon a^2(x^2+y^2) - c^2z^2 = 0.$

Это уравнение прямого кругового конуса. Если сделать деформацию (растяжение, сжатие) вдоль оси OY в $\lambda = \dfrac{b}{a}$ раз, то получим



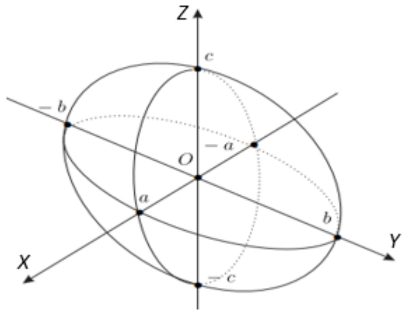
$$(10)\ a^2x^2 + b^2y^2 - c^2z^2 = 0 \text{ – Конус второго порядка}$$

Следующее уравнение называем:

$$(11)\ a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 0 \text{ – Мнимый конус 2-го порядка}$$

Эллипсоид

Рассмотрим в плоскости $\pi = OXZ$ уравнение эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. После вращения его вокруг оси OZ получим поверхность вращения: $\dfrac{x^2+y^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ – уравнение эллипсоида вращения. Деформируем вдоль оси OY в $\lambda = \dfrac{a}{b}$ раз и получаем

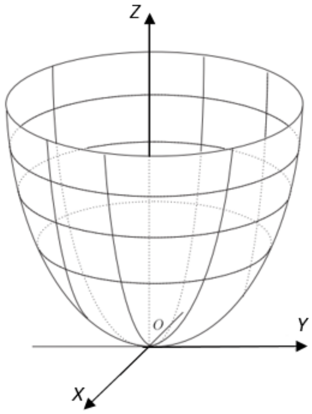


$$(12)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – Эллипсоид}$$

Как в случае эллипса, здесь возникает уравнение

$$(13)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – Мнимый эллипсоид}$$

Эллиптический параболоид



Вращаем параболу $x^2 = 2z$ $(p = 1)$ вокруг OZ. Уравнение получаемой поверхности S:

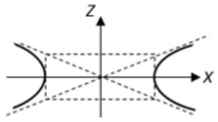
$S\colon x^2 + y^2 = 2z$ – эллиптический параболоид вращения.

После деформации вдоль осей X и Y получаем уравнение

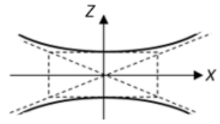
$$(14)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ – Эллиптический параболоид}$$

Следующие две поверхности – <u>гиперболы</u>. Рассмотрим на плоскости $\pi = OXZ$ уравнение двух гипербол:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (*)$$

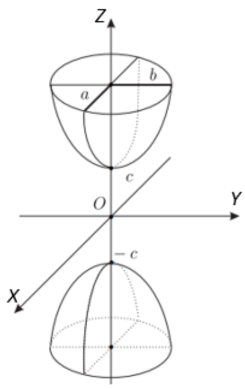


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \qquad (**)$$



Эти кривые изображены на рисунке справа. Гиперболу $(**)$ называем <u>сопряженной</u> с $(*)$.

<u>Двуполостный гиперболоид</u>



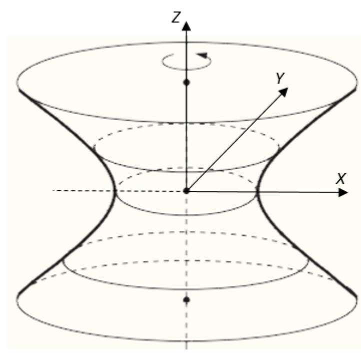
Эту поверхность получим вращением гиперболы $(**)$ вокруг оси OZ. Уравнение поверхности вращения есть:

$\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1 \ \Rightarrow\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1.$

После деформации вдоль оси OY:

$$(15)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ – Двуполостный гиперболоид}$$

<u>Однополостный гиперболоид</u>



Вращением гиперболу $(*)$ вокруг OZ и получаем уравнение поверхности вращения:

$\dfrac{x^2 + y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \ \Rightarrow\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

и после деформации оси OY:

$$(16)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ – Однополостный гиперболоид}$$

<u>Гиперболический параболоид</u>

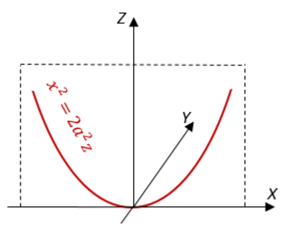
Эту поверхность определяем уравнением

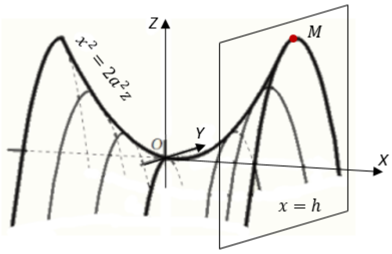
$$(17)\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ – Гиперболический параболоид}$$

Данную поверхность <u>НЕЛЬЗЯ</u> получить из поверхности вращения. Поэтому здесь используют <u>метод сечений</u>.

(1) Рассмотрим сечение поверхности плоскостью OXZ: $y = 0$. В этой плоскости получаем уравнение

$\dfrac{x^2}{a^2} = 2z \ \Rightarrow\ x^2 = 2a^2 z$ – парабола с "хвостами" вверх (см. рис. справа)





(2) Рассмотрим сечение плоскостями параллельными координатной плоскости OYZ, т.е. $x = h$. В этой плоскости уравнение линии будет

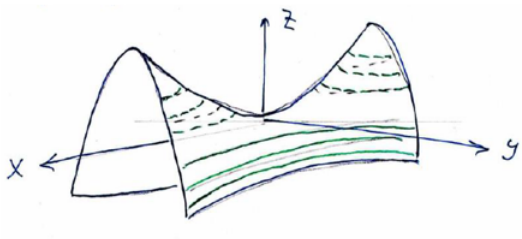
$\frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \;\Rightarrow\; y^2 = -2b^2\left(z - \frac{h^2}{2a^2b^2}\right)$ – парабола с "хвостами" вниз. Её вершина точка M лежит на параболе $x^2 = 2a^2z$.
При изменении h эта парабола будет "скользить" по параболе $x^2 = 2a^2z$ и будем получать (бесконечную) серию парабол, изображенных на последнем рисунке.

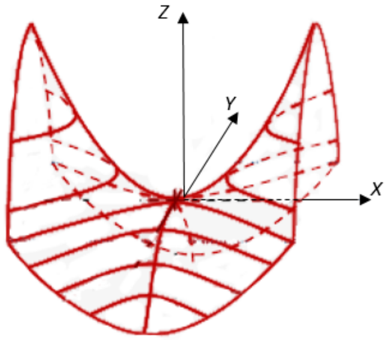
(3) Рассмотрим сечения плоскостями параллельными координатной плоскости OXY, т.е. $z = h$. Здесь будет два случая:

(а) $h > 0$ или $2z = g^2$. Уравнение линии пересечения есть: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = g^2 \mid : g^2 \;\Rightarrow$
$\frac{x^2}{(ga)^2} - \frac{y^2}{(gb)^2} = 1$

(б) $h < 0$ или $2z = -g^2$. Тогда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -g^2 \mid : g^2 \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{(ga)^2} - \frac{y^2}{(gb)^2} = -1$ (сопряженная гипербола)

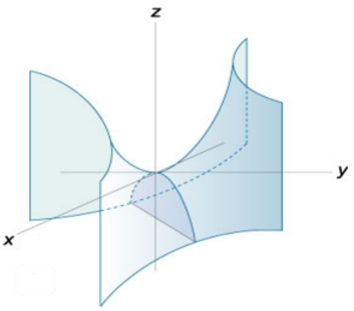
На рис. внизу слева эти линии на исследуемой поверхности изображены зеленым цветом. Для семейства $\frac{x^2}{(ga)^2} - \frac{y^2}{(gb)^2} = 1$ пунктиром, а для $\frac{x^2}{(ga)^2} - \frac{y^2}{(gb)^2} = -1$ сплошными линиями:

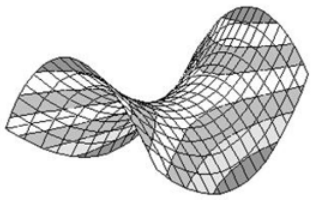


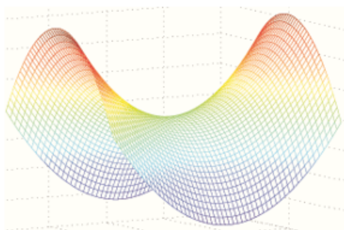


Поверхность гиперболического параболоида напоминает седло и ее также называют седловой поверхностью.

Ниже представлены пара "Высокохудожественных" изображений этой поверхности







<u>Вывод</u>. Получено 17 различных уравнений поверхностей 2-го порядка (включая мнимые поверхности). Для кривых 2-го порядка классификация на 9 видов кривых была обоснована (лекция 16). Аналогичное утверждение о классификации поверхностей на 17 видов здесь не обосновано. Строгое обоснование требует теорию квадратичных форм, которая будет излагаться в курсе АЛГЕБРА в следующем семестре.