Seria 33, Curs 5, EDDP, 02.11.2020

Teorema de existență și unicitate (TEU) a soluției problemei Cauchy pt. ecuații diferențiale de ordinul întâi

Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$(t_0, x_0) \in D$.

TEU:

Ipoteze:

1) $\exists a, b > 0$ a.î. $D_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset D$

2) funcția f este continuă în ambele variabile.

Fie $M = \sup\limits_{(t,x) \in D_{a,b}} |f(t,x)|$ (2)

3) f este funcție Lipschitz în a doua variabilă, adică: $\exists L > 0$ astfel încât:

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le L|x_1 - x_2|, \quad (3)$$

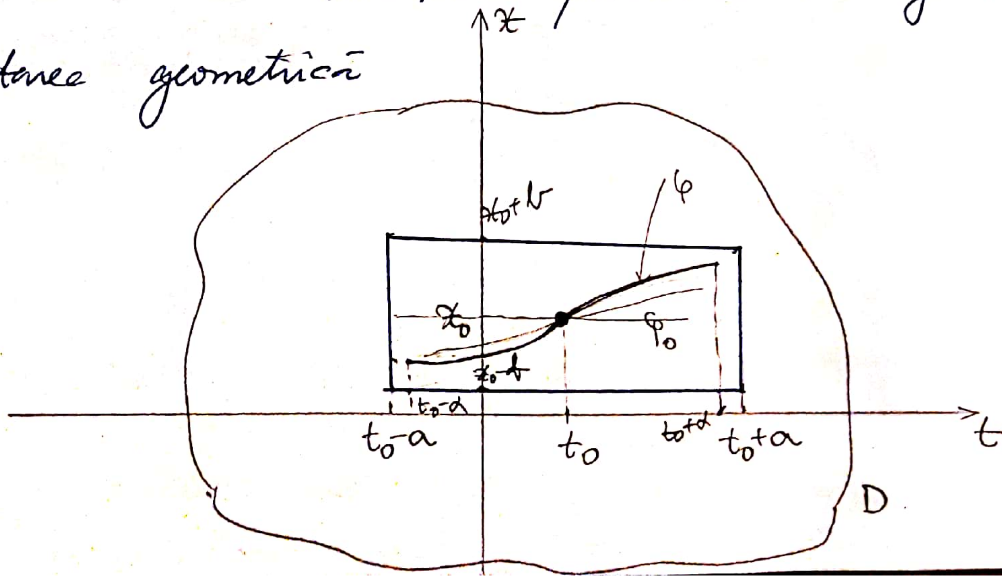
$$\forall (t,x_1), (t,x_2) \in D_{a,b}.$$

Concluzia: În ipotezele de mai sus, $\forall \alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right)$

$\exists!\ \varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - b, x_0 + b]$

soluție a problemei Cauchy (1).

Obs: 1) Interpretarea geometrică



2) Ipoteza (3) poate fi înlocuită cu:

$$\left[\begin{array}{l} f \text{ este derivabilă în raport cu } x \text{ și } \dfrac{\partial f}{\partial x} \text{ este} \\ \text{continuă pe } \Delta_{a,b} \text{ și } L = \sup\limits_{(t,x)\in\Delta_{a,b}} \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \end{array}\right. \quad (4)$$

Dacă f este derivabilă în raport cu x, atunci pt t fixat considerăm $g_t(x) = f(t,x)$

$$g_t : [x_0 - b, x_0 + b] \to \mathbb{R}.$$

avem $g_t'(x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x)$

din (2) & (3) $\Rightarrow$ g este continuă și derivabilă $\Rightarrow$ aplicăm t. Lagrange funcției g pe $[x_1, x_2] \subset [x_0 - b, x_0 + b]$, $x_1 < x_2$ $\Rightarrow \exists\, c \in (x_1, x_2)$ a.î.: $g_t(x_1) - g_t(x_2) = g_t'(c)(x_1 - x_2)$

$$\Rightarrow |f(t,x_1) - f(t,x_2)| = \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,c)\right|}_{\leq L} \cdot |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

Demonstrația TEU:

Fie $\alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right)$.

Se consideră șirul de funcții $(\varphi_n)_{n\geq 0}$, definit astfel:

$$(5) \begin{cases} \varphi_n : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R} \\ \varphi_0(t) = x_0, \ (\forall) t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ \varphi_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_{n-1}(s))\, ds, \ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

și numit șirul aproximațiilor succesive (Picard), despre care se arată că, converge la soluția prob. Cauchy (1).

Pașii de demonstrație a TEU:

P1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Im} \varphi_n \subset [x_0 - b, x_0 + b]$, adică, G_{φ_n} se află în $\Delta_{a,b}$..

P2) $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este șir Cauchy, adică:

$$(6) \quad |\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \leq \frac{M L^n |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$$

P3) $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ este convergent și $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t)$, $\varphi : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to$
$\to [x_0 - b, x_0 + b]$ este soluția prob. Cauchy (1).

P4) Unicitatea funcției φ de la punctul P3.

<u>Dem P1</u>: prin inducție după n:

$n=0$: $\varphi_0(t)=x_0 \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi_0=\{x_0\}\subset[x_0-b, x_0+b]$.

$$n=1 \overset{(5)}{\Rightarrow} \varphi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds=$$

$$=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x_0)\,ds.$$

Fie $t\geq t_0$, $t\in I_\alpha^{t_0}=[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$

Calculam $|\varphi_1(t)-x_0|=\left|\cancel{x_0}+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds-\cancel{x_0}\right|=$

$$=\left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds\right| \underset{t\geq t_0}{\leq}$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\underbrace{\varphi_0(s)}_{\in[x_0-b,\,x_0+b]})|\,ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} M\,ds = M\underbrace{(t-t_0)}_{\leq\alpha}\leq M\alpha\leq$$

$$\leq \cancel{M}\frac{b}{\cancel{M}} \Rightarrow |\varphi_1(t)-x_0|\leq b \Rightarrow$$

$\alpha\in(0,\min(a,\frac{b}{M}))$ pt $t\geq t_0$. (7)

$$\Rightarrow -b\leq\varphi_1(t)-x_0\leq b \quad |+x_0$$

$$x_0-b\leq\varphi_1(t)\leq x_0+b$$

Dacă $t\leq t_0$, $t\in I_\alpha$, atunci avem:

$$|\varphi_1(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))\,ds\right| \underset{t\leq t_0}{\leq} \left|-\int_{t}^{t_0} f(s,\varphi_0(s))\,ds\right| \leq$$

$$\leq \int_{t}^{t_0} \underbrace{|f(s,\varphi_0(s))|}_{\leq M}\,ds \leq \int_{t}^{t_0} M\,ds = M\underbrace{(t_0-t)}_{<\alpha}\leq$$

$$\leq M\alpha\leq \cancel{M}\cdot\frac{b}{\cancel{M}}=b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_1(t)-x_0|\leq b \quad (8)$$

pt $t\leq t_0$.

Din (7)&(8) $\Rightarrow |\varphi_1(t)-x_0|\leq b$, $\forall t\in I_\alpha \Rightarrow \operatorname{Im}\varphi_1\subset[x_0-b, x_0+b]$

La fel pt φ_n, n oarecare în ipoteza că prop este adevărată pentru φ_{n-1}.

Avem din relația de recurență:

$$\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n-1}(s))\,ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_n(t)-x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n-1}(s))\,ds\right| \underset{t\geq t_0}{\leq} \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,\underbrace{\varphi_{n-1}(s)}_{\in D_{a,b}})|}_{\leq M} ds \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} M\,ds = M(t-t_0) \leq M\alpha \leq \cancel{M}\frac{b}{\cancel{M}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_n(t)-x_0| \leq b \Rightarrow \varphi_n(t)\in[x_0-b,\ x_0+b]$$
$$\forall t\in I_\alpha$$

P2) Pt $n=0$:
Pt $t\geq t_0$

$$|\varphi_1(t)-\varphi_0(t)| = \left|\cancel{x_0}+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_0(s))ds-\cancel{x_0}\right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \underbrace{|f(s,\varphi_0(s))|}_{\leq M} ds \leq M(t-t_0) =$$

$$= \frac{M\cdot L^0\,|t-t_0|^{0+1}}{(0+1)!}$$

Presupunem $\underbrace{\text{adev pentru } n}_{(6)\text{ e adev.}}$ și demonstrăm pentru $n+1$

$$|\varphi_{n+2}(t)-\varphi_{n+1}(t)| \leq \frac{ML^{n+1}|t-t_0|^{n+2}}{(n+2)!}$$

Calculăm:

$$|\varphi_{n+2}(t)-\varphi_{n+1}(t)| = \left|\cancel{x_0}+\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_{n+1}(s))ds-\cancel{x_0}-\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi_n(s))ds\right| =$$

$$= \left|\int_{t_0}^{t}\left[f(s,\varphi_{n+1}(s))-f(s,\varphi_n(s))\right]ds\right| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} |f(s,\underbrace{\varphi_{n+1}(s)}_{x_1})-f(s,\underbrace{\varphi_n(s)}_{x_2})|\,ds \underset{(3)}{\leq}$$

$$\underset{(3)}{\leq} \int_{t_0}^{t} L\cdot\underbrace{|\varphi_{n+1}(s)-\varphi_n(s)|}_{\text{din pasul de inducție } \leq \frac{ML^n(s-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}} ds \leq \int_{t_0}^{t}\frac{ML^{n+1}(s-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}ds =$$

$$= ML^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{(s-t_0)^{n+2}}{n+2}\Bigg|_{t_0}^{t} = ML^{n+1}\frac{1}{(n+1)!}\frac{(t-t_0)^{n+2}}{n+2} =$$

$$= ML^{n+1}\frac{(t-t_0)^{n+2}}{(n+2)!} \Rightarrow \text{ineg. e adevarată}$$

Cum $\lim_{n\to\infty}\frac{M}{L}\frac{(L(t-t_0))^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \underset{(6)}{\Rightarrow} (\varphi_n)_{n\geq 0}$ este șir Cauchy

P3) Cum $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ șir Cauchy $\Rightarrow \exists \varphi : I_\alpha \to [x_0-b, x_0+b]$
$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)$.

Din recurență: $\varphi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_n(s))\,ds$.
Cum f este continuă în ambele variabile, la limita cu $n\to\infty$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds \longrightarrow$$ formulei de reprezentare integrală a soluției prob. Cauchy

$\Rightarrow \varphi$ este soluția problemei (1).

<u>Exemplu</u>: Fie prob. Cauchy:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (7)$$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$f(t,x) = x$
$t_0 = 0,\ x_0 = 1$

a) Să se verifice ipotezele TEU (temă!) $a, b > 0$, $D_{a,b} = [-a,a]\times[1-b, 1+b] \subset \mathbb{R}^2$
b) Să se calculeze $(\varphi_n)_{n\geq 0}$;
c) Soluția problemei Cauchy (8).

b) $\varphi_0 : I_\alpha \to [1-b, 1+b]$, $\alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b}{M}\right)\right)$
$\varphi_0(t) = x_0 = 1$

$M = \sup_{(t,x)\in D_{a,b}} |f(t,x)| = \sup_{x\in[1-b,1+b]} |x| = 1+b$.

$$\varphi_1(t) = 1 + \int_0^t f(s, \varphi_0(s))\,ds =$$
$$= 1 + \int_0^t \varphi_0(s)\,ds = 1 + \int_0^t 1\,ds = 1 + s\Big|_0^t = 1+t. \quad ; \boxed{\varphi_1(t) = 1+t}$$

<u>Temă</u>: Arătați, prin inducție, că
$$\varphi_n(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!},\ \forall t \in I_\alpha.$$

c) $\dfrac{dx}{dt} = x$ ec. liniară omogenă, $a(t) = 1$ $\Rightarrow x(t) = C\cdot e^t$
Cum $x(0) = 1 \Rightarrow C\cdot e^0 = 1 \Rightarrow C = 1$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^t$ sol. prob. Cauchy. Deci: avem verif $\left(e^t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\right)$

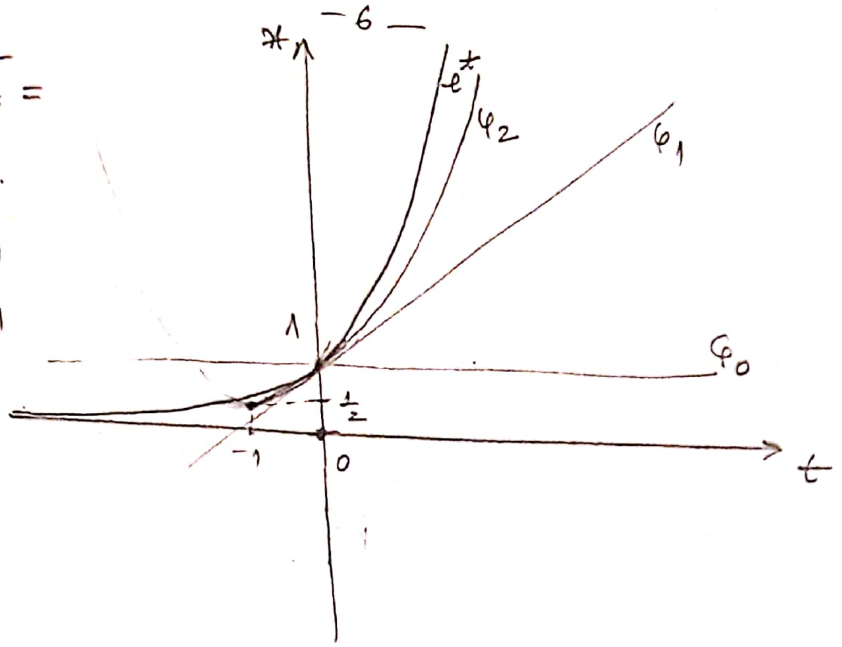
$$\varphi_2(t) = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} = \frac{t^2}{2} + t + 1.$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}} = -1$$

$$\Delta = 1^2 - 4\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



<u>Exemple (temă)</u>: 1) Se cere șirul aproximațiilor succesive pentru

a) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + t \\ x(0) = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = tx \\ x(0) = 1 \end{cases}$

2) Fie problema Cauchy: $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = t\sin x, & (t,x) \in [-1,1] \times [0, \frac{\pi}{2}] \\ x(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$.

a) Verificarea ipotezelor TEU.

b) Calculați $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ din șirul aprox. succesive.

c) Determinați soluția problemei.

<u>Metode numerice pentru aproximarea soluției problemei Cauchy (1)</u>.

Fie prob. Cauchy:

$$(8)\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x), & t \in [t_0, t_0 + T] \\ x(t_0) = x_0 & T > 0. \end{cases}$$

Presupunem că sunt îndeplinite cond. TEU și fie φ soluția prob. Cauchy (8).

<u>Problema</u>:

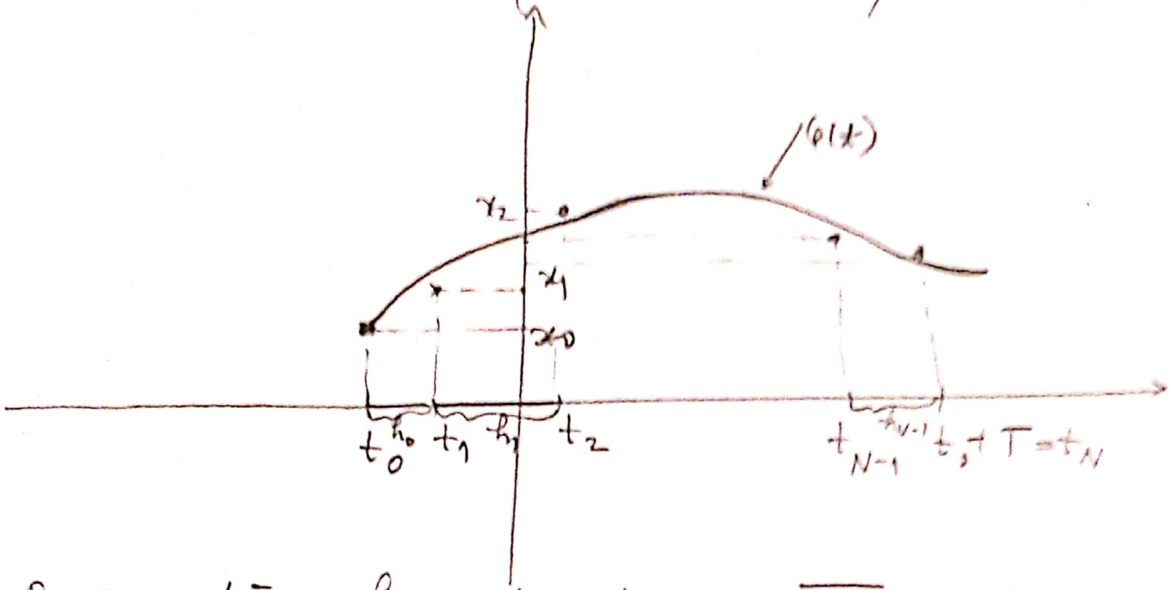
considerăm $t_0 < t_1 < t_2 \ldots < t_0 + T = t_N$ ($N+1$ puncte).

să găsim $x_0, x_1, \ldots, x_N$ a.î.

$$|\varphi(t_j) - x_j| < O(h^k), \quad j = \overline{0,N}$$

unde $h = \max\limits_{j=\overline{0,N-1}} (t_{j+1} - t_j)$

$k \in \mathbb{N}^*$ (k = ordinul de aproximare)



Dacă notăm $h_j = t_{j+1} - t_j$, $j = \overline{0, N-1}$, atunci o schemă numerică pentru aproximarea soluției problemei Cauchy (8) este de forma:

$$(9) \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h_j \cdot \underbrace{\phi(h_j, t_j, x_j)}_{?}, \quad j = \overline{0, N-1} \end{cases}$$

In metoda Euler explicită avem

$$\phi(h, t, x) = f(t, x)$$