Seria 33, Curs 2, EDDP, 12.10.2020

③ Ec. diferențială omogenă de ordinul întâi

Ec. diferențială omogenă de ordinul n $(n\in\mathbb{N}^*)$ este o ec. diferențială de forma:

$$\boxed{F\left(\frac{x}{t}, x^{(1)}, x^{(2)}\cdot t, x^{(3)}\cdot t^2, \ldots, x^{(n)} t^{n-1}\right)=0} \quad (1)$$

Pt $n=1$: $F\left(\frac{x}{t}, x'\right)=0$

sau, în forma explicită,

$$\boxed{x' = g\left(\frac{x}{t}\right)} \quad (2)$$

În general, ec. dif. de ordinul întâi:

$$x' = f(t, x)$$

este omogenă dacă

$$(3)\ \left[\ f(\alpha t, \alpha x) = f(t,x),\ \forall \alpha\in\mathbb{R} \text{ a.î. } (\alpha t, \alpha x)\in D,\right.$$

Prop. 1: Prin schimbarea de variabilă:

$$\frac{x}{t} = y \qquad (4)$$

adică, $x(t) = t\,y(t)$,

și se trece de la variabile (t, x) în ec. (2) la variabile (t, y):

$$(t, x) \longrightarrow (t, y),$$

ecuația (2) se transformă într-o ec. cu variabile separabile.

Dem: Avem $x(t) = t y(t) \Rightarrow x'(t) = \frac{dx}{dt}(t) =$

$$= (t\,y(t))' = t' y(t) + t y'(t) =$$

$$= y(t) + t y'(t) \Rightarrow \text{ec. (2)}$$

devine:

$$y + t y' = g(y)$$

y = variabilă dependentă: $y = y(t)$.

Se obține: $\boxed{y' = \frac{1}{t}\left(g(y) - y\right)}$ ⟹ ec. cu

variabile separabile: $\frac{dy}{dt} = a(t)\, b(y)$,

unde $a(t) = \frac{1}{t}$; $b(y) = g(y) - y$.

<u>Exemplu</u>: Fie ec. $\frac{dx}{dt} = \underbrace{\frac{2xt}{x^2+t^2}}_{f(t,x)}$

Arătați că e ec. omogenă și precizați ec. cu variabile separabile în care se transformă.

$$f(t,x) = \frac{2xt}{x^2+t^2}$$

$$f(\alpha t, \alpha x) = \frac{2\alpha x \cdot \alpha t}{(\alpha x)^2 + (\alpha t)^2} = \frac{2\cancel{\alpha^2} x t}{\cancel{\alpha^2}(x^2+t^2)} = f(t,x) \Rightarrow$$

⟹ ecuația este omogenă

$$\underset{\text{ec. omogenă}}{(t,x)} \xrightarrow{\frac{x}{t} = y} \underset{\text{ec. cu var. separabile.}}{(t,y)}$$

$x = ty \Rightarrow x' = y + ty'$ ⟹ ec devine:

$$y + ty' = \frac{2\, ty \cdot t}{(ty)^2 + t^2}$$

$$ty' = \frac{2\cancel{t^2} y}{\cancel{t^2}(y^2+1)} - y \Rightarrow ty' = \frac{2y}{y^2+1} - \frac{y^2+1}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{-y^3+y}{y^2+1} \cdot \frac{1}{t}}$$

(4) <u>Ec. diferențială liniară neomogenă (afină)</u>

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \underbrace{a(t)\cdot x + b(t)}_{f(t,x)}} \qquad (5)$$

f este funcție de gradul întâi în x

unde $a, b : I \longrightarrow \mathbb{R}$ funcții continue.

Cazul omogen: $b(t)=0,\ \forall t\in I \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. se reduce la: $\boxed{\dfrac{dx}{dt}=a(t)\cdot x}$ (6)

Prop. 2: Mulțimea soluțiilor ec. (6) este:

$$x(t)=C\cdot e^{A(t)},\quad C\in\mathbb{R} \quad (7)$$

unde A este o primitivă pt a.

Dem: Ec. (6) este ec cu variabile separabile: $\dfrac{dx}{dt}=a_1(t)\cdot b_1(x)$

cu $b_1(x)=x$

$a_1(t)=a(t)$

- $b_1(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$ soluția staționară: $\varphi_1(t)=0$, $\varphi_1: I\to\mathbb{R}$ (8)
- pt $b_1(x)\neq 0$, $x\neq 0 \Rightarrow$ separăm variabilele:

$$\frac{dx}{x}=a(t)\,dt$$

$$\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C \Rightarrow B(x)=\ln|x|$$

$$\int a(t)\,dt=A(t)+C$$

$\Rightarrow$ soluțiile implicite: $\ln|x|=A(t)+C \Rightarrow$

$$\Rightarrow |x|=e^{A(t)+C} \Rightarrow |x|=e^{A(t)}\cdot e^{C} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\underbrace{\pm e^{C}}_{C_1\in\mathbb{R}^*}e^{A(t)} \Rightarrow x(t)=C_1 e^{A(t)},\ C_1\in\mathbb{R}^* \quad (9)$$

Mulțimea soluțiilor ec. (6) este formată din (8) $\cup$ (9).

Obs că în (9) pt $C_1=0 \Rightarrow x(t)=0$, adică $\Rightarrow$ soluția staționară

$\Rightarrow$ (8) $\cup$ (9): $\boxed{x(t)=C_1 e^{A(t)},\ C_1\in\mathbb{R}.}$

Cazul neomogen: $\boxed{\dfrac{dx}{dt}=a(t)x+b(t)}$ (10)

Se scrie ec. omogenă atașată: $\dfrac{d\bar{x}}{dt}=a(t)\bar{x}$

și conform prop. 2 $\Rightarrow$ $\boxed{\bar{x}(t)=C\,e^{A(t)}}$ cu A primitiva a lui a.

Prop. 3: Dacă $\varphi_0 : I \to \mathbb{R}$ este o soluție particulară ec. (10), atunci mulțimea soluțiilor ec. (10) este:

$$\boxed{x(t) = \varphi_0(t) + C \cdot e^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.} \quad (11)$$

Când nu se cunoaște o soluție particulară, atunci se aplică pt integrarea ec. (10) **metoda variației constantelor** (MVC):

- integrăm ec. omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x} \Rightarrow \bar{x}(t) = C \cdot e^{A(t)}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

- aplicăm MVC:

  în locul constantei C, determinăm o funcție $C : I \to \mathbb{R}$ a.î.:

$$x(t) = C(t) \cdot e^{A(t)}$$

  să verifice ec. neomogenă (10):

$$\left(C(t)e^{A(t)}\right)' = a(t)\, C(t)e^{A(t)} + b(t)$$

$$\Rightarrow C'(t)\, e^{A(t)} + C(t) \cdot e^{A(t)} \cdot \underbrace{A'(t)}_{=a(t)} =$$

$$= a(t)\, C(t)\, e^{A(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t)\, e^{A(t)} + \cancel{C(t)e^{A(t)}a(t)} = \cancel{a(t)C(t)e^{A(t)}} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t)\, e^{A(t)} = b(t) \Rightarrow \underbrace{C'(t) = b(t)\, e^{-A(t)}}_{\text{ec. de tip primitivă}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \int b(t) \cdot e^{-A(t)} dt + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Deci: mulț. sol. ec. (10) este:

$$\boxed{x(t) = \left(\int b(t)\, e^{-A(t)} dt + K\right) e^{A(t)}} \quad (12)$$

Deoarece o primitivă a funcției $b(t) \cdot e^{-A(t)}$ este

$$\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds, \text{ cu } t_0 \in I$$

Deci: $$x(t) = \left(\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds + K \right) e^{A(t)},$$

adică $$x(t) = \underbrace{\left(\int_{t_0}^{t} b(s) e^{-A(s)} ds \right) e^{A(t)}}_{\text{sol. particulară } \varphi_0} + \underbrace{K e^{A(t)}}_{\text{sol. ec. omogene}}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Exemplu: $\dfrac{dx}{dt} = (t+1)x + t$, $\quad x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$

$a(t) = t+1$
$b(t) = t$ $\Rightarrow \int a(t)dt = \underbrace{\frac{t^2}{2} + t}_{A(t)} + c$

Mvc

- $\dfrac{d\bar{x}}{dt} = (t+1)\bar{x} \overset{\text{Obs. 2}}{\Rightarrow} \bar{x}(t) = c\, e^{\frac{t^2}{2}+t}$, $c \in \mathbb{R}$
- determinăm $C: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ aî $x(t) = C(t) e^{\frac{t^2}{2}+t}$ să fie sol. a ec. neomogene:

$$\left(C(t) e^{\frac{t^2}{2}+t} \right)' = (t+1) \cdot C(t) e^{\frac{t^2}{2}+t} + t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(t) e^{\frac{t^2}{2}+t} + \cancel{C(t) e^{\frac{t^2}{2}+t} \cdot \left(\frac{2t}{2}+1\right)} = \cancel{(t+1) C(t) e^{\frac{t^2}{2}+t}} + t$$

$$\Rightarrow C'(t) \cdot e^{\frac{t^2}{2}+t} = t \Rightarrow \underbrace{C'(t) = t e^{-\frac{t^2}{2}-t}}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = \int t e^{-\frac{t^2}{2}-t} dt = \int \underbrace{t e^{-\frac{t^2}{2}}} \cdot e^{-t} dt =$$

$$= \int \left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right)' e^{-t} dt = -e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot e^{-t} - \int \left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\right) \cdot e^{-t}(-1) dt$$

integrare prin părți

$$\Rightarrow C(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}-t} - \int e^{-\frac{t^2}{2}-t} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}-t} - \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}-s} ds + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(-e^{-\frac{t^2}{2}-t} - \int_0^t e^{-\frac{s^2}{2}-s}\,ds + k\right) e^{\frac{t^2}{2}+t}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

⑤ Ec. diferențială de forma:

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)}_{f(t,x)}} \qquad (13)$$

unde $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 \in \mathbb{R}$,

cu a_1, a_2 nu sunt zero simultan: $|a_1| + |a_2| > 0$

b_1, b_2 — " — $|b_1| + |b_2| > 0$

Obs: 1) $a_1 = a_2 = 0 \xRightarrow{(13)} \frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{b_1 x + c_1}{b_2 x + c_2}\right)}_{h(x)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = h(x)$, ec. cu variab. separabile

2) $b_1 = b_2 = 0 \xRightarrow{(13)} \frac{dx}{dt} = \underbrace{g\left(\frac{a_1 t + c_1}{a_2 t + c_2}\right)}_{k(t)} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = k(t)$ ec. de tip primitivei

Vom considera $\begin{cases} |a_1| + |a_2| > 0 \\ |b_1| + |b_2| > 0 \end{cases}$ (14)

Notaăm $d = a_1 b_2 - b_1 a_2$

Cazul $\boxed{d = 0} \Rightarrow a_1 b_2 = b_1 a_2 \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow (a_1, b_1) \sim (a_2, b_2)$

Pt. a rezolva (13) se face schimbarea de variabilă:

$\boxed{a_1 t + b_1 x = y \text{ dacă } b_1 \neq 0}$

sau $\boxed{a_2 t + b_2 x = y \text{ dacă } b_2 \neq 0}$ (15)

Obs: Dacă $b_1 \neq 0$ și $b_2 \neq 0$, atunci alegem pe oricare dintre cele 2 variante de schimbare de variabilă.

Presupunem că $\underline{b_1 \neq 0}$:

$$a_1 t + b_1 x = y \iff x = \frac{y - a_1 t}{b_1}$$

Schimbarea de variab. înseamnă:

$$(t, x) \xrightarrow[x = \frac{y - a_1 t}{b_1}]{} (t, y)$$

și ec. (13) devine:

$$\left(\frac{y - a_1 t}{b_1}\right)' = g\left(\frac{a_1 t + \cancel{b_1} \frac{(y - a_1 t)}{\cancel{b_1}} + c_1}{a_2 t + b_2 \frac{(y - a_1 t)}{b_1} + c_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b_1} \cdot (y' - a_1) = g\left(\frac{\cancel{a_1 t} + y - \cancel{a_1 t} + c_1}{\frac{t(b_1 a_2 - a_1 b_2)^{=0} + b_2 y + c_2 b_1}{b_1}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{a_1 + b_1 \cdot g\left(\frac{b_1 (y + c_1)}{b_2 y + c_2 b_1}\right)}_{h(y)} \rightarrow \underbrace{y' = h(y)}_{\text{ec. cu variabile separabile.}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{h(y)}{b(y)} \cdot \frac{1}{a(t)}$$

<u>Concluzia</u>: <u>Prop. 4</u>: În cazul $d = 0$ prin schimbarea de variabilă (15), se obține o ec. cu variabile separabile.

<u>Cazul</u> $\boxed{d \neq 0}$: Fie (t_0, x_0) soluția sistemului liniar:

$$\begin{cases} a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \\ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \end{cases} \quad (16)$$

Obs. că d este determinantul matricii sistemului în (t, x). Cum $d \neq 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ sistemul (16) are soluție unică (t_0, x_0)

În ecuația (13) se face schimbarea de variabile:

$$\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = s + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases} \quad (17)$$

Avem:

$$(t, x) \xrightarrow[\begin{cases} t = s + t_0 \\ x = y + x_0 \end{cases}]{} (s, y)$$

$$y = y(s)$$

$$x(t) = y(s(t)) + x_0 .$$

$$x'(t) = \big(y(s(t)) + x_0\big)' = \big(y(s(t))\big)' + x_0' \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow x'(t) = y'(s(t)) \cdot s'(t) \\ \text{unde } s(t) = t - t_0 \Rightarrow s'(t) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{x'(t) = y'(s(t))}.$$

Ec. (13) devine:

$$y'(s) = g\left(\frac{a_1(s+t_0) + b_1(y+x_0) + c_1}{a_2(s+t_0) + b_2(y+x_0) + c_2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} y'(s) = g\left(\dfrac{a_1 s + a_1 t_0 + b_1 y + b_1 x_0 + c_1}{a_2 s + a_2 t_0 + b_2 y + b_2 x_0 + c_2}\right) \\ \text{Dar } \begin{array}{l} a_1 t_0 + b_1 x_0 + c_1 = 0 \\ a_2 t_0 + b_2 x_0 + c_2 = 0 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(s) = g\left(\frac{a_1 s + b_1 y}{a_2 s + b_2 y}\right)$$

$$y'(s) = g\left(\frac{\cancel{s}\left(a_1 + b_1 \frac{y}{s}\right)}{\cancel{s}\left(a_2 + b_2 \frac{y}{s}\right)}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y'(s) = \underbrace{g\left(\frac{a_1 + b_1 \frac{y}{s}}{a_2 + b_2 \frac{y}{s}}\right)}_{h\left(\frac{y}{s}\right)} \Rightarrow \underbrace{y' = h\left(\frac{y}{s}\right)}_{\text{ec. omogenă}}$$

<u>Concluzia</u>: <u>Prop. 5</u>: În cazul $d \neq 0$ prin schimbarea de variabile (17), ec. (13) devine o ec. omogenă.