29.10.2020

CURS 4 - CN

RANGUL UNEI MATRICI

• DEF: $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, spunem că matricea A are rangul r și notăm rang A = r, dacă A are un minor de ordin r nenul, iar toți minorii de ordin > r sunt nuli.

• Pentru calculul rangului vom folosi metode de eliminare Gauss. Fie aceasta GPP.

Obs: Se aduce matricea inițială la forma echelon.

ex:
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 & a_7 & a_8 \\ 0 & 0 & 0 & a_9 & a_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
→ P. SUPERIOARĂ

↳ PARTE INFERIOARĂ

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & a_6 & a_7 \\ 0 & 0 & a_9 \end{vmatrix} \neq 0$$, iar toți minorii de ordinul 4 sunt 0

NATURA SISTEMULUI $Ax = B$ (doar sisteme pătratice)

• Dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} = n \Rightarrow$ sistem compatibil determinat

• Dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} < n \Rightarrow$ sist. comp nedet.

• Dacă $\operatorname{rang} A \neq \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist incompatibil

EX: $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ Să se calculeze rangul folosind algoritmul de calcul al rangului folosind GPP.

• $h = 1, k = 1$, rang = 0

$|a_{pk}| = \max\limits_{1 \le j \le 4} |a_{jk}| = |a_{11}| \neq 0 \Rightarrow p = 1, p = k$

$L_2 = L_2 - \frac{1}{4} L_1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 0 \end{pmatrix} \ominus = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \end{pmatrix}$

$$L_4 = L_4 - \frac{3}{4} L_1 \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 8 & 0 \\ 3 & -\frac{3}{4} & \frac{15}{4} & 0 \end{pmatrix} - \\ \hline 0 \quad -\frac{1}{4} \quad \frac{17}{4} \quad 0 \end{array}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{17}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- $h=2, k=2$, rang $=1$

  $|a_{p2}| = \max\limits_{2 \le j \le 4} |a_{jk}| = a_{22} = \frac{1}{4}$ $\quad \dots \quad$ $A \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- $h=3, k=3$, rang $=2$

  $|a_{p3}| = \max\limits_{3 \le j \le 4} |a_{j3}| = 0 \Rightarrow k = 4$

- $h=3, k=4$, rang $=2$

  $|a_{p4}| = \max\limits_{3 \le j \le 4} |a_{j4}| = |a_{34}| = 1 \ne 0$

- $h=4, k=5$, rang $=3$ (bucla while se termină)

Obs: Din punct de vedere matematic rangul = nr liniilor nenule

METODE DE FACTORIZARE

$$\begin{cases} A x^{(1)} = e^{(1)} \rightarrow \text{prima coloană din } I_n \\ \quad \uparrow \text{ prima coloană din inversă} \\ A x^{(2)} = e^{(2)} \\ \quad \vdots \\ A x^{(n)} = e^{(n)} \end{cases} \qquad \bar{A} = [A, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{(n)}]$$

Obs: Pentru astfel de sisteme se pot aplica metode de eliminare Gauss în mod simultan.

$Ax^{(1)} = b^{(1)}$
$Ax^{(2)} = b^{(2)}$ ($b^{(2)}$ depinde de soluția sistemului anterior) | se rez. pe rând
$Ax^{(3)} = b^{(3)}$ ($b^{(3)}$ dep. de $x^{(2)}$)
$\vdots$
$Ax^{(n)} = b^{(n)}$ ($b^{(n)}$ dep de $x^{(n-1)}$)

Astfel de sisteme se pot rezolva pe rând folosind metode de elim. Gauss.

Dezavantajul este că se mărește considerabil numărul de iterații.
Soluția ar fi să folosim metode de factorizare.

• Metoda de factorizare LU.

$A = LU$: L = matrice inferior triunghiulară
U = — " — superior — " —

$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{LUx}_{y} = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \Rightarrow y \\ Ux = y \end{cases} \Rightarrow x$

$Ly = b \to$ inferior triunghiular $\Rightarrow$ vom aplica metoda substituția ascendentă

$Ux = y \to$ sup triunghiular $\Rightarrow$ met subst descendente

PROPOZIȚIE: Descompunerea LU a matricii A este unică dacă alegem elementele de pe diag principală $l_{kk} = 1$; $k = \overline{1,n}$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ & O & \ddots \; u_{33} & u_{3n} \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Matricile L, U se obțin în baza metodei Gauss după cum urmează:

$$L=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & \dots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ m_{n1} & m_{n2} & m_{n3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$, $k=\overline{1,n-1}$, $i=\overline{k+1,n}$

↳ la iterația k.

ITERAȚIA

$$U=\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ & & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

- matricea A adusă la forma superior triunghiulară

$a_{ij}^{(k)}$ → elementul ij al matricii A la iterația k.

Aplicând metoda de eliminare Gauss pt determinarea mat. L și U, liniile vor fi permutate. Se va obține descompunerea L, U a.î.

$LU = A' \Rightarrow Ax = b \Leftrightarrow A'x = b' \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b' = \begin{cases} Ly = b' \\ Ux = y \end{cases}$

(A' are linii permutate)

exemplu: $\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$

Să se rezolve sistemul folosind metoda LU cu GFP.

$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $w=(1,2,3)$ → conține informațiile despre permutările efectuate

$k=1$: $|a_{p1}| \neq 0 \Rightarrow p=2 \neq k \Rightarrow L_2 \to L_1$

$w_2 \leftrightarrow w_1 \Rightarrow w=(2,1,3)$

$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$m_{21} = \frac{a_{21}}{a_{11}} = 0$

$m_{31} = 3$

$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \Rightarrow \begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 2 & -2 \end{array} \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

• $k=2$: $|a_{p2}| \neq 0 \Rightarrow a_{22} \neq 0 \Rightarrow p=2$

$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{1} L_2 \Rightarrow \begin{array}{ccc} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & -6 \end{array} \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$

$m_{32} = 2$

$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \quad w = (2, 1, 3)$

verificare: $LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = A'$ (are 2 linii permutate)

$b' = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad b'_{w_k} = b_k \Rightarrow \begin{cases} b'_{w_1} = b_1 \\ b'_{w_2} = b_2 \\ b'_{w_3} = b_3 \end{cases}$

↓

ne folosim de w

$Ax = b \Leftrightarrow A'x = b' \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{y} = b' \begin{cases} Ly = b' \\ Ux = y \end{cases}$

$\begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 8 \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 = 10 \end{cases} \Rightarrow 12 + 16 + y_3 = 10 \Rightarrow y_3 = -18$

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \Rightarrow x_1 + 3 = 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 1} \\ x_2 + 2x_3 = 8 \Rightarrow x_2 = 8 - 6 = 2 \Rightarrow \boxed{x_2 = 2} \\ -6x_3 = -18 \Rightarrow \boxed{x_3 = 3} \end{cases}$