Seria 33, EDDP, Curs 10, 14.12.2020

Examen: 03.02.2021, ora 10^{00}

Ecuații afine (liniare neomogene) de ordin n.

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) x^{(k)} + g(t) \qquad (1)$$

unde $\underset{k=\overline{0,n-1}}{a_k}, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Prop. 1: Dacă φ_0 este o soluție particulară pt ec. (1) atunci mulțimea soluțiilor ec. (1) este

$$\{ \varphi + \varphi_0 \mid \text{unde } \varphi \text{ este soluție a ecuației liniare omogenă atașată ec. (1):}$$

$$\bar{x}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} a_k(t) \bar{x}^{(k)}. \quad (2) \ \}.$$

Dem.:

$$\underset{(1)}{(t, x)} \xrightarrow{x = \bar{x} + \varphi_0} \underset{(2)}{(t, \bar{x})}$$

Aplicând schimbarea $x = \bar{x} + \varphi_0$ în (1) și folosind liniaritatea derivatei de orice ordin, rezultă:

$$(\bar{x} + \varphi_0)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) (\bar{x} + \varphi_0)^{(k)} + g(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{x}^{(n)} + \underline{\varphi_0^{(n)}} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \bar{x}^{(k)} + \underline{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \varphi_0^{(k)} + g(t)}$$

dar φ_0 soluție a ec. (1) $\Rightarrow \varphi_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t) \varphi_0^{(k)} + g(t)$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pt $\bar{x}$ ec. (2).

Metoda generală de rezolvare a ec. (1) se bazează pe metoda variației constantelor.

Algoritmul de rezolvare pentru (1) (când nu știm o soluție particulară):

- determinăm $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ un sistem fundamental de pentru ec. (2) $\Rightarrow \overline{x}(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$

$c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

- metoda variației constantelor: determinăm $c_1, \dots, c_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$$x(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \dots + c_n(t)\varphi_n(t) \quad (3)$$

să fie soluție pt. ec. (1).

<u>Prop. 2</u>: Derivatele $c_1', \dots, c_n'$ ale funcțiilor $c_1, \dots, c_n$ din (3) se determină rezolvând sistemul algebric liniar următor:

$$\begin{cases} c_1'\varphi_1(t) + \dots + c_n'\varphi_n(t) = 0 \\ c_1'\varphi_1'(t) + \dots + c_n'\varphi_n'(t) = 0. \\ \vdots \\ c_1'\varphi_1^{(n-2)}(t) + \dots + c_n'\varphi_n^{(n-2)}(t) = 0. \\ c_1'\varphi_1^{(n-1)}(t) + \dots + c_n'\varphi_n^{(n-1)}(t) = g(t). \end{cases} \quad (4)$$

<u>Dem</u>: Știm că sistemul liniar neomogen asociat ec. (1) este:

$$y' = A(t)y + b(t) \quad (5)$$

unde
$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & a_3(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}; \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}$$

Din modul în care se asociază sistemul rezultă că dacă $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sistem fundamental de soluții pentru (2) atunci $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ este sistem fundamental de soluții pt sistemul $\overline{y}' = A(t)\overline{y}$ (6) liniar omogen asociat lui (5),

unde $\psi_j = \begin{pmatrix} \varphi_j \\ \varphi_j^{(1)} \\ \vdots \\ \varphi_j^{(n-2)} \\ \varphi_j^{(n-1)} \end{pmatrix}$ $j = \overline{1,n}$; Notăm $\phi(t)$ = matricea fundam. de soluții corespunzătoare $\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \Rightarrow$

$\phi(t)$ = coloane$(\psi_1, \dots, \psi_n)$.

Metoda variației constantelor pentru (5):

determinăm $C: I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, $C=\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ ai

$y(t)=\phi(t)C(t)$ soluție a sist. (5) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\phi(t)C(t)\right)' = A(t)\phi(t)C(t)+b(t)$$

$$\underbrace{\cancel{\phi'(t)C(t)}}_{\cancel{A(t)\phi(t)}} + \phi(t)C'(t) = \cancel{A(t)\phi(t)C(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(t)C'(t)=b(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1^{(1)} & \ddots & \varphi_n^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)} & \dots & \varphi_n^{(n-2)} \\ \varphi_1^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_{n-1}' \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sist. } \underline{(4)}.$$

Exemplu: Fie ecuația: $x^{(2)}-x^{(1)}-2x=3te^{t}$ afină de ordin 2.

a) Se cere forma generală a soluției.

b) Determinați o soluție φ_0 astfel încât orice sol. φ a ec. date să se scrie
$$\varphi=\varphi_0+\overline{\varphi},$$
unde $\overline{\varphi}$ să fie soluția generală a ec. liniare omogenă atașată.

a) $\overline{x}^{2}-\overline{x}^{(1)}-2\overline{x}=0.$ $\qquad n=2$, $g(t)=3te^{t}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

ec. caract:

$r^2-r-2=0$ (r^0: $\overline{x}=\overline{x}^{(0)}$)

$\Delta=1+8=9$

$$r_{1,2}=\frac{+1\pm3}{2} \begin{cases} r_1=2,\ m_1=1 \Rightarrow \varphi_1(t)=e^{2t} \\ r_2=-1,\ m_2=1 \Rightarrow \varphi_2(t)=e^{-t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{x}(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}.$$

Aplicăm met. variației const.: determinăm $C_1,C_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ai $x(t)=C_1(t)e^{2t}+C_2(t)e^{-t}$ sol. a ec. afine date.

Din prop. 2 $\Rightarrow$ C_1', C_2' sunt soluțiile sist. algebric:

$$\begin{cases} c_1' \cdot e^{2t} + c_2' \cdot e^{-t} = 0 \\ c_1'(e^{2t})' + c_2'(e^{-t})' = 3te^{t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1'e^{2t} + c_2'e^{-t} = 0 \\ 2c_1'e^{2t} - c_2'e^{-t} = 3te^{t} \end{cases}$$

$$3c_1'e^{2t} \quad / \quad = 3te^{t} \; (+) \Rightarrow c_1' = \frac{\cancel{3}te^{t}}{\cancel{3}e^{2t}} \Rightarrow \boxed{c_1' = te^{-t}}$$

$$c_1'e^{2t} + c_2'e^{-t} = 0 \Rightarrow te^{-t}e^{2t} + c_2'e^{-t} = 0$$

$$\boxed{c_2' = -te^{2t}}$$

OBS (la prop. 2) Din sistemul (4) pentru $c_1, \dots, c_n$ se obțin ecuații diferențiale de tip primitivă.

$$\boxed{c_1(t)} = \int te^{-t}dt = \int t(-e^{-t})'dt = -te^{-t} + \int e^{-t}dt = \boxed{(-t-1)e^{-t} + k_1}$$

$$c_2(t) = -\int te^{2t}dt = -\int t\left(\frac{e^{2t}}{2}\right)'dt = -\frac{te^{2t}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{2t}dt =$$

$$= \frac{-te^{2t}}{2} + \frac{e^{2t}}{4} + k_2$$

$$\boxed{c_2(t) = \frac{e^{2t}}{4}(-2t+1) + k_2}$$

Deci: $x(t) = \left((-t-1)e^{-t} + k_1\right)e^{2t} + \left(\frac{e^{2t}}{4}(-2t+1) + k_2\right)e^{-t}$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

b) $x(t) = \underbrace{k_1e^{2t} + k_2e^{-t}}_{\bar{x}(t)} + \underbrace{(-t-1)e^{t} + (-2t+1)\frac{e^{t}}{4}}_{\varphi_0(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi_0(t) = \frac{e^{t}}{4}(-4t-4-2t+1) = \boxed{\frac{-3e^{t}(2t+1)}{4}}$$

Ecuații Euler liniare de ordin n

$$(6) \quad t^n \cdot x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k x^{(k)} + g(t), \quad t \neq 0.$$

$\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Din ecuația (6) se poate obține o ec. afină (liniară neomogenă) cu coeficienți constanți în variabile (s, y) prin schimbarea de variabilă: $\boxed{|t| = e^s} \iff s = \ln|t|$

$$\underset{\substack{(6)\\ \text{Euler afină}}}{(t, x)} \longrightarrow \underset{\substack{\text{afină cu}\\ \text{coef constanți.}}}{(s, y)}$$

$$x(t) = y(s(t))$$

Mai general, decât ec. (6), ecuația Euler poate fi considerată sub forma:

$$(7)\quad (\alpha t+\beta)^n x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (\alpha t+\beta)^k x^{(k)} + g(t),$$

$$\alpha \neq 0 \quad \alpha t+\beta \neq 0, \ \alpha \neq -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Din (7) se obține ec. cu coef. $\overset{\text{afină}}{\text{constanți}}$ prin schimbarea de variabilă $\boxed{|\alpha t+\beta| = e^s}$ (8).

Exemple:

1) $(2t+3)^3 x^{(3)} + 4(2t+3)^2 x'' + 4(2t+3)x' - 8x = 8(2t+3)^3$; $t \neq -\frac{3}{2}$, $t > -\frac{3}{2}$

2) $t^3 x^{(3)} + t x' - x = t^2$, $t > 0$

3) $(t-2)^2 x^{(2)} - 3(t-2) x^{(1)} + 4x = t$; $t > 2$

Ecuații cu derivate parțiale

$x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$

$x = (x_1, \dots, x_n)$ = variabila independentă

$u : D \to \mathbb{R}$

u = variabila dependentă, a cărei determinare se cere, astfel încât să verifice ecuația cu derivate parțiale de ordin $k \geq 1$ ($k \in \mathbb{N}$) de forma:

$$F\left(x, u, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{\substack{|\alpha| \leq k \\ |\alpha| > 0}}\right) = 0 \quad (9).$$

unde $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$
"multiindice"

$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ = lungimea multiindicelui α

OBS: 1) $|\alpha| = 0 \iff \alpha = (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n$.

2) Prin convenție: $u = \left(\dfrac{\partial^{|0_{\mathbb{N}^n}|} u}{\partial x_1^0 \dots \partial x_n^0}\right)$ unde $0_{\mathbb{N}^n} = (0, \dots, 0)$.

Exemple: $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

1) $k = 1$:

$$F\left(x, u, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{0 < |\alpha| \leq 1}\right) = 0.$$

$|\alpha| = 1 \iff \alpha = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1}, 0, \dots, 0)$ $\begin{matrix} |\alpha| = 1 \\ , i = \overline{1,n} \end{matrix}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial^{|(0, \dots, 0, \overset{\downarrow i}{1}, 0 \dots 0)|} u}{\partial x_1^0 \dots \partial x_{i-1}^0 \, \partial x_i^1 \, \partial x_{i+1}^0 \dots \partial x_n^0} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \overset{not}{=} \partial_i u, \quad i = \overline{1,n}$$

Ec cu derivate parțiale de ordin 1 este:

$$\boxed{F(x, u, \partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u) = 0} \quad (10)$$

$$F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

2) $k = 2$: $$F\left(x, u, \left(\frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}\right)_{0 < |\alpha| \leq 2}\right) = 0.$$

$0<|\alpha|\leq 2 \Rightarrow |\alpha|\in\{1,2\}$

- $|\alpha|=1 \Rightarrow \alpha=(0,\dots,0,\underset{\uparrow i}{1},0,\dots,0)$, $i=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x_i}=\partial_i u$

- $|\alpha|=2 \Rightarrow$
  - $\alpha=(0,\dots,0,\underset{\uparrow i}{2},0,\dots,0)$, $i=\overline{1,n}$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\partial_i^2 u$, $i=\overline{1,n}$
  - $\alpha=(0,\dots,0,\underset{\uparrow i}{1},0,\dots,0,\underset{\uparrow j\neq i}{1},0,\dots,0)$ $1\leq i<j\leq n$ $\Rightarrow$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\partial_i\partial_j u$

$1\leq i<j\leq n$

$(n-1)+(n-2)+\dots+1=$

$=\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}=m$

de multiindici de lungime 2.

Ecuația cu derivate parțiale de ordin 2 se scrie:

$$\boxed{F(x,u,\partial_1 u,\dots,\partial_n u,\partial_1^2 u,\dots,\partial_n^2 u,(\partial_i\partial_j u)_{1\leq i<j\leq n})=0} \quad (11)$$

unde $F: D\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{\frac{n(n-1)}{2}}\longrightarrow\mathbb{R}$.

<u>Ecuații liniare, cu derivate parțiale de ordinul întâi</u>

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u = g(x,u) \quad (12)$$

unde $a_j: \Delta\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $j=\overline{1,n}$

$g: \Delta\times J\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

<u>Cazul omogen</u>: $g(x,u)\equiv 0 \Rightarrow$ $\boxed{\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_j u=0}$ (13)

Ec. (13) i se asociază <u>sistemul caracteristic</u>:
(sist de ec. diferențiale)

$$(14)\quad \boxed{\begin{cases}\frac{dx_1}{dt}=a_1(x)\\ \vdots\\ \frac{dx_n}{dt}=a_n(x)\end{cases}} \quad \text{sau} \quad \boxed{\frac{dx_1}{a_1(x)}=\dots=\frac{dx_n}{a_n(x)}} \quad (15)$$

Propoziția 3: 1) Dacă u este o soluție a ec. (13) atunci u este integrală primă pt. (14).

2) Dacă u este o integrală primă pt (14) atunci u este soluție pt (13).

Dem:

1) Fie $u: \Delta \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sol. a ec. (13) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \cdot \partial_j u(x) = 0 \quad \forall x \in \Delta.$$

Din criteriu pt integrale prime pt. sisteme de ec. diferențiale $\Rightarrow$ u este integrală primă pt (14) dacă verifică:

$$\frac{du}{dt} = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j}{dt} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\underset{\text{din sist (14)}}{\Leftrightarrow} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \cdot a_j(x) = 0 \Leftrightarrow u \text{ este integrală primă pt (14)}$$

2) La fel.

OBS: Cond din criteriul pt integrale prime pentru (14) este exact ecuația (13).

Propoziția 4: Dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1} : D \to \mathbb{R}$ sunt $n-1$ integrale prime independente pentru (14), atunci soluția generală a ec. (13) se scrie sub forma:

$$u(x) = f(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) \quad (16)$$

unde f este o funcție $: G \subset \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ care admite admite derivate parțiale de ordinul întâi.

Aplicație: fie ecuația $x_2 \partial_1 u + x_1 \partial_2 u = 0$, în $\mathbb{R}^2$; $n=2$; $k=1$; $a_1(x) = x_2$; $a_2(x) = x_1$

Se cere forma generală a soluției. $x = (x_1, x_2)$.

Sist. caract: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dx_1}{x_2} = \frac{dx_2}{x_1} \Rightarrow x_1 dx_1 = x_2 dx_2$

$\Rightarrow \int x_1 dx_1 = \int x_2 dx_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{2} = \frac{x_2^2}{2} + C \Rightarrow \underbrace{x_1^2 - x_2^2}_{} = \underbrace{2C}_{\text{const}} \Rightarrow$$

$\to \varphi_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ este integrală primă pt sist. caract $\xrightarrow{\text{prop. 3}}$

$\Rightarrow u(x_1, x_2) = \underbrace{x_1^2 - x_2^2}_{}$ sol. a ecuației

$\xrightarrow{\text{prop 4}}$ sol. generală: $u(x_1, x_2) = f(x_1^2 - x_2^2)$

$f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

f derivabilă.

<u>Verificare</u>:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f'(x_1^2 - x_2^2) \cdot 2x_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = f'(x_1^2 - x_2^2) \cdot (-2x_2)$$

În ec: $x_2 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_2 \cdot f'(x_1^2 - x_2^2) \cdot 2x_1 +$

$+ x_1 \cdot f'(x_1^2 - x_2^2) \cdot (-2x_2) =$

$= f'(x_1^2 - x_2^2)(\cancel{2x_1x_2} - \cancel{2x_1x_2}) = 0.$

<u>Temă</u>: Forma generală a soluției pt ec:

$\partial_1 u + x_1 \partial_2 u + x_1 x_2 \partial_3 u = 0.$ $(n=3, k=1)$.