Grupa 331, Seminar 12, 07.01.2021, EDDP

• Forma generală a soluției unei ecuații cvasiliniare, adică

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\,\partial_k u = g(x,u)} \quad (1)$$

ec. cvasiliniară cu derivate parțiale de ordinul întâi,
unde $a_k, g : D_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k=\overline{1,n}$,
este

$$\boxed{f(\varphi_1(x,u), \dots, \varphi_n(x,u)) = 0} \quad (2)$$

unde $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ sunt n integrale prime independente ale sistemului caracteristic:

$$\boxed{\frac{dx_1}{a_1(x,u)} = \frac{dx_2}{a_2(x,u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x,u)} = \frac{du}{g(x,u)}} \quad (3)$$

și $f : D_2 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ arbitrară care admite derivate parțiale de ordinul întâi.

(1) Se are forma generală a soluției pentru ecuațiile următoare:

✓ a) $x_1^2 \partial_1 u + x_2^2 \partial_2 u = 2(x_1 + x_2)$

b) $x_2 \partial_1 u + x_1 \partial_2 u = 2u$

✓ c) $x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u = (x_1 + x_2) u$

d) $x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u = x_1 x_2 (u^2 + 1)$

a) $x_1^2 \partial_1 u + x_2^2 \partial_2 u = 2(x_1 + x_2)$

$n = 2$

$a_1(x,u) = x_1^2$; $a_2(x,u) = x_2^2$; $g(x,u) = 2(x_1 + x_2)$

Scriem sistemul caracteristic:

$$\underbrace{\frac{dx_1}{x_1^2} = \frac{dx_2}{x_2^2}} = \frac{du}{2(x_1 + x_2)}$$

Integralele prime se determină din 2 rapoarte din sistemul caracteristic sau din rapoarte care se obțin din sistemul caracteristic prin operații permise, rapoarte care să conțină doar 2 variabile x_1, x_2, u sau combinații ale acestora.

din sist caract $\Rightarrow \dfrac{dx_1}{x_1^2} = \dfrac{dx_2}{x_2^2}$ se separă variab. $\Big| \Rightarrow x_1^{-2}dx_1 = x_2^{-2}dx_2$

$$\Rightarrow \int x_1^{-2}dx_1 = \int x_2^{-2}dx_2 \Rightarrow \frac{x_1^{-1}}{-1} = \frac{x_2^{-1}}{-1} + C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}\, = C_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi_1(x,u) = \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}}$$

din sist caract: $\underbrace{\dfrac{x_2 dx_1}{x_1^2 x_2} = \dfrac{x_1 dx_2}{x_2^2 x_1}} = \dfrac{du}{2(x_1+x_2)} =$

$$= \frac{x_2 dx_1 + x_1 dx_2}{x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1} = \frac{d(x_1 x_2)}{(x_1 x_2)(x_1+x_2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{du}{2\cancel{(x_1+x_2)}} = \frac{d(x_1 x_2)}{(x_1x_2)\cancel{(x_1+x_2)}} \Rightarrow \underbrace{\frac{du}{2} = \frac{d(x_1x_2)}{x_1x_2}}_{\text{în variab } u \text{ și } x_1x_2}$$

notăm $y = x_1 x_2 \Rightarrow \dfrac{du}{2} = \dfrac{dy}{y} \Rightarrow \dfrac{du}{1} = 2\dfrac{dy}{y}$

$$\Rightarrow \int 1\, du = 2\int \frac{1}{y} dy \Rightarrow u = 2\ln|y| + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u - \ln y^2 = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{u - \ln(x_1x_2)^2} = C_2$$

$$\Leftrightarrow \underline{\varphi_2(x,u) = u - \ln(x_1x_2)^2}$$

Deci: soluția generală în formă implicită a ec date este $\boxed{\mathcal{F}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1},\ u - \ln(x_1x_2)^2\right) = 0}$

Dacă vrem să dăm exemple de soluții ale ec. date atunci luăm exemple pt f:

de exemplu, pt $f(z_1, z_2) = z_1 + z_2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(u - \ln(x_1 x_2)^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{u(x_1, x_2) = \ln(x_1 x_2)^2 - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}}$$

(c) $x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u = (x_1 + x_2) u$.

$n = 2$

$a_1(x, u) = x_1$

$a_2(x, u) = x_2$

$g(x, u) = (x_1 + x_2) u$

sist. caract: $\underbrace{\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}} = \frac{du}{(x_1 + x_2) u}$

din: $\left.\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2}\right\}$ variabile separate $\Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \int \frac{dx_2}{x_2} \Rightarrow \ln|x_1| = \ln|x_2| + C_1$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{x_1}{x_2}\right| = C_1 \Rightarrow \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = e^{C_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = \underbrace{\pm e^{C_1}}_{\text{const}} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(x, u) = \frac{x_1}{x_2}}$$

din sist caract: $\Rightarrow \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \underbrace{\frac{du}{(x_1 + x_2) u} = \frac{dx_1 + dx_2}{x_1 + x_2}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{du}{\cancel{(x_1 + x_2)} u} = \frac{d(x_1 + x_2)}{\cancel{(x_1 + x_2)}} \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{d(x_1 + x_2)}{1}$$

notăm $x_1 + x_2 = y \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{dy}{1} \Rightarrow$

în variabile y și u

$$\Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{dy}{1} \Rightarrow \ln|u| = y + C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| - (x_1 + x_2) = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln|u| - \ln e^{(x_1 + x_2)} = C_2 \Rightarrow \ln \frac{|u|}{e^{x_1 + x_2}} = C_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|u|}{e^{x_1 + x_2}} = e^{C_2} \Rightarrow \frac{u}{e^{x_1 + x_2}} = \pm e^{C_2} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(x, u) = \frac{u}{e^{x_1 + x_2}}}$$

Forma generală a sol. ec. date este:

$$\boxed{f\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{u}{e^{x_1+x_2}}\right)=0}$$

Temă: b, d.

Problema Cauchy pt ec. cvasi liniare cu derivate parțiale de ordinul întâi:

$$(0)\begin{cases}\sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\partial_k u = g(x,u)\\ u(x)=u_0(x) \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^n \mid h(x)=0\}\end{cases}.$$

② Să se determine soluțiile următoarelor probleme Cauchy:

a) $\begin{cases}x_2\partial_1 u + (2x_1-x_2)\partial_2 u = 4x_1(x_1+x_2)\\ u(x_1,x_2)=-\frac{1}{2}x_1x_2 \quad \text{pe } S: \begin{cases}h(x_1,x_2)=x_1+2x_2=0\\ x_1>0\end{cases}\end{cases}$

b) $\begin{cases}x_2\partial_1 u + x_1\partial_2 u = 2u\\ u(x_1,x_2)=\frac{x_1^2}{2} \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_2=0\}\end{cases}$

V c) $\begin{cases}(x_1+3x_2)\partial_1 u + (x_1-x_2)\partial_2 u = u+x_1+x_2\\ u(x_1,x_2)=3x_1 \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid 2x_1-x_2=0\}\end{cases}$

d) $\begin{cases}2x_2\partial_1 u + (x_1+x_2)\partial_2 u = x_1^2\\ u(x_1,x_2)=\frac{7x_1x_2}{4} \quad \text{pe } S=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \mid x_1=4x_2\}\end{cases}$

c) $\begin{cases}(x_1+3x_2)\partial_1 u + (x_1-x_2)\partial_2 u = u+x_1+x_2\\ u(x_1,x_2)=3x_1, \quad \text{pe } S=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid 2x_1-x_2=0\}\end{cases}$

$n=2$

$a_1(x,u)=x_1+3x_2$; $a_2(x,u)=x_1-x_2$

$g(x,u)=u+x_1+x_2$

$u_0(x_1,x_2)=3x_1$

$h(x)=2x_1-x_2 \Rightarrow x_2=2x_1$

• scriem o parametrizare pt S: $s=(s_1)$

$S: \begin{cases}x_1=\alpha_1(s)=s\\ x_2=\alpha_2(s)=2s\end{cases}$ (din forma funcției h care descrie S).

- $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) = 3\cdot\alpha_1(s) = 3s \Rightarrow$ cond inițială pe S.
- verif. condițiile:

1) $\text{rang}\begin{pmatrix}\alpha_1'(s)\\ \alpha_2'(s)\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}s'\\ (2s)'\end{pmatrix} = \text{rang}\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix} = 1$

2) $$\begin{vmatrix} a_1(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s)) & \alpha_1'(s) \\ a_2(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \varphi(s)) & \alpha_2'(s)\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha_1(s)+3\alpha_2(s) & 1 \\ \alpha_1(s)-\alpha_2(\alpha) & 2\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s+6s & 1 \\ s-2s & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7s & 1 \\ -s & 2\end{vmatrix} = 14s + s = 15s \neq 0$$

$\boxed{s \neq 0}$

- scriem sistemul caracteristic:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1 + 3x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2 \\ \dfrac{du}{dt} = u + x_1 + x_2 \\ x_1(0) = s \\ x_2(0) = 2s \\ u(0) = 3s. \end{cases}$$

sistem liniar în x_1, x_2

rezolvăm întâi sistemul diferențial liniar de ordinul întâi în (x_1, x_2): $\begin{cases} x_1' = x_1 + 3x_2 \\ x_2' = x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2\end{pmatrix}.$

cu cond. inițiale $\begin{cases} x_1(0) = s \\ x_2(0) = 2s \end{cases}$

se poate rezolva cu valori proprii pt A, deoarece A este constantă.

Sistemul $x' = Ax$ poate fi rezolvat folosind rezultatul următor:

Dacă avem sistemul liniar următor:

$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases}$, cu $a_{12} \neq 0$, adică $x' = Ax$, cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,

! atunci x_1 este soluția ec. dif. liniare cu coef. constanți:

$$\boxed{x_1'' = (\text{tr}\,A)\,x_1' - (\det A)\,x_1},$$

iar x_2 se determină din prima ec. din sistem:

$$x_2 = \frac{x_1' - a_{11}x_1}{a_{12}}, \quad a_{12} \neq 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{tr} A = 1 + (-1) = 0 \\ \det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 3 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1'' = 0 \cdot x_1' - (-4) \cdot x_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_1'' = 4x_1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ ec. caract: $r^2 = 4 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2$

$r_1 = 2,\ m_1 = 1 \Rightarrow \varphi_1(t) = e^{2t}$

$r_2 = -2,\ m_2 = 1 \Rightarrow \varphi_2(t) = e^{-2t}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{x_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$$

Pt. x_2 avem:

$$x_2 = \frac{x_1' - x_1}{3} = \frac{1}{3}\left(C_1 e^{2t} \cdot 2 + C_2 e^{-2t}(-2) - C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{x_2(t) = \frac{1}{3}\left(C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-2t}\right)}$$

Avem $\left.\begin{array}{l} x_1(0) = s \\ x_2(0) = 2s \end{array}\right| \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = s \\ \frac{1}{3}(C_1 - 3C_2) = 2s \quad | \cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + C_2 = s \\ C_1 - 3C_2 = 6s \end{cases} (-)$

$/ \quad 4C_2 = -5s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{5s}{4} \\ C_1 = s - C_2 = s + \frac{5s}{4} = \frac{9s}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\begin{cases} \tilde{x}_1(t,s) = \frac{s}{4}\left(9e^{2t} - 5e^{-2t}\right) \\ \tilde{x}_2(t,s) = \frac{s}{12}\left(9e^{2t} + 15e^{-2t}\right) \end{cases}} \quad (1)$$

Din ec. pt u: $\frac{du}{dt} = u + x_1 + x_2 \Rightarrow$

$$\frac{du}{dt} = u + \frac{s}{12}\left(27e^{2t} - \cancel{15e^{-2t}} + 9e^{2t} + \cancel{15e^{-2t}}\right)$$

$$\frac{du}{dt} = u + 3se^{2t}$$, ec. afină în u și s.

$$\frac{du}{dt} = \underbrace{a(t)}_{1} u + \underbrace{b(t)}_{3se^{2t}}$$

Căutăm sol. part $u_0(t) = m \cdot e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow (me^{2t})' = m\cdot e^{2t} + 3s e^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow m\cdot e^{2t}\cdot 2 = m e^{2t} + 3se^{2t} \overset{|:e^{2t}}{\Rightarrow} 2m = m + 3s \Rightarrow \boxed{m = 3s} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ o sol part: $\boxed{u_0(t) = 3se^{2t}} \Rightarrow$

$\Rightarrow u(t) = \bar{u}(t) + \underbrace{3se^{2t}}_{u_0(t)}$

unde $\bar{u}$ este sol. ec. liniare atașate:

$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{u} \Rightarrow \bar{u}(t) = Ce^{t} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow u(t) = Ce^{t} + 3se^{2t} \\ \text{dar } u(0) = 3s \end{array}\right| \Rightarrow 3s = C + 3s \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\tilde{u}(t,s) = 3se^{2t}} \quad (2)$

Soluția parametrică este formată din (1) & (2) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{s}{4}(9e^{2t} - 5e^{-2t}) \\ x_2 = \frac{s}{12}(9e^{2t} + 15e^{-2t}) \\ u = 3se^{2t} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{s}{12}(27e^{2t} - 15e^{-2t} + 9e^{2t} + 15e^{-2t})$$

$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3se^{2t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{u(x_1, x_2) = x_1 + x_2}.$

<u>Temă</u>: ① b, d
② a, b, d.

<u>OBS</u>: Prob Cauchy (0) poate fi formulată și astfel:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k(x,u)\, \partial_k u = g(x,u) \\ u(\alpha_1(s), \alpha_2(s), \ldots, \alpha_n(s)) = \varphi(s), \quad s \in G \subset \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

adică, param. pt S este deja dată.

De exemplu, prob. 2 c) se poate reformula astfel:

$$\begin{cases} (x_1 + 3x_2)\,\partial_1 u + (x_1 - x_2)\,\partial_2 u = u + x_1 + x_2 \\ u(s, 2s) = 3s, \quad \text{pt } s \in (0, +\infty) \end{cases}$$