Seria 33, Curs 1, EDDP, 05.10.2020.

Modalitate de evaluare

Maxim 100 de puncte:
- maxim 10 puncte pentru activitatea de seminar
- 80 puncte, maxim, din lucrarea de examen.
- 10 puncte din oficiu.

Bibliografie:

1. Ștefan Mirică, Ec. diferențiale, Ed. Univ. București,
2. Ioan Roșca, Ec. diferențiale și cu derivate parțiale, Ed. Fundației România de Mâine.
3. Aurelian Cernea, Ec. diferențiale, Ed. Univ. București.

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Def: Fie $n \in \mathbb{N}^*$.
Numim ecuație diferențială (scalară) de ordin n, o ecuație de forma:

$$\boxed{F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) = 0} \qquad (1)$$

unde $F: \Delta \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \mathbb{R}}_{\text{de } (n+1) \text{ ori}} \longrightarrow \mathbb{R}$

t = variabila independentă

x = variabila dependentă, a cărei determinare se cere din ecuația (1)

$$x^{(k)} = \frac{d^k x}{dt^k}, \quad k = \overline{1,n}$$

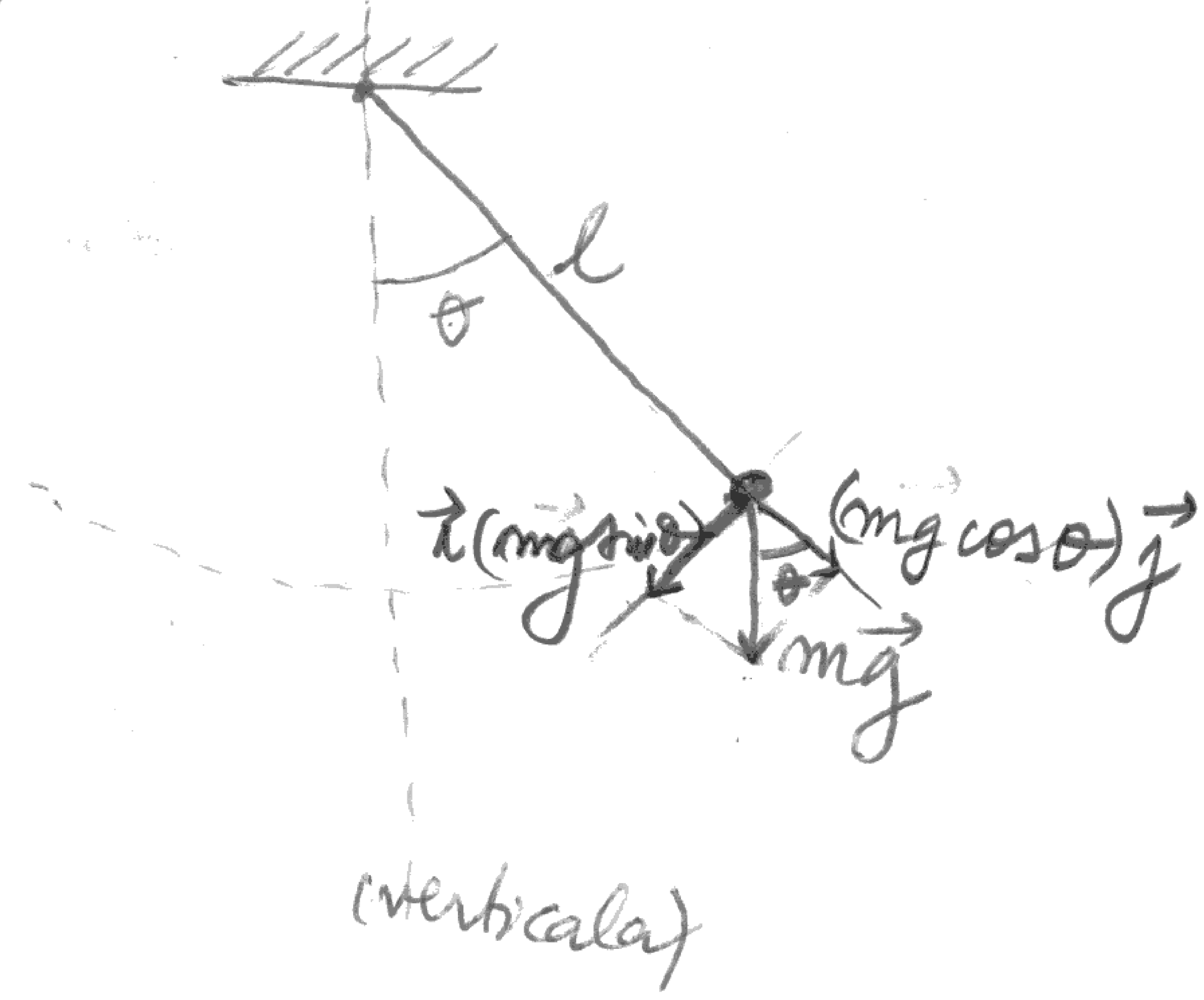
$$\parallel$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\left(\dots\left(\frac{dx}{dt}\right)\right)\right)$$

$x = x^{(0)}$ (derivata de ordin 0 este chiar funcția x)

Exemplu de ecuație diferențială:

Ec. pentru pendulul matematic:



$l \neq 0$
$m \neq 0$

ec de mișcare: $\underbrace{\vec{F}}_{(mg\sin\theta)\vec{\tau}} = m\underbrace{\vec{a}}_{l\theta^{(2)}\vec{\tau}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad \cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}l\,\theta^{(2)} \;|:l$;

notație, în mecanică, $\theta^{(1)} = \dot{\theta}$, $\theta^{(2)} = \ddot{\theta}$

$\Rightarrow$ ec. diferențială care descrie mișcarea pendulului matematic este $\boxed{\theta^{(2)} - \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$

$$F(t, \theta, \theta^{(1)}, \theta^{(2)}) = 0.$$

Def: Ec (1) s.n. <u>ec. diferențială explicită</u> dacă se poate scrie sub forma:

$$\boxed{x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)})} \quad (2)$$

unde $f : \Delta_1 \subset \mathbb{R} \times \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{\text{de } n \text{ ori}} \to \mathbb{R}$.

Forma (1) a ec. diferențiale se numește <u>ec. implicită</u>.

Def: O funcție $\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție pt ec. (1) resp. pentru ec (2) dacă este de n ori derivabilă și verifică:

$$F(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

resp:

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi^{(1)}(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)) \quad \forall t \in I.$$

Def: Pt ec în forma (2) spunem că se dă o **problemă Cauchy** dacă se cere determinarea unei soluții $\varphi : I \to \mathbb{R}$ care verifică:

$$\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0 \\ \varphi^{(1)}(t_0) = x_{0,1} \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1} \end{cases} \quad (3)$$

unde: $(t_0, x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1}) \in D_1$ dat.

Deci, problema Cauchy se scrie astfel:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \\ x(t_0) = x_0 \\ x^{(1)}(t_0) = x_{0,1} \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{0,n-1} \end{cases} \quad (4)$$

sau:

$$\left(f, (t_0, x_0, x_{0,1}, \dots, x_{0,n-1})\right)$$

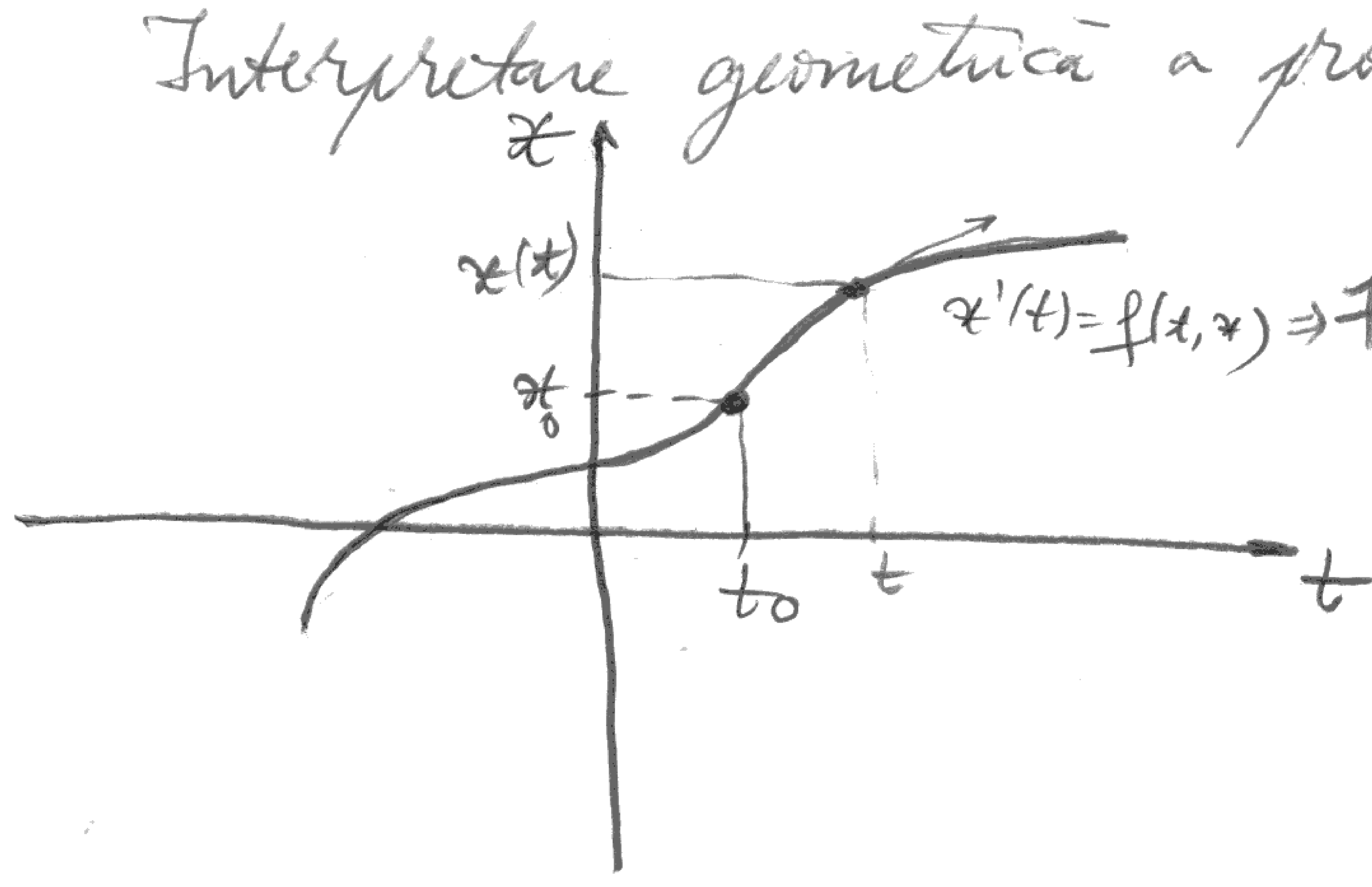
Cazul $\boxed{n=1}$: ec diferențiale scalare de ordin 1

(1) $\Longrightarrow$ $F(t, x, x') = 0$ (5)

(2) $\Longrightarrow$ $x' = f(t,x)$ sau $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (6)

(4) $\Longrightarrow$ $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in D$.

Interpretare geometrică a prob. Cauchy



$x'(t) = f(t,x) \Rightarrow f$ dă direcția tangentei la $x(t)$. (curba x care depinde de t).

Cazuri particulare de ec. dif. de ordinul întâi, integrabile:

① Ec. diferențială de tip primitivă

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t)} \qquad (7)$$

funcția f nu depinde de x $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ mulțimea soluțiilor ec. (7) este egală cu mulțimea primitivelor funcției f. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \int f(t)dt = F_1(t) + C} \qquad (8)$$

unde F_1 este primitivă pt. f

C este mulțimea funcțiilor constante.

② Ec. diferențială cu variabile separabile

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot b(x)} \qquad (9)$$

unde $f(t, x) = a(t) \cdot b(x)$

a, b funcții continue : $a : I \subset R \to R$, $b : J \subset R \to R$.

Algoritmul de rezolvare a ec. (9):

Pasul 1: Căutăm soluții staționare rezolvarea ec. alg:

$$b(x) = 0$$

Dacă $x_1, \dots, x_k$ cu $k \in N^*$ sunt soluțiile ec. $b(x) = 0$, atunci ec. dif. (9) are soluțiile staționare

$$\begin{cases} \varphi_j(t) = x_j, & j = \overline{1,k} \\ \varphi_j : I \to R \end{cases} \qquad (10)$$

Dacă ec. $b(x) = 0$ nu are soluții, atunci ec. (9) nu are soluții staționare.

Pasul 2: Pentru $b(x) \neq 0$, în ec. (9) se separă variabilele:

$$\frac{dx}{b(x)} = a(t)dt.$$

Se determină B ca funcție de x o primitivă pentru $\frac{1}{b}$, adică: $\int \frac{dx}{b(x)} = \underbrace{B(x)} + C$,

și A ca funcție de t o primitivă pentru a, adică: $\int a(t)dt = \underbrace{A(t)} + C$

Se scrie forma implicită a soluției:

$$B(x) = A(t) + C \quad , \quad C \in R . \quad (11)$$

Mulțimea soluțiilor ec. (9) este formată din (10) reunit cu (11)

OBS: Dacă din (11) se poate exprima x ca funcție de t, adică: $x = B^{-1}(A(t)+C)$,

atunci înseamnă că am explicitat soluția.

Exemplu: Se dă ecuația diferențială:

$$\frac{dx}{dt} = t \cos x \quad , \; t \in [-1,1] = I$$
$$x \in (0, \pi) = J$$

Se cere mulțimea soluțiilor ec.

Obs. că este ecuație cu variabile separabile;

$$a(t) = t \quad , \; a : [-1,1] \to R$$
$$b(x) = \cos x \; , \; b : (0,\pi) \to R .$$

Aplicăm alg de rezolvare:

pasul 1: $b(x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z$ }
dar $x \in (0,\pi) = J$ } $\Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$, adică o singură soluție: $x_1 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ pt ec. soluția staționară $\varphi_1(t) = \frac{\pi}{2}$.
$\varphi_1 : [-1,1] \to R$.

pasul 2: separăm variabilele: $\frac{dx}{\cos x} = t\,dt$.

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx = I$$

$\sin x = y$

$\cos x\,dx = dy$

$$\int \frac{dy}{1-y^2} = -\int \frac{dy}{y^2-1} = -\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$$

$$\int \frac{dy}{y^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| + C$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right| + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{B(x) = -\frac{1}{2}\ln\frac{|\sin x-1|}{|\sin x+1|} = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{\sin x+1}\right)}$$

$\sin x \in [-1,1]$

$$\int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C \Rightarrow \boxed{A(t) = \frac{t^2}{2}}$$

Soluția în formă implicită este:

$$\boxed{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) = \frac{t^2}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}}$$

care poate fi explicitată, adică se rezolvă în raport cu x:

$$-\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) = t^2 + 2C \Rightarrow \ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) = t^2+2C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1+\sin x}{1-\sin x} = e^{t^2+2C} \Rightarrow (1+\sin x) = (1-\sin x)\,e^{t^2}\cdot \underbrace{e^{2C}}_{\overset{not}{=}\, C_1} \Rightarrow$$

$C_1,\ C_1 \in \mathbb{R}^*_+ = (0,+\infty)$

$$\Rightarrow 1+\sin x = C_1 e^{t^2} - C_1 e^{t^2}\sin x \Rightarrow$$

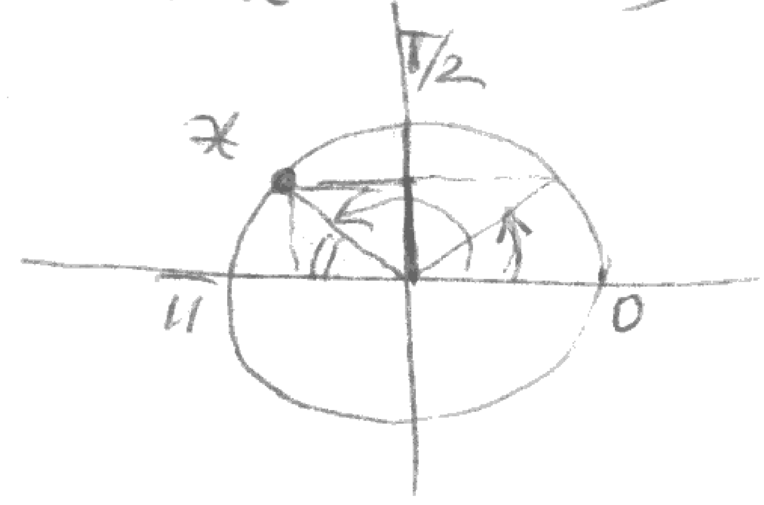
$$\Rightarrow (1 + C_1 e^{t^2})\sin x = C_1 e^{t^2} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin x = \frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}}$$

Avem $x \in (0,\pi)$, știm că sin se poate inversa pe $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{pe } \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right] : \quad x = \arcsin\left(\frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}\right)$$

iar pe $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$:



$$\sin x = \sin(\pi - x), \quad \pi - x \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right)$$

$$\sin(\pi - x) = \frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}$$

$$\pi - x = \arcsin\left(\frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pi - \arcsin\left(\frac{C_1 e^{t^2} - 1}{C_1 e^{t^2} + 1}\right) \text{ pe } \left(\tfrac{\pi}{2}, \pi\right)$$

Vom mai aborda ca și cazuri particulare următoarele tipuri de ec:

3. Ec. diferențială omogenă de ordinul întâi
4. Ec. liniară neomogenă (afină).
5. Ec. diferențială de forma: $\frac{dx}{dt} = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right)$
6. Ec. dif. Bernoulli
7. Ec. dif. Riccati.