Seria 33, EDDP, Curs 11, 21.12.2020

Ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi

Forma generală a unei ecuații cvasiliniare cu derivate parțiale de ordinul întâi, este:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\cdot \partial_j u = g(x,u) \qquad (1)$$

unde $a_1, \dots, a_n, g : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții cel puțin continue.

• Sistemul caract. asociat ec. (1) este:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_1(x,u) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_n(x,u) \\ \dfrac{du}{dt} = g(x,u) \end{cases} \quad (2) \iff \frac{dx_1}{a_1(x,u)} = \frac{dx_2}{a_2(x,u)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x,u)} = \frac{du}{g(x,u)}$$

(3)

• O integrală primă pt (3) înseamnă o funcție
$$F : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
cu prop. că este constantă de-a lungul oricărei soluții a sist (3), adică, $F(x,u) = \text{const}$, unde (x,u) este soluție pt (3). Conform criteriului pentru integrale prime rezultă că:

F este integrală primă pt (3) $\iff$

$$\iff \frac{dF}{dt}(x,u) = 0. \qquad (4)$$

• Prop.1: Dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n : D \to \mathbb{R}$ integrale prime pentru (3), atunci forma generală implicită a soluției pentru ec. (1) este:

$$f(\varphi_1(x,u), \dots, \varphi_n(x,u)) = 0 \qquad (5).$$

unde f este o funcție $f : G \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, care admite derivate parțiale de cel puțin ordinul întâi.

Problema Cauchy restrânsă pt ec. de tipul (1)

Spunem că se dă o prob. Cauchy restrânsă pt ec. (1) dacă se cere determinarea unei soluții $u : \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care să verifice:

$$(6)\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\, \partial_j u = g(x,u) \\ u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^0) = u_0(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \qquad \forall\, (x_1, \dots, x_{n-1}) \in D_2 \subset \mathbb{R}^{n-1} \end{cases}$$

x_n^0 cunoscut; $u_0 : D_2 \to \mathbb{R}$ funcție dată

Interpretare geometrică în cazul $n=2$:

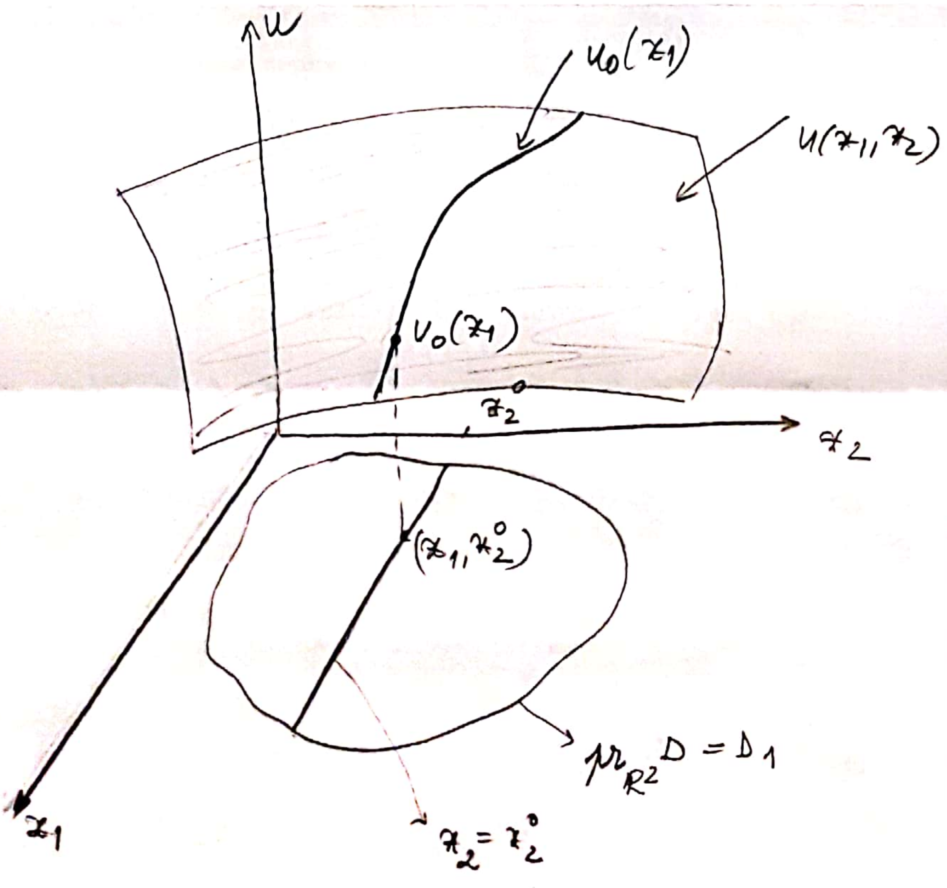
(6) se scrie:

$$(7)\quad \begin{cases} a_1(x,u)\, \partial_1 u + a_2(x,u)\, \partial_2 u = g(x,u) \\ u(x_1, x_2^0) = u_0(x_1), \quad x_1 \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

unde x_2^0 cunoscut

$u_0 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcție cunoscută.

$a_1, a_2, g : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date.



Problema Cauchy generală pt (1)

Se dă o prob. Cauchy generală pentru ec. (1) dacă se cere determinarea funcției $u : \Delta_1 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ care să verifică:

$$(8)\ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_j(x,u)\partial_j u = g(x,u) \\ u(x) = u_0(x) \quad \text{pe} \quad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0\}. \end{cases}$$

unde $h : D_3 \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

<u>OBS</u>: Pt. prob. Cauchy restrânsă avem:

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{h(x) = x_n - x_n^0}\ = 0\}$$

Pt. integrarea prob. (8) trebuie verificate următoarele condiții:

- suprafeței $S \subset \mathbb{R}^n$ i se asociază o parametrizare

$x \in S$, $x = (x_1, \dots, x_n)$:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1(s_1, \dots, s_{n-1}) \\ \vdots \\ x_n = \alpha_n(s_1, \dots, s_{n-1}) \end{cases} \quad (9)$$

unde $s = (s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ este parametrul supr. S care variază într-un domeniu în $\mathbb{R}^{n-1}$

care verifică:

$$(10)\ \begin{cases} 1)\ \operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial s_j}(s)\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n-1}}} = n-1, \quad \forall (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \in S \\ 2)\ \det\left(A\big((\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)), u_0(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))\big), \left(\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial s_j}(s)\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n-1}}}\right) \neq 0, \\ \qquad \forall (\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)) \in S, \end{cases}$$

unde $A(x,u) = \begin{pmatrix} a_1(x,u) \\ \vdots \\ a_n(x,u) \end{pmatrix}$

și parcurgi următorii pași:

- scriem $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))$
- rezolvăm sistemul caracteristic:

$$(11)\ \begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = a_j(x,u), \quad x_j(0) = \alpha_j(s), \quad j = \overline{1,n} \\ \dfrac{du}{dt} = g(x,u), \quad u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$

a cărui soluție este:

$$(12)\ \begin{cases} x_j = \tilde{x}_j(t, s),\ j=\overline{1,n} \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases}$$

pt că în raport cu t se integrează, iar s apare din cond inițiale ale sistemului (11).

- Pt a scrie soluția explicit, din sc în (t,s):

$$x_j = \tilde{x}_j(t, s),\ j=\overline{1,n}$$

să exprimăm $\begin{cases} t = \tilde{t}(x_1, \dots, x_n) \\ s_k = \tilde{s}_k(x_1, \dots, x_n),\quad k=\overline{1,n-1} \end{cases}$

și apoi să le înlocuim în u:

$$u(x_1, \dots, x_n) = \tilde{u}\left(\tilde{t}(x_1,\dots,x_n), s_1(x_1,\dots,x_n), \dots \right.$$

$$\left. \dots, s_n(x_1,\dots,x_n)\right)$$

<u>OBS</u>: În cazul prob. Cauchy restrânse avem:

$$h(x_1,\dots, x_n) = x_n - x_n^0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ o parametrizare: $\begin{cases} x_1 = \alpha_1(s_1, \dots, s_{n-1}) = s_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_{n-1} = \alpha_{n-1}(s_1, \dots, s_{n-1}) = s_{n-1} \\ x_n = \alpha_n(s_1, \dots, s_{n-1}) = x_n^0. \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1)\ \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial s_j}\right)_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n-1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{și are rangul } n-1} \in \mathcal{M}_{n,n-1}(\mathbb{R}) \overset{\text{not}}{=} M$$

$$2)\ A(x,u) = \begin{pmatrix} a_1(x,u) \\ \vdots \\ a_n(x,u) \end{pmatrix} \Rightarrow A\left((\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s)), u_0(\alpha_1(s), \dots, \alpha_n(s))\right) =$$

$$= A\big((\underbrace{s_1, \dots, s_{n-1}}_{s}, x_n^0), u_0(s_1, \dots, s_{n-1}, x_n^0)\big)$$

$$\det\left(A((s, x_n^0), u_0(s, x_n^0)), M\right) = \underbrace{a_n(s; u_0)}_{\neq 0}(-1)^{n+1} \cdot \underbrace{1}_{\det(I_{n-1})}$$

pe S: $h(x)=0$; $x_n = x_n^0$.

Cazul $n=2$: problema Cauchy generală :

$$\begin{cases} a_1(x,u)\,\partial_1 u + a_2(x,u)\,\partial_2 u = g(x,u) \\ u(x) = u_0(x) \text{ pe } S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h(x_1,x_2)=0\}. \end{cases}$$

- $S: \begin{cases} x_1 = \alpha_1(s) \\ x_2 = \alpha_2(s) \end{cases}$, $s=(s_1)$, convenim că $s_1 = s$.
  $s \in J \subset \mathbb{R}$
- verificăm : 1) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial s} \end{pmatrix} = 1$, $\forall (\alpha_1(s), \alpha_2(s)) \in S$. $(\forall s \in J)$.

  2) $$\begin{vmatrix} a_1\big((\alpha_1(s),\alpha_2(s)), \underbrace{u_0(\alpha_1(s),\alpha_2(s))}_{\varphi(s)}\big) & \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(s) \\ a_2\big((\alpha_1(s),\alpha_2(s)), \underbrace{u_0(\alpha_1(s),\alpha_2(s))}_{\varphi(s)}\big) & \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}(s) \end{vmatrix} \neq 0$$
  $\forall s \in J$.
- $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$
- sistemul caracteristic : $$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_1(x,u) \\ \frac{dx_2}{dt} = a_2(x,u) \\ \frac{du}{dt} = g(x,u) \\ x_1(0) = \alpha_1(s) \\ x_2(0) = \alpha_2(s) \\ u(0) = \varphi(s) \end{cases}$$
- rezolvarea sistemului înseamnă : $\begin{cases} x_1 = \tilde{x}_1(t,s) \\ x_2 = \tilde{x}_2(t,s) \\ u = \tilde{u}(t,s) \end{cases}$ $\Rightarrow$ $t = \tilde{t}(x)$, $s = \tilde{s}(x)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x) = \tilde{u}(\tilde{t}(x), \tilde{s}(x)).$$

Temă : Scrieți problema Cauchy generală cu alg. de rezolvare în cazul $n=3$.

Exemplu : Fie problema Cauchy :

$$\begin{cases} (x_2+u)\,\partial_1 u + (x_1+u)\,\partial_2 u = x_1+x_2 \\ u(x_1,x_2) = \underbrace{x_1+x_2}_{\substack{\| \\ u_0(x_1,x_2)}} \text{ pe } S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R} \mid h(x_1,x_2) = x_2 = 0,\ x_1 > 0\}. \end{cases}$$

Se cere determinarea soluției acestei probleme Cauchy.

Avem: $\begin{cases} a_1(x_1,x_2,u) = x_2+u \\ a_2(x_1,x_2,u) = x_1+u \\ g(x_1,x_2,u) = x_1+x_2 \end{cases}$; $u_0(x_1,x_2) = x_1+x_2$.

• param pt S: $\begin{cases} x_1(s) = \alpha_1(s) = s \\ x_2(s) = \alpha_2(s) = 0 \end{cases}$, $s>0$.

$h(x) = x_2 = 0$; $\varphi(s) = u_0(\alpha_1(s),\alpha_2(s)) = s+0 = s$.

• verificăm cond: 1) $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha_1}{\partial s}(s) \\ \frac{\partial \alpha_2}{\partial s}(s) \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$.

2) $\begin{vmatrix} \alpha_2(s)+\varphi(s) & 1 \\ \alpha_1(s)+\varphi(s) & 0 \end{vmatrix} = (s+s)\cdot 1 = 2s \neq 0$ (pt că $s>0$).

• sist. caract: $\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2+u \\ \frac{dx_2}{dt} = x_1+u \\ \frac{du}{dt} = x_1+x_2 \\ x_1(0) = s \\ x_2(0) = 0 \\ u(0) = s \end{cases}$ } sistem diferențial liniar în (x_1,x_2,u)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ u' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2+C_3}{=} (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det(A-\lambda I_3) = (2-\lambda)(\lambda+1)^2 = (-1)^3(\lambda-2)(\lambda+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2, & m_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1, & m_2 = 2 \end{cases}$ $\Big|$ $\Longrightarrow$ un sistem fundam de soluții: (cu metoda știută pt valori proprii) pt $\lambda_1=2,\ m_1=1 \Rightarrow \boxed{\varphi_1(t)=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{2t}}$

pt $\lambda_2=-1,\ m_2=2 \Rightarrow \boxed{\varphi_2(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}$; $\boxed{\varphi_3(t)=e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}$

Se obține: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\u\end{pmatrix}(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+C_3\varphi_3(t)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1(t)=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}\\x_2(t)=C_1e^{2t}+C_3e^{-t}\\u(t)=C_1e^{2t}-C_2e^{-t}-C_3e^{-t}\end{cases}$$

$C_1,C_2,C_3\in\mathbb{R}$ care se determină din cond: $\left.\begin{matrix}x_1(0)=s\\x_2(0)=0\\x_3(0)=s\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_1+C_2=s\\C_1+C_3=0\\C_1-C_2-C_3=s\end{cases}\ (+)$$

$$3C_1\quad /\quad /\quad =2s\ \Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{2s}{3}\\C_2=s-\frac{2s}{3}=\frac{s}{3}\\C_3=-C_1=-\frac{2s}{3}.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left.\begin{matrix}x_1(t,s)=\frac{2s}{3}e^{2t}+\frac{s}{3}e^{-t}\\x_2(t,s)=\frac{2s}{3}e^{2t}-\frac{2s}{3}e^{-t}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\\u(t,s)=\frac{2s}{3}e^{2t}-\frac{s}{3}e^{-t}+\frac{2s}{3}e^{-t}\overset{\text{not}}{=}\tilde{u}(t,s)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=\frac{2s}{3}e^{2t}+\frac{s}{3}e^{-t}\quad |\cdot 2\\x_2=\frac{2s}{3}e^{2t}-\frac{2s}{3}e^{-t}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x_1=\frac{4s}{3}e^{2t}+\frac{2s}{3}e^{-t}\\x_2=\frac{2s}{3}e^{2t}-\frac{2s}{3}e^{-t}\end{cases}(+)$$

$$x_1-x_2=\ /\ se^{-t}\ (-)\qquad 2x_1+x_2=2se^{2t}\ /$$

$$\begin{cases}x_1-x_2=se^{-t}\\2x_1+x_2=2se^{2t}\end{cases}\Rightarrow\frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}=\frac{2\cancel{s}e^{2t}}{\cancel{s}e^{-t}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{3t}=\frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}\Rightarrow\boxed{t=\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}\right)}$$

$$s=(x_1-x_2)e^{t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{s = (x_1 - x_2)\sqrt[3]{\frac{2x_1 + x_2}{x_1 - x_2}}}$$

Sol. prob. Cauchy: $u(x_1, x_2) = \tilde{u}\left(\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}\right), (x_1-x_2)\sqrt[3]{\frac{2x_1+x_2}{x_1-x_2}}\right)$

Pt $u(x_1, x_2)$, mai simplu, este să înlocuim se^{-t} și $2se^{2t}$ în $\tilde{u}(t,s)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow u(x_1,x_2) = \frac{2x_1+x_2}{3} - \frac{x_1-x_2}{3} + \frac{2(x_1-x_2)}{3} =$$

$$= \frac{2x_1 + \cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_2} + 2x_1 - \cancel{2x_2}}{3} = \frac{\cancel{3}x_1}{\cancel{3}} = x_1.$$

<u>Temă</u>: Rezolvați prob. Cauchy în $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} \partial_1 u + x_1 \partial_2 u + x_1 x_2 \partial_3 u = x_1 x_2 x_3 \\ u(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3 \quad \text{pe } S = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_3 = 1 \\ x_1, x_2 > 0 \end{matrix} \right\} \end{cases}$$

- $S: \begin{cases} x_1 = \alpha_1(s_1, s_2) = s_1 \\ x_2 = \alpha_2(s_1, s_2) = s_2 \\ x_3 = \alpha_3(s_1, s_2) = 1 \end{cases}$ $\qquad h(x) = x_3 - 1$

$s = (s_1, s_2)$, $s_1 > 0$, $s_2 > 0$.