Seria 33, Curs 6, EDDP, 09.11.2020

Metode numerice pt probleme Cauchy

Metoda Euler:

Pt. problema Cauchy : $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0)=x_0 \end{cases}$, $t\in[t_0, t_0+T]$ (1)

$T>0$.

presupunem îndeplinite ipotezele TEU. $\rightarrow \exists\ \varphi$ soluție unică a problemei Cauchy (1).

Considerăm (2) $\begin{cases} h = \frac{T}{N}, & N\in\mathbb{N}^* \\ t_j = t_0 + j\cdot h, & j=\overline{0,N} \end{cases}$ puncte echidistante în $[t_0, t_0+T]$

Schema de aproximare Euler este:

(3) $\begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h f(t_j, x_j), \quad j=\overline{0,N-1} \end{cases}$

Teoremă de aproximare în metoda Euler:

Pt. (1) avem ipotezele TEU și, în plus, f este Lipschitz și în prima variabilă, adică:

$$\exists L_1>0 \text{ a.î. } |f(t_1,x)-f(t_2,x)| \leq L_1|t_1-t_2| \quad \forall (t_1,x),(t_2,x)\in D_{a,b}. \quad (4)$$

Fie $x_0, x_1, \ldots, x_N$ aproximări obținute cu metoda Euler, (3).

Atunci: $\exists A>0$ a.î. $|x_j - \varphi(t_j)| < Ah$ (5)

adică, schema Euler dă o aproximare de ordin 1 a soluției prob. (1).

Lema 1: Pt $x_0, x_1, \ldots, x_N$ aproximările din metoda Euler, avem:

$$|x_j - x_0| \leq Mjh, \quad j=\overline{0,N}. \quad (6)$$

Dem: pt $j=0 \Rightarrow |x_0-x_0| = 0 \leq M\cdot 0\cdot h$.

$j=1 \Rightarrow |x_1-x_0| = |\cancel{x_0} + h\cdot f(t_0,x_0) - \cancel{x_0}| = h|f(t_0,x_0)|$

$$\Rightarrow |x_1 - x_0| = h\,\underbrace{|f(t_0,x_0)|}_{\le M} \le Mh = M\cdot 1\cdot h.$$

Presupunem adev pt j şi dem pt $j+1$:

$$|x_{j+1}-x_0| = |x_j + h f(t_j,x_j) - x_0| =$$

$$= |(x_j - x_0) + h f(t_j,x_j)| \le \underbrace{|x_j-x_0|}_{\le M j h} + h \underbrace{|f(t_j,x_j)|}_{\le M} \le$$

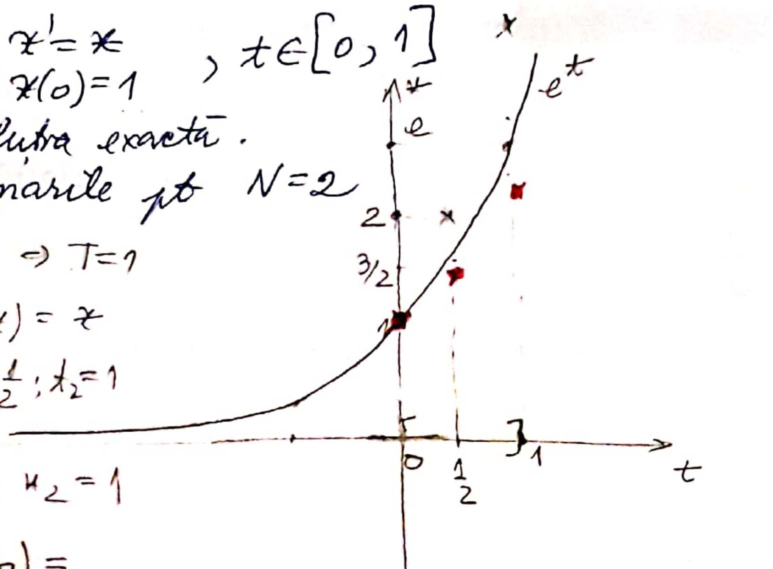
$$\le M j H + h M = Mh(j+1).$$

Lema 2: În cond teoremei de aproximare avem:

$\exists B>0$, $B = N(L_1+ML)$ a.î. $\left|\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t,\varphi(t))\,dt - h f(t_j,\varphi(t_j))\right| < Bh^2$, $j=\overline{0,N-1}$

Aplicaţie a metodei Euler:

Fie prob. Cauchy $\begin{cases} x'=x\\ x(0)=1\end{cases}$, $t\in[0,1]$



Avem $\varphi(t)=e^t$ soluţia exactă.

Calculăm aproximările pt $N=2$

$t_0=0$, $t_0+T=1 \Rightarrow T=1$

$N=2$; $f(t,x)=x$

$h=\frac{T}{N}=\frac{1}{2}$; $t_1=\frac{1}{2}$; $t_2=1$

$x_0=1$; $x_1=\frac{1}{2}$; $x_2=1$

M Euler $\Rightarrow x_1 = x_0 + h f(t_0,x_0) =$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot x_0 = 1+\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = x_1 + h f(t_1,x_1) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$$

O aproximare mai bună în metoda Euler se poate obţine dacă folosim metoda Euler implicită, adică schema:

$$(*)\ \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h f(t_{j+1}, x_{j+1}), & j=\overline{0,N-1}\end{cases}$$

unde pt a determina x_{j+1} se rezolvă ec. algebrică din (7).

Pt. exemplu de mai sus avem:

$$x_0 = 1$$

Met. Euler implicită $\Rightarrow$ $x_1 = x_0 + h\, f(t_1, x_1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot x_1 \Rightarrow \frac{1}{2}x_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 2.$$

$$x_2 = x_1 + h\, f(t_2, x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2 = x_1 + h\cdot x_2.$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}\cdot x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 4.$$

Pt. a construi o schemă numerică de aproximare pb (1), schema de ordin $k \in \mathbb{N}^*$ se folosește <u>metoda Taylor</u>.

Avem schema generală de aproximare într-un pas:

$$(8)\quad \begin{cases} x_0 \\ x_{j+1} = x_j + h\, \underbrace{\phi(h_j, t_j, x_j)} \end{cases}$$

Dacă φ este soluția prob (1) și dacă este derivabilă de k ori, atunci în jurul lui t_0, φ poate fi dezvoltată în serie Taylor, adică:

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \frac{\varphi^{(1)}(t_0)}{1!}(t-t_0) + \frac{\varphi^{(2)}(t_0)}{2!}(t-t_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\varphi^{(k)}(t_0)}{k!}(t-t_0)^k + O\left((t-t_0)^{k+1}\right).$$

<u>sau</u>:

$$\underbrace{\varphi(t_{j+1})} = \underbrace{\varphi(t_j)} + \frac{\varphi^{(1)}(t_j)}{1!}(t_{j+1}-t_j) + \frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}(t_{j+1}-t_j)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{k!}(t_{j+1}-t_j)^k + O\left((t_{j+1}-t_j)^{k+1}\right)$$

Dar avem $t_{j+1} - t_j = h$.

$$x_{j+1} \simeq \varphi(t_{j+1})$$

$$x_j \simeq \varphi(t_j)$$

deci, rezultă:

$$x_{j+1} \simeq x_j + h\underbrace{\left(\varphi^{(1)}(t_j) + \frac{\varphi^{(2)}(t_j)}{2!}\cdot h + \dots + \frac{\varphi^{(k)}(t_j)}{k!}h^{k-1}\right)}_{\phi(h,\, t_j,\, x_j)} + O(h^k).$$

Din ec. din prob Cauchy: $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^{(1)}(t_j) = f(t_j, \varphi(t_j)) \simeq f(t_j, x_j)} \Rightarrow$$ metoda Euler se obține când construim o metodă de ordin 1.

Din $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ prin derivare în raport cu $t \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi^{(2)}(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t, \varphi(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\cdot\varphi^{(1)}(t)$$

$$\Rightarrow \varphi^{(2)}(t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\cdot f(t, \varphi(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^{(2)}(t_j) \simeq \frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\cdot f(t_j, x_j)}$$

$$\varphi^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\cdot f(t, \varphi(t))\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t))\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t))\right)\cdot\varphi^{(1)}(t) +$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\right)\varphi^{(1)}(t)\right] f(t, \varphi(t)) +$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \varphi(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))\cdot\varphi^{(1)}(t)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi^{(3)}(t_j) \simeq \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_j, x_j) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x}(t_j, x_j)\cdot f(t_j, x_j) + \\ (*)\quad &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t_j, x_j)\cdot\left(f(t_j, x_j)\right)^2 + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\, f(t_j, x_j)\right)\end{aligned}\right.}$$

Pt $\underline{k=1}$: $\phi_1(h, t_j, x_j) = f(t_j, x_j)$

(9) $\underline{k=2}$: $\phi_2(h, t_j, x_j) = \underbrace{f(t_j, x_j)}_{\phi_1(h, t_j, x_j)} + \frac{h}{2!}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_j, x_j) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_j, x_j)\cdot f(t_j, x_j)\right).$

$\underline{k=3}$: $\phi_3(h, t_j, x_j) = \phi_2(h, t_j, x_j) + \frac{h^2}{3!}\cdot(*)$

<u>Exemplu</u>: Fie problema Cauchy:

$$\begin{cases} x' = x^2 + xt + t^2 \\ x(0) = 2 \end{cases}$$

Să se scrie scheme numerice de ordin 1 și 2 pt aproximarea soluției:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f(t,x) = x^2 + xt + t^2$

$t_0 = 0, \quad x_0 = 2.$

$[t_0, t_0 + T] = [0, T], \quad T > 0.$

$N \in \mathbb{N}^*$

$\boxed{k=1} \quad \phi_1(h, t_j, x_j) = f(t_j, x_j) \Rightarrow$ schema Euler.

$\boxed{k=2}. \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = 2x + t; \quad \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = x + 2t.$

$$\phi_2(h, t_j, x_j) = f(t_j, x_j) + \frac{h}{2}\left(x_j + 2t_j + (2x_j + t_j)\cdot f(t_j, x_j)\right)$$

$$= x_j^2 + t_j x_j + t_j^2 + \frac{h}{2}\left[x_j + 2t_j + (2x_j + t_j)(x_j^2 + x_j t_j + t_j^2)\right]$$

Schema numerică:

$$x_0$$

$$x_{j+1} = x_j + h \cdot \phi_2(h, t_j, x_j)$$

$\boxed{k=3}: \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,x) = 2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x}(t,x) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \phi_3(h, t_j, x_j) = \phi_2(h, t_j, x_j) + \frac{h^2}{6}\Big(2 + 2 \cdot 1 \cdot f(t_j, x_j) +$$

$$+ 2 \cdot (f(t_j, x_j))^2 + (2x_j + t_j)\Big[(x_j + 2t_j) +$$

$$+ (2x_j + t_j) \cdot f(t_j, x_j)\Big]\Big).$$

<u>Dezavantaje în metoda Taylor</u>:

- schema se construiește pentru o problemă Cauchy dar specificată, pentru trebuie înlocuite derivatele funcției f.

Sisteme de ecuații diferențiale în $\mathbb{R}$

Fie : $\boxed{\frac{dx}{dt} = f(t, x)}$ (10)

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

$x = (x_1, \dots, x_n)$

vectorul variabilei dependente are n componente $x_1, \dots, x_n$

t = variabila independenta

Pe componente (10) se scrie:

$$(11) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, (x_1, \dots, x_n)) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, (x_1, \dots, x_n)) \end{cases}$$

Rezolvarea sistemelor de forma (11) cu ajutorul integralelor prime.

Def : O funcție $F : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru sistemul (11) dacă este constantă de-a lungul oricărei soluții a sistemului, adică:

$$(11') \left[\begin{array}{l} \forall \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : I_\varphi \to \mathbb{R} \text{ soluție a sistemului (11)} \\ \exists\, C_\varphi \in \mathbb{R} \text{ a.î. } F(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = C_\varphi, \ \forall t \in I_\varphi. \end{array} \right.$$

Propoziție (criteriu pentru integrale prime).

$F : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pt (11) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}(t, x) \cdot f_j(t, x) = 0, \ \forall (t, x) \in D \quad (12)$$

Exemplu (1) Fie sistemul

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \end{cases} \quad \text{în } \mathbb{R}^2 \ (n = 2)$$

a) Arătați că $F(t, (x_1, x_2)) = -2t + x_1^2 + x_2^2$ este integrală primă a sistemului.

b) Determinați mulț. soluțiilor sistemului folosind integrala primă.

a) Verificam (12), adica: $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \cdot f_1(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_2} \cdot f_2(t,x) = 0$.

$$f_1(t,x) = \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} ; \quad f_2(t,x) = \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}.$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -2 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 ; \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2$$

Calculăm:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x_1} f_1(t,x) + \frac{\partial F}{\partial x_2} f_2(t,x) =$$

$$= -2 + 2x_1 \cdot \frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} + 2x_2 \cdot \frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} =$$

$$= -2 + \frac{2\cancel{(x_1^2+x_2^2)}}{\cancel{x_1^2+x_2^2}} = -2+2 = 0 . \Rightarrow$$ F este integrală primă pt sistemul dat.

b) F integrală primă $\Rightarrow \exists C_1 > 0$ ai $F(t,(x_1,x_2)) = C_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow -2t + x_1^2 + x_2^2 = C_1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = C_1 + 2t \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sistemul devine:
$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{C_1+2t} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{C_1+2t} \end{cases}$$

fiecare ecuatie poate fi integrată separat.

sunt ec. liniare omogene $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = C_2 e^{\frac{1}{2}\ln|C_1+2t|} \\ x_2 = C_3 e^{\frac{1}{2}\ln|C_1+2t|} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_1 = C_2\sqrt{C_1+2t} \\ x_2 = C_3\sqrt{C_1+2t} \end{cases}} \quad \text{cu } C_1+2t \geq 0 .$$

nr. de constante $\underset{(=)}{\leq} n = 2$

Inlocuind in integrala primă $\Rightarrow -2t + C_2^2(C_1+2t) + C_3^2(C_1+2t) = C_1$

$$\Rightarrow \underline{-2t} + C_2^2C_1 + \underline{2tC_2^2} + C_3^2C_1 + \underline{2tC_3^2} = C_1 , \quad \forall t$$

$$2t(-1+C_2^2+C_3^2) + C_1(C_2^2+C_3^2) = C_1$$

Identificare coef $\Rightarrow \begin{cases} -1+C_2^2+C_3^2 = 0 \\ C_1(C_2^2+C_3^2) = C_1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{C_2^2+C_3^2 = 1}$

② Fie sistemul: $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1}{x_1^2+x_2^2} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{x_2}{x_1^2+x_2^2} \end{cases}$

a) Arătați că $F(t, x_1, x_2) = x_1 x_2$ este integrală primă pt sistemul dat.

b) Rezolvați sistemul cu ajutorul integralei prime.