• METODE DE ELIMINARE GAUSS

1. Metoda Gauss fără pivotare (GFP) → se alege primul element nenul de pe coloana k.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ ⇒ Să se rezolve conform GFP.

ale din n-1 iterații.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ \boxed{2} & 1 & 5 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -9 & -9 \end{array}\right)$$

$k=1$ $\exists\, p$ $a_{p1} \neq 0 \Rightarrow p = 2$ $(a_{21} \neq 0)$ → va fi pivotul

→ dacă $p \neq k$ $(2 \neq 1)$ ⇒ permutăm liniile ⇒ $L_1 \leftrightarrow L_2$

→ să trans sub pivot doar 0: $L_3 = L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}} L_1 = L_3 - 2L_1$

$k=2$ → $a_{p2} \neq 0$ ⇒ $p = 2$ $(a_{22} \neq 0)$ → PIVOT

→ NU mai trebuie să fac nicio schimbare (sub doar 0 pe col 1)

• Se rezolvă sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ -9x = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

• Limitările metodei: (ε → valoare f. mică, dar $\neq 0$)

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases} \qquad \varepsilon = O(10^{-20}) << 1$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 0 & \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} & \frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon} \end{array}\right)$$

$\underline{k=1}$ $a_{p1} \neq 0$, $p=1$, $a_{11} = \varepsilon \neq 0$

$L_2 \leftarrow L_1 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L_2 - \frac{1}{\varepsilon} L_1$

$$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} x_2 = \frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \\ x_2(\varepsilon-1) = 2\varepsilon-1 \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \frac{2\varepsilon-1}{\cancel{\varepsilon}} \cdot \frac{\cancel{\varepsilon}}{\varepsilon-1}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{2\varepsilon-1}{\varepsilon-1} \approx \frac{-1}{-1} = 1$$

$\varepsilon x_1 = 1 - 1 \Rightarrow \varepsilon x_1 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$ VERIFICARE: $\begin{cases} 1 = 1 \text{ (A)} \\ 1 = 2 \text{ (F)} \end{cases}$

2. Metoda Gauss cu pivotare parțială (GPP)

Pivotul se alege conform formulei: $|a_{pk}| = \max\limits_{k \le j \le m} |a_{jk}|$

! Se păstrează PRIMUL element maximal ! ↳ lucrez de la linia k în jos.

Ex 1:

$\begin{cases} \varepsilon x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ GPP $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} \varepsilon & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$k=1$ $|a_{p1}| = \max\{|a_{11}|, |a_{21}|\} = \max\{\varepsilon, 1\} = 1 = |a_{21}|$

$\underline{p=2}$

$p \neq 1 \Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 2 \\ \varepsilon & 1 & 1 \end{array}\right)$ $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} L_1 = L_2 - \varepsilon L_1$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1-\varepsilon & 1-2\varepsilon \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ (1-\varepsilon) x_2 = 1 - 2\varepsilon \end{cases} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1-2\varepsilon}{1-\varepsilon} = 1$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = 1}$

VERIFICARE $\begin{cases} \varepsilon + 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \text{ (A)} \\ 1 + 1 = 2 \text{ (A)}. \end{cases}$

Ex2: $\begin{cases} x_1 + c x_2 = c \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$, $c = O(10^{20}) >> 1$. (GPP)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & c \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & c \\ 0 & 1-c & 2-c \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + c x_2 = c \\ (1-c) x_2 = 2-c \end{cases}$$

$k=1$: $|a_{p1}| = \max\{1, 1\} = 1 = |a_{11}| \Rightarrow \boxed{p=1}$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ $\Rightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{2-c}{1-c} \\ x_1 = c - c \cdot 1 = 0. \end{cases}$

VERIFICARE: $\begin{cases} 0 + c \cdot 1 = c \text{ (A)}. \\ 0 + 1 = 2 \text{ (F)} \end{cases}$

3. Metoda Gauss cu pivotare totală:

$$|a_{pm}| = \max_{k \le i,j \le n} |a_{ij}|$$

- Dacă $p \ne k \Rightarrow L_p \leftrightarrow L_k$
- Dacă $m \ne k \Rightarrow C_m \leftrightarrow C_k$

Obs: La permutarea a 2 coloane se va schimba ordinea necunoscutelor în vectorul necunoscutelor.

$\begin{cases} x_1 + c x_2 = c \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & c & c \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$ index $= (1,2)$

$k=1$ $|a_{pm}| = \max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\} = a_{12}$

$p = 1$, $m = 2$

$m \ne k \Rightarrow C_1 \leftrightarrow C_2 \Rightarrow$ index $= (2,1)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \boxed{c} & 1 & c \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} c & 1 & c \\ 0 & \frac{c-1}{c} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} c y_1 + y_2 = c \\ \frac{c-1}{c} y_2 = 1 \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{c} L_1$

$\Rightarrow y_2 = \frac{c}{c-1} \simeq 1$

$c y_1 = c - 1 \Rightarrow y_1 = \frac{c-1}{c} \simeq 1$

$\begin{cases} x[1] = y_1 \\ x[2] = y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = y_1 \\ x_1 = y_1 \end{cases}$

VERIFICARE:

$\begin{cases} 1 + c = c \\ \quad \hookrightarrow \text{se neglijează} \\ 1 + 1 = 2 \ (A) \end{cases}$

4. Inversarea unei matrice conform metodelor Gauss. Determinantul unei matrici

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ - inversabilă $\Rightarrow \exists A^{-1}$ a.î.

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I_n \quad (*)$$

$A^{-1} = \text{cols}[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$

$I_n = \text{cols}[e^{(1)}, e^{(2)}, \dots, e^{n}]$

$(*) \begin{cases} A x^{(1)} = e^{(1)} \\ A x^{(2)} = e^{(2)} \\ \dots \\ A x^{(n)} = e^{(n)} \end{cases}$

↳ VECTORI

→ s-au obținut n sisteme liniare cu necunoscutele coloanele inversei matricei A.

→ aceste sisteme pot fi rezolvate SIMULTAN conform uneia dintre met Gauss. (GPP, GPT)
↳ de preferat.

○ PENTRU DETERMINANT

$(n-1)$ iterații.

Fie $a_{11}^{(1)}, a_{22}^{(2)}, \dots, a_{n-1,n-1}^{(n-1)}, a_{nn}^{(n-1)}$

↳ pivoți la fiecare iterație

!! ↳ rămâne calculat de la iterația $n-1$

Atunci $|A| = \det|A| = (-1)^{s} \cdot a_{11}^{(1)} \cdot a_{22}^{(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n-1,n-1}^{(n-1)} \cdot a_{nn}^{(n-1)}$

↳ numărul de permutări de linii și coloane

Calculați inversa și determinantul: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}$ conform GPT.

$$\begin{cases} A\cdot x^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} & \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 1\\ 4 & 9 & 0\end{array}\right)\\ A\cdot x^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} & \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & 0\\ 4 & 9 & 1\end{array}\right)\end{cases}$$

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 4 & 9 & 0 & 1\end{array}\right) \qquad index=(1,2)$$

concatinea simultan ambele coloane.

$k=1$ $\quad |a_{pm}|=max\{|a_{11}|,|a_{12}|,|a_{21}|,|a_{22}|\}=|a_{22}|=9.$

$p=2, m=2. \Rightarrow L_1 \leftrightarrow L_2 \; (1) \quad index=(2,1).$

$C_1 \leftrightarrow C_2 \; (2)$

$$(1)\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 9 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 0\end{array}\right)\sim(2)\left(\begin{array}{cc|cc}9 & 4 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}9 & 4 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{9} & 1 & -\frac{2}{9}\end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2-\frac{2}{9}L_1$

$$\begin{cases} 9y_1+4y_2=0\\ \frac{1}{9}y_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1=-4\\ y_2=9\end{cases}$$

$$\begin{cases} 9z_1+4z_2=1\\ \frac{1}{9}z_2=-\frac{2}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1\\ z_2=-2\end{cases}$$

Obținem

$\Rightarrow x^{(1)}=\begin{pmatrix}9\\-4\end{pmatrix} \quad x^{(2)}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}$

VERIFICARE

$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ A.