Grupa 331, Seminar 4, EDDP, 29.10.2020

1

(6 din tema seminar 3)
$$x' = -xt + x^2 \sin t \quad , t \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \ , x > 0.$$

$$\bar{x}' = -\bar{x}t$$
$$\Rightarrow \bar{x}(t) = C \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

met. var const $\Rightarrow$ determ. $C: (0, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$ a.î.

$x(t) = C(t) e^{-\frac{t^2}{2}}$ sol. ec. Bernoulli $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C'(t) e^{-\frac{t^2}{2}} + \cancel{C(t) \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot (-t)} = \cancel{-C(t) e^{-\frac{t^2}{2}} t} + C^2 \cdot e^{-t^2} \sin t \ \Big| \cdot e^{+\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \underbrace{C^2}_{b_1(C)} \underbrace{e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t}_{a_1(t)}.$$

ec. cu var separabile.

- $C^2 = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = 0}$

- $C \neq 0 \Rightarrow \quad C^{-2} dC = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t \, dt$

$$\int C^{-2} dC = \frac{C^{-1}}{-1} + K \Rightarrow B_1(C) = -\frac{1}{C}.$$

$$\underbrace{\int e^{-\frac{t^2}{2}} \sin t \, dt.}_{\text{există dar nu are expresie analitică}}$$

Sol. implicite:
$$-\frac{1}{C} = \int_{t_0}^{t} e^{-\frac{s^2}{2}} \sin s \, ds + K, \quad K \in \mathbb{R}$$
cu $t_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$.

1'
$$\boxed{x' = -x + x^2 \sin t} \ , t \in (0, \tfrac{\pi}{2}) \ , x > 0.$$

- $\bar{x}' = -\bar{x} \quad \Rightarrow \bar{x}(t) = C \cdot e^{-t}$

met. var const $\Rightarrow C: (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ a.î.

$x(t) = C(t) e^{-t}$ sol. a ec. Bernoulli $\Rightarrow$

$$\Rightarrow C'(t) e^{-t} + \cancel{C(t) e^{-t} (-1)} = \cancel{-C(t) e^{-t}} + C^2 e^{-2t} \sin t \ \Big| \cdot e^{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dt} = \underbrace{C^2}_{b_1(C)} \underbrace{e^{-t} \sin t}_{a_1(t)} \Rightarrow \quad C^2 = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = 0}$$

- pt $C \neq 0 \Rightarrow$ separăm variabilele,

- 2 -

$$C^{-2}dC = e^{-t}\sin t\, dt$$

$$\int C^{-2}dC = -\frac{1}{C} + K \Rightarrow \quad B_1(C) = -\frac{1}{C}$$

$$\mathcal{I} = \int e^{-t}\sin t\, dt = \int (-e^{-t})'\sin t\, dt =$$

$$= -e^{-t}\sin t - \int (-e^{-t})\cdot(\sin t)'\, dt =$$

$$= -e^{-t}\sin t + \underbrace{\int e^{-t}\cos t\, dt}_{} =$$

$$= -e^{-t}\sin t + \int (-e^{-t})'\cos t\, dt =$$

$$= -e^{-t}\sin t - e^{-t}\cos t - \int (-e^{-t})(-\sin t)\, dt$$

$$\Rightarrow \mathcal{I} = -e^{-t}(\sin t + \cos t) - \mathcal{I} \Rightarrow \mathcal{I} = \underbrace{-\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t)}_{A_1(t)} + K$$

Sol. ec. în (t, C) cu var separabile:

$$-\frac{1}{C} = -\frac{1}{2}e^{-t}(\sin t + \cos t) - \frac{1}{2}K \quad , K \in \mathbb{R}.$$

$$C(t) = \frac{2}{e^{-t}(\sin t + \cos t) + K} \Rightarrow \left(x(t) = C(t)\cdot e^{-t}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{2}{\sin t + \cos t + K}, \quad K \in \mathbb{R}}$$

(2) (ex. 9 din seminar 3)

Fie ecuația:
$$x' = \frac{3t^2}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1}x - \frac{2t}{t^5-1}x^2, \quad t \in (1, +\infty), \ x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinați $n, m \in \mathbb{R}$ a.î. $\varphi_0(t) = n t^m$ să fie soluție a ec.

b) Cu φ_0 determinat la punctul a), să se determine mulțimea soluțiilor ecuației.

a) $\varphi_0(t) = n t^m$ în ec.: $\varphi_0'(t) = \frac{3t^2}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1}\varphi_0(t) - \frac{2t}{t^5-1}\varphi_0^2(t) \Rightarrow$

$$\Rightarrow n\cdot m\, t^{m-1} = \frac{3t^2}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1}\cdot n t^m - \frac{2t}{t^5-1}n^2 t^{2m} \quad \Big|\cdot(t^5-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow nm\, t^{m-1}(t^5-1) = 3t^2 + n t^{m+4} - 2n^2 t^{2m+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{nm\, t^{m+4} - nm\, t^{m-1} = 3t^2 + n t^{m+4} - 2n^2 t^{2m+1}}$$

Dacă $m+4 \neq 2$ și $m-1 \neq 2$ și $2m+1 \neq 2$, atunci identificarea coef. conduce la $\underline{3=0}$ fals!

Deci $\underline{m+4=2}$ sau $\underline{m-1=2}$ sau $\underline{2m+1=2}$

a) $\boxed{m+4=2} \Rightarrow \boxed{m=-2} \Rightarrow$

$$-2nt^2 + 2nt^{-3} = \underline{3t^2} + \underline{nt^2} - 2n^2t^{-3}$$

identif. coef $\Rightarrow \begin{cases} -2n = 3+n \Rightarrow \boxed{n=-1} \\ 2n = -2n^2 \end{cases}$ verificăm: $-2 = -2\cdot 1$ (A).

Deci: $\boxed{\varphi_0(t) = -1\cdot t^{-2} = -\frac{1}{t^2}}$

c2) $\boxed{m-1=2} \Rightarrow \boxed{m=3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{3nt^7} - 3nt^2 = 3t^2 + \underline{nt^7} - \underline{2n^2t^7}$$

$\begin{cases} 3n = n - 2n^2 \\ -3n = 3 \Rightarrow \boxed{n=-1} \end{cases}$ verifică $-3 = -1 - 2\cdot 1$ (A).

$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(t) = -t^3}$

c3) $2m+1 = 2 \Rightarrow \boxed{m = \frac{1}{2}}$

$$\underline{\frac{1}{2}nt^{\frac{9}{2}}} - \frac{1}{2}nt^{-\frac{1}{2}} = 3t^2 + \underline{nt^{\frac{9}{2}}} - 2n^2t^2$$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}n = n \\ -\frac{1}{2}n = 0 \\ 0 = 3 - 2n^2 \end{cases} \Big| \Rightarrow n=0$ nu verifică $\Rightarrow$ nu se găsește nici o soluție.

b) În ec. Riccati efectuăm schimbarea de variabile

$$(t,x) \xrightarrow{x = y + (-t^3)} (t,y)$$

Se obține:

$$y' - 3t^2 = \frac{3t^2}{t^5-1} + \frac{t^4}{t^5-1}\cdot(y - t^3) - \frac{2t}{t^5-1}(y-t^3)^2 \Big/ \cdot t^5-1$$

$$\Rightarrow y'(t^5-1) \cancel{-3t^7} + \cancel{3t^2} = \cancel{3t^2} + t^4y \cancel{-t^7} - 2ty^2 + 4t^4y \cancel{-2t^7} \Big/ :(t^5-1)$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \underbrace{\frac{5t^4}{t^5-1}}_{a_1(t)}y - \underbrace{\frac{2t}{t^5-1}}_{b_1(t)}y^2}$$ ec Bernoulli cu $\alpha = 2$.

cu schimbarea de variabile: $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$, $\alpha = 2$ $\Big| \Rightarrow y = z^{-1} = \frac{1}{z}$.

$$(t,y) \xrightarrow{y=\frac{1}{z}} (t,z)$$

Ec. Bernoulli devine:

$$\left(\frac{1}{z}\right)' = \frac{5t^4}{t^5-1}\cdot\frac{1}{z} - \frac{2t}{t^5-1}\cdot\frac{1}{z^2}$$

$$-\frac{1}{z^2}\, z' = \frac{5t^4}{t^5-1}\cdot\frac{1}{z} - \frac{2t}{t^5-1}\cdot\frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot(-z^2)$$

$$z' = \underbrace{\frac{-5t^4}{t^5-1}}_{a_2(t)} z + \underbrace{\frac{2t}{t^5-1}}_{b_2(t)}$$

ec. afină (liniară neomogenă)

$$\bar z' = \frac{-5t^4}{t^5-1}\,\bar z \Rightarrow \bar z(t) = C\cdot e^{A_2(t)}$$

$$\int \frac{-5t^4}{t^5-1}\,dt = -\int\frac{(t^5-1)'}{t^5-1}\,dt = -\ln|t^5-1| + K \underset{t>1}{=}$$

$$= -\ln(t^5-1)+K =$$

$$= \ln(t^5-1)^{-1} + K \Rightarrow A_2(t) = \ln\left(\frac{1}{t^5-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar z(t) = C\cdot\frac{1}{t^5-1}$$

Aplicăm met. var. const. $\Rightarrow$ det. $C:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$

a.î. $z(t) = C(t)\,\frac{1}{t^5-1}$ sol. a ec. afine:

$$\Rightarrow \left(C(t)\cdot\frac{1}{t^5-1}\right)' = \frac{-5t^4}{t^5-1}\cdot C(t)\,\frac{1}{t^5-1} + \frac{2t}{t^5-1}$$

$$\Rightarrow C'(t)\cdot\frac{1}{t^5-1} + \cancel{C(t)\,\frac{-5t^4}{(t^5-1)^2}} = \cancel{\frac{-5t^4}{(t^5-1)^2}\,C(t)} + \frac{2t}{t^5-1} \quad \Big| \cdot (t^5-1)$$

$C'(t) = 2t$ $\Rightarrow$ $C(t) = t^2+K$ $\Rightarrow$

ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow z(t) = \frac{t^2+K}{t^5-1} \xRightarrow{y=\frac{1}{z}} y(t) = \frac{t^5-1}{t^2+K} \xRightarrow{x = y - t^3} \boxed{x(t) = \frac{t^5-1}{t^2+K} - t^3}$$

$K\in\mathbb{R}$.

Temă: Integrați ec. Bernoulli în (t,y) cu met. variației constantelor, fără schimbarea de variabile: $y=\frac{1}{z}$.

③ Să se determine mulţ. soluţiilor ec.:

a) $(x')^3 - 4txx' + 8x^2 = 0.$ $\quad (F(t, x, x') = 0)$

Lagrange
b) $x = t(x')^2 + (x')^3$

c) $x = -t + \left(\frac{x'+1}{x'-1}\right)^2$

d) $x = 2tx' - (x')^2$

Clairaut
e) $x = tx' + \frac{1}{(x')^2}$

f) $x = tx' - 2(1 + (x')^2)$

ⓑ

$$x = t(x')^2 + (x')^3$$

ec. Lagrange: $x = t\varphi(x') + \psi(x')$

$\varphi(x') = (x')^2$
$\psi(x') = (x')^3$; $\varphi; \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

Fie $p = x'$. $\Rightarrow$ $x = tp^2 + p^3$

Derivăm ec: $x' = t' \cdot p^2 + t(p^2)' + (p^3)' \Rightarrow$

$\Rightarrow p = p^2 + 2tpp' + 3p^2 \cdot p' \Rightarrow$

$\Rightarrow p - p^2 = p'(2tp + 3p^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dp}{dt} = \frac{p - p^2}{2tp + 3p^2}$

$(t, p) \xrightarrow[\text{ec. răsturnată}]{} (p, t)$

var independentă; var. independentă

$$\frac{dt}{dp} = \frac{2tp + 3p^2}{p(1-p)} \Rightarrow \frac{dt}{dp} = \frac{\cancel{p}(2t + 3p)}{\cancel{p}(1-p)}$$

. Verificăm dacă ec. are sol. $p = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x' = 0 \Rightarrow x = C,\ C \in \mathbb{R}$ | înlocuim în ec. $\Rightarrow$

$\Rightarrow C = t \cdot 0^2 + 0^3 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$ $\boxed{x(t) = 0 \text{ sol}}$

Pentru $\underline{p \neq 0}$ $\Rightarrow$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{2}{1-p}t + \frac{3p}{1-p}$$ (ec. afină; liniară neomog)

• ec. liniară omogenă atașată:

$$\frac{d\bar{t}}{dp} = \underbrace{\frac{2}{1-p}}_{a(p)}\bar{t} \Rightarrow \bar{t} = C \cdot e^{A(p)}$$

$$\int \frac{2}{1-p}dp = -2\ln|1-p| + K = $$
$$= \underbrace{\ln\frac{1}{(1-p)^2}}_{A(p)} + K \Rightarrow \bar{t}(p) = C\cdot\frac{1}{(1-p)^2}$$

• met. var. const în ec. afină:

determinăm $C(p)$; $C: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$$t(p) = C(p)\cdot\frac{1}{(1-p)^2}$$ sol. a ec. afine:

$$\left(C(p)\frac{1}{(1-p)^2}\right)' = \frac{2}{1-p}\cdot C(p)\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{3p}{1-p}$$

$$C'(p)\cdot\frac{1}{(1-p)^2} + \cancel{C(p)\cdot\frac{-2(1-p)(-1)}{(1-p)^{4}}} = \cancel{\frac{2C(p)}{(1-p)^3}} + \frac{3p}{1-p}.$$

$$\Rightarrow C'(p) = \frac{3p(1-p)^{\cancel{2}}}{\cancel{1-p}} \Rightarrow C'(p) = 3p - 3p^2 \Rightarrow$$ ec. de tip primitivă

$$\Rightarrow C(p) = \int(3p-3p^2)dp = \frac{3p^2}{2} - p^3 + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(p) = \left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + K\right)\frac{1}{(1-p)^2}, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Mult. sol. parametrice:
$$\boxed{\begin{cases} x = tp^2 + p^3 \\ t = \left(\frac{3p^2}{2} - p^3 + K\right)\frac{1}{(1-p)^2} \end{cases}, K \in \mathbb{R}.}$$

(a) $(x')^3 - 4txx' + 8x^2 = 0$.

• ec. de gradul 3 în x' $\Rightarrow$ în general nu se poate să explicităm în raport cu x'.

• ec. de gradul 2 în x: $\cdot 8x^2 + (-4tx')x + (x')^3 = 0$

$\Delta = (-4tx')^2 - 4\cdot 8\cdot(x')^3$, $\Rightarrow$ este discutabilă exp în rap cu x, deoarece Δ nu e pătrat perfect.

• ec. de gradul 1 în t:

$$(x')^3 + 8x^2 = 4t\,x\,x'$$

Obs că $\boxed{x = 0 \text{ e soluție}}$

iar pt $x' = 0 \Rightarrow x = C,\ C \in \mathbb{R}$

înlocui în ec: $0^3 + 8C^2 = 4t \cdot C \cdot 0$

$C = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x = 0}$

Pt $x \neq 0,\ x' \neq 0$: $\boxed{t = \dfrac{(x')^3 + 8x^2}{4xx'}}$; $\boxed{t = h(x, x')}$

notăm $x' = p \Rightarrow t = \dfrac{p^3 + 8x^2}{4xp}$

Căutăm ec. din care să determinăm x ca funcție de p:

Derivăm $t = \dfrac{p^3 + 8x^2}{4xp}$ în raport cu $t \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \frac{(3p^2p' + 16x \cdot x')\cancel{4}xp - (p^3 + 8x^2)\cancel{4}(x'p + xp')}{\cancel{16}_{4} \cdot x^2p^2}$$

$$\Rightarrow 4x^2p^2 = 3p^3xp' + 16x^2p^2 - p^5 - p^3xp' - 8x^2p^2 - 8x^3p'$$

$$-4x^2p^2 + p^5 = p'(2p^3x - 8x^3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p^2(p^3 - 4x^2) = p' \cdot 2x(p^3 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow (p^3 - 4x^2)(p^2 - p'2x) = 0.$$

c1) $p^3 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \dfrac{p^3}{4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{p\sqrt{p}}{2},\ p > 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \dfrac{p\sqrt{p}}{2} \\ t = \dfrac{p^3 + 8x^2}{4xp} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{p\sqrt{p}}{2} \\ t = \dfrac{p^3 + 8x^2}{4xp} \end{cases} \end{array}\right. \quad (1)$$

c2) $p^2 - p'2x = 0. \Rightarrow p' = \dfrac{p^2}{2x}$

dar $p' = \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{dp}{dx} \cdot \dfrac{dx}{dt} = p\dfrac{dp}{dx}$ $\Big\} \Rightarrow p \cdot \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{p^2}{2x} \Big/_{p \neq 0} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p}{2x} \xrightarrow[\text{răsturnate}]{} \frac{dx}{dp} = \frac{2}{p} \cdot x \Rightarrow$ ec. liniară omogenă

$\Rightarrow x(p) = C \cdot e^{A(p)}$

$$\int \frac{2}{p} dp = 2\ln|p| + K = \underbrace{\ln p^2}_{A(p)} + K$$

$\Rightarrow x(p) = Cp^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ sol. parametrice:

$$\boxed{\begin{cases} x = Cp^2 \\ t = \frac{p^3 + 8x^2}{4xp} \end{cases}, \quad C \in \mathbb{R}} \quad (2)$$

Mult sol ec : (1) $\cup$ (2).