Seria 33, Curs 4, EDDP, 26.10.2020.

Ecuații diferențiale de ordin $k \geq 2$, în $\mathbb{R}$, integrabile prin reducerea ordinului.

$$F(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0. \quad (1)$$

Cazuri particulare ale ec. (1) în care se poate reduce ordinul:

① În ec. (1) lipsesc derivatele lui x până la ordinul $m < k$:

$$\boxed{F(t, x^{(m)}, \dots, x^{(k)}) = 0}. \quad (2)$$

Se reduce ordinul ecuației până la $k-m$ prin schimbarea de variabilă $\boxed{x^{(m)} = y}$

$$(t, x) \xrightarrow[x^{(m)} = y]{} (t, y)$$

$$x^{(m)}(t) = y(t)$$

$$\begin{cases} x^{(m+1)} = y^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(k)} = y^{(k-m)} \end{cases}$$

Ec. (2) devine: $F(t, y, y^{(1)}, \dots, y^{(k-m)}) = 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ec. dif. de ordin $k-m$.

Exemple:
$$\begin{cases} 1)\ 2x^{(2)}x^{(4)} - 3(x^{(3)})^3 = 0. \\ \quad F(x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}) = 0. \\ 2)\ x^{(1)}x^{(3)} = 2(x^{(2)})^2 \end{cases}$$

② Se poate reduce ordinul cu 1, dacă ecuația nu conține explicit pe t:

$$\boxed{F(x, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}) = 0.} \quad (3)$$

Se face schimbarea de variabilă $\boxed{x^{(1)}(t) = y(x(t))}$

$$(t,x) \xrightarrow[x^{(1)}=y]{} (x,y)$$

$$x^{(1)}(t) = y(x(t))$$

$$x^{(2)}(t) = \left(x^{(1)}(t)\right)^{(1)} = \frac{d}{dt}\left(y(x(t))\right) = \frac{dy}{dx}(x(t)) \underbrace{\frac{dx}{dt}(t)}_{y} \Rightarrow$$

se derivează ca funcție compusă

$$\Rightarrow \boxed{x^{(2)} = y^{(1)} \cdot y}$$

derivată în raport cu x.

$$x^{(3)}(t) = \frac{d}{dt}\left(y^{(1)}(x(t)) \cdot y(x(t))\right) =$$

$$= y^{(2)}(x) \cdot \underbrace{x^{(1)}}_{y} \cdot y(x) + y^{(1)}(x) \cdot y^{(1)}(x) \cdot x^{(1)} \Rightarrow$$

$$\boxed{x^{(3)} = y^{(2)} y^2 + \left(y^{(1)}\right)^2 \cdot y}$$

Deci: ec (3) se reduce la o ec:

$$F(x, y, y^{(1)}y, y^{(2)}y^2 + (y^{(1)})^2 y, \ldots) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{G(x, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(k-1)}) = 0}$$

Ex: 1) $x \cdot x^{(3)} + 3x^{(1)} x^{(2)} = 0$ ec. de ordin 3.

$$F(x, x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} & x^{(1)} = y \\ & x^{(1)}(t) = y(x(t)) \\ & x^{2}(t) = y^{(1)} y \\ & x^{3}(t) = y^{(2)} y^2 + (y^{(1)})^2 y \end{aligned}\right\} \Rightarrow x \cdot (y'' y^2 + (y')^2 y) + 3 y \cdot y' \cdot y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x y'' y^2 + x (y')^2 y + 3 y' y^2 = 0.$$

$$y\left(x y'' y + x (y')^2 + 3 y' y\right) = 0$$

- $y = 0 \Rightarrow x' = 0 \Rightarrow \boxed{x = C,\ C \in \mathbb{R}}$
- $x y'' y + x (y')^2 + 3 y' y = 0$. ec. de ordin 2

(3) Ec de forma: $\boxed{F\left(t, \frac{x^{(1)}}{x}, \frac{x^{(2)}}{x}, \dots, \frac{x^{(k)}}{x}\right)=0}$ (4)

Reducerea ordinului este face cu 1, prin schimbarea de variabilă $\boxed{\frac{x^{(1)}}{x}=y}$, $\frac{x^{(1)}(t)}{x(t)}=y(t)$

$$(t,x) \xrightarrow[\frac{x^{(1)}}{x}=y]{} (t,y)$$

$\boxed{x^{(1)}=xy}$; $x^{(1)}(t)=x(t)\,y(t)$

$x^{(2)}(t)=x^{(1)}(t)\cdot y(t)+x(t)\cdot y^{(1)}(t)$ $\quad |:x$

$$\frac{x^{(2)}(t)}{x}=\underbrace{\frac{x^{(1)}(t)}{x}}_{y}y(t)+y^{(1)}(t) \Rightarrow \boxed{\frac{x^{(2)}}{x}=y^2+y^{(1)}}$$

$x^{(2)}=(y^2+y^{(1)})x$

$x^{(3)}=(2y\cdot y^{(1)}+y^{(2)})x+(y^2+y^{(1)})\cdot x^{(1)}$ $\quad |:x$

$$\frac{x^{(3)}}{x}=2y\,y^{(1)}+y^{(2)}+(y^2+y^{(1)})y$$

$$\boxed{\frac{x^{(3)}}{x}=y^{(2)}+3y^{(1)}y+y^3}$$

Ec devine:

$$F(t, y, y^2+y^{(1)}, y^{(2)}+3y^{(1)}y+y^3, \dots)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{G(t, y, y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(k-1)})=0}$$

(4) <u>Ecuația Euler</u>

$\boxed{F(x, t\,x^{(1)}, t^2x^{(2)}, \dots, t^k x^{(k)})=0.}$ (5)

se poate reduce la o ecuație de tipul (2) sau (3)
(3) (4)
prin schimbarea de variabile: $|t|=e^s \Leftrightarrow s=\ln|t|$

$$(t,x) \xrightarrow[|t|=e^s]{} (s,y)$$; $x(t)=y(s(t))$.

Avem $x(t) = y(s(t))$

$s(t) = \ln|t|$

$x^{(1)}(t) = \frac{d}{dt}(y(s(t))) = \frac{d}{ds}y(s(t)) \cdot \frac{ds(t)}{dt}$

$s(t) = \ln|t| = \begin{cases} \ln t, & \text{dacă } t>0 \\ \ln(-t), & \text{dacă } t<0. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{ds(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{1}{t}, & \text{dacă } t>0 \\ \underbrace{\frac{1}{-t}(-t)'}_{\frac{1}{-t}(-1) = \frac{1}{t}.}, & \text{dacă } t<0. \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{ds(t)}{dt} = \frac{1}{t}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^{(1)}(t) = y^{(1)}\frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{t x^{(1)} = y^{(1)}}$

derivată în raport cu s, $s = s(t) = \ln|t|$

derivată în raport cu t.

$x^{(1)} = y^{(1)} \cdot \frac{1}{t}$

$x^{(2)} = y^{(2)} \cdot s'(t) \cdot \frac{1}{t} + y^{(1)} \cdot \left(\frac{-1}{t^2}\right) = y^{(2)} \cdot \frac{1}{t^2} - y^{(1)} \cdot \frac{1}{t^2} \Rightarrow | \cdot t^2$

$\boxed{t^2 x^{(2)} = y^{(2)} - y^{(1)}}$

Ec. devine:

$F(y, y^{(1)}, y^{(2)} - y^{(1)}, \dots, y^{(k)} + \dots) = 0$

la care poate fi redus ordinul prin:

<u>var 1</u>: schimbarea de variab $y^{(1)} = z$; $y^{(1)}(s) = z(y(s))$

$(s, y) \xrightarrow[y^{(1)} = z]{} (y, z)$

<u>var 2</u>: dacă în variabilele lui F se pot scrie ca variabile $\frac{y^{(j)}}{y}$, $j = \overline{1,k}$, fără să rămână dependență explicită de y, atunci se face schimbarea de variabile: $\frac{y^{(1)}}{y} = z$

$(s, y) \xrightarrow[\frac{y^{(1)}}{y} = z]{} (s, z)$ $\left(\frac{y^{(1)}(s)}{y(s)} = z(s)\right)$

Exemplu: Fie ecuatia:

$$t^2 x^{(2)} = t x^{(1)} - x.$$

Aratati ca se poate reduce la o ecuatie de ordinul intai!

$$x - t x^{(1)} + t^2 x^{(2)} = 0 \quad (e1)$$

$$F(x, t x^{(1)}, t^2 x^{(2)}) = 0.$$

ec. Euler de ordin 2.

$$\underset{(e1)}{(t, x)} \xrightarrow[x(t) = y(s(t))]{|t| = e^s} \underset{(e2)}{(s, y)}$$

$$s(t) = \ln|t|$$

$$\text{Stim} \left.\begin{array}{l} t x^{(1)} = y^{(1)} \\ t^2 x^{(2)} = y^{(2)} - y^{(1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Ec devine:}$$

$$y - y^{(1)} + y^{(2)} - y^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y - 2y^{(1)} + y^{(2)} = 0} \quad (e2)$$

$$F_1(y, y^{(1)}, y^{(2)}) = 0$$

Var 1:

Efect. schimbarea: $y^{(1)}(s) = z(y(s)) \Rightarrow y^{(2)} = z^{(1)} \cdot z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ec in (y, z) este: $\boxed{y - 2z + z^{(1)} z = 0}$. $\Rightarrow$

$$\underset{(e2)}{(s, y)} \xrightarrow[y^{(1)}(s) = z(y(s))]{} \underset{(e3)}{(y, z)}$$

$\Rightarrow$ ec. de ordinul intai in z cu variab independenta y $\Rightarrow z^{(1)} = \dfrac{-y + 2z}{z}$

$$\frac{dz}{dy} = \underbrace{-\frac{y}{z} + 2}_{f(y, z)}. \quad (e3)$$

ec. omogena.

Rezolvarea ec. omogene presupune inca o schimbare de variabile:

$$\underset{(e3)}{(y, z)} \xrightarrow[\frac{z}{y} = w]{} \underset{(e4)}{(y, w)}$$

$$\frac{z(y)}{y} = w(y)$$

Var 2

Ecuația (e_2):
$$y - 2y^{(1)} + y^{(2)} = 0$$

are soluția $y = 0$; $y(s) = 0 \Rightarrow \boxed{x(t) = 0}$

Pt $y \neq 0$, împărțim se cu $y \Rightarrow 1 - 2\frac{y^{(1)}}{y} + \frac{y^{(2)}}{y} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ facem s.v. $\frac{y^{(1)}}{y} = z$; $\frac{y^{(1)}(s)}{y(s)} = z(s)$

$$\underset{(e_2)}{(s, y)} \xrightarrow{\frac{y^{(1)}}{y} = z} \underset{(e_3)'}{(s, z)}$$

$$\begin{cases} \frac{y^{(1)}}{y} = z \\ \frac{y^{(2)}}{y} = z^2 + z^{(1)} \end{cases} \Rightarrow (e_3)': 1 - z + z^2 + z^{(1)} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{z^{(1)} = -z^2 + z - 1}$$

ec. cu var. separabile (de ordin 1)

(5) Ec. omogenă de ordin k

$$\boxed{F\left(\frac{x}{t}, x^{(1)}, t x^{(2)}, t^2 x^{(3)}, \dots, t^{k-1} x^{(k)}\right) = 0} \quad (6)$$

Prin schimbarea de variabilă $\frac{x}{t} = y$; $\left(\frac{x(t)}{t} = y(t)\right)$

$$(t, x) \xrightarrow{\frac{x}{t} = y} (t, y)$$

se obține o ecuație Euler de ordin k în t și y.

$x = ty$

$$\boxed{x^{(1)} = y + t \cdot y^{(1)}}$$

$x^{(2)} = y^{(1)} + y^{(1)} + t y^{(2)} \; \big| \cdot t \Rightarrow \boxed{t x^{(2)} = 2t y^{(1)} + t^2 y^{(2)}}$

Din (6) $\Rightarrow F\left(y, y + t y^{(1)}, 2t y^{(1)} + t^2 y^{(2)}, \dots\right) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow G\left(y, t y^{(1)}, t^2 y^{(2)}, \dots, t^k y^{(k)}\right) = 0$$

ecuație Euler de ordin k.

Problema Cauchy pt. ecuații diferențiale în $\mathbb{R}$. Teorema de existență și unicitate a soluției

Def. Spunem că pentru ecuația $\frac{dx}{dt} = f(t,x)$ (7) s-a dat o problemă Cauchy dacă se cere determinarea unei soluții a ec. (7) care să verifice cond.: $x(t_0) = x_0$, unde $(t_0, x_0) \in D$, $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Scriem (notăm) problema Cauchy:
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (8)$$

cu $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in D$.

Sau (8) se mai scrie ca tripletul (f, t_0, x_0).

Def: Spunem că $\varphi: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este soluție a prob. (8) dacă:
$$\begin{cases} \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I \\ \varphi(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (9)$$

Prop. 1 (reprezentarea integrală a soluției prob. Cauchy)

Presupunem că f este continuă în ambele variabile.

Are loc echivalența următoare:
$$\boxed{\varphi \text{ este soluție pt (8)} \Leftrightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds} \quad (10)$$

Dem: $\boxed{\Rightarrow}$ φ soluție a prob (8) $\Rightarrow$ (9) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)), \ \forall t \in I$; $\varphi(t_0) = x_0$

Avem $\varphi(t) - \underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0} = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\, ds$. $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Avem $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))\, ds$, $\forall t \in I$.

Arătăm că verifică (9).

Avem: $\varphi(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, \varphi(s))\, ds = x_0 \Rightarrow \varphi(t_0) = x_0 \Rightarrow (9)_2$ adev.

Derivăm: $\varphi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} \underbrace{f(s, \varphi(s))}_{h(s)}\, ds\right)$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} h(s)\,ds\right)} = \frac{d}{dt}\left(H(s)\Big|_{\alpha(t)}^{\beta(t)}\right) = \frac{d}{dt}\Big(H(\beta(t)) - H(\alpha(t))\Big) =$$

H este primitiva a lui h.

$$= H'(\beta(t))\cdot\beta'(t) - H'(\alpha(t))\,\alpha'(t) =$$

$$= \boxed{h(\beta(t))\,\beta'(t) - h(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)}$$

$\Rightarrow$

Avem $\alpha(t) = t_0 \Rightarrow \alpha'(t) = 0.$

$\beta(t) = t \Rightarrow \beta'(t) = 1$

$h(s) = f(s, \varphi(s))$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\int_{t_0}^{t} f(s,\varphi(s))\,ds\right) = h(t)\cdot 1 - h(t_0)\cdot 0 =$$

$$= h(t) = f(t, \varphi(t)). \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \quad \forall\, t \in I \Rightarrow (9)_1 \text{ adev.}$$

Deci: φ sol. a prob. Cauchy (8).