-1

Seria 33, EDDP, Curs 8, 23.11.2020

Sisteme liniare cu coef constanți : $x' = Ax$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (1)

Cazul $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R},\ m_j > 1}$

Forma generală a soluției corespunzătoare lui λ_j cu $m_j > 1$ este: $\varphi(t) = \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}$ (2)

unde $p_0, p_1, \dots, p_{m_j-1} \in \mathbb{R}^n$ nu sunt toți nuli.

Arătăm că $p_0 \in \ker\left((A - \lambda_j I_n)^{m_j}\right)$.

Înlocuim (2) în (1) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}\right)' = A\left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{s=\cancel{0}\,1}^{m_j-1} p_s \cdot s \cdot t^{s-1}\right) e^{\lambda_j t} + \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t} \cdot \lambda_j =$$

$$= \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} (Ap_s) t^s\right) e^{\lambda_j t} \quad \Big| : e^{\lambda_j t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{s=1}^{m_j-1} s p_s \cdot t^{s-1}}_{s = v+1} + \lambda_j \underbrace{\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s}_{s=v} = \underbrace{\sum_{s=0}^{m_j-1} (Ap_s) t^s}_{s=v} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{v=0}^{m_j-2} (v+1) p_{v+1} t^v + \lambda_j \sum_{v=0}^{m_j-2} p_v t^v + \lambda_j p_{m_j-1} t^{m_j-1} =$$

$$= \sum_{v=0}^{m_j-2} (Ap_v) t^v + Ap_{m_j-1} t^{m_j-1}$$

Identificând coeficienții $\Rightarrow$

$$\begin{cases} (v+1) p_{v+1} + \lambda_j p_v = A p_v, & v = \overline{0, m_j-2} \\ \lambda_j p_{m_j-1} = A p_{m_j-1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\nu+1) p_{\nu+1} = A p_\nu - \lambda_j p_\nu, & \nu = \overline{0, m_j - 2} \\ 0_{\mathbb{R}^n} = A p_{m_j - 1} - \lambda_j p_{m_j - 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\nu+1) p_{\nu+1} = (A - \lambda_j I_n) p_\nu, & \nu = \overline{0, m_j - 2} \\ 0_{\mathbb{R}^n} = (A - \lambda_j I_n) p_{m_j - 1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A - \lambda_j I_n) p_0 = p_1 \\ (A - \lambda_j I_n) p_1 = 2 p_2 \\ (A - \lambda_j I_n) p_2 = 3 p_3 \\ \vdots \\ (A - \lambda_j I_n) p_{m_j - 2} = (m_j - 1) p_{m_j - 1} \\ (A - \lambda_j I_n) p_{m_j - 1} = 0_{\mathbb{R}^n} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (A - \lambda_j I_n)^2 p_0 = (A - \lambda_j I_n) p_1 = 2 p_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{(A - \lambda_j I_n)^3 p_0} = (A - \lambda_j I_n)(2 p_2) = 2 (A - \lambda_j I_n) p_2 = \underline{= 2 \cdot 3 p_3} \ldots$$

$$\ldots (A - \lambda_j I_n)^{m_j - 1} p_0 = \underbrace{2 \cdot 3 \cdots (m_j - 1)}_{(m_j - 1)!} p_{m_j - 1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - \lambda_j I_n)^{m_j} p_0 = (m_j - 1)! \underbrace{(A - \lambda_j I_n) p_{m_j - 1}}_{0_{\mathbb{R}^n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A - \lambda_j I_n)^{m_j} p_0 = 0_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow p_0 \in \ker\left((A - \lambda_j I_n)^{m_j}\right)$$

Cum $\ker\left((A - \lambda_j I_n)^{m_j}\right)$ are dimensiune m_j, este suficient ca pentru sistemul fundamental de soluții să luăm pt p_0 doar elementele unei baze din $\ker\left(\left(A-\lambda_j I_n\right)^{m_j}\right)$.

Observație: Dacă A are doar o valoare proprie, adică:

$$\det(A-\lambda I_n) = (\lambda-\lambda_1)^n(-1)^n,$$

atunci

$$\ker\left(\left(A-\lambda_1 I_n\right)^n\right) = \mathbb{R}^n.$$

Mai mult: $(A-\lambda_1 I_n)^n = O_n$.

Pentru p.o., în acest caz, se poate alege baza canonică din $\mathbb{R}^n$.

Exemplu: $n=3$

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = x_1 + x_3 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I_3) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 0 + 1 - 0 - 0 + 3(1-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (4-\lambda)(1-2\lambda+\lambda^2) + 1 + 3 - 3\lambda = 0$$

$$\underline{4} \underline{-8\lambda} + 4\lambda^2 \underline{-\lambda} + 2\lambda^2 - \lambda^3 + \underline{4} \underline{-3\lambda} = 0$$

$$-\lambda^3 + 6\cdot\lambda^2 - 12\lambda + 8 = 0.$$

$$(-\lambda+2)^3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 2,\ m_1 = 3 = n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ calculăm $(A-\lambda_1 I_3)^3$

$$A - \lambda_1 I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (A-\lambda_1 I_3)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3.$$

$$(A-\lambda_1 I_3)^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \ker\left(\left(A-\lambda_1 I_3\right)^3\right) = \mathbb{R}^3.$$

Def: 1) Pt sistemul $x' = A(t)\cdot x$, $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\forall t \in I$, având soluțiile $\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\} \subset S_A$, $k \le n$, numim <u>matrice de soluții</u> o matrice X ce are pe coloane soluțiile $\varphi_1, \dots, \varphi_k$:

$$X(t) = \text{coloane}\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_k(t)\big) \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{R})$$
$$\forall t \in I.$$

Obs: Pt $k > n$, o matrice de soluții are coloanele dependente între ele pt că $\dim S_A = n$

2) Dacă $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ este sistem fundamental de soluții, atunci matricea X se numește <u>matrice fundamentală de soluții</u>.

<u>OBS</u>: Cum un sistem fundamental este baza în S_A, rezultă că matricea fundamentală de soluții asociată este inversabilă.

<u>Sisteme afine de ecuații diferențiale</u>
<u>(liniare neomogene)</u>

$$x' = A(t)x + b(t) \qquad (3)$$

unde
$$\left.\begin{array}{l} A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ b : I \to \mathbb{R}^n \end{array}\right\} \text{cu componente continue.}$$

<u>Prop. 1</u>: Dacă $\varphi_0 = (\varphi_{0,1}, \dots, \varphi_{0,n}) : I \to \mathbb{R}^n$ este soluție pt (3), atunci mulț soluțiilor pt 3 este

$$S_{A,b} = \{\varphi + \varphi_0 \mid \varphi \in S_A\}$$

unde S_A este mulț. sol. sistemului liniar (omogen) atașat sistemului (3): $\overline{x}' = A(t)\,\overline{x}$ (4)

<u>Dem</u>: În (3) se face schimbarea de variabile:

$$(t, x) \xrightarrow{x = y + \varphi_0} (t, y)$$

În (3) $\Rightarrow$ $y' + \cancel{\varphi_0'} = A(t) \cdot y + \cancel{A(t)\varphi_0} + \cancel{b(t)}$

Dar φ_0 este soluție $\Rightarrow$ $\varphi_0' = A(t)\varphi_0 + b(t)$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $y' = A(t) y$, adică (4).

Când nu cunoaștem o soluție particulară, se folosește <u>metoda variației constantelor</u>:

- pt sistemul liniar omogen atașat (4) determinăm o bază în S_A: $\underbrace{\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}}$ $\Rightarrow$ (un sistem fundam. de soluții)

$\Rightarrow$ matricea fundamentală de soluții:

$\boxed{X(t) = col(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}$ este inversabilă

și verifică: $\boxed{X'(t)} = col(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t)) =$

$= col(A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_n(t)) =$

$= A(t) \cdot col(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) = \boxed{A(t) X(t)}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{X'(t) = A(t) X(t)}$

Se obține că mulț. sol. sistemului (4) este:

$$S_A = \{ c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n \mid c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \left\{ X(t) \cdot C \;\middle|\; C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

- aplicăm metoda variației constantelor:

Determinăm $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$ ai

$\boxed{x(t) = X(t) C(t)}$ să fie sol. a sistemului (3) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $(X(t)C(t))' = A(t) \cdot X(t) C(t) + b(t)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $X'(t) C(t) + X(t) C'(t) = A(t) \cdot X(t) \cdot C(t) + b(t)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{A(t)X(t)C(t)} + X(t)C'(t) = \cancel{A(t)X(t)C(t)} + b(t)$ $/ \Rightarrow$

Înmulțim în stânga cu $(X(t))^{-1}$

$$\Rightarrow C'(t) = (X(t))^{-1} b(t) \rightarrow c_j' = h_j(t),\ j=\overline{1,n}$$

n ec.-dif de tip primitivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow c_1(t), \dots, c_n(t)$.

<u>OBS</u>: 1) Metoda cu valori și vectori proprii pt determinarea unui sistem fundamental de soluții se aplică doar pentru sisteme liniare omogene cu coef. constanți.

2) Dacă sistemul liniar omogen are $A(t)$ a.î. printr-o schimbare de variabilă să devină sistem cu coef. constanți, atunci se aplică metoda cu valori proprii, revenind apoi asupra schimbării de variabilă.

<u>Exemple</u>: a) $x' = \underbrace{\frac{1}{t}B}_{A(t)} x$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}^*$

prin schimbarea de variab $|t| = e^s$

adică, $s = \ln|t| \Rightarrow s'(t) = \frac{1}{t}$.

$x(t) = y(s(t)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x'(t) = y'(s(t)) \cdot \frac{1}{t} \Rightarrow \boxed{t x' = y'}$

Avem:

$x' = \frac{1}{t} B x \Leftrightarrow t x' = Bx \Leftrightarrow y' = By$ sist cu coef constanți

b) $x' = 5t^4 B x$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t \in \mathbb{R}$.

Schimbarea de variabilă este $t^5 = s \Leftrightarrow t = \sqrt[5]{s}$

$x(t) = y(s(t))$; $s'(t) = 5t^4$.

$\Rightarrow x'(t) = y'(s(t)) \cdot 5t^4 \Rightarrow \frac{x'}{5t^4} = y'$

Avem $x' = 5t^4 B x \Rightarrow \frac{1}{5t^4} x' = Bx \Rightarrow y' = By$.

Aplicație: Fie sistemul $\begin{cases} x_1' = 5t^4 x_2 \\ x_2' = 5t^4 x_1 \end{cases}$ (5)

a) Arătați că prin s.v. $t^5 = s$, sistemul (5) devine: $\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$ (6)

b) Determinați mulț. sol. sist. (6), apoi mulț. sol. sist. (5)

Reducerea dimensiunii unui sistem liniar omogen

$$x' = A(t)x, \quad A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad (7)$$
$$\forall t \in I.$$

Presupunem cunoscute pentru sistemul (7), m, $(m<n)$, soluții independente $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ astfel încât $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{nj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1,m}$ și în matricea:

$$X(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{n1} & & \varphi_{nm} \end{pmatrix}(t) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \quad \forall t \in I$$

avem
$$\det\left(\begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} \end{pmatrix}(t)\right) \neq 0, \forall t \in I.$$

Prop. 2: Cu datele de mai sus, considerăm matricea

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{mm} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & 1 & & \vdots \\ \varphi_{n1} & & \varphi_{nm} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

unde am completat coloanele $m+1$ până la n din X cu vectorii bazei canonice la $e_{m+1}, \dots, e_n$.
Prin schimbarea de variabilă: $x = Z(t)\,y$
se obține un sistem liniar:

$$y' = B(t)\,y \qquad (8)$$

unde $B(t)$ are coloanele de la 1 la m egale cu zero.
În concluzie, sistemul (8) se poate scrie ca sistem independent în comp $y_{m+1}, \dots, y_n$:

$$\begin{pmatrix} y'_{m+1} \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \left(B_{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{m+1,n}} \begin{pmatrix} y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (9)$$

care se rezolvă separat; după care se pot integra m ec. de tip primitivă pt $y_1, \dots, y_m$

$$y_j' = B_{j\,m+1}\,y_{m+1}(t) + \dots + B_{jn}\,y_n(t), \quad j = \overline{1,m} \qquad (10)$$

(cu $y_{m+1}, \dots, y_n$ cunoscute din (9)).

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul $\begin{cases} x_1' = 3t^2 x_2 \\ x_2' = 3t^2 x_1 \end{cases}$, $n=2$

a) Să se arate că $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} \\ e^{t^3} \end{pmatrix}$ este soluție.

b) Aplicați reducerea dimensiunii ca în prop. 3

a) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3t^2 \\ 3t^2 & 0 \end{pmatrix}}^{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $x'(t) = A(t)\,x(t)$

$\varphi_1'(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} \cdot 3t^2 \\ e^{t^3} \cdot 3t^2 \end{pmatrix}$; $A(t) \cdot \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 3t^2 \\ 3t^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{t^3} \\ e^{t^3} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 3t^2 e^{t^3} \\ 3t^2 e^{t^3} \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi_1$ sol. pt sistem.

b) $\underline{\underline{m=1}}$ $\quad \varphi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} \\ e^{t^3} \end{pmatrix}$; $\quad \varphi_{11}(t) = e^{t^3} \neq 0, \ \forall t \in \mathbb{R}$.

$$Z(t) = \begin{pmatrix} e^{t^3} & 0 \\ e^{t^3} & 1 \end{pmatrix} \ ; \quad \det Z(t) = e^{t^3} \neq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Ef. s.v: $x = Z(t)y \Rightarrow \ldots$

$$(Z(t)y)' = A(t)Z(t)y$$

$$Z'(t)y + Z(t)y' = A(t)Z(t)y$$

$$Z(t)y' = (A(t)Z(t) - Z'(t))\,y$$

$$\Rightarrow \quad y' = \underbrace{(Z(t))^{-1}\left[A(t)Z(t) - Z'(t)\right]}_{B(t)} y$$

unde $B(t) = (Z(t))^{-1}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3t^2 \\ 3t^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{t^3} & 0 \\ e^{t^3} & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} e^{t^3}\cdot 3t^2 & 0 \\ e^{t^3}\cdot 3t^2 & 0 \end{pmatrix}\right]$

$$(Z(t))^{-1} = \frac{1}{e^{t^3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -e^{t^3} & e^{t^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Bigg\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} e^{-t^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 3t^2e^{t^3} & 3t^2 \\ 3t^2e^{t^3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3t^2e^{t^3} & 0 \\ 3t^2e^{t^3} & 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-t^3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 3t^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}}_{\text{primele } m \text{ coloane zero } (m=1)} & \begin{matrix} 3t^2e^{-t^3} \\ -3t^2e^{-t^3} \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3t^2e^{-t^3} \\ 0 & -3t^2e^{-t^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_2' = -3t^2e^{-t^3}y_2 \\ y_1' = 3t^2e^{-t^3}y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

coresp. lui (1)

$\rightarrow y_2(t)$; după care integrăm $y_1' = 3t^2e^{-t^3}y_2$.