Seria 33, EDDP, Curs 9, 07.12.2020

Reducerea dimensiunii unui sistem liniar omogen

$$x' = A(t)x \ , \quad A : I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \qquad (1)$$

Se presupun cunoscute $m < n$ soluţii independente, $\varphi_1, \dots, \varphi_m$; $\varphi_j = \begin{pmatrix} \varphi_{1j} \\ \vdots \\ \varphi_{nj} \end{pmatrix}$, $j = \overline{1,m}$ a.î.:

$$\det \left(\varphi_{ij}\right)_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,m}}}(t) \neq 0, \quad \forall t \in I. \qquad (2)$$

<u>Prop. 1</u>: Cu ipotezele de mai sus considerăm matricea:

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1m} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_{m1} & \cdots & \varphi_{m,m} & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_{m+1,1} & & \varphi_{m+1,m} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n,1} & & \varphi_{n,m} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}(t)$$

$$Z(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \ \forall t \in I.$$

în care coloanele de la $m+1$ la n sunt vectorii $e_{m+1}, \dots, e_n$ ai bazei canonice din $\mathbb{R}^n$.

Prin schimbarea de variabilă $\boxed{x = Z(t)\, y}$

$$(t,x) \longrightarrow (t,y)$$

se obţine sistemul $y' = B(t)y$ (3) unde $B(t)$ are primele m coloane zero, astfel siste-
$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
mul se descompune în:

- un sistem liniar în nec. $y_{m+1}, \dots, y_n$ de ordin $m-n$
- m ecuaţii de tip primitivă pentru $y_1, \dots, y_m$, după ce înlocuim $y_{m+1}, \dots, y_n$.

Dem: Obs că $\det(Z(t)) = \det\left(\varphi_{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0$ (din φ).

$\Rightarrow x = Z(t)y$ este schimbare de variabile.

Sistemul (1) devine:

$$(Z(t)y)' = A(t)\cdot Z(t)y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z'(t)y + Z(t)y' = A(t)Z(t)y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(t)y' = [A(t)Z(t) - Z'(t)]y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \underbrace{(Z(t))^{-1}[A(t)Z(t) - Z'(t)]}_{B(t)}y$$

Avem:

$$A(t)Z(t) - Z'(t) = A(t)\,\text{coloane}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), e_{m+1}, \dots, e_n) - (\text{coloane}(\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t), e_{m+1}, \dots, e_n))' =$$

$$= \text{coloane}(A(t)\varphi_1(t), \dots, A(t)\varphi_m(t), A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n) -$$

$$- \text{coloane}(\varphi_1'(t), \dots, \varphi_m'(t), 0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}) =$$

$$= \text{coloane}(\underbrace{A(t)\varphi_1(t) - \varphi_1'(t)}_{= 0_{\mathbb{R}^n}}, \dots, \underbrace{A(t)\varphi_m(t) - \varphi_m'(t)}_{0_{\mathbb{R}^n}}, A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n)$$

pt că $\varphi_j'(t) = A(t)\varphi_j(t)$, $\forall j = \overline{1,m}$

$$\Rightarrow A(t)Z(t) - Z'(t) = (\underbrace{0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}}_{\text{de } m \text{ ori}}, A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(t) = (Z(t))^{-1}(0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}, A(t)e_{m+1}, \dots, A(t)e_n) =$$

$$= (\underbrace{0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}}_{m \text{ coloane}}, (Z(t))^{-1}A(t)e_{m+1}, \dots, (Z(t))^{-1}A(t)e_n) \Rightarrow$$

$\Rightarrow B(t)$ are primele m coloane zero $\Rightarrow$

$$\Rightarrow B(t) = (\underbrace{0_{\mathbb{R}^n}, \dots, 0_{\mathbb{R}^n}}_{m \text{ coloane}}, B_{m+1}(t), \dots, B_n(t)) \Rightarrow$$ sistemul în y este:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \\ y_{m+1}' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & 0 & B_{1,m+1}(t) & \cdots & B_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_{m,m+1}(t) & \cdots & B_{m,n}(t) \\ \hline 0 & \cdots & 0 & B_{m+1,m+1}(t) & \cdots & B_{m+1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{m \text{ coloane}} & & & B_{n,m+1}(t) & \cdots & B_{n,n}(t) \end{array}\right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left.\begin{cases} y_1' = B_{1,m+1}(t)\, y_{m+1} + \dots + B_{1n}(t)\, y_n \\ \vdots \\ y_m' = B_{m,m+1}(t)\, y_{m+1} + \dots + B_{m,n}(t)\, y_n \end{cases}\right\} (5) \\ \left.\begin{cases} y_{m+1}' = B_{m+1,m+1}(t)\, y_{m+1} + \dots + B_{m+1,n}(t)\, y_n \\ \vdots \\ y_n' = B_{n,m+1}(t)\, y_{m+1} + \dots + B_{n,n}(t)\, y_n \end{cases}\right\} (4) \end{cases}$$

(4) sistem liniar în nec. $y_{m+1}, \dots, y_n$, de dimensiune $n-m$

Rez sist. (4) $\Rightarrow y_j(t)$, $j = \overline{m+1, n}$ $\Rightarrow$ le înlocuim în (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ m ecuații de tip primitivă pt $y_1, \dots, y_m$.

<u>Exemplu</u>: Fie sistemul: $\begin{cases} x_1' = \frac{1}{t} x_2 \\ x_2' = \frac{1}{t} x_1 \end{cases}$, $t > 0$ (6)

pentru care $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$ este soluție.

Se cere soluția generală a sistemului (6) și un sistem fundamental de soluții, folosind metoda reducerii dimensiunii.

$\varphi_1 : (0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$

$\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

Sistemul (6): $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}}_{A(t)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow x' = A(t)\, x$.

Avem φ_1 soluție pt (6) $\Leftrightarrow \varphi_1'(t) = A(t)\varphi_1(t) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ adev.

Avem $n=2$
$m=1$

$$\det(\varphi_{11}(t)) = t \neq 0,\ \forall t>0.$$

$$Z(t)=\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} \quad ; \det Z(t) = t \neq 0$$

$$^{T}(Z(t)) = \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (Z(t))^{*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Z(t))^{-1} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -t & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Avem:

$$B(t) = (Z(t))^{-1}\left[A(t)Z(t) - Z'(t)\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{t} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}}_{=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Bigg] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix} \Rightarrow y' = B(t)y \text{ este:}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{t^2} \\ 0 & -\frac{1}{t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \frac{1}{t^2} y_2 \\ y_2' = -\frac{1}{t} y_2 \end{cases} \text{ ec. în } y_2$$

(sistem de dim $2-1=1$)

Din $y_2' = \left(-\frac{1}{t}\right) y_2$ ec liniară omogenă $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{y_2(t) = C_2 \cdot e^{-\ln t} = C_2 e^{\ln(t^{-1})} = C_2 t^{-1} = \frac{C_2}{t}.}$$

Pt. y_1 se obține ec: $y_1' = \frac{1}{t^2}\cdot\frac{C_2}{t}$ ec. de tip primitivă pt y_1 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow y_1 = C_2 \int t^{-3}\,dt = C_2 \frac{t^{-2}}{-2} + C_1 \Rightarrow \boxed{y_1(t) = -\frac{C_2}{2t^2} + C_1}$$

Se obține:

$$x(t) = Z(t)\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 - \frac{C_2}{2t^2} \\ \frac{C_2}{t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} tC_1 - \frac{C_2}{2t} \\ tC_1 - \frac{C_2}{2t} + \frac{2C_2}{2t} \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = C_1\overbrace{\begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}}^{\varphi_1(t)} + C_2\overbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2t} \\ \frac{1}{2t} \end{pmatrix}}^{\varphi_2(t)},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Ecuații diferențiale liniare de ordin n

Ec. diferențiale de ordin n în formă explicită:

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \quad (7)$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

t = variab. independentă

x = variab. dependentă, a cărei determinare se cere din ec. (7).

Ec (7) este liniară dacă:

$$(8) \quad f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)} + g(t).$$

unde $x = x^{(0)}$, $a_0, \dots, a_{n-1}, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Dacă $g(t) = 0$, $\forall t \in I$, atunci ec. este liniară omogenă, altfel este ec. afină (liniară neomogenă)

Pt. ec. liniară neomogenă

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k(t))\, x^{(k)} + g(t) \quad (9)$$

se poate asocia sistemul liniar:

$$y' = A(t)\, y + H(t) \quad (10)$$

unde:

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^{(1)} \\ \vdots \\ y_{n-1} = x^{(n-2)} \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} ; \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} ; \quad \begin{cases} y_1' = x^{(1)} \\ y_2' = x^{(2)} \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{(n-1)} \\ y_n' = x^{(n)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, y_{k+1} + g(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{n-1}' \\ y_n' \end{pmatrix}}_{y'} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) & a_2(t) & \dots & a_{n-2}(t) & a_{n-1}(t) \end{pmatrix}}_{A(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix}}_{y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}}_{b(t)} \quad (11)$$

<u>Cazul omogen</u>: $g(t)=0, \ \forall t \in I$.

- ec. liniară omogenă: $x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\, x^{(k)}$ (12)

- sistem liniar asociat este $y' = A(t)\, y$ (13)

Știm că mulț. sol. sist. (13) este sp. vectorial de dimensiune n.
De asemenea avem:

P 1) Dacă φ soluție a ec. (12), $\varphi : I \to \mathbb{R}$, atunci $\Psi(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$ este soluție pt (13).

Evident din modul în care am asociat sistemul.

P 2) Dacă $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$ soluție a sist. (13), atunci ψ_1 este soluție a ec. (12).

<u>Dem</u>: Ψ sol. pt (13) $\Rightarrow$ $\underline{\Psi'(t) = A(t)\,\Psi(t)}$ $\underset{\text{din (11)}}{\overset{A(t)}{\Longrightarrow}}$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} \psi_1'(t) = \psi_2(t) \\ \psi_2'(t) = \psi_3(t) \Rightarrow \psi_1^{(2)}(t) = \psi_3(t) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}'(t) = \psi_n(t) \Rightarrow \psi_1^{(n-1)}(t) = \psi_n(t) \\ \psi_n'(t) = a_0(t)\,\psi_1(t) + a_1(t)\,\psi_2(t) + \dots + a_{n-1}\,\psi_n(t) \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi_1(t) + a_1(t)\varphi_1^{(1)}(t) + \dots + a_{n-1}(t)\varphi_1^{(n-1)}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\varphi_1^{(k)} \rightarrow \varphi_1 \text{ sol. pt. ec. (12).}$$

Din P1) și P2) $\Rightarrow$ mulț. sol ec. (12) este spațiu vectorial de dim. n. $\Rightarrow$ mulț ec. (12) este generată de n soluții liniar independente care formează sistem fundamental de soluții pt (12).

<u>Algoritm de determinare a unui sistem fundamental de soluții pentru ecuații liniare de forma (12) cu coeficienți constanți:</u>

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{(k)} \qquad (14)$$

unde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$:

- se scrie ec. caracteristică:

$$r^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k$$

care se rezolvă $\Rightarrow$ j soluții distincte $r_1, \dots, r_j$ cu multiplicități $m_1, \dots, m_j$

$$r^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k r^k = (r-r_1)^{m_1} \dots (r-r_j)^{m_j}$$

- pt. fiecare sol. $\underbrace{r_k, k=\overline{1,j}}$ a ec. caracteristice se scrie m_k soluții pentru sistemul fundamental de soluții astfel:

- $\boxed{r_k \in \mathbb{R},\ m_k \geq 1}$ $\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(t) = e^{r_k t} \\ \varphi_2(t) = t \cdot e^{r_k t} \\ \vdots \\ \varphi_{m_k}(t) = t^{m_k - 1} e^{r_k t} \end{cases}$ adică,

$$\boxed{\varphi_s(t) = t^{s-1} e^{r_k t}, \ s = \overline{1, m_k}}$$

• $\boxed{r_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ m_k \geq 1}$

$r_k = a_k + i b_k,\ a_k, b_k \in \mathbb{R}$
$b_k \neq 0.$

Cum ec caract are coef reali $\Rightarrow \bar{r}_k = a_k - i b_k$ este printre sol. distincte ale ec. caract. și are același ordin de multiplicitate ca și $r_k \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m_k$ soluții în sist fundam coresp pt r_k și $\bar{r}_k$:

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi_s(t) = \mathrm{Re}\left(t^{s-1} \cdot e^{r_k t}\right) \\ \tilde{\varphi}_s(t) = \mathrm{Im}\left(t^{s-1} e^{r_k t}\right) \end{cases}, \quad s = \overline{1, m_k} \\ e^{r_k t} = e^{a_k t} \cdot e^{i b_k t} = e^{a_k t}(\cos b_k t + i \sin b_k t) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_s(t) = t^{s-1} e^{a_k t} \cos b_k t, \\ \tilde{\varphi}_s(t) = t^{s-1} e^{a_k t} \sin b_k t, \end{cases} \quad s = \overline{1, m_k}.$$

<u>Exemplu</u>: Fie ec.: $x'' = 4x' - 4x$
Se cere forma generală a soluției.

• ec. caract: $r^2 = 4r - 4r^0$

$$r^2 = 4r - 4$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r-2)^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = 2,\ m_1 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(t) = e^{2t} \\ \varphi_2(t) = t e^{2t} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\{\varphi(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\right\}}_{\text{mult. sol. ec. date}}$$

<u>Temă</u>: Scrieți tipurile de sisteme fundamentale de soluții pt. ec. diferențiale liniare de ordinul 2 și de ordinul 3 cu coef. constanți.

Pentru EXAMEN
- să nu fie 22 sau 29 ianuarie
- să nu fie sâmbătă sau duminică.