Seria 33, curs 7, EDDP, 10.11.2020

Asocierea unui sistem de ecuații diferențiale pentru o ecuație explicită de ordin n

Fie ecuația diferențială de ordin n, în formă explicită:

$$x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}) \qquad (1)$$

unde $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Notăm $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\begin{cases} y_1 = x \\ y_2 = x^{(1)} \\ y_3 = x^{(2)} \\ \vdots \\ y_{n-1} = x^{(n-2)} \\ y_n = x^{(n-1)} \end{cases} \xRightarrow{\text{derivăm}} \begin{cases} y_1' = x^{(1)} = y_2 \\ y_2' = x^{(2)} = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = x^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = x^{(n)} \underset{(1)}{=} f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Sistemul asociat ec. (1) este:

$$(2) \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases}$$

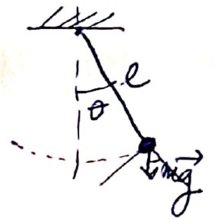
unde $g : D_1 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$g(t,y) = (g_1(t,y), \dots, g_n(t,y))$ cu $g_1(t,y) = y_2$, $\ \vdots$, $g_{n-1}(t,y) = y_n$, $g_n(t,y) = f(t,y)$

$y = (y_1, \dots, y_n)$

Exemplu: Ec. de mișcare a pendulului matematic:

$$\theta'' = \frac{g}{l} \sin \theta$$



$$\begin{cases} y_1 = \theta \\ y_2 = \theta' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1' = \theta' \\ y_2' = \theta'' \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{g}{l} \sin y_1 \end{cases}} \Big| \cdot y_1' ; \quad y = (y_1, y_2$$

$$y_2' \cdot \underbrace{y_1'}_{\overset{\shortparallel}{y_2}} = \frac{g}{l} \cdot y_1' \sin y_1 \Rightarrow y_2' \cdot y_2 = \frac{g}{l}(-\cos y_1)'$$

$$\left(\frac{y_2^2}{2}\right)' = \frac{g}{l}(-\cos y_1)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{y_2^2}{2} + \frac{g \cos y_1}{l}\right)' = 0 \Rightarrow \frac{y_2^2}{2} + \frac{g\cos y_1}{l} = \frac{C_1}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{m y_2^2}{2}}_{\shortparallel} + \underbrace{\frac{mg}{l}\cos y_1}_{\shortparallel} = \underset{\text{const.}}{C_1}$$

$$\underset{\text{(energie cinetică)}}{\frac{m(\theta')^2}{2}} + \underset{\text{energie potențială}}{\frac{mg\cos\theta}{l}} = C_1 \quad \text{(integrala primă a energiei)}$$

OBS: 1) Soluția implicită a unei ecuații poate fi considerată ca o integrală primă a ecuației.

2) Dacă un sistem de n ecuații are n integrale prime independente, atunci se poate considera că avem soluția sistemului în formă implicită.

Probleme Cauchy pentru sisteme de ecuații diferențiale

O problemă Cauchy pentru un sistem de ec. diferențiale înseamnă:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x) \\ x_1(t_0) = x_{10} \\ \vdots \\ x_n(t_0) = x_{n0} \end{cases} \qquad (3) \qquad x = (x_1, \dots, x_n)$$

unde $f : \Delta \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$

$$(t_0, \underbrace{(x_{10}, \dots, x_{n0})}_{\overset{\shortparallel}{x_0}}) \in \Delta$$

TEU a soluției prob (3).

În ipotezele:

1) $\exists\, a>0$, $\exists\, b_1, \dots, b_n > 0$ a.î.

$$\Delta_{a, b_1, \dots, b_n} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_{10} - b_1, x_{10} + b_1] \times \dots \times [x_{n0} - b_n, x_{n0} + b_n]$$

$$\Delta_{a, b_1, \dots, b_n} \subset D$$

2) f continuă în variabile (t, x) și

$$M = \sup_{(t,x) \in \Delta_{a, b_1, \dots, b_n}} \|f(t,x)\|$$

3) f este funcție Lipschitz în a doua variab:

$\exists\, L>0$ a.î. $\|f(t,x) - f(t,y)\| \le L\|x-y\|$

$$\forall (t,x), (t,y) \in \Delta_{a, b, \dots, b_n}$$

sau

3') $$\frac{Df}{Dx} = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (4)$$ are toate

componentele funcții continue și

$$L = \sup_{(t,x) \in \Delta_{a, b_1, \dots, b_n}} \left\| \frac{\Delta f}{\Delta x}(t,x) \right\|$$

avem: $\forall\, \alpha \in \left(0, \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \dots, \frac{b_n}{M}\right)\right)$,

$\exists!\, \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_{10} - b_1, x_{10} + b_1] \times$

$\times \dots \times [x_{n0} - b_n, x_{n0} + b_n]$

soluție a prob. Cauchy (3).

Dem: Asemănător cu TEU pt. prob. Cauchy pt ec. diferențiale, se consideră șirul de aproximații succesive: $(\varphi_m)_{m \ge 0} = \left(\left(\varphi_m^{(j)} \right)_{j=\overline{1,n}} \right)_{m \ge 0}$. indice NU derivată

$$(5)\begin{cases} \varphi_0 = \left(\varphi_0^{(1)}, \dots, \varphi_0^{(n)}\right) = x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0}) \\ \varphi_{k+1} = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi_k(s))\, ds = \\ = (x_{10}, \dots, x_{n0}) + \left(\int_{t_0}^{t} f_1(s, \varphi_k^{(1)}(s), \dots, \varphi_k^{(n)}(s))ds, \dots \right. \\ \left. \dots, \int_{t_0}^{t} f_n(s, \varphi_k^{(1)}(s), \dots, \varphi_k^{(n)}(s))ds \right) \\ k \geq 0. \end{cases}$$

<u>De exemplu</u>: ~~Pt~~ problema pendulului matematic:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{g}{\ell} \sin y_1 \\ y_1(0) = \theta_0 \quad (\theta_0 = \text{unghiul inițial; viteza inițială este zero}) \\ y_2(0) = 0 \end{cases}$$

<u>sau</u> $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{g}{\ell} \sin x_1 \\ x_1(0) = \theta_0 \\ x_2(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} f_1(t, x_1, x_2) = x_2 \\ f_2(t, x_1, x_2) = \frac{g}{\ell} \sin x_1 \end{cases}$ $t_0 = 0$, $x_0 = (\theta_0, 0)$

Șirul de aproximații succesive: $\varphi_m = \left(\varphi_m^{(1)}, \varphi_m^{(2)}\right)$, $m \geq 0$.

$\varphi_0(t) = x_0 = (\theta_0, 0)$, $\varphi_0^{(1)}(t) = \theta_0$, $\underline{\varphi_0^{(2)}(t) = 0}$.

$$\varphi_{m+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} \left(f_1(s, \varphi_m(s)), f_2(s, \varphi_m(s)) \right) ds \Rightarrow$$

$$\left(\varphi_{m+1}^{(1)}, \varphi_{m+1}^{(2)}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{m+1}^{(1)}(t) = \theta_0 + \int_0^t \varphi_m^{(2)}(s)\, ds \\ \varphi_{m+1}^{(2)}(t) = 0 + \int_0^t \frac{g}{\ell} \sin\left(\varphi_m^{(1)}(s)\right) ds. \end{cases} \quad m \geq 0$$

$\boxed{m=0}$ $\varphi_1^{(1)}(t) = \theta_0 + \int_0^t \varphi_0^{(2)}(s) ds = \theta_0.$

$\varphi_1^{(2)}(t) = \int_0^t \frac{g}{\ell} \sin(\varphi_0^{(1)}(s)) ds = \int_0^t \frac{g}{\ell} \sin\theta_0 ds =$

$$= \left(\frac{g}{l}\sin\theta_0\right) s\Big|_0^t \rightarrow \varphi_1^{(2)}(t) = \left(\frac{g}{l}\sin\theta_0\right) t$$

$\boxed{m=1}$ Temă! $\varphi_2^{(1)}(t)$, $\varphi_2^{(2)}(t)$.

Aplicarea metodei numerice Euler pentru sisteme de ec. diferențiale

$[t \in t_0, t_0+T]$

$$(6)\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad ; \quad \begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_n) \\ f &= (f_1, \dots, f_n) \\ f_j &= f_j(t,x) \end{aligned}$$

Metoda Euler:

$$(7)\ \begin{cases} y_0 = x_0 \in \mathbb{R}^n \\ y_{j+1} = y_j + h f(t_j; y_j) \end{cases} \quad ; \quad t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + T$$

$$\left.\begin{aligned} & (7) \\ & y_j = (y_{j1}, \dots, y_{jn}), \quad j = \overline{0, N-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{y_{j+1,k} = y_{j,k} + h f_k(t_j; y_{j1}, \dots, y_{jn}), \quad k = \overline{1,n}}$$

Pt. exemplul cu pendulul matematic avem:

$$y_0 = (y_{01}, y_{02}) = x_0 = (\theta_0, 0) \Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_{01} = \theta_0 \\ y_{02} = 0 \end{cases}}$$

$$y_{j+1} = (y_{j+1,1}, y_{j+1,2}) = y_j + h\left(f_1(t_j; y_j), f_2(t_j; y_j)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} y_{j+1,1} = y_{j,1} + h \cdot y_{j,2} \\ y_{j+1,2} = y_{j,2} + h \cdot \dfrac{g}{l} \sin y_{j,1} \end{cases} \quad , j = \overline{0, N-1}}$$

Sisteme de ecuații diferențiale liniare

$$(8)\quad \boxed{\frac{dx}{dt} = \underbrace{A(t)\,x}_{f(t,x)}}$$

unde $A : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ cu componente funcții continue.

(8) se poate scrie:

$$(9)\quad \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Avem: $f_j(t,x) = a_{j1}(t)x_1 + \dots + a_{jn}(t)x_n \quad , j=\overline{1,n}$

<u>OBS</u>: Sunt îndeplinite cond TEU pentru că:

$f: I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$f = (f_1, \dots, f_n)$

$(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ ..

2) f este continuă în ambele arg (t,x)

3) $\frac{Df}{Dx} = A(t)$ este continuă.

<u>Concluzia</u>: Pt. o problemă Cauchy pentru un sistem liniar, avem soluție unică (dacă (t_0,x_0) este convenabil ales.

<u>Propoziția 1</u>: Notam S_A = mulțimea soluțiilor ec. (8)

1) S_A este spațiul vectorial real în raport cu adunarea funcțiilor și înmulțirea funcțiilor cu scalari.

2) $\dim S_A = n$

<u>Dem</u>:

1) $S_A = \{ \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n): I \to \mathbb{R}^n \mid \varphi$ verifică (8), adică $\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) \}$

Știm că mulț funcțiilor definite pe I cu valori în $\mathbb{R}^n$ formează spațiu vectorial în raport cu adunarea funcțiilor și înmulțirea funcțiilor cu scalari. Pt. S_A este suficient să arătăm că:

i) $\forall \varphi, \psi \in S_A$ avem $\varphi + \psi \in S_A$

ii) $\forall \varphi \in S_A$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ avem $\alpha\varphi \in S_A$.

Pt i) : Fie $\varphi, \psi \in S_A \Rightarrow \begin{cases} \varphi' = A(t)\varphi \\ \psi' = A(t)\psi \end{cases}$

Calculăm $(\varphi+\psi)' = \varphi' + \psi' = A(t)\varphi + A(t)\psi =$
$= A(t)(\varphi+\psi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi + \psi \in S_A$.

Pt ii) Fie $\varphi \in S_A$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \varphi' = A(t)\varphi$.

Calculam $(\alpha\varphi)' = \alpha\varphi' = \alpha A(t)\varphi = A(t)(\alpha\varphi) \Rightarrow$
$\Rightarrow \alpha\varphi \in S_A$.

2) Fie $t_0 \in I$.

Definim $\mathcal{F}_{t_0} : S_A \to \mathbb{R}^n$; $\mathcal{F}_{t_0}(\varphi) = \varphi(t_0)$

Aratam că $\mathcal{F}_{t_0}$ este bijectivă.

• fie $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_1, \varphi_2 \in S_A$ aî $\mathcal{F}_{t_0}(\varphi_1) = \mathcal{F}_{t_0}(\varphi_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) \overset{not}{=} x_0 \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_1, \varphi_2$ sunt soluții ale prob Cauchy:

$\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

dar prob. Cauchy are sol unică $\Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$
$\Downarrow$
$\mathcal{F}_{t_0}$ inj. (10)

• fie $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Conform TEU prob Cauchy $\begin{cases} x' = A(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ are soluție unică $\varphi_0 \in S_A$ $(\varphi_0(t_0) = x_0)$

$\Rightarrow \mathcal{F}_{t_0}(\varphi_0) = \varphi_0(t_0) = x_0$. $\Rightarrow \mathcal{F}_{t_0}$ este surj (11)

Din (10) și (11) $\Rightarrow \mathcal{F}_{t_0}$ este bijectivă
Cum $\dim \mathbb{R}^n = n$
$\Rightarrow \dim S_A = n$

<u>Consecință</u>: Cf prop. 1, rezultă că există o bază $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset S_A$ care generează toate soluțiile sistemului (8), unde $\varphi_j = (\varphi_{j1}, \dots, \varphi_{jn})$, $j = \overline{1,n}$

O bază în S_A se numește <u>sistem fundamental de soluții</u>.

Determinarea unui sistem fundamental de soluții în cazul $\boxed{A(t) = A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$

(sistemelor de ec diferențiale liniare cu coeficienți constanți)

$$(12) \qquad \boxed{x' = Ax \,, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$$

Alg de determinare a unui sistem fundam. de soluții.

- Se determină valorile proprii ale matricii A, prin determinarea rădăcinilor polinomului caracteristic:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Considerăm că avem $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ valori proprii distincte cu multiplicitățile $m_1, \dots, m_k$, adică

$$p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} (-1)^n$$

$$m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$$
$$m_1 + \dots + m_k = n$$

- Pt. fiecare valoare proprie λ_j cu multiplicitatea m_j se determină m_j soluții pentru un sistem fundamental.

Avem cazurile:

i) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, \ m_j = 1}$ $\Rightarrow$ se determină $u \in \mathbb{R}^n$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^n}$ vector propriu pt λ_j, $\boxed{Au = \lambda_j u}$,

$\Rightarrow \boxed{\varphi_1(t) = e^{\lambda_j t} \cdot u}$

ii) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{R}, \ m_j > 1}$ $\Rightarrow$ se determină $p_0, p_1, \dots, p_{m_j - 1} \in \mathbb{R}^n$ nu toți nuli a.i.:

$$\boxed{\varphi(t) = \left(\sum_{s=0}^{m_j - 1} p_s t^s \right) e^{\lambda_j t}}$$

este soluție a sist (12). Se obțin m_j sistem de vectori independenți $p_0, \dots, p_{m_j-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow m_j$ soluții de tipul (13)

iii) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, m_j = 1}$ $\Rightarrow$ $\overline{\lambda_j}$ este printre cele k valori proprii distincte $\Rightarrow$

Se obțin 2 soluții în sistemul fundamental, corespunzător pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$.

Notăm $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $(i^2=-1)$ $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$, $\beta_j \neq 0$.

Determinăm $u \in \mathbb{C}^n$, $u \neq 0$, vector propriu complex corespunzător lui λ_j : $\boxed{Au = \lambda_j u}$ și avem

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1(t) &= Re\left(u \cdot e^{\lambda_j t}\right) \\ \varphi_2(t) &= Im\left(u \cdot e^{\lambda_j t}\right) \end{aligned}}$$

— coef. părții imaginare

unde $e^{\lambda_j t} = e^{\alpha_j t} \cdot e^{i\beta_j t} = e^{\alpha_j t}\left(\cos(\beta_j t) + i \sin(\beta_j t)\right) \Big/ \Rightarrow$

Dacă $u = v + iw$ cu $v, w \in \mathbb{R}^n$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\alpha_j t}\left(v\cos(\beta_j t) - w \sin(\beta_j t)\right) \\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha_j t}\left(v \sin(\beta_j t) + w \cos(\beta_j t)\right) \end{aligned}}$$

iv) $\boxed{\lambda_j \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},\ m_j > 1}$ $\Rightarrow \overline{\lambda_j}$ e.v.p. (valoare proprie) cu aceeași multiplicitate.

$\Rightarrow$ se determină $p_0, p_1, \ldots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n$ nu toți nuli a.î. $\boxed{\varphi(t) =} \left(\sum_{s=0}^{m_j-1} p_s t^s\right) e^{\lambda_j t}$ să fie soluție pt (12).

$\Rightarrow$ se obțin m_j sisteme de vectori $p_0, \ldots, p_{m_j-1} \in \mathbb{C}^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2m_j$ soluții (coresp. pt λ_j și $\overline{\lambda_j}$):

$$\begin{cases} \varphi_r(t) = Re(\varphi(t)) \\ \overline{\varphi}_r(t) = Im(\varphi(t)) \end{cases} \quad r = \overline{1, m_j}$$