Grupa 331, Seminar 11, 17.12.2020, EDDP

I) Să se determine soluția generală a ecuației:

1) $x'' - 2x' + x = 2te^t$ } $t \in \mathbb{R}$

2) $x^{(5)} + 8x^{(3)} + 16x^{(1)} = 32$

3) $t^3 x^{(3)} + t x^{(1)} - x = t^2$, $t > 0$ $\boxed{t = e^s}$

4) $(2t+3)^3 x^{(3)} + 4(2t+3)^2 x^{(2)} + 4(2t+3) x^{(1)} - 8x = 8(2t+3)^3$, $t > -\frac{3}{2}$.

5) $t^2 x^{(3)} - 2x' = 9t^2$, $t > 0$ $\mid \cdot t \Rightarrow t^3 x^{(3)} - 2t x' = 9t^3$ $\boxed{t = e^s}$

6) $t^3 x^{(2)} - 2tx = 3\ln t$, $t > 0$.
$\mid : t \Rightarrow t^2 x^{(2)} - 2x = \frac{3\ln t}{t}$ $\boxed{t = e^s}$

1) $x'' - 2x' + x = 2te^t$

- ec. liniară neomogenă cu coef. const.
- are ordinul 2 :
- de forma generală: $x^{(2)} = a_0 x + a_1 x^{(1)} + g(t)$.

$$\begin{cases} a_0, a_1 \in \mathbb{R} \ ; \ g(t) = 2te^t \\ a_0 = -1 \\ a_1 = 2. \end{cases}$$

Pt. rezolvare:

- se scrie ec. liniară omogenă atașată:

$$\bar{x}'' - 2\bar{x}' + \bar{x} = 0$$

pt. care scrie ec. caracteristică:

$$\underbrace{\lambda^2 - 2\lambda + 1}_{\text{"}0} = 0 \text{ sau } \underbrace{r^2 - 2r + 1}_{\text{"}0} = 0.$$

$$(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, \ m_1 = 2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt $\underline{r_1 = 1, m_1 = 2}$ se scriu 2 soluții în sistemul fundamental de soluții :

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = e^{r_1 t} = e^t \\ \varphi_2(t) = t e^{r_1 t} = t e^t \end{cases} \Rightarrow$$

$\rightarrow$ sistem fundamental de soluții $\{e^t, te^t\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

• se aplică metoda variației constantelor:

determinăm $C_1, C_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î. $x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t)$ să fie soluția ecuației liniare neomogene dată la început.

Știm că C_1', C_2' sunt soluțiile sistemului algebric următor:

$$\begin{cases} C_1'\varphi_1(t) + C_2'\varphi_2(t) = 0 \\ C_1'\varphi_1'(t) + C_2'\varphi_2'(t) = 2t e^t \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1' e^t + C_2'(te^t) = 0 \quad /\cdot(-1) \\ C_1'\underbrace{(e^t)'}_{} + C_2'\underbrace{(te^t)'}_{} = 2te^t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1'e^t - C_2' te^t = 0 \\ C_1'e^t + C_2'(e^t + t\cdot e^t) = 2te^t \end{cases}$$

$$C_2'(e^t) = 2te^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2' = 2t}$$

$$\Rightarrow C_2 = \int 2t\,dt \Rightarrow \boxed{C_2(t) = t^2 + k_2}$$

$$C_1' e^t + C_2' te^t = 0 \Rightarrow C_1'e^t + 2t\cdot te^t = 0. \quad /:e^t$$

$$C_1' = -2t^2$$

$$\boxed{C_1 = \int(-2t^2)\,dt = -\frac{2t^3}{3} + K_1}$$

Soluția generală a ec. afine:

$$x(t) = C_1(t)\varphi_1(t) + C_2(t)\varphi_2(t) =$$

$$= \left(-\frac{2t^3}{3} + K_1\right)e^t + (t^2 + K_2)\,te^t =$$

$$= \underbrace{K_1e^t + K_2te^t}_{\bar{x}(t)} + \underbrace{\left(-\frac{2t^3}{3}e^t + t^3e^t\right)}_{\varphi_0(t) = \frac{t^3}{3}e^t}.$$

OBS: Dacă știam de la început soluția particulară $\varphi_0(t) = \frac{t^3}{3}e^t$, atunci $x(t) = \bar{x}(t) + \varphi_0(t)$, soluția generală a ec. afine.

Nu mai este nevoie de variația constantelor.

(2) $x^{(5)} + 8x^{(3)} + 16x^{(1)} = 32$

$n = 5$

$g(t) = 32$

Căutăm o soluție de forma $\varphi_0(t) = \alpha t$ (forma a soluției rezultată din $g(t) = \text{const}$ și absența lui x)

$\varphi_0^{(1)}(t) = \alpha$

$\varphi_0^{(2)}(t) = 0 \Rightarrow \varphi_0^{(3)}(t) = 0 \Rightarrow \varphi_0^{(k)}(t) = 0, \forall k \geq 3.$

Determinăm α din cond că φ_0 verifică ecuația:

$$\varphi_0^{(5)}(t) + 8\varphi_0^{(3)}(t) + 16 \cdot \varphi_0'(t) = 32$$

$$0 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot \alpha = 32 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{\varphi_0(t) = 2t}$ soluție particulară a ec. afine date $\Rightarrow$

$$\Rightarrow x(t) = \overline{x}(t) + \varphi_0(t) = \overline{x}(t) + 2t.$$

unde $\overline{x}$ este soluția generală a ec. liniare omogene atașată:

$$\overline{x}^{(5)} + 8\overline{x}^{(3)} + 16\overline{x}^{(1)} = 0.$$

$$r^5 + 8r^3 + 16r = 0$$

$$r(r^4 + 8r^2 + 16) = 0$$

$$r(r^2+4)^2 = 0.$$

$\boxed{r_1 = 0, \; m_1 = 1} \Rightarrow \boxed{\varphi_1(t) = e^{0t} = 1}$

$(r^2+4)^2 = 0$

$r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r^2 = -4$

$r^2 = (2i)^2 \Rightarrow \begin{cases} r_2 = 2i, \; m_2 = 2 \\ r_3 = -2i = \overline{r_2}, \; m_3 = 2 \end{cases}$

Verif. pt. ordine de multiplicitate este: $m_1 + m_2 + m_3 = 5 = n$

pt $r_2 = 2i$, $m_2 = 2$ avem $r_3 = \overline{r_2}$ $\Rightarrow$ 4 soluții în sist fundam:

$\varphi_2(t) = Re(e^{2it}) = \boxed{\cos 2t}$

$$\varphi_3(t) = \operatorname{Im}\left(e^{2it}\right) = \boxed{\sin 2t}$$
$$\varphi_4(t) = \operatorname{Re}\left(t\, e^{2it}\right) = \boxed{t\cos 2t}$$
$$\varphi_5(t) = \operatorname{Im}\left(t\, e^{2it}\right) = \boxed{t\sin 2t}$$

$$e^{2it} = \cos 2t + i\sin 2t$$

Avem sistem fundam de soluții pt ec. liniară omogenă atașată: $\{1, \cos 2t, \sin 2t, t\cos 2t, t\sin 2t\}$.

$$\Rightarrow \bar{x}(t) = C_1\cdot 1 + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t + C_4 t\cos 2t + C_5 t\sin 2t$$
$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$$

Și $x(t) = 2t + C_1 + C_2\cos 2t + C_3\sin 2t + C_4 t\cos 2t + C_5 t\sin 2t$.
$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \in \mathbb{R}$.

(2) $x^{(3)} = -3x^{(2)} - 3x^{(1)} - x$
(ecuație liniară omogenă).
Se cere forma generală a soluției.

- ecuație $\overset{\text{liniară}}{\text{omogenă}}$ cu coef. constanți, pt. care scriem ec. caracteristică:

$$r^3 = -3r^2 - 3r - 1\cdot \underset{1}{\underset{\parallel}{r^0}}$$
$$\Rightarrow r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0.$$
$$(r+1)^3 = 0$$
$$\underline{r_1 = -1},\quad m_1 = 3 \ (= \underset{\substack{\parallel \\ 3}}{n})$$
3 ordinul ecuației.

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(t) = e^{-t} \\ \varphi_2(t) = te^{-t} \\ \varphi_3(t) = t^2e^{-t} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} x(t) = C_1e^{-t} + C_2te^{-t} + C_3t^2e^{-t} \\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

(4) $(2t+3)^3 x^{(3)} + 4(2t+3)^2 x^{(2)} + 4(2t+3)\, x^{(1)} - 8x = 8(2t+3)^3$

este ec. Euler generală de forma:

$$(\alpha t+\beta)^n x^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (\alpha t+\beta)^k x^{(k)} + g(t)$$

$\underline{\underline{n=3}}$; $\alpha = 2$, $\beta = 3$; $\alpha_0 = 8$; $\alpha_1 = -4$; $\alpha_2 = -4$
$g(t) = 8(2t+3)^3$; $g: \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$

$$(t,x) \xrightarrow[|2t+3|=e^s]{} (s,y)$$

$$2t+3=e^s,\quad t>-\frac{3}{2}$$

$$s=\ln(2t+3)$$

$$x(t)=y(s(t))\ ;\ s'(t)=\left(\ln(2t+3)\right)'=\frac{1}{2t+3}\cdot(2t+3)' \Rightarrow$$

$$\boxed{s'(t)=\frac{2}{2t+3}}$$

$$x'(t)=\left(y(s(t))\right)'=y'(s(t))\cdot s'(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'=y'(s)\cdot\frac{2}{2t+3}\Rightarrow \boxed{(2t+3)x'=2y'}$$

$$x''(t)=\left(y'(s)\cdot\frac{2}{2t+3}\right)'=y''(s)\cdot s'(t)\cdot\frac{2}{2t+3}+y'(s)\left(\frac{2}{2t+3}\right)'=$$

$$=y''(s)\frac{4}{(2t+3)^2}+y'(s)\frac{2\cdot(-2)}{(2t+3)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x''(t)=\frac{4}{(2t+3)^2}\left(y''(s)-y'(s)\right)\Rightarrow \boxed{(2t+3)^2x''=4(y''-y')}$$

$$x'''(t)=\left(\frac{4}{(2t+3)^2}\left(y''(s)-y'(s)\right)\right)'=$$

$$=\frac{-4\cdot 2\cancel{(2t+3)}^{1}\cdot 2}{(2t+3)^{\cancel{4}\,3}}\left(y''(s)-y'(s)\right)+\frac{4}{(2t+3)^2}\left(y'''(s)-y''(s)\right)\cdot s'(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'''(t)=\frac{-16(y''-y')}{(2t+3)^3}+\frac{8}{(2t+3)^3}\left(y'''(s)-y''(s)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2t+3)^3x'''=8(y'''-y''-2y''+2y')$$

$$\boxed{(2t+3)^3x'''=8(y'''-3y''+2y')}$$

Ec. în x, prin schimbarea de variabilă devine:

$$8(y'''-3y''+2y')+4\cdot 4(y''-y')+4\cdot 2y'-8y=8\cdot(e^s)^3 \quad /:8$$

$$y'''-3y''+\cancel{2y'}+2y''-\cancel{2y'}+y'-y=e^{3s}$$

$$\boxed{y'''-y''+y'-y=e^{3s}}$$

Căutam sol part. $\varphi_0(s) = \alpha e^{3s}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\varphi_0'(s) = \alpha \cdot e^{3s} \cdot 3 = 3\alpha e^{3s}$

$\varphi_0''(s) = 3\alpha \cdot e^{3s} \cdot 3 = 9\alpha e^{3s}$

$\varphi_0'''(s) = 9\alpha \cdot e^{3s} \cdot 3 = 27\alpha e^{3s}$

Vrem φ_0 sol a ec. în $y \Rightarrow \varphi_0'''(s) - \varphi_0''(s) + \varphi_0'(s) - \varphi_0(s) = e^{3s}$

$\Rightarrow 27\alpha e^{3s} - 9\alpha e^{3s} + 3\alpha e^{3s} - \alpha e^{3s} = e^{3s} \quad | : e^{3s}$

$27\alpha - 9\alpha + 3\alpha - \alpha = 1$

$20\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{20} \Rightarrow \boxed{\varphi_0(s) = \frac{1}{20} e^{3s}}$

Sol ec. în y:

$$y(s) = \bar{y}(s) + \varphi_0(s)$$

unde $\bar{y}(s)$ este sol. ec. liniare omogenă atașată:

$$\bar{y}''' - \bar{y}'' + \bar{y}' - \bar{y} = 0.$$

a cărei ec. caracteristică este:

$$r^3 - r^2 + r - 1 = 0.$$

$$r^2(r-1) + (r-1) = 0$$

$$(r-1)(r^2+1) = 0 \quad \begin{cases} r_1 = 1, & m_1 = 1 \\ r_2 = i, & m_2 = 1 \\ r_3 = -i, & m_3 = 1 \end{cases}$$

$r_1 = 1, m_1 = 1 \Rightarrow \boxed{\varphi_1(s) = e^{s}}$

$\left. \begin{array}{l} r_2 = i, m_2 = 1 \\ r_3 = \bar{r}_2 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} \varphi_2(s) = \mathrm{Re}(e^{is}) \\ \varphi_3(s) = \mathrm{Im}(e^{is}) \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \varphi_2(s) = \cos s \\ \varphi_3(s) = \sin s \end{array}}$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$e^{is} = \cos s + i \sin s$

Deci: $\bar{y}(s) = C_1 e^{s} + C_2 \cdot \cos s + C_3 \cdot \sin s. \Rightarrow$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \underline{y(s) = \frac{1}{20} e^{3s} + C_1 e^{s} + C_2 \cos s + C_3 \sin s}, \ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

$\Rightarrow$ soluția ec. în x dată: $x(t) = y(\ln(2t+3)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{20}(2t+3)^3 + C_1(2t+3) + C_2 \cos(\ln(2t+3)) + C_3 \sin(\ln(2t+3))}$$

$C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Temă: 3, 5, 6

Pt ex. (7) se poate completa cu: aflaţi soluţia care verifică $\begin{cases} x(-1)=1 \\ x'(-1)=2 \\ x''(-1)=0 \end{cases}$, adică aflăm const c_1, c_2, c_3 care verifică cond.

$$x(-1)=1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{20}\cdot 1 + c_1\cdot 1 + c_2 \underbrace{\cos(\underbrace{\ln 1}_{0})}_{1} + c_3 \underbrace{\sin(\underbrace{\ln 1}_{0})}_{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{c_1 + c_2 = \frac{19}{20}}$$

$$x'(t) = \frac{1}{20} 3(2t+3)^2 + c_1\cdot 2 + c_2\left(-\sin(\ln(2t+3))\cdot\frac{1\cdot 2}{2t+3}\right) + c_3\left(\cos(\ln(2t+3))\cdot\frac{1}{2t+3}\cdot 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{x'(t) = \frac{3}{20}(2t+3)^2 + 2c_1 - \frac{2c_2}{2t+3}\sin(\ln(2t+3)) + \frac{2c_3}{2t+3}\cos(\ln(2t+3))}$$

$$x'(-1)=2 \Rightarrow 2 = \frac{3}{20}\cdot 1 + 2c_1 - \frac{2c_2}{1}\cdot\sin 0 + \frac{2c_3}{1}\cdot\cos 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{2c_1 + 2c_3 = \frac{37}{20}}$. A treia ec. se deduce din $x''(-1)=0$. Calc. întâi $x''(t)$. De terminat ca temă!