Grupa 331, Seminar 7, 19.11.2020

Rezolvarea sistemelor de ecuații cu ajutorul integralelor prime:

√ ① Fie sistemul de ec. dif.:
$$\begin{cases} x_1' = \dfrac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} \\ x_2' = -\dfrac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} \end{cases} \quad (1)$$

a) Verificați dacă $F_1(t,(x_1,x_2)) = t^2 - x_1x_2$ este integrală primă pt sistemul (1). Dar $F_2(t,x) = \frac{x_1x_2}{t}$?

b) Folosind integrala primă arătați că se poate reduce dimensiunea sistemului (1).

√ ② $\begin{cases} x' = \dfrac{x^2-t}{y} \\ y' = -x \end{cases}$

a) $F(t,(x,y)) = t^2+2xy$ este integrală primă.

b) Soluția sistemului folosind integrala primă.

√ ③ $\begin{cases} x' = yz \\ y' = xz \\ z' = xy \end{cases}$

a) $F(t,(x,y,z)) = x^2-y^2$ este integrală primă

b) Reduceți dimensiunea sistemului folosind integrala primă.

Pt un sistem de ec. dif. $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t,x) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t,x) \end{cases}$, o funcție $F(t,x)$ este integrală primă $\Leftrightarrow$

$f = (f_1,\dots,f_n)$

$x = (x_1,\dots,x_n)$

$\Leftrightarrow$ (criteriu pt. integrale prime)
$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}(t,x)\cdot f_k(t,x)\right) = 0}$$

① În sistemul (1) $\Rightarrow$ $\Big[\; n=2;\ f=(f_1,f_2),\ x=(x_1,x_2)$

$f_1(t,(x_1,x_2)) = \dfrac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}$

Scanned with CamScanner

$$f_2(t,(x_1,x_2)) = -\frac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}$$

a) $F_1(t,(x_1,x_2)) = t^2 - x_1x_2$

Verificăm dacă F_1 e integrală primă, adică, dacă

$$\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t,x)\cdot f_1(t,x) + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t,x) f_2(t,x) = 0 .$$

Avem: $\frac{\partial F_1}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}(t^2 - x_1x_2) = 2t$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}(t^2 - x_1x_2) = -x_2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_2}(t^2 - x_1x_2) = -x_1$$

$$2t - x_2\cdot\frac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} + x_1\cdot\frac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} \neq 0 \Rightarrow \quad = 2t - \frac{x_1x_2\overset{-1}{\cancel{(x_1^2-x_2^2)}}}{t\cancel{(x_2^2-x_1^2)}} \neq 0$$

$\Rightarrow F_1$ nu este integrală primă pt (1)

Verificăm aceeași relație pt $F_2(t,x) = \frac{x_1x_2}{t}$, adică:

$$\frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t,x) f_1(t,x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(t,x) f_2(t,x) = 0 .$$

Avem: $\frac{\partial F_2}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = x_1x_2\left(-\frac{1}{t^2}\right) = -\frac{x_1x_2}{t^2}$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = \frac{x_2}{t}\cdot 1 = \frac{x_2}{t}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}(t,x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_1x_2}{t}\right) = \frac{x_1}{t}\cdot 1 = \frac{x_1}{t} .$$

Obținem:

$$-\frac{x_1x_2}{t^2} + \frac{x_2}{t}\cdot\frac{x_1(t^2+x_2^2)}{t(x_2^2-x_1^2)} + \frac{x_1}{t}\left(-\frac{x_2(t^2+x_1^2)}{t(x_2^2-x_1^2)}\right) =$$

$$= -\frac{x_1x_2}{t^2} + \frac{x_1x_2}{t^2\underset{1}{\cancel{(x_2^2-x_1^2)}}}\overset{1}{\cancel{(\cancel{t^2}+x_2^2-\cancel{t^2}-x_1^2)}} = -\frac{x_1x_2}{t^2} + \frac{x_1x_2}{t^2} = 0$$

$\Rightarrow F_2$ este integrală primă pt (1)

b) F_2 integrală primă $\Rightarrow F_2(t,(x_1,x_2)) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x_1x_2}{t} = c_1 \Rightarrow x_1x_2 = c_1 t \Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{c_1 t}{x_1}}$ Înlocuim x_2 în ec. $(1)_1$ din sistem

$$x_1' = \frac{x_1\left(t^2 + \frac{c_1^2 t^2}{x_1^2}\right)}{t\left(\frac{c_1^2 t^2}{x_1^2} - x_1^2\right)} \Rightarrow x_1' = x_1 \cdot t^{\cancel{2}} \cdot \frac{(x_1^2+c_1^2)}{\cancel{x_1^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} \cdot \frac{\cancel{x_1^2}}{c_1^2 t^2 - x_1^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1' = t \cdot \left(\frac{x_1(x_1^2+c_1^2)}{c_1^2 t^2 - x_1^4}\right)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{x_1 t(x_1^2+c_1^2)}{c_1^2 t^2 - x_1^4} \\ \text{răsturnăm ec.}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dt}{dx_1} = \frac{c_1^2 t^2 - x_1^4}{x_1 t(x_1^2+c_1^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx_1} = \frac{c_1^2 t^{\cancel{2}}}{x_1 \cancel{t}(x_1^2+c_1^2)} - \frac{x_1^4}{x_1(x_1^2+c_1^2)} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\frac{dt}{dx_1} = \underbrace{\frac{c_1^2}{x_1(x_1^2+c_1^2)}}_{a(x_1)} \cdot t - \underbrace{\frac{x_1^4}{x_1(x_1^2+c_1^2)}}_{b(x_1)} t^{-1} \Rightarrow \underbrace{\frac{dt}{dx_1} = a(x_1)t - b(x_1)t^{-1}}$$

ec. Bernoulli
cu $\alpha = -1$
din care se calculează

soluțiile implicite pt x_1 ⇒ sol. implicite pt x_2 folosind $\boxed{x_2 = \frac{c_1 t}{x_1}}$

(2) a) temă!

b) $t^2 - 2xy = -c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} 2xy = t^2 + c_1 \Rightarrow \boxed{x = \dfrac{t^2+c_1}{2y}} \\ \text{înlocuim în ec a 2-a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y' = -\dfrac{t^2+c_1}{2y} \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = -\underbrace{\left(\dfrac{t^2+c_1}{2}\right)}_{a(t)} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{y}}_{b(y)} \\ \text{ec. cu var separabile} \\ b(y) = 0 \text{ nu are soluții} \end{array}\right] \Rightarrow$$

⇒ separăm variabilele: $y\,dy = -\frac{1}{2}(t^2+c_1)\,dt$ ⇒

$$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3} + c_1 t\right) + \frac{1}{2}c_2 \;\Big|\cdot 2 \Rightarrow \boxed{y^2 = -\frac{t^3}{3} - c_1 t + c_2}$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

Soluția implicită a sistemului este:

$$\begin{cases} x^2 = \dfrac{(t^2+C_1)^2}{4\left(-\frac{t^3}{3} - C_1 t + C_2\right)} \\[2ex] y^2 = -\dfrac{t^3}{3} - C_1 t + C_2 \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

sau,

$$\begin{cases} x = \dfrac{t^2+C_1}{\pm 2\sqrt{-\frac{t^3}{3} - C_1 t + C_2}} \\[2ex] y = \pm\sqrt{-\frac{t^3}{3} - C_1 t + C_2} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3

a) Temă!

b) $x^2 - y^2 = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $y^2 = x^2 - C_1$ $\Rightarrow$ $y = \pm\sqrt{x^2 - C_1}$

$\Rightarrow x^2 = y^2 + C_1 \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{y^2 + C_1},\ C_1 \in \mathbb{R}}$

Asemănător cu integrala primă F, arătam că $G(t,(x,y,z)) = y^2 - z^2$ este integrală pt sistem:

$n = 3$

$f_1(t,(x,y,z)) = yz$; $f_2(t,(x,y,z)) = xz$;

$f_3(t,(x,y,z)) = xy$.

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial x}\cdot f_1(t,(x,y,z)) + \frac{\partial G}{\partial y}\cdot f_2(t,(x,y,z)) + \frac{\partial G}{\partial z} f_3(t,x,y,z) =$$

$$= 0 + 0\cdot yz + 2y\cdot xz + (-2z)\cdot xy = 2xyz - 2xyz = 0.$$

$\Rightarrow G$ integrală primă $\Rightarrow y^2 - z^2 = C_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = z^2 + C_2 \Rightarrow \boxed{y = \pm\sqrt{z^2 + C_2},\ C_2 \in \mathbb{R}}$

Înlocuind în a 3-a ec $\Rightarrow$ $z' = x\cdot\left(\pm\sqrt{z^2 + C_2}\right)$

din cele 2 int. prime $\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ y^2 - z^2 = C_2 \end{cases}$

$x^2 - z^2 = C_1 + C_2 \Rightarrow x^2 = z^2 + C_1 + C_2$

$x = \pm\sqrt{z^2 + C_1 + C_2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow z' = \left(\pm\sqrt{z^2 + C_1 + C_2}\right)\left(\pm\sqrt{z^2 + C_2}\right)$ ec. cu variab. separabile în z cu 4 cazuri posibile care se reduc la 2 independente:

1) $z' = \sqrt{(z^2 + C_1 + C_2)(z^2 + C_2)}$; 2) $z' = -\sqrt{(z^2 + C_1 + C_2)(z^2 + C_2)}$

Scanned with CamScanner

Temă: Aceleași cerințe pentru:

(4) $\begin{cases} x_1' = -\dfrac{t}{x_1} \\ x_2' = -\dfrac{t}{x_2} \end{cases}$; $F(t, x_1, x_2) = t^2 + x_1 x_2$

(5) $\begin{cases} x_1' = -\dfrac{t}{x_1} \\ x_2' = \dfrac{x_3}{x_1} \\ x_3' = -\dfrac{x_2}{x_1} \end{cases}$; $F(t, (x_1, x_2, x_3)) = x_2^2 + x_3^2$

Sisteme liniare cu coeficienți constanți

$$x' = Ax, \quad A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad x = (x_1, \dots, x_n)$$

(6) Să se determine mulțimea soluțiilor următoarelor sisteme liniare:

a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = 2x_1 + 3x_2 \end{cases}$; b) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \\ x_2' = 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1' = 5x_1 + 3x_2 \\ x_2' = -3x_1 - x_2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_2' = x_1 + 2x_3 \\ x_3' = -2x_1 + x_2 - x_3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ x_3' = -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$; f) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2 \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = x_1 + x_3 \end{cases}$

a) Întâi scriem forma matriceală a sistemului:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} ; \quad x' = Ax, \quad A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

Aflăm valorile proprii pt A, adică, rezolvăm ec $\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (3-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow (3-\lambda)^2 = 4 \Rightarrow 3 - \lambda = \pm 2$

$3 - \lambda = 2$, $\lambda_1 = 1$; $3 - \lambda = -2$, $\lambda_2 = 5$

Avem $k = 2 = n$ valori proprii diferite: $\lambda_1 = 1$ cu $m_1 = 1$; $\lambda_2 = 5$ cu $m_2 = 1$

Scanned with CamScanner

Pt $\boxed{\lambda_1 = 1, m_1 = 1}$ $\Rightarrow$ determinăm $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$: vector propriu pentru val proprie $\lambda_1 = 1$:

$$Au = \lambda_1 u \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = u_1 \\ 2u_1 + 3u_2 = u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 + 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = -u_1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot u$$

$$\boxed{\varphi_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

Pt $\boxed{\lambda_2 = 5, m_2 = 1}$ $\Rightarrow$ determinăm $u \in \mathbb{R}^2$, $u \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ aî

$$Au = \lambda_2 u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3u_1 + 2u_2 = 5u_1 \\ 2u_1 + 3u_2 = 5u_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2u_1 + 2u_2 = 0 \\ 2u_1 - 2u_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow u_2 = u_1 \Rightarrow u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\varphi_2(t) = e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Avem că: $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, conform algoritmului de determinare a sistemului fundamental de soluții, este sistem fundam de soluții $\Rightarrow$

$$\Rightarrow S_A = \{ C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 \mid C_1, C_2 \in \mathbb{R} \} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{5t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = C_1 e^{t} + C_2 e^{5t} \\ x_2(t) = -C_1 e^{t} + C_2 e^{5t} \end{cases}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Temă b, c, d, e, f + a') $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2 \\ x_2' = -x_1 + 2x_2 \end{cases}$

a'') $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_1 \end{cases}$