Question 1

Ejercicio. ecuación con funciones complejas

MOODLE

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ verificando:

$$(1-2i)\sin z = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$$

(La respuesta se ha de dar de forma exacta. Detallar la respuesta y los cálculos que llevan a ella EN UN SOLO PDF que se ha de adjuntar a esta pregunta. En el mismo PDF debe aparecer tanto el nombre y apellidos del alumno/a así como un documento de identidad.)

Aplicando la definición, expresamos la función trigonométrica compleja en función de exponenciales complejas:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Sustituyendo en la equación original, obtenemos

$$(1-2i)\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$$

Operando, obtenemos la siguiente igualdad

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= \frac{(-\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i)2i}{1-2i} \\ &= \frac{(-\frac{20}{3} - \frac{10}{3}i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{-\frac{50}{3}i}{5} \\ &= -\frac{10}{3}i \end{aligned}$$

Por lo que

$$e^{iz} - e^{-iz} - (-\frac{10}{3}i) = 0$$

Multiplicando todo por e^{iz}, nos queda:

$$e^{2iz} + \frac{10}{3}ie^{-iz} - 1 = 0$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $w = e^{iz}$, lo anterior es equivalente a obtener las soluciones del polinomio de grado 2:

$$w^2 + \frac{10}{3}iw - 1 = 0$$

Las raíces son:

$$w = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \sqrt{(-\frac{10}{3}i)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \sqrt{-\frac{64}{9}}}{2} = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \frac{8}{3}i}{2} = -\frac{5}{3}i \pm \frac{4}{3}i$$

Ahora, para cada raíz

$$w_1 = -\frac{1}{3}i \qquad\qquad y \qquad\qquad w_2 = -3i$$

debemos resolver la correspondiente ecuación $e^{iz} = w_j$, para deshacer el cambio de variables en cada caso y obtener todas las familias de soluciones.

-$\underline{e^{iz} = w_1}$: como $-\frac{1}{3}i = (\frac{1}{3})e^{-\frac{\pi}{2}i}$, tomando logaritmos, obtenemos:

$$iz = \ln\frac{1}{3} + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\Longrightarrow z = -i\ln\frac{1}{3} + (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) \Longrightarrow \boxed{z = i\ln 3 + (\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

- $\underline{e^{iz} = w_2}$: análogamente $-3i = (3)e^{-\frac{\pi}{2}i}$. Tomando logaritmos de nuevo:

$$iz = \ln 3 + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$$

$$\Longrightarrow z = -i\ln 3 + (-\frac{\pi}{2} + 2\pi k) \Longrightarrow \boxed{z = i\ln\tfrac{1}{3} + (-\tfrac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$