Ejercicio de desarrollo: ecuación con funciones complejas.

Moodle

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ verificando:

$$(1-2i)\,\mathrm{sen}(z) = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$$

(La respuesta se ha de dar de forma exacta. Detallar la respuesta y los cálculos que llevan a ella EN UN SOLO PDF que se ha de adjuntar a esta pregunta. En el mismo PDF debe aparecer tanto el nombre y apellidos del alumno/a así como un documento de identidad.)

Solución. Aplicando la definición, expresamos la función trigonométrica compleja en función de exponenciales complejas:

$$\mathrm{sen}\,(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos

$$(1-2i)\,\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i$$

Operando, obtenemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} e^{iz} - e^{-iz} &= \frac{\left(-\frac{5}{3} + \frac{10}{3}i\right)2i}{1-2i} \\ &= \frac{\left(-\frac{20}{3} - \frac{10}{3}i\right)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\ &= \frac{-\frac{50}{3}i}{5} \\ &= -\frac{10}{3}i. \end{aligned}$$

Por lo que:

$$e^{iz} - e^{-iz} - \left(-\frac{10}{3}i\right) = 0.$$

Multiplicando todo por e^{iz}, nos queda:

$$e^{2iz} + \frac{10}{3}ie^{iz} - 1 = 0.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $w = e^{iz}$, lo anterior es equivalente a obtener las soluciones del polinomio de grado 2:

$$w^2 + \frac{10}{3}iw - 1 = 0.$$

Las raíces son:

$$w = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \sqrt{\left(-\frac{10}{3}i\right)^2 - 4\,(-1)}}{2} = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \sqrt{-\frac{64}{9}}}{2} = \frac{-\frac{10}{3}i \pm \frac{8i}{3}}{2} = -\frac{5}{3}i \pm \frac{4}{3}i.$$

Ahora, para cada raíz

$$w_1 = -\frac{1}{3}i \quad \text{y} \quad w_2 = -3i.$$

debemos resolver la correspondiente ecuación $e^{iz} = w_i$ para deshacer el cambio de variables en cada caso y obtener todas las familias de soluciones.

- $\underline{e^{iz} = w_1}$: como $-\frac{1}{3}i = \left(\frac{1}{3}\right) e^{-\frac{\pi}{2}i}$, tomando logaritmos, obtenemos:

$$iz = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\Longrightarrow z = -i\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Longrightarrow \boxed{z = i\ln(3) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}} \checkmark$$

- $\underline{e^{iz} = w_2}$: análogamente $-3i = (3)\,e^{-\frac{\pi}{2}i}$. Tomando logaritmos de nuevo:

$$iz = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\Longrightarrow z = -i\ln(3) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Longrightarrow \boxed{z = i\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}} \checkmark$$