È Ejercicio de desarrollo: ecuación con funciones complejas.

MOODLE

Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ verificando:

$$(-1+2i)\cos(z) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3}i$$

(La respuesta se ha de dar de forma exacta. Detallar la respuesta y los cálculos que llevan a ella EN UN SOLO PDF que se ha de adjuntar a esta pregunta. En el mismo PDF debe aparecer tanto el nombre y apellidos del alumno/a así como un documento de identidad.)

ℰ Solución. Aplicando la definición, expresamos la función trigonométrica compleja en función de exponenciales complejas:

$$\cos\left(z\right) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Sustituyendo en la ecuación original, obtenemos

$$(-1+2i)\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}i$$

Operando, obtenemos la siguiente igualdad:

$$e^{iz} + e^{-iz} = \frac{\left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}i\right)2}{-1 + 2i}$$

$$= \frac{\left(\frac{16}{3} + \frac{8}{3}i\right)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)}$$

$$= \frac{-\frac{40}{3}i}{5}$$

$$= -\frac{8}{3}i.$$

Por lo que:

$$e^{iz} + e^{-iz} - \left(-\frac{8}{3}i\right) = 0.$$

Multiplicando todo por e^{iz} , nos queda:

$$e^{2iz} + \frac{8}{3}ie^{iz} + 1 = 0.$$

Ahora, haciendo el cambio de variable $w=e^{iz}$, lo anterior es equivalente a obtener las soluciones del polinomio de grado 2:

$$w^2 + \frac{8}{3}iw + 1 = 0.$$

Las raíces son:

$$w = \frac{-\frac{8}{3}i \pm \sqrt{\left(-\frac{8}{3}i\right)^2 - 4\left(1\right)}}{2} = \frac{-\frac{8}{3}i \pm \sqrt{-\frac{100}{9}}}{2} = \frac{-\frac{8}{3}i \pm \frac{10i}{3}}{2} = -\frac{4}{3}i \pm \frac{5}{3}i.$$

Ahora, para cada raíz

$$w_1 = \frac{1}{3}i$$
 y $w_2 = -3i$.

debemos resolver la correspondiente ecuación $e^{iz} = w_i$ para deshacer el cambio de variables en cada caso y obtener todas las familias de soluciones.

• $e^{iz} = w_1$: como $\frac{1}{3}i = (\frac{1}{3})e^{\frac{\pi}{2}i}$, tomando logaritmos, obtenemos:

$$iz = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\implies z = -i\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \implies \boxed{z = i\ln(3) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$

• $e^{iz} = w_2$: análogamente $-3i = (3) e^{-\frac{\pi}{2}i}$. Tomando logaritmos de nuevo:

$$iz = \ln(3) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

$$\Longrightarrow z = -i\ln(3) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \Longrightarrow \boxed{z = i\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}}$$