

Аналитическая геометрия

1. Найти угол между касательными к $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ и $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{3} = 1$ в точках их пересечения, имеющие положительные координаты.
2. Составить уравнение всех общих касательных к $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$ и $y^2 = 4x$.
3. Найти плоскость, проходящую через точку $M(-7; 4; -3)$ и прямую $\begin{cases} x + 2y - 2z = 9 \\ x - 2y - 2z = -3 \end{cases}$.
4. В каких точках касательная к $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{32} = 1$ перпендикулярна $x - 4y + 3 = 0$
5. Составить уравнение плоскости параллельной $3x + 6y + 4z - 1 = 0$ и на расстоянии 2 от т. $M(1; 1; 1)$.
6. Найти расстояние между прямыми $\frac{x+5}{6} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-2}{2}$ и $\frac{x-2}{3} = 5 - y = \frac{z-8}{4}$.
7. Прямая l проходит через $M_0(\bar{r}_0)$ и параллельна прямой $\begin{cases} (\bar{r}; \bar{n}_1) = D_1 \\ (\bar{r}; \bar{n}_2) = D_2 \end{cases}$, найти радиус-вектор точки пересечения l и плоскости $(\bar{r} - \bar{r}_1; \bar{n}) = 0$.
8. Найти плоскость проходящую через $\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + 3y - z + 2 = 0 \end{cases}$ и равноотстоящую от т. $M(0; 0; 1)$ и т. $N(0, 0, 2)$.
9. Найти на гиперболе $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ точку, для которой расстояние от левого фокуса вдвое больше, чем от правого.
10. Найти аффинное преобразование, переводящее точку $(0; 0)$ в $(0; 1)$, $(0; 1)$ в $(1; 1)$, $(1; 1)$ в $(0; 0)$. Найти неподвижную точку.
11. Найти угол между прямолинейными образующими поверхности $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающимися в точке $Q(2, 0, 1)$.
12. В каких точках касательные $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{32} = 1$ перпендикулярны к $x - 4y + 3 = 0$.
13. Найти уравнение круглого цилиндра, описанного около двух сфер.

$$(x + 2)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2 = 25$$

$$(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = 25$$

14. Найти:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

15. т. $A(1; 2; -3)$, т. $B(3, 2, 1)$, т. $C(6, 4, 4)$ - вершины параллелограмма. Найти координаты четвертой вершины этого параллелограмма и его площадь.
16. Найти параметр a , при котором координаты x, y, z некоторой точки в первой общей декартовой системе координат выражаются через ее координаты x', y', z' во второй системе формулами:

$$\begin{cases} x = x' + az' - 2 \\ y = y' + 3z' + 1 \\ z = 2x' + a^2y' + 3 \end{cases}$$

17. В общей декартовой системе координат найти уравнения прямолинейных образующих поверхности $2z + x^2 = 9y^2$, пересекающихся в точке $(1, -1, 4)$.
18. Найти аффинное преобразование, переводящее прямые $x + 2y + 1 = 0$ и $2x + y - 1 = 0$ самих в себя и точку $(1; 1)$ в $(0; 0)$.

19. Найти поверхность, образованную вращением кривой

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

вокруг оси Ox .

20. Решите неравенство

$$\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -x-1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} > 8.$$

21. На эллипсе $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ найти точку P , наиболее удаленную от прямой $2x - 3y - 1 = 0$. Вычислить расстояние от точки P до этой прямой.

22. Вершины гиперболы находятся в фокусах эллипса $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$, а фокусы - в вершинах данного эллипса. Найдите величину угла между касательными к эллипсу и гиперболе в их общих точках.

23. Даны точки $A(1; 0; 2)$, $B(2; 1; 0)$, $C(0; -2; 1)$, $D(1; 2; 0)$. Составить уравнение плоскости, делящей пополам двугранный угол между гранями ABC и ABD .

24. Дано аффинное преобразование $f : \begin{cases} x^* = 4x - 3y + 1; \\ y^* = 3x + 4y + 5. \end{cases}$ Найдите прямую, проходящую через точку $M(1; 4)$, образ которой также проходит через точку M .

25. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку $M(6; -3; 4)$ и пересекающей поверхность $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 2z$ по прямолинейным образующим.

26. (**необязательная**) Даны точки $A(-1; 0)$, $B(2; 0)$. Определите уравнение траектории точки M , которая движется по плоскости так, что в треугольнике AMB угол B остается вдвое больше угла A .

27. Найдите сумму расстояний от точки $M(4; 1)$ до фокусов линии, заданной в ортонормированной системе координат следующим уравнением: $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$.

28. В прямоугольной системе координат даны точки $A(1; 1; -1)$, $B(2; 3; 1)$, $C(3; 2; 1)$. Найдите уравнение медианы и биссектрисы, проведенных из вершины A треугольника ABC .

29. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{1}$ и удалена от плоскости $x + y + z + 3 = 0$ на расстояние $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A .

30. Даны точки $E(3; 5; 3)$, $F(-3; 2; 8)$, $G(-3; -2; 6)$, $H(7; 8; 2)$. Найдите:

(а) объем пирамиды $EFGH$;

(б) расстояние между прямыми (EG) и (FH) .

31. (**с помощью линейных преобразований строк**) Обратите матрицу

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

32. Основание пирамиды - $SABCD$ ромб с углом $A = 60^\circ$, боковые грани пирамиды образуют равные углы с плоскостью основания. Рассматриваются две системы координат: старая $(A, \overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AS})$ и новая $(O, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OS})$, где O - точка пересечения диагоналей ромба. Найдите формулы замены координат.

33. Составить уравнения прямых в плоскости, равноудаленных от всех точек $K(2; 1)$, $L(-2; 3)$, $M(1; -2)$ (система координат общая декартова).

34. (**вспомните определитель Вондермонда**) Какая линия задается уравнением

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x+2y & 2x-y^2 & xy \\ (x+2y)^2 & (2x-y^2)^2 & x^2y^2 \end{vmatrix} = 0?$$

35. Найдите точку M' , симметричную точке $M(2; -1; 1)$ относительно плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$.
36. Сторона треугольника лежит на прямой $x - 2y + 7 = 0$, медианы лежат на прямых $x + y - 5 = 0$ и $2x + y - 11 = 0$. Составьте уравнения двух других сторон треугольника.
37. Около эллипса описан параллелограмм. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания противоположных сторон параллелограмма, разбивают эллипс на части одинаковой площади.
38. Аффинное преобразование $f : \begin{cases} x^* = 5x - 5; \\ y^* = 4x + 3y + 3; \end{cases}$ представьте как произведение ортогонального преобразования и сжатий к двум взаимно перпендикулярным прямым.
39. Составьте уравнение поверхности, образованной вращением прямой $\begin{cases} x = 1 + 2t; \\ y = 2 + t; \\ z = t; \end{cases}$ вокруг прямой $\begin{cases} x = 2 - t; \\ y = 3 + t; \\ z = 2t. \end{cases}$
40. **(вспомните аффинные преобразования)** Найдите площадь множества точек заданных системой:
- $$\begin{cases} (3x + y + 1)^2 + (7x - 4y + 3)^2 \leq 1, \\ 10x - 3y + 3 \leq 0. \end{cases}$$
41. **(вспомните аффинные преобразования)** Какая линия задается уравнением $(3x + 4y - 1)^2 + (4y + 3x + 2)^2 = 9$?