RIPASSO

- L'INFO DI UN SEGNALE È CONTENUTA NELLA SUA FORMA
- SEGNALE $f(t) \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$ ⇝ ANALOGICO, $t \in \mathbb{R}$ -> NON DISCRETIZZATO
- TRASDUTTORE: GRANDEZZA SCALARE ↦ SEGNALE ELETTRICO

01
- **SEGNALI COMPLESSI**:

$$f(t) = f_R(t) + j f_i(t) = \overbrace{|f(t)|}^{\text{MODULO}} e^{j \overbrace{\angle f(t)}^{\text{FASE}}} = |f(t)| \left(\cos(\angle f(t)) + j \sin(\angle f(t)) \right)$$

con $|f(t)| = \sqrt{f_R^2(t) + f_i^2(t)}$, $\angle f(t) = \operatorname{arctg} \dfrac{f_i(t)}{f_R(t)}$

- SUPPORTO DI UN SEGNALE: INTERV. DI t AL CUI ESTERNO IL SEGNALE $= 0$

- **POTENZA**:
  - ISTANTANEA: $P_{ist}(t) = |x(t)|^2$ — MEDIA TEMPORALE DI $P_{IST.}$
  - MEDIA: $P_M(x) = \lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int_{-a}^{a} |x(t)|^2 \, dt = \lim\limits_{a \to \infty} \dfrac{1}{2a} \int_{-a}^{a} P_{ist}(t) \, dt$

    ↳ $\dfrac{\text{AREA}}{\text{DIM. SUPPORTO}}$

- **ENERGIA**:

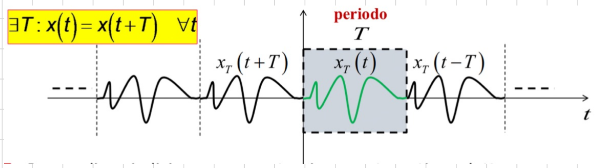
$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} P_{ist}(t) \, dt \quad \left(\leadsto P_{ist}(t) = \frac{dE(t)}{d(t)} \right)$$

- SE $E(x)$ FINITA -> $E(x) = \text{COST.}$ -> $P_{MEDIA} = 0$

- **SEGNALE PERIODICO**:

$$\exists T \,/\, x(t) = x(t+T) \quad \forall t$$

$$\to x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT)$$



- $E(x) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} E(x_T) \mapsto +\infty$ ⇝ $E(x) \geq 0$ SEMPRE
- $P_M(x) = \dfrac{1}{T} E(x_T)$ ⇝ SOLITAMENTE È UN NUMERO FINITO

- **RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE**: ⇝ GUARDA SLIDES

-> ALCUNI CONCETTI DI GEOMETRIA POSSONO ESSERE APPLICATI AI SEGNALI, SE VISTI COME VETTORI

- DISTANZA:

$$d(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)| \, dt \quad \vee \quad \overbrace{d(x,y) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t) - y(t)|^2 \, dt}}^{\text{DIST. EUCLIDEA}}$$

- $d(x,y) = \|x - y\| \,/\, \|x\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$

• PRODOTTO SCALARE TRA SEGNALI: $\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, y^*(t)\, dt$

• NORMA: $\| x(t) \| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt} = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$

	Definizione	Segnale	Vettore
Prodotto scalare	$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i^*$
Energia	$E(\mathbf{x}) \triangleq \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$	$\int \lvert x(t) \rvert^2 dt$	$\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^2$
Norma	$\lVert \mathbf{x} \rVert \triangleq \sqrt{E(x)} = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle}$	$\sqrt{\int \lvert x(t) \rvert^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i \rvert^2}$
Distanza	$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \triangleq \lVert \mathbf{x} - \mathbf{y} \rVert$	$\sqrt{\int \lvert x(t) - y(t) \rvert^2 dt}$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^2}$

• $E(x) = \| x \|^2$

• SE $\langle x, y \rangle = 0$ -> SEGNALI ORTOGONALI

• ANGOLO TRA I SEGNALI: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| = \| \vec{x} \| \, \| \vec{y} \| \cos\theta$

~> ∈ BASE ORTONORMALE: $\| \vec{w} \| = 1 \wedge \langle w_i, w_j \rangle = 0, \ \forall i,j$

• $x(t) = \sum_{i=1}^{M} \alpha_i w_i(t)$, $\alpha_i = \langle x(t), w_i(t) \rangle$

↳ $\vec{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M) \to x(t) = \sum_{i=1}^{m} x_i^{(w)} w_i(t) \Longleftrightarrow \vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$

↳ $\forall x(t)$ -> POSSO ASSOCIARE UN $\vec{x}$

-> • ENERGIA: $E(x) = \langle x(t), x(t) \rangle = E(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} |x_i|^2$

$$E(\vec{x} + \vec{y}) = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2 + 2\,\mathrm{Re}[\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle] \rightsquigarrow E(x+y) = E(x) + E(y) \Longleftrightarrow x \perp y$$

• DISUGUAGLIANZA DI SCHWARZ: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|^2 \le \| \vec{x} \|^2 \, \| \vec{y} \|^2 \quad (= \Longleftrightarrow \vec{x} = \alpha \vec{y})$

• APPROSSIMAZIONE DI UN SEGNALE:

MIGLIOR APPROSSIMAZIONE DI $\vec{x}$: $\hat{\vec{x}}$

SE CERCO L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORE: $(\alpha_i) = \arg\left(\min\left(\| \vec{x} - \hat{\vec{x}} \|^2\right)\right)$ ~> FACCIO IN MODO DA MINIMIZZARE LA DIFF. TRA IL SEGNALE E LA SUA APPROSS. MIGLIORE

-> SI PUÒ DIMOSTRARE CHE: $\alpha_i = \langle x, w_i \rangle \to \hat{\vec{x}} = \sum_{i=1}^{m} \langle \vec{x}, \vec{w}_i \rangle \vec{w}_i$

• SE CONSIDERO $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$\to \vec{e} \perp \hat{\vec{x}}$, $d^2_{(x,y)} = E(\vec{x}) - E(\hat{\vec{x}}) = E(e)$

• PROPRIETÀ:

~> QUANDO È L'APPROSSIMAZIONE MIGLIORE

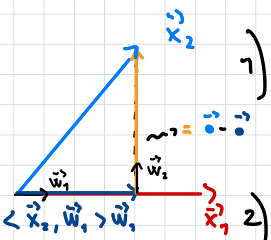
UGUAGLIANZA DI PARSEVAL: $\vec{x} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{w}_i \to E(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2$

DISUGUAGLIANZA DI BESSEL: $E(\vec{x}) \ge \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} |\langle \vec{x}, \vec{w}_i \rangle|^2$ IN GENERALE

• PROCEDURA DI GRAM-SCHMIDT

-> SERVE PER SCEGLIERE LA BASE MIGLIORE, CIOÈ IL MINIMO DI FUNZIONI NELLA BASE $\vec{w}$

DATA L'INSIEME DI VETTORI $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ ~> IN GENERALE: $M \le N$ / M VETTORI $\hat{\vec{w}}_i$, N VETTORI $\vec{x}_i$



1) CONSIDERO IL 1° VETTORE COME PRIMO ELEMENTO DELLA BASE E LO NORMALIZZO

$\hat{\vec{w}}_1 = \vec{x}_1 \to \vec{w}_1 = \dfrac{\hat{\vec{w}}_1}{\| \hat{\vec{w}}_1 \|}$, $\vec{w}_1$: 1° VERSORE DELLA BASE ORTONORMALE

2) CALCOLO 2° VETTORE E LO NORMALIZZO: $\hat{\vec{w}}_2 = x_2 - \langle \vec{x}_2, \vec{w}_1 \rangle \vec{w}_1$, $\vec{w}_2 = \dfrac{\hat{\vec{w}}_2}{\| \hat{\vec{w}}_2 \|}$

⋮

j) $\hat{\vec{w}}_i = x_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle \vec{x}_i, \vec{w}_k \rangle \vec{w}_k$, $\vec{w}_i = \dfrac{\hat{\vec{w}}_i}{\| \hat{\vec{w}}_i \|}$ ~> PROCEDO FINO A CHE $\hat{\vec{w}}_i = 0$

02

• FUNZIONE PORTA: $P_{\Delta t}(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left[-\frac{\Delta t}{2}, \frac{\Delta t}{2}\right] \\ 0, & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$ ~> SE NORMALIZZATA: $P_{\Delta t}(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}}$

↳ $E(x) = 1$

~> MIGLIORE TANTO PIÙ Δt PICCOLO

• APPROSSIMAZIONE TRAMITE $P_{\Delta t}(t)$: $x(t) \sim x'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n\Delta t) \cdot P_{\Delta t}(t - n\Delta t)$

• DELTA DI DIRAC: $\delta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P_{\Delta t}(t)$

• $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$

• PROPRIETÀ:

• $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\, d\tau = 1$

• $\sin(z) = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j}$, $\cos(z) = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2}$

• $E(\delta(t)) = +\infty$

• DA RICORDARSI:

• $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$ -> $x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$

• DAL P. DI CONVOLUZIONE: $x(t) * \delta(t - t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - t_0 - \tau)\, d\tau = x(t - t_0)$

↳ IL P. DI CONV. CON LA δ RESTITUISCE IL SEGNALE DI PARTENZA

• SE $x(t) = \begin{cases} a, & x < t_0 \\ b, & x > t_0 \end{cases}$ -> $\frac{d}{dt}x(t) = (b - a)\delta(t - t_0)$

• SERIE DI FOURIER:

RAPPRES. POSSIBILE $\forall$ SEGNALE CON $E(x) = \text{cost.}$, IN $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$

~> $f_n = \frac{n}{T}$: f DEL SEGNALE

• BASE PER QUESTI SEGNALI: $w_n(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \frac{1}{\sqrt{T}}\left(\cos\left(2\pi\frac{n}{T}t\right) + j\sin\left(2\pi\frac{n}{T}t\right)\right)$

COEFFICIENTI DELLA BASE

-> $x(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j\frac{2\pi}{T}nt}$

$C_n = \langle x(t), w_n(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t) e^{-j\frac{2\pi}{T}nt}\, dt$

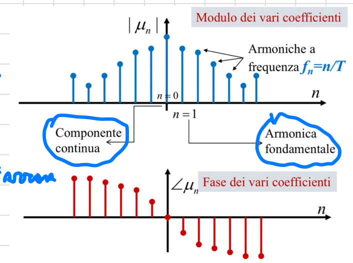
$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{T}} C_n$

~> E SU 1 PERIODO

• $E_T(x) = T \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n|^2$ $\quad$ (-> $E(x) \mapsto \infty$)

• $P(x) = \frac{E_T(x)}{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\mu_n|^2$

↳ $|\mu_n|$ CI DICE QUANTO È "FORTE" L'ARMONICA CON $f = f_n$



• TRASFORMATA DI FOURIER:

SE UN SEGNALE NON PERIODICO -> CONSIDERO $T \mapsto \infty$

• $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(\theta) e^{-j2\pi\frac{n}{T}\theta}\, d\theta}_{\mu_n} \right] e^{j2\pi\frac{n}{T}t} \xrightarrow[T \mapsto \infty]{\text{SE}} x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[df \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta}\, d\theta \right] e^{j2\pi ft}$

$\frac{1}{T} \mapsto df$

$\frac{n}{T} \mapsto f$

$\sum \mapsto \int$

-> $\mathcal{F}[x(t)] = X(f) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(\theta) e^{-j2\pi f\theta}\, d\theta$

• $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f)$

• $X(f) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} x(t)$

- ANTITRASFORMATA: $\mathcal{F}^{-1}\left[X(f)\right] = x(t) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df$

03 - PROPRIETÀ DI $\mathcal{F}[x(t)]$:

  - LINEARITÀ: $\mathcal{F}\left[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\right] = a_1 \mathcal{F}\left[x_1(t)\right] + a_2 \mathcal{F}\left[x_2(t)\right]$
  - TRASLAZIONE (ANTICIPO e RITARDO): $\mathcal{F}\left[x(t-\theta)\right] = e^{-j2\pi\theta f}\,\mathcal{F}\left[x(t)\right]$ → NON CAMBIA IL MODULO DELLA TRASFORMATA
    CAMBIA L'ARGOMENTO
  - MODULAZIONE: $\mathcal{F}\left[e^{-j2\pi f_0 t}\, x(t)\right] = \mathcal{F}\left[x(t)\right](f-f_0) = X(f-f_0)$
  - SCALAMENTO: $\mathcal{F}\left[x(kt)\right] = \frac{1}{|k|}\,\mathcal{F}\left[x(t)\right]\left(\frac{f}{k}\right) = \frac{1}{|k|}\, X\left(\frac{f}{k}\right)$
  - CONVOLUZIONE: $x(t) * y(t) \overset{\mathcal{F}}{\underset{\mathcal{F}^{-1}}{\Longleftrightarrow}} X(f)\, Y(f)$
  - DERIVAZIONE: $\frac{d^n}{dt^n} x(t) = (j2\pi f)^n X(f)$
  - INTEGRAZIONE: $\int_{-\infty}^{t} x(r)\, dr = \frac{1}{2} X(0)\, \delta(f) + \frac{X(f)}{j2\pi f}$
  - DUALITÀ: $\mathcal{F}\left[\mathcal{F}\left[x(t)\right]\right] = x(-t)$, $\mathcal{F}[\overset{\text{→ trasf. }\mathcal{F}}{X(t)}] = x(-f)$ → $X(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(-f)$
  - SIMMETRIA: SE $x(t) \in \mathbb{R}$ → $\mathcal{F}[x(t)]$ HA $\mathrm{Re}\left[X(f)\right]$ PARI, $\mathrm{Im}\left[X(f)\right]$ DISPARI
    HA $|X(f)|$ PARI, $\angle X(f)$ DISPARI

→ LA TRASF. DI FOURIER PUÒ ESSERE INTERPRETATA COME SVILUPPO SU BASE ORTONORMALE $w_f(t) = e^{-j2\pi f t}$, CON COEFFICIENTI $x(t)$ (ANALOG. $\mathcal{F}^{-1}$)

→
  - UG. DI PARSEVAL: $E(x) = \int |x(t)|^2 dt = \int |X(f)|^2 df$
  - $\langle x(t), y(t)\rangle = \langle X(f), Y(f)\rangle$
  - DISUG. DI SCHWARZ: $|\langle X(f), Y(f)\rangle| \le \|X(f)\| \cdot \|Y(f)\|$

DIM: $x(t) = x_i(t)\, p_T(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} x_i(f) * \mathrm{sinc}(\,)$ / sinc supp ∞

- $x(t)$ supp FINITO → $X(f)$ supp ∞, $x(t)$ supp ∞ → $X(f)$ supp FINITO
  ↳ SEGNALI "CONCENTRATI" IN t, TENDONO AD AVERE SPETTRO DI f "LARGO", E VICEVERSA

- ESTENSIONE TEMPORALE:
$$d^2 = \int t^2 \frac{|x(t)|^2}{E(x)}\, dt$$
→ $d \cdot D \ge \frac{1}{2}$

- ESTENSIONE IN FREQUENZA:
$$D^2 = 4\pi^2 \int f^2 \frac{|X(f)|^2}{E(x)}\, df$$

04 • SISTEMI LINEARI :

• $y(t) = T[x(t)]$ ~> trasformazione del segnale di ingresso $x(t) \mapsto T \mapsto y(t)$

• PROPRIETÀ : ~> dei SL

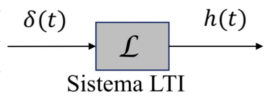
• LINEARITÀ (principio di sovr. degli effetti): $T[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = a_1 T[x_1(t)] + a_2 T[x_2(t)]$

• SISTEMI LTI (lineari tempo invarianti):

• TEMPO INVARIANZA : $T[x(t)] = y(t) \iff T[x(t-\theta)] = y(t-\theta)$

• SISTEMI SENZA MEMORIA: $y(t)$ dipende solo da $x(t)$ in quell'istante

→ nei s.LTI (sistemi LTI) è definita la risposta all'impulso:



delta di Dirac

$h(t) \triangleq \mathcal{L}(\delta(t))$ ~> uscita del sistema $\mathcal{L}$, quando all'ingresso è applicata una $\delta(t)$

~> convoluzione

→ $y(t) = x(t) * h(t)$ ~> è possibile stabilire l'uscita di $\mathcal{L}$, $\forall\, x(t)$, $h(t)$ identifica s.LTI

• FUNZIONE DI TRASFERIMENTO: $H(f) = \mathcal{F}[\mathcal{L}[x(t)]] \,/\, Y(f) = H(f)\,X(f)$

↳ risposta in frequenza

• I s.LTI non alterano f del segnale, ma solo $|x(t)|$ e $\angle x(t)$

→ $y(t) = |H(f_0)| \cos(2\pi f_0 + \angle H(f_0)) \iff x(t) = A\cos(2\pi f_0 t)$

• CONDIZIONE DI CAUSALITÀ NEI s.LTI: $h(t) = 0,\ \forall t < 0$:

applico int. di conv. $y(t) = h(t) * x(t)$ e uso $\theta = t - \tau$

Sarà : $y(t) = \int_{-\infty}^{0} x(t-\theta)\,h(\theta)\,d\theta + \int_{0}^{\infty} x(t-\theta)\,h(\theta)\,d\theta$ → se $\theta < 0$, $y(t_0)$ dipenderebbe da valori futuri di t_0

→ fisicamente impossibile !

• s.LTI $\in \mathbb{R}$ → $h(t) \in \mathbb{R}$ → $Re[h(t)]$ pari, $Im[h(t)]$ dispari; $|h(t)|$ pari, $\angle h(t)$ dispari

• s.LTI realizzabile $\iff$ s. causale $\wedge$ reale → $h(t) \in \mathbb{R}$ e $h(t) = 0,\ \forall t < 0$

• STABILITÀ BIBO (bounded input bounded output): $\forall x(t) \,/\, |x(t)| < \infty, \forall t$ → $|y(t)| < \infty, \forall t$

→ se $x(t)$ limitato in ampiezza, deve esserlo anche $y(t)$

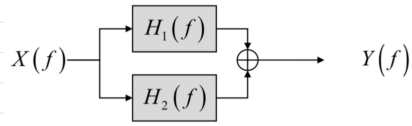
• CONDIZIONE DI STABILITÀ: s.LTI stabile $\iff \int |h(t)|\,dt < \infty$ → $|H(f)| < \infty$

05 • DIAGRAMMI A BLOCCHI

• // DI SL :

$$Y(f) = X(f)\,H_1(f) + X(f)\,H_2(f) = X(f)\big(H_1(f) + H_2(f)\big)$$

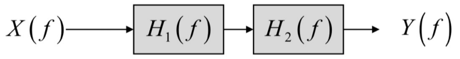
$$\rightarrow H_{TOT}(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f) + H_2(f)$$



• SERIE DI SL :

$$Y(f) = \big(X(f)\,H_1(f)\big)\,H_2(f) = X(f)\big(H_1(f)\,H_2(f)\big)$$

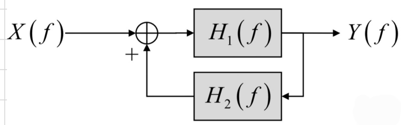
$$\rightarrow H_{TOT} = \frac{Y(f)}{X(f)} = H_1(f)\;H_2(f)$$



• RETROAZIONE :

$$Y(f) = \big(X(f) + Y(f)\,H_2(f)\big)\,H_1(f) \rightarrow Y(f)\left[1 - H_2(f)\,H_1(f)\right] = X(f)\,H_1(f)$$

$$\rightarrow H_{TOT} = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{H_1(f)}{1 - H_2(f)\,H_1(f)}$$



• RITARDATORE : $x(t) \mapsto T \mapsto Y(t) = x(t-T) \rightarrow h(t) = \delta(t-T) \rightarrow H(f) = e^{-j2\pi f T}$

• AMPLIFICATORE : $x(t) \mapsto A \mapsto Y(t) = A\,x(t) \rightarrow h(t) = A\,\delta(t) \rightarrow H(f) = A$

→ TRAMITE LORO C.L., POSSO OTTENERE :

$$H_{FIR}(f) = \sum_i \alpha_i\, e^{-j2\pi f T_i}$$

, FINITE IMPULSE RESPONSE → NO RETROAZIONE

$$H_{IIR}(f) = \frac{\sum_i \alpha_i\, e^{-j2\pi f T_i}}{\sum_j \beta_j\, e^{-j2\pi f T_j}}$$

, INFINITE IMPULSE RESPONSE → CON RETROAZIONE

• LARGHEZZA DI BANDA :

INTERVALLO DI f OCCUPATO DA UN SEGNALE O DA UNA $h(t)$, DI SOLITO RELATIVO A $|H(f)|^2$ O $|X(f)|^2$

• $|Y(f)|^2 = |H(f)|^2 \cdot |X(f)|^2$

• DEF :

• MISURA DEL Supp: INT. DI $f \,/\, X(f) \neq 0$, SE $x(t) \in \mathbb{R} \rightarrow |H(f)|^2$ PARI

(BILATERA SEGNO) ↑

↳ POSSO CONSIDERARE SOLO LA $B > 0$ ⇝ UNILATERA

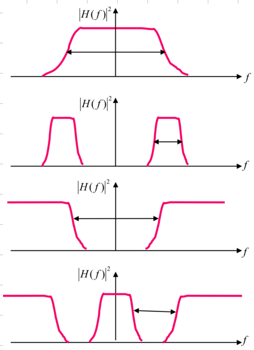
• BANDA A 3dB : PUNTO IN CUI $|H(f)|^2$ DIMINUISCE DEL 50%, CIOÈ DI -3 dB

• BANDA EQ. DI RUMORE : $B_{eq} = \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2\, df}{2\max\left(|H(f)|^2\right)}$ ⇝ CONSIDERO UN RETT. CON AREA EQUIVALENTE / ALTEZZA $= \max\left(|H(f)|^2\right)$

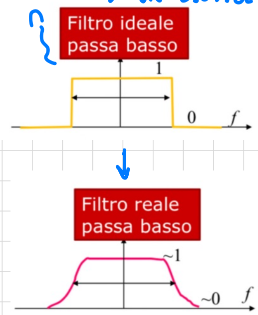
• BANDA PERCENTUALE : $B_{\%} = |a-b| \,/ \int_a^b |H(f)|^2\, df = \dfrac{x}{100}\, E(H)$ ⇝ AREA CONTENENTE L'x% DI ENERGIA

• CLASSIFICAZIONE FILTRI IN BASE A $H(f)$:

- PASSA BASSO: filtro ha B finita centrata intorno all'origine (banda base)
- PASSA BANDA: filtro ha B finita, non include l'origine però
- PASSA ALTO: filtro ha B infinita, non include l'origine
- ELIMINA BANDA: filtro ha B infinita, non include un certo int. di f



NON FISICAMENTE REALIZZABILE! ↳ NON CAUSALE



• DISTORSIONE LINEARE: $y(t)$ ha caratteristiche (cioè la forma) diverse da $x(t)$ ~> vale per LTI e non LTI

ritardo e amplificazione non creano distorsione

↳ SL non distorcente: $y(t) = k\,x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} H(f) = k e^{-j2\pi t_0 f}$ ~> $\angle H(f)$ lineare

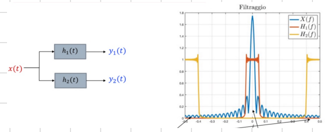
↳ $|H(f)|$ costante

(es. equalizz. di un segnale filtrato, modulazione, moltiplicazione di frequenza)

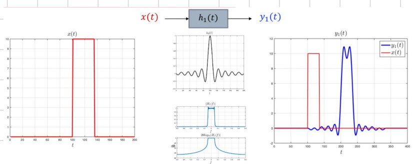
05b • ESEMPIO FILTRI REALIZZABILI:

se $|H(f)|^2$ limitato in f ~> $h(t)$ ha durata ∞ ~> non causale

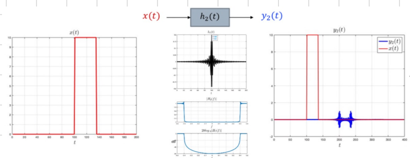
~> nel mondo reale i filtri vanno approssimati



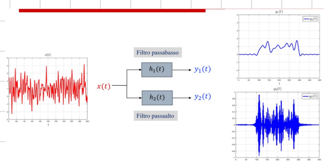
• Filtro passabasso reale



• Filtro passaalto reale



Filtraggio →



05c • SPETTRO SEGNALI TRONCATI:

segnale troncato su T: $x_T(t) = x(t)\cdot p_T(t-\theta)$

troncare un segnale significa ~> farne una convoluzione con sinc (in f)

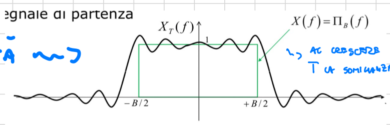
$$\cdot\ X_T(f) = X(f) * \mathcal{F}[p_T(t-\theta)] = X(f) * T\,\mathrm{sinc}(fT), \text{ se } \theta = 0$$

• per avere una buona stima: $T \gg \frac{1}{B}$ ~> $\frac{1}{T} \ll B$ ~> $\mathrm{sinc}(\cdot)$ deve convergere ad una δ

• se $X(f)$ limitata ⟶ $X_T(f)$ illimitato, per via della convoluzione con la $\mathrm{sinc}(\cdot)$

⇐ $\mathcal{F}$[sinc troncata] -> porta con ~>

• FENOMENO DI GIBBS: ~> oscillazione attorno ai punti di discontinuità ~>

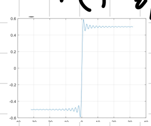


↳ al crescere di T la somiglianza migliora

considero $x(t) = B\,\mathrm{sinc}(Bt) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(f) = p_B(f)$

$$\to X_T(f) = X(f) * T\,\mathrm{sinc}(fT) = T\int_{-B/2}^{B/2} \mathrm{sinc}((f-a)T)\,da \overset{b=T(f-a)}{=} \int_{T(f-\frac{B}{2})}^{T(f+\frac{B}{2})} \mathrm{sinc}(b)\,db$$

$$= Si\left(T\left(f-\frac{B}{2}\right)\right) - Si\left(T\left(f+\frac{B}{2}\right)\right) \Big/ Si(x) \doteq \int_0^x \mathrm{sinc}(a)\,da$$



06 • TRASFORMATE DI SEGNALI PERIODICI

• SEGNALE PERIODICO: $x(t) = x(t+T) \quad \forall t$

$\hookrightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_T(t - nT) \;/\; x_T(t)$ SEGNALE DEFINITO SU T

• SEGNALE CICLICO: È UN S. PERIODICO CON UN INTERVALLO DI T FINITO

• $\mathcal{F}[x(t) \text{ periodico}] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n \, \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$ ~> TRENO DI δ EQUISPAZIATI DI $\frac{1}{T}$, MOLTIPLICATI PER I COEFFICIENTI μ_n

• SEGNALE CAMPIONATORE (TRENO DI IMPULSI):

$$C_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} C_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi f nT} = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

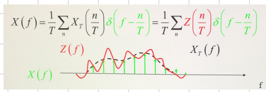
• PRODOTTO PER TRENO DI δ:

$$Y(t) = x(t)\, c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \delta(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = X(f) * \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

• CONVOLUZIONE CON TRENO DI δ:

$$Y(t) = x(t) * c_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} Y(f) = X(f) \cdot \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

• SE $z(t)$ SEGNALE QUALSIASI $/ \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - nT) = x_T(t), \; \forall t \in [0, T]$



$\rightarrow x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - nT) = x(t + T)$ ~> $z(t - nT)$ NON È UNIVOCA: L'IMPORTANTE È CHE $Z(f)$ ASSUMA GLI STESSI VALORI DI $X_T(f)$ IN $f = \frac{n}{T}$

07 • AUTOCORRELAZIONE

⊙ SPETTRO DI ENERGIA $S_x(f) = |X(f)|^2 \;/\; E_{(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\, df$

• $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$ ~> LO SPETTRO IN USCITA DIPENDE SOLO DAL $|\cdot|$ DI $H(f)$, NON $\angle$

• FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE: $R_x(\tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau)\, \bar{x}(t)\, dt = x(\tau) * \bar{x}(-\tau)$ (CONIUGATO)

≥ 0
∴ DISTR. P IN f

⊙ $S_x(f) = \mathcal{F}[R_x(\tau)]$: $S_x(f) = |X(f)|^2 = X(f)\, \bar{X}(f) \xrightarrow{\mathcal{F}} x(t) * \bar{x}(-t)$

• $\rightarrow R_x(0) = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \bar{x}(t)\, dt$

• $R_x(\tau) = \langle x(t), x(t - \tau) \rangle$ ~> CORRELAZIONE DI $x(t)$ CON UNA SUA VERSIONE TRASLATA

$\rightarrow$ SIMMETRIA HERMITIANA: $R_x(\tau) = \bar{R}_x(-\tau)$ $\rightarrow$ SE $x(t) \in \mathbb{R}$ $\rightarrow R_x(\tau) = R_x(-\tau)$ ⇓ $R_x(\tau)$ PARI

$\rightarrow R_x(0) = \max \{ R_x(\tau) \}$

- MUTUA CORRELAZIONE TRA 2 SEGNALI:

-> ESTENSIONE DELL' AUTOCORRELAZIONE : $R_{xy}(\tau) \triangleq \int x(t+\tau)\,\bar{y}(\tau)\,dt$

-> $S_{xy}(f) \triangleq \mathcal{F}[R_{xy}(\tau)]$

- SPETTRO DI POTENZA:

-> PER UN $X(t)$ PERIODICO : $\begin{cases} E(x) & \text{INFINITA} \\ P(x) & \text{FINITA} \end{cases}$ -> POSSO INTRODURRE UNO SPETTRO DI POTENZA, MA NON DI ENERGIA

- SPETTRO DI POTENZA:

$$G_x(f) \triangleq \sum_i |\mu_i|^2 \delta\left(f - \frac{i}{T}\right) \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} G_x(f)\,df = P_{(x)}$$

$$\rightarrow R_x(\tau) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\,\bar{x}(t)\,dt$$

- PROPRIETÀ:
  - $R_x(0) = P(x)$
  - $G_x(f) = \mathcal{F}\{R(\tau)\}$
  - $G_y(f) = G_x(f)\cdot|H(f)|^2$, NEI SISTEMI

- IN GENERALE (PER $X(t)$ ANCHE NON PERIODICO E P_m FINITA):
  - $S_T(f) = \frac{1}{T}|X_T(f)|^2$ -> PERIODOGRAMMA
  - $G_x(f) \triangleq \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}|X_T(f)|^2$
  - F. DI AUTOCORRELAZIONE: $\phi_x(\tau) \triangleq \mathcal{F}^{-1}[G_x(f)] = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t+\tau)\,\bar{x}(t)\,dt$

08 - RIPASSO PROBABILITÀ:

- $P(s) \in [0,1]$, $\sum_{s \in S} P(s) = 1$ / S: SPAZIO CAMPIONE
- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1, E_2) = P(E_1)P(E_2) \iff E_1$ e E_2 SONO INDIPENDENTI
- $P(s|B) = P(s)/P(B) \rightarrow P(s) = P(s|B) \cdot P(B)$, PROBABILITÀ CONDIZIONATA
- T. DI BAYES:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$$

- SIA $\xi(s)$ UNA V.C.: $P(\xi = x) = \sum_{\xi(s)=x} P(s)$
- FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE CUMULATIVA: $F_\xi(x) \triangleq P(\xi \le x) = \sum_{\xi(s) \le x} P(s) \in [0,1]$

  $\rightarrow$ PROPRIETÀ: $P(\xi \in [a,b]) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
- DENSITÀ DI PROBABILITÀ: $f_\xi(x) \triangleq \frac{d}{dx} F_\xi(x)$

  $\rightarrow$ PROPRIETÀ: $P(\xi \in [a,b]) = \int_a^b f_\xi(x)\,dx \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\,dx = 1$
- DISTRIB. CUMULATIVA CONGIUNTA DI V.C.: $F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1 \dots x_n) \triangleq P(\xi_1 \le x_1, \dots, \xi_n \le x_n)$

  $\rightarrow f_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n) \triangleq \frac{d^n}{dx_1 \dots dx_n} F_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1, \dots, x_n)$
- INDIPENDENZA STATISTICA: $f_{\xi_1 \dots \xi_n}(x_1 \dots x_n) = f_{\xi_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{\xi_n}(x_n)$
- $f_{\xi,\eta}(x,y) = f_{\xi|\eta}(x|y)\, f_\eta(y) = f_{\eta|\xi}(y|x)\, f_\xi(x)$ ⤳ DA BAYES

  $\rightarrow f_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi|\eta}(x|y)\, f_\eta(y)\,dy$

• **VALORE ATTESO**: $E[g(\xi)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_\xi(x)\, dx$

• MOMENTI DI ORDINE K:

SIA $\mu_K \triangleq E[\xi^K] \rightsquigarrow \mu_1 = E[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_\xi(x)\, dx$ ⇝ MEDIA

$\mu_2 = E[\xi^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_\xi(x)\, dx$ ⇝ VALORE QUADRATICO MEDIO

• MOMENTI CENTRALI: $m_K \triangleq E[(\xi - \mu)^K]$ ⇝ MOMENTO DI ORDINE K, CENTRATO IN μ

• **VARIANZA**: $m_2 = \sigma_\xi^2 = E[(\xi-\mu)^2]$ / σ_ξ: DEVIAZIONE STANDARD

• **COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE**:

SIANO $\mu_{Kn} = E[\xi^K \eta^n]$, $m_{Kn} \triangleq E[(\xi - \mu_\xi)^K (\eta - \mu_\eta)^n]$ ($\leftarrow$ MOMENTI CONGIUNTI) e $\sigma_{\xi\eta} = m_{1,1}$ ($\leftarrow$ COVARIANZA)

$\rightsquigarrow \rho_{\xi\eta} = \dfrac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}$

• INDIPENDENZA $\overset{\not\leftarrow \text{ TRANNE PER LE GAUSSIANE}}{\rightsquigarrow}$ INCORRELAZIONE

• INDIPENDENZA LINEARE (SCORRELAZIONE): $E[\xi_1 \xi_2] = E[\xi_1]E[\xi_2]$

$\rightarrow$ PROPRIETÀ: SE $f_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) \overset{\text{INDIP. STATISTICA}}{=} f_{\xi_1}(x_1) f_{\xi_2}(x_2) \rightarrow$ INDIP. LINEARE

• C.L. DI V.C.: SE $Z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X_i$ (⇝ V.C.) $\rightsquigarrow \mu_Z = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i$ CENTRO MEDIA

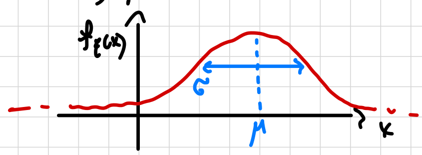
$\rightarrow$ SE ξ_i SCORRELATE $\rightarrow \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_i^2$ ($C_\xi(p)$: f CARATTERISTICA)

• SOMMA DI V.C.: SIA $Z = X + Y$ / X, Y STAT. INDIP $\rightarrow f_Z = f_X * f_Y (z)$ ⇝ $\left(P(x+y \le z) = \int P(x \le z-y) f_Y(y)\, dy \right)$

• **DISTRIBUZIONE GAUSSIANA** (NORMALE): ⇝ CURVATURA DI ERRORI, $Q_x \triangleq \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_\xi(x) = 1 - \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) \Big/ \operatorname{erfc}(x) \triangleq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

• $E[\xi_{\text{GAUSSIANA}}] = \mu$, $V[\xi_{\text{GAUSSIANA}}] = m_2 = \sigma^2$



• PROPRIETÀ:

• C.L. DI GAUSSIANE $\rightarrow$ È UNA GAUSSIANA

• 2 V.C. GAUSSIANE SCORRELATE $\rightarrow$ INDIPENDENTI

• T. DEL LIMITE CENTRALE: SIA $Z_N = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \xi_i$ / ξ_i: V.C. INDIP. CON QUALSIASI DISTRIBUZIONE

$\rightarrow Z_N \overset{N \to \infty}{\longmapsto}$ DISTR. GAUSSIANA / $\mu_{Z_N} = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mu_i$, $\sigma_{Z_N}^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \sigma_i^2$

• 09 - PROCESSI CASUALI:

• GENERICO SEGNALE DI TRASM. NUMERICA: $x(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \alpha_i \, r(t - iT) \Big/ \begin{array}{l} r(t): f \text{ DETERMINISTICA} \\ \alpha_i : \text{V.C. DISCRETE} \end{array}$

• DEF: ASSOCIAZIONE DI P, $\forall$ REALIZZAZIONE (SEGNALE)

• $\forall t_0$ → DEFINISCE UNA V.C. → UN PROCESSO CASUALE $\xi_i = X(t_i)$

• PROCESSO QUASI DETERMINATO: ESPRIMIBILE COME UN SEGNALE DET. IN f DI UN N. FINITO DI V.C.

• SIA UN INSIEME DI n CAMPIONI, CHE COSTITUISCONO UN INSIEME DI n V.C.:

$$\to F_{X_1,\dots,X_n}(x_1 \dots x_n; t_1 \dots t_n) = P\left(x(t_1) < x_1, \dots, x(t_n) < x_n\right)$$

$$\to f_X = \frac{d^n}{dx_1 \dots dx_n} F_X(x, t) \quad \Big/ \quad f_X(x, t): \text{DENSITÀ DI } P \text{ DI I ORDINE}$$

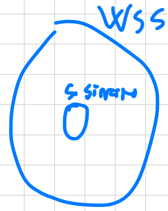
V.C.

• MEDIA DI UN PR. CASUALE: $m_X(t) \triangleq E[X(t)] = \int x \, f_X(x; t) \, dx$ ⇝ È UN SEG. DETERMINATO

• AUTOCORRELAZIONE: $R_X(t_1, t_2) \triangleq E\left[X(t_1) \bar{X}(t_2)\right] = \iint x_1 \bar{x}_2 \, f_{X_1, X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) \, dx_1 dx_2$ ⇝ (CONIUGATO)

• AUTOCOVARIANZA: $K_X(t_1, t_2) \triangleq E\left[(X(t_1) - m_X(t_1))\overline{(X(t_2) - m_X(t_2))}\right] = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1) \bar{m}_X(t_2)$

• COEFFICIENTE DI AUTO-CORRELAZIONE: $\rho_X(t_1, t_2) \triangleq \dfrac{K_X(t_1, t_2)}{\sqrt{K_X(t_1, t_1) K_X(t_2, t_2)}}$



→ CARATTERIZZAZIONE DI UN PR. CASUALE: $m_X(t)$ e $R_X(t_1, t_2)$

• 10 - STAZIONARIETÀ:

⇝ STAT. I ORDINE $\not\forall t$!

(QUASI) SEGNALE → PROCESSO

DEF. PROCESSO STAZIONARIO: SE $X(t, s_i) \in P_{\text{CASUALE}}$ ⇝ $\forall \, x(t - t_j, s_i)$ CON L'ASSE DEI TEMPI TRASLATO $\in P_{\text{CASUALE}}$, $\forall$ RITARDO → STESSA PROPRIETÀ $\forall t_0$

$$\to \text{SE } X(t) \in P \to \forall t_0 \begin{cases} x(t - t_0) \in P \\ P[x(t)] = P[x(t - t_0)] \end{cases}$$

⇝ NON È IMPORTANTE DOVE SI TROVA L'ORIGINE DEI TEMPI

• CONSIDERO LE STATISTICHE CONGIUNTE DI m CAMPIONI: $f_X(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m)$

$$\to f_X(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = f_X(x_1, \dots, x_m; t_1 + t_0, \dots, t_m - t_0)$$

$\tilde{\tau}_{i-1} = t_i - t_1$

CONSIDERO $t_0 = -t_1$, $\tilde{\tau}_{i-1} = t_i - t_1$ → $f_X(x_1, \dots, x_m; 0, \tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \dots, \tilde{\tau}_{m-1}) = f_X(x_1, \dots, x_m; \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{m-1})$

⇝ $\not\forall t$

• STATISTICA DI I ORDINE: $f_X(x_1, 0) \triangleq f_X(x_1)$ ⇝ COINCIDE CON LA SUA DENSITÀ DI PROBABILITÀ

• P STAZ. IN SENSO STRETTO DI ORDINE n, VALE:

$$f_X(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m) = f_X(x_1, \dots, x_m; \tilde{\tau}_1, \dots, \tilde{\tau}_{m-1}), \ \forall m \leq n$$

• SE P STAZ. ORDINE I : $m_x(t) = m_x$ (LA MEDIA NON DIPENDE DA t DI INSIEME), $\because$ $m_x(t) = \int x f_X(x;t)\,dx = \int x f_X(x)\,dx = m_x$ ($0 = t_1 - t_1$)

• SE P STAZ. ORDINE II : $R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau)$, $\because$ $R_x(t_1,t_2) = \int x_1 \bar{x}_2 f_X(x_1,x_2;t_1,t_2)\,dx_1 dx_2 = \int x_1 \bar{x}_2 f_X(x_1,x_2;0,\tau)\,dx_1 dx_2 = R_x(\tau)$

$\rightarrow$ P WSS (WIDE SENSE STATIONARY → STAZ. IN SENSO LATO) $\Leftrightarrow \begin{cases} m_x(t) = m_x \\ R_x(t_1,t_2) = R_x(\tau) \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ P ST. IN SENSO STRETTO $\not\Leftarrow$ P WSS

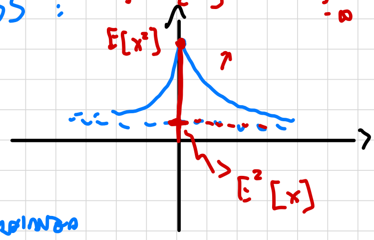
• PROPRIETÀ P WSS:

- $R_x(\tau) = E[X(t)\bar{X}(t+\tau)]$ / $\tau = t_1 - t_2$
- $R_x(\tau) = \bar{R}_x(-\tau)$ $\rightsquigarrow$ PARI
- $R_x(\tau = 0) = E[|X(t)|^2]$ $\rightsquigarrow$ VAL. QUAD. MEDIO
- $R_x(\tau \mapsto \infty) = |m_x|^2 = E^2[|X(t)|]$

$\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \rightsquigarrow P_x$

WSS :

$R_x(0) = E[x^2] = P_x = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df$



$\rightarrow \sigma^2 = E[|X(t)|^2] - E^2|X(t)|$ (VARIANZA)

• 11 - TRASFORMAZIONI E SPETTRO DI POTENZA

$X(t) \in$ P. CASUALE $\mapsto$ S. LTI / S. NON LTI $\mapsto Y(t) \in$ P CASUALE

• LA RICERCA DELLA CARATTERIZZAZIONE COMPLETA DI $Y(t)$ RICHIEDE TUTTE LE STAT. DI ORDINE n $\rightsquigarrow$ QUASI IMPOSSIBILE

$\rightarrow$ CI LIMITIAMO A STAT. DEL I E II ORDINE, SOTTO LE Hp / $E[\mathcal{L}[x(t)]] = \mathcal{L}[E[x(t)]]$ (GENERICA TRASF.)

• PER UN $X(t) \in$ P WSS, S. LTI:

- $m_Y(t) = m_x H(0) = m_x \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f_0 t}\,d\tau$ / $f_0 = 0$ $\rightsquigarrow m_Y(t) =$ cost.
- $R_Y(\tau) = R_x(\tau) * R_h(\tau)$ / $R_h(\tau) \triangleq \int \bar{h}(t) h(t+\tau)\,d\tau$ $\rightsquigarrow R_Y(\cdot)\ \tau$ $\rightsquigarrow R_Y(\tau) = \int R_h(r) R_x(\tau - r)\,dr$

$\rightarrow Y(t) = h(t) * x(t) \in$ P WSS

- $R_{XY}(\tau) \triangleq E[x(t) Y(t+\tau)] = R_x(\tau) * h(\tau)$ $\rightarrow$ SE $= 0$ $\rightarrow$ INCORRELAZIONE

• SE $X(t)$ GAUSSIANO $\rightarrow Y(t)$ GAUSSIANO:

• SPETTRO DI POTENZA:

- SIA $X(t) \in$ P WSS : $P_x(t) \triangleq E[x^2(t)]$
- SPETTRO DI POTENZA (PER P WSS, $P_x(t)$ FINITA): $S_x(f) \triangleq \mathcal{F}[R_x(\tau)]$
- $S_Y(f) = |H(f)|^2 S_x(f)$, $P_Y(t) = E[Y^2(t)] = R_Y(0) \simeq 2\Delta S_x(f_0)$ ($H(f)$: FILTRO PASSABANDA CENTRATO IN f_0 → BANDA)

• PROPRIETÀ:

- $S_x(f)$ PARI, $S_x(f) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,df = P_x(t) = R_x(0)$

• WGN (WHITE GAUSSIAN NOISE):

NON È UN MODELLO REALISTICO

- $S_x(f) = \frac{1}{2} N_0$ / $N_0 = kT$ / $k =$ COST. BOLTZ., $T =$ TEMPERATURA
- $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}(S_x(f)) = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau)$

$\mapsto \forall$ COPPIA DI CAMPIONI PRELEVATI / $t_1 \neq t_2$ È SCORRELATA!

12 - ERGODICITÀ :

- $\forall\, x(t)$ segnale determinato : $< y[x(t)] > = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y[x(t)]\,dt$

  ⇝ potenza media : $P(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |x(t)|^2 = < |x(t)|^2 >$ ⇝ $y[\cdot] = |\cdot|^2$

  → valore medio : $\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)\,dt = < x(t) >$

- se consideriamo $x(t,s_0) \,/\, x(t,s_0) \in P$ casuale : $< y[x(t,s_0)] > = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y[x(t,s_0)]\,dt$

→ ⇝ f(realizzazione)

in generale : ⇝ $\langle g[x(t;s_i),\dots,x(t+\tau_{n-1};s_i)]\rangle$ $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g[x(t;s_i),\dots,x(t+\tau_{n-1};s_i)]\,dt$

media temporale : $< y[x(t,s_0)] > = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} y[x(t,s_0)]\,dt$ ⇝ per 1 realizz. di un P, indip. da t

⇝ $f(t)$ realizzazioni

media d'insieme : $E[y[X(t)]] = \sum_i y[x(t;s_i)]\,P[x(t;s_i)]$ ⇝ si applica a $X(t) \in$ V.C., $/\, x(t,s_i) \in X$

dip. da t

⇝ in generale : $E\{g[X(t_1),\dots,X(t_n)]\}$ $\sum_i g[x(t_1;s_i),\dots,x(t_n;s_i)]\,P[x(t;s_i)]$

- autocorrelazione : $R_x(\tau) = < x(t+\tau)\,\bar{x}(t) >$
- mutua correlazione : $R_{xy}(\tau) = < x(t+\tau)\,\bar{y}(t) >$

- ERGODICITÀ $\cancel{\leftarrow}\!\!\rightarrow$ STAZIONARIETÀ

  ⇓ STAZ. ⊃ ERGO

- ERGODICITÀ :

  proprietà $/\; E_c[y[X(t)]] = < y[x(t,s_i)] >, \forall i$

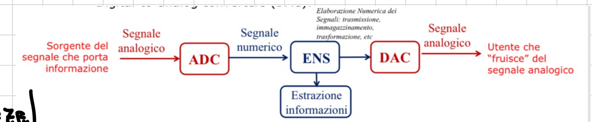
  → succede $\Leftrightarrow P$ è stazionario per quella media

  → le info che posso estrarre dalla singola $x(t,s_i)$ sono rappresentative di tutto P

- Cond. suff. ergodicità : $\int |K_x|\,d\tau < \infty \;/\; K_x$: autocovarianza

13 - TEOREMA DEL CAMPIONAMENTO

- conversione ADC e DAC , obiettivo : $V_{out}(t) \simeq V_{in}(t)$



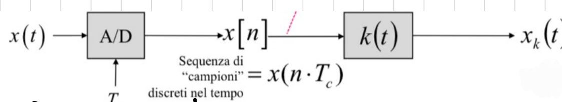
→ campionamento (su t) e quantizzazione (sulle ampiezze)

- errore di quantizzazione : $V_{out} - V_{in} \,/\, \simeq < \frac{1}{2}$ [int. quantizz.]

- bit rate : $R_b = n_{bit} \cdot f_c \;/\; f_c$: f campionamento

  $x(t)$ rappr. su n_{bit}

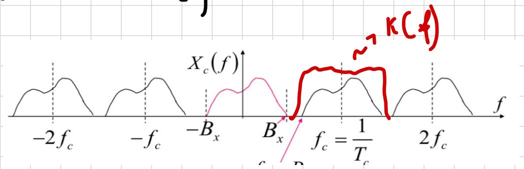
- $x[n] = x(n \cdot T_c)$: segnale $x(t)$ campionato nel t



$/\; x_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,\delta(t - nT_c) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_c(f) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_c}\right)$

- $k(t)$: filtro interpolatore , ricostruttore

$/\; x_k(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,k(t - nT_c)$



- considerando $X_c(f)$, le repliche dello spettro non si sovrappongono $\Leftrightarrow f_c - B_x > B_x$

→ $f_c > 2B_x$

• se $f_c > 2B_x$ -> è possibile ottenere $X_c(f) \mapsto X(f)$ tramite il filtro ricostruttore $K(f)$, -> in questo modo $X_k(f) = X(f)$

↳ deve essere: piatto in B_x, 0 per $|f| > f_c - B_x$

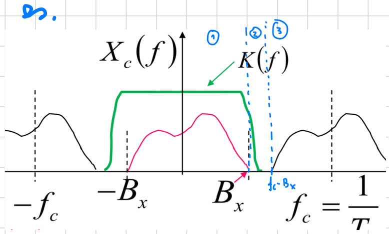
• T. del campionamento:

• $x(t)$ può essere campionato e ricostruito $\iff T_c < \frac{1}{2B_x}$ / f_c: f di Nyquist, $B_x = f_{max}$

$f_c > 2B_x$

• $K(f) = \begin{cases} T_c, & \forall |f| < B_x \quad ① \\ \text{qualsiasi val.}, & \forall B_x < |f| < f_c - B_x \quad ② \\ 0, & \forall |f| > f_c - B_x \quad ③ \end{cases}$

es.



• Aliasing: sovrapposizione degli spettri

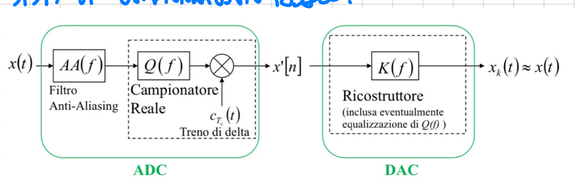
-> $AA(f)$: filtro anti-aliasing -> viene posto prima del ADC, in modo da eliminare preventivamente le componenti che si sovrappongono

• campionatori reali:

$\delta(t)$ non realizzabile $\mapsto y(t)$

-> compenso $q(t)$ con un equalizz. su $Q(f)$

Sist. di campionamento reale:



ELABORAZIONE DEI SEGNALI (2ª PARTE)

07. SEGNALI A TEMPO DISCRETO:

- $x(n) = x[n] \;/\; n \mapsto x(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ ⇝ INTERI
- SUPP. TEMPORALE DI UNA SEQ. FINITA: $N = n_2 - n_1 + 1 \;/\; x(n) = 0$ SE $n \notin [n_1, n_2]$
- $x(n)$ È CAUSALE $\iff x(n) = 0$ PER $n < 0$ (ANTICAUSALE PER $n > 0$)
- $\forall\, x(n)$ VALE: $x(n) = x_p(n) + x_d(n) \;/\;$ x_p: CONIUG. SIMMETRICA $= \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{2}\bar{x}(-n)$; x_d: CONIUG. ANTISIMMETRICA $= \frac{1}{2}x(n) - \frac{1}{2}\bar{x}(-n)$
- PERIODICITÀ: $x(n) = x(n \pm N) \;/\; N \in \mathbb{N}$
- $x(n)$ LIMITATA $\iff |x(n)| \le X_0 < \infty$, $\forall n \;/\; X_0 > 0, X_0 \in \mathbb{R}$
- SEQ. $x(n)$ ASSOLUT. SOMMABILE $\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$, (ANALOG. QUADR. SOMM. $\iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$)

SEQ. ELEMENTARI:

- GRADINO UNITARIO: $u(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \ge 0 \end{cases}$
- DELTA DI KRONECKER: $\delta(n) = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$ $\;/\;$
  - $\overset{\text{QUALSIASI}}{x(n)} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\,\delta[n-i]$
  - $x(n)\,\delta(n-i) = x(i)\,\delta(n-i)$
- TRIANGOLO: $t_{\underbrace{2N+1}_{\text{n° DI CAMPIONI}}}(n) = \begin{cases} 0, & |n| > N \\ 1 - \frac{|n|}{N}, & |n| \le N \end{cases}$
- ESPONENZIALE: $a^n u(n) \;/\; a \in \mathbb{C}$ e $\begin{cases} a > 0 \to \text{sign}(\,) = \text{cost.} \\ a < 0 \to \text{sign}(\,) \text{ ALTERNI} \end{cases}$

SINUSOIDI A t DISCRETO:

SINUSOIDI: $x_c = A\cos(2\pi f_0 n + \theta) \;/\; \omega_0 = 2\pi f_0$, $\forall n$

- PROPRIETÀ:
  1. SE $k \in \mathbb{Z} \to A\cos(2\pi(f_0 + k)n + \theta) = A\cos(2\pi f_0 n + \theta)$
  2. ↑ OSCILLAZIONI PER ↑ $f < 1/2$, ↓ OSCILLAZIONI PER ↑ $f \;/\; \frac{1}{2} < f < 1$
  3. CONSIDERO LA 1.: NEL CASO DISCRETO VALE $\iff N f_0 \in \mathbb{Z} \to f_0 \in \mathbb{Q}$ ⇝ NUM. RAZIONALI ↳ $\frac{a}{b}$

OPERAZIONI ELEMENTARI:

- SCALAMENTO TEMPORALE ↳ SOTTO/SOVRA-CAMPIONAMENTO: $y(n) = x(D \cdot n) \;/\; D \in \mathbb{Z}$
  (SOTTO: PRENDO 1 CAMP. OGNI D; SOVRA: INSERISCO ZERI ⇝ VARIANDO DIM SEQ.)
- CONVOLUZIONE: $q(n) = x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\,y(n-k)$ ⇝ BASTA FARE DELLE SOMME $\forall k$

PROPRIETÀ:

- $\text{supp}(q) = \text{Supp}(x) + \text{Supp}(y) - 1$
- COMMUTATIVA, DISTRIBUTIVA, ASSOCIATIVA

• PROPRIETÀ:

• $|X(e^{j\omega})| < \infty \rightarrow \exists$ DTFT $\rightarrow$ ASS. SOMMABILE

• $|X(e^{j\omega})| < \infty \not\rightarrow E_x < \infty$

Tabella proprietà DTFT

Proprietà	x(n),y(n)	DTFT $X(e^{j2\pi f})$
Linearità	$a_1 x(n) + a_2 y(n)$	$a_1 \cdot X(e^{j2\pi f}) + a_2 \cdot Y(e^{j2\pi f})$
Ribaltamento	$x(-n)$	$X(e^{-j2\pi f})$
Ritardo	$x(n-N)$	$X(e^{j2\pi f}) e^{-j2\pi f N}$
Modulazione	$e^{j2\pi f_0 n} \cdot x(n)$	$X(e^{j2\pi (f-f_0)})$
Derivata in frequenza	$n \cdot x(n)$	$\frac{j}{2\pi} \frac{dX(e^{j2\pi f})}{df}$
Convoluzione	$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) y(n-k)$	$X(e^{j2\pi f}) \cdot Y(e^{j2\pi f})$
Prodotto	$x(n) \cdot y(n)$	$X(e^{j2\pi f}) * Y(e^{j2\pi f}) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(e^{j2\pi \eta}) Y(e^{j2\pi (f-\eta)}) d\eta$

Proprietà di simmetria della DTFT

Segnale $x(n) \in R$	DTFT $X(e^{j2\pi f})$
$x(n)$	$X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f}) + j X_I(e^{j2\pi f})$
$x(n)$	$X(e^{j2\pi f}) = X^*(e^{-j2\pi f})$
$x(n)$	$\lvert X(e^{j2\pi f}) \rvert = \lvert X(e^{-j2\pi f}) \rvert$
$x(n)$	$\varphi(X(e^{j2\pi f})) = -\varphi(X(e^{-j2\pi f}))$
$x(n)$ pari	$X(e^{j2\pi f}) = X_R(e^{j2\pi f})$
$x(n)$ dispari	$X(e^{j2\pi f}) = j X_I(e^{j2\pi f})$

• $S_x(f)$ e BANDA:

• SPETTRO DI ENERGIA: $S_x(f) = |X(e^{j2\pi f})|^2$

• PROPRIETÀ: SE $x(n) \in \mathbb{R} \rightarrow S_x(f) \in \mathbb{R}$, PARI

• REL. DI PARSEVAL: $E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(e^{j2\pi f})|^2 \, df$

• BANDA:

• BANDA ASSOLUTA: $B_x < \frac{1}{2} \; / \; |X(e^{j2\pi f})| = 0 \quad f \notin [-B_x, B_x]$

• BANDA EQUIVALENTE: $2 B_{eq} \underbrace{|X_M|^2}_{\rightarrow \text{ MAX DI } S_x(f)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

• BANDA $B_{\%}$: $\int_{-B_{x\%}}^{B_{x\%}} S_x(f) \, df = \frac{x}{100} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

• BANDA A 3dB: $S_x(B_{3dB}) = \frac{|X_M|^2}{2}$

• 03 - DFT e FFT:

• PROBLEMI DTFT: DIFFICILE APPROX. PRATICA, COMPLESSITÀ $O(N^2)$

IN $t \in \mathbb{R}$

• t INDICA IL TEMPO

• f INDICA UNA f

IN t DISCRETIZZATO

• n È UN t DISCRETIZZATO

• k È UNA f DISCRETIZZATA

• DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n \overbrace{\frac{k}{N}}^{f_k}}, \quad \forall k = 0 \div N-1$$

$\rightarrow$ È COME UNA DTFT, MA VALUTATA SOLO NELLE $f \,/\, f_k = \frac{k}{N}$

• ANTITRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER: $x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi n \frac{k}{N}}$

Proprietà	x(n),y(n): N campioni	DFT X(k)
Linearità	$a_1 x(n) + a_2 y(n)$	$a_1 X(k) + a_2 Y(k)$
Ritardo	$x(\lvert n-N_0 \rvert_N)$	$X(k) e^{-j2\pi \frac{k}{N} N_0}$
Modulazione	$e^{j2\pi \frac{k_0}{N} n} x(n)$	$X(\lvert k-k_0 \rvert_N)$
Convoluzione circolare	$\sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(\lvert n-p \rvert_N)$	$X(k) \cdot Y(k)$
Prodotto	$x(n) \cdot y(n)$	$\frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} X(p) Y(\lvert k-p \rvert_N)$
Teorema di Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \lvert x(n) \rvert^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \lvert X(k) \rvert^2$	

• $\tilde{X}(n), \tilde{x}(n)$ SONO LE ESTENSIONI PERIODICHE DI $X(k), x(n)$

• PROPRIETÀ DFT:

$\rightarrow$ APPLICO QUELLE DELLA DTFT, CONSIDERANDO $f = \frac{k}{N}$

• MODULO: $|k|_N = k \bmod N$

• RITARDO (CIRCOLARE): $x(|n-N_0|_N) = \tilde{x}(n-N_0)$

Segnale $x(n) \in R$	DFT $X(k)$
$x(n)$	$X(k) = X_R(k) + j X_I(k)$
$x(n)$	$X(k) = X^*(\lvert -k \rvert_N)$
$x(n)$	$\lvert X(k) \rvert = \lvert X(\lvert -k \rvert_N) \rvert$
$x(n)$	$\varphi(X(k)) = -\varphi(X(\lvert -k \rvert_N))$
$x(n)$ pari	$X(k) = X_R(k)$
$x(n)$ dispari	$X(k) = j X_I(k)$

· CONVOLUZIONE CIRCOLARE:

$$\tilde{z}_{cc}(n) = \sum_{p=0}^{N-1} \tilde{x}(p)\,\tilde{y}(n-p)$$

· $\tilde{z}_{cc}$ DEVE ESSERE COMPOSTA DA N CAMPIONI,

$$\rightarrow \tilde{z}_{cc}(n) = x(n) \otimes y(n) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p)\, y(|n-p|_N)$$

↳ OPERATORE COMMUTATIVO

- $\tilde{z}_{cc}$ è SCRIVIBILE COME MATRICE: $\vec{z} = \tilde{\tilde{Y}} \cdot \vec{x}$ / $\tilde{\tilde{Y}}$: MATRICE CIRCOLANTE

$\rightarrow x(n) = [1,0,2,3]$, $y(n) = [1,2,2,0]$

z_n:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 8 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

· SIA $z(n) = x(n) * y(n)$:

$\rightarrow z(n) \neq \tilde{z}_{cc}(n)$ IN GENERALE

$\rightarrow z(n)$ HA DURATA $N_z = N_x + N_y - 1$

· RELAZIONE DFT - DTFT:

$$\cdot\ X(k) = DFT\{x(n)\} = \underbrace{X(e^{j2\pi f})}_{DTFT}\Big|_{f=f_k}$$

· FFT: ⤳ FAST FOURIER TRANSFORM

· COMPLESSITÀ DFT: $\forall k \rightarrow N$ MOLTIPLICAZIONI + $N-1$ SOMME $\rightarrow n^\circ$ TOT OPERAZIONI $\simeq 2N^2$

$\rightarrow O(N^2)$

· FFT: $O(N^2) \mapsto O(N \log_2 N)$

$\rightarrow$ SFRUTTA PROPRIETÀ DI SIMMETRIA/PERIODICITÀ DEGLI exp COMPLESSI e PRINCIPIO DI DIVIDE ET IMPERA

· DFT IN TERMINI DI MATRICI:

· DFT: $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}$, $\forall k = 0 \div N-1$

$\mapsto \vec{X} = \tilde{\tilde{H}} \cdot \vec{x}$ / $H = \left[e^{-j2\pi n \frac{k}{N}}\right] = \left[H_N^{nk}\right]$

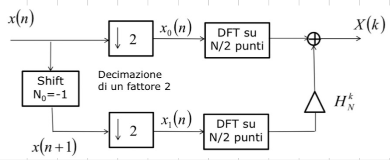
$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & H_N^1 & H_N^2 & \dots & H_N^{N-1} \\ 1 & H_N^2 & H_N^4 & \dots & H_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & H_N^{N-1} & H_N^{2(N-1)} & \dots & H_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

PROPRIETÀ DI SIMMETRIA ⇓

$$e^{-j2\pi\frac{n}{N}} = e^{-j2\pi\frac{n+N}{N}} \Rightarrow H_N^{n+N} = H_N^n$$
$$e^{-j2\pi\frac{n}{N}} = -e^{-j2\pi\frac{n+N/2}{N}} \Rightarrow H_N^{n+N/2} = -H_N^n$$
$$e^{-j2k\pi} = e^{-j2\pi\frac{kN}{N}} = 1 \Rightarrow H_N^{Nk} = 1 \quad (k \text{ intero})$$
$$e^{-j2\frac{2\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{N/2}} \Rightarrow H_N^2 = H_{N/2}$$

· ALGORITMO DI DECIMAZIONE NEL t:

· Hp: $N = 2^\alpha$ ⤳ POTENZA DI 2



$\rightarrow$ 1. DIVIDO $x(n)$ IN CAMPIONI DI POSTO PARI e DISPARI:

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n)\, H_N^{2nk}}_{PARI} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2n+1)\, H_N^{(2n+1)k}}_{DISPARI}, \quad \forall k = 0 \div N-1$$

$H_N^{(2n+1)k} = H_N^{2nk} \cdot H_N^k$

2. PROPRIETÀ $H_N^2 = H_{N/2} \rightarrow X(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_0(n)\, H_{N/2}^{nk} + H_N^k \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1(n)\, H_{N/2}^{nk}$

(x_0: PARI; x_1: DISPARI; H_N^k: COSTO RICOMB. RISULTATI; $H_{N/2}^{nk}$: # DFT)

APPLICO RICORSIVAMENTE I PASSI FINO A VALUTARE DFT IN 1 PUNTO, CIOÈ AL PASSO K

STADI SUCCESSIVI: $K = \log_2 N$

· COMPLESSITÀ: n° DI OPER. TOT, AL PASSO K: $kN + 2^k \underbrace{\left(\frac{N}{2^k}\right)^2}_{\text{COSTO DFT}}$ $\rightarrow$ SE $N = 2^k$ $\rightarrow$ COMPLESSITÀ $\simeq \log_2(N) \cdot N$

↳ PASSO 2: $N + 2\left(\frac{N}{2} + 2\left(\frac{N}{4}\right)^2\right)$

06 - ANALISI IN f TRAMITE DFT DI SEGNALI A t CONTINUO:

$$x_c(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_c) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_c)\,\delta(t - nT_c)$$

- T. DISC COMP. $\to X_c(f_a) = \mathcal{F}[x_c(t)]$ ($f_a \to$ f ANALOGICA)
- $X_c(f_a) = \dfrac{1}{T_c} \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f_a - n\frac{1}{T_c}\right) \to X(f_a) = T_c \cdot X_c(f_a)\,,\ f_a \in [0, f_c]$

- RELAZIONE FT - DFT:
  - SIA Δf: PASSO DI CAMPIONAMENTO $/ \Delta f = f_c/N$

$$\to DFT[x(n)] = X_c(f_a)\Big|_{f_a = \frac{k}{N} f_c} \to X\left(\frac{k}{N} f_c\right) = T_c \cdot DFT[x(n)]$$

$/ N = T_0 / T_c$ ($T_0 \to$ T OSSERVAZIONE)

- PARAMETRI DFT:
  - T_0 : T OSSERVAZIONE $x(t)$
  - T_c : T CAMPIONAMENTO $x(t)$
  - N : $n°$ CAMPIONI PRELEVATI DA $x(t)$
  - f_c : f CAMPIONAMENTO
  - Δf : RISOLUZIONE IN f DI DFT

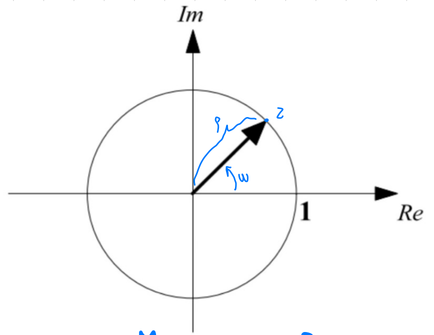
$\to$

$$T_0 = N T_c \qquad f_c = 1/T_c \qquad \Delta f = \frac{1}{T_0}$$

2 PARAMETRI LIBERI

$\to$ LI SCELGO IN MODO DA EVITARE L'ALIASING IN t e f

05 - TRASFORMATA ZETA



- È L'EQUIVALENTE DISCRETO DI $\mathcal{L}[\cdot](s)$
- $X(z) = \mathcal{Z}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$

$\rightsquigarrow X(z) = DTFT[x(n)]\Big|_{z=e^{j\omega}}$

- $z = e^{j\omega}$ È $\in \mathbb{C} \,/\, |z| = 1,\ \angle z = \omega$

$\rightsquigarrow$ IN GENERALE: $z = \rho e^{j\omega}$ $\rightsquigarrow$ PULSAZIONE COMPLESSA

- ANALOGIA $\mathcal{F}$ e $\mathcal{L}$: $\mathcal{F}[x(t)] = \mathcal{L}[x(t)]\Big|_{s=j2\pi f_a}$ $\rightsquigarrow$ IN $t \in \mathbb{R}$

$\mathcal{F}[\,] \in \mathcal{L}[\,]$

↳ È UNA PARTICOLARE $\mathcal{L}(s = j2\pi f_a)$

$\rightsquigarrow \begin{cases} \mathcal{F} \rightsquigarrow 0 + j\Omega \rightsquigarrow n° \in \mathbb{C} \text{ PURO} \\ \mathcal{L} \rightsquigarrow s = \sigma + j\Omega \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ $\mathcal{L}$ È DEFINITA IN TUTTO $\mathbb{C}$ (O MEGLIO, IN ROC)

↳ $\mathcal{F}$ È DEFINITA SOLO SULL'ASSE Im

- ANALOGIA $\mathcal{Z}$ e DTFT:

$$DTFT[x(n)] = X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$\rightsquigarrow$ UNA CIRC. COMPLESSA

$\rightsquigarrow$ DTFT NON È DEFINITA IN TUTTO $\mathbb{C}$, MA SOLO NELLA REGIONE DI $\mathbb{C} \,/\, |z| = 1$

- ANALISI della ROC:
  - $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\, z^{-n}$ È DETTA SERIE DI CAUCHY LAURENT
  - ROC: REGIONE DI CONVERGENZA, CIOÈ DOVE $X(z) < \infty$

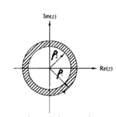
  $\rightarrow$ NELLA ROC, $X(z)$ È ANALITICA: CONTINUA e INFINITAMENTE DERIVABILE / DERIVATE CONTINUE

  - ROC $\mathcal{C}$) DA $|z| = \rho$ ($\forall \angle z$) $\rightsquigarrow$ LO RICAVO DALLA COND. DI $\exists$ DELLA DTFT

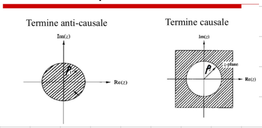
  $\rightarrow ROC(X(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\, \rho^{-k} < \infty$ $\rightsquigarrow$ SONO ZONE DELIMITATE DA CIRCONFERENZE

- TIPOLOGIE DI SEQUENZE:
  - BILATERE: $Supp(x(n)) \in \,]-\infty; +\infty[$
  - UNILATERE CAUSALI: $Supp(x(n)) \in (0; +\infty[$
  - " ANTI-CAUSALI: $Supp(x(n)) \in \,]-\infty; 0]$

ROC di sequenze bilatere



ROC di sequenze unilatere



- $X(z)$ CONVERGE $\Leftrightarrow x(n)\rho^{-n}$ È ASS. SOMMABILE $\rightarrow$ CONVIENE SCRIVERE $X(z)$ /

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|\rho^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} |x(n)|\rho^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)|\rho^{-n} = \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} |x(-i)|\rho^{i}}_{\text{TERMINI ANTICAUSALI}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x(n)|}{\rho^{k}}}_{\text{TERMINI CAUSALI}}$$

• TERMINI ANTI-CAUSALI $\left(A = \sum_{i=1}^{\infty} |x(-i)|\, \rho^{i}\right)$:

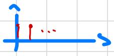
SE $X(z)$ CONVERGE $\rightarrow \exists\, \rho \,/\, x(-i)\,\rho^{i}$ SIA ASS. SOMMABILE PER $i = 1, \dots, \infty \rightarrow ROC(A) : z \,/\, |z| = \rho_1 < \infty$

z INTERNI A CIRC. CON ρ_1

• TERMINI CAUSALI $\left(B = \sum_{n=0}^{\infty} |x(n)| \cdot \frac{1}{\rho^{k}}\right)$:

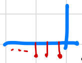
SE $X(z)$ CONVERGE $\rightarrow \exists\, \rho \,/\, x(n) \cdot \frac{1}{\rho^{k}}$ SIA ASS. SOMMABILE PER $k = 0, \dots, \infty \rightarrow ROC(B) : z \,/\, |z| = \rho_2 < \infty$

z ESTERNI A CIRC. CON ρ_2



• GRADINO CAUSALE : $u(n) \rightarrow \mathcal{Z}[u(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} (z^{-1})^{n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow |z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > 1$

$z(1) = \infty \notin ROC$



• GRADINO ANTI-CAUSALE : $-u(-n-1) \rightarrow \mathcal{Z}[-u(-n-1)] = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} u(-n-1)\, z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \rightarrow |z^{-1}| > 1 \rightarrow |z| < 1$

• SE $Supp(x(n)) \in [n_1 ; n_2] \rightarrow ROC(X(z)) = \forall z \,/\, z \neq 0$, SE $\exists\, z^{-k}$ CON $k < 0$

$|z| = \infty$, SE $\exists\, z^{-k}$ " $k > 0$

$\rightsquigarrow$ CONV. SEMPRE

• TRASF. ZETA RAZIONALI :

$\rightsquigarrow$ GRADO DI $N(z)$

SE $\neq 0$ POTENZE POSITIVE

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P_m} b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{P_d} a_i z^{-i}} = z^{P_d - P_m} \frac{\sum_{i=0}^{P_m} b_i z^{P_m - i}}{\sum_{i=0}^{P_d} a_i z^{P_d - i}}$$

$$\rightarrow X(z) = \frac{b_0}{a_0} \frac{\prod_{i=1}^{P_m} (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^{P_d} (1 - d_i z^{-1})} = \frac{b_0}{a_0} z^{P_d - P_m} \frac{\prod_{i=1}^{P_m} (z - c_i)}{\prod_{i=1}^{P_d} (z - d_i)}$$

$c_1, \dots, c_{P_m}$: ZERI DI $X(z)$

$d_1, \dots, d_{P_d}$: POLI DI $X(z)$

• ROC (SEQ. CAUSALI) : $|z| > d_M \,/\, d_M = |d_i$ PIÙ DIST. DA $0|$

• ROC (SEQ. ANTICAUSALI) : $|z| < d_m \,/\, d_m = |d_i$ PIÙ VICINO A $0|$

$\,/\, \therefore d_i \notin ROC$

• ROC (SEQ. BILATERE) $\rightarrow$ DIVIDO $X(z) = X^{+}(z) + X^{-}(z)$: $d_M < |z| < d_m \iff d_M < d_m$

• T. DEL VALORE INIZIALE :

SE $x(n)$ SEQ. CAUSALE $\rightarrow x(n=0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$

Proprietà più comuni

Sequenza $x(n),\ y(n)$	$X(z),\ Y(z)$	ROC $R_x,\ R_y$
$x(n-N)$	$z^{-N}X(z)$	se $N>0 \rightarrow R_x \backslash \{z=0\}$ se $N<0 \rightarrow R_x \backslash \{z=\infty\}$
$\alpha_1 x(n) + \alpha_2 y(n),\ \alpha_1, \alpha_2$ costanti	$\alpha_1 X(z) + \alpha_2 Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$
$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
$x^*(-n)$	$X^*(\frac{1}{z^*})$	$\frac{1}{R_x}$
$\Re(x(n))$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	contiene R_x
$\Im(x(n))$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	contiene R_x
$x(-n)u(-n-1)$	$X(z^{-1}) - x(0)$, $x(n)$ causali	–
$\alpha^n x(n)$	$X(z/\alpha)$	$\lvert\alpha\rvert \cdot R_x$
$nx(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z)$	R_x meno $z=\infty$ o $z=0$
$nx(-n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z^{-1})$	contiene $\frac{1}{R_x}$
$n\alpha^n x(n)$	$-z\frac{d}{dz}X(z/\alpha)$	$\lvert\alpha\rvert \cdot R_x$ meno $z=\infty$ o $z=0$
$\cos(2\pi fn)x(n)$	$\frac{1}{2}\left[X(ze^{j2\pi f}) + X(ze^{-j2\pi f})\right]$	–
$\sin(2\pi fn)x(n)$	$\frac{1}{2}\left[X(ze^{j2\pi f}) - X(ze^{-j2\pi f})\right]$	–
$x(n) \star y(n)$	$X(z)Y(z)$	contiene $R_x \cap R_y$

• INVERSIONE TR. ZETA :

$$\mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = x(n) = \frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) \cdot z^{n-1}\, dz$$

• T. DEI RESIDUI DI CAUCHY : $\frac{1}{j2\pi} \oint_{\gamma} X(z) \cdot z^{n-1}\, dz = \sum_{i=1}^{N_p} R_i \left[X(z)\, z^{n-1}\right]_{POLI \in \gamma}$

$\rightsquigarrow$ RESIDUO DI $X(z) \cdot z^{n-1}$ NEI POLI i, IN γ

• ESPANSIONE IN FRATTI SEMPLICI :

Hp : SIA $X(z)$ RAZIONALE, $P_d > P_m$, $(z - p_i)$ SEMPLICI, ROC$(X(z))$ DEL TIPO $|z| > \rho$

$$\rightarrow X(z) = \sum_i R_i \frac{1}{1 - d_i z^{-1}} \,/\, R_i = X(z) \cdot (1 - d_i \cdot z^{-1})\Big|_{z = d_i}$$

$$\rightarrow x(n) = \sum_i R_i (d_i)^{n} u(n)$$

06 · SISTEMI LTI A TEMPO DISCRETO

- STAZIONARIETÀ: $L[x(n)] = y(n) \rightarrow L[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$, $\forall n_0$

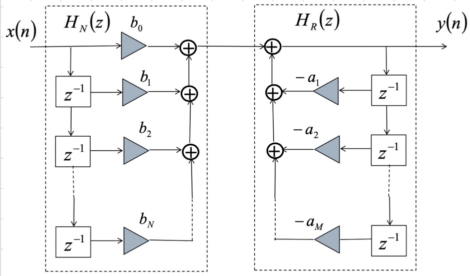
- S. CAUSALE: $y(n) \not\leftrightarrow x(n+n_0) \,/\, n_0 > 0$ ~> $y(n)$ NON DIPENDE DA TERMINI FUTURI ALL'INGRESSO

- S. SENZA MEMORIA: $y(n) \not\leftrightarrow x(n-n_0) \,/\, n_0 > 0$

- S. PASSIVO: $E_y \leq E_x < \infty \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |y(n)|^2 \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2$

- S. LTI A t DISCRETO:

$$\rightarrow y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(n-k)$$



-> BISOGNA TROVARE $y(n) \,/\, n \geq 0$, COND. INIZIALI: $y(-1), \dots, y(-M)$

- $y(n) = y_{s0}(n) + y_{i0}(n)$, DOVE:

  - $y_{s0}(n)$: RISPOSTA ALLO STATO NULLO -> $y_{i0}(n) = 0 = y(-1), \dots, y(-M)$

$$\rightarrow y_{s0}(n) + \sum_{k=1}^{M} a_k\, y_{s0}(n-k) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(n-k)$$

  - $y_{i0}(n)$: RISPOSTA ALL'INGRESSO NULLO -> $\sum_{k=0}^{N} b_k\, x(n-k) = 0$

$$\rightarrow y_{i0}(n) + \sum_{k=1}^{M} a_k\, y_{i0}(n-k) = 0$$

· RISPOSTA ALL'IMPULSO DI S. LTI:

- SIST. "SCARICO": C.I. $= 0$, CARATTERIZZATO DA $h(n)$:

$$\rightarrow h(n) = y_{s0}(n)\Big|_{x(n) = \delta(n)} \qquad \rightarrow h(n) = L[\delta(n)]$$

$$\rightarrow y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\, h(n-i)$$

· RISPOSTA IN f DI S. LTI:

CONSIDERANDO LA DTFT: $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\, H(e^{j\omega}) \,/\, H(e^{j\omega}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h(i)\, e^{-j\omega i}$

-> SE $x(n) = e^{j\omega_0 n}$ -> $y(n) = |H(e^{j\omega_0})|\, e^{j\omega_0 n + j\angle H(e^{j\omega_0})}$

ANALOG. SENO

-> SE $x(n) \overset{\sim}{=} \cos(\omega_0 n + \theta)$ -> $y(n) = |H(e^{j\omega_0})| \cos\left(\omega_0 n + \theta + \angle H(e^{j\omega_0})\right)$

• ANALISI TRAMITE $\mathcal{Z}[\cdot]$:

SIA S. LTI SCARICO $(\to C.I. = 0)$:

SE $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,x(n-k) \to Y(z) = \mathcal{Z}[x(n) * y(n)] = X(z)\,Y(z)$

• $ROC(Y(z)) = ROC(X(z)) \cap ROC(H(z))$

• FILTRI DIGITALI:

SIA $y(n)$ EQ. ALLE DIFFERENZE $\xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = -\sum_{k=1}^{M} a_k Y(z) z^{-k} + \sum_{k=0}^{N} b_k X(z) z^{-k}$

$$\to H(z) = H_N(z)\,H_R(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \cdot \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}$$

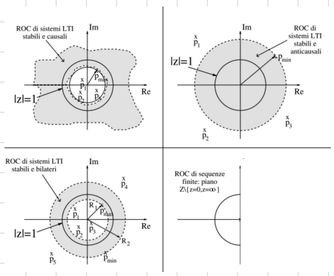
• SIS. FIR: $y(n)$ $(\cdot)!$ $x(n)$ $\to y_{su}(n) = 0$ $(\because a_k = 0)$

$$\to y(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, x(n-k) \to H(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^{-k} \to h(n) = \sum_{k=0}^{N} b_k\, \delta(n-k)$$

• SIS. IIR: $y(n)$ $(\cdot)$ $x(n), y(n-k)$

$$\to y(n) = -\sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k) + \sum_{k=0}^{N} b_k\, \delta(n-k) \to H(z) = \frac{\sum_{k=0} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{M} a_k z^{-k}}$$

• SIS. PURAMENTE RICORSIVO $\iff y(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{M} a_k\, y(n-k)$



• STABILITÀ e REALIZZABILITÀ FISICA DEI S. LTI:

• STABILITÀ (BIBO): $|x(n)| < \infty \to |y(n)| < \infty$

$\to$ UN S. LTI È STABILE (BIBO) $\iff h_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

• SE d_i POLI DI $H(z)$, $|d_i| < 1 \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty \to$ S. CAUSALE e STABILE

$\to$ S. ANTICAUSALI: STABILITÀ (BIBO) $\iff d_i$ POLI DI $H(z)$, $|d_i| > 1$

$\to$ S. BILATERI: " $\iff |e^{j\omega}| = 1 \subset ROC(H(z))$ $\to$ CIRC. RAGGIO UNITARIO

• REALIZZABILITÀ FISICA:

• $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} h(n) \in \mathbb{R} \text{ e causale} \\ \text{EQ. ALLE DIFF. CAUSALE e } \{a_1, \dots, a_M\}, \{b_1, \dots, b_N\} \in \mathbb{R} \end{cases}$

COME IN t CONTINUO

$\rightarrow H(z)$ COEFFICIENTI $\in \mathbb{R} \Leftrightarrow \exists\ \bar{p}_i, \bar{z}_i, \forall p_i, z_i$ ~> POLI e ZERI

• SISTEMI INVERSI:

$$H_1(z) = H^{-1}(z) = \frac{1}{H(z)}$$

ZERO DI $H(z)$

• SE $H_1(z)$ CAUSALE $\rightarrow$ ROC: $|z| > \max |c_i|$

• STABILITÀ BIBO $H_1(z) \Leftrightarrow |z| < 1 \subset$ ROC, $c_i \in |z| < 1$

• SE S. LTI CAUSALE e STABILE, CON $z_i, p_i \in |z| < 1 \rightarrow \exists\ H_1(z)$ CAUSALE e STABILE

• SISTEMA IDENTITÀ: $H_c(z) = H(z)\, H_1(z) = 1 \rightarrow h_c(n) = \delta(n)$

• SIST. A FASE MINIMA $\Leftrightarrow p_i, z_i$ DI $H(z) \in |z| < 1$

$\rightarrow$ S. CAUSALI, STABILI, FASE MINIMA $\rightarrow$ min DISTORSIONE DI $\angle H(z)$ CON PARI $|H(z)|$

$\rightarrow \exists\ H_1$, STABILE DI S. LTI CAUSALE $\Leftrightarrow \angle H(z)$ È MINIMA