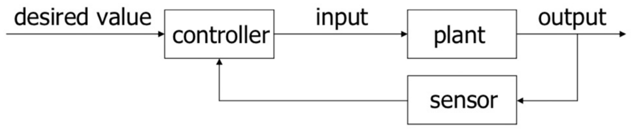
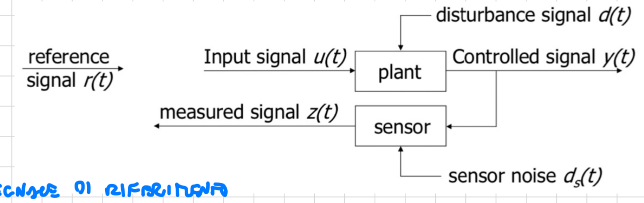
RIPASSO

- $u(t)$: INPUT $\longrightarrow$ $\boxed{\text{SYSTEM}}$ $\longrightarrow$ $y(t)$: OUTPUT
  - $u(t)$ ↳ CAUSA, SOLLECITAZIONE
  - $y(t)$ ↳ EFFETTO, RISPOSTA



- COMPONENTI BASE DI UN SISTEMA DI CONTROLLO:
  - IMPIANTO: SISTEMA DA CONTROLLARE
  - SENSORI: IN BASE ALL' USCITA, DANNO INFO SULL' IMPIANTO
  - CONTROLLI: COMPARA OUT MISURATO E OUT DESIDERATO, FORNENDO NUOVI INPUT

- CONTROLLO AD ANELLO APERTO:



-> PROBLEMI DI TRACCIAMENTO

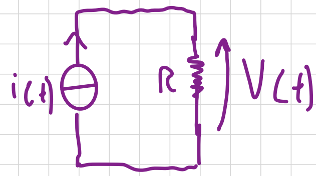
- OBIETTIVO:

DETERMINARE $u(t), \forall t \geq t_0 \;/\; y(t) \simeq r(t), \forall t \geq t_0$ ↗ SEGNALE DI RIFERIMENTO

- BISOGNA TROVARE $f \;/\; y(t) = f(u(t))$

es. 1

- $y(t) = V(t), \quad u(t) = i(t)$ (ANALOG. $R(t)$)
- $r(t)$: ANDAMENTO DESIDERATO $\rightarrow y(t) \simeq r(t)$



1. $y(t) = f(u(t))$: $V(t) = R\,i(t) \rightarrow y(t) = R\,u(t)$

2. VOGLIO IMPORRE $y(t) = R(t), \forall R(t)$:

$\rightarrow y(t) = R(t) \iff u(t) = \frac{1}{R} R(t) \rightarrow y(t) = R\,u(t) = R \cdot \frac{1}{R} R(t) = R(t)$

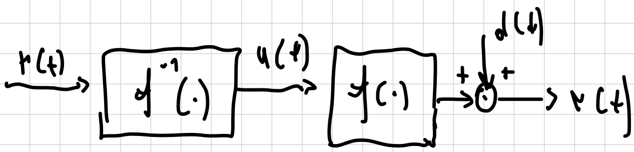
$\rightarrow u(t) = \frac{1}{R} R(t) \xmapsto{\text{CONTROLLORE}} \underbrace{i(t) \mapsto R \mapsto V(t)}_{\text{IMPIANTO}}$

- IN GENERALE: $r(t) \mapsto \boxed{f^{-1}(\cdot)} \mapsto u(t) \mapsto \boxed{f(\cdot)} \mapsto y(t)$

DOVE $y(t) = f\left(f^{-1}(u(t))\right) \triangleq r(t)$

- DISTURBI:

$\rightarrow y(t) = d(t) + f\left(f^{-1}(r(t))\right) = d(t) + r(t)$

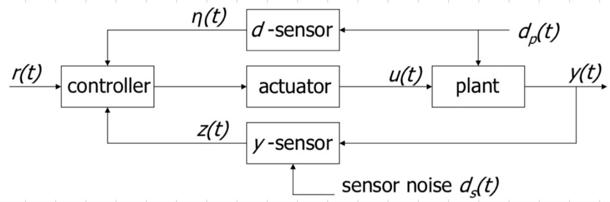


- ERRORE DI TRACKING: $e(t) \triangleq y(t) - r(t) = d(t)$

$\hookrightarrow$ IL CONTROLLO AD ANELLO APERTO FALLISCE L'OBIETTIVO DI $y(t) \simeq r(t)$

• PER OTTENERE $y(t) \simeq r(t)$ ed EVITARE ERRORI DI DISTURBO, NECESSITÀ DI RETROAZIONE

→ SERVE A STABILIZZARE SISTEMI INSTABILI



• ATTUATORE: SERVE PER IL CONTROLLO FISICO DEL BLOCCO "CONTROLLORE"

→ AMPLIFICA IL SEGNALE $u(t)$

• RAPPRESENTAZIONE NEGLI SPAZI DI STATO DI UN SIST. DINAMICO:

• SISTEMA STATICO: SISTEMA / $\forall x(t_0) \to \exists!\, y(t_0)$

$\to y(t) = h(u(t))$

es. CIRCUITO CON $V(t) = R\,i(t)$

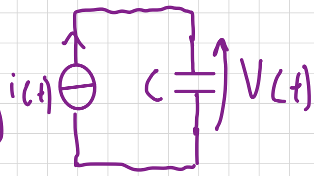
→ SIST. STATICI ∈ SIST. DINAMICI

• SISTEMA DINAMICO: SISTEMA / $y(t) = h(u\underbrace{[0,t]}_{\text{ANCHE VAL. PASSATI}}, \dots)$, $\forall t$

→ MANTIENE MEMORIA DEL PASSATO

es. CIRCUITO CON R E C

$$\begin{cases} Q(t) = C\,V(t), \quad V(t) = y(t) \\ i(t) = C\dfrac{dV(t)}{dt}, \quad \text{RELAZ. COSTITUTIVA DI } C, \quad i(t) = u(t) \end{cases}$$



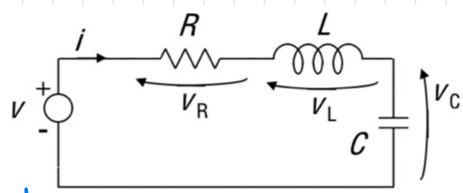
$$\to V(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,dt \longrightarrow y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} u(t)\,dt$$

→ C È UN SIST. DINAMICO: $y(t)$ ⇔ TUTTI I VALORI PASSATI DI t, FINO ALL'ISTANTE t

• PER CONOSCERE IL PASSATO MI BASTA SAPERE $y(t_0)$ (STATO ATTUALE)

$$\to y(t) = V(t) = \frac{1}{C}\left[\int_{-\infty}^{t_0} i(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} i(t)\,dt\right] = V(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)\,dt$$

es. CIRCUITO RLC



1° LEGGE DI OHM SU R
2° REL. COSTITUTIVA L
3° REL. COSTITUTIVA C
4° KVL MAGLIA

$$\begin{cases} V_R(t) = R\,i(t) \\ V_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt} \\ i(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt} \\ V(t) = V_R(t) + V_L(t) + V_C(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^+$$

↳ INGRESSO: $u(t) = V(t)$

USCITA: $y(t) = V_C(t)$

$$\xrightarrow{1°,2° \to 4°} \begin{cases} V(t) = R\,i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt} + V_C(t) \\ i(t) = C\dfrac{dV_C(t)}{dt} \end{cases} \to \begin{cases} \dfrac{di(t)}{dt} = \dfrac{1}{L}\left[-R\,i(t) - V_C(t) + V(t)\right] \\ \dfrac{dV_C(t)}{dt} = \dfrac{1}{C}\,i(t) \end{cases}$$

• PONENDO:

- INGRESSO $u(t) = V(t)$, USCITA $y(t) = V_C(t)$
- VAR. DI STATO $x(t) = \begin{bmatrix} i(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$ ⇝ CIOÈ QUELLE DI CUI HO $\frac{d}{dt}$
  ↳ VETT. DI STATO $\in \mathbb{R}^2$

→ LE EQ. DIFFERENZIALI DEL CIRCUITO RLC DIVENTANO:

• EQ. DI STATO: $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}\left[-R\,x_1(t) - x_2(t) + u(t)\right] \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}\,x_1(t) \end{cases}$, • EQ. D'USCITA: $y(t) = x_2(t)$

• IN GENERALE:

• RAPPRESENTAZIONE NELLO SPAZIO DEGLI STATI:

$$\left.\begin{aligned} &\bullet \text{ EQ. DI STATO: } && \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ &\bullet \text{ EQ. D'USCITA: } && y(t) = g(x(t), u(t)) \end{aligned}\right] \to \text{TEMPO INVARIANTE}$$

• SISTEMA TEMPO VARIANTE $\Leftrightarrow f, g \,/\, f, g\,(t, x(t), u(t))$ ⇝ NON CONSIDERATI IN QUESTO CORSO

• EQ. DI STATO → $x(t) = f(x(t), u(t))$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t)) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_p(t)) \end{cases} \to x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

VETTORE DI STATO

$$\to u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p, \quad f(\cdot) = \begin{bmatrix} f_1(\cdot) \\ \vdots \\ f_n(\cdot) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{n+p} \mapsto \mathbb{R}^n$$

VETTORE DI INPUT

- n: DIM. DEL SISTEMA → SE $n < \infty$: SISTEMA FINITO
- p: DIM. DELL'INPUT DEL SIST. → $\begin{cases} p = 1: \text{SISTEMA A SINGOLO INPUT} \\ p > 1: \text{SISTEMA A INPUT MULTIPLO} \end{cases}$
- q: DIM. DELL'OUTPUT DEL SIST. → $\begin{cases} q = 1: \text{SISTEMA A SINGOLO OUTPUT} \\ q > 1: \text{SISTEMA A OUTPUT MULTIPLO} \end{cases}$

• EQ. D'USCITA → $y(t) = g(x(t), u(t))$

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x(t), u(t)) \\ \vdots \\ y_q(t) = g_q(x(t), u(t)) \end{cases} \to y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q, \quad g(\cdot) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_q(t) \end{bmatrix} : \mathbb{R}^{n+p} \mapsto \mathbb{R}^q$$

VETTORE DI OUTPUT

ES. CIRCUITO $C \mapsto C /\!/ D$ / CARATTERISTICA D NON LINEARE

• IN GENERALE NEI S. LTI:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

DOVE:

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $B \in \mathbb{R}^{n,p}$, $C \in \mathbb{R}^{q,n}$, $D \in \mathbb{R}^{q,p}$

→ ES. CIRCUITO RLC

$$\bullet \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & 0 \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}}^{B} \left[u(t)\right]$$

$$\bullet \left[y(t)\right] = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \left[u(t)\right]$$

3.1 - SOLUZIONE DI SISTEMI LTI DINAMICI:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) & \text{EQ. DI STATO} \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) & \text{EQ. D'USCITA} \end{cases} \Big/ \quad A \in \mathbb{R}^{n,n} \quad B \in \mathbb{R}^{n,p} \quad C \in \mathbb{R}^{q,n},\ D \in \mathbb{R}^{q,p}$$

• LA SOLUZIONE DELL'EQ. DI STATO, SI OTTIENE TRAMITE L'EQ. DI LAGRANGE:

VETT. DI C.I.

$$x(t) = e^{At}\,x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau = X_{zi}(t) + X_{zs}(t)$$

DOVE:

- $X_{zi}(t) = e^{At}\,x(0)$: RISPOSTA LIBERA DELLO STATO -> c.i. C.I. $= x(0)$
- $X_{zs}(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau)\,d\tau$: RISPOSTA FORZATA DELLO STATO

-> SOSTITUENDO $x(t) \mapsto y(t) = C\,x(t) + D\,u(t)$

• RISPOSTA DELL'USCITA:

RISPOSTA LIBERA DELL'USCITA

RISPOSTA FORZATA DELL'USCITA

$$y(t) = \underbrace{C\,e^{At}\,x(0)}_{Y_{zi}(t)} + \underbrace{C\int_0^t e^{A(t-\tau)} B\,u(\tau) + D\,u(t)}_{Y_{zs}(t)} = Y_{zi}(t) + Y_{zs}(t)$$

-> LA RISOLUZIONE IN t È COMPLESSA -> USO LA TRASF. DI LAPLACE $\mathcal{L}$:

http://www.leonardotozzi.joomlafree.it/documenti/Tabella%20Trasformata%20di%20Laplace.pdf

$$\rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s) & (1) \\ Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) & (2) \end{cases}$$

MATRICE IDENTITÀ

(1) $s\,X(s) - x(0) = A\,X(s) + B\,U(s) \rightarrow (sI - A)\,X(s) = X(0) + B\,U(s)$

$\rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1} x(0) + (sI - A)^{-1} B\,U(s) = X_{zi}(s) + X_{zs}(s)$

DOVE:

$X_{zi}(s) = (sI - A)^{-1} \cdot x(0) = H_{x,zi}(s) \cdot x(0)$

$X_{zs}(s) = (sI - A)^{-1} B \cdot U(s) = H_x(s) \cdot U(s)$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left[e^{At}\right] = (sI - A)^{-1}$

(2) $Y(s) = C\,X(s) + D\,U(s) \rightarrow C(sI - A)^{-1} x(0) + \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] U(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s)$

DOVE:

$Y_{zi}(s) = C(sI - A)^{-1}\,x(0) = H_{zi}(s)\,x(0)$

$Y_{zs}(s) = \left[C(sI - A)^{-1} B + D\right] U(s) = H(s)\,U(s)$

$\rightarrow Y(s) \Big|_{X(s) \mapsto X_{zi}(s) + X_{zs}(s)}$

• **PROCEDURA PER LA SOLUZIONE:**

1. $x(t), y(t) \xmapsto{\ \mathcal{L}\ } X(s), Y(s)$
2. PFE di $X(s), Y(s)$ ⇝ Partial Fraction Expansion di Heaviside
3. Determino i residui R_i della PFE
4. $X(s), Y(s) \xmapsto{\ \mathcal{L}^{-1}\ } x(t), y(t)$ risolte

es. 1, slide 12

es. 2, slide 22

Sia dato il sistema:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}, \quad u(t) = \underbrace{\varepsilon(t)}_{\text{gradino unitario}}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

1.

• Definisco "s" come var. di Laplace, e le C.I.: `s = tf('s')` `U=1/s, x0=[1;1]`

$$\cdot\ (sI-A)^{-1} = \left(s\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\cdot\ A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \mathrm{Adj}(A) \rightarrow (sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+3)^2+4} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^t =$$

$$= \frac{1}{s^2+6s+13} \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+13} & \frac{2}{s^2+6s+13} \\ \frac{-2}{s^2+6s+13} & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix}$$

det() https://bit.ly/3CUpeb0

Adj() https://bit.ly/3ufA1sJ

$$\cdot\ Y(s) = C(sI-A)^{-1}x(0) + C(sI-A)^{-1}BU(s) = C(sI-A)^{-1}[x(0) + BU(s)]$$

• `Y = C*inv(s*eye(2)-A)*(B*U+x0)`

$$\cdot\ Y_{zi} = C(sI-A)^{-1}X(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+13} & \frac{2}{s^2+6s+13} \\ \frac{-2}{s^2+6s+13} & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{s+1}{s^2+6s+13}$$

$\mathcal{L}[\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}$

$$\cdot\ Y_{zs} = \left[C(sI-A)^{-1}B + D\right]U(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+6s+13} & \frac{2}{s^2+6s+13} \\ \frac{-2}{s^2+6s+13} & \frac{s+3}{s^2+6s+13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{-2}{s^3+6s^2+13s}$$

$$\rightarrow Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) = \frac{s^2+s-2}{s^3+6s^2+13s} = \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)}$$

• `Y = zpk(minreal(C*inv(s*eye(2)-A)*(B*U+x0)))`, dove:

- `minreal(A, e)`: forza le semplificazioni nella fattorizzazione di A, con tolleranza e
- `zpk(m)`: crea un modello di zeri e poli di m

$$\cdot Y(s) = Y_{zi}(s) + Y_{zs}(s) = \frac{s^2+s-2}{s^3+6s^2+13s} = \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)}$$

- **[num_Y, den_Y] = tfdata(Y, 'v')**

  → RESTITUISCE I 2 VETTORI ('v') num_Y, den_Y DI COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE FRATTA Y → IN QUESTO ES. num_Y = [0 1 1 -2]
  den_Y = [1 6 13]

2.

$$Y(s) = \frac{s^2+s-2}{s(s+3-2j)(s+3+2j)} = \frac{R_1}{s+3-2j} + \frac{R_1^*}{s+3+2j} + \frac{R_2}{s} \quad \Big/ \; R_1 = 0{,}57 \pm j\,0{,}38 \quad R_2 = -0{,}15$$

3.

$$Y(s) = \frac{0{,}57+j\,0{,}38}{s+3-2j} + \frac{0{,}57-j\,0{,}38}{s+3+2j} - \frac{0{,}15}{s}$$

- **[r, p] = residue(num_Y, den_Y)**

  → RESTITUISCE I 2 VETTORI: r DEI RESIDUI, p DEI POLI

• SIA $R = \sigma_0 + j\omega_0$ e $\exists R, R^*$.

$$\mathcal{L}\left[\frac{R}{s-\underbrace{(\sigma_0-j\omega_0)}_{p}} + \frac{R^*}{s-\underbrace{(\sigma_0+j\omega_0)}_{p^*}}\right] = \left[2|R|e^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \angle R\right]\varepsilon(t)$$

4.

$$Y(t) = \left(2|R_1|e^{\sigma_0 t}\cos(\omega_0 t + \angle R_1) + R_2\right)\varepsilon(t) = \left(1{,}38\,e^{-3t}\cos(2t+0{,}58) - 0{,}15\right)\varepsilon(t) \quad \Big/ \; \sigma_0 = -3,\ \omega_0 = 2 \quad |R_1| = 0{,}69 \quad \angle R_1 = 0{,}58$$

- **abs(r(1))** : CALCOLA $|R_1|$
- **angle(r(1))**: CALCOLA $\angle R_1$

/ r(1) : 1° ELEMENTO DEL VETTORE r

4.1 - STABILITÀ, ANALISI MODALE, STABILITÀ INTERNA DI SIS. LTI:

• STABILITÀ DI S. LTI:

• STABILITÀ BIBO: SE $u(t) < \infty$ (LIMITATA) $\to$ $Y_{zs}(t) < \infty$ ⇝ CHECK POLI $H_{Y_{zs}} = C^{*}(sI - A)^{-1}B + D$ / $Y_{zs} = H_{Y_{zs}} \cdot U(s)$

• STABILITÀ INTERNA: SE $X_0 < \infty$ $\to$ $X_{zi}(t) < \infty$ ⇝ CHECK POLI $H_{x_{zi}} = (sI - A)^{-1}$ / $X_{zi} = H_{x_{zi}} X(0)$

• STABILITÀ INTERNA:

• S. LTI È ASINTOTICAMENTE STABILE <=> S. LTI HA STABILITÀ INTERNA e

$X_{zi}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0, \ \forall X_0$ ⇝ QUALSIASI C.I.

• MODI NATURALI:

• CONSIDERO LA RISPOSTA LIBERA DELLO STATO: $X_{zi}(s) = (sI - A)^{-1} X(0)$

DOVE: $(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \mathrm{Adj}(sI - A) = \frac{[a_{ij}(s)]}{p_A(s)}$ / $[a_{ij}(s)] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{i,1} & & a_{i,j} \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow$ POLINOMIO CARATTERISTICO: $p_A(s) = (s - \lambda_i)^{\mu_i} \cdots (s - \lambda_r)^{\mu_r}$ / μ_i: MOLTEPLICITÀ λ_i

$\deg(p_A(s)) = n$

es. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$: $p_A(s) = \det(sI - A) = s^2(s+5)$ $\to$ $\lambda_1 = 0$ CON $\mu_1 = 2$

$\lambda_2 = -5$ CON $\mu_2 = 1$

• SIA $f_{ij}(s)$ LA ENTRY DELLA MATRICE $(sI - A)^{-1}$:

SE $a_{ij}(s)$ e $p_A(s)$ HANNO RADICI IN COMUNE $\to$ SEMPLIFICO I TERMINI

$\to p_A(s) \mapsto q_A(s)$: POLINOMIO MINIMO DI A / $q_A(s) = \mathrm{m.c.m}(q_{ij}(s)), \ \forall i,j$

$\to q_A(s) = (s - \lambda_1)^{\mu_1'} \cdots (s - \lambda_r)^{\mu_r'}$ / $\mu_i' \le \mu_i$, $\deg(q_A(s)) \le \deg(q_A(s)) = n$

es. $(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s(s+5)}{s^2(s+5)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s(s+5)}{s^2(s+5)} & \frac{s}{s^2(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{s^2}{s^2(s+5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+5)} \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+5} \end{bmatrix} \to q_A(s) = s(s+5)$

$\downarrow$

$p_A(s) = s^2(s+5)$

• SIA $f_{ij}(s) = \frac{a'_{ij}(s)}{(s-\lambda_1)^{\mu_1'} \cdots (s - \lambda_r)^{\mu_r'}}$: POLO λ_2 CON FATTORI FINO A GRADO μ_2' — POLO λ_r CON FATT. FINO A μ_r'

$\to f_{ij}(s) = \frac{r_{1,1}}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{r_{1,\mu_1'}}{(s - \lambda_1)^{\mu_1'}} + \frac{r_{2,1}}{s - \lambda_2} + \dots + \frac{r_{2,\mu_2'}}{(s - \lambda_2)^{\mu_2'}} + \dots + \frac{r_{r,1}}{s - \lambda_3} + \dots + \frac{r_{r,\mu_r'}}{(s - \lambda_r)^{\mu_r'}}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} f_{ij}(t) = r_{1,1} e^{\lambda_1 t} + \dots + r_{1,\mu_1'} \frac{t^{\mu_1' - 1}}{(\mu_1' - 1)!} e^{\lambda_1 t} + r_{2,1} e^{\lambda_2 t} + \dots + r_{2,\mu_2'} \frac{t^{\mu_2' - 1}}{(\mu_2' - 1)!} e^{\lambda_2 t} + \dots + r_{r,1} e^{\lambda_r t} + \dots + r_{r,\mu_r'} \frac{t^{\mu_r' - 1}}{(\mu_r' - 1)!} e^{\lambda_r t}$

$\rightarrow \lambda_1 \longrightarrow m_{1,0}(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \lambda_2 = m_{1,1}(t) = t e^{\lambda_1 t}, \dots, m_{1,\mu_1'}(t) = \dfrac{t^{\mu_1'-1}}{(\mu_1'-1)!} e^{\lambda_1 t}$

$\vdots$

$\lambda_r \longrightarrow m_{r,0}(t) = e^{\lambda_r t}, \quad m_{r,1}(t) = t e^{\lambda_r t}, \dots, m_{r,\mu_r'}(t) = \dfrac{t^{\mu_r'-1}}{(\mu_r'-1)!} e^{\lambda_r t}$

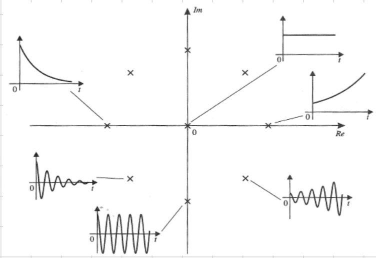
$\rightarrow$ **MODI NATURALI**: $m_{\ell k}(t), \quad \ell = 1, \dots, r, \quad k = 1, \dots, \mu_r'$

- SE $\lambda_i \in \mathbb{C}: \lambda_i = \sigma_0 \pm j\omega_0$, CON MOLTEPLICITÀ μ_i': $\rightarrow m_{\mu'}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!} e^{(\sigma_0 + j\omega_0)t} \\ \dfrac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!} e^{(\sigma_0 - j\omega_0)t} \end{cases} \rightarrow \dfrac{t^{\mu'-1}}{(\mu'-1)!} e^{\sigma_0 t} \cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\rightarrow X_{zi}(t)$ È UN C.L. DEI $m_{\ell k}(t)$ DEL SISTEMA

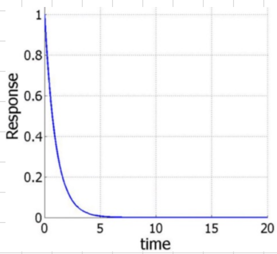
- CLASSIFICAZIONE:
  - $m(t)$ È CONVERGENTE $\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} |m(t)| = 0$
  - $m(t)$ È LIMITATO $\Leftrightarrow 0 \le |m(t)| \le M < \infty$
  - $m(t)$ È DIVERGENTE $\Leftrightarrow \lim_{t \to \infty} |m(t)| = \infty$

- **ANALISI MODALE DI UN SISTEMA**: $\rightsquigarrow$ RIASSUNTO $\lambda \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$, $\mu' = 1$



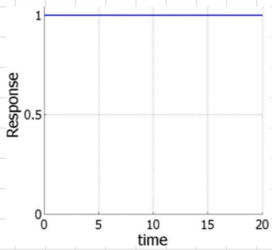
- $\mu' = 1$: $\rightsquigarrow m(t) = e^{\lambda t}$
  - $\lambda \in \mathbb{R}$:

• Re(λ) < 0



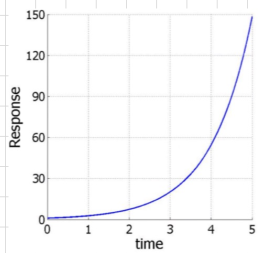
ESPONENZIALMENTE CONVERGENTE

• Re(λ) = 0



LIMITATA (COSTANTE)

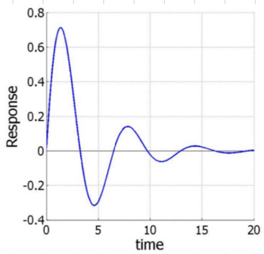
• Re(λ) > 0



ESPONENZIALMENTE DIVERGENTE

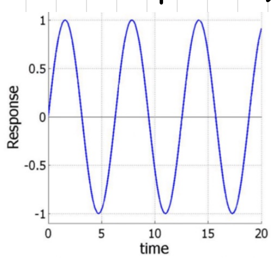
- $\lambda \in \mathbb{C}$: $\rightsquigarrow \lambda = \sigma \pm j\omega \rightarrow m(t) = e^{\sigma t}\cos(\omega t), \; e^{\sigma t}\sin(\omega t)$

• Re(λ) = σ < 0



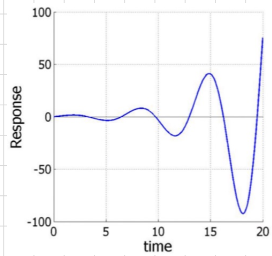
ESPONENZIALMENTE CONVERGENTE

• Re(λ) = σ = 0, Im(λ) = $\omega \neq 0$



LIMITATA (OSCILLANTE)

• Re(λ) = σ > 0

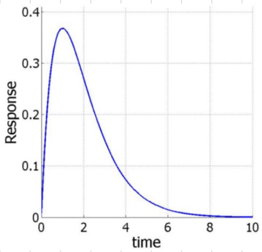


ESPONENZIALMENTE DIVERGENTE

• $\mu' > 1$: $\rightsquigarrow m(t) = t^{\mu'-1} e^{\lambda t}, \dots, t e^{\lambda t}$

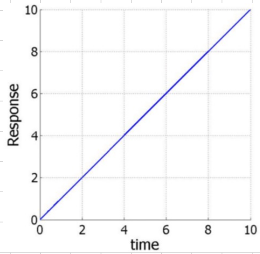
• $\lambda \in \mathbb{R}$:

• $Re(\lambda) < 0$



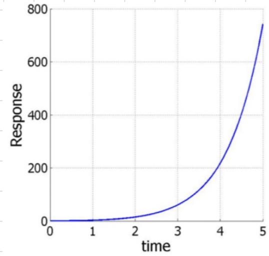
ESPONENZIALMENTE CONVERGENTE

• $Re(\lambda) = 0$



POLINOMIALMENTE DIVERGENTE

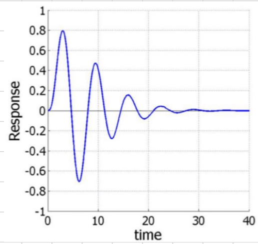
• $Re(\lambda) > 0$



ESPONENZIALMENTE DIVERGENTE

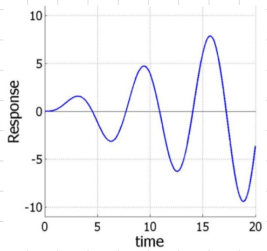
• $\lambda \in \mathbb{C}$:

• $Re(\lambda) = \sigma < 0$



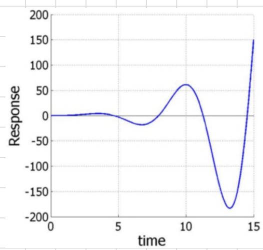
ESPONENZIALMENTE CONVERGENTE

• $Re(\lambda) = \sigma = 0$



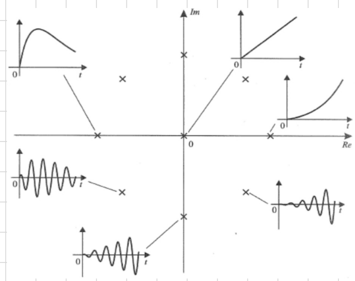
POLINOMIALMENTE DIVERGENTE

• $Re(\lambda) = \sigma > 0$



ESPONENZIALMENTE DIVERGENTE

• $\mu' = 2$:



• SUMMARY :

• $m_i(t)$ È LIMITATO $\iff Re(\lambda_i(A)) = 0$ AND $\mu'(\lambda_i(A)) = 1$

• $m_i(t)$ È CONVERGENTE $\iff Re(\lambda_i(A)) < 0$

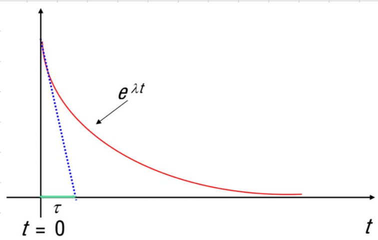
• $m_i(t)$ È DIVERGENTE $\iff Re(\lambda_i(A)) > 0$ OR $\left[Re(\lambda_i(A)) = 0 \text{ AND } \mu'(\lambda_i(A)) > 1 \right]$

• COSTANTE DI TEMPO :

SIA $m_i(t)$ CONVERGENTE, CON $Re(\lambda_i) < 0$: $\tau = \left| \frac{1}{Re(\lambda)} \right|$

→ È UNA MISURA DELLA VELOCITÀ DI CONVERGENZA DEL MODO

→ PUÒ ESSERE VALUTATA COME $t \,/\, y = 0 \wedge \left. \frac{d e^{\lambda t}}{dt} \right|_{t=0}$



es. 1 slide 48

es. 2 slide 50

• calcolo λ_i e μ_i :

>> H = inv(s*eye(4)-A)

>> zpk(H)

```
From input 1 to output...
        (s+0.5)
 1:  ---------------
     (s^2 + s + 25.25)

          -5
 2:  ---------------
     (s^2 + s + 25.25)

        -6 (s+1.908) (s+1.092)
 3:  -----------------------------
     (s+3) (s-1) (s^2 + s + 25.25)

        -3 (s+7.781) (s+0.3855)
 4:  -----------------------------
     (s+3) (s-1) (s^2 + s + 25.25)

From input 2 to output...
          5
 1:  ---------------
     (s^2 + s + 25.25)

        (s+0.5)
 2:  ---------------
     (s^2 + s + 25.25)

        -29 (s+2.569)
 3:  -----------------------------
     (s+3) (s-1) (s^2 + s + 25.25)

        (s-19.19) (s+4.69)
 4:  -----------------------------
     (s+3) (s-1) (s^2 + s + 25.25)

From input 3 to output...
 1:  0

 2:  0

       (s+2)
 3:  -----------
     (s+3) (s-1)

         3
 4:  -----------
     (s+3) (s-1)

From input 4 to output...
 1:  0

 2:  0

         1
 3:  -----------
     (s+3) (s-1)

         s
 4:  -----------
     (s+3) (s-1)
```

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & -0.5 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

→ $\lambda_{1,2} = -0{,}5 \pm j5$, $\mu_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 1$, $\mu_3 = 1$, $\lambda_4 = -3$, $\mu_4 = 1$

$m_{1,2}(t) = e^{-0{,}5t} \cos(5t + \varphi)$ → exp conv. $m_3(t) = e^{t}$ → exp diverg. $m_4(t) = e^{-3t}$ → exp conv.

→ $\tau_{1,2} = \left| \frac{1}{Re(\lambda_{1,2})} \right| = \left| \frac{1}{-0{,}5} \right| = 2\,s$, $\tau_3 = \left| \frac{1}{1} \right| = 1\,s$, $\tau_4 = \left| \frac{1}{-3} \right| = 0{,}\bar{3}\,s$

• SUMMARY 2:

• STABILITÀ INTERNA:

DEF.: SE $X_0 < \infty \rightsquigarrow X_{zi}(t) < \infty$

$\rightarrow \forall\ m_i(t) < M < \infty \rightarrow (\forall \lambda_i < 0)$ OR $\underbrace{[(\lambda_j = 0) \text{ AND } (\mu_j = 1)]}$

IN QUESTO CASO CALCOLO IL POL. MIN. PER VEDERE μ_j

• STABILITÀ ASINTOTICA:

DEF.: $X_{zi}(t) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0,\ \forall X_0$

$\rightarrow \forall\ m_i(t)$ CONVERGENTI $\rightarrow \forall \lambda_i < 0$ ~> STRETTAMENTE

• INSTABILITÀ:

PER CALCOLARE μ_j HO BISOGNO DEL pol min

DEF.: ! STABILITÀ INTERNA

$\rightarrow \exists\ m_i(t)$ DIVERGENTE $\rightarrow (\exists \lambda_i > 0)$ OR $[(\exists Re(\lambda_i) < 0)$ AND $\overbrace{((\exists Re(\lambda_j) = 0) \text{ AND } (\mu_j > 1))}]$

es. 1, 2, 3 slide 61 ÷ 66

es. 4 slide 67

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -k & -1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

• STUDIARE LA STABILITÀ DI A AL VARIARE DI K

$\rightarrow$ • $\lambda(A) = \lambda(-2) \cup \lambda\left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix}}_{M(k)}\right)$

↳ $\lambda_1 = -2$

• $p(\lambda) = \det(\lambda I - M(k)) = \lambda^2 + \lambda + k$

$\rightarrow$ USO IL CRITERIO DI CARTESIO:

Criterio di Cartesio: https://bit.ly/3IFZtg3

- SE $K > 0 \rightarrow \lambda_2, \lambda_3 \ /\ Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) < 0$
- SE $K < 0 \rightarrow \lambda_2, \lambda_3 \ /\ Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) > 0$
- SE $K = 0 \rightarrow \lambda_2, \lambda_3 \ /\ Re(\lambda_2) < 0$ e $Re(\lambda_3) = 0$

$\rightarrow$

- SE $K > 0 \rightarrow \lambda_1 = -2,\ Re(\lambda_2) < 0,\ Re(\lambda_3) < 0 \rightarrow$ S. ASINTOTICAMENTE STABILE
- SE $K < 0 \rightarrow \lambda_1 = -2,\ Re(\lambda_2) < 0,\ Re(\lambda_3) > 0 \rightarrow$ S. INSTABILE
- SE $K = 0 \rightarrow \lambda_1 = -2,\ Re(\lambda_2) < 0,\ Re(\lambda_3) = 0 \rightarrow$ S. STABILE

  ↳ $\mu_3 = 1$

5.1 - PROPRIETÀ DI REGIME STAZIONARIO DI S. LTI STABILI:

• ANALISI A REGIME STAZIONARIO:

Hp: CONSIDERO UN S. LTI, BIBO STABILE, ASINTOTICAMENTE STABILE: $\rightsquigarrow Re(p_i) < 0$

$$\to H(s) = \frac{N_H(s)}{D_H(s)} = \frac{N_H(s)}{\prod_{i=1}^{n_h} (s-p_i)^{M_i}} \Big/ \; n_h \text{ POLI } p_i \text{ DISTINTI}, \; \forall i,\; Re(p_i) < 0$$

• STUDIO $Y_{zs}(t) \,/\, Y_{zs}(s) = H(s)\,U(s)$:

ESSENDO $U(s) = \frac{N_U(s)}{D_U(s)} = \frac{N_U(s)}{\prod_{j=1}^{n_u} (s-q_j)^{m_j}} \to Y_{zs}(s) = \frac{N_H(s)}{\prod_{i=1}^{n_h} (s-p_i)^{M_i}} \cdot \frac{N_U(s)}{\prod_{j=1}^{n_u} (s-q_j)^{m_j}}$

SUPPONGO CHE $D_H(s), D_U(s)$ ABBIANO RADICI DISTINTE

$$\to Y_{zs}(s) = \sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^{M_j} \frac{R_{j,k}}{(s-p_j)^k} + \sum_{j=1}^{n_u} \sum_{k=1}^{m_j} \frac{Q_{j,k}}{(s-q_j)^k} \Big/ \; \forall \text{ POLO } p_j / q_j, \text{ CONSIDERO TUTTI I LORO TERMINI FINO A } M_j / m_j$$

$\hookrightarrow$ PER VIA DI PFE

$$\rightsquigarrow Y(t) = \underbrace{\sum_{j=1}^{n_h} \sum_{k=1}^{M_j} R_{j,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{p_j t}}_{\text{RISP. AL TRANSITORIO, } m(t) \text{ NATURALI}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n_u} \sum_{k=1}^{m_j} Q_{j,k} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{q_j t}}_{\text{RISP. A REGIME STAZIONARIO, } m(t) \text{ D' INGRESSO}} = Y_{tr}(t) + Y_{ss}(t)$$

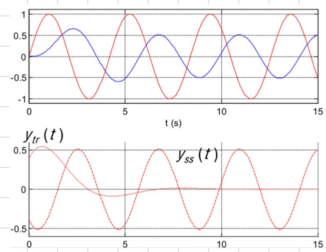
$\ast \to$ PER $t \mapsto \infty$: $Y_{tr}(t) \mapsto 0 \longrightarrow Y(t) \mapsto Y_{ss}(t)$ $\rightsquigarrow Y_{tr}(t) \mapsto 0 \because m(t)$ DEL SIST. SONO CONVERGENTI PER Hp

• IN CASO $D_H(s), D_U(s)$ NON AVESSERO RADICI DISTINTE, $Y(s)$ SAREBBE LA SOMMA DI 2 TERMINI CHE INCLUDONO SOLO I POLI DISTINTI DI $H(s)$ e $U(s)$ + 1 TERMINE MISTO

$\to$ MA ANCHE IN QUESTO CASO $Y(t) = Y_{tr}(t) + Y_{ss}(t)$ / VALE $\ast$

es. 1

$u(t) = \sin(1.5t)$ $\quad y(t) = \boxed{0.8871 e^{-0.5t} \cos(0.866t - 1.1113)\varepsilon(t)} + \boxed{0.5121 \cos(1.5t + 2.4469)\varepsilon(t)}$



es. 2

$$H(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{(s+0{,}5-j\,0{,}866)(s+0{,}5+j\,0{,}866)}$$

$$U(s) = \frac{1{,}5}{s^2+1{,}5^2} \to u(t) = \sin(1{,}5\,t)$$

$$\to Y(s) = H(s)\,U(s) = \frac{-0{,}1967 + j\,0{,}7639}{(s+0{,}5-j\,0{,}866)} + \frac{-0{,}1967 - j\,0{,}7639}{(s+0{,}5+j\,0{,}866)} + \frac{0{,}1967 - j\,0{,}3975}{(s-j\,1{,}5)} + \frac{0{,}1967 + j\,0{,}3975}{(s+j\,1{,}5)}$$

$$\rightsquigarrow Y(t) = Y_{tr}(t) + Y_{ss}(t) = 0{,}8871\, e^{-0{,}5t} \cos(0{,}866\,t - 1{,}1113)\,\varepsilon(t) + 0{,}5121 \cos(1{,}5\,t + 2{,}4469)\,\varepsilon(t)$$

• PROPRIETÀ A REGIME STAZIONARIO DI S. LTI STABILI:

Hp: SIA $H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$

T. DEL VALORE FINALE: $\lim_{t \mapsto \infty} Y(t) = \lim_{s \mapsto 0} s\,Y(s)$ $\quad \mathcal{L}[\bar{u}\,\varepsilon(t)] = \frac{1}{s}\bar{u}$

GRADINO UNITARIO • SE $u(t) = \bar{u}\,\varepsilon(t)$, $Y_{ss}(t) = \bar{Y}\varepsilon(t) \to \bar{Y} = \lim_{s \mapsto 0} s\,H(s) \cdot \frac{\bar{u}}{s} = \bar{u} \cdot H(0) = \bar{u} \cdot \frac{b_0}{a_0}$

GAIN IN CONTINUA: IN MATLAB dcgain(H)

• SE $u(t) = \bar{u} \sin(\omega_0 t) \to \bar{Y}(\omega_0) = \bar{u}\,|H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \angle H(j\omega_0))$

3.3 - EQUILIBRIO DI UN S. DINAMICO, LINEARIZZ. DI SIST. DINAMICI NON LINEARI:

• EQUILIBRIO DI UN S. DINAMICO:

SIA $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$

• $\exists$ EQUILIBRIO $\iff$ PONENDO $\begin{cases} u(t) = \text{cost.} \ \bar{u} \\ x(0) = \text{cost.} = \bar{x} \end{cases}$ $\rightarrow$ RISULTA $x(t) = \bar{x}, \ \forall t \geq 0$

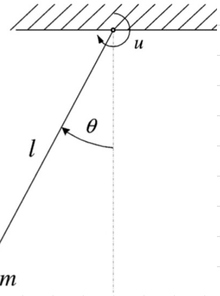
, DOVE $\bar{u}$: INGRESSO D'EQUILIBRIO , $\bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u})$: USCITA D'EQUILIBRIO

e $(\bar{x}, \bar{u})$: PUNTO D'EQUILIBRIO

• SE $\exists (\bar{x}, \bar{u}) \rightarrow f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \ \because \ x(t) = \bar{x}, \forall t \geq 0 \rightarrow \dot{x}(t) = f(\bar{x}, \bar{u}) = 0, \forall t \geq 0$

• PER I S. LTI : $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0 \rightarrow A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \rightarrow \bar{x} \overset{\text{SE } \det(A) \neq 0}{=} -A^{-1} B \bar{u}$

es. PENDOLO



$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$, $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{l} \sin(x_1(t)) - \frac{\beta}{ml^2} x_2(t) + \frac{1}{ml} u(t) \end{cases}$

$y(t) = x_1(t)$

• CONSIDERO $\bar{u} = 0$, $\dot{x}(t) = \dot{\bar{x}} = 0 = f(\bar{x}, \bar{u})$:

$\rightarrow \begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\frac{g}{l} \sin \bar{x}_1 - \frac{\beta \bar{x}_2}{ml^2} + \frac{\bar{u}}{ml} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 - \frac{g}{l} \sin \bar{x}_1 \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} \sin \bar{x}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \bar{x}_1 = k\pi, \ k = 0, \pm 1, \dots \\ \bar{x}_2 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$

ALL'EQUILIBRIO: $\rightarrow y(t) = \bar{y} = \bar{x}_1 = k\pi, \ k = 0, \pm 1, \dots$

• LINEARIZZAZIONE DI S. DINAMICI NON-LINEARI:

IN GENERE, I SIST. REALI SONO NON-LINEARI $\rightarrow$ USO UNA LORO APPROSSIMAZIONE : SERIE DI TAYLOR

• ESP. DI TAYLOR DEL I ORDINE: $f(x) = f(x_0 + \delta x) \simeq f(x_0) + \left.\frac{d f(x)}{dx}\right|_{x = x_0} \cdot \delta x$

$\rightarrow$ LA RISOLUZIONE DEL PROB. DI CAUCHY $\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ u(t) = \bar{u} + \delta u(t), \ x(0) = \bar{x} + \delta x(0) \end{cases}$ È COMPLESSA

$\rightarrow$ CONSIDERO L'APPROSSIMAZIONE $\tilde{x}(t) = \bar{x} + \delta x(t) \simeq x(t)$

$\hookrightarrow \delta x(t)$ OTTENUTO DA $\delta \dot{x}(t) = A \delta x(t) + B \delta u(t)$

$\rightarrow$

$\delta x(t) = x(t) - \bar{x}$: PERTURBAZIONE DELLO STATO $\in \mathbb{R}^n \rightarrow x(t) = \bar{x} + \delta x(t)$

$\delta u(t) = u(t) - \bar{u}$: PERTURBAZIONE DELL'INGRESSO $\in \mathbb{R}^p \rightarrow u(t) = \bar{u} + \delta u(t)$

$\delta y(t) = y(t) - \bar{y}$: PERTURBAZIONE DELL'USCITA $\in \mathbb{R}^q \rightarrow y(t) = \bar{y} + \delta y(t)$

$\cdot\ \delta\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{x}} = f(x(t), u(t)) - 0 = f(x(t), u(t))$

$\rightarrow$ Exp di Taylor di I ordine:

$$f(x(t),u(t)) = f(\bar{x} + \delta x(t), \bar{u} + \delta u(t)) = \overset{=0}{f(\bar{x},\bar{u})} + \frac{d f(x,u)}{dx}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \delta x(t) + \frac{d f(x,u)}{du}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot \delta u(t)$$

$$\rightarrow f(x(t),u(t)) \simeq \frac{d f(x,u)}{dx}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta x(t) + \frac{d f(x,u)}{du}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta u(t)$$

$$\rightarrow \delta\dot{x}(t) = \frac{d f(x,u)}{dx}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta x(t) + \frac{d f(x,u)}{du}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \delta u(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t)$$

$$\rightarrow \begin{cases} \delta\dot{x}(t) = A\,\delta x(t) + B\,\delta u(t) \\ \delta y(t) = C\,\delta x(t) + D\,\delta u(t) \end{cases}$$

$$\rightarrow \text{sia } J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_1}{\delta x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta f_m}{\delta x_1} & \cdots & \frac{\delta f_m}{\delta x_m} \end{bmatrix}$$ $\rightsquigarrow$ JACOBIANO DI f

https://bit.ly/3wV618k

$$\rightarrow A = \frac{\delta f(x,u)}{\delta x}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = J_f(x)\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \quad B = \frac{\delta f(x,u)}{\delta u}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = J_f(u)\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

$$C = \frac{\delta y(x,u)}{\delta x}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = J_y(x)\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \quad D = \frac{\delta y(x,u)}{\delta u}\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} = J_y(u)\bigg|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}$$

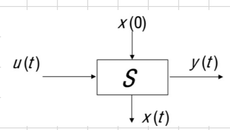
es. PENDOLO

$$\begin{cases} f_1(x,u) = \dot{x}_1 = x_2 \\ f_2(x,u) = \dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin x_1 - \frac{\beta x_2}{ml^2} - \frac{u}{ml^2} \\ y(x,u) = y = x_1 \end{cases}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$$

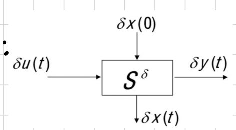
$$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\bar{x}_1 & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underset{\text{ok}}{\pm}\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

· RAPPR. A BLOCCHI:

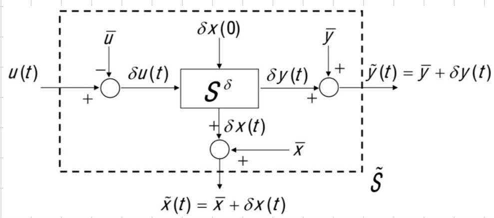
· S. LINEARE:



· S. NON LINEARE:



$\rightarrow$ SIS. APPROSSIMATO $\tilde{S}$:



4.3 - STABILITÀ SOLUZ. ALL'EQUILIBRIO DI SIS. NON LINEARI, ANALISI STABILITÀ SOL. ALL'EQUILIBRIO CON LINEARIZZ.

• STABILITÀ SOLUZ. ALL'EQUILIBRIO:

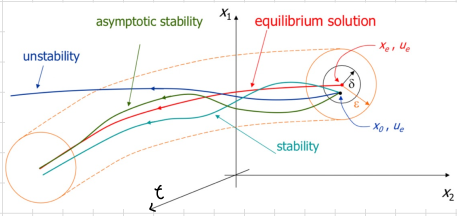
DEF. INTUITIVA ↳ • STABILITÀ: SE TUTTE LE SOLUZ. CHE PARTONO VICINO A $\bar{x}$, RIMANGONO VICINO A $\bar{x}$ PER TUTTO IL t

• DEF.:

• $\bar{x}$ È <u>STABILE</u> $\iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \;/\; \forall x_0 \;/\; \|x_0 - \bar{x}\| \leq \delta \to \|x_p(t) - \bar{x}\| \leq \varepsilon,\ \forall t \geq 0$

↳ $\bar{x}$ È STABILE $\iff \exists$ UN INTORNO LIMITATO δ DELLE C.I. / IL RISULTATO RIMANE LIMITATO IN UN INTORNO ε

↳ $x_p(t)$: PERTURBAZIONE DELLA SOLUZ. ALL'EQUILIBRIO



• $\bar{x}$ È <u>ASINT. STABILE</u> $\iff \lim_{t \to \infty} \|x_p(t) - \bar{x}\| = 0$

↳ $\bar{x}$ È ASINT. STABILE $\iff x(t)$ SI AVVICINA A $\bar{x}$, PER $t \to \infty$

• SIA $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$:

-> $\exists$ STABILITÀ INTERNA $\iff \exists$ STABILITÀ $\forall$ SOLUZ. ALL'EQUILIBRIO $\bar{x}$ DEL S. LTI

-> $\exists$ " ASINTOTICA $\iff \exists$ " ASINTOTICA "

-> $\exists$ INSTABILITÀ $\iff \exists$ INSTABILITÀ "

• STABILITÀ DELLA SOLUZ. ALL'EQUILIBRIO DI UN S. LINEARIZZATO:

-> SIA $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \,/\, f(\cdot) : D \to \mathbb{R}^n \in C^1$, D INTORNO DI $\bar{x}$, $A = \left.\dfrac{df(x,u)}{dx}\right|_{\substack{x = \bar{x} \\ u = \bar{u}}}$

• STABILITÀ ASINTOTICA $\iff Re(\lambda_i(A)) < 0,\ \forall i$

• INSTABILITÀ $\iff \exists\, i \,/\, Re(\lambda_i(A)) > 0$

• SE $Re(\lambda_i(A)) \leq 0,\ \forall i$ -> NON POSSO DEDURRE ANCORA CONCLUSIONI

es. PENDOLO

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l}\cos\bar{x}_1 & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{u} = 0 \;\Big/\; \begin{matrix} + \text{ SE } K \text{ DISPARI} \\ - \text{ SE } K \text{ PARI} \end{matrix}$$

• SE $\beta > 0$:

• SE K PARI -> (es. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$), $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix}$

-> $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{\beta}{ml^2}\lambda + \frac{g}{l}$ -> (CR. CARTESIO) $Re(\lambda_{1,2}(A)) < 0$ -> $\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, K DISPARI -> ASINT. STABILE

• SE K DISPARI -> (es. $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \end{bmatrix}$), $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & -\frac{\beta}{ml^2} \end{bmatrix}$

-> $\exists\, i \,/\, Re(\lambda_i(A)) > 0$ -> $\bar{x} = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, K PARI -> INSTABILE

• SE $\beta = 0$:

• K PARI -> $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{g}{l}$ -> $\lambda_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{g}{l}}$ -> $Re(\lambda_{1,2}) = 0$ -> NO CONCLUSIONI

• K DISPARI -> $p_A(\lambda) = \lambda^2 - \frac{g}{l}$ -> $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{g}{l}}$ -> $\exists i / Re(\lambda_i) > 0$ -> INSTABILITÀ

- ## SUMMARY DIAGRAMMI DI BODE:

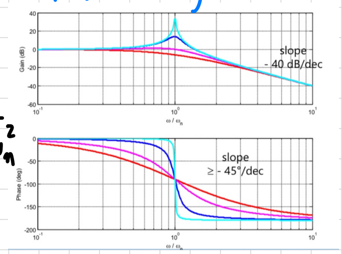
Riassunto Bode: http://www.edutecnica.it/sistemi/bode/bode.htm

$$H(s) = K \frac{\prod_i^{m} \left(1 - \frac{s}{z_i}\right)}{s^n \prod_j^{m-n} \left(1 - \frac{s}{z_j}\right)} \quad / \quad K = \lim_{s \to 0} s^n H(s) \to \text{DC-GAIN}$$

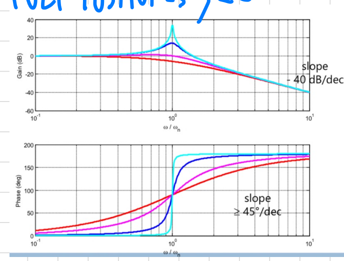
- **POLI COMPLESSI CONIUGATI:**

$$H(s) = \frac{1}{1 + 2\frac{\zeta}{\omega_n} s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

POLI NEGATIVI -> $\zeta > 0$



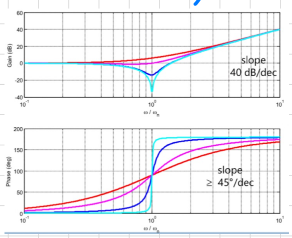
POLI POSITIVI -> $\zeta < 0$



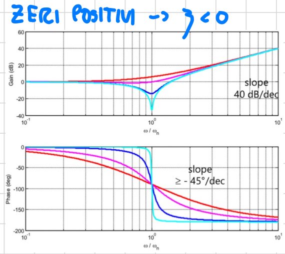
- SE $0 < \zeta < 0{,}7$:
  - AMPIEZZA DI PICCO: $M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$

    $\hookrightarrow$ IN $\omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$

ZERI NEGATIVI -> $\zeta > 0$



ZERI POSITIVI -> $\zeta < 0$

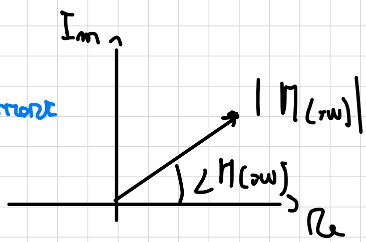


- figure, bode(H)

- ## DIAGRAMMI POLARI, NYQUIST, NICHOLS:

- **DIAGRAMMI POLARI:**
  - RAPPRESENTAZIONE DI $|H(j\omega)|$ e $\angle H(j\omega)$

    ($|H(j\omega)|$ -> LUN. VETTORE; $\angle H(j\omega)$ -> ORIENTAMENTO VETTORE)



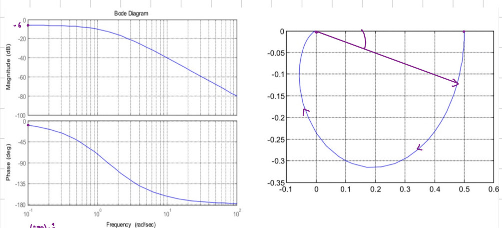
-> PARTO DAI D. DI BODE $\hookrightarrow$ RICAVO D. POLARE

N.B.: I D. DI BODE SONO IN SCALA dB -> $|H(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log_{10} |H(j\omega)|$

-> $|H(j\omega)| = 10^{\left(\frac{1}{20} \cdot H(j\omega)|_{dB}\right)}$

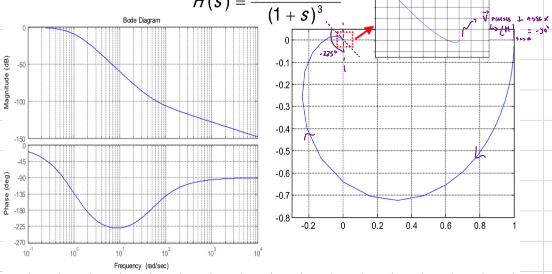
- [re, im] = niquist(H)
- figure, plot(squeeze(re), squeeze(im))

es. 1.

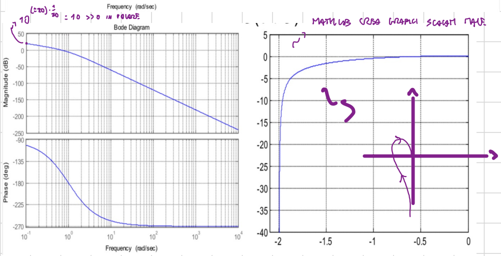


es. 2

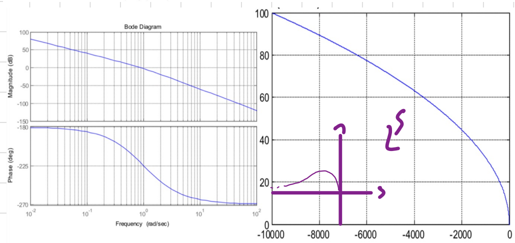
$$H(s) = \frac{(1 + s/50)^2}{(1+s)^3}$$



es. 3



es. 4



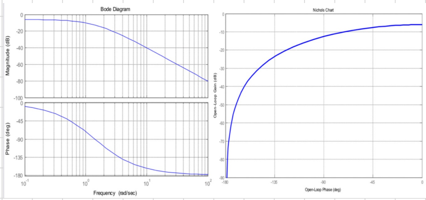
• DIAGRAMMI DI NICHOLS :

• RAPPRESENTAZIONE DI $|H(j\omega)|_{dB} = f(\angle H(j\omega))$

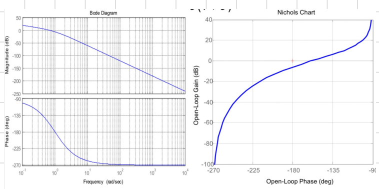
• L'ORIGINE DEGLI ASSI È $O(-180°; 0)$

• figure, nichols(H)

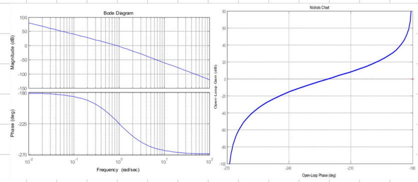
es. 1



es. 2

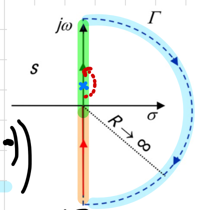


es. 3



• DIAGRAMMI DI NYQUIST :

• CONTORNO DI NYQUIST :



SIA $s=\sigma+j\omega$, Γ CURVA CHIUSA DEFINITA DA :

SENSO ORARIO

$(s/\sigma=0,\ \omega\in(-\infty,0)) \cup (s/\sigma=0,\ \omega\in[0,+\infty]) \cup$ (SEMICERCHIO DA $j\infty$ A $j(-\infty)$ CON $R\to\infty$)

-> D. DI NYQUIST È OTTENUTO DALL'IMMAGINE DI $H(s)$ $(f(H(s)))$, A PARTIRE DA Γ

→ SE $\exists p_i / \sigma=0$ -> AGGIRO p_i CON DEI SEMICERCHI $\rho\to0$, IN S. ANTIORARIO

• ANALISI $f(H(j\omega))$:

• $s/j\omega>0$: D. POLARE DI $H(s)$

• $s/j\omega<0$: ESSENDO $H(j\omega)=H^*(-j\omega)$ -> SIMMETRICO RISPETTO ALL'ASSE Re DEL D. POLARE QUANDO $j\omega>0$

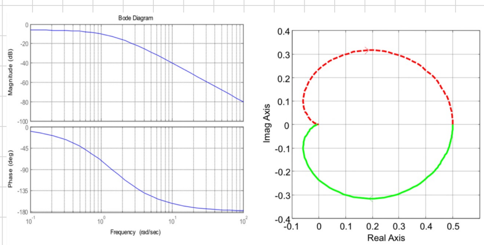
• SEMICERCHIO $R\to\infty$: $f(H(j\infty))=f(H(j(-\infty)))$

SE $\exists p_i/\sigma=0$, CON μ_i : μ_i SEMICERCHI IN S. ORARIO CHE CONNETTONO $H(j\omega_i^-)$ E $H(j\omega_i^+)$

• figure, nyquist(H)

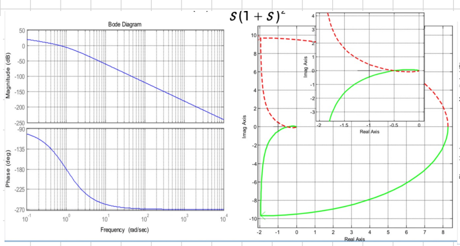
es. 1

$$H(s)=\frac{1}{s^2+3s+2}$$



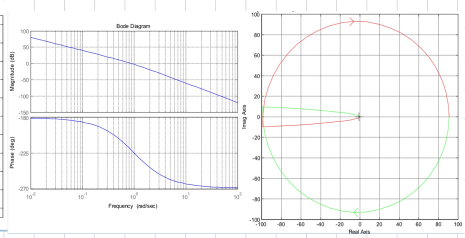
es. 2

$$H(s)=\frac{1}{s(1+s)^2}$$



es. 3

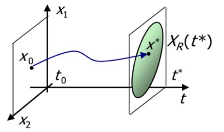
$$H(s)=\frac{1}{s^2(1+s)}$$



RAGGIUNGIBILITÀ e CONTROLLABILITÀ:

- **RAGGIUNGIBILITÀ**: POSSIBILITÀ DI MODIFICARE LO STATO DEL SISTEMA A PARTIRE DA UNO STATO INIZIALE PREFISSATO, AGENDO SU $u(\cdot)$

-> UNO STATO x^* È RAGGIUNGIBILE (DALLO STATO ZERO x_0, AL TEMPO t^*)
SE $\exists$: $t^* \in [t_0, \infty)$ e $u^*(t)$ CON $t \in [t_0, t^*]$
/ DETTO $x(t)$ (CON $t^* \in [t_0, t^*]$) IL MOVIMENTO DELLO STATO GENERATO DA $u^*(t)$
A PARTIRE DALLO STATO x_0 (CIOÈ $x(t_0) = x_0$)
-> RISULTI: $x(t^*) = x^*$

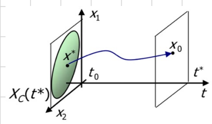


-> $X_R(t^*)$: INSIEME DI RAGGIUNGIBILITÀ -> INSIEME DI TUTTI GLI STATI RAGGIUNGIBILI (DA x_0 AL TEMPO t^*)
$\hookrightarrow$ SOTTOSPAZIO LINEARE DELLO SPAZIO DI STATO X

- SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ: $X_R = \max_{t \in [t_0, \infty]} X_R(t)$ (X_{NR} $= X_R^{\perp}$ ~> COMPLEMENTO ORTOGONALE : SOTT. DI NON RAGGIUNGIBILITÀ)
- S. COMPL. RAGGIUNGIBILE $\Leftrightarrow X_R = X$

- **CONTROLLABILITÀ**: POSSIBILITÀ DI TRASFERIRE LO STATO DEL SISTEMA AD UNO STATO FINALE PREFISSATO, AGENDO SU $u(\cdot)$

-> UNO STATO x^* È CONTROLLABILE (DALLO STATO ZERO x_0, AL TEMPO t^*)
SE $\exists$: $t^* \in [t_0, \infty)$ e $u^*(t)$ CON $t \in [t_0, t^*]$
/ DETTO $x(t)$ (CON $t^* \in [t_0, t^*]$) IL MOVIMENTO DELLO STATO GENERATO DA $u^*(t)$
A PARTIRE DALLO STATO x_0 (CIOÈ $x(t_0) = x_0$)
-> RISULTI: $x(t^*) = x_0$



-> $X_C(t^*)$: INSIEME DI CONTROLLABILITÀ -> INSIEME DI TUTTI GLI STATI CONTROLLABILI (DA x_0 AL TEMPO t^*)
$\hookrightarrow$ SOTTOSPAZIO LINEARE DELLO SPAZIO DI STATO X

- SOTTOSPAZIO DI CONTROLLABILITÀ: $X_C = \max_{t \in [t_0, \infty]} X_C(t)$ (X_{NC} $= X_C^{\perp}$ ~> COMPLEMENTO ORTOGONALE : SOTT. DI NON CONTROLLABILITÀ)
- S. COMPL. CONTROLLABILE $\Leftrightarrow X_C = X$

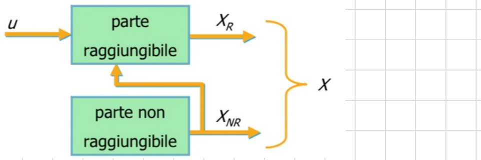
- STATO ZERO x_0, È UNO STATO OBIETTIVO
Hp: $x_0 = 0$, $t_0 = 0$ (IN GENERALE $x_0 \neq 0$)
- SOTTO QUESTE Hp:
-> $X_R = X_C$, PER I S. LTI TC
-> $X_R \subseteq X_C$, PER I S. LTI TD / $X_R = X_C \Leftrightarrow A$ NON SINGOLARE -> $\det(A) \neq 0$
-> IN GENERALE PER S. LTI: $X_R \subseteq X_C$ -> CONTROLLABILITÀ $\simeq$ RAGGIUNGIBILITÀ

• SIA S. LTI CON DIM. FINITA n, NON COMPLET. RAGGIUNGIBILE:

-> X_R / dim$(X_R) = r < n$ -> PARTE RAGGIUNGIBILE, CON ASSOCIATI $\frac{r}{n}$ AUTOVALORI DI A ($n \rightsquigarrow$ / totali)

-> X_{NR} / dim$(X_{NR}) = n - r$ -> PARTE NON RAGGIUNGIBILE, " $\frac{n-r}{n}$ AUTOVALORI DI A

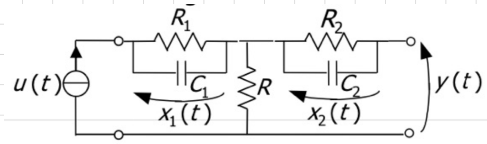
• $u(\cdot)$ AGISCE SU PARTE RAGGIUNGIBILE



• STATI RAGGIUNGIBILI NON INFLUENZANO STATI NR

• STATI NR POSSONO INFLUENZARE STATI R

es. INTRODUTTIVO 1



ESSENDO CIRC. APERTO SU $y(t)$ -> $u(t)$ NON AGISCE SU $x_2(t)$

-> $x_2(t)$ NON È CONTROLLABILE DA $u(t)$

• ANALISI DI RAGGIUNGIBILITÀ DI S. LTI DINAMICI:

• S. LTI TD:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

• SE CONSIDERO 1 SOLO INGRESSO $(p=1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n\times 1})$, $X_0 = X(0) = 0$, $x(\ell)$: INS. DI RAGG. A $t=\ell$

$$\begin{aligned}
\rightarrow x(1) &= Ax(0) + Bu(0) = Bu(0)\\
x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = ABu(0) + Bu(1)\\
x(3) &= Ax(2) + Bu(2) = A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2)\\
&\vdots\\
x(\ell) &= A^{\ell-1}Bu(0) + \dots + ABu(\ell-2) + Bu(\ell-1)
\end{aligned}$$

-> IN FORMA MATRICIALE:

$$x(\ell) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{\ell-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(\ell-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} = \underbrace{M_R(\ell)}_{\in \mathbb{R}^{n,\ell}} V(\ell)$$

-> $X_R(\ell) = \mathcal{R}(M_R(\ell))$ / $\mathcal{R}(\cdot)$: SPAZIO IMMAGINE

• DETERMIN. DI X_R:

• $X_R = \max_{t\in[0,+\infty)} X_R(\ell)$ -> MI SERVE ℓ / $rk(M_R(\ell))$ È max

-> $\forall$ COLONNA AGGIUNTA A $M_R(\ell)$ DEL TIPO $A^{j-1}B$ -> $rk(M_R(\ell)) \mathrel{+}= 1 \lor rk(M_R(\ell))$ COST.

↳ $rk(M_R(\ell)) \mathrel{+}= 1 \Leftrightarrow \ell \leq n$ ($\rightsquigarrow$ n° RIGHE) -> CIOÈ $X_R = X_R(n)$

-> SIA $M_R = M_R(n)$ ($\rightsquigarrow$ M DI RAGGIUNGIBILITÀ) $= \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$

-> SOTTOSPAZIO DI RAGGIUNGIBILITÀ: $X_R = \mathcal{R}(M_R(n)) = \mathcal{R}(M_R)$

• ESSENDO:

$$\dim(X_R) = rk(M_R) = r$$

* -> S. LTI TD È COMPL. RAGGIUNGIBILE (e CONTROLLABILE) <=> $rk(M_R) = n$

• IN GENERALE:

• * È VALIDO $\forall$ S. LTI TC DEL TIPO $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

• * È VALIDO NEI S. LTI TD e TC CON PIÙ INGRESSI $(p>1)$, IN CUI $M_R = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-b}] / b = rk(B)$

• MATRICE DI RAGGIUNGIBILITÀ: **M_R = ctrb(A, B)**

• RANGO: **r = rank(M_R)**

1. CALCOLO $M_R = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{n-1}B]$
2. VALUTO $r = rk(M_R)$:
   • SE $r = n$ -> S. COMPL. RAGGIUNGIBILE
   • SE $r < n$ -> S. NON "

es. 1

SIA $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ / $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$ -> $p=1$, $n=3$

-> $M_R = [B \ \ AB \ \cdots \ A^{3-1}B] = [B \ \ AB \ \ A^2B]$ -> $M_R = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 30 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

• $\det(M_R) = 116 \neq 0$ -> $rk(M_R) = 3 = n$ -> SIST. COMPL. RAGGIUNGIBILE

es. 2

SIA $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$ / $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3,1}$ -> $p=1$, $n=3$

-> $M_R = [B \ \ AB \ \ A^2B]$ -> $M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -10 \\ 2 & -10 & 26 \end{bmatrix}$

• $\det(M_R) = 0$ -> $rk(M_R) < 3$ (IN PARTICOLARE $rk(M_R) = 2$, $\because$ 1 RIGA NULLA e 2 LIN. INDIP.)

-> SIST. NON COMPLETAMENTE RAGGIUNGIBILE e $\dim(X_R) = rk(M_R) = 2$

(NO 29 ÷ 32)

• RETROAZIONE STATICA DELLO STATO:

• LA LEGGE DI CONTROLLO:

• VOGLIO STUDIARE COME AGIRE SU $u(t)$ IN MODO DA MODIFICARE IL COMPORTAMENTO DINAMICO DEL SIST. / H_p: $\left(\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)\right)$ e $\left(u(t) \in \mathbb{R}^p \to p=1 \to B \in \mathbb{R}^{n\times 1}\right)$

-> DEVO FARE IN MODO CHE $u(t)$ CAMBI λ_i DI A

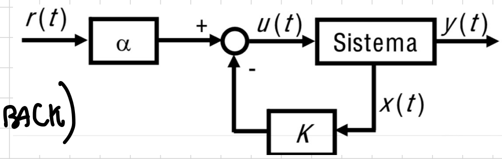
-> POSSIBILE $\Leftrightarrow$ $u(t) \leftrightarrow x(t)$, SECONDO LA LEGGE DI CONTROLLO:

$$u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t) \quad / \quad \begin{cases} \cdot\ x(t) \in \mathbb{R}^n,\ u(t) \in \mathbb{R} \\ \cdot\ K \in \mathbb{R}^{1\times n}: \text{VETTORE/MATRICE DEI GUADAGNI} \\ \cdot\ r(t): \text{RIFERIMENTO} \\ \cdot\ \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

-> • $\alpha r(t)$: AZIONE DIRETTA (FEED FORWARD)

↳ SERVE PER IMPORRE UN DATO MOVIMENTO

• $Kx(t)$: RETROAZIONE DELLO STATO (STATE FEEDBACK)



• SOSTITUENDO $u(t) \mapsto \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$:

$$\to \dot{x}(t) = Ax(t) + B\left[-Kx(t) + \alpha r(t)\right] = (A-BK)x(t) + B\alpha r(t)$$

1 $\begin{cases} \cdot\ \text{ASSEGNAZIONE DI } \lambda_i \text{ MEDIANTE RETROAZIONE STATICA DELLO STATO:} \\ \to \text{AGENDO SU } K \text{ È POSSIBILE CHE } \lambda_i \text{ DI } (A-BK) \text{ COINCIDANO CON } n \text{ NUMERI ARBITRARI} \end{cases}$

• T. ASSEGNAZIONE DEGLI AUTOVALORI:

-> $\exists$ SOLUZIONI PER 1 $\Leftrightarrow$ A,B SODDISFA: $rk(M_R) = n$ ~> CONDIZIONE DI COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ

-> $\exists K \Leftrightarrow$ SIST. DINAMICO COMPL. RAGGIUNGIBILE

↳ SE SIST. NON COMPL. RAGGIUNGIBILE -> POSSO MODIFICARE SOLO r AUTOVALORI DELLA SUA PARTE RAGGIUNGIBILE ~> $r < n$

• SE $\exists$ PIÙ INGRESSI $u(t) \to K \mapsto K \in \mathbb{R}^{p\times n}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^{p\times q}$

• EQ. DI INGRESSO STATO-USCITA:

$$\to y(t) = Cx(t) + Du(t) = Cx + D\left[-Kx(t) + \alpha r(t)\right] = (C-DK)x(t) + D\alpha r(t)$$

$$\to \begin{cases} \dot{x}(t) = (A-BK)x(t) + B\alpha r(t) \\ y(t) = (C-DK)x(t) + D\alpha r(t) \end{cases}$$

$$/ \quad H(s) = \left[(C-DK)\left[sI - (A-BK)\right]^{-1} B + D\right] \alpha$$

• VALE ANCHE PER S. LTI TD: $\begin{cases} x(k+1) = x(k) + B\alpha r(k) \\ y(k) = (C-DK)x(k) + D\alpha r(k) \end{cases}$

$$/ \quad H(z) = \frac{Y(z)}{r(z)} = \left[(C-DK)\left[zI - (A-BK)\right]^{-1} B + D\right] \alpha$$

es. 1

SIA $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, λ DESIDERATI : $\lambda_{1,d} = -2$, $\lambda_{2,d} = -3$

1. VERIFICO LA CONDIZ. RAGGIUNGIBILITÀ DEL SIST. (SENNÒ $\nexists K$)
2. DATO $\{\lambda_{1,d}, \dots, \lambda_{n,d}\} \to$ CALCOLO $p_d(\lambda)$ ↳ DESIDERATI
3. CALCOLO $p_{A-BK}(\lambda)$
4. DETERMINO $K \,/\, p_{A-BK}(\lambda) = p_d(\lambda)$

$\to$

1. ESSENDO $rk(A) = rk(B) = 2 \to M_R = [B \;\; AB \; \cdots \; A^{n-1}B] = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \to rk(M_R) = 2$ ($n = 2$)
2. $p_d(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_{i,d}) = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$
3. ESSENDO $n = 2$, $K \in {}^{1 \times n} \to K = [k_1 \;\; k_2]$

$$\to A - BK = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} [k_1 \;\; k_2] = \begin{bmatrix} 1 + k_1 & 3 + k_2 \\ 4 - 2k_1 & 2 - 2k_2 \end{bmatrix}$$

$$\to p_{A-BK}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - BK)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - (1 + k_1) & -(3 + k_2) \\ -(4 - 2k_1) & \lambda - (2 - 2k_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda^2 + (-3 - k_1 + 2k_2)\lambda + 8k_1 - 6k_2 - 10$$

4. $p_d(\lambda) = p_{A-BK}(\lambda) \iff \begin{cases} -3 - k_1 + 2k_2 = 5 \\ 8k_1 - 6k_2 - 10 = 6 \end{cases} \to \begin{cases} k_1 = 8 \\ k_2 = 8 \end{cases} \to K = [8 \;\; 8]$

es. 2 SLIDE 13/23

- SE $\lambda_i \,/\, \mu = 1 \to$ **K = place(A, B, p)** / p: VETTORE CON λ_i DA ASSEGNARE
- SE $\lambda_i \,/\, \mu > 1 \to$ **K = acker(A, B, p)**

- PROBLEMA DELLA REGOLAZIONE :

VOGLIO CALCOLARE $\bar{x}, \bar{r} \,/\, r(t) = \bar{r}$, CON Hp: $\bar{r} = $ cost., $r(t), y(t) \in \mathbb{R}$ ↗ SISO, $\alpha \in \mathbb{R}$, K / RENDE SIST. ASINT. STABILE

$$\to \begin{cases} \dot{\bar{x}} = 0 = (A - BK)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} = (C - DK)\bar{x} + D\alpha\bar{r} \end{cases} \to \begin{cases} \bar{x} = -(A - BK)^{-1} B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} = [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]\alpha\bar{r} \end{cases}$$

- REGOLAZIONE DELL'USCITA $\iff \bar{y} = \bar{r}$
- CONDIZ. DI REGOLAZIONE: SE $\bar{r} = 0 \to \bar{y} = \bar{r} = 0$, $\forall t, \forall \alpha$

$\to$ SE $r \neq 0 \to \bar{y} = \bar{r} \iff [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]\alpha = 1$

$\to$ SE AGISCO SU α POSSO OTTENERE LA CONDIZ. DI REGOLAZIONE :

$$\alpha = [-(C - DK)(A - BK)^{-1}B + D]^{-1}$$

• IN MODO ANALOGO PER S. LTI TD SISO :

• COND. EQUILIBRIO:

$$\begin{cases} \bar{x} = (A-BK)\bar{x} + B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} = (C-DK)\bar{x} + D\alpha\bar{r} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \bar{x} = [I-(A-BK)]^{-1}B\alpha\bar{r} \\ \bar{y} = [(C-DK)[I-(A-BK)]^{-1}B + D]\alpha\bar{r} \end{cases}$$

• $\bar{y} = \bar{r} \iff \alpha = [(C-DK)[I-(A-BK)]^{-1}B + D]^{-1}$

es.

SIA S. LTI TC RAGGIUNGIBILE / $A = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$
SU CUI È APPLICATO $K = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \end{bmatrix}$, SUPPONENDO $r(t) = \bar{r} = 3\,\varepsilon(t)$

1. VERIFICARE CHE RETR. STATICA DELLO STATO DATA DA K STABILIZZI ASINT. IL SIST.
2. CALCOLARE α IN BASE ALLA CONDIZ. DI REGOLAZIONE

→ 1. $A - BK = \begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0,25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

→ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -4$ → SIST. ASINT. STABILE, ∵ $\lambda_{1,2} < 0$

2.

ESSENDO $\alpha = [(C-DK)[I-(A-BK)]^{-1}B + D]^{-1}$ / A, B, C, D, K CALCOLATI

$$\rightarrow \alpha = \left[\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right]^{-1} = 0,\bar{1}$$

OSSERVABILITÀ e RILEVABILITÀ:

- **OSSERVABILITÀ**: POSSIBILITÀ DI STIMARE LO STATO INIZIALE DEL SISTEMA MISURANDO $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ SU UN DATO INT. DI TEMPO
- **RILEVABILITÀ**: POSSIBILITÀ DI STIMARE LO STATO FINALE DEL SISTEMA MISURANDO $y(\cdot)$ e $u(\cdot)$ SU UN DATO INT. DI TEMPO

-> UNO STATO $x^* \neq 0$ SI DICE NON OSSERVABILE (SE $t \in [t_0, t^*] / t^* \in [t_0, \infty]$) / DETTO $y_e(t)$ IL MOVIMENTO LIBERO DELL'USCITA SUCCESSIVO A $x(t_0) = x^* \neq 0$

-> RISULTA: $y_e(t) = 0, \ \forall t \in [t_0, t^*]$ (SI PUÒ ASSUMERE $t_0 = 0$)

-> $X_{NO}(t^*)$: INSIEME DI NON OSSERVABILITÀ

$\hookrightarrow X_{NO}$: SOTTOSPAZIO DI NON OSSERVABILITÀ -> $X_{NO} = \min\limits_{t \in [t_0, \infty]} X_{NO}(t)$

$\hookrightarrow X_0 = X_{NO}^{\perp}$

- UN SIST. È COMPLETAMENTE OSSERVABILE $\iff X_0 = X$
- X_{ND}: SOTTOSPAZIO DI NON RILEVABILITÀ -> $X_{ND} = \min\limits_{t \in [t_0, \infty]} X_{ND}(t)$

$\hookrightarrow X_D = X_{ND}^{\perp}$

- UN SIST. È COMPLETAMENTE RILEVABILE $\iff X_D = X$

-> SE S. LTI TC -> $X_0 = X_D$

-> SE S. LTI TD -> $X_0 \leq X_D$ / $X_0 = X_D \iff A$ È NON SINGOLARE -> $\det(A) \neq 0$

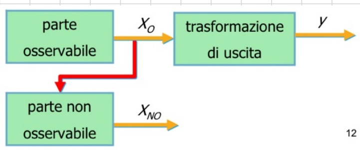
-> PER S. LTI, IN GENERALE: $X_0 \leq X_D$

- SIA S. LTI CON DIM. FINITA n, NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

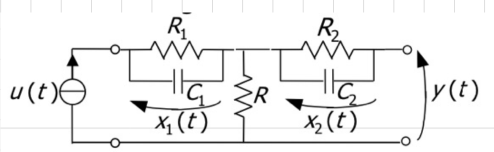
-> $X_0 / \dim(X_0) = o < n$ -> PARTE OSSERVABILE, CON ASSOCIATI o AUTOVALORI DI A (-> CENTRA "o")

-> $X_{NO} / \dim(X_{NO}) = n - o$ -> PARTE NON OSSERVABILE, " $\frac{n - o}{n}$ AUTOVALORI DI A (n -> TOTALI)

- y INFLUENZATA SOLO DA X_0
- X_0 PUÒ INFLUENZARE X_{NO}
- X_{NO} NON PUÒ " X_0



es. INTRODUTTIVO 1



ESSENDO CIRC. APERTO SU $y(t)$ -> $x_1(0)$ FU NON LO TROVO SU $y(t)$

-> $x_1(0)$ NON È OSSERVABILE DALL'USCITA $y(t)$

• ANALISI DI OSSERVABILITÀ DEI SIST. DINAMICI:

• IN MODO ANALOGO A CONTROLLABILITÀ e RAGGIUNGIBILITÀ:

• Hp: s. LTI TD, 1 uscita -> $q=1$ -> $C \in \mathbb{R}^{1\times n}$, Hp: $u(k)=0, \forall k$

-> $y(\ell) = M_o(\ell)\, x(0)$ / $M_o(\ell) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{\ell} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\ell\times n}$

$t=\ell$

-> $X_{NO}(\ell)$ corrisponde allo spazio nullo $\mathcal{N}(\cdot)$ di $M_o(\ell)$

• $\dim(\mathcal{N}(M_o(\ell)))$ minimo $\Leftrightarrow$ $rk(M_o(\ell))$ massimo -> $\ell = n-1$

• $X_{NO} = \mathcal{N}(M_o)$ e $X_O = X_{NO}^{\perp} = \mathcal{R}(M_o^T)$

-> $\dim(X_O) = rk(M_o) = o$ ~> lettera

-> un s. LTI TD è compl. osservabile (~> -> anche rilevabile) $\Leftrightarrow$ $rk(M_o) = n$ ~> valido anche per s. LTI TC

• IN GENERALE ($q>1$ -> più uscite): $M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-c} \end{bmatrix}$ / $c = rk(C)$

• **M_O = obsv(A, C)**

1. calcolo $M_o = [C \;\; AC \;\; \cdots \;\; A^{n-1}C]^T$
2. valuto $o = rk(M_o)$:
   - se $o = n$ -> s. compl. osservabile
   - se $o < n$ -> s. non ″

es. 1

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $C = [1 \;\; 1 \;\; 0]^t \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ -> $q=1$, $n=3$

1. -> $M_o = [C \;\; CA \;\; \cdots \;\; CA^{3-1}]^T = [C \;\; CA \;\; CA^2]^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

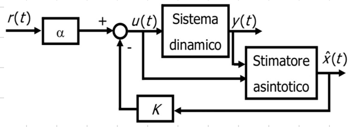
2. essendo $\det(M_o) = 1 \neq 0$ -> $rk(M_o) = 3 = n$

   -> sist. compl. osservabile

es. 2 slide 16/32

(NO 19 ÷ 32)

OSSERVATORE DELLO STATO:



STIMATORE ASINTOTICO DELLO STATO:

- $u(t) = -Kx(t) + \alpha r(t)$ $\Leftrightarrow$ $x(\cdot)$ risulta completamente accessibile (misurabile)
  ↳ se stato non accessibile $\to$ non si può realizzare legge di controllo, anche se compl. raggiungibile

- per via dell'osservabilità $\to$ posso ricostruire una stima $\hat{x}(\cdot)$ a partire da $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$

per semplicità $\to$ utilizzo $\hat{x}(\cdot)$ per costruire $u(\cdot) = -K\hat{x}(\cdot) + \alpha r(\cdot)$ $\to$ retroazione statica dello stato stimato

", valido anche per LTI TD SISO, LTI MIMO

- Hp: s. dinamico LTI TC SISO $(q = p = 1 \to B \in \mathbb{R}^{n\times 1},\ C \in \mathbb{R}^{1\times n},\ D \in \mathbb{R})$

- stimatore dello stato: sis. dinamico che genera $\hat{x}(t)$, a partire da $u(t)$ e $y(t)$
- errore di stima: $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$

$\to$ stimatore asintotico dello stato $\Leftrightarrow$ $\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0$

- $\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) = A(\hat{x}(t) - x(t)) = Ae(t)$ / $e(t) = e^{At}e(0)$
- $\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0 \Leftrightarrow m_i(t) \to 0$ (~> modi naturali) ($\to$ sist. asint. stabile) $\forall\, e(0) \neq 0$

- per tenere conto di $y(t)$ aggiungo un termine correttivo:

$\to$ $\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t))$ / $L \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, matrice dei guadagni dello stimatore

$\to$ errore di stima: $\dot{e}(t) = \dot{\hat{x}}(t) - \dot{x}(t) =$

$$= A\hat{x}(t) - L\left[C\hat{x}(t) + Du(t) - (Cx(t) + Du(t))\right] - Ax(t) =$$

$$= (A - LC)(\hat{x}(t) - x(t)) = (A - LC)e(t)$$

$\to$ $e(t) = \exp\big((A - LC)t\big)\, e(0)$

$\to$ $\lim_{t\to\infty} \|e(t)\| = 0 \Leftrightarrow A - LC$ ha λ_i asint. stabili

$\to$ necessità di trovare condiz. per cui $\exists L$ / $A - LC$ ha λ_i asint. stabili

- calcolo di L:
  - T.: se sist. dinamico è compl. osservabile $\to$ $\exists L$ a cui assegnare λ_i
    ↳ posso rendere il sist. dinamico uno osservatore dello stato

1. verifico se il sist. è compl. osservabile (sennò $\nexists L$)
2. dato $\{\lambda_{1,d}, \dots, \lambda_{n,d}\}$ $\to$ calcolo $p_d(\lambda)$
3. calcolo $p_{A-LC}(\lambda)$
4. determino L / $p_{A-LC}(\lambda) = p_d(\lambda)$

es. 1

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, λ osservatore: $\lambda_{1,ol} = -10$, $\lambda_{2,ol} = -20$

1. $\dim(A) = \dim(B) = n = 2 \rightarrow M_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ essendo $rk(M_o) = 2 \rightarrow$ sist. compl. osservabile

2. $p_{ol}(\lambda) = (\lambda + 10)(\lambda + 20) = \lambda^2 + 30\lambda + 200$

3. essendo $n = 2$, $L \in \mathbb{R}^{n \times 1} \rightarrow L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 - l_1 \\ -1 & 2 - l_2 \end{bmatrix}$

$\rightarrow p_{A-LC}(\lambda) = \det(\lambda I - (A - LC)) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & -(1-l_1) \\ 1 & \lambda - (2 - l_2) \end{bmatrix}\right) =$

$= \lambda^2 + (l_2 - 2)\lambda + 1 - l_1$

4. $p_{ol}(\lambda) = p_{A-LC}(\lambda) \iff \begin{cases} l_2 - 2 = 30 \\ 1 - l_1 = 200 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} l_1 = -199 \\ l_2 = 32 \end{cases} \rightarrow L = \begin{bmatrix} -199 \\ 32 \end{bmatrix}$

es. 2 slide 14/33

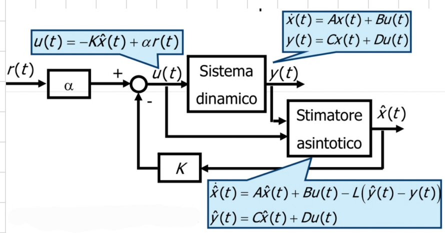
- se $\lambda_i / \mu = 1 \rightarrow$ **L = place(A', C', p)'** / p: vettore con λ_i da assegnare
- se $\lambda_i / \mu > 1 \rightarrow$ **L = acker(A', C', p)'**

- REGOLATORE DINAMICO: $\rightarrow$ i ris. saranno validi anche per LTI TD SISO, LTI MIMO

considero un s. dinamico LTI TC SISO $\rightarrow q = p = 1 \rightarrow B \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $C \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $D \in \mathbb{R}$)

$\rightarrow$ il sist. è descritto in forma da 5 eq.:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(\hat{y}(t) - y(t)) \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t) \end{cases}$$



$\rightarrow$ in tot: $2n$ eq. di stato, $2n$ var. di stato / n var. di stato sist. da controllare + n var. di stato stimatore asintotico

- sia $x^I_{tot} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix}$ e ingresso $r(t)$:

$\rightarrow$ $\dot{x}^I_{tot}(t) = A^I_{reg} x^I_{tot}(t) + B^I_{reg} r(t)$

$y(t) = C^I_{reg} x^I_{tot}(t) + D^I_{reg} r(t)$

/ $A^I_{reg} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - BK - LC \end{bmatrix}$ $B^I_{reg} = \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} \alpha$

$C^I_{reg} = \begin{bmatrix} C & -DK \end{bmatrix}$ $D^I_{reg} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix} \alpha$

• A^{I}_{REG} NON EVIDENZIA L'INFLUENZA DI K e L SU λ_i → EQ. DI STATO NON DANNO INFO UTILI PER LA SCELTA DI K e L

→ USO $X^{II}_{REG} = \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) - x(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ e(t) \end{bmatrix}$ / $A^{II}_{REG} = \begin{bmatrix} A-BK & -BK \\ 0_{n\times m} & A-LC \end{bmatrix}$ $B^{II}_{REG} = \begin{bmatrix} B \\ 0_{n\times 1} \end{bmatrix}\alpha$

$C^{II}_{REG} = \begin{bmatrix} C-DK & -DK \end{bmatrix}$ $D^{II}_{REG} = \begin{bmatrix} D \end{bmatrix}\alpha$

• PROPRIETÀ DI SEPARAZIONE:

ESSENDO A^{II}_{REG} TRIANGOLARE A BLOCCHI → $\lambda(A^{II}_{REG}) = \lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)$

→ PERMETTE DI PROGETTARE IN MODO INDIPENDENTE L e K

• PROPRIETÀ DEL REGOLATORE DINAMICO: → VALGONO ANCHE PER S. LTI TD

• $H(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \left[(C-DK)\left[sI-(A-BK)\right]^{-1}B + D\right]\alpha$ → COINCIDE COL CASO DELLA RETROAZ. STATICA DELLO STATO

→ LA STIMA DELLO STATO NON INFLUENZA IL COMPORTAMENTO INGRESSO-USCITA DEL SIST. COMPLESSIVO

⟸ SISO

• $H(s) = \dfrac{\alpha\left[(C-DK)\,\mathrm{Adj}\left[sI-(A-BK)\right]B + D\right]}{\det\left[sI-(A-BK)\right]}$ → $P_{H(s)} = \lambda(A-BK)$, $P_{\text{sist. compl.}} = \lambda(A-BK) \cup \lambda(A-LC)$

→ PER IMPORRE $\bar{Y} = \bar{r}$ → CALCOLO α DA $u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)$

→ $\alpha = \left[-(C-DK)(A-BK)^{-1}B + D\right]^{-1}$

1. VERIFICO COMPLETA RAGGIUNGIBILITÀ e OSSERVABILITÀ DEL SISTEMA → $rk(M_O) = rk(M_R) = n$
2. if (1.): CALCOLO K, α DA $u(t) = -K\hat{x}(t) + \alpha r(t)$
3. CALCOLO L

es. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix}$, $D = 0$

$\lambda_{d,\text{LEGGE DI CONTROLLO}}^{\to K} \in \mathbb{C} \,/\, \omega_{n,d} = 45,\ \zeta_d = 0{,}2$, $\lambda_{L1,d} = \lambda_{L2,d} = -100$

1. $n = 2$ → $M_R = [B \;\; AB] = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$ → $rk(M_R) = 2$ → COMPL. RAGG.

$n = 2$ → $M_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 & 0 \\ 0 & 600 \end{bmatrix}$ → $rk(M_O) = 2$ → COMPL. OSS.

2. $\lambda_{K,d} \in \mathbb{C}$ → $\lambda_{K,1,d} = \sigma_d + j\omega_d$, $\lambda_{K,2,d} = \sigma_d - j\omega_d$

ESSENDO $\sigma_d = -\zeta_d\,\omega_{n,d} = -9$, $\omega_d = \omega_{n,d}\sqrt{1-\zeta_d^2} = 44{,}09$ → $\lambda_{K,d} = -9 \pm j\,44{,}09$

$$\to p_{K,d}(\lambda) = \big(\lambda - (-9 + j\,44{,}09)\big)\big(\lambda - (-9 + j\,44{,}09)\big) =$$
$$= \lambda^2 + 18\lambda + 2025$$

• ESSENDO $n = 2$ $\to K = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix}$

$$\to A - BK = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 + 9K_1 & 9K_2 \end{bmatrix}$$

$$\to p_{A-BK}(\lambda) = \det\big(\lambda I - (A - BK)\big) = \lambda^2 - 9K_2\lambda - 900 - 9K_1$$

$$\to p_{K,d}(\lambda) = p_{A-BK}(\lambda) \iff \begin{cases} -9K_2 = 18 \\ -900 - 9K_1 = 2025 \end{cases} \to \begin{cases} K_1 = -325 \\ K_2 = -2 \end{cases} \to K = \begin{bmatrix} -325 & -2 \end{bmatrix}$$

• $\alpha = \left[-(C - DK)(A - BK)^{-1} B + D\right]^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2025 & -18 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}\right)^{-1} = -0{,}375$

3.

• $p_{L,d} = \big(\lambda - (-100)\big)\big(\lambda - (-100)\big) = (\lambda + 100)^2 = \lambda^2 + 200\lambda + 10000$

• ESSENDO $n = 2$ $\to L = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix}$

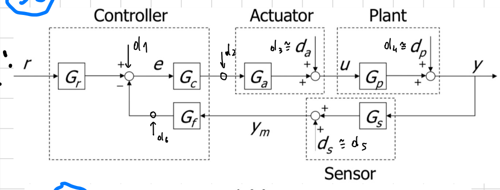
$$\to A - LC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 900 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -600\,l_1 & 1 \\ 900 - 600\,l_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to p_{A-LC}(\lambda) = \det\big(\lambda I - (A - LC)\big) = \lambda^2 + 600\,l_1\lambda - 900 + 600\,l_2$$

$$\to p_{L,d}(\lambda) = p_{A-LC}(\lambda) \iff \begin{cases} 600\,l_1 = 200 \\ -900 + 600\,l_2 = 10000 \end{cases} \to \begin{cases} l_1 = 0{,}\bar{3} \\ l_2 = 18{,}1\bar{6} \end{cases} \to L = \begin{bmatrix} 0{,}\bar{3} \\ 18{,}1\bar{6} \end{bmatrix}$$

• **PART 6 :** (NO 0÷10)

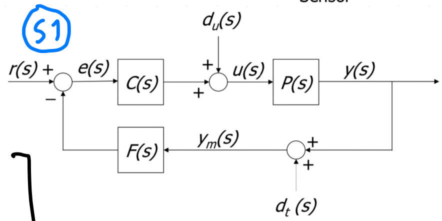
S2



• STABILITÀ INTERNA DI SISTEMI DI CONTROLLO CON FEEDBACK:

CONSIDERANDO LO SCHEMA S1 A LATO:

S1



- $C(s)$: FUNZ. DI TRASF. DEL CONTROLLORE
- $P(s)$: FUNZ. DI TRASF. DELL' IMPIANTO
- $F(s)$: FUNZ. DI TRASF. DEL FEEDBACK

$$\rightarrow \begin{bmatrix} e \\ u \\ y_m \end{bmatrix} = M(s) \begin{bmatrix} r \\ d_u \\ d_t \end{bmatrix} \Big/ \; M(s) = \frac{1}{1+PCF} \begin{bmatrix} 1 & -PF & -F \\ C & 1 & -CF \\ PC & P & 1 \end{bmatrix}$$

DOVE:

- FUNZIONE D'ANELLO (LOOP FUNCTION): $L(s) = P(s)\,C(s)\,F(s) \; \Big(= \overbrace{G_p \cdot G_a \cdot G_c \cdot G_f \cdot G_s}^{S2} \Big)$
  ↳ $G_x(s) \equiv G_x$
- FUNZ. DI SENSITIVITÀ: $S(s) = (1 + L(s))^{-1}$
- FUNZ. DI SENSITIVITÀ COMPLEMENTARE: $T(s) = 1 - S(s)$

IN GENERALE:

$$\cdot\; H(s) = \frac{Y(s)}{IN(s)} = \frac{\prod G_{IN \to Y}}{1 + L(s)} \quad ; \quad H(s) = \frac{Y(s)}{d_i(s)}\bigg|_{IN=0} = \frac{\prod G_{IN \to Y}}{1 + L(s)}$$

es.

$$\cdot\; H(s) = \frac{Y(s)}{r(s)} : \; Y = G_c G_a G_p \left(r \cdot G_r - G_f G_s Y \right) = G_c G_a G_p G_r r - L Y$$

$$\rightarrow Y + LY = G_c G_a G_p G_r r \;\rightarrow H(s) = \frac{G_c G_a G_p G_r}{1 + L} = \frac{G_r}{G_f G_s} \cdot T(s)$$

$$\cdot\; H(s) = \frac{Y(s)}{d_4(s)} : \; Y = d_4 + G_c G_a G_p \big(\underbrace{r}_{=0} \cdot G_r - G_f G_s Y \big) \rightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{d_4} = S(s)$$

• SE $\lim\limits_{s \to \infty} (1 + PCF) \neq 0 \rightarrow \exists$ TUTTE LE f IN $M(s)$ e SONO FUNZ. DI TRASF.

• STABILITÀ INTERNA:

SIST. CON FEEDBACK È INT. STABILE $\Leftrightarrow \forall\, r, d_u, d_t < \infty$ DATI $\rightarrow e, u, y_m < \infty$

↳ CIOÈ $\Leftrightarrow$ TUTTE LE FUNZ. DI TRASF. DI $M(s)$ SONO BIBO STABILI

→ IL SIST. CON FEEDBACK È STABILE SE SONO RISPETTATE 2 CONDIZIONI:

1. LE RADICI DI $1 + L(s)$ DEVONO AVERE $Re(\,) < 0$
2. QUANDO CREO IL PRODOTTO PCF ($\equiv L$) NON CI DEVONO ESSERE CANCELLAZIONI NEL PIANO $Re[s] > 0$

es. ↳

Example: assume F(s) = 1

$$C(s) = \frac{s-1}{s+2}, P(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \rightarrow L(s) = \frac{s-1}{s+2}\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$T(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1} \quad S(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+2)^2+1}$$

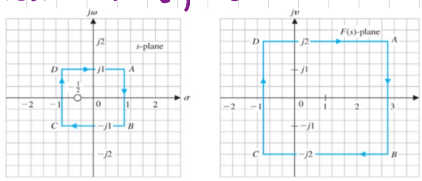
$$C(s)S(s) = \frac{(s-1)(s+2)}{(s+2)^2+1} \quad P(s)S(s) = \frac{(s+2)}{(s-1)[(s+2)^2+1]}$$

$$1 + L(s) = 1 + \frac{1}{(s+2)^2} = \frac{s^2+2s+5}{(s+2)^2}$$

Remark: This example shows that, because of the pole-zero unstable cancellations, not all the transfer function in *M(s)* are BIBO stable, althought all the roots of *1+L(s)=0* are stable.

• T. dell' incircolamento di Cauchy:

es. $s \mapsto F(s) = 2s + 1$



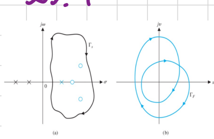
• mappatura dei contorni: mappatura della var. $s \mapsto F(s)$

• T. incircolamento di Cauchy:

sia T_s una curva in senso orario nel piano di s che incircola P poli e Z zeri di $F(s)$, senza attraversarli

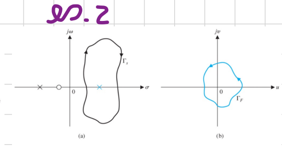
→ T_F nel piano di $F(s)$ incircola l'origine $N = Z - P$ volte

es. 1



$N = Z - P = 3 - 1 = 2$

es. 2



$N = Z - P = 0 - 1 = -1$

• Criterio di stabilità di Nyquist:

Essendo che per avere un sist. int. stabile devo avere le radici di $1 + L(s)$ con $Re < 0$, posso trovare se il sist. ha zeri instabili (cioè in $Re(s) > 0$) applicando il T. di Cauchy al cont. di Nyquist su s, mappandolo su $F(s) = 1 + L(s)$, trovando $Z = N + P$

RHP: right half plane

• Essendo $L(s) = F(s) - 1$ → considero che origine $\mapsto -1 + j0$ nel piano $L(s)$

→ un sist. di controllo con feedback è stabile $\iff N = P \neq 0$ su $(-1, 0)$ in RHP

→ un sist. di controllo con feedback è stabile $\iff T_L$ non incircola $(-1; 0)$ quando $P = 0$ in RHP

• T. di Nyquist:

plot di $F(s)$

Hp: $L(j\omega) \cap (-1 + j0) = 0$

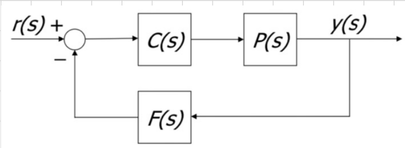
sia P_{cl} : n° radici di $1 + L(s) = 0$ con $Re() > 0$, P_{ol} : n° poli con $Re() > 0$

→ $P_{cl} = P_{ol} + N$ / n° incircolamenti su $(-1; 0)$: N = incircolamenti ↻ − incircolamenti ↺

→ se $L(j\omega) \cap (-1 + j0) \neq 0$ → $1 + L(s) = 0$ ha radici immaginarie

• il T. di Nyquist può essere usato per studiare la BIBO stabilità:

Hp: $F^{-1}(s)$ BIBO stabile



→ 3 condizioni equivalenti:

- sist. BIBO stabile
- radici di $1 + L(s) = 0$ hanno $Re() < 0$
- $N = - P_{ol}$

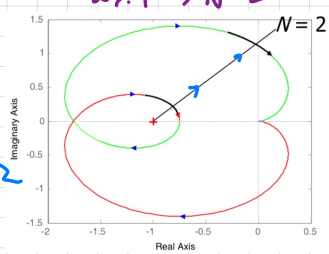
→ Hp: $C(s) = K$

→ n° poli con $Re() > 0$:

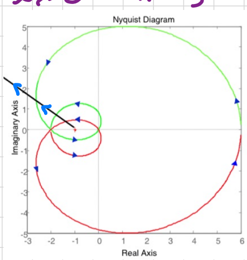
$P_{ol} = P_{cl} - N$

Un modo veloce per stabilire N è utilizzare una semiretta da $(-1, 0)$
↓
conto gli attraversamenti
SX ↦ DX : $N \mathrel{+}= 1$
DX ↦ SX : $N \mathrel{-}= 1$

es. 1 → $N = 2$

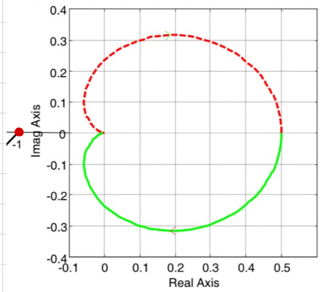


es. 2 → $N = 3$



es. 1

• $L(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)}$

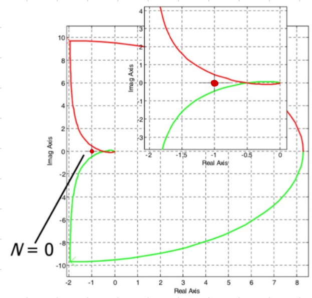


• $P_{OL} = 0$, $N = 0$

→ $P_{CL} = P_{OL} + N = 0$ → SIST. INT. STABILE

es. 2

• $L(s) = \frac{1}{s(1+s^2)}$

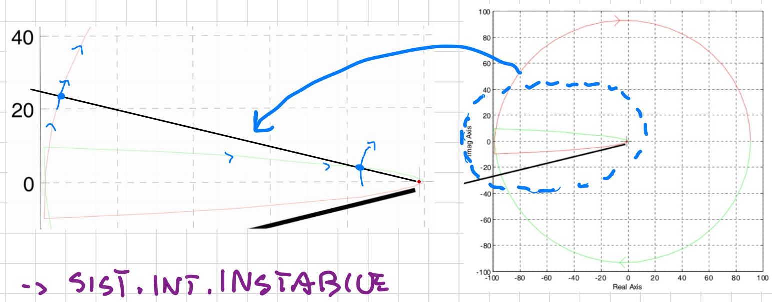


• $P_{OL} = 0$, $N = 0$

→ $P_{CL} = P_{OL} + N = 0$ → SIST. INT. STABILE

es. 3

• $L(s) = \frac{1}{s^2(1+s^2)}$

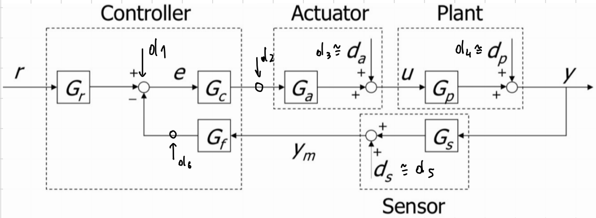


• $P_{OL} = 0$, $N = 2$

→ $P_{CL} = P_{OL} + N = 2$ → SIST. INT. INSTABILE

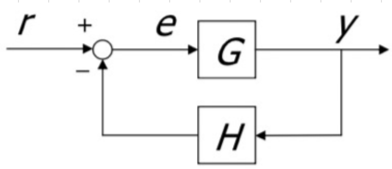
• PART 7: (34 h?)

• RISPOSTA A REGIME PER INGRESSI POLINOMIALI:



→ I SIST. DI CONTROLLO SONO CLASSIFICATI IN BASE ALLA LORO CAPACITÀ DI SEGUIRE INPUT POLINOMIALI: STEP, RAMP, PARABOLIC

• Hp: $G_r = 1$, $G_a = \text{cost.}$, $G_f = \text{cost.}$, $G_s = \text{cost.}$



• $G = G_c G_a G_p = \dfrac{N_G}{D_G}$, $H = G_s G_f = \dfrac{N_H}{D_H}$

• STRUTTURA DEL CONTROLLORE: $G_c(s) = \dfrac{K_c}{s^v} \prod_i \left(\dfrac{1 + \frac{s}{z_{di}}}{1 + \frac{s}{m_{di} z_{di}}} \right) \prod_j \left(\dfrac{1 + \frac{s}{m_{ij} p_{ij}}}{1 + \frac{s}{p_{ij}}} \right)$

↳ G_c HA V POLI IN $s = 0$ → $\lim_{s \to 0} s^v G_c(s) = K_c$

• STRUTTURA DELL' IMPIANTO: $G_p(s) = \dfrac{K_p}{s^p} \prod_i \left(\dfrac{1 + \frac{s}{z_{di}}}{1 + \frac{s}{m_{di} z_{di}}} \right) \prod_j \left(\dfrac{1 + \frac{s}{m_{ij} p_{ij}}}{1 + \frac{s}{p_{ij}}} \right)$

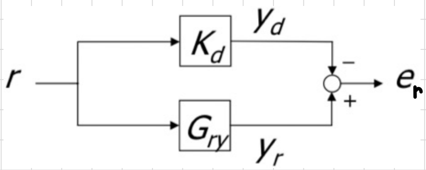
↳ G_p HA p POLI IN $s = 0$ → $\lim_{s \to 0} s^p G_p(s) = K_p$

• SEGNALE DI RIFERIMENTO POLINOMIALE:

$$r(t) = R_0 \frac{t^h}{h!} \varepsilon(t) \xmapsto{\mathcal{L}(s)} r(s) = R_0 \frac{1}{s^{h+1}}$$

/ h: ORDINE DEL POLINOMIO
$h = 0$ → STEP, $h = 1$ → RAMP, $h = 2$ → PARAB.

• ERRORE DI TRACKING:



$$e_r(t) = \underbrace{y_r}_{\text{RIFERIMENTO}}(t) - \underbrace{y_d}_{\text{DESIDERATO}}(t) = y_r(t) - \underbrace{K_d}_{\text{FATTORE DI SCALA}} r(t)$$

• ERRORE DI TRACKING A REGIME: $e_r^\infty = \lim_{t \to \infty} e_r(t)$

• SYSTEM TYPE DEF.: SIST. DI TIPO h ⟺ IL SUO $e_r^\infty \Big|_{r(t) \text{ DI ORDINE } h}$ È LIMITATO

• Hp: $H = G_s G_f = \dfrac{1}{K_d}$

• ESSENDO $y(s) = G\left(r(s) - H\,y(s)\right) = G\,r(s) - G H\,y(s)$ → $H(s) = \dfrac{y(s)}{r(s)} = \dfrac{G}{1 + GH}$

→ $e_r(s) = y_r(s) - K_d\,r(s) = \dfrac{G}{1 + GH} r(s) - K_d\,r(s)$

$$\overset{H = 1/K_d}{=} \frac{G}{1 + \frac{G}{K_d}} r(s) - K_d\,r(s) = \left(\frac{G K_d}{K_d + G} - K_d \right) r(s) = \left(\frac{G K_d - K_d (K_d + G)}{K_d + G} \right) r(s)$$

IL "−" NON INDICA e_r

$$= \frac{K_d^2}{K_d + G} r(s) \;\to\; G_{re}(s) = \frac{e_r(s)}{r(s)} = \frac{K_d^2}{K_d + G}$$

→ SIST. DI TIPO $h \iff \exists\, z_i = s = 0$ DI $G_{re} \,/\, \mu_{z_i} = h$ $\rightsquigarrow G_{re} = \dfrac{s^h\cdot(\,)(\,)\dots}{(\,)(\,)\dots}$ ($\rightsquigarrow$ ZERO)

→ SIST. DI TIPO $h \iff \exists\, p_i = s = 0$ DI $G \,/\, \mu_{p_i} = h$ $\rightsquigarrow G = \dfrac{(\,)(\,)\dots}{s^p(\,)(\,)\dots}$

- SE $\{s\, e_r(s)\}$ È BIBO STABILE (POLI IN LHP (LEFT HALF PLANE)) → ∃ T. DEL VALORE FINALE
- Hp: $\nu + p \geq h$

$$\rightarrow e_r^\infty = \lim_{t\to\infty} e_r(t) = \lim_{s\to 0} s\, e_r(s) = \lim_{s\to 0} s\left(y_r(s) - K_d\, r(s)\right) =$$

$$= \lim_{s\to 0} s\, G_{re}(s)\, r(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K_d^2}{K_d + G(s)}\, r(s) = \lim_{s\to 0} s\cdot \frac{K_d^2}{K_d + G_p G_c G_a}\, r(s) =$$

- SE $s \mapsto 0$: $G_p \mapsto \dfrac{K_p}{s^p} \ \wedge\ G_c \mapsto \dfrac{K_c}{s^\nu} \ \wedge\ r(s) \mapsto \dfrac{R_0}{s^{h+1}}$

$$\rightarrow e_r^\infty = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{K_d^2}{K_d + \frac{K_p}{s^p}\frac{K_c}{s^\nu} G_a}\cdot\frac{R_0}{s^{h+1}} = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2\cdot s^{\nu+p}}{s^{\nu+p}K_d + K_p K_c G_a}\cdot\frac{R_0}{s^h}$$

$$\rightarrow e_r^\infty = \lim_{s\to 0} \frac{K_d^2\cdot s^{\nu+p}}{s^{\nu+p}K_d + K_p K_c G_a}\cdot\frac{R_0}{s^h} = \begin{cases} 0, & \text{SE } \nu+p > h \\ \dfrac{K_d^2 R_0}{s^{\nu+p}K_d + K_p K_c G_a}, & \text{SE } \nu+p = h \end{cases}$$

→

- ESSENDO $\nu+p$ IL n° DI ZERI $/\, s=0$ DI $G_{re}(s)$, SE $\nu+p < h$ NON POSSO USARE T. DEL VALORE FINALE

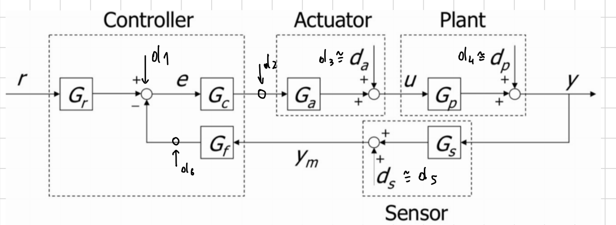
$$\rightarrow e_r^\infty = \lim_{t\to\infty} e_r(t) = \infty$$

- SUMMARY

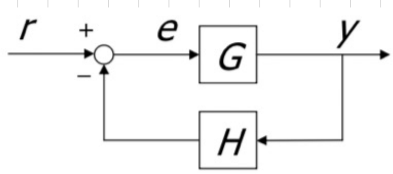
System type ($\nu+p$) \ Input order (h)	Step input (order 0)	Ramp input (order 1)	Parabola input (order 2)
0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_d + K_p K_c G_a}$	∞	∞
1	0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a}$	∞
2	0	0	$\frac{K_d^2 R_0}{K_p K_c G_a}$

- RISPOSTA A REGIME PER DISTURBI POLINOMIALI:

(ANALOG. PER INPUT POLINOMIALI)



- Hp: $G_r = 1$, $G_a = \text{cost.}$, $G_f = \text{cost.}$, $G_s = \text{cost}$
- $G = G_c G_a G_p = \dfrac{N_G}{D_G}$, $H = G_s G_f = \dfrac{N_H}{D_H}$



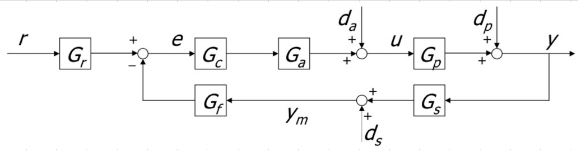
- G_c, G_p COME PER INPUT POLINOMIALI:

→ G_c HA ν POLI IN $s=0$ ∧ G_p HA p POLI IN $s=0$

• SEGNALE DI DISTURBO POLINOMIALE:

$$d(t) = D_0 \frac{t^h}{h!} \varepsilon(t) \xmapsto{\mathcal{L}(s)} d(s) = D_0 \frac{1}{s^{h+1}}$$ / h : ORDINE DEL POLINOMIO; h = 0 -> STEP, h = 1 -> RAMP, h = 2 -> PARAB.

• ERRORE SULL'USCITA:



• $e_d(t) = y_d - K_d r(t) \Big|_{r(t)=0,\ d(t)\ ON} = y_d(t)$

• ERRORE SULL'USCITA A REGIME: $e_d^\infty = \lim_{t \to \infty} e_d(t)$

• CONSIDERANDO $d(t) = d_p(t)$:

$$e^{d_p}(s) = y^{d_p}(s) = S(s)\, d_p(s) \quad / \quad S(s) = \frac{1}{1+L(s)}$$

ANALOGO A e_r^∞

$$\to e_{d_p}^\infty = \lim_{t\to\infty} e_{d_p}(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot e_{d_p}(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot y_{d_p}(s) =$$ / $L = G_c G_p G_a G_s G_f$; $\mathcal{L}(d_p(s)) = D_{p_0}/s^{h+1}$; SE $s \to 0 \to G_p \mapsto \frac{K_p}{s^p} \wedge G_c \mapsto \frac{K_c}{s^\nu}$

$$= \lim_{s\to 0} s \cdot S(s)\, d_p(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{1+L(s)} d_p(s) = \ldots =$$

$$= \lim_{s\to 0} s \frac{s^{\nu+p}}{s^{\nu+p} + K_c K_p G_a G_f G_s} \frac{D_{p_0}}{s^{h+1}} = \begin{cases} 0, & \text{SE } \nu+p > h \\ \dfrac{D_{p_0}}{s^{\nu+p} + K_c K_p G_a G_f G_s}, & \text{SE } \nu+p = h \end{cases}$$

$\to$

• ESSENDO $\nu+p$ IL n° DI ZERI / $s=0$ DI $S(s)$,

, SE $\nu+p < h$ NON POSSO USARE T. DEL VALORE FINALE

$$\to e_{d_p}^\infty = \lim_{t\to\infty} e_{d_p}(t) = \infty$$

• RISPOSTA IN FREQUENZA DI SIST. DI CONTROLLO CON FEEDBACK :

• **f DI CROSSOVER** : ω_c

-> ω_c DISCRIMINA LE f BASSE DA QUELLE ALTE :

-> SE $\omega \ll \omega_c$ —> RANGE f A BASSE FREQUENZE

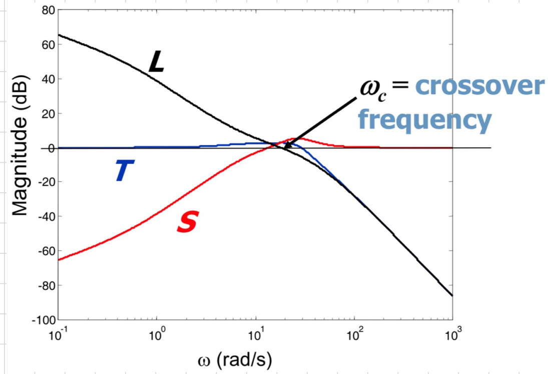
-> SE $\omega \gg \omega_c$ —> RANGE f A ALTE FREQUENZE

-> SE $\omega \approx \omega_c$ —> RANGE f A MEDIE FREQUENZE

• IN ω_c : $|L(j\omega)| = 1$ ~> $|L(j\omega)|_{dB} = 0$

-> SE $\omega \ll \omega_c$ ~> TIPICAMENTE $|L(j\omega)| \gg 1$

-> SE $\omega \gg \omega_c$ ~> TIPICAMENTE $|L(j\omega)| \ll 1$



-> $\angle L(j\omega)$ NEL RANGE f MEDIE È DETERMINANTE PER STABILIRE LA STABILITÀ DEL SIST.

• $S(s) = (1 - L(s))^{-1}$:

• SE $\omega \ll \omega_c$: $|L(j\omega)| \gg 1$ ~> $|S(j\omega)| = \left| \dfrac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \simeq \left| \dfrac{1}{L(j\omega)} \right|$

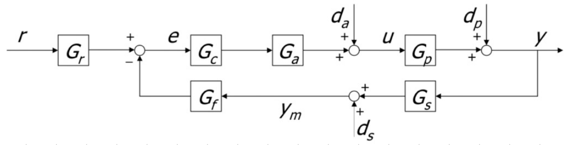
• SE $\omega \gg \omega_c$: $|L(j\omega)| \ll 1$ ~> $|S(j\omega)| = \left| \dfrac{1}{1 + L(j\omega)} \right| \simeq 1$

• $T(s) = 1 - S(s)$: ~> $\left(= 1 - \dfrac{1}{1 - L(s)} = \cdot \dfrac{L(s)}{1 - L(s)} \right)$

• SE $\omega \ll \omega_c$: $|L(j\omega)| \gg 1$ ~> $|T(j\omega)| = \left| \dfrac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \approx 1$

• SE $\omega \gg \omega_c$: $|L(j\omega)| \ll 1$ ~> $|T(j\omega)| = \left| \dfrac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right| \approx |L(j\omega)|$

- **RISPOSTA A REGIME PER DISTURBI SINUSOIDALI:**



SI VUOLE RIDURRE L'EFFETTO DEI DISTURBI

- **LIMITI PER VIA DI d_s:**

  - SIA $d_s = a_s \sin(\omega_s t)$, $\forall \omega_s \geq \omega_s^-$

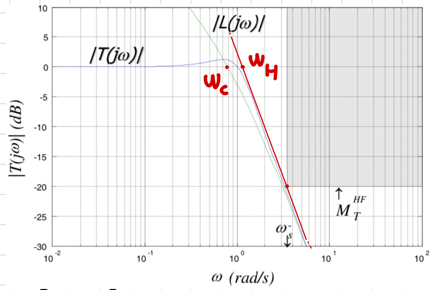
(NO 73 ÷ 77)

$\to |e^\infty_{d_s}| = |Y^\infty_{d_s}| \leq \rho_s \;/\; \rho_s > 0$

GUARDA SCHEMA $\leadsto \frac{Y_{d_s}}{d_s} = \frac{1}{G_s} \frac{L}{1-L}$

$\to |e^\infty_{d_s}| = |Y^\infty_{d_s}| = \left| a_s \frac{|T(j\omega_s)|}{G_s} \sin(\omega_s t + \varphi_s) \right| \leq a_s |T(j\omega_s)| \frac{1}{G_s} \leq \rho_s$

$\to |T(j\omega_s)| \leq \rho_s \frac{G_s}{a_s}$, $\forall \omega_s \geq \omega_s^-$



- LIMITI SU $|L(j\omega)|$: $\leadsto$ PER VIA DI d_s

SE CONSIDERO $|L(j\omega)| \ll 1 \to |T(j\omega)| \simeq |L(j\omega)|$

$\to |e^\infty_{d_s}| \leq \rho_s \to |L(j\omega_s)| \lessapprox \rho_s \frac{G_s}{a_s} = M_T^{HF}$, $\forall \omega_s \geq \omega_s^-$

- PER IL PROGETTO:

$|\omega_c \leq \omega_H| \to$ CONVIENE SCEGLIERE $|\omega_H \geq 2\omega_c| \to \omega_c \leq \frac{1}{2}\omega_H$

- **LIMITI PER VIA DI d_p.**

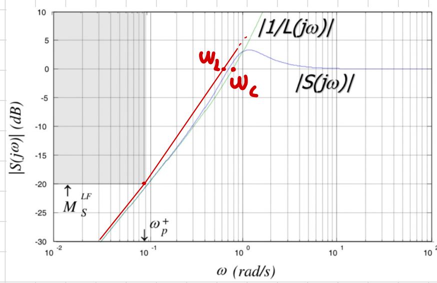
  - SIA $d_p = a_p \sin(\omega_p t)$, $\forall \omega_p \leq \omega_p^+$

$\to |e^\infty_{d_p}| = |Y^\infty_{d_p}| \leq \rho_p \;/\; \rho_p > 0$

GUARDA SCHEMA $\leadsto \frac{Y_{d_p}}{d_p} = \frac{1}{1-L}$

$\to |e^\infty_{d_p}| = |Y^\infty_{d_p}| = \left| a_p |S(j\omega_p)| \sin(\omega_p t + \varphi_p) \right| \leq a_p |S(j\omega_p)| \leq \rho_p$

$\to |S(j\omega_p)| \leq \frac{\rho_p}{a_p} = M_S^{LF}$, $\forall \omega_p \leq \omega_p^+$



- LIMITI SU $|L(j\omega)|$: $\leadsto$ PER VIA DI d_p

SE CONSIDERO $|L(j\omega)| \gg 1 \to |S(j\omega)| \simeq |1/L(j\omega)|$

$\to |e^\infty_{d_p}| \leq \rho_p \to |L(j\omega_p)| \gtrapprox \frac{a_p}{\rho_p}$, $\forall \omega_p \leq \omega_p^+$

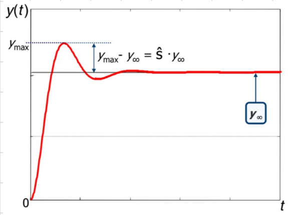
- PER IL PROGETTO:

$|\omega_c \geq \omega_L| \to$ CONVIENE SCEGLIERE $|\omega_c \geq 2\omega_L| \to \omega_c \geq 2\omega_L$

$\to$ **RIASSUNTO VINCOLI:**

- $2\omega_L \leq \omega_c \leq \frac{1}{2}\omega_H$
- $\begin{cases} |T(j\omega)| \simeq |L(j\omega)| \leq M_T^{HF} = \rho_s \frac{G_s}{a_s}, & \text{PER } \omega \gg \omega_c \\ |S(j\omega)| \simeq |1/L(j\omega)| \geq M_T^{LF} = \frac{\rho_p}{a_p}, & \text{PER } \omega \ll \omega_c \end{cases}$

• RISPOSTA AL TRANSITORIO CON STEP INPUT:

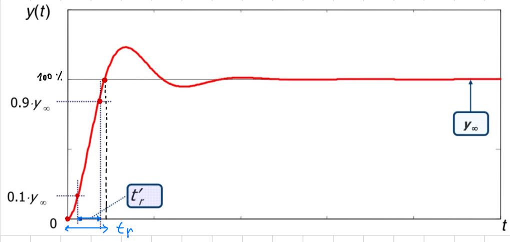


(NO 89 ÷ 98)

• ELONGAZIONE MASSIMA:

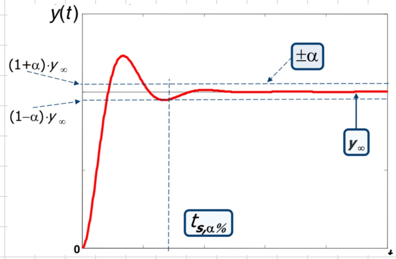
$$\hat{s} = \frac{Y_{max} - Y_\infty}{Y_\infty}, \quad \hat{s}_\% = 100 \cdot \hat{s}$$

• TEMPO DI SALITA:



- t_r : t per far sì che Y: 0% ↦ 100%
  → $Y|_{100\%} = Y_\infty$
- t'_r : t per far sì che Y: 10% ↦ 90%

• TEMPO DI ASSESTAMENTO:



- $t_{s,\alpha\%}$: t per far sì che Y stia all'interno di $\pm\alpha \cdot 100\% \cdot Y_\infty$

→ in genere $\alpha = 0{,}01 / 0{,}02 / 0{,}03$

→ $\hat{s}$, t_r, $t_{s,\alpha\%}$ sono degli indici che descrivono le performance di un sistema

• RISPOSTA ALL'INPUT PER SIST. DI II ORDINE:

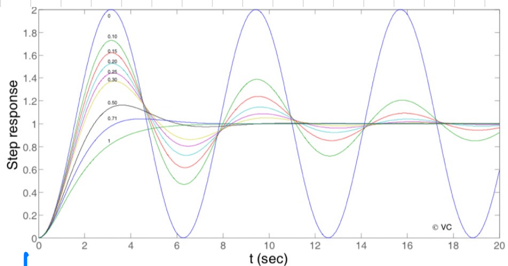
per sist. di II ordine: $T(s) = \dfrac{1}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n}}$

$\xi \geq 0$

→ $Y(t) = 1 - \dfrac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \cdot \sin\left(\omega_n t + tg^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)$

→ se $0 < \xi < 1$ → sist. SOTTOSMORZATO

se $\xi = 1$ → sist. CRITICAMENTE SMORZATO

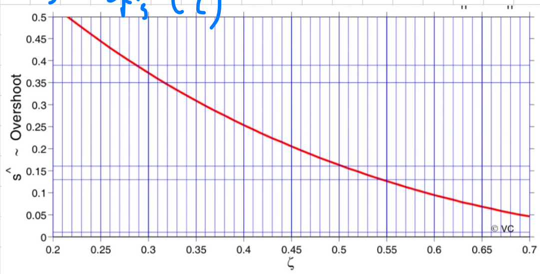


↳ ↓ ξ → $Y(t) \mapsto 0$ più rapidamente

• per sist. di II ordine:

- $\hat{s} = f_{\hat{s}}(\xi) = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$
- $t_r = f_{t_r}(\xi, \omega_n) = \dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\pi - \arccos(\xi)\right)$
- $t_{s,\alpha\%} = f_{t_s}(\xi, \omega_n, \alpha) = -\dfrac{1}{\omega_n \xi}\ln\alpha$

$\hat{s} = f_{\hat{s}}(\xi)$

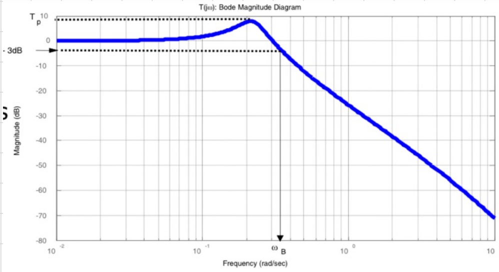


↳ rep. esempi: 114 ÷ 125

• Risposta in frequenza di $T(s)$:

• Picco ($\leadsto$ risonanza): $T_p = \dfrac{|T(j\omega)|_{max}}{|T(j0)|} \leadsto T_{p,dB} = |T(j\omega)|_{max,dB} - |T(j0)|_{dB}$

• Banda 3 dB : ω_B : $|T(j\omega_B)| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,|T(j0)|$



$\rightarrow |T(j\omega_B)|_{dB} \simeq |T(j0)|_{dB} - 3\ dB$

• Proprietà:

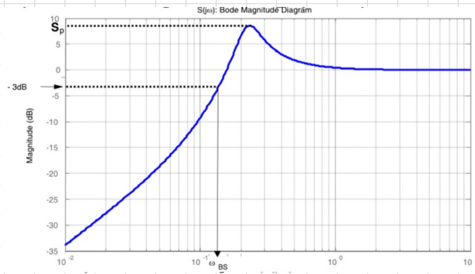
- Se $\omega << \omega_B \rightarrow |T(j\omega)| \approx 1$
- Se $\omega >> \omega_B \rightarrow |T(j\omega)| << 1$

, $\omega \approx \omega_B \rightarrow |T(j\omega)| \approx T_p$

• Risposta in frequenza di $S(s)$:

• Picco ($\leadsto$ risonanza): $S_p = |S(j\omega)|_{max} \leadsto S_{p,dB} = |S(j\omega)|_{max,dB}$

• Banda 3 dB : $\omega_{BS} = |S(j\omega_{BS})| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$



$\rightarrow |S(j\omega_{BS})|_{dB} \simeq -3\ dB$

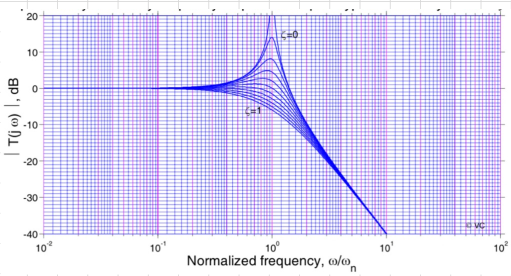
• Proprietà:

- Se $\omega << \omega_{BS} \rightarrow |S(j\omega)| << 1$
- Se $\omega >> \omega_{BS} \rightarrow |S(j\omega)| \approx 1$

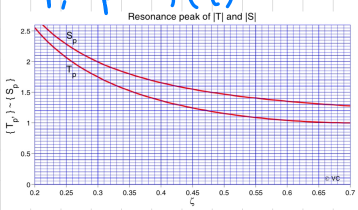
, $\omega \approx \omega_{BS} \rightarrow |S(j\omega)| \approx S_p$

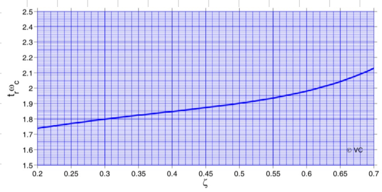
• Risposta in frequenza sist. II ordine : ($\leadsto$ formule e calcoli non svolti a lezione)

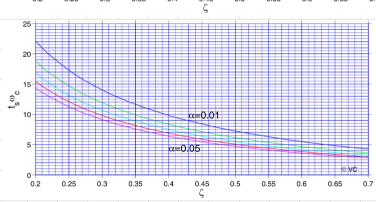
• $|T(j\omega)|_{dB} = f(\omega)$ $\quad$ $\hookrightarrow$ slide 777



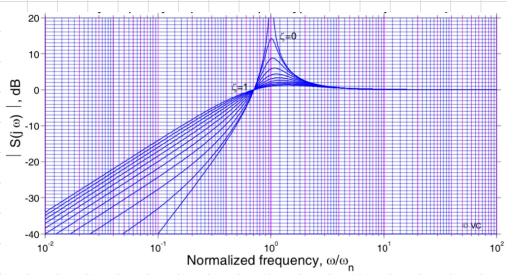
• $T_p, S_p = f(\xi)$







• $|S(j\omega)|_{dB} = f(\omega)$



Risposta in t:

• $\hat{s} = e^{-\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

• $t_r \simeq \dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\pi - \arccos(\xi)\right)$

• $t_s = -\dfrac{1}{\omega_n \xi}\ln \alpha$

Risposta in f:

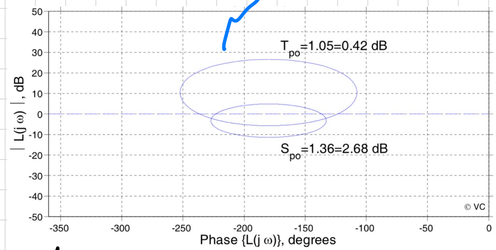
• $T_p = 1 \Big/ 2\xi\sqrt{1-\xi^2}$

• $S_p = \dfrac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2+2\sqrt{1+8\xi^2}}}{\sqrt{1+8\xi^2}+4\xi^2-1}$

• $\omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}$

• CALCOLO DELLA REGIONE PROIBITA: (→ LE SLIDE 126 ÷ 164 NO DETTAGLI)

LE FUNZIONI $S(s)$ e $T(s)$ GENERANO 2 REGIONI PROIBITE LOCI
SUL PIANO DI Nychols
→ DURANTE IL PROGETTO BISOGNA CERCARE DI AGGIRARLE IN MODO APPROSSIMATIVO



→ DURANTE IL PROGETTO, AVRÒ DEI VINCOLI SU $\hat{S}$, t_r e $t_{s,\alpha\%}$

• DA $\hat{S}$ ↦ T_p, S_p : PICCHI DI RISONANZA DI $T(s)$ e $S(s)$

$$\to \hat{S} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \to \xi = \frac{|\ln(\hat{S})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{S})}} \to \begin{cases} \cdot T_p = 1/2\xi\sqrt{1-\xi^2} \\ \cdot S_p = \dfrac{2\xi\sqrt{2+4\xi^2+2\sqrt{1+8\xi^2}}}{\sqrt{1+8\xi^2}+4\xi^2-1} \end{cases}$$

LE 2 ZONE PROIBITE ANDREMO CALCOLARE IN MATLAB COL COMANDO:

• **myngridst(T_p, S_p)**

• PER VEDERE $L(s)$ SUL PIANO DI NYCOLS: **nichols(L)**

• DA t_r, $t_{s,\alpha\%}$ ↦ VINCOLI ULTERIORI SU ω_c

es. P1 PROGETTO

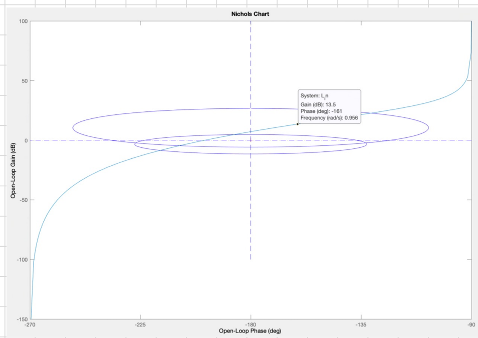
• DAI REQUISITI : $\hat{S}_{\%} \leq 10\%$ → $\hat{S} \leq 0{,}1$

USO MATLAB

$$\to \text{ESSENDO } \xi = \frac{|\ln(\hat{S})|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(\hat{S})}} \to \xi = 0{,}59 \to \begin{cases} \cdot T_p = 1{,}0485 \\ \cdot S_p = 1{,}3609 \end{cases}$$

→ IN MATLAB (GUARDA SCRIPT)

```
>> nichols(L_in)
>> myngridst(T_p_max,S_p_ma:
>> nichols(L_in)
>> |
```
↪ USO "hold on" PER VEDERLI SULLA STESSA FIGURA



• DA t_r, $t_{s,\alpha\%}$ ↦ VINCOLI ULTERIORI SU ω_c

• $t_r \leq l$:

$$\begin{cases} t_r = \dfrac{1}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\left(\pi - \arccos(\xi)\right) \\ \omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^2}-2\xi^2} \end{cases} \xrightarrow[\omega_c \text{ a 1° membro}]{\omega_n \text{ 2° eq} \mapsto \omega_n \text{ 1° eq}} t_r \cdot \omega_c = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\pi - \arccos(\xi)\right)\cdot\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}_{L}$$

$\hookrightarrow t_r = \dfrac{L}{\omega_c} \leq l \to \omega_c \geq \dfrac{L}{l}$

• $t_{s,\alpha\%} \leq m$:

$$\begin{cases} t_{s,\alpha\%} = -\dfrac{\ln\alpha}{\omega_n\xi} \\ \omega_c = \omega_n\sqrt{\sqrt{1+4\xi^2}-2\xi^2} \end{cases} \xrightarrow{\text{(as before)}} t_{s,\alpha\%}\cdot\omega_c = \underbrace{-\frac{\ln\alpha}{\xi}\cdot\sqrt{\sqrt{1+4\xi^4}-2\xi^2}}_{M}$$

$\hookrightarrow t_{s,\alpha\%} = \dfrac{M}{\omega_c} \leq m \to \omega_c \geq \dfrac{M}{m}$

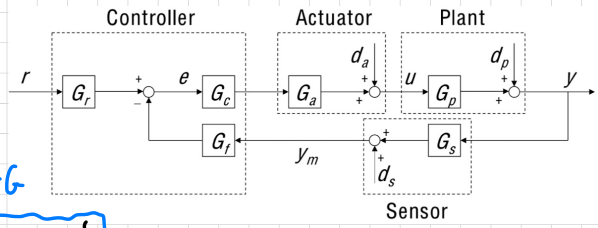
• INFINE :

$$\omega_{c,d} \geq \max\left(\omega_c\Big|_{t_r},\ \omega_c\Big|_{t_{s,\alpha\%}}\right)$$

→ CALCOLI SU MATLAB IN MODO ANALOGO A $\hat{S}$

- PART 8 :

• LOOP SHAPING DESIGN :



- CONSIDERANDO $G_c(s)$

RETE LEAD, RETE LAG

$$G_c(s) = \frac{K_c}{s^v} \underbrace{\prod_i \left(\frac{1 + \frac{s}{z_{di}}}{1 + \frac{s}{m_{di} z_{di}}} \right)}_{\text{RETE LEAD}} \underbrace{\prod_j \left(\frac{1 + \frac{s}{m_{ij} p_{ij}}}{1 + \frac{s}{p_{ij}}} \right)}_{\text{RETE LAG}}$$

$\rightarrow \frac{K_c}{s^v}$: STRUTTURATO SULLA BASE DEI REQUISITI A REGIME

- IL DESIGN DEL CONTROLLORE SI SVOLGE IN 3 FASI :
  - 1. TRADUZIONE DEI REQUISITI
  - 2. PROGETTO DEL CONTROLLORE TRAMITE SHAPING DI $L(s)$
  - 3. ANALISI DELLE PERFORMANCE : SE NON SODDISFATTI $\rightarrow$ BACK TO 2.

• DESIGN DI K_c (GAIN DEL CONTROLLORE) :

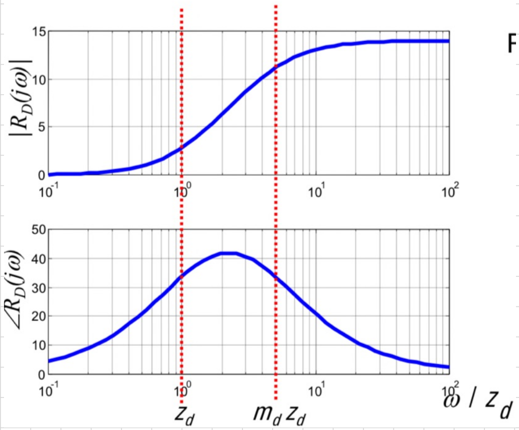
- INIZIALMENTE HO SETTATO IL $n°$ DI POLI NELL' ORIGINE DI G_c : V
- SCELTA DEL SEGNO DI K_c :

1. INIZIO CON UN Hp: es. $K_c > 0$
2. VERIFICO Hp / $L_{INIZIALE} = \frac{K_c}{s^v} \cdot G_p G_a G_s G_f$:
   - VERIFICO $P_{cl} = N + P_{ol}$ /
     - P_{ol} : $n°$ POLI CON $Re(\,) > 0$
     - N : $n°$ INCIRCLEMENTI ATTORNO A $(-1, j0)$ SU NYQUIST
3. $\begin{cases} \text{SE } P_{ol} \text{ PARI : IL SISTEMA È STABILIZZABILE CON RETI LEAD/LAG} \longrightarrow \text{OK} \\ \text{SE } P_{cl} \text{ DISPARI} \rightarrow \text{SONO COSTRETTO A CAMBIARE SEGNO A } K_c : K_c < 0 \end{cases}$

- CONOSCENDO I VINCOLI SU K_c e CERCANDO DI USCIRE DALLA REGIONE PROIBITA
  - SE SCELGO $\uparrow K_c \longrightarrow$ NICHOLS $(L(s))$ UPWARDS
  - SE SCELGO $\downarrow K_c \longrightarrow$ NICHOLS $(L(s))$ DOWNWARDS

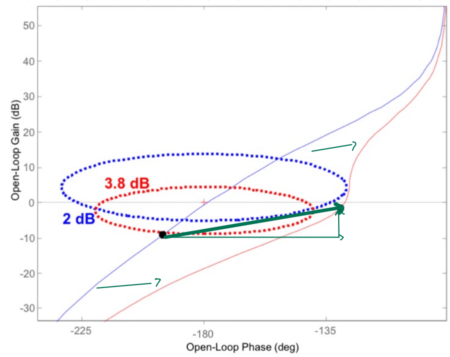
• RETE LEAD:

• $R_d(s) = \dfrac{1+\dfrac{s}{z_d}}{1+\dfrac{s}{m_d z_d}}$, $m_d > 1$



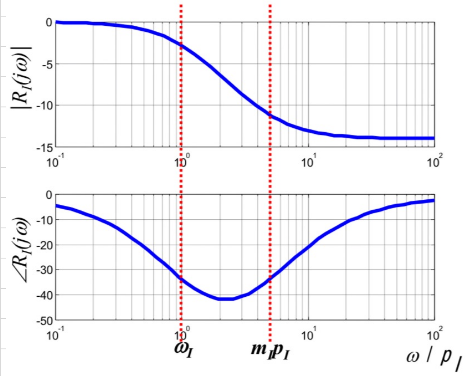
-> USO UNA RETE LEAD PER AGIRE SU $\angle L(s)$

• EFFETTO:



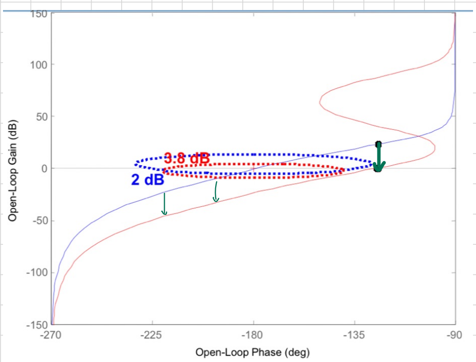
• RETE LAG:

• $R_i(s) = \dfrac{1+\dfrac{s}{m_i p_i}}{1+\dfrac{s}{p_i}}$, $m_i > 1$



-> USO UNA RETE LAG PER AGIRE SU $|L(s)|$

• EFFETTO:



• PROBLEMA RETI LAG: INTRODUCE "EFFETTO CODA" -> UTILIZZARE SOLO SE NECESSARIO

PART 9:

(MOLTI CONCETTI SONO IDENTICI A QUELLI IN "CA_ parte 3.1", MA CON IL TD)

SIST. LTI TD:

$$\begin{cases} x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) & \text{EQ. DI STATO} \\ y(k) = C(k)\,x(k) + D(k)\,u(k) & \text{EQ. D'USCITA} \end{cases}$$

TRASFORMATA Z:

$$F(z) = \mathcal{Z}[f(k)] \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f(k)\, z^{-k}, \quad z \in \mathbb{C}$$

(⇝ GUARDARE T. DEI SEGNALI PER PIÙ INFO)

- PROPRIETÀ:
  - LINEARITÀ
  - SLITTAMENTO IN t: $\mathcal{Z}[f(k-h)] = z^{-h}F(z)$
  - $\mathcal{Z}[f(k+1)] = zF(z) - z f(0)$
  - T. DEL VALORE FINALE: SE $\nexists |p_i| \geq 1$:

$$\rightsquigarrow \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 1} (z-1)F(z)$$

$$\rightsquigarrow \lim_{k \to \infty} f(k) = \lim_{z \to 0} F(z)$$

$f(k)$	$F(z)$
$\delta(k)$	1
$\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-1}$
$\binom{k}{\ell} \triangleq \frac{k(k-1)\cdots(k-\ell+1)}{\ell!}, \ell > 0$	$\frac{z}{(z-1)^{\ell+1}}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
$\binom{k}{\ell} a^{k-\ell}, \ell > 0$	$\frac{z}{(z-a)^{\ell+1}}$
$\sin(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z\sin(\vartheta)}{z^2 - 2\cos(\vartheta)z + 1}$
$\cos(\vartheta k), \vartheta \in \mathbb{R}$	$\frac{z(z-\cos(\vartheta))}{z^2 - 2\cos(\vartheta)z + 1}$
$A^k, A \in \mathbb{R}^{n,n}$	$z(zI - A)^{-1}$

TRASFORMATA INVERSA DI Z:

es. $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{10z}{z-0{,}5} - \frac{10z}{z-0{,}4}\right] = \left[10\cdot(0{,}5)^k - 10\cdot(0{,}4)^k\right]\varepsilon(k)$

- POLI COMPLES. CONIUG.: $\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{Rz}{z-a} + \frac{R^* z}{z-a^*}\right] = 2|R|\,|a|^k \cos\left((\angle a)k + \angle R\right)$

SOLUZIONE DI S. LTI TD:

RISP. LIBERA DELLO STATO — RISP. FORZATA DELLO STATO

$$\begin{cases} x(k) = A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) = x_{zi}(k) + x_{zs}(k) \\ y(k) = CA^k x(0) + C\sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} B u(i) + Du(k) = y_{zi}(k) + y_{zs}(k) \end{cases}$$

$\underline{Z}$

$$\to \begin{cases} X(z) = X_{zi}(z) + X_{zs}(z) = \underbrace{z(zI-A)^{-1}x(0)}_{X_{zi}} + \underbrace{(zI-A)^{-1}BU(z)}_{X_{zs}} \\ Y(z) = Y_{zi}(z) + Y_{zs}(z) = zC(zI-A)^{-1}x(0) + \{C(zI-A)^{-1}B + D\}U(z) \end{cases}$$

$$(zI-A)^{-1} = \frac{adj(zI-A)}{det(zI-A)}$$

DOVE :

- $Y_{zi}(z) = H_{zi}(z)X(0) \to H_{zi}(z) = \frac{Y_{zi}(z)}{X(0)} = zC(zI-A)^{-1}$
- $Y_{zs}(z) = H_{zs}(z)U(z) \to H_{zs}(z) = \frac{Y_{zs}(z)}{U(z)} = \{C(zI-A)^{-1}B + D\}$

ES. SU SLIDE, SIMILI A TC

- **ANALISI MODALE:**

- $m(t)$ CONVERGENTE $\iff \lim_{k\to\infty} |m(k)| = 0$
- $m(t)$ LIMITATO $\iff 0 \le |m(t)| \le M < \infty$
- $m(t)$ DIVERGENTE $\iff \lim_{k\to\infty} |m(k)| = \infty$

$$\to p_A(z) = (z-\lambda_1)^{\mu_1} \cdots (z-\lambda_r)^{\mu_r}$$

$\to$ IL TERMINE GENERICO $f_{ij}(z)$ DELLA MATRICE $z(zI-A)^{-1}$ È:

$$f_{ij}(z) = \frac{zQ'_{ij}(z)}{(z-\lambda_1)^{\mu'_1} \cdots (z-\lambda_r)^{\mu'_r}}$$

$$\to f_{ij}(z) = \sum_{h=1}^{\mu'_1} \frac{r_{1,h}\cdot z}{(z-\lambda_1)^h} + \dots + \sum_{h=1}^{\mu'_r} \frac{r_{r,h}\cdot z}{(z-\lambda_r)^h} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{\mu'_r} \frac{r_{i,h}\, z}{(z-\lambda_i)^h}$$

$\downarrow Z^{-1}$

$$\to f_{ij}(k) = \sum_{h=1}^{\mu'_1} r_{1,h}\binom{k}{h-1}\lambda_1^{k-h+1} + \dots + \sum_{h=1}^{\mu'_r} r_{r,h}\binom{k}{h-1}\lambda_r^{k-h-1}$$

- SE $\lambda \in \mathbb{C} \wedge \lambda = \sigma_0 + j\omega_0 = ve^{\pm j\theta}$

$$\to m_0(k) = \begin{cases} v^k\cos(\theta k) \\ v^k\sin(\theta k) \end{cases}$$, IN GENERALE: $$m_{\mu'}(k) = \begin{cases} \binom{k}{\mu'-1} v^{k-\mu'-1}\cos(\theta(k-\theta'+1)) \\ \binom{k}{\mu'-1} v^{k-\mu'-1}\sin(\theta(k-\theta'+1)) \end{cases}$$

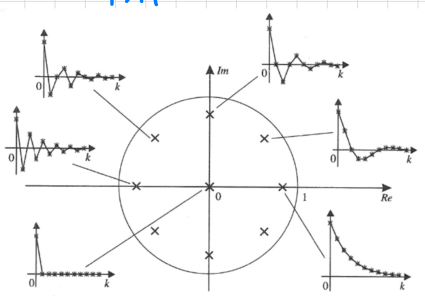
$$\to m_1(k) = \begin{cases} kv^{k-1}\cos(\theta(k-1)) \\ kv^{k-1}\sin(\theta(k-1)) \end{cases}$$

→ • **SE $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu' = 1$:** ⇝ VALGONO ANCHE PER $\mu' > 1$

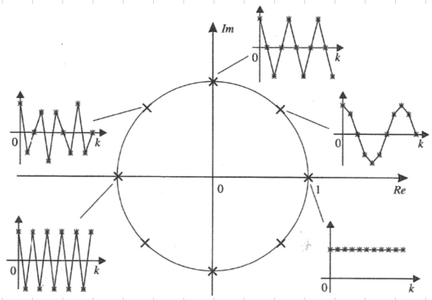
- GEOMETRICAMENTE CONVERGENTE $\Leftrightarrow |\lambda| < 1$
- LIMITATO $\Leftrightarrow |\lambda| = 1$
- GEOMETRICAMENTE DIVERGENTE $\Leftrightarrow |\lambda| > 1$

RECALL:
→ IN TC CONTAVA $Re(\,) < 0$

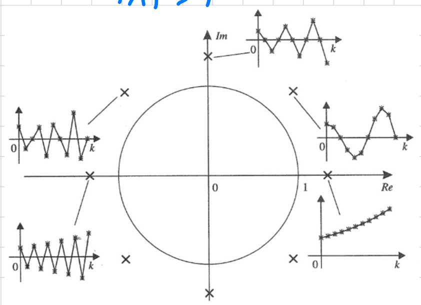
$|\lambda| < 1$



$|\lambda| = 1$

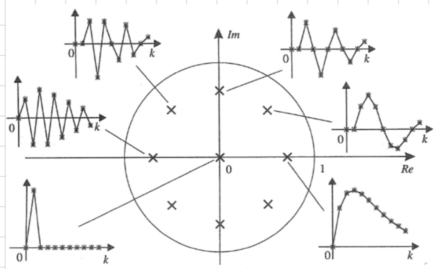


$|\lambda| > 1$



• **SE $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu' = 1$:** ⇝ VALGONO ANCHE PER $\mu' > 1$

- GEOMETRICAMENTE CONVERGENTE $\Leftrightarrow |\lambda| = V < 1$
- LIMITATO (OSCILLANTE) $\Leftrightarrow |\lambda| = V = 1, \quad \theta \neq 0$
- GEOMETRICAMENTE DIVERGENTE $\Leftrightarrow |\lambda| = V > 1$



• **STABILITÀ INTERNA:**

• UN S. LTI TD È:

- INTERNAMENTE STABILE $\Leftrightarrow |\lambda_i(A)| \leq 1 \;/\; \mu'(\lambda_j(A)) = 1$ SE $|\lambda_j(A)| = 1$
- ASINT. STABILE $\Leftrightarrow |\lambda_i(A)| < 1$
- INSTABILE $\Leftrightarrow \left(\exists\, \lambda_i \;/\; |\lambda_i(A)| > 1\right) \vee \left(\mu'(\lambda_j(A)) > 1 \text{ SE } |\lambda_j(A)| = 1\right)$

es. $\{\lambda_i(A)\} = \{-0{,}5 \pm j\,0{,}1 \;;\; 0{,}4 \pm j\,0{,}2\}$

→ $\{|\lambda_i(A)|\} = \left\{\sqrt{0{,}5^2 + 0{,}1^2} = \sqrt{0{,}26},\ \sqrt{0{,}26},\ \sqrt{0{,}2},\ \sqrt{0{,}2}\right\}$ → ASINT. STABILE

• **STABILITÀ BIBO:**

S. LTI TD BIBO STABILE $\Leftrightarrow |p_i| < 1 \;/\; p_i$: POLI DI $H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$

• **EQUILIBRIO e LINEARIZZAZIONE:**

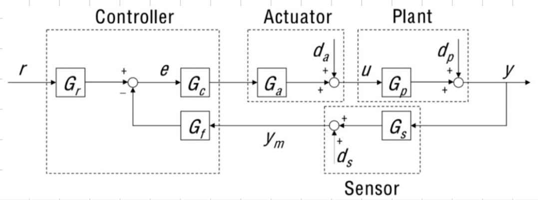
• EQUILIBRIO:
→ IMPONGO: $\begin{cases} \bar{x} = f(\bar{x}, \bar{u}) \\ \bar{y} = g(\bar{x}, \bar{u}) \end{cases}$

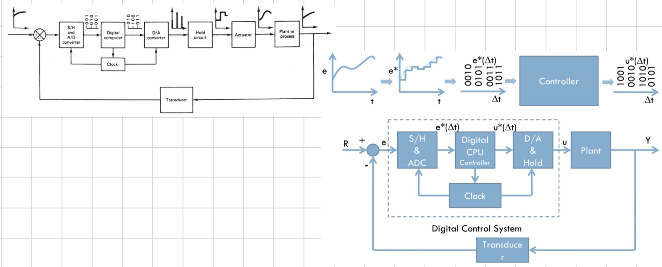
• LINEARIZZAZIONE:
(AS IN TC)

• PART 10:

(VERRANNO RIPORTATI SOLO I CONCETTI PRINCIPALI E UTILI, SVOLTI A LEZIONE)

CONTROLLORE ANALOGICO: ⟼ **CONTROLLORE DIGITALE:**





• **CONVERSIONE A/D:** ⤳ GIÀ VISTA IN ALTRI CORSI

SAMPLING ⟼ QUANTIZZAZIONE ⟼ CODIFICA BINARIA

• **ZOH** (ZERO-ORDER HOLD): MANTIENE IL SEGNALE CAMPIONATO SU QUEL VALORE FINO AL CAMPIONAMENTO SUCCESSIVO

• **SCELTA DELLA ω_s DI CAMPIONAMENTO:**

• DAL T. DI NYQUIST: $\omega_s > 2\,\omega_B$ ⤳ BANDA DEL SEGNALE

$\rightarrow \omega_s > 2\,\omega_B \rightarrow \omega_s > 4\,\omega_c$ / ω_c: ω_c DEL PROGETTO

• IL FILTRO ZOH INTRODUCE UNA VARIAZ. SULLA FASE DEL CONTROLLORE: $\angle G_{ZOH}(j\omega) = -\dfrac{\omega T_s}{2}$

→ **PER LIMITARE L'EFFETTO DEL FILTRO:**

$\rightarrow 0{,}1 < \omega_c T_s < 0{,}2$ / T_s: PERIODO DI CAMPIONAMENTO $\rightarrow T_s = \dfrac{1}{f_s} = \dfrac{2\pi}{\omega_s}$

↳ $30\,\omega_c < \omega_s < 60\,\omega_c \rightarrow \dfrac{0{,}1}{\omega_c} < T_s < \dfrac{0{,}2}{\omega_c}$