RIPASSO A e GL

• MATRICI:

- PROPRIETÀ: $AB \neq BA$
- A è INVERTIBILE $\Leftrightarrow AA^{-1} = I_n$
- MATRICE NILPOTENTE: $A^p = 0_{n,n}$ / p è UN ESP. PER CUI VALE LA RELAZIONE
  $\hookrightarrow$ NON SONO INVERTIBILI

PROPRIETÀ:

- A è INVERTIBILE $\Leftrightarrow {}^tA$ è INVERTIBILE
- A e B INVERTIBILI $\Leftrightarrow AB$ è INVERTIBILE e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

• SISTEMI DI EQ. LINEARI:

- UN SISTEMA SI DICE:
  - OMOGENEO SE $B = 0_{m,1}$ (SENNÒ NON OMOGENEO)
  - COMPATIBILE SE HA SOLUZIONI (SENNÒ INCOMPATIBILE)

• TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI:

i) IL SISTEMA È COMPATIBILE $\Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B)$

ii) SE IL SISTEMA È COMPATIBILE $\rightarrow$ LE SUE SOLUZIONI DIPENDONO DA $n - rk(A)$ PARAMETRI LIBERI $\rightarrow N^{\circ}$ SOLUZIONI $= \infty^{n-rk(A)}$

iii) SE IL SIST. È COMPATIBILE e X_0 SOLUZ. FISSATA OGNI ALTRA SOLUZIONE È DELLA FORMA $X = X_0 + Y$

- $\det()$:

- PROPRIETÀ:
  - $R_i \mapsto R_i + \alpha R_j$ $\rightarrow$ NON CAMBIA DET( )
  - $R_i \mapsto \alpha R_i$ $\rightarrow$ $\alpha \cdot \text{DET}()$
  - $R_i \mapsto R_j$ $\rightarrow$ DET( ) CAMBIA DI SEGNO

- MATRICI TRIANGOLARI E DIAGONALI: $\det() =$ PRODOTTO DEI TERMINI a_{ii}
- TEOREMA DI BINET: $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
- INVERSA DI UNA MATRICE:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \left(\mathrm{adj}(A)\right)^t$$

$\rightarrow$ OGNI ENTRATA È IL DETERMINANTE DELLA SOTTOMATRICE CORRISPONDENTE

- $\mathrm{rk}(A) = n \iff \det(A) \neq 0 \iff \exists A^{-1}$

- <u>VETTORI</u>:
  - $\vec{v} \parallel \vec{w} \iff$ SONO ALLINEATI $\iff \exists \alpha \,/\, \vec{v} = \alpha \vec{w}$
  - DATI I PUNTI $A, B, C, D \,/\, \vec{u} = \vec{AB}$, $\vec{v} = \vec{AC}$, $\vec{w} = \vec{AD}$
  - 2 VETTORI (ES. $\vec{u}$ E $\vec{v}$) SONO ALLINEATI

$$\iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} \leq 1$$

  - 3 VETTORI SONO COMPLANARI

$$\iff \mathrm{rk}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{pmatrix} \leq 2$$

• ANGOLO TRA 2 VETTORI:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = |\vec{v}||\vec{w}| \cos \alpha$$

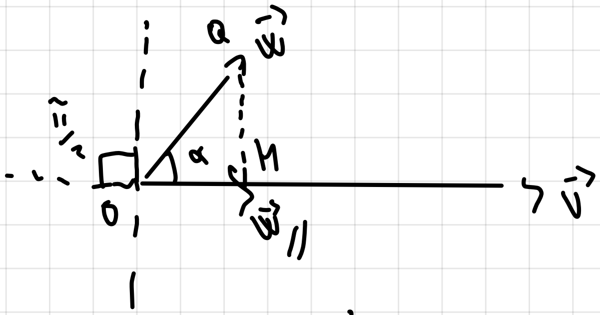
$$\to \alpha = \arccos \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}||\vec{w}|}$$

• DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY-SCHWARZ:

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq |\vec{v}||\vec{w}|$$

$$|\vec{v} + \vec{w}| \leq |\vec{v}| + |\vec{w}|$$

• PROIEZIONI ORTOGONALI:



$$\to \vec{w}_{//} = |\vec{w}| \cos(\hat{\vec{v}\vec{w}}) \, \text{vers}(\vec{v}) = \frac{|\vec{w}||\vec{v}|\cos(\hat{\vec{v}\vec{w}})}{|\vec{v}|} \cdot \overbrace{\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}}^{\text{VERSORE}} =$$

$$= \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle} \vec{v}$$

• $\vec{w}_{\perp} = \vec{w} - \vec{w}_{//}$

• PRODOTTO VETTORIALE:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

• GEOMETRIA NELLO SPAZIO:

• $r \in S_3$, PASSANTE PER $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e CON DIREZIONE $\vec{v}(l, m, n)$

$$\rightarrow \quad r: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

• PER UN PIANO MI BISOGNA UN P_0 e 2 VETTORI ($\vec{v}$ e $\vec{w}$)

$$\rightarrow \quad \pi: \begin{cases} x = x_0 + v_x t + w_x s \\ y = y_0 + v_y t + w_y s \\ z = z_0 + v_z t + w_z s \end{cases}$$

→ IN FORMA CARTESIANA: $ax + by + cz + d = 0$

→ POSIZIONI RELATIVE TRA PIANI:

- $\alpha \cong \alpha' \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B) = 1 \rightarrow \infty^{3-1}$ SOLUZ.
- $\alpha \parallel \alpha' \Leftrightarrow rk(A) = 1$ e $rk(A|B) = 2 \rightarrow \nexists$ SOLUZ.
- $\alpha \cap \alpha' = r \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2 \rightarrow \infty^{3-2}$ SOLUZ.

→ UNA RETTA PUÒ ESSERE SCRITTA COME $\alpha \cap \alpha'$ / $\vec{v} = \vec{n} \times \vec{n}'$

→ POSIZIONI RELATIVE TRA RETTE e PIANI

- $\alpha \cap r = \{P\} \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B) = 3 \rightarrow \infty^{3-3}$ SOLUZ.
- $r \subset \alpha \Leftrightarrow rk(A) = rk(A|B) = 2 \rightarrow \infty^{3-2}$ SOLUZ.
- $r \parallel \alpha \Leftrightarrow rk(A) = 2$ e $rk(A|B) = 3 \rightarrow \nexists$ SOLUZ.

→ POSIZIONI RECIPROCHE TRA RETTE:

- $r \cong r' \iff rk(A) = rk(A|B) = 2 \rightarrow \infty^{3-2}$ soluz.
- $r \cap r' = \{P\} \iff rk(A) = rk(A|B) = 3 \rightarrow \infty^{3-3}$ soluz.
- $r \parallel r' \iff rk(A) = 2$ e $rk(A|B) = 3 \rightarrow \nexists$ soluz.
- r e r' sghembe $\iff rk(A) = 3$ e $rk(A|B) = 4 \rightarrow \nexists$ soluz.

- FASCI DI RETTE e PIANI

→ RETTE
- IMPROPRIO : $\vec{v} \parallel \vec{v}'$
- PROPRIO : $\lambda(ax+by+c) + \mu(a'x+b'y+c') = 0$

→ PIANI
- IMPROPRIO : $\vec{n} \parallel \vec{n}'$
- PROPRIO : $\lambda(ax+by+cz+d=0) + \mu(a'x+b'y+c'z+d') = 0$

- DISTANZE :

- PUNTO - PIANO : $d(P_0, \pi) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ con $\pi: ax+by+cz+d=0$

- RETTA - RETTA :

considero r e r' per cui passo α e α'

→ trovo $\vec{n} = \vec{n}' = \vec{v}_r \times \vec{v}_{r'}$

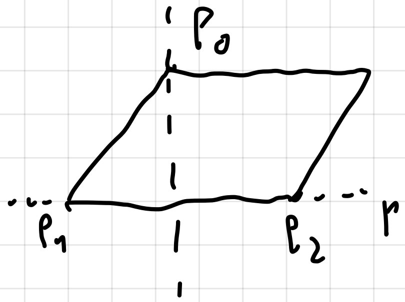
→ impongo i passaggi per P e P' → trovo d e d'

→ $d(r, r') = \dfrac{|d - d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

- PUNTO - RETTA:

$$d(P_0, r) = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \times \overrightarrow{P_1P_2}|}{|\overrightarrow{P_1P_2}|}$$

con



- PIANO - PIANO:

$$d(\pi, \pi') = \frac{|d - d'|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

⇝ OSS: i 2 piani devono avere stessi coefficienti

- RETTA - PIANO:

→ considero $P_0 \in r$

$$\to d(r, \pi) = d(P_0, \pi)$$

- SFERE IN S_3:

$$S = x^2 + y^2 + z^2 + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

dove

$\alpha = -2x_c$

$\beta = -2y_c$

$\gamma = -2z_c$

$\delta = x_c^2 + y_c^2 + z_c^2 + \rho^2$

$\to \rho = \dfrac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta}}{2}$

$\to C\left(-\dfrac{\alpha}{2}, -\dfrac{\beta}{2}, -\dfrac{\gamma}{2}\right)$

$\to S$ è una sfera $\iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-4\delta > 0$

• CIRCONFERENZE IN S_3:

$$C = S \cap \tilde{\pi}$$

$\hookrightarrow \exists \iff d(C, \tilde{\pi}) < \rho$

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 - d^2(C, \tilde{\pi})}$$

→ CIRCONFERENZE COME INTERSEZIONE DI 2 SFERE

• SE $d(C_1, C_2) > \rho_1 + \rho_2 \rightarrow \nexists$ CIRC.

$\left(\vee \ d(C_1, C_2) < |\rho_1 - \rho_2| \right.$, UNA SFERA DENTRO L'ALTRA$\left. \right)$

• SE $d(C_1, C_2) = \rho_1 + \rho_2 \rightarrow \nexists$ CIRC. → TANGENTI IN UN PUNTO

• SE $|\rho_1 - \rho_2| < d(C_1, C_2) < \rho_1 + \rho_2 \rightarrow \exists$ CIRC.

$\rightarrow C' = \left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}, -\frac{\gamma}{2}\right)$

$\rightarrow \rho' = \sqrt{\rho^2 - d(C, C')}$

• SPAZI VETTORIALI :

-> È UN QUALSIASI INSIEME PER CUI VALGONO LE PROPRIETÀ

$$\bullet\ (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\bullet\ \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$$

-> SOTTOSPAZIO :

- $0_V \in W$
- CHIUSO RISPETTO ALLA SOMMA $(\Sigma \in W)$
- CHIUSO RISPETTO AL PRODOTTO $(\in W)$

-> $W \cap W'$ -> È UN SOTTOSPAZIO

-> $W \cup W'$ -> NON SEMPRE È UN SOTTOSPAZIO $(\Leftrightarrow W \subset W' \lor W' \subset W)$

• COMBINAZIONI LINEARI

SIA $\{v_1 \dots v_4\} \in V$ -> SE $v_1 = \alpha v_2 + \beta v_3 + \gamma v_4$ -> v_1 È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI 3

-> VETTORI SONO LINEARMENTE DIPENDENTI SE

$\alpha v_1 + \beta v_2 \dots + \gamma v_m = 0$ ~> SE UNO DI LORO È COMBINAZIONE LINEARE DEGLI ALTRI

-> METODO DEGLI SCARTI

• VETTORI GENERANO $\Leftrightarrow rk(\ ) = MAX$

- DIMENSIONI:

  → È LA QUANTITÀ DI VETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI

  - $\dim(K^n) = n$
  - $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = m \cdot n$
  - $\dim([\mathbb{R}]_2) = 3$ ⤳ DIM. DELLO SPAZIO DI GRADO 2

→ W PUÒ ESSERE UNA BASE $\Leftrightarrow \{w_1, \dots w_n\}$ SONO LIN. INDIP. e GENERANO

- PER UNA MATRICE $\mathcal{L}(R_1, \dots R_m) = rk(A)$
- FORMULA DI GRASSMAN:

$$\dim_K(V) + \dim_K(W) = \dim(U + W) - \dim(U \cap W)$$

✗ T. ROUCHÉ-CAPELLI:

- SE $rk(A) < rk(A|B) \rightarrow \nexists$ SOLUZ.
- SE $rk(A) = rk(A|B)$
  - SE $= n \rightarrow \exists!$ SOLUZ.
  - SE $< n \rightarrow \exists\ \infty^{n-rk}$ SOLUZ.

• APPLICAZIONI LINEARI:

• $f: V \mapsto W$ È LINEARE SE:

- $f(0_v) = 0_w$
- $f(x+v) = f(x) + f(v)$
- $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

$\rightarrow \mu_A : \underset{n \times 1}{x} \mapsto \underbrace{\underset{(m \times n)}{A}\ \underset{(n \times 1)}{x}}_{m \times 1}$

• IMMAGINE e NUCLEO:

$f: V \mapsto W$

- $Im(f): v \,/\, f(v) = v$
- $Ker(f): x \,/\, f(v) = 0$

$\rightarrow f$ È:

SURIETTIVO $\Leftrightarrow Im(f) = V$

INIETTIVA $\Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)\ ,\ x_1 \neq x_2$

$\rightarrow Im(f)$ È UN SOTTOSPAZIO DI W

$Ker(f)$ È " " " V

- $\vec{v}$ È AUTOVETTORE $\Leftrightarrow f(v) = \lambda v$
- $\vec{v} \in Ker(f) \Leftrightarrow f(\vec{v}) = 0_w$

ISOMORFISMI:

È UN'APPLICAZIONE LINEARE BIETTIVA (INIETTIVA e SURIETTIVA)

-> ES SONO $[\cdot]_B : V \mapsto K^n$

μ_A

-> SE f È UN ISOMORFISMO -> f^{-1} È UN ISOMORFISMO

-> f È UN ISOMORFISMO $\iff rk() = MAX \iff \det() \neq 0 \iff \exists f^{-1}$

• MATRICE ASSOCIATA AD UN'APP. LINEARE:

-> $M_D^B(f)$: SCELGO f SU BASE B

-> CREO M_D^B, LE CUI COLONNE SONO I VETTORI CON $[f]_D$

• SIA $A = M_D^B(f)$:

-> $\dim(Im(f)) = rk(A)$

-> $\dim(Ker(f)) = n - rk(A)$

-> T. DELLA DIMENSIONE; (CON $f : V \mapsto W$)

$$\underbrace{\dim(V)}_{n} = \underbrace{\dim(Ker)}_{n - rk} + \underbrace{\dim(Im)}_{rk}$$

-> SE f INIETTIVA : $\dim(V) \leq \dim(W)$, $Ker() = \{0\}$

SE f SURIETTIVA : $\dim(V) \geq \dim(W)$, $Im() = W$

• ENDOMORFISMO:

-> È UN' APP. LINEARE DA $V \to V$

-> MATRICE DEL CAMBIAMENTO DI BASE

$$\to M^{B}_{D}(I)$$

$$\to [v]_{D} = M^{B}_{D}\,[v]_{B}$$

• AUTOVALORI, AUTOVETTORI, AUTOSPAZ:

• λ È AUTOVALORE SE $f(v) = \lambda v \to \det(A - \lambda I_n) = 0$

• $E_A(\lambda)$ È L'AUTOSPAZIO GENERATO DA $\lambda \to \ker(A - \lambda I_n) = 0$

$$\to p_A(t) = \det(A - t I_n) = 0$$

$$\hookrightarrow = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

$$\to a_0 = (-1)^n$$

$$a_1 = (-1)^{n+1}\, tr(A) \rightsquigarrow \Sigma \text{ DIAG.}$$

$$a_n = \det(A)$$

• SPETTRO DI UN ENDOMORFISMO

$$Sp_K(A) = \{\lambda \in K \,/\, f - \lambda\, id_V \text{ NON È INVERTIBILE}\}$$

• MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA $m_a(\lambda)$: QUANTE VOLTE È PRESENTE λ

• MOLT. GEOMETRICA $m_g(\lambda)$: $rk(E_A(\lambda)) = n - rk(\ker(A - \lambda))$

$$\to 1 \le m_g \le m_a$$

• DIAGONALIZZAZIONE DI MATRICI:

ma λ con qualunque corr.

$\to A$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow \exists P \,/\, P^{-1} A P = D$

$\to$ matrici simili: $A \sim B \Leftrightarrow A = P^{-1} B P$

$\to A$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ • $\lambda \in K$

• $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$, $\forall \lambda$

• $P = (P_1 \,/\, P_2 \,/\, P_3 \ldots)$

$\rightsquigarrow P_2$ è autovettore di λ_2

$\to A$ simmetrica $\to A$ è diagonalizzabile

$\to A$ è radice di $P_A(t)$

$\to$ se A diagonalizzabile $\to A^k = P^{-1} D^k P$

$\to A^k$ corrisponde λ_i^k

$\to$ matrici nilpotenti $(A^k = 0)$: ha come unico autovalore $\lambda = 0$

e $m_a(\lambda) = k$

• PRODOTTI SCALARI SU SPAZI VETTORIALI

$f: (v_1, v_2) \mapsto \langle v_1, v_2 \rangle$ è un app. lineare

• BASI ORTONORMALI:

• sia $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots v_n\}$ $\to$ se $v_i \perp v_j$ $\to$ sono ortogonali,

$\to$ se v_i sono versori (e ortogonali) $\to$ sono ORTONORMALI

$\to$ ORTONORMALIZZAZIONE DI GRAM-SCHMIDT:

$$\text{Passo } i: \quad u_i = \underbrace{v_i}_{v_{i\perp}} - \underbrace{\frac{\langle v_i, u_{i-1} \rangle}{\langle u_{i-1}, u_{i-1} \rangle} \cdot u_{i-1}}_{v_{i\parallel}}$$

$$\langle u_{i-1}, u_{i-1} \rangle = |u_{i-1}|^2$$

e $v_i' = \dfrac{w_i}{|w_i|}$, per la base ortonormale

• MATRICI ORTOGONALI:

$$^tP\,P = P\,^tP = I_n \rightarrow P^{-1} = {}^tP$$

$\rightarrow$ SE $\det(P) = 1 \rightarrow$ MATRICE SPECIALE

$\det(P) = -1 \rightarrow$ " NON SPECIALE

$\rightarrow$

$$P = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

$\det(P) = 1 \rightarrow \alpha = \beta$

$\det(P) = -1 \rightarrow \alpha = \beta + \pi$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ MATRICI ORTOGONALI : ROTAZIONI NEL PIANO

$\det(P) = 1 \rightarrow$ ↻

$\det = -1 \rightarrow$ ↺

$\rightarrow$ SE A SIMMETRICA $\rightarrow$ I SUOI AUTOVETTORI SONO ORTOGONALI

• FORME QUADRATICHE REALI

DA $\langle x, y \rangle = {}^tx\,A\,y \rightarrow$ È UN POLINOMIO $q(x)$ DI GRADO 2

$\rightarrow$ SE $q(x)$ NON È OMOGENEO $\rightarrow$ NON È UNA FORMA QUADRATICA

$\rightarrow$ OGNI A SIMMETRICA DEFINISCE UNA $q(x)$ E VICEVERSA

$$\rightarrow a_{ij} = \begin{cases} q_{ii} & \text{se } i = j \\ \frac{1}{2} q_{i,j} & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

• DEFINIZIONI DI $q(x)$

• $q(x) = {}^t x A x > 0 \ \forall x$ -> DEF. POSITIVA
≥ 0 -> " SEMI POSITIVA

• $q(x) = {}^t x A x < 0 \ \forall x$ -> DEF. NEGATIVA
≤ 0 -> " SEMI NEGATIVA

• $q(x) = {}^t x A x$ NEGLI ALTRI CASI -> INDEFINITA

-> SE A È DIAGONALE -> BASTA GUARDARE λ

• REGOLA DEI SEGNI DI CARTESIO:

-> n DI VARIAZIONI DEI SEGNI IN $P(t)$ = QUANTI $\lambda > 0$

• CONICHE

• $\det(B) = 0$ -> DEGENERE

-> $rk(B) = 2$ -> RETTE INCIDENTI

-> $rk(B) = 1$ -> RETTA DOPPIA

$B \in \mathbb{R}^{3,3}$

$A \in \mathbb{R}^{2,2} / A \subset B$

• $\det(B) \neq 0$ -> NON DEGENERE:

-> SE α, β DISCORDI $(\det(A) < 0)$ -> IPERBOLE

-> SE α, β CONCORDI $(\det(A) > 0)$ -> ELLISSE

-> SE $\alpha = 0 \vee \beta = 0$ $(\det(A) = 0)$ -> PARABOLA

CON $A' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

• CORREZIONE ESAME

1.

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix}$$

$$\to \det(A - tI) = \begin{pmatrix} -1-t & 0 & 1 \\ 0 & 2-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix} \quad (2-t)\Big[(-1-t)(1-t)-1\Big]$$

$$= (2-t)(t^2-2)$$

$$t = 2 \qquad t = \pm\sqrt{2} \qquad \to b$$

2.

b: se $\mathcal{B}$ base → son lin. indip. → b. X

d: $(1,5,8)$ → sono riferiti a $\mathcal{C}$ → d. X

$$(1,5,8) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,2,1) + \gamma(1,1,1)$$

$$\alpha \to 2 \qquad \beta \to 3 \qquad \gamma \to 1 \qquad \to c. \checkmark$$

3.

$$\vec{v}_s = (-1, 1, 1)$$

trovo $\vec{v}_r$

$$r: \quad \overset{\vec{n}_1}{(2,-5,0)} \times \overset{\vec{n}_2}{(0,-3,2)} = \overset{\vec{N}}{(-10,-4,-6)} = (5,2,3)$$

$$\langle \vec{v}_s, \vec{v}_r \rangle = -5+2+3 = 0 \to \text{sono perpendicolari}$$

$\rightarrow$ INTERSECO r e s:

$\rightarrow 2(-t+1)-5(t-1)=7 \rightarrow -7t=0 \rightarrow t=0$

$\hookrightarrow$ HO IL PUNTO $(1,-1,1)$

$\rightarrow 2(t+1)-3(t-1)=5 \rightarrow -t=0$

$\rightarrow r$ CONTIENE $(1,-1,1) \rightarrow$ a. ✓

4.

S: $C(0,0,0)$, $r=1$

$d(C,\pi)=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}<1 \rightarrow$ a. ✗

$\rho_{circ}=\sqrt{1^2-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \rightarrow$ b. ✗

RETTA PER $(0,0,0)$ e $\perp \pi \rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \rightarrow$ d. ✓

5.

$\dim(R_4[t])=5$

$5 \rightarrow 3 \rightarrow$ NO INIETTIVA $(V>W)$

$\rightarrow \dim[R_4[t]]=\dim(Im)+\dim(Ker) \rightarrow$ b. ✓

6.

$$M = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} 9 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & -9 & 9 \end{matrix} \to c. \checkmark$$

7.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \to c. \times \to \text{SONO MULTIPLI}$$

$$\begin{pmatrix} 2-t & 3 \\ 4 & 6-t \end{pmatrix} \quad (2-t)(6-t)-12 \to t^2-8t$$

$$\hookrightarrow t=0,\ t=8$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to b. \checkmark$$

$$\to \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix} \to \text{NO AUTOVETTORE}$$

8.

$$\begin{matrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \to \begin{matrix} 1 & -h & 0 \\ -h & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \to rk\,() = 3$$

$$1-h^2 \neq 0$$

$$1 \neq h^2 \to b. \checkmark$$

9.

$$rk\,() = 2 \to \infty^{5-2} \text{ soluz.}$$

10.

$$w = (1,-1,2) \to \begin{cases} x = 1+t \\ y = 3-t \\ z = 2t \end{cases}$$

4) $\vec{AP} = (-1, 1, -2)$ $\leadsto$ Q. ✓

11. ✓

12. ✓

13. X

$i = 2$

$n = 2$

$$-\cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{2}$$