RIPASSO

PER $\cos^2 t$ e $\sin^2 t$: $\cos 2t = \begin{cases} 1-2\sin^2 t \\ \cos^2 t + 1 \end{cases}$

↳ FORMULA DI DUPLICAZIONE DEL COSENO

• TRASFORMATA DI LAPLACE:

$$\bullet\ F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

↳ dom f : $\forall s$ / $F(s)$ CONVERGE, OVVERO È UN NUMERO FINITO

↳ SI PUÒ SCRIVERE $\mathcal{L} F(s)$

• CLASSI DI f TRASFORMABILI:

- • $C1$: "CONTINUE A TRATTI", OVVERO TUTTE LE FUNZIONI CHE IN UN INTERVALLO $[-R, R]$ $(R>0)$ HANNO AL MASSIMO UN NUMERO FINITO DI "SALTI" O DISCONTINUITÀ DI II ORDINE (LIMITE SX e DX DIVERSI)
- • $C2$: "ORDINE ESPONENZIALE", OVVERO OGNI $f(t)$ / $|f(t)| \leq c \cdot e^{\gamma t}$, $\forall t$ / $\exists \gamma$, $\exists c$

$$\rightarrow -c \cdot e^{\gamma t} \leq f(t) \leq c \cdot e^{\gamma t}$$

- • $C3$: $\mathcal{L} = F(s)$ / $C1$ e $C2$

$\in \mathbb{R}$

0 $-\infty$

↝ ASCISSA DI CONVERGENZA

• T: SE $f(t) \in \mathcal{L}$ → dom $F(s) = (S_f, +\infty)$ OPPURE $[S_f, +\infty]$

- • P1 : SE $0 \in$ dom $F(s)$ → $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-0t}\, dt$ $= \mathcal{L} f(0)$ ↝ s

↝ T. DEL VALORE FINALE

- • P2 : $\lim_{s \to +\infty} F(s) = 0$, SE $f \in \mathcal{L}$

SE $f \in \mathcal{L}$

- • P DI LINEARITÀ : $\lambda f \in \mathcal{L}$ → $\mathcal{L}[f(t)] = \lambda F(s)$ e $S_f = S_{\lambda f}$

$\mathcal{L}(f+g) = F(s) + G(s)$ e $S_{f+g} \leq \max[S_f, S_g]$

- • P RISCALAMENTO : $\mathcal{L}[f(at)](s) = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$, se $f \in \mathcal{L}$ e $S_{af} = S_f$

- **P. DI TRASLAZIONE:** se $f \in L \rightarrow \mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = e^{-sa}F(s)$ con $\forall s > s_f$

$\left(\mathcal{L}[H(t)](s) = \frac{1}{s}\right)$

- **P. DI MODULAZIONE:** se $f \in L \rightarrow \mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f(s-a)]$ con $\forall s > s_f + a$

- **P. DI DERIVATA DELLA TRASFORMATA:** se $f \in L \rightarrow t f(t) \in L$ e $\mathcal{L}[t f(t)] = -F'(s)$
  - ↳ vale anche per derivate successive $\rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$
  - ↳ se ne può dedurre anche $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$

- **P. DI TRASFORMATA DELLA DERIVATA:** se $f, f' \in L$ e continue su $(0,+\infty)$ $\rightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0^+)$
  - ↳ si può iterare: $\mathcal{L}[f''(t)](s) = \mathcal{L}[g'(t)](s) = s\,G(s) - g(0^+) =$ (con $g := f'$)
  $= s\left(\mathcal{L}[f'(t)](s)\right) - f'(0^+) = s\left(sF(s) - f(0^+)\right) - f'(0^+) =$
  $= s^2 F(s) - s f(0^+) - f'(0^+)$

- **P. INTEGRALE DELLA TRASFORMATA:** se $\frac{f(t)}{t} \in L$ e $s_f = s_{f/t} \rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^{+\infty} F(\sigma)\,d\sigma$ (con $F(\sigma) = \mathcal{L}f(t)$)

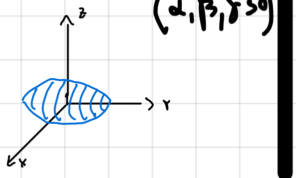
- **P. TRASFORMATA DELL'INTEGRALE:** se $\phi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$, $f \in L$, nulla per $t < 0$
$\rightarrow \mathcal{L}\,\phi(t) = \frac{F(s)}{s}$

- **P. TRASFORMATA DI f PERIODICA:** se $f \in L$ (periodica) $\rightarrow \mathcal{L}[f(t)](s) = \dfrac{\int_0^T f(t)e^{-st}\,dt}{1 - e^{-sT}}$ (T → periodo)

RIASSUNTO QUADRICHE:

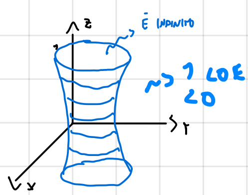
ELLISSOIDE:

$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = 1$ $(\alpha, \beta, \gamma > 0)$

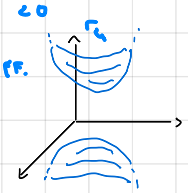


IPERBOLOIDE:

$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{b^2} = 1$



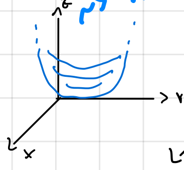
→ 1 COEFF. < 0 (È INFINITO)



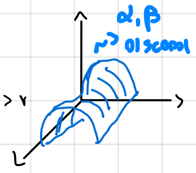
2 COEFF. < 0

PARABOLOIDE:

$z = \alpha x^2 + \beta y^2$



→ α, β CONCORDI



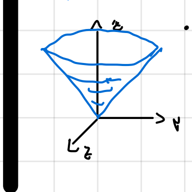
→ α, β DISCORDI

CONO

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

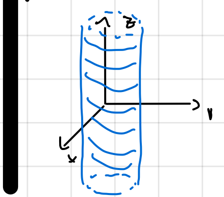
↳ CONO DOPPIO

su x: $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ → CONO SINGOLO



CILINDRO

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



• ANTITRASFORMATA DI LAPLACE:

• $\mathcal{L}^{-1}[F(s)](t) = f(t)$, LEGGO LA TABELLA AL CONTRARIO

• NON È SEMPRE VERO CHE SE $\mathcal{L}f = \mathcal{L}y \to f = y$

→ f e g POSSONO CAMBIARE SUI NEGATIVI o/e AL MAX IN UN NUMERO FINITO DI PUNTI SUI POSITIVI

• PRODOTTO DI CONVOLUZIONE:

DATE $f, y \in \mathcal{L}$ / NULLE SU $(-\infty, 0)$, DEFINISCO $(f * y)(t)$

$$\to \int_{-\infty}^{\infty} f(t-r)\, y(r)\, dr = \int_0^t f(t-r)\, y(r)$$

↳ $y(r) = 0$ SE $r < 0$, $f(t-r) = 0$ SE $t-r < 0$

• PROPRIETÀ DEL PRODOTTO DI CONVOLUZIONE:

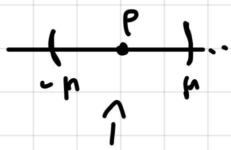
SIA $f, y \in \mathcal{L}$ / NULLE SU $(-\infty, 0) \to \mathcal{L}[(f * y)(t)](s) = F(s) \cdot G(s)$, $\forall s > \max(s_f, s_y)$

• f IN PIÙ VARIABILI:

$y = f(x_1, x_2, \dots x_n)$ → PER NOI $n = 2,3$ SOLAMENTE → es. $y = f(x, y, z)$

→ IN 3 DIMENSIONI

in $\mathbb{R}^1$



PALLA SENZA BORDI

• SFERA: $d(P, P_0) = r \to (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$

• PALLA IN $\mathbb{R}^3$: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 \le r^2$ ~> SFERA PIENA

• INTORNO: CONSIDERO $P \in \mathbb{R}^3$ e $r > 0 \to B_r(P) = \{Q \in \mathbb{R} / d(Q,P) < r\}$

↳ BOLLA

• CONSIDERO UN PUNTO $P \in \mathbb{R}^n$ E UNA REGIONE $A \in \mathbb{R}^n$:

~> B_r TOTALMENTE CONTENUTA

• P È INTERNO AD $A \iff \exists r > 0 / B_r(P) \subseteq A$

• P È ESTERNO AD $A \iff \exists r > 0 / B_r(P) \cap A = \emptyset$

~> ALCUNI PUNTI INTERNI ALTRI ESTERNI

• P È FRONTIERA DI $A \iff \forall r > 0 / \exists\, Q \in B_r(P) \in A$ e $Q' \in B_r(P) \notin A$

• INTERNO DI A ($\mathring{A}$) = { TUTTI I PUNTI INTERNI DI A }

• FRONTIERA DI A (∂A) = { TUTTI I PUNTI DI FRONTIERA DI A }

• CHIUSURA DI A ($\bar{A}$) = { $\mathring{A} \cup \partial A$ }

$A \cap \partial A = \emptyset$

È APERTO (⟺) TUTTA LA FRONTIERA $\notin A$

• DEF. PER A, SI DICE: ~> TOPOLOGIA DEGLI INSIEMI

SE ∂A NON È TUTTA CONTENUTA → NO CHIUSO NO APERTO

- APERTO SE $A = \mathring{A}$ → A NON HA PUNTI DI FRONTIERA
- CHIUSO SE $A = \bar{A}$ → TUTTA ~> $\partial A \subseteq A$
- LIMITATO SE $\exists r>0 \,/\, A \subseteq B_r$

(CHIUSO e LIMITATO) → COMPATTO

SE ⟸ ⟹ L'INSIEME È APERTO

- CONVESSO SE PRESI 2 PUNTI, IL LORO ARCO È INTERNO AD A
- CONNESSO PER ARCHI: $\exists$ UN ARCO $\forall$ COPPIA DI PUNTI / È CONTENUTO IN A

• DEF. PER P, SI DICE: → L'INSIEME DERIVATO $A' = \{$PUNTI DI ACCUMULAZIONE$\}$

- DI ACCUMULAZIONE SE $\forall r>0$, $B_r(P)$ CONTIENE ALMENO UN PUNTO DI A
- ISOLATO SE $P \in A$ MA NON È DI ACCUMULAZIONE

• f IN PIÙ VARIABILI: $f: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

• $n \geq 1$
  - → SE $m = 1$ → f REALE DI VAR. REALI
  - → SE $m > 1$ → f VETTORIALE DI VAR. REALI

• $n = m = 1$ → CAMPI SCALARI; $m = n > 1$ → CAMPI VETTORIALI

• $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} = f(x,y)$

↳ È UNA f IL CUI DOMINIO SI TROVA SUL PIANO XY, LA SUA IMMAGINE SI TROVERÀ SULL'ASSE Z → $\forall$ PUNTO: $(x, y, f(x,y))$

dom f: SU XY
Im f: SU Z

• INSIEMI DI LIVELLO: È L'INSIEME DEI PUNTI PER CUI VALE $f(x,y) = c$, $c \in \mathbb{R}$

↳ ⟺ $c \in \text{Im} f$

• CONTINUITÀ: f È CONTINUA SE DISCOSTANDOCI DI POCO, f NON CAMBIA PIÙ DI TANTO

↳ $x \pm \delta \mapsto f(x) \pm \varepsilon$

$P \in$ una bolla di P_0, $r = \delta$

• f È CONTINUA SE $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \,/\, P \in \text{dom} f \cap B_\delta(P_0) \to |f(P) - f(P_0)| < \varepsilon$

↳ IL LORO INSIEME È $C(A)$ (o $C^0(A)$)

• f CONTINUA (SU dom f) SE COMPOSIZIONE DI f CONTINUE

• VALGONO I TEOREMI:
- PERMANENZA DEL SEGNO
- DEI VALORI INTERMEDI
- WEIERSTRASS

• LIMITI:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x) = ?$$ -> NON È UN CALCOLO SEMPLICE

-> BISOGNA CONSIDERARE MOLTI PIÙ CASI (NON C'È SOLO lim DX e SX)

• DERIVATE PARZIALI e GRADIENTE

• $\frac{\delta f}{\delta x}$ ESISTE SOLO NEI PUNTI INTERNI a f

• $$\frac{d}{dy} f(x,y_0)\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)$$

• $$\nabla f(x_0,y_0) = \left(\frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0), \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)\right)$$

-> LE DERIVATE PARZIALI HANNO SENSO SOLO IN $(\mathrm{dom}\, f)^0$, OVVERO NELL'INSIEME DEL dom APERTO Ω

① • SE $f(x,y)$ È DERIVABILE IN TUTTE LE SUE VARIABILI IN UN APERTO $\Omega \subseteq \mathrm{dom}\, f$

-> LE SUE DERIVATE SONO f IN 2 VARIABILI, DEL TIPO $f(x,y)$

↳ SE LE f' SONO CONTINUE SU Ω -> f È DI CLASSE $C^1(\Omega)$

• LE f' (PARZIALI) SI DICONO CAMPI SCALARI SE VALE ①

• GEOMETRICAMENTE: CONSIDERO $f(x,y)$, SE CONSIDERO LA RESTRIZIONE $f(x_0,y)$, $x=x_0$ È UN PIANO.

-> CALCOLANDO $\frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0) = m = \tan\varphi$ TROVO IL COEFF. DELLA RETTA TANGENTE ALLA FIGURA IN $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$

• DERIVATE DIREZIONALI

-> SERVE PER CALCOLARE DERIVATE OBLIQUE DA QUELLE // A X O Y

• $\frac{\delta f}{\delta \vec{u}}(P_0)$. CONSIDERO $f(P_0+t\vec{u})$:

• $$\frac{d}{d\vec{u}} f(P_0+t\vec{u})\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(P_0+t\vec{u})-f(P_0)}{t}$$

- DIFFERENZIABILITÀ:

SI DICE CHE f È DIFFERENZIABILE SE

$$\lim_{P \to P_0} \frac{f(P)-f(P_0)-\nabla f(P_0)\cdot(P-P_0)}{\|P-P_0\|} = 0 \;\Big/\; \exists \nabla f(P_0)$$

$\rightsquigarrow \|x\| = \sqrt{x^2}$

CIOÈ $f(P)-f(P_0)-\nabla f(P_0)(P-P_0) = o(\|P-P_0\|)$

È L'EQ. IN 3D DELLA I FORMULA DELL'INCREMENTO FINITO $\to$ $f(P) = f(P_0) + \nabla f(P_0)(P-P_0) + o(\|P-P_0\|)$ $\rightsquigarrow$ FORMULA DI TAYLOR DI ORDINE I DI f IN P_0

- TEOREMA: SE f È DI CLASSE C^1 $\rightsquigarrow$ f È DIFFERENZIABILE IN Ω

$\hookrightarrow$ È LA DIFFERENZIABILITÀ CHE GARANTISCE LA CONTINUITÀ $\rightsquigarrow$ È L'ANALOGO DELLA DERIVATA IN 2D

- TEOREMA: $\hookrightarrow f \in C^k$: $\begin{cases} f \text{ CONTINUA E DERIVABILE} \\ f' \text{ CONTINUA} \end{cases}$

SE f È DIFFERENZIABILE:

- È DERIVABILE IN TUTTE LE DIREZIONI $\vec{u}$
- $\frac{\delta f}{\delta \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0)\cdot\vec{u}$ $\rightsquigarrow$ VERSORE: $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

- SE $n=2$ $\to$ $z = T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\delta f}{\delta x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\delta f}{\delta y}(x_0,y_0)(y-y_0)$

$\to T_1(x,y)$ È IL PIANO CHE MEGLIO APPROSSIMA f IN $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

- LA DERIVATA PARZIALE È UNA PARTICOLARE DERIVATA DIREZIONALE
- $\exists f$ DERIVABILI IN TUTTE LE DIREZIONI, CHE PERÒ NON SONO DIFFERENZIABILI (es. CONO)
- $\exists f$ CON DERIVATE PARZIALI MA CHE NON SONO DIFFERENZIABILI
- SE $f \in C^1(\Omega)$ $\rightsquigarrow$ f DIFFERENZIABILE $\forall P \in \Omega$

- GRADIENTE VISTO GEOMETRICAMENTE:

$\frac{\delta f}{\delta v}(x_0,y_0) = \max \frac{\delta f}{\delta \vec{u}}(x_0,y_0) \;/\; \vec{v}$ È LA DIREZIONE LUNGO CUI f CRESCE PIÙ VELOCEMENTE

- $\frac{\delta f}{\delta \vec{u}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot\vec{u} = \|\nabla f(x_0,y_0)\|\cdot\|\vec{u}\|\cos\underbrace{\varphi}_{\text{ANGOLO TRA } \nabla f \text{ E } \vec{u}}$ $\to$ È MAX $\Leftrightarrow \varphi = 0$

$\to \nabla f(x_0,y_0) \parallel \vec{u}$ $\to$ $\underbrace{\vec{v}}_{\text{VERSORE}} = \frac{\nabla f(x_0,y_0)}{\|\nabla f(x_0,y_0)\|}$ È LA DIREZIONE DI MASSIMA CRESCITA

• **DERIVATA COMPOSTA:**

① SIA $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ / f DIFFERENZIABILE $x_j(t_0)$ X_J DERIVABILE IN t_0

$$\to \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots x_n(t)) = \sum_{J=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_J}(P_0)\, x'_J(t_0)$$

② SIA $g(f(x_1, \dots, x_n))$ / g DERIVABILE IN $f(P_0)$, f DIFFERENZIABILE IN P_0

$$\to \frac{\partial}{\partial x_J} g(f(x_1 \dots x_n)) = g'(f(P_0)) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_J}(P_0)$$

MATRICE HESSIANA:

$$H_{f(2\times 2)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$\nabla f\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

• **T. DI SCHWARZ:**

LE DERIVATE MISTE SIMMETRICHE SONO UGUALI $\Leftrightarrow f \in C^1(\Omega)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \in C^1(A)$ (SE $\exists$)

• f SI DICE DI CLASSE $C^k(\Omega)$ SE LE SUE $f^{(k)}$ ESISTONO e SONO CONTINUE

F. DI TAYLOR DI II ORDINE:

SE $f \in C^2(\Omega) \to \exists\, T_2(x,y)$

$$T_2(x,y) = f(\underbrace{x_0,y_0}_{P_0}) + \nabla f(x_0,y_0)(P-P_0) + \frac{1}{2}(P-P_0)\, H_f\, (P-P_0)^t + o(\|P-P_0\|^2)$$

• **OTTIMIZZAZIONE** (RICERCA DI MAX e MIN PER $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$):

DEF. DI MAX e MIN: • P_0 è MAX (MIN) $\Leftrightarrow \forall P \in dom f, \in B_r(P_0) \to f(P) \le f(P_0)$ $\left(f(P) \ge f(P_0)\right)$

• **T. DI FERMAT:**

SE:

- P_0 è UN PUNTO DI MAX o MIN, $P_0 \in dom f$
- $\exists\, \nabla f(P_0)$

$\to P_0$ è UN PUNTO CRITICO DI f $(\nabla f(P_0) = (0,0))$, (IL PIANO TANGENTE è ORIZZONTALE SE f DIFFERENZIABILE IN P_0)

• UN PUNTO CRITICO PUÒ NON ESSERE NÉ DI MAX NÉ DI MIN

T. DELLA MATRICE HESSIANA

- PUNTI CRITICI $P_i = \nabla f(x,y) = (0,0)$
- $H_f(P_i)$

SIA P_0 PUNTO CRITICO DI f E SIA $f \in C^2$ IN $B_r(P_0)$:

SE $\det(H_f(P_0)) < 0 \rightarrow P_0$ È UN PUNTO DI SELLA (NÉ MAX NÉ MIN)

SE $\det(H_f(P_0)) > 0$ $\rightarrow$ SE $tr(H_f(P_0)) > 0 \rightarrow P_0$ PUNTO DI MIN

$\rightarrow$ SE $tr(H_f(P_0)) < 0 \rightarrow P_0$ PUNTO DI MAX

- $\det(\,) = 0 \rightarrow$ NON DA INFO

- **f VETTORIALI**:

$$f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \rightarrow P \mapsto f(P) = (f_1(P), \dots, f_m(P)) \,, \; [n \geq 1, m \geq 2]$$

- CAMPI VETTORIALI : $P \in \mathbb{R}^n \mapsto f(P) \in \mathbb{R}^n$ $\rightarrow$ VIENE RAPPRESENTATO CON UN VETTORE
- **CONTINUITÀ** : f VETTORIALE È CONTINUA IN P_0 $(C^0(\Omega)) \Leftrightarrow$ LO SONO TUTTE LE SUE f COMPONENTI
- **DERIVABILITÀ** : f VETT. È DERIVABILE IN $P_0 \Leftrightarrow f_1, \dots, f_m$ SONO DERIVABILI IN P_0
- SE $\exists\, n$ VARIABILI E m f COMPONENTI $(\rightarrow f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m)$:

- **MATRICE JACOBIANA**:

$$J_f = \begin{bmatrix} \nabla f_1(P_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(P_0) \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ È UNA MATRICE $m \times n$ $\rightarrow m \cdot n$ DER. PARZ.

- SU OGNI RIGA CI SONO TUTTE LE DERIVATE PARZIALI DI f_i
- $\forall$ COLONNA CI SONO LE DERIVATE PARZ. DI TUTTE LE f RISPETTO ALLA VARIABILE x_J

- **REGOLA DELLA CATENA** : SIA $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m \in C^1(\Omega)$, $g : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^q \in C^1(\Omega)$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}_g$$

$$\rightarrow J_{g \circ f} = J_{g(f(P))} = J_g(f(P)) \cdot J_f(P)$$

- **INTEGRALI DOPPI:**

- $f: A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ / A: DOMINIO D'INTEGRAZIONE

  ↳ DOMINIO DI INTEGRAZIONE: INSIEME LIMITATO / ∂A È INSIEME DI $n°$ FINITO DI GRAFICI DI f CONTINUE SU INTERVALLI COMPATTI

- $\int_A f \, dx\, dy = \iint f \, dx\, dy$ → INTEGRALE DOPPIO

- CALCOLO DI UN VOLUME: $\iint |f| \, dx\, dy$ SE $f < 0$ → SIMMETRIA RISP. A xy

- CALCOLO DELL'AREA DEL DOMINIO DI INTEGRAZIONE:

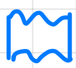
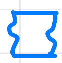
  → $\text{AREA}(A) = \iint 1 \, dx\, dy$

- **PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DI RIEMANN** $(n=2,3)$:

  - **LINEARITÀ**: $\int \alpha f + \beta g = \int \alpha f + \int \beta g$
    - DISUG. INTEGRALE: $\left| \int f \right| \leq \int |f|$ → VAL. ASS. DELL'INTEGRALE È MINORE DEL VOLUME
  - **ADDITIVITÀ** (RISP. AL dom): $\int_A f = \int_{A_1} f + \int_{A_2} f$
  - SE f CONTINUA SU $\bar{A}$: $\forall B / \mathring{A} \subseteq B \subseteq \bar{A} \rightarrow \int_B f = \int_A$ / $\mathring{A}$: INTERNO DI A, $\bar{A}$: CHIUSURA DI A ↳ $\mathring{A} + \partial A$

    ↳ POSSO AGGIUNGERE O TOGLIERE PUNTI E ∂A
  - **POSITIVITÀ E MONOTONIA**:
    - SE $f \geq 0$ SU $A \rightarrow \int f \geq 0$ SU A $\left(\int f = 0 \Leftrightarrow f = 0 \right)$
    - SE $f \geq 0$, $\forall B \subseteq A \rightarrow \int_B f \leq \int_A f$
    - SE $f \leq g$ SU $A \rightarrow \int f \leq \int g$ SU A

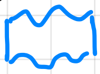
- **INSIEME VERTICALMENTE / ORIZZONTALMENTE CONNESSO**:

  SIA $A \in \mathbb{R}^2$: $\forall r / r: x = x_0$ → INTERSECA A IN UN SOLO SEGMENTO
  - A VERTICALMENTE CONNESSO $\Leftrightarrow a \leq x \leq b$, $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$ 
  - A ORIZZONTALMENTE CONNESSO $\Leftrightarrow c \leq y \leq d$, $f_1(y) \leq x \leq f_2(y)$ 

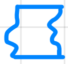
  → GLI ESTREMI DEI SEGMENTI DANNO FORMULE f_1 E f_2

  → ∂A IN ENTRATA E ∂A IN USCITA

- **TEOREMA (DI FUBINI):**



- A VERTICALMENTE CONVESSO: $\int_A f \, dx\,dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f \, dy \right) dx$ INTEGRAZIONE PER VERTICALI



- A ORIZZONTALMENTE CONVESSO: $\int_A f \, dx\,dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f \, dx \right) dy$ INTEGRAZIONE PER ORIZZONTALI

- CASI PARTICOLARI DI RIDUZIONE.
  - SE $A: [a,b] \times [c,d]$ ~> RETTANGOLO —> POSSO SCAMBIARE L'ORDINE DI INTEGRAZIONE
  - SE $f(x,y) = \alpha(x)\,\beta(y)$ ~> $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int \alpha(x)\,dx \int \beta(y)\,dy$

- **INTEGRAZIONE PER CAMBIO DI VARIABILI:**
  - **DEF:** È UNA f DEL TIPO $\phi(u,v) = (\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))$ CHE TRASFORMA $(u,v) \mapsto \phi(u,v)$, SULL'INSIEME $A \in \mathbb{R}^2$ /
    - ϕ SIA BIUNIVOCA TRA A e A' ~> DOM. INTEGR. DI ϕ, ~> COSÌ $\forall$ PT. DI A, $\exists!$ A' e VICEVERSA
    - $\phi \in C^1(A')$
    - $\det(J\phi(u,v)) \neq 0, \ \forall (u,v) \in A$

(ES. COORDINATE POLARI: $(x,y) \mapsto (\underbrace{x_0 + \rho\cos\theta}_{\phi_1}, \underbrace{y_0 + \rho\sin\theta}_{\phi_2})$ ~> $\det J\phi(\rho,\theta) = \rho > 0$ QUASI SEMPRE

- **SIGNIFICATO FISICO INTEGRALI TRIPLI:** • M. DI INERZIA: $\iint (x^2+y^2)\,\rho(x,y)\,dx\,dy$
  - **BARICENTRO:**

    BARICENTRO $G = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \left(\frac{\sum x_i m_i}{m_{TOT}}, \frac{\sum y_i m_i}{m_{TOT}}, \frac{\sum z_i m_i}{m_{TOT}} \right)$

    SIA $A \subset \mathbb{R}^3$ e $\mu: A \mapsto \mathbb{R}$, DENSITÀ DI MASSA CONTINUA e LIMITATA

    $$\rightarrow \bar{x} = \frac{\iiint_A x\,\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\iiint_A \underbrace{\mu(x,y,z)}_{\rho()}\,\underbrace{dx\,dy\,dz}_{V()}} \ \ \Big\} m_{TOT}$$, ANALOG. PER $\bar{y}, \bar{z}$

- SE $\mu = \text{cost.}$:

$$\rightarrow \bar{x} = \frac{1}{\text{Vol}(A)} \int_A x\,dx\,dy\,dz$$, ANALOG. PER $\bar{y}, \bar{z}$

• INTEGRALI TRIPLI:

$f: A \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata / $A \in \mathbb{R}^3$ dominio di integrazione limitato

DOMINIO DI INTEGRAZIONE: A limitato / ∂A insieme di n° finito di grafici del tipo $x = g(y,z)$, $y = g(x,z)$, $z = g(x,y)$ / g definite e continue su dom. di integr. chiusi e compatti di $\mathbb{R}^2$

$\rightarrow \int_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

• CALCOLO DI VOLUMI: se $A \in \mathbb{R}^3$ dom. di integrazione

$$vol(A) = \int_A 1\,dx\,dy\,dz$$

• FORMULE DI RIDUZIONE A 2 INT. SUCCESSIVE:

• T. DI INTEGRAZIONE PER FILI (asse z) $\rightarrow$ SI PUÒ ESTENDERE ANCHE A X, Y

$D' = \sinh$

$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$D' = \cosh$

$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

SIA
- $f: A \mapsto \mathbb{R}$ continua
- $A \subset \mathbb{R}^3$ semplice rispetto a z, cioè:

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D,\ g_1(x,y) < z < g_2(x,y)\}$

dove $D \subset \mathbb{R}^2$ dom. integr. compatto, g_1, g_2 continue / $g_1 \leq g_2\ \forall (x,y)$

$$\rightarrow \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{g_1}^{g_2} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

• T. DI INTEGRAZIONE PER STRATI:

SIA $f: A \mapsto \mathbb{R}$ continua e limitata su $A \in \mathbb{R}^3$ / la proiezione di A su z sia compatta $[\alpha, \beta]$

• Considero un $z \in [\alpha, \beta] \rightarrow$ considero la sezione A_z a quota z, la quale deve essere dom. di integr. D_z compatto / $D_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (x,y,z) \in A\}$

$$\rightarrow \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int \int_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

• T. di integrazione per cambio di variabili:

se $A, A' \in \mathbb{R}^2$ dom. di integr., $\phi : A \mapsto A'$ cambio di coordinate su A / $\phi : \begin{cases} x = \phi_1(u,v) \\ y = \phi_2(u,v) \end{cases}$,

$J_{\phi(u,v)}$ limitato su A, f limitata e continua

$$\to \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{A'} f(\phi_1(u,v), \phi_2(u,v))\,|\det(J_{\phi(u,v)})|\,dx\,dy$$

• Casi particolari di riduzione:

- se A è un parallelepipedo $\to$ posso scambiare l'ordine di integrazione
- se $f(x,y,z) = \alpha(x)\beta(y)\gamma(z) \to \int f\,dx\,dy\,dz = \int \alpha(x)\,dx \int \beta(y)\,dy \int \gamma(z)\,dz$

• Integrazione per cambio di coordinate

$$\phi : A' \mapsto A \to (u,v,z) \mapsto \phi(u,v,z) = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$$

• Coordinate cilindriche:

$$(x,y,z) \mapsto (r, \theta, z) \to \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$\to$ trasformo in parallelepipedi

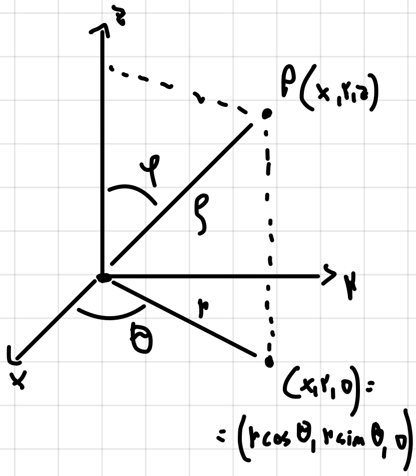
$\to \det(J_\phi) = \rho \neq 0$

$$\to \phi(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

• Coordinate sferiche:

$$(r, \theta, z) \mapsto (\rho, \theta, \varphi), \quad \begin{cases} r = \rho\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$

colatitudine



$$\hookrightarrow (x,y,z) \mapsto \Big(\underbrace{\overbrace{\rho\sin\varphi}^{r}\cos\theta}_{\phi_1}, \underbrace{\overbrace{\rho\sin\varphi}^{r}\sin\theta}_{\phi_2}, \underbrace{\overbrace{\rho\cos\theta}^{z}}_{\phi_3}\Big)$$

$$\to (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi] \times (0, \pi)$$

$\leadsto \det(J_\phi) = \rho^2 \sin\varphi$

• T. di integrazione per cambio di coordinate $\in \mathbb{R}^3$

$$\to \iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_A f(\rho,\theta,\varphi)\,|\det(J_\phi)|\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$$

• Coordinate polari: $\det(J_\phi) = \rho$

• C. ellittiche: $\begin{cases} x = a\,t\cos\theta \\ y = b\,t\sin\theta \end{cases}$

$\to \det(J_\phi) = abt$

• Coordinate cilindriche: $\det(J_\phi) = \rho$

• Coordinate sferiche: $\det(J_\phi) = \rho^2 \sin\varphi$

• I TEOREMI DI GULDINO:

• SIA A UN UN INSIEME x-SEMPLICE SUL PIANO xz, RUOTO A ATTORNO A z → OTTENGO Ω

$$\to \text{VOL}(\Omega) = \underbrace{\alpha}_{\text{ANGOLO DI ROTAZIONE}} \cdot \overset{\text{BARICENTRO}}{\bar{x}} \cdot \text{AREA}(A) = \alpha \iint x \, dx \, dz \qquad \left(\text{"VOL} = A \cdot h\text{"}\right)$$

• INTEGRAZIONE CURVILINEA:

• SIA $f(P)$ UNA f DI DENSITÀ DI UNA GRANDEZZA DISTRIBUITA SU Γ O Σ:

$$\to \Gamma/\Sigma = \int_{\Gamma/\Sigma} f \, (ds/d\sigma)$$

• CURVA PARAMETRICA:

(TRAIETTORIA) SOSTEGNO DI γ

→ DIPENDE DA UN PARAMETRO t; $\Gamma = \overset{I \mapsto \mathbb{R}^n}{\gamma(t)} = \left(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\right)$

↪ PARAMETRIZZAZIONE DI Γ (LEGGE ORARIA)

• ARCHI:

• UNA CURVA È UN ARCO SE AMMETTE ALMENO UNA PARAMETRIZZAZIONE γ

• UN ARCO È SEMPLICE $\Leftrightarrow \exists$ ALMENO UNA PARAM. DEL TIPO $\gamma: [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$ / $\forall t_1, t_2$, $\gamma(t_1) = \gamma(t_2) \Leftrightarrow t_1 = t_2$ (TRANNE PER $t_1 = a, t_2 = b$) ⤳ NON CI SONO AUTOINTERSEZIONI

• UN ARCO SEMPLICE È:

• CHIUSO: $\forall_{\text{PARAM.}}$, $\gamma(a) = \gamma(b)$

• APERTO: $\forall_{\text{PARAM}}$, PARTO DA a E ARRIVO IN b

• UN ARCO È REGOLARE, CON $\gamma: [a,b] \mapsto \mathbb{R}^n$, SE

• γ È SEMPLICE

• $\gamma \in C^1([a,b])$

• $\forall t \in (a,b) \to \gamma'(t) \neq 0$

• DEF.: RETTA TANGENTE A Γ IN $\gamma(t_0)$ È LA RETTA PASSANTE PER $\gamma(t_0)$, // A $\gamma'(t_0) \neq 0$

↪ NON DIPENDE DALLA PARAM.

• INTEGRALI CURVILINEI DI I SPECIE:

SIA $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ARCO REGOLARE e $f: dom f \mapsto \mathbb{R}^n$ ($\in \mathbb{R}$) CAMPO SCALARE CONTINUO:

$$\Rightarrow \int_a^b f\, ds = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$

↳ $t \in [a,b]$

↳ INVERTO LE CONDIZIONI $\begin{cases} \gamma(t) = A(x,y) \\ \gamma(t) = B(x,y) \end{cases}$

• ∃ SEMPRE, SI CALCOLA CON LA DEF., È INDIP. DALLA PARAM.

• LUNGHEZZA DI UN ARCO $\widehat{PQ} = \int_\Gamma ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt$

• ORIENTAMENTO DI Γ: SCELGO UNO DEI 2 VERSI DI PERCORRENZA → SARÀ QUELLO POSITIVO

• INTEGRALI CURVILINEI DI II SPECIE (O DI LAVORO):

$L = \vec{F}(p)\, d\vec{s} = \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$, SE Γ È UNA TRAIETTORIA RETTILINEA

$$\Rightarrow L = \int_\Gamma \vec{F}(p)\, ds = \int_a^b F(\gamma)\, \gamma'(t)\, dt$$

→ ∃ SEMPRE, INDIPENDENTE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

• SE $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_k$ ARCO REGOLARE

$$\leadsto \int_\Gamma F(p)\, dp = \sum_1^k \int_{\Gamma_i} \vec{F}\, dp$$

• T. DI GREEN:

PRESO UN DOM DI GREEN, ∂K ORIENTATO POSITIVAMENTE e $F = (F_1, F_2) \in C^1$ SU K

$$\Rightarrow \int_K \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy = \sum_{j=1}^k \oint_{\Gamma_j} \vec{F}\, d\vec{p}$$

↳ ROTORE: $\nabla \times \vec{F}$

⇝ ESTENSIONE A Γ A TRATTI

• DOM DI GREEN:

DOM COMPATTO SU $K \subset \mathbb{R}^2 / \mathring{K} \neq \emptyset$, ∂K UNIONE DI ARCHI REGOLARI A TRATTI, CHIUSI, A 2 A 2 DISGIUNTI, CON ORIENTAMENTO POSITIVO NEL VERSO CHE LASCIA L'INSIEME SULLA SX LOCALMENTE

• PARAMETRIZZ. DI UN SEGMENTO: $\gamma_{A \mapsto B}(t) = \left(x_A + t(x_B - x_A),\ y_A + t(y_B - y_A)\right)$

- **INTEGRAZIONE SUPERFICIALE :**

  - **CALOTTA REGOLARE :** GRAFICO DI $\varphi : K \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi \in C^1(K)$, K dom di GREEN, PRIVATO AL MAX DI UN N° FINITO DI PUNTI
    ⇝ IL SUO DOMINIO È DI GREEN

    $\varphi \in C^1$: ATTENZIONE CHE SIA DIFFERENZIABILE NEI PUNTI DI φ IN CUI PIANO È VERTICALE
    ⇝ es. SEMI SFERA : ∄ piano sul bordo

⊙ $\vec{N}(P_0)$: VETTORE NORMALE STANDARD $= \left(-\frac{\delta f}{\delta x}(P_0), -\frac{\delta f}{\delta y}(P_0), 1\right)$ ⇝ FORMA UN ANGOLO CON ASSE z

- **INTEGRALE SUPERFICIALE DI I SPECIE :** ⇝ es. CALCOLO MASSA

SIA Σ CALOTTA REGOLARE / $z = \varphi(x,y)$, $(x,y) \in K$ CON $\|\vec{N}\|$ LIMITATO SU K^* e ($\tilde{K}$ - n° FINITO DI PUNTI)
$f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ CAMPO SCALARE SU Σ

$\vec{N}$ ORIENTA Σ ← L'INTEGRALE VA CALCOLATO SUL dom Σ

$$\int_\Sigma f(P)\, d\sigma = \iint_{K^*} f(x,y,\varphi(x,y)) \underbrace{\|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy}_{d\sigma}$$

(K^* ⇝ dom Σ)

- $d\sigma$: AREA INFINITESIMA DESCRITTA IN $dx \times dy$ $= \|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy$

⊙ $\|\vec{N}(x,y)\| = \sqrt{\|\nabla\varphi(x,y)\|^2 + 1}$

⊙ $\mathrm{AREA}(\Sigma) = \int_\Sigma 1\, d\sigma = \int_{K^*} \|\vec{N}(x,y)\|\, dx\, dy$

- **INTEGRALE SUPERFICIALE DI II SPECIE** (o DI FLUSSO) :

  - FLUSSO $\phi_\Sigma = \vec{V} \cdot \vec{U}_N \cdot \mathrm{AREA}(\Sigma)$

SIA K CALOTTA REGOLARE, $\|\vec{N}\|$ LIMITATO SU K^*, $\vec{F}$: $\mathrm{dom}\vec{F} \subseteq \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ CAMPO VETTORIALE SU Σ

$\vec{N}$ o $\vec{n}$? ⇝ $\vec{n}$ ORIENTAMENTO SUPERFICIE DATO DAL TESTO

$$\phi(\Sigma) = \pm \int_{K^*} \vec{F}(x,y,\varphi(x,y)) \cdot \vec{N}(x,y)\, dx\, dy$$

(K^* ⇝ DOMINIO)

⇝ $\int_\Sigma \vec{F}(P)\, d\sigma$

- $\vec{n} = \pm \frac{\vec{N}(x,y)}{\|\vec{N}(x,y)\|}$

- **BORDO DI UNA CALOTTA REGOLARE**: $\Gamma_{(\Sigma)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in \delta K,$

DOVE $\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in K, z = \gamma(x,y)\}$ CALOTTA REGOLARE

- Σ e $\Gamma(\Sigma)$ ORIENTATI COERENTEMENTE $\Leftrightarrow$ UN OSSERVATORE VERSO Σ SULLA SX, VANNO DOLENTI

- **CALOTTE REGOLARI A PEZZI**: CALOTTE UNITE TRA LORO SUL BORDO:

  - OGNI INTERSEZ. ORDINE APPARTIENE AL BORDO DI MAX 2 PEZZI

  - Σ CHIUSA $\Leftrightarrow \forall$ PEZZO, OGNI SUO BORDO È BORDO DI ALTRI PEZZI

- **ORIENTAZIONE CALOTTE Σ A PEZZI**: ORIENTO CIASCUN PEZZO IN MODO DA AVERE UN UNICO VERSO DI ATTRAVERSAMENTO

  - $\sum_1^k \int_{\Sigma_i} f \, d\sigma$, AREA $(\Sigma) = \sum_1^k$ AREA (Σ_i)

  - SE Σ ORIENTATO e $\vec{F}: \mathrm{dom}\,\vec{F} \mapsto \mathbb{R}^n$ CAMPO VETT. : $\sum_1^k \int_{\Sigma_i} \vec{F} \, ds$

- **DIVERGENZA**:

$$\nabla \cdot \vec{F}_{(P)} = \mathrm{div}\,\vec{F}(P) = \frac{\delta F_1}{\delta x_1} + \frac{\delta F_2}{\delta x_2} + \dots + \frac{\delta F_n}{\delta x_n}$$

$\rightsquigarrow$ CAMPO SCALARE

VETTORE $\mapsto$ SCALARE

- **ROTORE**:

$\rightsquigarrow$ CAMPO VETT. IN $\mathbb{R}^3$ $\quad (\rightsquigarrow (-1)^3)$

$$\nabla \times \vec{F}(P) = \mathrm{rot}\,\vec{F}_{(P)} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\delta}{\delta x} & \frac{\delta}{\delta y} & \frac{\delta}{\delta z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\delta F_3}{\delta y} - \frac{\delta F_2}{\delta z} , \frac{\delta F_1}{\delta z} - \frac{\delta F_3}{\delta x} , \frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y} \right)$$

VETTORE $\mapsto$ VETTORE

- SE $\mathbb{R}^2$: $F_1 = F_1(x,y), F_2 = F_2(x,y), F_3 = 0 \to \nabla \times \vec{F} = \left(0, 0, \underbrace{\frac{\delta F_2}{\delta x} - \frac{\delta F_1}{\delta y}}_{\mapsto \mathrm{rot}(F_1, F_2)}\right) \rightsquigarrow$ T. DI GREEN

- **T. DI GAUSS** (O DELLA DIVERGENZA): $\rightsquigarrow \cup$ DI CALOTTE REGOLARI, 2 A 2 DISGIUNTE, ORIENTABILI

  - SE $K \subseteq \mathbb{R}^3$ È UN DOM. DI GREEN $\Sigma = \delta K$ ORIENTATA CON NORMALE EXT, $F = (F_1, F_2, F_3) \in C^1(*)$

$$\to \iiint_{K} \nabla \cdot \vec{F} \, dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{k} \oint_{\Sigma_i} \vec{F} \, ds$$

$\rightsquigarrow \mathrm{dom} \in \mathbb{R}^3$

SEGNO "$-$" SE $\vec{n}$ OPPOSTO

$\rightsquigarrow$ FLUSSO ATTRAVERSO Σ CON $\vec{n}$ VERSO L'EST

$$\iiint \nabla \cdot \vec{F} \, dx\,dy = \sum \iint_{K^*} \vec{F}_{(x,y,\gamma(x,y))} \cdot \vec{N}_{(x,y)} \, dx\,dy$$

- **T. DI STOKES**:

  SIA Σ UNA CALOTTA REGOLARE A PEZZI APERTA ORIENTABILE CON $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ CAMPO VETTORIALE

  $\in C^1(\Sigma)$, ORIENTATA COERENTEMENTE Σ e $\Gamma(\Sigma)$

$$\iint_{\Sigma} \nabla \times \vec{F} \, ds = \sum_{i=1}^{k} \oint_{T_i(\Sigma)} \vec{F} \, dP$$

$\rightsquigarrow$ INT. DI LINEA DI II SPECIE

$\rightsquigarrow$ CIRCUITAZIONE DI $\vec{F}$ LUNGO I BORDI

$\rightsquigarrow$ LAVORO DEL CAMPO VETTORIALE

FLUSSO DEL ROTORE $\vec{n}$

SEGNO "$-$" SE $\vec{n}$ OPPOSTO

FLUSSO DEL ROTORE $\int \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{N} \, dx\,dy =$

$K^* \rightsquigarrow$ DOMINIO K^* (PROIEZIONE SU "xy")

$= \sum \int_{T_i} \vec{F}(\gamma(t)) \, \gamma'(t) \, dt$

$\int_a^b$ LAVORO DELLA CIRCUITAZIONE

• SERIE e SUCCESSIONI:

ORDINI DI INFINITO: $\ln x$, x^a, a^x, $x!$, x^x

• SUCCESSIONI:

a_n È
- CONVERGENTE $\iff \lim_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$
- DIVERGENTE $\iff \lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$
- IRREGOLARE $\iff \lim_{n\to\infty} a_n$ È OSCILLANTE O INDETERMINATO

• $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

• $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a n^b} = 1$

RAPPORTO: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = x$

• SUCCESSIONE GEOM. DI RAGIONE x:

SUCCESSIONE x^n, $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$

$$\lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{SE } |x| < 1 \\ 1 & \text{SE } x = 1 \\ \infty & \text{SE } x > 1 \\ (\nexists & \text{SE } x < -1) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow -1 < x < 1$: ESP. DECRESCENTE

$\rightarrow$ SE $x = -1 \rightarrow$ OSCILLANTE; $\nexists \lim$

$$\sum x^n = \frac{1}{1-x}$$

• SERIE NUMERICHE:

ADDIZIONE DEI TERMINI DI a_n

$\rightsquigarrow$ PER $N \to \infty$ ASSOCIAMO SOMME PIÙ A a_n

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \begin{cases} \text{SE } \exists S : \lim_{N\to\infty} S_N = S \\ \text{INDETERMINATA} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow S_N$ È LA SOMMA PARZIALE FINO A N

$\hookrightarrow$ SUCCESSIONI DELLE RIDOTTE

• SERIE GEOMETRICA DI RAGIONE x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{SE } |x| < 1 \\ \frac{1-\infty}{1-x} = +\infty & \text{SE } |x| \geq 1 \\ \nexists & \text{SE } x \leq -1 \end{cases}$$

• SERIE TELESCOPICA: I TERMINI SI ANNULLANO A COPPIE (ES. SERIE DI MENGOLI)

$\iff a_n = b_n - b_{n-1} \quad \vee \quad a_n = b_n - b_{n+1}$ $\rightsquigarrow$ SI RISOLVE SVILUPPANDO S_N

• $\forall \lambda \neq 0$: SERIE MULTIPLO: $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ $\rightsquigarrow$ HANNO STESSO CARATTERE

• SERIE SOMMA: $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n$

$\hookrightarrow$ SE a_n CONVERGE e b_n DIVERGE $\rightsquigarrow \sum (a_n + b_n)$ DIVERGE

• STUDIO DEL CARATTERE :

• NON CAMBIA ALTERANDO UN N. FINITO DI TERMINI

• $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \to$ DIVERGE
$= 0 \to$ DIVERGE / CONVERGE

• CONDIZ. NECESSARIA DI CONVERGENZA (NON SUFFICIENTE) :

SE $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE $\to \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ $\to$ SE $a_n \not\to 0 \to \sum a_n$ NON CONVERGE

• NON VALE L'IMPLICAZIONE OPPOSTA $\leadsto \lim_{n\to+\infty} a_n$ $\to \neq 0 \to$ NON CONVERGE; $= 0 \to$ NO INFO

• SERIE A TERMINI POSITIVI : $\forall n, a_n \geq 0 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ CONVERGE A $S > 0$ V DIVERGE A $+\infty$

• CRITERIO DEL CONFRONTO : $\leadsto$ COME T. DEI CARABINIERI

SE $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$

• $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ DIVERGE $\to \sum_{n_0}^{\infty} b_n$ DIVERGE • $\sum_{n_0}^{\infty} b_n$ CONVERGE $\to \sum_{n_0}^{\infty} a_n$ CONVERGE

• CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO : $\leadsto \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$

SE $a_n, b_n \geq 0$ DEFINITIVAMENTE (A PARTIRE DA UN N° FINITO DI TERMINI), $a_n \sim b_n \to \sum a_n$ e $\sum^{\infty} b_n$ HANNO STESSO CARATTERE

• CRITERIO DEL RAPPORTO:

SE $a_n > 0$ ($\leadsto$ ANCHE SOLO DEFINITIVAMENTE) e $\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ $\leadsto$ FINITO O INFINITO

• $0 \leq l < 1 \to \sum^{\infty} a_n$ CONVERGE
• $l > 1 \to \sum^{\infty} a_n$ DIVERGE

$\leadsto$ NON POSSO DIRE NULLA SE $l = 1$

• CRITERIO DELLA RADICE :

SE $a_n \geq 0$ e $\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ $\to$ FINITO O INFINITO

• $0 \leq l < 1 \to \sum^{\infty} a_n$ CONVERGE
• $l > 1 \to \sum^{\infty} a_n$ DIVERGE

$\leadsto$ NON POSSO DIRE NULLA SE $l = 1$

• SERIE ARMONICA GENERALIZZATA :

• $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ $\begin{cases} \text{DIVERGE SE } \alpha \leq 1 \\ \text{CONVERGE SE } \alpha > 1 \end{cases}$

• **Criterio di Mc Laurin:**

se $a_n = f(n)$, dove $f: [n_0, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ positiva e decrescente

$\to \sum_{n_0}^{\infty} a_n$ e $\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ hanno stesso carattere

• **Criterio di Leibniz:** ~> serie a termini di segno alterno

la serie $\sum_{n_0}^{\infty} a_n = \sum_{n_0}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge se

- $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$
- b_n è definitivamente decrescente

• **Criterio di convergenza assoluta:** ~> conv. assoluta -> conv. semplice

se $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge $\to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\left(e \ \left| \sum a_n \right| \le \sum |a_n| \right)$

• **Serie di potenze:**

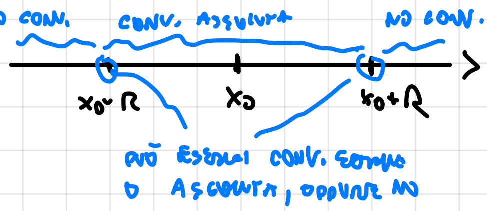
successione dei coefficienti — centro della serie

serie del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

- $\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, \sum^{\infty} a_n (x - x_0)^n \text{ converge} \right\}$ ~> $x_0 \in \lambda$: ogni serie di potenze converge per $x = x_0$
- raggio di convergenza: $R = \sup \left\{ t \ge 0 \,/\, \sum^{\infty} a_n t^n \text{ converge} \right\}$, $R \in [0, +\infty]$

• **T. del raggio di convergenza.**

- $R = 0 \to \lambda = \{x_0\}$: non c'è convergenza per altre x
- $R = +\infty \to \lambda = \mathbb{R}$: convergenza assoluta $\forall x \in \mathbb{R}$
- $0 < R < +\infty \to (x_0 - R, x_0 + R) \subseteq \lambda \subseteq [x_0 - R, x_0 + R]$



• **Criterio della radice** (per serie di potenze, Cauchy-Hadamard):

se $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda \to R = 1/\lambda$

• **Criterio del rapporto** (per serie di potenze, D'Alembert):

se $\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lambda \to R = 1/\lambda$

• CAMPI CONSERVATIVI e POTENZIALI:

campo vettoriale continuo $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$

• SE $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \Omega$ è connesso per archi regolari a tratti

$\vec{F}$ è CONSERVATIVO in Ω se $\exists\, U : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \,/\, \nabla U = \vec{F}$, $\forall$ punto di Ω

$\rightsquigarrow \frac{\delta U}{\delta x_1} = F_1$, $\frac{\delta U}{\delta x_2} = F_2$, ecc. → POTENZIALE di $\vec{F}$ in Ω, è un campo scalare

- un campo continuo non è per forza conservativo
- se $\vec{F}$ è conservativo in $\Omega \to \vec{F}$ ha infiniti potenziali $V / V = U + c$

• T. di indipendenza del lavoro dal percorso:

il lavoro dipende solo dagli estremi e dall'orientamento

se $\vec{F}$ conservativo su $\Omega \to \forall\, \Gamma_{AB} \subset \Omega : \int_{\vec{\Gamma}_{AB}} \vec{F}\, d\vec{p} = U_{(B)} - U_{(A)}$

• CONDIZIONI DI CONSERVATIVITÀ:

- $\forall\, \Gamma \subset \Omega$ chiuso : $\oint_{\Gamma} F\, ds = 0 \rightsquigarrow L = 0$
- $\vec{F}$ conservativo su Ω
- $\forall\, \Gamma^1_{AB}, \Gamma^2_{AB} \subset \Omega \rightsquigarrow \int_{\Gamma_1} \vec{F}\, dp \overset{\text{lavoro è uguale}}{=} \int_{\Gamma_2} \vec{F}\, dp$

• $\exists\, \nabla U = \vec{F} \rightsquigarrow \nabla \times \vec{F} = 0$

• $\nabla \times \vec{F} \neq 0 \rightsquigarrow \nexists\, \nabla U = \vec{F}$

• CONDIZIONE NECESSARIA DI CONSERVATIVITÀ:

se $\vec{F}$ conservativo in $\Omega \rightsquigarrow \vec{F}$ è IRROTAZIONALE in Ω $(\nabla \times \vec{F} = 0, \forall$ punto di $\Omega)$

$\rightsquigarrow$ se $\vec{F}$ rotazionale in $\Omega \to \vec{F}$ non è conservativo in Ω (se $\nabla \times \vec{F} = 0 \rightsquigarrow$ NON significa $\vec{F}$ conservativo) ↳ deve valere T. di Poincarré

in Ω^2 indica un piano senza buchi o piani mancanti

$\rightsquigarrow$ lo sono molti dei aperti connessi di $\mathbb{R}^n$

• UN APERTO È SEMPLICEMENTE CONNESSO SE:

- È CONNESSO e $\forall$ arco semplice chiuso in Ω può essere ridotto ad un punto senza mai uscire da Ω e senza mai spezzarlo

• T. DI POINCARRÉ: $\rightsquigarrow$ se non valgono 1o più ipotesi può essere — conservativo / — non conservativo

se $\vec{F} \in C^1$ su Ω $\begin{cases} \text{• se } \Omega \text{ è semp. connesso} \\ \text{• se } \nabla \times \vec{F} = 0 \end{cases}$ $\to \vec{F}$ conservativo ($\not\leftarrow$)

- un campo irrotazionale $\in C^1$ è conservativo $\forall\, \Omega$ sempl. connesso, continuo nel dominio
- $\exists$ campi conservativi su aperti non semplicemente connessi

• COMBINAZIONE LINEARE DI SERIE DI POTENZE :

SIANO $\sum a_n (x-x_0)^n$ e $\sum b_n (x-x_0)^n$:

INT. DI CONV.

SE $R_1 \neq R_2$: $\sum (a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $R = \min(R_1, R_2)$, $\lambda = \lambda_1 \cap \lambda_2$

SE $R_1 = R_2$: $\sum (a_n+b_n)(x-x_0)^n$, $R \geq R_1, R_2$

• TEOREMA :

SIA $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$:

- $S(x)$ È CONTINUA SU TUTTO $\mathbb{R}$
- $\forall x \in \lambda$: $\int_{x_0}^{x} S(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ -> POTREBBE GUADAGNARE ESTREMI/O DI λ OPPURE NO

• DERIVAZIONE TERMINE A TERMINE :

$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n (x-x_0)^{n-1}$ -> HA STESSO λ DI $S(x)$ -> POTREBBE PERDERE ESTREMI/O DI λ

$\hookrightarrow$ È SOMMA DI SERIE DI POTENZE, COME S'', S''', ect... -> $S \in C^{\infty}(\lambda^{\circ})$

• $S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n+k-1)\cdot(x-x_0)^{n-k} = a_k \cdot k! + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n \cdot n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}$

-> COEFFICIENTE DELLA SERIE DI POTENZE : $a_k = \frac{S^{(k)}(x_0)}{k!}$

• $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n$, $\forall x \in \lambda$

• DEF : f È ANALITICA IN x_0 $\Leftrightarrow$ $\exists\, I_\delta(x_0)$ e $\forall x \in I_\delta(x_0)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

• T. DI SVILUPPABILITÀ : CON LE SEG. H_p ... DERIVATE EQUILIMITATE

SIA $f \in C^{\infty}(I(x_0))$ ANALITICA, $\bar{n} \geq 0$, $M > 0$ / $\forall n \geq \bar{n}$, $|f^{(n)}(x)| \leq M$

-> $\forall x \in I_\delta(x_0)$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ -> SERIE DI TAYLOR

• SERIE DI FOURIER

• ARMONICHE ELEMENTARI: $U(x) = A\cos(n\omega x)$, $V(x) = B\sin(n\omega x)$ ⇝ $T = \frac{2\pi}{\omega}$

• C_T: INSIEME DELLE f T-PERIODICHE, CONTINUE A TRATTI

• f REGOLARIZZATA: $\tilde{f} = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}$ / $f(x^\pm) = \lim_{h\to 0^\pm} f(x+h)$

↳ SE f CONTINUA ⇝ $f = \tilde{f}$

• SE $f \in C_T$: $\forall a \in \mathbb{R}$ VALE $\int_0^T f(x)\,dx = \int_a^{a+T} f(x)\,dx$

• **DEF.** SERIE DI FOURIER:

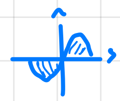
$\forall f(x) \in C_T$, SI PUÒ ASSOCIARE:

$$f \approx \underset{1}{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\underset{2}{a_n}\cos(n\omega x) + \underset{3}{b_n}\sin(n\omega x)\right)$$

DOVE $\qquad$ a_0, a_n, b_n COEFF. DI FOURIER

MEDIA INTEGRALE

$$\underset{1}{a_0} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,dx, \qquad \underset{2}{a_n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad \underset{3}{b_n} = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)\,dx$$

• PROPRIETÀ DEI COEFFICIENTI DI FOURIER: $\qquad 2\cdot\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\dots$ ⇝ 

• SE $f \in C_T$ È DISPARI ⇝ $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,dx$

• SE $f \in C_T$ È PARI ⇝ $b_n = 0$, $a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)\,dx$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$

• **IDENTITÀ DI PARSEVAL**:

SE SOTTO RADICE,
↳ NORMA QUADRATICA DI f: $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^T f^2(x)\,dx}$

$$\forall f \in C_T: \quad \frac{1}{T} = \int_0^T |f(x)|^2\,dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \quad = \|f\|_2^2$$

• SE $f \in C_T$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

• **TEOREMA**: ⇝ DI CONV. PUNTUALE

↳ SE $\exists\,(0 < x_1 < x_2, \dots < T)$ / $f \in C^1(x_i, x_{i+1})$ e $\lim_{x\to x_i^+} f'(x)$ e $\lim_{x\to x_i^-} f'(x)$ $\exists$ FINITI

SE f È T-PERIODICA E REGOLARE A TRATTI

⇝ $\forall x \in \mathbb{R}$, LA SERIE DI FOURIER DI f CONVERGE A $\tilde{f}(x)$