FUNZIONI RICORSIVE PRIMITIVE

Ci sono due modi di combinare funzioni per ottenerne altre:

I modo → **Composizione**: combinare funzioni calcolabili in modo tale che l'uscita di una (il valore calcolato) sia l'ingresso dell'altra (il valore da dare alla variabile).
Nel caso di funzioni con una sola variabile abbiamo che $h(x) = f(g(x))$.
In generale vale la seguente
DEFINIZIONE: Sia f una funzione di k variabili e siano $g_1, \dots, g_k$, funzioni di n variabili (non c'è bisogno che f, $g_1, \dots, g_k$ siano totali, cioè ovunque definite). Sia $h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_k(x_1, \dots, x_n))$.
Allora si dice che h è ottenuta da f e $g_1, \dots, g_k$ mediante composizione.
Di conseguenza $h(x_1, \dots, x_n)$ sarà definita quando sono definite tutte le $g_1, \dots, g_k$ in $(x_1, \dots, x_n)$ e quando è pure definita la f in $(z_1, \dots, z_k)$, essendo $z_1 = g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, z_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$.

II modo → **Ricorsione**: estrarre le caratteristiche essenziali dell'usuale metodo di definizione di una funzione mediante induzione. Tali caratteristiche sono:
- Definire il valore assunto dalla funzione per un caso base (0);
- Definire il valore della funzione per n+1, facendo ricorso al valore assunto dalla funzione per n.

Tale metodo ci permette di calcolare il valore della funzione per qualsiasi argomento.

Esempi:
1) Funzione che genera la sequenza di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 ecc. definita da:
   { $f(0) = 1$; $f(1) = 1$; $f(x+2) = f(x+1) + f(x)$
2) Funzione fattoriale definita da:
   { $0! = 1$; $(n+1)! = n!(n+1)$

Nel caso di una sola variabile si ha la seguente
DEFINIZIONE: Una funzione h si dice ottenuta per ricorsione dalla funzione totale g (di due variabili) se può esprimersi come

$$\{ h(0) = k; \qquad h(t+1) = g(t, h(t))$$

dove k è un numero fissato.

Nel caso in cui trattiamo funzioni di più variabili abbiamo la seguente
DEFINIZIONE: Sia
$\{ h(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$
$\{ h(x_1, \dots, x_n, t+1) = g(t, h(x_1, \dots, x_n, t), x_1, \dots, x_n)$
dove f e g sono due funzioni totali, rispettivamente di n variabili e di n+2 variabili.
Allora la funzione h di n+1 variabili si dice ottenuta da f e g mediante ricorsione.

Le seguenti funzioni, dette **funzioni iniziali**, sono tanto semplici da poter essere considerate calcolabili da un punto di vista intuitivo:
- **Funzione successore**: $S(x) = x+1$;
- **Funzione costante zero**: $n(x) = 0$;
- **Funzione di selezione** (o scelta, o proiezione, o identità): $u_i^n(x_1, \dots, x_n) = x_i$ con $1 \le i \le n$.

DEFINIZIONE: Una classe C di funzioni totali è detta una **classe chiusa in modo ricorsivo primitivo** o **classe PRC** se:
- Le funzioni iniziali appartengono a C;
- Se una funzione è ottenuta a partire da funzioni appartenenti a C mediante l'operazione di composizione o l'operazione di ricorsione allora appartiene anch'essa a C.

DEFINIZIONE: Una **funzione** si dice **ricorsiva primitiva** se può essere ottenuta a partire dalle funzioni iniziali mediante un numero finito di applicazioni delle operazioni di composizione e ricorsione.

Da questa definizione segue che la classe delle funzioni ricorsive primitive è una classe PRC.
TEOREMA: Una funzione è ricorsiva primitiva se e solo se appartiene ad ogni classe PRC.
DIM.($\Leftarrow$): Ammettiamo che una certa funzione f appartenga ad ogni classe PRC; poiché la classe delle funzioni ricorsive primitive è una classe PRC, allora f sarà ricorsiva primitiva.
DIM.($\Rightarrow$): Ammettiamo che f sia ricorsiva primitiva e sia C una generica classe PRC. Vogliamo dimostrare che $f \in C$. Affermare che f è ricorsiva primitiva equivale a dire che esiste una successione di funzioni $f_1, f_2, \dots, f_n$ tale che $f_n = f$ e ognuna delle funzioni f_i ($i<n$) che precedono f_n o è una funzione iniziale o può essere ottenuta da funzioni precedenti mediante composizione o ricorsione. Le funzioni iniziali appartengono a C (per definizione); inoltre C è chiusa sotto le operazioni di composizione e di ricorsione e quindi tutte le funzioni della successione $f_1, f_2, \dots, f_n$ appartengono a C.
Poiché $f = f_n$ allora $f \in C$ che è una qualunque classe PRC.

ALCUNE FUNZIONI RICORSIVE PRIMITIVE:

1. **Funzione somma**:
   $f(x, y) = x+y$

   Definizione ricorsiva:
   { $f(x, 0) = x$ [$x+0 = x$]
   { $f(x, y+1) = f(x, y) + 1$ [$x+(y+1) = (x+y) +1$]

   Definizione ricorsiva usando le funzioni iniziali:
   { $f(x, 0) = u_1^1(x)$
   { $f(x, y+1) = S(u_2^3(y, f(x, y), x))$
   Quest'ultima è una corretta applicazione dell'operazione di ricorsione a funzioni ricorsive primitive, quindi concludiamo che la funzione somma è ricorsiva primitiva.

2. **Funzione prodotto**:
   $h(x, y) = xy$

   Definizione ricorsiva:
   { $h(x, 0) = 0$ [$x*0 = 0$]
   { $h(x, y+1) = h(x, y) + x$ [$x(y+1) = xy + x$]

   Definizione ricorsiva usando le funzioni iniziali o funzioni ricorsive primitive:
   { $h(x, 0) = n(x)$
   { $h(x, y+1) = f(u_2^3(y, h(x, y), x), u_3^3(y, h(x, y), x))$
   Questa è una ricorsiva primitiva perché ottenuta per composizione di funzioni ricorsive primitive (u_2^3 e u_3^3 sono funzioni iniziali, f è la funzione somma).

3. **Funzione fattoriale**:
   $x! = x(x-1)(x-2)\dots2*1$

   Definizione ricorsiva:
   { $0! = 1$
   { $(x+1)! = (x+1)*x!$

   Definizione ricorsiva utilizzando funzioni iniziali o ricorsive primitive:
   { $g(0) = S(n(x))$
   { $g(x+1) = h(S(u_1^2(x, g(x))), u_2^2(x, g(x)))$
   dove h è la funzione prodotto.

4. **Funzione esponenziale**:
   $e(x, y) = x^y$

   Definizione ricorsiva:
   $\{ x^0 = 1$
   $\{ x^{y+1} = x*x^y$

   Definizione ricorsiva utilizzando funzioni iniziali o ricorsive primitive:
   $\{ e(x, 0) = S(n(x))$
   $\{ e(x, y+1) = h(u_1^1(x), u_2^3(x, e(x, y), y))$
   dove h è la funzione prodotto.

5. **Funzione predecessore**:
   $\{ p(0) = 0$
   $\{ p(x) = x-1$

6. **Funzione differenza modificata ($\dot{-}$):**
   $x \dot{-} y = x-y$ se $x \geq y$
   $x \dot{-} y = 0$ se $x<y$
   ($x \dot{-} y$ è totale mentre $x-y$ è non definita per $x<y$).

7. **Differenza assoluta**:
   $|x-y|$

8. **$a(x) = \{ 1$ se $x = 0$; 0 se $x \neq 0 \}$**

9. **$x = y$**

10. **$x \leq y$**

11. **$x < y$**

12. **y/x** (y è un divisore di x)

13. **Primo(x)** (x è un numero primo)

14. **$\llcorner x/y \lrcorner$** (parte intera del quoziente x/y)

15. **R(x, y)** (resto della divisione x/y)

Nonostante la classe delle funzioni ricorsive primitive sia effettivamente amplissima, tuttavia è possibile costruire funzioni che sono calcolabili, ma non sono ricorsive primitive.
La prima di queste funzioni venne trovata da **Ackermann** nel 1928.

LA FUNZIONE DI ACKERMANN
Consideriamo le funzioni successore, somma, prodotto, esponenziale. Tranne la prima che è una funzione iniziale, tutte le altre sono definite mediante una operazione di ricorsione:

- Successore (f_0):	$S(x) = x+1$	
- Somma (f_1):	$x+(y+1) = (x+y)+1$	usa il successore
- Prodotto (f_2):	$x(y+1) = xy+x$	usa la somma
- Esponenziale (f_3):	$x^{y+1} = x*x^y$	usa il prodotto

Questa serie di funzioni presenta due caratteristiche:
1. Ciascuna funzione è definita usando l'operazione che la precede nella lista;
2. Ciascuna funzione cresce più velocemente della funzione che la precede nella lista.

Riscriviamo le equazioni di ricorsione per somma, prodotto ed esponenziale:

- Somma: $f_1(x, 0) = x;$ $f_1(x, y+1) = f_0(f_1(x, y))$
- Prodotto: $f_2(x, 0) = 0;$ $f_2(x, y+1) = f_1(x, f_2(x, y))$
- Esponenziale: $f_3(x, 0) = 1;$ $f_3(x, y+1) = f_2(x, f_3(x, y))$

Possiamo estendere questo procedimento e definire, in generale, una successione di funzioni tali che la seconda equazione sia: $\mathbf{f_{n+1}(x, y+1) = f_n(x, f_{n+1}(x, y))}$

Ogni f_n cresce più rapidamente di tutte le funzioni che la precedono nella successione.

Proviamo a scrivere il quarto termine della successione:

$$f_4(x, y) = \underbrace{(\ldots((x)^x)\ldots)^x}_{y \text{ volte}} = x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}} \text{ y volte.}$$

Ogni funzione della successione è calcolabile in modo effettivo, e proprio per come è stata costruita, è ricorsiva primitiva. Usiamo quindi tale successione di funzioni ricorsive primitive per definire una nuova funzione di tre variabili che tenga conto di tutta la successione:

$$\mathbf{F(n, x, y) = f_n(x, y)}$$

Dalla definizione di F si ha che $\mathbf{F(n+1, x, y+1) = F(n, x, F(n+1, x, y))}$ quindi la ricorsione è effettuata su due variabili. **La funzione di Ackermann è calcolabile, ma non è ricorsiva primitiva**: F cresce più rapidamente di qualsiasi altra funzione ricorsiva primitiva.

F(x, x, x) è un esempio di funzione calcolabile ma non ricorsiva primitiva di una variabile.

CALCOLO DELLA FUNZIONE DI ACKERMANN DI DUE VARIABILI

All'equazione già nota, aggiungiamo le due equazioni che forniscono la base dell'induzione; inoltre semplifichiamo le equazioni eliminando la variabile x che si comporta da parametro e non interviene nei meccanismi di ricorsione:

$$\mathbf{F(0, y) = y+1}$$
$$\mathbf{F(n+1, 0) = F(n, 1)}$$
$$\mathbf{F(n+1, y+1) = F(n, F(n+1, y))}$$

Calcoliamo tale funzione per l'argomento (1, 1):

$$\begin{aligned} F(1, 1) &= F(0, F(1,0)) \\ &= F(0, F(0, 1)) \\ &= F(0, 2) \\ &= 3 \end{aligned}$$

FUNZIONE DI SUDAN (1927)

Tale funzione, che è calcolabile ma non ricorsiva primitiva, è definita da:

$$\mathbf{S(x, y, 0) = x+y}$$
$$\mathbf{S(x, 0, n+1) = x}$$
$$\mathbf{S(x, y+1, n+1) = S(S(x, y, n+1), S(x, y, n+1)+y+1, n)}$$

Calcoliamo tale funzione per l'argomento (1, 2, 1):

$$\begin{aligned} S(1, 2, 1) &= S(S(1, 1, 1), S(1, 1, 1)+2, 0) \\ &= S(1, 1, 1)+S(1, 1, 1)+2 \\ &= S(S(1, 0, 1), S(1, 0, 1)+1, 0) + S(S(1, 0, 1), S(1, 0, 1)+1, 0) + 2 \\ &= S(1, 0, 1)+S(1, 0, 1)+1 + S(1, 0, 1)+S(1, 0, 1)+1 + 2 \\ &= 1+1+1 + 1+1+1 + 2 = 8 \end{aligned}$$

REGOLA DI SOSTITUZIONE: Se abbiamo già un'equazione possiamo passare all'equazione che si ottiene sostituendo in modo uniforme e contemporaneamente tutte le variabili della prima equazione con numerali.

REGOLA DI RIMPIAZZAMENTO: Possiamo rimpiazzare un'espressione $h(n_1, \ldots, n_k)$ con un numerale n purché l'equazione $h(n_1, \ldots, n_k) = n$ sia già stata derivata.