PROGRAMMI UNIVERSALI

Sia P un programma arbitrario tale che #(P) = y e sia $\Psi_P^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ la funzione (parzialmente calcolabile) calcolata da P. Per ogni n > 0 definiamo:

$$\boldsymbol{\Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y) = \Psi_P^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \text{ con } y = \#(P)}$$

TEOREMA: Per ciascun n > 0 la funzione $\Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, y)$ è parzialmente calcolabile.
Ciò significa che per ogni n, tutte le funzioni di n variabili sono calcolabili mediante un unico programma, quindi esiste un programma che calcola qualsiasi funzione calcolabile.
Come la macchina di Turing universale può simulare ogni altra macchina di Turing, così il programma universale può simulare l'esecuzione di qualsiasi altro programma a condizione che gli si dia qualche indicazione su com'è fatto il programma che deve simulare, cioè il numero di Gödel.
DIM: costruiamo per ogni n > 0 un programma universale U_n che calcola $\Phi^{(n)}$, cioè tale che

$$\Psi_{U_n}^{(n+1)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$$

I passi principali che tale programma deve compiere sono:

I. Memorizzare il numero del programma e le variabili di input.
II. Sapere quale istruzione del programma simulato sta effettuando.
III. Poter effettuare l'istruzione del programma simulato in modo coerente con tutto il marchingegno.
IV. Poter passare all'istruzione successiva del programma simulato.
V. Fermarsi quando ha finito di eseguire tutte le istruzioni del programma simulato e fornire il valore corretto della variabile di output.

La variabile K indica qual è l'istruzione che sta per essere eseguita.
La variabile S contiene lo stato attuale del programma codificato mediante numeri di Gödel:
- le variabili a cui non è assegnato un valore sono azzerate;
- l'ordinamento delle variabili sarà tale che le variabili di ingresso occupano i posti pari nella lista: Y, X_1, Z_1, X_2, Z_2, …
- invece di considerare un insieme di equazioni $V_i = v_i$, consideriamo direttamente il numero di Gödel $[v_1, \dots, v_m]$ per rappresentare lo stato attuale.

La situazione iniziale del programma U_n per calcolare la funzione $Y = \Phi^{(n)}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ quindi sarà:
- $X_{n+1} = \#(P)$ (numero del programma)
- $[0, X_1, 0, \dots, X_n]$ (stato iniziale)
- $K = 1$ (deve essere eseguita la prima istruzione)

Trasformiamo queste informazioni in istruzioni di U_n:
Poiché $\#(P) = [\#(I_1), \#(I_2), \dots, \#(I_m)]-1$ allora si ha che $[\#(I_1), \#(I_2), \dots, \#(I_m)] = X_{n+1} + 1$.
Diamo questo valore ad una variabile ausiliaria Z:
$Z \leftarrow X_{n+1} + 1$ (istruzione 1)

S è il numero di Gödel dello stato iniziale, cioè $S = [0, X_1, 0, X_2, \dots, X_n] = \Pi_{1 \le i \le n} (p_{2i})^{X_i}$.
Quindi poniamo questo valore alla variabile S:
$S \leftarrow \Pi_{1 \le i \le n} (p_{2i})^{X_i}$ (istruzione 2)

All'inizio deve essere eseguita la prima istruzione quindi poniamo la variabile K = 1:
$K \leftarrow 1$ (istruzione 3)

Le istruzioni seguenti riguardano direttamente il programma specifico che stiamo simulando.
Il programma simulato può terminare in due modi:

1) è arrivato all'ultima istruzione,
2) oppure un salto condizionato lo ha rinviato ad un'istruzione inesistente.

Nel primo caso il valore di K sarà Ln(Z)+1, dove Ln calcola il numero di istruzioni che sono codificate all'interno del numero di Gödel (cioè la lunghezza della successione di Gödel); mentre nel secondo caso il valore di K sarà 0. In entrambi i casi il programma viene rinviato ad un'istruzione F (finale) che assegna alla variabile di output Y il valore che il programma ha calcolato:

[C] IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istruzione 4)
[F] $Y \leftarrow (S)_1$ (istruzione 18)

Se K < Lt(Z)+1, cioè se ci sono ancora istruzioni del programma simulato da eseguire, allora mettiamo nella variabile U il codice dell'enunciato che deve essere eseguito, cioè della k-esima istruzione. Abbiamo che $Z = [\#(I_1), \#(I_2), \dots, \#(I_m)]$; la k-esima istruzione $\#(I_k)$ del programma si indica con $(Z)_k$. Il codice di un'istruzione è scritta come <a, <b, c>> e la funzione r prende la parte destra di tale scrittura; quindi $r((Z)_k)$ = <b, c> = enunciato dell'istruzione k:

$U \leftarrow r((Z)_k)$ (istruzione 5)

Dobbiamo individuare la variabile della k-esima istruzione. Sappiamo che U = <b, c>, dove b codifica l'istruzione e c codifica la variabile menzionata nell'istruzione. Poiché c = #(V)-1, si ha che #(V) = c+1; inoltre possiamo scrivere c = r(U) quindi si ha #(V) = r(U)+1. Il valore di una variabile n è ricordato come l'esponente al quale è elevato l'n-esimo numero primo nella decomposizione in numeri primi di S. Prendiamo allora l'(r(U)+1)-esimo numero primo e diamo tale valore alla variabile P:

$P \leftarrow p_{r(U)+1}$ (istruzione 6)

Dobbiamo adesso individuare l'istruzione che deve essere eseguita. Questa è codificata da l(U), cioè la parte sinistra di <b, c>. Abbiamo quattro casi da analizzare:
Se b = 0 allora l'istruzione è $V \leftarrow V$ e si deve passare alla prossima istruzione del programma simulato. Il programma universale deve quindi rinviarci ad un'istruzione che incrementa la variabile K:

IF l(U) = 0 GOTO N (istruzione 7)
[N] $K \leftarrow K+1$ (istruzione 16)

Se b = 1 allora l'istruzione è $V \leftarrow V+1$ e si deve aumentare di un'unità l'esponente al quale è elevato P nella decomposizione in fattori primi di S, cioè basta moltiplicare S per P:

IF l(U) = 1 GOTO A (istruzione 8)
[A] $S \leftarrow S \cdot P$ (istruzione 15)

Se b non è uguale né a 0 né a 1 allora sarà l'istruzione $V \leftarrow V-1$ oppure l'istruzione IF V ≠ 0 GOTO L. Se V = 0 in entrambi i casi non dobbiamo fare nulla e quindi passare all'istruzione successiva del programma simulato. Ma V = 0 significa che P non nella scomposizione in fattori primi di S, cioè P non è divisore di S:

IF ~(P|S) GOTO N (istruzione 9)

Se V ≠ 0 e b = 2 allora l'istruzione è $V \leftarrow V-1$; si deve diminuire di un'unità l'esponente al quale è elevato P nella decomposizione in fattori primi di S, cioè basta dividere S per P:

IF l(U) = 2 GOTO M (istruzione 10)
[M] $S \leftarrow \lfloor S/P \rfloor$ (istruzione 13)

Se $V \neq 0$ e $b > 2$ allora l'istruzione è IF $V \neq 0$ GOTO L; per rinviare il programma all'istruzione L bisogna assegnare a K il valore corrispondente alla prima istruzione L nel programma, cioè dobbiamo assegnare a K il più piccolo i (perché potremmo avere più istruzioni con la stessa etichetta) tale che $l((Z)_i) = \#(L)$. Poiché abbiamo $b = \#(L)+2$ si ha che $\#(L) = b-2 = l(U)-2$ e quindi $l((Z)_i) = l(U)-2$:
$K \leftarrow \min_{i \leq Lt(Z)} [l(Z)_i) = l(U)-2]$ (istruzione 11)

Dopodiché bisogna ricominciare il ciclo:
GOTO C (istruzione 12)

Se non esiste un'istruzione con l'etichetta richiesta, l'operatore di minimalizzazione limitata assume il valore 0, quindi $K = 0$ e rieseguendo il ciclo C il programma ci rimanda all'istruzione finale F.
Sia dopo l'istruzione M, sia dopo l'istruzione A bisogna passare all'istruzione N e subito ritornare a C per ricominciare il ciclo; le ultime istruzioni sono quindi nel seguente ordine:
[M] $S \leftarrow \llcorner S/P \lrcorner$ (istruzione 13)
GOTO N (istruzione 14)
[A] $S \leftarrow S \cdot P$ (istruzione 15)
[N] $K \leftarrow K+1$ (istruzione 16)
GOTO C (istruzione 17)

L'ultima istruzione fornisce ad Y la variabile di output che è quella al primo posto dello stato S del programma, cioè il valore di $(S)_1$, quindi abbiamo:
[F] $Y \leftarrow (S)_1$ (istruzione 18)

Programma universale U_n:

1. $Z \leftarrow X_{n+1} + 1$
2. $S \leftarrow \Pi_{1 \leq i \leq n} (p_{2i})^{Xi}$
3. $K \leftarrow 1$
4. [C] IF $K = Lt(Z)+1 \vee K = 0$ GOTO F
5. $U \leftarrow r((Z)_K)$
6. $P \leftarrow p_{r(U)+1}$
7. IF $l(U) = 0$ GOTO N
8. IF $l(U) = 1$ GOTO A
9. IF $\sim(P|S)$ GOTO N
10. IF $l(U) = 2$ GOTO M
11. $K \leftarrow \min_{i \leq Lt(Z)} [l((Z)_i)= l(U)-2]$
12. GOTO C
13. [M] $S \leftarrow \llcorner S/P \lrcorner$
14. GOTO N
15. [A] $S \leftarrow S \cdot P$
16. [N] $K \leftarrow K+1$
17. GOTO C
18. [F] $Y \leftarrow (S)_1$

Esecuzione del programma universale U_n con input $\#(P) = 199$ e $X = 2$:

$Z = X_{n+1} + 1 = 199+1$	
$Z \leftarrow 200$	(istr. 1)
$p_2 = 3$ e $X_1 = 2$	
$S \leftarrow 3^2$	(istr. 2)
$K \leftarrow 1$	(istr. 3)
$200 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 = [3, 0, 2]$	
$Lt(Z) = 3$	
IF $K = Lt(Z)+1$ v $K = 0$ GOTO F	(istr. 4)
$K \neq 4$ e $K \neq 0$ quindi vai avanti	
$(Z)_1 = (200)_1 = 3$	
$2^x(2y+1)-1 = 3$	
$2y+1 = 4/2^x$	
$3 = <2, 0>$	
$r(3) = 0$	
$U \leftarrow 0$	(istr. 5)
$2^x(2y+1)-1 = 0$	
$2y+1 = 1/2^x$	
$0 = <0, 0>$	
$l(U) = 0$ e $r(U) = 0$	
$r(U)+1 = 1$	
$p_1 = 2$	
$P \leftarrow 2$	(istr. 6)
IF $l(U) = 0$ GOTO N	(istr. 7)
$l(U) = 0$ quindi vai a N	
$K \leftarrow 2$	(istr. 16)
GOTO C	(istr. 17)
IF $K = Lt(Z)+1$ v $K = 0$ GOTO F	(istr. 4)
$K \neq 4$ e $K \neq 0$ quindi vai avanti	
$(Z)_2 = (200)_2 = 0$	
$0 = <0, 0>$	
$r(0) = 0$	
$U \leftarrow 0$	(istr. 5)
$l(U) = 0$ e $r(U) = 0$	
$r(U)+1 = 1$	
$p_1 = 2$	
$P \leftarrow 2$	(istr. 6)
IF $l(U) = 0$ GOTO N	(istr. 7)
$l(U) = 0$ quindi vai a N	
$K \leftarrow 3$	(istr. 16)
GOTO C	(istr. 17)
IF $K = Lt(Z)+1$ v $K = 0$ GOTO F	(istr. 4)
$K \neq 4$ e $K \neq 0$ quindi vai avanti	
$(Z)_3 = (200)_3 = 2$	
$2^x(2y+1)-1 = 2$	
$2y+1 = 3/2^x$	
$2 = <0, 1>$	
$r(2) = 1$	
$U \leftarrow 1$	(istr. 5)
$2^x(2y+1)-1 = 1$	
$2y+1 = 2/2^x$	
$1 = <1, 0>$	
$l(U) = 1$ e $r(U) = 0$	
$r(U)+1 = 1$	
$p_1 = 2$	
$P \leftarrow 2$	(istr. 6)
IF $l(U) = 0$ GOTO N	(istr. 7)
$l(U) = 0$ quindi vai avanti	
IF $l(U) = 1$ GOTO A	(istr. 8)
$S \leftarrow 3^2 \cdot 2 = 2^1 \cdot 3^2$	(istr. 15)
$K \leftarrow 4$	(istr. 16)
GOTO C	(istr. 17)
IF $K = Lt(Z)+1$ v $K = 0$ GOTO F	(istr. 4)
$Lt(Z)+1 = 4$ quindi vai ad F	
$S = [1, 2]$ quindi $(S)_1 = 1$	
$Y \leftarrow 1$	(istr. 18)

Esecuzione del programma universale U_n con input $\#(P) = 2^{45} \cdot 3^2 \cdot 5^{46} - 1$ e $X = 2$:

$Z = X_{n+1} + 1 = 2^{45} \cdot 3^2 \cdot 5^{46}$
$Z \leftarrow 2^{45} \cdot 3^2 \cdot 5^{46}$ (istr. 1)
$p_2 = 3$ e $X_1 = 2$
$S \leftarrow 3^2$ (istr. 2)
$K \leftarrow 1$ (istr. 3)
Z = [45, 2, 46]
Lt(Z) = 3
IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)
K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti
$(Z)_1 = 45$
$2^x(2y+1)-1 = 45$
$2y+1 = 46/2^x$
$45 = \langle 1, 11 \rangle$
$r((Z)_1) = r(45) = 11$
$U \leftarrow 11$ (istr. 5)
$2^x(2y+1)-1 = 11$
$2y+1 = 12/2^x$
$11 = \langle 2, 1 \rangle$
l(U) = 2 e r(U) = 1
r(U)+1 = 2
$p_2 = 3$
$P \leftarrow 3$ (istr. 6)
IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)
l(U) ≠ 0 quindi vai avanti
IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)
l(U) ≠ 1 quindi vai avanti
IF ~(P|S) GOTO N (istr. 9)
P|S quindi vai avanti
IF l(U) = 2 GOTO M (istr. 10)
$S/P = 3^2/3 = 3$
$S \leftarrow 3$ (istr.13)
GOTO N (istr. 14)
$K \leftarrow 2$ (istr. 16)
GOTO C (istr. 17)
IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)
K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti
$(Z)_2 = 2$
$2^x(2y+1)-1 = 2$
$2y+1 = 3/2^x$
$2 = \langle 0, 1 \rangle$
$r((Z)_2) = r(2) = 1$
$U \leftarrow 1$ (istr. 5)
$2^x(2y+1)-1 = 1$
$2y+1 = 2/2^x$
$1 = \langle 1, 0 \rangle$
l(U) = 1 e r(U) = 0
r(U)+1 = 1
$p_1 = 2$
$P \leftarrow 2$ (istr. 6)
IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)
l(U) ≠ 0 quindi vai avanti
IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)
$S \cdot P = 3 \cdot 2$
$S \leftarrow 2^1 \cdot 3^1$ (istr. 15)
$K \leftarrow 3$ (istr. 16)
GOTO C (istr. 17)
IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)
K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti
$(Z)_3 = 46$
$2^x(2y+1)-1 = 46$
$2y+1 = 47/2^x$
$46 = \langle 0, 23 \rangle$
$r((Z)_3) = r(46) = 23$
$U \leftarrow 23$ (istr. 5)
$2^x(2y+1)-1 = 23$
$2y+1 = 24/2^x$
$23 = \langle 3, 1 \rangle$
l(U) = 3 e r(U) = 1
r(U) + 1 = 2
$p_2 = 3$
$P \leftarrow 3$ (istr. 6)
IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)
l(U) ≠ 0 quindi vai avanti
IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)
l(U) ≠ 1 quindi vai avanti
IF ~(P|S) GOTO N (istr. 9)
P|S quindi vai avanti
IF l(U) = 2 GOTO M (istr. 10)
l(U) ≠ 2 quindi vai avanti
$\min_{i \le Lt(Z)} [l((Z)_i) = l(U)-2]$
$\min_{i \le 3} [l((Z)_i) = 1]$
$l(Z)_1 = 1$
$K \leftarrow 1$ (istr. 11)
GOTO C (istr. 12)
IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)
K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti
$(Z)_1 = 45$
$U \leftarrow 11$ (istr. 5)
$P \leftarrow 3$ (istr. 6)
IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)
l(U) ≠ 0 quindi vai avanti
IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)

l(U) ≠ 1 quindi vai avanti

IF ~(P|S) GOTO N (istr. 9)

P|S quindi vai avanti

IF l(U) = 2 GOTO M (istr. 10)

$S/P = 2^1 \cdot 3^1/3 = 2$

$S \leftarrow 2$ (istr.13)

GOTO N (istr. 14)

$K \leftarrow 2$ (istr. 16)

GOTO C (istr. 17)

IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)

K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti

$(Z)_2 = 2$

$U \leftarrow 1$ (istr. 5)

$P \leftarrow 2$ (istr. 6)

IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)

l(U) ≠ 0 quindi vai avanti

IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)

$S \cdot P = 2 \cdot 2$

$S \leftarrow 2^2$ (istr. 15)

$K \leftarrow 3$ (istr. 16)

GOTO C (istr. 17)

IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)

K ≠ 4 e K ≠ 0 quindi vai avanti

$(Z)_3 = 46$

$U \leftarrow 23$ (istr. 5)

$P \leftarrow 3$ (istr. 6)

IF l(U) = 0 GOTO N (istr. 7)

l(U) ≠ 0 quindi vai avanti

IF l(U) = 1 GOTO A (istr. 8)

l(U) ≠ 1 quindi vai avanti

IF ~(P|S) GOTO N (istr. 9)

3 non è divisore di 4

$K \leftarrow 4$ (istr. 16)

GOTO C (istr. 17)

IF K = Lt(Z)+1 v K = 0 GOTO F (istr. 4)

Lt(Z)+1 = 4 quindi vai ad F

S = [2] quindi $(S)_1 = 2$

$Y \leftarrow 2$ (istr. 18)

$\#(I)_1 = 45 = \langle 1, \langle 2, 1 \rangle\rangle$

$\#(I)_2 = 2 = \langle 0, \langle 1, 0 \rangle\rangle$

$\#(I)_3 = 46 = \langle 0, \langle 3, 1 \rangle\rangle$

```
[A]  X ← X-1
     Y ← Y+1
     IF X ≠ 0 GOTO A
```

Con input X = 2 il risultato viene Y = 2