Applicazione del Pumping Lemma

Ricordiamo cosa afferma il Pumping Lemma (per i linguaggi regolari):

Lemma. *Sia* $L \subseteq \Sigma^*$ *un linguaggio, se* $L \in \mathbf{REG}$ *allora*

> $\exists N > 0$ *un intero tale che*
>
> $\forall w \in L$ *con* $|w| > N$
>
> $\exists$ *una partizione di* w *del tipo* $w = xyz$ *con* $y \neq \varepsilon$ *e* $|xy| \leq N$ *tale che*
>
> $\forall k \geq 0$ *si abbia* $xy^k z \in L$

Dando per scontato che abbiate capito il significato del lemma, questo viene applicato nella sua forma negativa per dimostrare la non regolarità di un linguaggio, ovvero si usa il seguente:

Lemma. *Sia* $L \subseteq \Sigma^*$ *un linguaggio, se*

> $\forall N > 0$
>
> $\exists w \in L$ *con* $|w| > N$ *tale che*
>
> $\forall$ *partizione di* w *del tipo* $w = xyz$ *con* $y \neq \varepsilon$ *e* $|xy| \leq N$
>
> $\exists k \geq 0$ *tale che si abbia* $xy^k z \notin L$

allora $L \notin \mathbf{REG}$

Osservazione. Siamo semplicemente passati da $L \in \mathbf{REG} \Rightarrow \exists\forall\exists\forall$ alla forma equivalente $\neg(\exists\forall\exists\forall) \Rightarrow \neg(L \in \mathbf{REG})$ ossia $\forall\exists\forall\exists \Rightarrow L \notin \mathbf{REG}$.

L'idea per mostrare che un linguaggio L non è regolare è dunque quella di far vedere che comunque preso $N > 0$ riusciamo sempre ad individuare almeno una stringa $w \in L$ di lunghezza maggiore di N tale che in qualunque modo la si partizioni in $w = xyz$ (sotto le condizioni $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq N$) ci sarà almeno un k per cui iterando k volte il blocco centrale y si esce fuori dal linguaggio.

Chiariamo (spero) con gli esempi sotto riportati.

Esercizio. *Sia* $\Sigma = \{a, b\}$*, dimostrare che il linguaggio* $L = \left\{w \in \Sigma^* \mid w = w^R\right\}$ *(il linguaggio delle parole palindrome) non è regolare.*

Dimostrazione. Per un qualunque intero $N > 0$ si consideri la parola $w = a^N b a^N$. Essa chiaramente appartiente ad L (è palindroma) ed ha lunghezza $|w| = 2N + 1 > N$. Notiamo che ogni sua partizione $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq N$ deve avere forma:

$$w = \underbrace{a \dots a}_{x}\underbrace{a \dots a}_{y}\underbrace{a \dots abaa \dots a}_{z}$$

cioè $x = a^r$,$y = a^s$,$z = a^t b a^N$ con $r + s + t = N$.
Ora, preso ad esempio $k = 3$ (ma va bene qui un qualunque $k \neq 1$), risulta $xy^k z = a^{r+3s+t} b a^N = a^{N+2s} b a^N$, dunque $xy^k z \notin L$ (infatti avremo per risultato un numero di a alla destra della b che è maggiore rispetto che quelle alla sinistra, palindromia persa). □

Esercizio. *Sia $\Sigma = \{a, b\}$, dimostrare che il linguaggio $L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = |w|_a\}$ (delle parole con egual numero di a e b) non è regolare.*

Dimostrazione. Preso comunque un intero $N > 0$ si consideri la parola $w = a^N b^N \in L$ che ha chiaramente lunghezza $|w| = 2N > N$. Non è difficile rendersi conto che ogni partizione $w = xyz$ tale che $y \neq \varepsilon$ e $|xy| \leq N$ deve avere forma:

$$w = \underbrace{a \dots a}_{x} \underbrace{a \dots a}_{y} \underbrace{a \dots a b b \dots b}_{z}$$

ossia $x = a^r$,$y = a^s$,$z = a^t b^N$ con $r + s + t = N$.
Ora, preso ad esempio $k = 0$ (ma anche qui va bene un qualunque $k \neq 1$), risulta che $xy^k z \notin L$, infatti $xy^k z = a^{r+0s+t} b^N = a^{N-s} b^N$ (cioè avremo per risultato un numero di a minore del numero di b). □

Le dimostrazioni hanno uno schema abbastanza 'standard', il punto centrale sta nell'individuare la giusta stringa w nel linguaggio per cui iterando il fattore centrale si ottiene una stringa non più nel linguaggio.