Линал

Основные алгебраические структуры. Комплексные числа. Многочлены.

Понятие поля, примеры
Поле - множество F, на котором заданы две операции (сложение и умножение), для которых выполняются следующие аксиомы:

Аксиомы поля

Аксиомы сложения:

1 Коммутативность: $a + b = b + a$

2 Ассоциативность: $(a + b) + c = a + (b + c)$

3 Наличие нуля: $a + 0 = a$

4 Наличие противоположного элемента: $\exists(-a) : a + (-a) = 0$

Аксиомы умножения:

5 Коммутативность: $a * b = b * a$

6 Ассоциативность: $(a * b) * c = a * (b * c)$

7 Есть единица: $a * 1 = a$

8 Есть обратный элемент: $\forall a \neq 0 : \exists a^{-1} : a * a^{-1} = 1$

9 Дистрибутивность: $a * (b + c) = a * b + a * c$

Примеры полей:

Примеры полей

1 $\mathbb{Q}$ - поле рациональных чисел

2 $\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел

3 $\mathbb{C}$ - поле комплексных чисел (неупорядоченно)

Примеры НЕполей

- $\mathbb{Z}$ (Целые числа) — **не поле**, так как $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, *)$ не является группой (нет обратных элементов, кроме 1 и -1).
- $\mathbb{N}$ (Натуральные числа) — **не группа и не множество**: даже по сложению (нет нейтрального элемента 0 и противоположных чисел).

Абелева группа, аддитивная, мультипликативная группа поля.
Абелева группа - множество G с заданной на нем бинарной операцией $*$, для которого выполняются аксиомы:

Аксиомы Абелевой группы

1	Коммутативность: $\forall a, b \in G : a * b = b * a$
2	Ассоциативность: $\forall a, b, c \in G : (a * b) * c = a * (b * c)$
3	Наличие нейтрального элемента: $\exists e \in G : a * e = e * a = a$
4	Наличие обратного элемента: $\forall a \in G : \exists a^{-1} : a^{-1} * a = e$
5	Замкнутость: $\forall a, b \in G \Rightarrow (a * b) \in G$

Группы в структуре поля
Поле F — это структура, объединяющая две Абелевы группы:

Примеры Абелевых групп:

- Вектора по сложению $(\mathbb{R}^2, +)$
- Матрицы $m * n$ по сложению $(M_{m,n}, +)$

Свойство	**Аддитивная группа**	**Мультипликативная группа**
Множество G	F (все элементы)	$F \setminus \{0\}$ (без нуля)
Операция $*$	$+$ (сложение)	$\cdot$ (умножение)
Нейтральный e	0 (нуль)	1 (единица)
Обратный a^{-1}	$-a$ (противоположный)	a^{-1} (обратный)

Построение поля комплексных чисел

1. Формальная конструкция

Определение
Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ — это множество упорядоченных пар вещественных чисел (a, b), для которых введены операции:

- **Сложение**: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
- **Умножение**: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Для элементов вида $(a, 0)$ операции совпадают с операциями в $\mathbb{R}$, поэтому $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Обозначим $(0, 1) = i$. Тогда $i^2 = (-1, 0) = -1$.

2. Алгебраическая форма

Любое число $z = (a, b)$ можно записать как:

$$z = a + bi$$

Где:

- $a = \text{Re}(z)$ — вещественная (реальная) часть.
- $b = \text{Im}(z)$ — мнимая часть.

3. Комплексное сопряжение

Определение и свойства сопряжения

Число $\bar{z} = a - bi$ называется **комплексно сопряженным** к числу $z = a + bi$.

Основные свойства:

1. $\bar{\bar{z}} = z$ (инволюция)
2. $z_1 \bar{+} z_2 = \bar{z_1} + \bar{z_2}$
3. $z_1 \bar{\cdot} z_2 = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$
4. $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (всегда вещественное неотрицательное число)

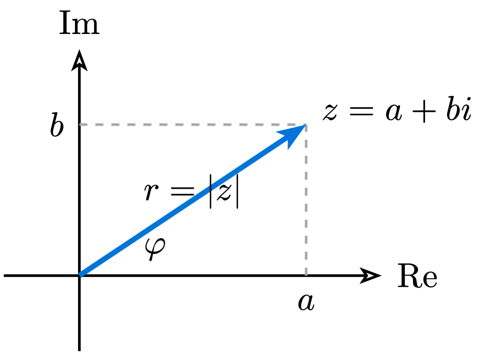
Проверка аксиом поля $\mathbb{C}$

Все аксиомы поля для $\mathbb{C}$ выполняются в силу соответствующих аксиом для поля $\mathbb{R}$.

Краткая проверка основных свойств

- **Коммутативность $+$ и $\cdot$**: следует из коммутативности операций в $\mathbb{R}$.
- **Нейтральные элементы**:
  - По сложению: $0_{\mathbb{C}} = (0, 0)$
  - По умножению: $1_{\mathbb{C}} = (1, 0)$
- **Обратные элементы**:
  - По сложению: $-z = (-a, -b)$
  - По умножению (для $z \neq 0$): $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right)$
- **Ассоциативность и дистрибутивность**: проверяются прямой подстановкой и раскрытием скобок.

Геометрическая модель КЧ, интерпретация сложения и сопряжения в этой модели

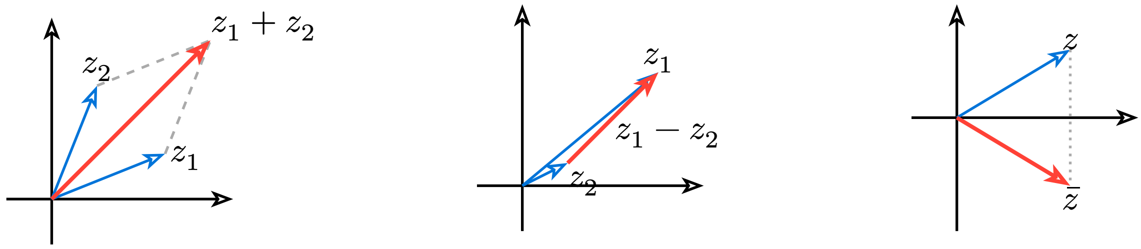


Геометрическая интерпретация
Комплексное число $z = a + bi$ представляется как радиус-вектор на **комплексной плоскости**, где ось-абсцисс(x) - $\text{Re}(z)$, а ось ординат(y) - $\text{Im}(z)$

Интерпретация операций

Геометричский смысл операций

- **Сложение**: сумма комплексных чисел $z_1 + z_2$ соответствует сумме соответствующих радиус-векторов (правило параллелограмма)
- **Вычитание**: разность $z_1 - z_2$ - аналогично, векторная разность радиус-векторов, т.е. вектор из z_2 в z_1
- **Сопряжение**: Переход от z к $\bar{z}$ - симметричное отражение точки отнасительно вещественной оси (x или Re)
- **Модуль**: $|z|$ - евклидова длина вектора
- **Аргумент**: φ - ориентированный угол между положительным направлением Re и вектором z



Сложение **Вычитание** **Сопряжение**

Рис. 1. Геометрический смысл операций над комплексными числами

Свойства модуля

Свойства модуля

0. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, e.g. $z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{9 + 16} = 5$
1. $|z| \geq 0$; $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $|z_1 * z_2| = |z_1| * |z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ - из неравенства треугольника
4. $|z|^2 = z * \bar{z}$

Аргумент КЧ

Определение

Аргументом ненулевого числа $z = a + bi$ называется угол φ между положительной полуосью Re и вектором z.

Связь с координатами:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{|}z| \\ \sin\varphi = \frac{b}{|}z| \end{cases}$$

Главное значение аргумента $\varphi \in (-\pi, \pi]$

Четверть	**Условие**	**Формула** $\arg(z)$
I	$a > 0, b \geq 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
II	$a < 0, b \geq 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi$
III	$a < 0, b < 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi$
IV	$a > 0, b < 0$	$\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$
Ось Im	$a = 0, b \neq 0$	$\operatorname{sgn}(b) \cdot \frac{\pi}{2}$

Свойства аргумента

1. $\operatorname{Arg}(z_1 * z_2) = \operatorname{Arg}(z_1) + \operatorname{Arg}(z_2)$
2. $\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Arg}(z_1) - \operatorname{Arg}(z_2)$
3. $\operatorname{Arg}(z^n) = n \cdot \operatorname{Arg}(z)$

Тригонометрическая Форма

Определение
Любое комплексное число $z = a + bi$ $(z \neq 0)$ может быть представлено в **тригонометрической форме**:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Где $r = |z|$ — модуль, а $\varphi = \arg(z)$ — аргумент числа.

Операции в тригонометрической форме

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Алгебраические действия

1. **Умножение**: модули перемножаются, аргументы складываются:
$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$
2. **Деление**: модули делятся, аргументы вычитаются:
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Возведение в степень. Формула Муавра

Формула Муавра
Для любого целого n справедливо:

$$z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Геометрический смысл: При возведении в степень n вектор числа z растягивается в r^n раз и поворачивается на угол в n раз больший исходного.

Теорема
Для любого комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ существует ровно n различных значений корня n-ой степени.

Формула вытекает из обобщения формулы Муавра:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, ..., n-1$$

Геометрический смысл корней

Все n корней w_k обладают следующими свойствами:
1. Все они лежат на одной окружности радиуса $R = \sqrt[n]{r}$.
2. Аргументы соседних корней отличаются на $2\frac{\pi}{n}$.
3. Точки, соответствующие корням, являются вершинами **правильного n-угольника**, вписанного в эту окружность.

Экспоненциальная форма. Формула Эйлера

Формула Эйлера
Фундаментальная связь экспоненты и тригонометрии:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Любое число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в **экспоненциальной форме**:

$$z = re^{i\varphi}$$

Свойства экспоненциальной формы

В этой форме операции выполняются по обычным правилам работы со степенями:
- **Умножение**: $r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
- **Деление**: $\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
- **Возведение в степень**: $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^ne^{in\varphi}$

Кольца

1. Коммутативные кольца

Определение
Множество R с операциями $(+, \cdot)$ называется **коммутативным кольцом**, если:

- $(R, +)$ — Абелева группа.
- Операция $\cdot$ ассоциативна и коммутативна $(a \cdot b = b \cdot a)$.
- Выполняется дистрибутивность: $a(b + c) = ab + ac$.

Примеры: $\mathbb{Z}$ (целые числа), $\mathbb{R}$ (поля также являются кольцами).

2. Кольцо многочленов $K[x]$

Определение
Пусть K — поле. Множество всех выражений вида $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$, где $a_i \in K$, называется **кольцом многочленов** над полем K и обозначается $K[x]$.

Свойства кольца многочленов

1. $K[x]$ является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей (единица — это многочлен $P(x) = 1$).
2. В $K[x]$ нет делителей нуля: если $P(x) \cdot Q(x) = 0$, то либо $P = 0$, либо $Q = 0$.
3. $K[x]$ не является полем, так как для многочленов степени $\deg(P) \geq 1$ не существует обратного элемента в $K[x]$.

Сравнение многочленов над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$

Разложение на множители

Согласно **Основной теореме алгебры**:

1. В кольце $\mathbb{C}[x]$ любой многочлен степени n разлагается на n линейных множителей:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$$

2. В кольце $\mathbb{R}[x]$ любой многочлен разлагается на линейные множители и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом:

$$P(x) = a_n(x - a_1)...(x^2 + p_1 x + q_1)...$$

Важное свойство
Если комплексное число z является корнем многочлена с **вещественными** коэффициентами, то сопряженное число $\bar{z}$ также является его корнем.

Различие Кольца и Поля

- **Поле**: $(F, +)$ — Абелева группа, $(F \setminus \{0\}, \cdot)$ — Абелева группа.
- **Кольцо**: $(R, +)$ — Абелева группа, а для $(R, \cdot)$ аксиома наличия обратного элемента a^{-1} **не обязательна**.

Пример: В кольце многочленов $\mathbb{R}[x]$ обратный элемент существует только для констант (многочленов нулевой степени). Для $P(x) = x$ обратного многочлена не существует, так как $\frac{1}{x} \not\in \mathbb{R}[x]$.

3. Степень многочлена (deg)

Для любых $P, Q \in K[x]$ выполняются свойства:

- $\deg(P + Q) \leq \max(\deg P, \deg Q)$
- $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$

1. Деление с остатком

Теорема
Для любых $P(x), Q(x) \in K[x], Q \neq 0$, существуют единственные $S(x)$ и $R(x)$, такие что:

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x),$$

где либо $R(x) = 0$, либо $\deg R < \deg Q$.

Алгоритм

Процесс деления (обычно «уголком») продолжается до тех пор, пока степень текущего остатка не станет меньше степени делителя $Q(x)$.

2. Теорема Безу

Это важнейший частный случай деления на двучлен $Q(x) = (x - a)$.

Теорема Безу
Остаток от деления многочлена $P(x)$ на $(x - a)$ равен значению этого многочлена в точке a:

$$R = P(a)$$

Доказательство (в одну строчку)

По теореме о делении с остатком: $P(x) = (x - a) \cdot S(x) + R$.
Подставим $x = a$: $P(a) = (a - a) \cdot S(a) + R \Rightarrow P(a) = R$. **Q.E.D.**

3. Следствия

1. Число a является корнем многочлена $P(x) \Leftrightarrow P(x)$ делится на $(x - a)$ без остатка.
2. Многочлен степени n имеет не более n различных корней.

Определение
Число a называется **корнем кратности** k многочлена $P(x)$, если:

$$P(x) = (x-a)^k \cdot Q(x), \quad \text{где } Q(a) \neq 0$$

Связь с производными

Число a является корнем кратности k тогда и только тогда, когда:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = ... = P^{(k-1)}(a) = 0, \quad \text{но } P^{(k)}(a) \neq 0$$

1. Разложение над полем $\mathbb{C}$

Основная теорема алгебры
Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$ имеет ровно n корней (с учетом кратности) и разлагается на линейные множители:

$$P(x) = a_n (x-z_1)^{k_1} (x-z_2)^{k_2} ... (x-z_m)^{k_m}$$

где $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$.

2. Разложение над полем $\mathbb{R}$

Теорема
Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \geq 1$ разлагается в произведение линейных и неразложимых квадратичных множителей:

$$P(x) = a_n \prod (x-a_i)^{k_i} \prod \left(x^2 + p_j x + q_j\right)^{m_j}$$

где для всех квадратичных множителей $D = p_j^2 - 4q_j < 0$.

Почему в $\mathbb{R}$ остаются квадраты?

Комплексные корни вещественного многочлена всегда сопряжены. Произведение двух линейных множителей с сопряженными корнями дает вещественный квадратный трехчлен:

$$(x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = x^2 - 2\alpha x + (\alpha^2 + \beta^2)$$

1. Лемма о сопряженном корне

Утверждение
Пусть $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (коэффициенты вещественны). Если комплексное число z является корнем $P(x)$, то число $\bar{z}$ также является его корнем.

Доказательство

1. Условие $P(z) = 0$ означает: $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_0 = 0$.
2. Применим операцию сопряжения к обеим частям:

$$\overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \bar{0} = 0$$

3. По свойствам сопряжения (сумма сопряжений и произведение сопряжений):

$$\sum_{k=0}^{n} \bar{a_k} (\bar{z})^k = 0$$

4. Так как коэффициенты a_k вещественные, то $\bar{a_k} = a_k$.
5. Получаем: $\sum a_k (\bar{z})^k = 0$, то есть $P(\bar{z}) = 0$. **Q.E.D.**

2. Теорема о разложении над $\mathbb{C}$

Теорема
Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ степени $n \geq 1$ разлагается на n линейных множителей:

$$P(x) = a_n (x - z_1)(x - z_2)...(x - z_n)$$

Доказательство (Метод индукции)

- **База**: Для $n = 1$ многочлен $a_1 x + a_0 = a_1 \left(x - \left(-\frac{a_0}{a_1}\right)\right)$ уже разложен.
- **Предположение**: Пусть утверждение верно для многочленов степени $n - 1$.
- **Шаг**: Рассмотрим $P(x)$ степени n.
  1. По **Основной теореме алгебры** у $P(x)$ есть хотя бы один корень z_1.
  2. По теореме Безу: $P(x) = (x - z_1)Q(x)$, где $\deg Q = n - 1$.
  3. К $Q(x)$ применимо предположение индукции.
  4. Итого: $P(x) = (x - z_1)[a_n (x - z_2)...(x - z_n)]$. **Q.E.D.**

3. Теорема о разложении над $\mathbb{R}$

Теорема

Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ степени $n \geq 1$ разлагается на линейные множители и неразложимые в $\mathbb{R}$ квадратичные множители ($D < 0$):

$$P(x) = a_n \prod (x - x_i) \prod (x^2 + p_j x + q_j)$$

Доказательство

1. Рассмотрим разложение $P(x)$ над полем $\mathbb{C}$.
2. Вещественные корни x_i дают линейные множители $(x - x_i)$.
3. Комплексные корни по Лемме ходят парами $(z, \bar{z})$. Перемножим соответствующую пару скобок:

$$(x - z)(x - \bar{z}) = x^2 - (z + \bar{z})x + z\bar{z}$$

4. По свойствам сопряженных чисел:
   - $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z) = -p \in \mathbb{R}$
   - $z\bar{z} = |z|^2 = q \in \mathbb{R}$
5. Получаем вещественный квадратный трехчлен $x^2 + px + q$. Он неразложим в $\mathbb{R}$, так как его корни комплексные.

Теорема Виета

Теорема

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ — корни многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Тогда коэффициенты многочлена связаны с его корнями следующими соотношениями:

Формулы Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + ... + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1 x_2 + x_1 x_3 + ... + x_{n-1} x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1 x_2 x_3 + ... = -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ ... \\ x_1 x_2 ... x_n = (-1)^n \cdot \frac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Частные случаи (самые ходовые на экзамене)

Для n = 2 (квадратный)

$x^2 + px + q = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}$$

Для n = 3 (кубический)

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 = b \\ x_1 x_2 x_3 = -c \end{cases}$$

Доказательство (идея)

Доказательство основано на тождественном равенстве двух форм многочлена:

1. По определению: $P(x) = a_n \left(x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + ... \right)$
2. По теореме о разложении: $P(x) = a_n (x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)$

При раскрытии скобок во втором выражении и приравнивании коэффициентов при одинаковых степенях x получаются формулы Виета.

Общая формула Виета

Для приведенного многочлена ($a_n = 1$) коэффициент при x^{n-k} равен:

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}$$

По-простому

- $k = 1$: Сумма корней (знак $-$)
- $k = 2$: Сумма всех возможных пар (знак $+$)
- $k = 3$: Сумма всех возможных троек (знак $-$)
- ...
- $k = n$: Произведение всех корней (знак $(-1)^n$)

Линейные пространства

Определение
Множество V называется **линейным (векторным) пространством** над полем F, если на нём заданы операции сложения векторов и умножения вектора на скаляр, удовлетворяющие 8 аксиомам:

I. Аксиомы сложения (Абелева группа)

1 $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность)

2 $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (ассоциативность)

3 $\exists \vec{0} \in V : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (нейтральный элемент)

4 $\forall \vec{a} \exists (-\vec{a}) : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ (обратный элемент)

II. Аксиомы умножения на скаляр

5 $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ (унитарность)

6 $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha\beta) \cdot \vec{a}$ (ассоциативность)

7 $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность по числу)

8 $\alpha \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по вектору)

Примеры линейных пространств

1. **Арифметическое пространство** $\mathbb{R}^n$: векторы-столбцы из n чисел.
2. **Пространство матриц** $M_{m \times n}$: матрицы одинакового размера.
3. **Пространство многочленов** $\mathbb{R}[x]$ (степени не выше n).

Арифметическое линейное пространство $\mathbb{R}^n$

Определение
Множество всех упорядоченных совокупностей из n вещественных чисел $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ с операциями:

- **Сложение**: $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
- **Умножение**: $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$

Стандартный базис в $\mathbb{R}^n$

Система векторов $e_1, e_2, ..., e_n$, где e_i содержит 1 на i-м месте и 0 на остальных:

$$e_i = (0, ..., 1, ..., 0)$$

Эта система является базисом в $\mathbb{R}^n$, следовательно $\dim \mathbb{R}^n = n$.

Умножение матриц, его свойства

Определение

Произведением матрицы A размера $m \times n$ на матрицу B размера $n \times k$ называется матрица $C = A \cdot B$ размера $m \times k$, элементы которой вычисляются по формуле:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} b_{rj}$$

Где $i = 1..m, j = 1..k$.

Главное условие

Операция $A \cdot B$ определена тогда и только тогда, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Основные свойства

Алгебраические свойства

1. **Некоммутативность**: $AB \neq BA$ (в общем случае).
2. **Ассоциативность**: $(AB)C = A(BC)$.
3. **Дистрибутивность**: $A(B + C) = AB + AC$.
4. **Связь со скаляром**: $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$.
5. **Единичный элемент**: $\exists I : AI = IA = A$.

Транспонирование и След (Trace)

Важные формулы

- Транспонирование произведения: $(AB)^T = B^T A^T$ (порядок меняется!).
- След матрицы (сумма диагонали): $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

След матрицы и его свойства

Определение
Следом квадратной матрицы A порядка n называется сумма её диагональных элементов:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$$

Основные свойства следа

Свойства

1	Линейность: $\mathrm{tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha\,\mathrm{tr}(A) + \beta\,\mathrm{tr}(B)$
2	След транспонированной матрицы: $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$
3	Цикличность: $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$
4	След единичной матрицы: $\mathrm{tr}(I_n) = n$

Важное замечание про произведение
Хотя в общем случае $AB \neq BA$ (матрицы не коммутируют), их **следы всегда равны**. Это свойство работает, даже если A и B прямоугольные, при условии, что произведения AB и BA квадратные.

Обобщение для экзамена (Циклическое свойство)

След произведения нескольких матриц не меняется при их циклической перестановке:

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$$

Внимание: Свойство $\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(ACB)$ в общем случае **неверно**! Работает с циклической перестановкой

СЛАУ. Основные понятия

Определение
Системой линейных алгебраических уравнений называется совокупность уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = 1, ..., m$$

Формы записи системы

1. **Координатная**: обычная запись со знаком системы.
2. **Векторная**: $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + ... + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$, где $\vec{a}_j$ — столбцы матрицы.
3. **Матричная**: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$.

Расширенная матрица

Для решения системы используют **расширенную матрицу $\tilde{\boldsymbol{A}}$**, к которой справа приписан столбец свободных членов через черту:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = (A \mid b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & ... & a_{1n} & b_1 \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Классификация систем

Тип	**Свойство**	**Количество решений**
Совместная	Решения есть	Одно (определенная) или бесконечно много (неопределенная)
Несовместная	Решений нет	0
Однородная	$\boldsymbol{b} = 0$	Всегда совместна (как минимум $x = 0$)

Линейное подпространство

Определение
Непустое подмножество L линейного пространства V называется его **подпространством**, если оно само является линейным пространством относительно операций, заданных в V.

Критерии подпространства

Для того чтобы подмножество $L \subset V$ было подпространством, необходимо и достаточно выполнения трех условий:
1. $\vec{0} \in L$ (содержит нулевой вектор).
2. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in L \Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \in L$ (замкнутость по сложению).
3. $\forall \vec{u} \in L, \forall \alpha \in F \Rightarrow (\alpha\vec{u}) \in L$ (замкнутость по умножению).

Примеры и антипримеры в $\mathbb{R}^3$

- **Подпространства**: любая плоскость или прямая, проходящая через $(0, 0, 0)$.
- **Не подпространства**:
  - Плоскость $z = 1$ (не содержит ноль).
  - Множество векторов с целыми координатами (умножишь на 0.5 — вылетишь из множества).

Тривиальные подпространства

В любом пространстве V всегда есть два «крайних» подпространства:
1. Нулевое подпространство: $\left\{\vec{0}\right\}$.
2. Само пространство V.

Билет: Линейная оболочка системы векторов

Определение
Линейной оболочкой системы векторов $S = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k\}$ называется множество всех их линейных комбинаций. Обозначение: $L(S)$ или $\langle \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k \rangle$.

$$L(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{a}_i \ \texttt{mid} \ \alpha_i \in F \right\}$$

Свойства линейной оболочки

Теорема о подпространстве

Линейная оболочка $L(S)$ любой системы векторов является подпространством в V. Её также называют **подпространством, натянутым** на систему S.

Минимальность

Линейная оболочка $L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k)$ есть наименьшее подпространство в V, содержащее векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

Размерность оболочки

Размерность линейной оболочки равна **рангу** системы векторов S:

$$\dim(L(S)) = \operatorname{rank}(\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\})$$

Полные системы векторов

Определение
Система векторов $S = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\}$ называется **полной** в пространстве V, если любой вектор $\vec{v} \in V$ является их линейной комбинацией.

$$L(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k) = V$$

Свойства полных систем

Теорема о базисе

Из любой конечной полной системы векторов можно выделить базис данного пространства. **(Для этого нужно просто выкидывать линейно зависимые векторы, пока система не станет независимой).**

Свойство избыточности

Если к полной системе добавить любые векторы из V, она останется полной.

Связь с размерностью

- Если система полная, то число векторов в ней $k \geq \dim V$.
- Если в полной системе ровно $n = \dim V$ векторов, то она автоматически является базисом.

Сравнение систем векторов

Параметр	Полная система	Базис
Геометрическая суть	Набор векторов, которых **достаточно**, чтобы заполнить всё пространство.	Минимально необходимый набор для заполнения пространства.
Линейная зависимость	Может содержать «лишние» (зависимые) векторы.	Строго **линейно независима**. Нет ни одного лишнего вектора.

Количество векторов	$k \geq n$ (где $n = \dim V$).	Строго $n = \dim V$.
Разложение вектора $\vec{v} = \sum \alpha_i \vec{a}_i$	**Не единственно**. Один и тот же вектор можно собрать разными способами.	**Единственно**. У каждого вектора есть уникальный «паспорт» — координаты.

Закон экономии

- Из любой **полной системы** можно выкинуть лишнее и получить **базис**.
- К любому **базису** можно добавить любой вектор и получить **полную систему**.

Линейно независимые и зависимые системы

Базовое уравнение
Рассмотрим равенство:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

1. Определения

Линейная независимость

Система независима, если уравнение выше имеет **только тривиальное** решение:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$$

Линейная зависимость

Система зависима, если существует **хотя бы один** $\alpha_i \neq 0$, при котором сумма равна $\vec{0}$.

2. Свойства линейно зависимых систем

Свойство 1: О нулевом векторе

Если в систему векторов входит нулевой вектор $\vec{0}$, то такая система **всегда** линейно зависима. *Доказательство*: Достаточно взять коэффициент при нулевом векторе $\alpha \neq 0$, а остальные обнулить.

Свойство 2: О подсистеме

Если какая-либо часть (подсистема) системы векторов линейно зависима, то и **вся система** линейно зависима. *Суть*: Зависимость — это как «вирус», она делает всю компанию зависимой.

Свойство 3: О линейной комбинации

Система из двух и более векторов зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов является **линейной комбинацией** остальных.

Свойство 4: О независимой системе

Любая подсистема линейно независимой системы сама является линейно независимой.

3. Критерий независимости в $\mathbb{R}^n$

Система векторов $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n$ в пространстве $\mathbb{R}^n$ линейно независима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из этих векторов, **не равен нулю**:

$$\det(A) \neq 0$$

Лемма о замене (лемма Стейнца)

Формулировка

Пусть в линейном пространстве V заданы две системы векторов:

1. $L = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_n\}$ — **полная** система.
2. $K = \left\{\vec{b}_1, ..., \vec{b}_m\right\}$ — **линейно независимая** система.

Тогда:

- Число независимых векторов не превосходит числа полных: $m \leq n$.
- Можно заменить m векторов системы L векторами системы K так, что полученная система останется полной.

Главные следствия

Теорема о размерности

Во всяком конечномерном линейном пространстве все базисы состоят из **одинакового** числа векторов. Это число называется **размерностью** пространства ($\dim V$).

Признак зависимости

В пространстве размерности n любая система из $m > n$ векторов является **линейно зависимой**.

Идея доказательства (индукция)

1. Берем $\vec{b}_1$. Т.к. L полная, $\vec{b}_1$ выражается через $\vec{a}_i$. Т.к. $\vec{b}_1 \neq 0$, то есть коэффициент $\alpha_i \neq 0$. Заменяем этот $\vec{a}_i$ на $\vec{b}_1$.
2. Система остается полной. Повторяем процесс для $\vec{b}_2, ..., \vec{b}_m$.
3. Если бы $m > n$, то после n шагов все $\vec{a}$ закончились бы, и оставшиеся $\vec{b}$ выражались бы через предыдущие, что противоречит их независимости.

Базис линейного пространства

Определение
Система векторов $e = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ называется **базисом** пространства V, если она одновременно линейно независима и является полной (порождающей) системой в V.

4 фундаментальные теоремы о базисе

Теорема 1: О единственности координат

Для любого вектора $\vec{x} \in V$ существует единственный набор чисел $(x_1, ..., x_n)$, такой что:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$$

Числа x_i называются **координатами** вектора $\vec{x}$ в базисе e.

Теорема 2: Об инвариантности размерности

Все базисы конечномерного пространства состоят из одинакового количества векторов. Это число называется **размерностью** пространства $(\dim V)$.

Теорема 3: О дополнении до базиса

Любую линейно независимую систему векторов $S \subset V$ можно дополнить до базиса пространства V.

Теорема 4: Критерий базиса

В пространстве размерности n любая линейно независимая система из n векторов является базисом.

Доказательства теорем о базисе

Теорема 1: О единственности координат

Доказательство

1. Пусть вектор $\vec{x}$ имеет два разложения в базисе e:

$$\vec{x} = \sum \alpha_i \vec{e}_i \quad \text{и} \quad \vec{x} = \sum \beta_i \vec{e}_i$$

2. Вычтем одно из другого:

$$\vec{0} = \vec{x} - \vec{x} = \sum (\alpha_i - \beta_i)\vec{e}_i$$

3. Так как $\vec{e}_i$ — базис, они **линейно независимы**. Значит, такая комбинация равна нулю только при нулевых коэффициентах:

$$\alpha_i - \beta_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = \beta_i \ \text{ для всех } \ i.$$

Вывод: Разложение единственно. *Q.E.D.*

Теорема 2: Об инвариантности размерности

Доказательство

Пусть в пространстве есть два базиса: e из n векторов и f из m векторов.

1. Базис e — полная система, f — независимая. По **Лемме о замене**: $m \leq n$.
2. Поменяем их ролями. Базис f — полная система, e — независимая. По **Лемме о замене**: $n \leq m$.
3. Из $m \leq n$ и $n \leq m$ следует, что $n = m$.

Вывод: Число векторов в любом базисе одинаково. *Q.E.D.*

Теорема 3: О дополнении до базиса

Доказательство

Пусть $S = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ — независимая система, а $\dim V = n$ $(k < n)$.

1. Так как $k < n$, система S не может быть полной (иначе бы $\dim V$ была $\leq k$).
2. Значит, существует вектор $\vec{u} \in V$, который не выражается через S.
3. Добавим его: $S' = S \cup \{\vec{u}\}$. Новая система останется независимой.
4. Повторяем процесс, пока число векторов не станет равным n.

Вывод: Любую независимую систему можно достроить до «каркаса» (базиса). *Q.E.D.*

Теорема 4: Критерий базиса

Доказательство

Пусть $\dim V = n$ и у нас есть n независимых векторов. Докажем, что они образуют базис.

1. По определению базиса нам не хватает только свойства **полноты**.
2. Предположим от противного: система не полная. Тогда существует вектор $\vec{w}$, который через них не выражается.
3. Добавив его, мы получим систему из $n + 1$ независимых векторов.
4. Но по **Лемме о замене**, в пространстве размерности n не может быть больше n независимых векторов.

Противоречие. Значит, система обязана быть полной. *Q.E.D.*

Координаты вектора

Разложение $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ позволяет отождествить абстрактный вектор с вектором-столбцом из $\mathbb{R}^n$:

$$[\vec{x}]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Билет: Изоморфизм линейных пространств

Определение

Линейные пространства V и W над полем F называются **изоморфными** ($V \cong W$), если существует отображение $f : V \to W$, такое что:

1. f — биекция (взаимно-однозначное соответствие).
2. $f(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha f(\vec{u}) + \beta f(\vec{v})$ (линейность).

Теорема об изоморфизме

Утверждение

Два конечномерных линейных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны:

$$V \cong W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$$

Идея доказательства

- $\Rightarrow$: Изоморфизм переводит базис пространства V в базис пространства W. Т.к. биекция сохраняет количество элементов, то $\dim V = \dim W$.
- **В обратную сторону**: Если $\dim V = \dim W = n$, выберем в V базис e и в W базис g. Отображение, сопоставляющее вектору $\vec{v} = \sum x_i \vec{e}_i$ вектор $\vec{w} = \sum x_i \vec{g}_i$ (с теми же координатами), будет являться изоморфизмом.

Базис и размерность подпространства

Определение
Система векторов $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k\}$ называется **базисом подпространства** $L \subset V$, если:
1. Все векторы $\vec{e}_i$ принадлежат L.
2. Система линейно независима.
3. Система является полной в L (любой вектор из L выражается через них).

1. Размерность подпространства

Теорема

Число векторов в любом базисе подпространства L называется его **размерностью** и обозначается $\dim L$.

2. Связь с объемлющим пространством

Пусть V — конечномерное пространство, а L — его подпространство. Тогда:

Свойства размерности

1. **Ограниченность**: размерность подпространства не может превышать размерность всего пространства: $\dim L \leq \dim V$.
2. **Критерий совпадения**: если $\dim L = \dim V$, то подпространство совпадает с самим пространством: $L = V$.
3. **Дополнение**: любой базис подпространства L можно дополнить до базиса всего пространства V.

3. Практический смысл (Ранг)

Если подпространство L задано как линейная оболочка системы векторов $S = \{\vec{a}_1, ..., \vec{a}_m\}$, то его размерность равна **рангу** этой системы векторов:

$$\dim L = \mathrm{rank}(S)$$

Сумма и пересечение подпространств

1. Определения

Пересечение и Сумма

- **Пересечением** $L_1 \cap L_2$ называется множество векторов, принадлежащих одновременно L_1 и L_2.
- **Суммой** $L_1 + L_2$ называется линейная оболочка объединения этих подпространств:

$$L_1 + L_2 = \{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in L_1, \vec{v} \in L_2\}$$

2. Теорема Грассмана (Формула размерности)

Важнейшая формула

Сумма размерностей двух подпространств равна размерности их суммы плюс размерность их пересечения:

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$$

3. Прямая сумма

Определение

Сумма подпространств называется **прямой** ($L_1 \oplus L_2$), если их пересечение тривиально: $L_1 \cap L_2 = \left\{\vec{0}\right\}$.

Критерии прямой суммы

Следующие утверждения эквивалентны:

1. Сумма $L_1 + L_2$ является прямой.
2. Любой вектор $\vec{x} \in L_1 + L_2$ представляется в виде $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ единственным образом.
3. $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$.

Расчет

- **Базис суммы**: выписать векторы базисов L_1 и L_2 в одну матрицу и найти её ранг (базисные строки).
- **Базис пересечения**: найти векторы, удовлетворяющие системам уравнений обоих подпространств одновременно (решить систему $A_1x = 0$ и $A_2x = 0$ вместе).

Ранг матрицы. Элементарные преобразования

Определение
Рангом матрицы A называется максимальное число её линейно независимых строк (или столбцов). Обозначение: $\text{rank}(A)$ или $r(A)$.

1. Определения через миноры

Минорный ранг

Ранг матрицы равен наибольшему из порядков её отличных от нуля миноров.
- Если все миноры порядка $k+1$ равны нулю, а хотя бы один минор порядка k не равен нулю, то $\text{rank}(A) = k$.

2. Элементарные преобразования

Свойство
Элементарные преобразования переводят матрицу в **эквивалентную** ($A \sim B$), при этом ранг матрицы не изменяется.

Список преобразований

1. Перестановка двух строк или двух столбцов.
2. Умножение строки (столбца) на ненулевой скаляр λ.
3. Прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на число.
4. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

3. Вычисление ранга

Самый эффективный способ найти ранг — привести матрицу к **ступенчатому виду** с помощью метода Гаусса.

Теорема
Ранг ступенчатой матрицы равен количеству её ненулевых строк.

Метод Гаусса и ступенчатые матрицы

Ступенчатая матрица (REF)
Матрица имеет **ступенчатый вид**, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

1. Улучшенный ступенчатый вид (RREF)

Определение

Ступенчатая матрица называется **улучшенной (приведенной)**, если:
1. Ведущие элементы всех строк равны 1.
2. В столбце с ведущей единицей все остальные элементы равны 0.

2. Метод Гаусса (Алгоритм)

Ход	**Цель и действия**
Прямой ход	Приведение к ступенчатому виду. Исключение неизвестных сверху вниз. Позволяет найти **Ранг**.
Обратный ход	Приведение к улучшенному виду. Получение значений неизвестных снизу вверх.

3. Теорема о ранге

Теорема
Любая матрица с помощью элементарных преобразований строк может быть приведена к ступенчатому виду. При этом количество ступенек (ненулевых строк) равно **рангу матрицы**.

Примеры операций (нотация):

- $R_i \to R_i + \lambda R_j$ (прибавить к i-й строке j-ю, помноженную на λ).
- $R_i \leftrightarrow R_j$ (поменять строки местами).
- $R_i \to \frac{R_i}{k}$ (нормировка строки).

Доказательство (Теорема о ступенчатом виде)

1. **База индукции**: Для матрицы из одной строки ($m = 1$) она либо нулевая, либо уже ступенчатая.
2. **Шаг индукции**: Пусть для матриц с $(m-1)$ строками утверждение верно. Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$.
3. Найдем первый слева столбец j, содержащий хотя бы один ненулевой элемент $a_{ij} \neq 0$.
4. Переставим строки так, чтобы этот элемент оказался в первой строке ($a_{1j} \neq 0$).
5. Для всех строк $i > 1$ выполним преобразование: $R_i \to R_i - \left(\frac{a_{ij}}{a_{1j}}\right) R_1$. Теперь под элементом a_{1j} стоят только нули.
6. Рассмотрим подматрицу, состоящую из строк со 2-й по m-ю. По предположению индукции её можно привести к ступенчатому виду.
7. Т.к. первая строка и нули под a_{1j} не нарушают структуру «лесенки», вся матрица становится ступенчатой. **Q.E.D.**

Утверждение

Для любой матрицы A число линейно независимых строк равно числу линейно независимых столбцов.

Доказательство (схема)

1. Приведем матрицу A к ступенчатому виду S с помощью элементарных преобразований строк.
2. **По строкам**: Элементарные преобразования не меняют линейную оболочку строк (мы просто заменяем векторы на их комбинации). Следовательно, $\text{rank}_{\text{стр}}(A) = \text{rank}_{\text{стр}}(S)$.
3. В ступенчатой матрице S число ненулевых строк явно равно числу независимых строк (т.к. они образуют «лесенку»). Обозначим это число r.
4. **По столбцам**: Элементарные преобразования строк сохраняют линейные зависимости между столбцами.
   - Если $\sum \lambda_j \vec{c}_j = \vec{0}$, то после $R_i \to R_i + kR_s$ равенство сохранится для каждой координаты.
   - Значит, $\text{rank}_{\text{ст}}(A) = \text{rank}_{\text{ст}}(S)$.
5. В ступенчатой матрице S ровно r столбцов являются базисными (те, что содержат ступеньки). Остальные через них выражаются. Значит, $\text{rank}_{\text{ст}}(S) = r$.
6. Итого: $\text{rank}_{\text{стр}}(A) = r$ и $\text{rank}_{\text{ст}}(A) = r$.

Следовательно: $\text{rank}_{\text{стр}}(A) = \text{rank}_{\text{ст}}(A)$. *Q.E.D.*

Теория СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли

Теорема Кронекера-Капелли
Система линейных алгебраических уравнений $Ax = b$ совместна (имеет хотя бы одно решение) тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(\tilde{A}\right), \quad \text{где } \tilde{A} = (A \mid b)$$

Доказательство

1. $\Rightarrow$ **(Необходимость)**: Пусть система имеет решение $x = (c_1, ..., c_n)$. Запишем систему в векторном виде: $c_1\vec{a}_1 + ... + c_n\vec{a}_n = \vec{b}$, где $\vec{a}_i$ — столбцы матрицы A. Это значит, что столбец $\vec{b}$ является линейной комбинацией столбцов A. Следовательно, добавление этого столбца в матрицу не увеличивает количество линейно независимых столбцов. $\Rightarrow \operatorname{rank}\left(\tilde{A}\right) = \operatorname{rank}(A)$.
2. $\leq$ **(Достаточность)**: Пусть $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}\left(\tilde{A}\right) = r$. Пусть $\vec{a}_{i_1}, ..., \vec{a}_{i_r}$ — базисные столбцы матрицы A. Так как ранг расширенной матрицы тоже r, эти же столбцы остаются базисными и для $\tilde{A}$. Значит, последний столбец $\vec{b}$ линейно выражается через базисные:

$$\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_{i_1} + ... + \lambda_r\vec{a}_{i_r}$$

Коэффициенты этого разложения (с нулями на местах небазисных столбцов) и есть решение системы. **Q.E.D.**

Однородные системы линейных уравнений

Определение
Система $Ax = 0$ называется **однородной**. Она всегда совместна, так как имеет тривиальное решение $x = \vec{0}$.

Свойства решений

Множество решений однородной системы образует **линейное подпространство** в $\mathbb{R}^n$. *Доказательство*: Если x_1 и x_2 — решения ($Ax_1 = 0, Ax_2 = 0$), то:

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

Значит, любая линейная комбинация решений — тоже решение.

Фундаментальная система решений (ФСР)

Базис пространства решений однородной системы называется ФСР. Размерность этого пространства (количество векторов в ФСР):

$$k = n - \operatorname{rank}(A)$$

где n — число неизвестных.

Структура решения систем линейных уравнений

Теорема о структуре общего решения
Общее решение **неоднородной** системы ($Ax = b$) равно сумме любого её частного решения ($x_{\text{част}}$) и общего решения соответствующей однородной системы ($x_{\text{одн}}$):

$$x_{\text{общ}} = x_{\text{част}} + x_{\text{одн}}$$

Доказательство

1. Пусть x — произвольное решение $Ax = b$.
2. Пусть x^* — фиксированное частное решение $Ax^* = b$.
3. Рассмотрим разность $x_0 = x - x^*$.
4. Подставим в систему: $Ax_0 = A(x - x^*) = Ax - Ax^* = b - b = 0$.
5. Значит, x_0 — решение однородной системы. Отсюда $x = x^* + x_0$. **Q.E.D.**

Полилинейные функции. Определитель

Определение
Определитель (детерминант) порядка n — это функция $\det : M_{n\times n} \to F$, которая сопоставляет квадратной матрице число и обладает свойствами:

1. **Полилинейность**: линейна по каждой строке.
2. **Кососимметричность**: меняет знак при перестановке двух строк.
3. **Нормировка**: $\det(I) = 1$.

Перестановки, инверсии, транспозиции

- **Перестановка** σ из n элементов — это взаимно-однозначное отображение множества $\{1, ..., n\}$ на себя.
- **Инверсия** — пара индексов (i, j), такая что $i < j$, но $\sigma(i) > \sigma(j)$ (нарушение порядка).
- **Четность**: $\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^N$, где N — количество инверсий.
- **Транспозиция** — перестановка, меняющая местами только два элемента. Транспозиция всегда меняет четность перестановки.

Свойства определителя

Ключевые свойства

1. $\det(A) = \det(A^T)$ (равноправие строк и столбцов).
2. При перестановке двух строк определитель меняет знак на противоположный.
3. Определитель с двумя одинаковыми строками равен 0.
4. Общий множитель строки можно выносить за знак определителя.

5. Если к одной строке прибавить другую, умноженную на число, определитель **не изменится**.
6. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на диагонали.

Определитель произведения матриц

Теорема
Определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Разложение определителя по строке

Теорема Лапласа
Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (или столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$$

- **Минор** M_{ij}: определитель матрицы без i-й строки и j-го столбца.
- **Алгебраическое дополнение**: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Обратная матрица, свойства

Определение
Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

Свойства

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (порядок меняется!).
3. $\left(A^{T}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{T}$.
4. $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.

Критерий обратимости, явная формула

Критерий
Матрица A обратима тогда и только тогда, когда она **невырождена**, то есть $\det(A) \neq 0$.

Явная формула (через присоединенную матрицу)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C^{T}$$

где C — матрица алгебраических дополнений ($C_{ij} = A_{ij}$).

Метод Гаусса-Жордана вычисления обратной матрицы

Это практический способ нахождения A^{-1} с помощью элементарных преобразований.

1. Записываем блочную матрицу $(A \mid I)$.
2. Приводим левую часть к единичной матрице I с помощью преобразований строк.
3. Правая часть автоматически превратится в A^{-1}.

$$(A \mid I) \sim \ldots \sim (I \mid A^{-1})$$

Теорема Крамера

Теорема
Если $\det(A) \neq 0$, то система $Ax = b$ имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

где A_i — матрица, полученная из A заменой i-го столбца на столбец свободных членов b.

Доказательство (через разложение по столбцу)

Запишем $Ax = b$ как $x_1\vec{a}_1 + \ldots + x_i\vec{a}_i + \ldots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$. В матрице A_i i-й столбец заменен на $\vec{b}$. Разложим этот $\vec{b}$ по формуле выше. По свойствам определителя (линейность по столбцу), $\det(A_i) = x_1 \det(\ldots) + \ldots + x_i \det(A) + \ldots$ Все слагаемые, кроме $x_i \det(A)$, занулятся (так как там будут два одинаковых столбца). Итого: $\det(A_i) = x_i \det(A) \Rightarrow x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$. **Q.E.D.**

Матрица перехода к новому базису, ее свойства

Пусть $e = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ — старый базис, $e' = \left\{\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_n\right\}$ — новый базис.

Определение

Матрицей перехода от базиса e к базису e' называется матрица C, столбцы которой составлены из координат новых базисных векторов в старом базисе:

$$\vec{e'}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\vec{e}_i$$

Матричная запись: $\left(\vec{e'}_1, ..., \vec{e'}_n\right) = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n) \cdot C$.

Свойства:

1. Матрица перехода всегда невырождена: $\det(C) \neq 0$.
2. Обратный переход: $C_{e' \to e} = (C_{e \to e'})^{-1}$.
3. Цепное правило: $C_{e \to e''} = C_{e \to e'} \cdot C_{e' \to e''}$.

Переход к новым координатам при смене базиса

Пусть вектор $\vec{x}$ имеет столбец координат X в базисе e и столбец X' в базисе e'. Матрица перехода C (от e к e').

Формула преобразования координат

$$X = C \cdot X'$$

(Старые координаты = Матрица перехода · Новые координаты)

Внимание (важное отличие)

- Векторы базиса преобразуются **прямо**: $e' = eC$.
- Координаты векторов преобразуются **обратно**: $X' = C^{-1}X$.

Векторная алгебра. Геометрические векторные пространства

Закрепленный и свободный вектор

- **Закрепленный вектор**: направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с фиксированным началом A и концом B.
- **Свободный вектор**: множество всех эквивалентных (равных по длине и направлению) закрепленных векторов. В линале мы работаем со свободными векторами (их можно переносить параллельно самим себе).

Линейные операции, нормирование, проекция

1. **Линейные операции**: сложение (правило треугольника/параллелограмма) и умножение на число (растяжение).
2. **Нормирование**: деление вектора на его длину для получения **орта** (единичного вектора): $\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|}\vec{a}|$.
3. **Проекция на ось** l (задаваемую вектором $\vec{e}$):

$$\text{пр}_l\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi$$

Линейная зависимость в геометрических пространствах

- 2 вектора зависимы $\Leftrightarrow$ они **коллинеарны** (лежат на одной прямой, $\vec{a} \parallel \vec{b}$).
- 3 вектора зависимы $\Leftrightarrow$ они **компланарны** (лежат в одной плоскости).
- 4 вектора в 3D пространстве **всегда** линейно зависимы.

Базисы и координаты. Направляющие косинусы

- **Стандартный ортонормированный базис**: $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.
  - Попарно перпендикулярны.
  - Длина каждого равна 1.
- **Направляющие косинусы**: Координаты орта вектора — это косинусы углов вектора с осями:

$$\vec{e} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \quad \text{где} \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Скалярное произведение

Определение

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

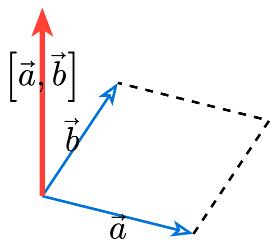
В координатах (ортонормированный базис):

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства:
1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. Линейность: $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
3. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 \geq 0$.
4. Критерий перпендикулярности: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0$.

Векторное произведение

Определение
Векторным произведением $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ называется вектор $\vec{c}$, такой что:
1. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ (численно равен площади параллелограмма).
2. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$.
3. Тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — правая.



Формула в координатах:

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \det\left(\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\right)$$

Смешанное произведение

Определение
$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$

Геометрический смысл: Объем ориентированного параллелепипеда, построенного на трех векторах. **Критерий компланарности**: Векторы лежат в одной плоскости $\Leftrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = 0$.

Декартова система координат. Общее уравнение плоскости

Общее уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является **нормальным вектором** (перпендикуляром) к плоскости.

Уравнение плоскости по трем точкам. Расстояние

Уравнение через 3 точки M_1, M_2, M_3: Векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ должны быть компланарны.

$$\det\left(\begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}\right) = 0$$

Расстояние от точки M_0 до плоскости:

$$d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\frac{|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Уравнения прямой в пространстве

Каноническое

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{l}$$

Параметрическое

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + pt \\ z = z_0 + lt \end{cases}$$

$\vec{s} = (m, p, l)$ — направляющий вектор.

Расстояние от точки M_1 до прямой (с направляющим $\vec{s}$ и точкой M_0):

$$d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{s}\right]\right|}{|\vec{s}|}$$

(Площадь параллелограмма / Основание)

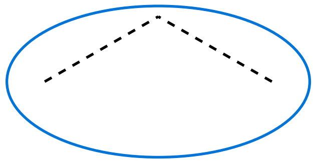
Взаимное расположение прямых и плоскостей

1. **Угол между плоскостями**: угол между их нормалями ($\cos\varphi$).
2. **Угол между прямыми**: угол между их направляющими ($\cos\varphi$).
3. **Угол между прямой и плоскостью**: угол между направляющим $\vec{s}$ и нормалью $\vec{n}$ дополняет искомый до 90°.

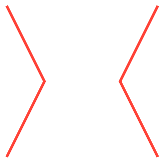
$$\sin\varphi = \frac{|(\vec{s}, \vec{n})|}{|\vec{s}| \cdot |\vec{n}|}$$

Вывод уравнений кривых второго порядка. Свойства

Кривая	**Определение и уравнение**
Эллипс	Множество точек, сумма расстояний от которых до двух фокусов постоянна ($r_1 + r_2 = 2a$). Уравнение: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Свойства: $a^2 = b^2 + c^2$, эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$.
Гипербола	Модуль разности расстояний до фокусов постоянен ($\lvert r_1 - r_2 \rvert = 2a$). Уравнение: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Свойства: $c^2 = a^2 + b^2$, $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$, асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}x$.
Парабола	Равноудалена от фокуса и директрисы. Уравнение: $y^2 = 2px$. Свойства: $\varepsilon = 1$.



Эллипс: сумма пунктиров = const



Гипербола