Матан

Вещественные числа

Определение
Множество вещественных (действительных) чисел $\mathbb{R}$ — это математическая абстракция, представляющая собой совокупность всех возможных значений длин отрезков, их координат на прямой, а также предельных значений рациональных чисел.

В курсе анализа вещественные числа вводятся либо аксиоматически (как полное упорядоченное поле), либо конструктивно (через сечения Дедекинда или фундаментальные последовательности Кантора).

Множество $\mathbb{R}$ включает в себя:
- Натуральные числа: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
- Целые числа: $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
- Рациональные числа: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$
- Иррациональные числа: $\mathbb{I} = \mathbb{R}\partial\mathbb{Q}$ (например, $\sqrt{2}, \pi, e$)

Азы теории множеств

Определение
Множество — это совокупность определенных и различимых объектов (элементов), мыслимая как единое целое.

Пусть A и B — произвольные множества. Основные операции:

1. **Принадлежность:** $x \in A$ (элемент x входит в множество A).
2. **Включение (подмножество):** $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$.
3. **Равенство:** $A = B \Leftrightarrow (A \subset B и B \subset A)$.
4. **Объединение:** $A \cup B = \{x : x \in A$ **или** $x \in B\}$.
5. **Пересечение:** $A \cap B = \{x : x \in A и x \in B\}$.
6. **Разность:** $A\partial B = \{x : x \in A и x \notin B\}$.
7. **Дополнение:** Если $A \subset U$, то $A^c = U\partial A$.
8. **Симметрическая разность:** $A \triangle B = (A\partial B) \cup (B\partial A)$.
9. **Декартово произведение:** $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Отображения

Определение
Отображением (или функцией) $f : X \to Y$ называется правило, которое каждому элементу $x \in X$ (область определения) сопоставляет ровно один элемент $y \in Y$ (область значений).

Выделяют три важных типа отображений:

Инъекция
Разным прообразам соответствуют разные образы: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Сюръекция
Каждый элемент Y имеет хотя бы один прообраз: $\forall y \in Y, \exists x \in X : f(x) = y$.

Биекция
Взаимно-однозначное соответствие (инъекция + сюръекция). Существует обратное отображение f^{-1}.

Аксиомы Пеано. Структура $\mathbb{N}$

Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ строится на понятии «следующего» элемента. Пусть n' — элемент, следующий за n.

Аксиомы Пеано

P1	$1 \in \mathbb{N}$ (единица — натуральное число)
P2	$\forall n \in \mathbb{N} : \exists! n' \in \mathbb{N}$ (у каждого числа есть единственное следующее)
P3	$\forall n \in \mathbb{N}\ n' \neq 1$ (единица не следует ни за каким числом)
P4	$n' = m' \Rightarrow n = m$ (разные числа имеют разные следующие)
P5	**(Аксиома индукции)** Пусть $M \subset \mathbb{N}$. Если $1 \in M$ и $(k \in M \Rightarrow k' \in M)$, то $M = \mathbb{N}$.

Операции в $\mathbb{N}$

Поскольку у нас есть только понятие «следующего элемента» (n'), операции вводятся рекурсивно:

1. **Сложение (+):**
   - $n + 1 := n'$ (прибавить 1 — значит просто взять следующее число)
   - $n + m' := (n + m)'$ (чтобы прибавить «следующее за m», нужно сначала прибавить m, а потом взять «следующее» от результата)

Пример: 2 + 2
$2+2=2+1'$ (по определению числа 2) $2+1'=(2+1)'$ (по второму правилу сложения) $(2+1)'=(2')'=3'=4$

2. **Умножение ($\cdot$):**
   - $n \cdot 1 := n$
   - $n \cdot m' := n \cdot m + n$ (умножить на «следующее за m» — это m раз сложить n и добавить еще одно n)

Порядок на $\mathbb{N}$

Определение
Говорят, что $m < n$, если существует такое $k \in \mathbb{N}$, что $m + k = n$. Соответственно, $m \leq n$, если $m < n$ или $m = n$.

Отношение «$<$» на $\mathbb{N}$ обладает свойствами:
1. **Антирефлексивность:** $n < n$ — ложно.
2. **Транзитивность:** $a < b$ и $b < c \Rightarrow a < c$.
3. **Линейность:** Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ верно либо $m < n$, либо $n < m$, либо $m = n$.

Теорема о свойстве полной упорядоченности

Теорема
Любое непустое подмножество множества натуральных чисел $M \subset \mathbb{N}$ содержит наименьший элемент. То есть существует такой элемент $m_0 \in M$, что $\forall m \in M : m_0 \leq m$.

Доказательство. Докажем методом «от противного», используя аксиому индукции. Пусть M — непустое подмножество $\mathbb{N}$, в котором **нет** наименьшего элемента. Рассмотрим множество $S = \{n \in \mathbb{N} : n < m \textbf{ для всех } m \in M\}$.

1. $1 \in S$. Если бы $1 \in M$, то 1 был бы наименьшим элементом (так как в $\mathbb{N}$ нет чисел меньше 1), но мы предположили, что наименьшего в M нет.
2. Пусть $k \in S$. Тогда $k+1$ тоже должно быть в S. Если бы $k+1 \in M$, то $k+1$ был бы наименьшим элементом M (так как все числа, меньшие $k+1$, уже лежат в S и не принадлежат M). Значит, $k+1 \in S$.
3. По аксиоме индукции $S = \mathbb{N}$.

Но если $S = \mathbb{N}$, то M должно быть пустым (так как в S лежат только те числа, которых нет в M). Мы пришли к противоречию с тем, что $M \neq \emptyset$. Значит, в любом непустом $M \subset \mathbb{N}$ есть наименьший элемент. ■

Метод математической индукции

Метод математической индукции (ММИ) базируется на пятой аксиоме Пеано и является мощным инструментом для доказательства утверждений $P(n)$, сформулированных для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение

Суть метода заключается в проверке двух условий:

1. **Базис индукции:** Утверждение $P(1)$ истинно.
2. **Индукционный шаг:** Предположение, что если утверждение верно для некоторого произвольного k ($P(k)$ — истинно), то оно обязательно верно и для следующего за ним числа $k+1$ ($P(k+1)$ — истинно).

Если оба пункта выполнены, то согласно аксиоме индукции, утверждение $P(n)$ истинно для всех $n \in \mathbb{N}$.

Примеры применения

Пример 1: Сумма квадратов

Докажем, что $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

1. **Базис:** При $n = 1$: $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1$. (Верно)
2. **Шаг:** Пусть для $n = k$ верно: $S_k = \frac{k(k+1)(2n+1)}{6}$.

Докажем для $n = k + 1$:

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

Вынесем $(k+1)$ за скобку:

$$S_{k+1} = (k+1)\left(\frac{2k^2+k}{6} + (k+1)\right) = (k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$

Разложим квадратный трехчлен в скобках: $2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3)$. Итого: $S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}$. (Верно)

Пример 2: Неравенство Бернулли
Докажем, что для $x > -1$ и $n \in \mathbb{N}$: $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. **Базис:** При $n = 1$: $1 + x \geq 1 + x$. (Верно)
2. **Шаг:** Пусть верно для $n = k$: $(1+x)^k \geq 1 + kx$.

Умножим обе части на $(1+x)$ (оно положительно, так как $x > -1$):

$$(1+x)^{k+1} \geq (1+kx)(1+x) = 1 + x + kx + kx^2$$

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + kx^2$$

Так как $kx^2 \geq 0$, то:

$$1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x$$

Следовательно, $(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x$. (Верно)

Мощность множества

Определение
Говорят, что множества A и B имеют **одинаковую мощность** (равномощны, $A \approx B$), если между ними можно установить взаимно-однозначное соответствие (биекцию).

Это определение позволяет сравнивать множества, не пересчитывая их элементы (что невозможно для бесконечных множеств).

Счетные множества

Определение
Множество A называется **счетным**, если оно равномощно множеству натуральных чисел $\mathbb{N}$ ($A \approx \mathbb{N}$).

Иными словами, множество счетно, если его элементы можно занумеровать натуральными числами: $a_1, a_2, a_3, \ldots$

Свойства счетных множеств
1. Любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.
2. Объединение конечного или счетного числа счетных множеств счетно.
3. Множество целых чисел $\mathbb{Z}$ счетно (последовательность: $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$).

Теорема о равномощности $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}$

Эта теорема контринтуитивна, так как рациональных чисел «плотно» много на прямой, но по мощности их не больше, чем натуральных.

Теорема
Множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$ счетно.

Доказательство. Любое положительное рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, где $p, q \in \mathbb{N}$. Расположим их в виде бесконечной таблицы, где номер строки — это p, а номер столбца — это q:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$$

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \ldots$$

$$\frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{3}, \ldots$$

Будем пересчитывать элементы таблицы «диагоналями» (метод зигзага Кантора):
1. Сначала $\frac{1}{1}$ (сумма $p + q = 2$).
2. Затем $\frac{2}{1}, \frac{1}{2}$ (сумма $p + q = 3$).
3. Затем $\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}$ (сумма $p + q = 4$) и так далее.

В этом списке будем пропускать дроби, которые уже встречались в сокращенном виде (например, $\frac{2}{2}$ пропускаем, так как $\frac{1}{1}$ уже была). Таким образом, мы выстроим все положительные рациональные числа в один нумерованный список. Аналогично добавляются отрицательные и ноль. Значит, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$. ■

Булеан и теорема Кантора

Определение
Булеаном (или множеством всех подмножеств) множества X называется множество, элементами которого являются все возможные подмножества множества X. Обозначается: $P(X)$ или 2^X.

Для конечного множества из n элементов мощность булеана равна 2^n (отсюда и обозначение). Но что происходит с бесконечными множествами?

Теорема Кантора
Мощность любого множества X строго меньше мощности его булеана: $|X| < |P(X)|$

Доказательство. Чтобы доказать, что $|X| < |P(X)|$, нужно показать две вещи:
1. Существует инъекция из X в $P(X)$ (это очевидно: каждому $x \in X$ сопоставим синглтон $\{x\} \in P(X)$).
2. Не существует сюръекции из X в $P(X)$.

Докажем второе от противного. Пусть существует отображение $f : X \to P(X)$, которое является сюръекцией. Это значит, что любое подмножество $A \subset X$ является образом какого-то элемента x.

Рассмотрим специальное подмножество $B \subset X$, состоящее из элементов, которые **не содержатся** в своем образе:

$$B = \{x \in X : x \not\subset f(x)\}$$

Так как f — сюръекция, для этого множества B должен найтись прообраз $b \in X$, такой что $f(b) = B$. Разберем два возможных случая для элемента b:
1. Если $b \in B$, то по определению множества B имеем $b \not\subset f(b)$. Но $f(b) = B$, значит $b \not\subset B$. Противоречие.
2. Если $b \not\subset B$, то по определению множества B имеем $b \in f(b)$. Но $f(b) = B$, значит $b \in B$. Противоречие.

В обоих случаях мы пришли к противоречию. Следовательно, сюръекции не существует, и $|X| < |P(X)|$. ■

Упорядоченное поле

Определение
Множество F называется **упорядоченным полем**, если на нем заданы две бинарные операции (сложение и умножение) и отношение порядка ($<.=$), удовлетворяющие следующим группам аксиом:

I. Аксиомы поля (алгебраические)

1. **Сложение:** Коммутативность ($a + b = b + a$), ассоциативность, наличие нуля (0) и противоположного элемента ($-a$).
2. **Умножение:** Коммутативность, ассоциативность, наличие единицы (1) и обратного элемента (a^{-1} для $a \neq 0$).
3. **Дистрибутивность:** $a(b + c) = ab + ac$.

II. Аксиомы порядка

1. **Линейность:** Для любых a, b верно либо $a \leq b$, либо $b \leq a$.
2. **Антисимметричность:** ($a \leq b$ и $b \leq a$) $\Rightarrow a = b$.
3. **Транзитивность:** ($a \leq b$ и $b \leq c$) $\Rightarrow a \leq c$.

III. Связь операций и порядка

1. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ (монотонность сложения).
2. ($0 \leq a$ и $0 \leq b$) $\Rightarrow 0 \leq a \cdot b$ (сохранение знака при умножении).

Принцип полноты. Определение множества $\mathbb{R}$

Главное отличие $\mathbb{R}$ от $\mathbb{Q}$ заключается в **аксиоме непрерывности (полноты)**. Существует несколько эквивалентных формулировок, классической считается аксиома непрерывности Кантора или принцип существования верхней грани.

Аксиома непрерывности (Полноты)

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $B \subset \mathbb{R}$ — два непустых множества таких, что для любых $a \in A$ и $b \in B$ выполняется неравенство $a \leq b$. Тогда существует такое число $c \in \mathbb{R}$, что для всех $a \in A, b \in B$:

$$a \leq c \leq b$$

Определение
Множество вещественных чисел $\mathbb{R}$ — это полное упорядоченное поле, содержащее $\mathbb{Q}$ в качестве подполя.

Замечание
Число c из аксиомы полноты разделяет множества A и B. В рациональных числах это не всегда так: если взять $A = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ и $B = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$, то в $\mathbb{Q}$ не найдется числа c, которое бы их разделяло (так как $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

Грани числового множества

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — непустое подмножество вещественных чисел.

Определение
1. Число M называется **верхней гранью** множества X, если $\forall x \in X : x \leq M$. В этом случае множество называется **ограниченным сверху**.
2. Число m называется **нижней гранью** множества X, если $\forall x \in X : x \geq m$. В этом случае множество называется **ограниченным снизу**.

Если множество ограничено и сверху, и снизу, оно называется просто **ограниченным**.

Однако верхних граней может быть бесконечно много (если M — грань, то $M + 1$ тоже грань). Нам нужно выбрать самую «точную».

Определение
Точной верхней гранью (супремумом) множества X называется **наименьшая** из его верхних граней. Обозначение: $S = \sup X$.

Критерий супремума
Число S является $\sup X$ тогда и только тогда, когда выполняются два условия:
1. $\forall x \in X : x \leq S$ (это верхняя грань).
2. $\forall \varepsilon > 0 : \exists x_\varepsilon \in X : x_\varepsilon > S - \varepsilon$ (нельзя уменьшить грань даже на чуть-чуть, не потеряв элементы множества).

Определение
Точной нижней гранью (инфимумом) множества X называется **наибольшая** из его нижних граней. Обозначение: $s = \inf X$.

Теорема о принципе верхней грани

Теорема
Любое непустое подмножество вещественных чисел, ограниченное сверху, имеет точную верхнюю грань (супремум). (Аналогично: любое непустое подмножество, ограниченное снизу, имеет точную нижнюю грань).

Разница между max и sup
Если у множества есть максимум ($\max X$), то $\sup X = \max X$. Но у множества может не быть максимума, а супремум будет. Пример: для интервала $X = (0, 1)$ число 1 является $\sup X$, но $\max X$ не существует, так как само число 1 не принадлежит интервалу.

Ограниченность множества натуральных чисел

Теорема
Множество натуральных чисел $\mathbb{N}$ не ограничено сверху в $\mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $\mathbb{N}$ ограничено сверху. Тогда по **принципу верхней грани** у него существует точная верхняя грань в $\mathbb{R}$. Пусть $S = \sup \mathbb{N}$.

По определению супремума (критерий), для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой элемент множества, который больше $S - \varepsilon$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что:

$$n_0 > S - 1$$

Прибавим к обеим частям единицу:

$$n_0 + 1 > S$$

Но по аксиомам Пеано $n_0 + 1$ также является натуральным числом ($n_0 + 1 \in \mathbb{N}$). Мы получили, что в $\mathbb{N}$ есть элемент, который больше его точной верхней грани S. Это противоречие. Следовательно, $\mathbb{N}$ не ограничено сверху. ∎

Принцип Архимеда

Теорема
Для любого вещественного числа $x \in \mathbb{R}$ существует такое натуральное число $n \in \mathbb{N}$, что $n > x$.

Геометрическая интерпретация
Каким бы длинным ни был отрезок x и каким бы коротким ни был единичный шаг, откладывая шаги достаточное количество раз (n), мы рано или поздно выйдем за пределы x.

Доказательство. Эта теорема является прямой переформулировкой предыдущей теоремы об неограниченности $\mathbb{N}$. Если бы такого n не нашлось, то для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнялось бы $n \leq x$, что означало бы ограниченность $\mathbb{N}$ сверху числом x. А мы только что доказали, что это невозможно. ■

Важное следствие (Бесконечно малые)

Из принципа Архимеда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Это база для определения пределов, которую мы будем использовать постоянно. Мы всегда сможем найти «достаточно большой» номер n, чтобы дробь $\frac{1}{n}$ стала меньше любого наперед заданного крошечного числа.

Лемма о вложенных отрезках

Определение
Последовательность отрезков $[a_n, b_n]$ называется **вложенной**, если каждый последующий отрезок содержится в предыдущем:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Это эквивалентно условиям: $a_n \le a_{n+1}$ и $b_{n+1} \le b_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Принцип Кантора
Для любой вложенной последовательности сегментов (отрезков) существует хотя бы одна точка c, принадлежащая им всем:

$$\exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, c \in [a_n, b_n]$$

Доказательство. Рассмотрим множества левых концов $A = \{a_n\}$ и правых концов $B = \{b_n\}$. Так как отрезки вложены, любой левый конец a_k не превосходит любого правого конца b_m. Действительно, если $k \le m$, то $a_k \le a_m \le b_m$. Если $k > m$, то $a_k \le b_k \le b_m$. Согласно **аксиоме полноты (непрерывности)**, существует число c, разделяющее эти множества:

$$a_n \le c \le b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Это и означает, что c принадлежит каждому отрезку $[a_n, b_n]$. ∎

Случай стягивающихся отрезков
Если к условию вложенности добавить требование, что длина отрезков стремится к нулю ($b_n - a_n \to 0$ при $n \to \infty$), то точка c будет **единственной**.

Конечное покрытие (Принцип Бореля — Лебега)

Определение
Система открытых интервалов $\{(\alpha_i, \beta_i)\}$ называется **покрытием** множества X, если каждая точка $x \in X$ принадлежит хотя бы одному интервалу системы.

Лемма Гейне — Бореля
Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ системой открытых интервалов можно извлечь **конечное** подпокрытие.

Доказательство. Докажем методом «деления пополам». Предположим, что для отрезка $[a, b]$ нельзя выбрать конечное подпокрытие.

1. Разделим $[a, b]$ пополам. Хотя бы для одной из половин (обозначим её I_1) тоже нельзя выбрать конечное подпокрытие.
2. Продолжая этот процесс, получим систему вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset$ ..., длина которых стремится к нулю, и для каждого из которых конечное подпокрытие невозможно.
3. По лемме Кантора существует общая точка c, принадлежащая всем I_n.
4. Так как $c \in [a, b]$, она покрыта каким-то интервалом (α, β) из исходной системы.
5. Но при достаточно большом n отрезок I_n полностью попадет внутрь этого интервала (α, β) (так как его длина стремится к 0).

Значит, I_n покрывается всего **одним** интервалом. Противоречие. ∎

Предельная точка (Принцип Больцано — Вейерштрасса)

Определение
Точка a называется **предельной точкой** множества X, если в любой её ε-окрестности содержится бесконечно много точек этого множества.

Теорема
Любое ограниченное бесконечное подмножество $X \subset \mathbb{R}$ имеет хотя бы одну предельную точку.

Доказательство.
1. Раз множество X ограничено, оно лежит в некотором отрезке $[a, b]$.
2. Разделим $[a, b]$ пополам. Хотя бы в одной из половин содержится бесконечно много точек множества X. Обозначим эту половину I_1.
3. Повторяя процесс, строим систему вложенных отрезков I_n, каждый из которых содержит бесконечно много точек X.
4. По лемме Кантора существует точка c, принадлежащая всем I_n.
5. Любая окрестность точки c при достаточно большом n будет содержать отрезок I_n. А раз в I_n бесконечно много точек X, то и в окрестности c их бесконечно много.

Значит, c — предельная точка. ∎

Теорема Кантора (Диагональный метод)

Теорема
Множество вещественных чисел на отрезке $[0, 1]$ несчетно.

Доказательство. Докажем от противного. Допустим, что все числа из $[0, 1]$ можно пересчитать (занумеровать): $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Запишем каждое число в виде бесконечной десятичной дроби:

$$x_1 = 0, d_{11}d_{12}d_{13}\ldots$$

$$x_2 = 0, d_{21}d_{22}d_{23}\ldots$$

$$x_3 = 0, d_{31}d_{32}d_{33}\ldots$$

где d_{ij} — j-тая цифра i-того числа.

Сконструируем новое число $c = 0, c_1c_2c_3\ldots$ по следующему правилу:

- Если $d_{nn} = 1$, то выберем $c_n = 2$.
- Если $d_{nn}n = 1$, то выберем $c_n = 1$.

Теперь сравним число c с каждым числом из нашего списка:
- c отличается от x_1 в первой цифре ($c_1n = d_{11}$).
- c отличается от x_2 во второй цифре ($c_2n = d_{22}$).
- dots
- c отличается от x_n в n-той цифре.

Значит, числа c нет в нашем списке. Но $c \in [0, 1]$. Противоречие. Следовательно, отрезок несчетен. ■

Важное замечание про 0.999...
Чтобы доказательство было строгим, нужно исключить числа с двумя представлениями (типа 0.5000... = 0.4999...). В диагональном методе это решается выбором цифр c_n, отличных от 0 и 9. Именно поэтому в примере выше мы использовали только 1 и 2.

Предел последовательности

Основные определения

Определение
Числовой последовательностью называется функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, областью определения которой является множество натуральных чисел. Значение $a_n = f(n)$ называется n-ым членом последовательности. Обозначение: (a_n) или $\{a_n\}_{\{n=1\}}^{\infty}$.

Теперь самое главное определение в твоей жизни на ближайшие пару лет:

Определение
Число A называется **пределом последовательности** (a_n), если для любого наперед заданного положительного числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε), что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство:

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

Записывается как: $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} : \ \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

Геометрический смысл
Вне любой ε-окрестности точки A лежит лишь **конечное** число членов последовательности, а внутри неё — почти все (все, начиная с некоторого номера).

Теорема о единственности предела

Теорема
Если последовательность имеет предел, то он единственен.

Доказательство. Допустим обратное: последовательность (a_n) имеет два различных предела A и B $(A \neq B)$. Пусть для определенности $B > A$. Возьмем такое ε, чтобы окрестности этих точек не пересекались. Например, $\varepsilon = \frac{B-A}{3}$.

1. Так как $a_n \to A$, то $\exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.
2. Так как $a_n \to B$, то $\exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow a_n \in (B - \varepsilon, B + \varepsilon)$.

Возьмем $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ член последовательности a_n должен лежать в обеих окрестностях сразу. Но они не пересекаются! Мы получили противоречие. Значит, $A = B$. ■

Предел ограниченной последовательности

Теорема
Любая сходящаяся последовательность является ограниченной.

Доказательство. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Возьмем $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется:

$$|a_n - A| < 1 \Rightarrow A - 1 < a_n < A + 1$$

Это значит, что все члены последовательности, начиная с $N + 1$, ограничены. Осталось конечное число членов: $a_1, a_2, ..., a_N$. Если мы возьмем $M = \max(|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |A - 1|, |A + 1|)$, то для любого n будет верно:

$$|a_n| \le M$$

Следовательно, последовательность ограничена. ■

Важно!
Обратное неверно! Ограниченная последовательность не обязательно сходится. Классический пример: $a_n = (-1)^n$. Она зажата между -1 и 1, но предела не имеет, так как «скачет» между ними.

Монотонные последовательности и теорема Вейерштрасса

Определение
Последовательность (a_n) называется:
- **Возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$.
- **Строго возрастающей**, если $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n < a_{n+1}$.

(Аналогично вводятся определения для убывающих последовательностей).

Теорема Вейерштрасса
Если последовательность монотонна и ограничена, то она имеет предел. Конкретнее:
1. Если (a_n) возрастает и ограничена сверху, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n\}$.
2. Если (a_n) убывает и ограничена снизу, то $\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n\}$.

Доказательство. Пусть (a_n) возрастает и ограничена сверху. Согласно **принципу верхней грани**, у множества её значений существует точная верхняя грань. Пусть $A = \sup\{a_n\}$.

Докажем по определению, что A и есть предел:
1. $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq A$ (так как A — верхняя грань).
2. По критерию супремума, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : a_N > A - \varepsilon$.
3. Так как последовательность возрастает, то $\forall n > N \Rightarrow a_n \geq a_N$.

Следовательно, $\forall n > N \Rightarrow A - \varepsilon < a_n \leq A < A + \varepsilon$, что эквивалентно $|a_n - A| < \varepsilon$. ∎

Число e

Рассмотрим последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Теорема
Последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ имеет конечный предел.

Доказательство. **1. Разложение по биному Ньютона.** Распишем общий член последовательности x_n:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k$$

Распишем несколько первых слагаемых, используя формулу для биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$:

$$x_n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

Упростим каждое слагаемое, «занеся» $\frac{1}{n^k}$ внутрь скобок:

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

2. Доказательство монотонности. Сравним x_n и x_{n+1}.

- В выражении для x_{n+1} будет на одно слагаемое больше (оно положительное).
- Каждое слагаемое вида $\left(1 - \frac{k}{n}\right)$ в x_{n+1} превратится в $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)$.

Так как $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, то $\left(1 - \frac{k}{n+1}\right) > \left(1 - \frac{k}{n}\right)$. Значит, каждое слагаемое в x_{n+1} больше соответствующего слагаемого в x_n. **Вывод:** $x_{n+1} > x_n$, последовательность строго возрастает.

3. Доказательство ограниченности. Заметим, что каждая скобка вида $(1 - \frac{k}{n})$ в разложении меньше единицы. Тогда:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$$

Вспомним, что для $k \geq 2$ выполняется неравенство $k! \geq 2^{k-1}$. Следовательно, $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Воспользуемся этим для оценки суммы:

$$x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$$

В правой части, начиная со второго слагаемого, мы видим сумму геометрической прогрессии:

$$x_n < 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) < 1 + 2 = 3$$

Вывод: x_n ограничена сверху числом 3 (на самом деле она никогда не превышает 2.72).

Заключение: Так как последовательность x_n монотонно возрастает и ограничена сверху, то по теореме Вейерштрасса она имеет конечный предел. Этот предел и называется числом e. ■

Интересный факт

Из этого доказательства сразу видно, что $2 < e \leq 3$. База $x_1 = 2$, и так как она растет, e точно больше 2. А из оценки сверху мы получили, что e не больше 3.

Определение

Предел последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ при $n \to \infty$ называется **числом Эйлера** и обозначается e.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2.71828...$$

Теорема об отделимости от нуля

Теорема

Если $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ и $A \neq 0$, то найдутся число $c > 0$ и номер N, такие что для всех $n > N$ выполняется:

$$|a_n| > c$$

Доказательство. Возьмем $\varepsilon = \frac{|A|}{2}$. Так как $A \neq 0$, то $\varepsilon > 0$. По определению предела, $\exists N : \forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \frac{|A|}{2}$. Используя неравенство треугольника $|A| - |a_n| \leq |a_n - A|$, получаем:

$$|A| - |a_n| < \frac{|A|}{2} \quad \Rightarrow \quad |a_n| > \frac{|A|}{2}$$

Положив $c = \frac{|A|}{2}$, получаем требуемое. ■

Арифметические свойства предела

Теорема
Пусть последовательности (a_n) и (b_n) сходятся, и $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Тогда:
1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = A \pm B$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$
3. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}$, при условии $B \neq 0$ и $b_n \neq 0$.

Доказательство. (Для суммы) Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Нам нужно найти такой номер N, что $|(a_n + b_n) - (A + B)| < \varepsilon$. Используем неравенство треугольника:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B|$$

Так как $a_n \to A$, то для $\frac{\varepsilon}{2} \exists N_1 : \forall n > N_1 \Rightarrow |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как $b_n \to B$, то для $\frac{\varepsilon}{2} \exists N_2 : \forall n > N_2 \Rightarrow |b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$. Выбрав $N = \max(N_1, N_2)$, получим:

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

Переход к пределу в неравенствах

Теорема
Пусть $\lim a_n = A$ и $\lim b_n = B$. Если начиная с некоторого номера N выполняется $a_n \leq b_n$, то и $A \leq B$.

Осторожно!
Если $a_n < b_n$, это **не гарантирует** $A < B$. Пример: $a_n = 0$, $b_n = \frac{1}{n}$. Всегда $0 < \frac{1}{n}$, но их пределы равны: $0 = 0$.

Теорема об отделимости от границ
Если $a_n \leq B$ для всех n, то $\lim a_n \leq B$. Аналогично, если $a_n \geq A$, то $\lim a_n \geq A$.

Теорема о сжатой переменной

Теорема о двух милиционерах
Пусть даны три последовательности $(a_n), (b_n), (c_n)$, такие что:
1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ для всех $n > N_0$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$.

Тогда последовательность (b_n) также сходится, и $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $a_n \to A$, то для всех $n > N_1$ имеем $A - \varepsilon < a_n$. Так как $c_n \to A$, то для всех $n > N_2$ имеем $c_n < A + \varepsilon$. Пусть $N = \max(N_0, N_1, N_2)$. Тогда для всех $n > N$ выполняется цепочка:

$$A - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A + \varepsilon$$

Следовательно, $A - \varepsilon < b_n < A + \varepsilon$, что означает $|b_n - A| < \varepsilon$. ■

Подпоследовательности

Определение
Пусть дана последовательность (a_n). Если мы выберем бесконечную возрастающую последовательность натуральных индексов $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, то последовательность $\left(a_{n_k}\right)$ называется **подпоследовательностью** последовательности (a_n).

Теорема
Если последовательность (a_n) сходится к A, то любая её подпоследовательность также сходится к A.

Доказательство. Так как n_k — возрастающая последовательность натуральных чисел, то $n_k \geq k$. Поскольку $a_n \to A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что при $n > N$ выполняется $|a_n - A| < \varepsilon$. Тогда для любого $k > N$ индекс $n_k \geq k > N$, а значит $|a_{n_k} - A| < \varepsilon$. Следовательно, $a_{n_k} \to A$. ■

Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема
Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство.
1. Раз последовательность (a_n) ограничена, все её члены лежат в некотором отрезке $[M_1, M_2]$.
2. Разделим отрезок пополам. В одной из половин содержится бесконечно много членов последовательности. Выберем её и назовем $[a_1, b_1]$.
3. Повторяем процесс: делим $[a_k, b_k]$ пополам и выбираем ту часть, где бесконечно много членов.
4. Получаем систему вложенных отрезков, длины которых стремятся к 0. По лемме Кантора существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам.
5. Выбирая на каждом шаге по одному члену последовательности a_{n_k} из соответствующего отрезка, мы получим подпоследовательность, которая стремится к c.

■

Понятие бесконечных пределов

Определение
Говорят, что $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если для любого $E > 0$ (сколь угодно большого) найдется номер N, такой что для всех $n > N$:

$$a_n > E$$

Важно
Если последовательность имеет бесконечный предел, она считается **расходящейся** (в строгом смысле слова «сходимость» зарезервирована для конечных чисел).

Теорема о частичных пределах

Теорема
Для любой ограниченной последовательности (a_n):
1. Множество её частичных пределов E непусто.
2. Множество E ограничено.
3. Существуют $\max E$ и $m \in E$.

Доказательство. **1. Непустота.** Так как последовательность (a_n) ограничена, то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(a_{n_k}\right)$. Предел этой подпоследовательности по определению является частичным пределом. Значит, $E \neq \emptyset$.

2. Ограниченность. Так как (a_n) ограничена, то существует такое M, что $\forall n :$ $|a_n| \leq M$. Любой частичный предел A как предел подпоследовательности тоже будет удовлетворять неравенству $|A| \leq M$ (по теореме о переходе к пределу в неравенствах). Значит, множество E ограничено.

3. Наличие максимума (для lim sup). Пусть $S = \sup E$. Докажем, что $S \in E$ (то есть S сам является частичным пределом).

Для этого нам нужно построить подпоследовательность, сходящуюся к S:
- Для $\varepsilon = 1$ в окрестности $(S - 1, S + 1)$ лежит хотя бы один частичный предел, а значит, и бесконечно много членов исходной последовательности. Возьмем один из них a_{n_1}.
- Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ в окрестности $\left(S - \frac{1}{2}, S + \frac{1}{2}\right)$ аналогично выберем a_{n_2} с индексом $n_2 > n_1$.
- Продолжая для $\varepsilon = \frac{1}{k}$, мы получим подпоследовательность $\left(a_{n_k}\right)$, такую что $|a_{n_k} - S| < \frac{1}{k}$.

По теореме о зажатой переменной $a_{n_k} \to S$. Значит $S \in E$. Следовательно, $\sup E = \max E$. (Для $\inf E = \min E$ доказывается аналогично). ■

Важное следствие
Число A является пределом последовательности $(A = \lim a_n)$ тогда и только тогда, когда:

$$\liminf_{\{n\to\infty\}} a_n = \limsup_{\{n\to\infty\}} a_n = A$$

То есть, когда все «пути», по которым можно идти внутри последовательности, ведут в одну и ту же точку.

Сравнение скорости роста последовательностей

Пусть $n \to \infty$. Введем иерархию роста (каждая следующая функция растет «быстрее» предыдущей):

$$\ln n \quad \ll \quad n^\alpha (\alpha > 0) \quad \ll \quad a^n (a > 1) \quad \ll \quad n! \quad \ll \quad n^n$$

Что это значит на практике?
Если в дроби в числителе стоит «слабая» функция, а в знаменателе «сильная», то предел равен 0. Например:

1. $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0 \quad (a > 1)$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

Пример доказательства (экспонента vs факториал)
$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ для любого $a > 0$.

Доказательство. Пусть $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Рассмотрим отношение соседних членов:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

Начиная с некоторого номера $n > 2a$, это отношение будет меньше $\frac{1}{2}$. Значит, x_n убывает и ограничена снизу нулем. По теореме Вейерштрасса предел существует. Пусть $\lim x_n = A$. Перейдем к пределу в равенстве $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{a}{n+1}$:

$$A = A \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

■

Подпоследовательности

Определение
Пусть дана последовательность (a_n). Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел:

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots, \quad n_k \in \mathbb{N}$$

Тогда последовательность $\left(a_{n_k}\right)$, составленная из членов исходной последовательности с этими индексами, называется **подпоследовательностью** (a_n).

Интуиция
Ты просто «вычеркиваешь» некоторые члены из исходного ряда, но оставшиеся берешь в том же порядке, в котором они шли изначально. Главное — их должно остаться бесконечно много.

Теорема о подпоследовательности сходящейся последовательности

Теорема
Если последовательность (a_n) сходится к пределу A (конечному или бесконечному), то любая её подпоследовательность $\left(a_{n_k}\right)$ также сходится к A.

Доказательство. Рассмотрим случай конечного предела A.

1. Так как $\lim_{n\to\infty} a_n = A$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой что:

$$\forall n > N \Rightarrow |a_n - A| < \varepsilon$$

2. Заметим важное свойство индексов: так как n_k — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то $n_k \geq k$ для любого k.
3. Тогда, если мы выберем $k > N$, то автоматически $n_k \geq k > N$.
4. Следовательно, для всех $k > N$ выполняется:

$$|a_{n_k} - A| < \varepsilon$$

А это по определению означает, что $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = A$. ∎

Практическое применение
Эту теорему чаще всего используют, чтобы доказать **отсутствие** предела. Если у последовательности есть две подпоследовательности, стремящиеся к **разным** пределам, то сама последовательность предела не имеет.

Пример: $a_n = (-1)^n$. Подпоследовательность $a_{2k} = 1 \to 1$. Подпоследовательность $a_{2k-1} = -1 \to -1$. Пределы разные $\Rightarrow \lim a_n$ не существует.

Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема
Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство. Пусть (a_n) ограничена, то есть все её члены лежат на некотором отрезке $[a, b]$. Применим метод «деления пополам»:

1. Разделим $[a, b]$ пополам. Хотя бы в одной из половин (обозначим её I_1) содержится бесконечное число членов последовательности. Выберем любой $a_{n_1} \in I_1$.
2. Разделим I_1 пополам. Снова выберем ту половину (I_2), где бесконечно много членов. Выберем $a_{n_2} \in I_2$ так, чтобы $n_2 > n_1$.
3. Продолжая процесс, мы получим систему вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$, длины которых $d_k = \frac{b-a}{2^k} \to 0$.
4. По лемме Кантора существует единственная точка c, общая для всех отрезков.
5. Так как $|a_{n_k} - c| \leq d_k$, а $d_k \to 0$, то по теореме о зажатой переменной $a_{n_k} \to c$.

Мы построили сходящуюся подпоследовательность. ■

Понятия бесконечных пределов

Введем определения для случаев, когда последовательность «уходит в бесконечность»:

Определение

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, если $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow a_n > E$.
2. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, если $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow a_n < -E$.
3. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, если $\forall E > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n > N \Rightarrow |a_n| > E$.

Важно

Если последовательность имеет бесконечный предел, она называется **расходящейся** к бесконечности.

Частичные пределы. Верхний и нижний пределы

Определение

Число A (или символ $\pm\infty$) называется **частичным пределом** последовательности (a_n), если существует подпоследовательность $\left(a_{n_k}\right)$, сходящаяся к A.

О структуре множества частичных пределов

Для любой последовательности множество её частичных пределов (обозначим E) непусто (если допускать бесконечные пределы). В этом множестве всегда есть наибольший и наименьший элементы.

Определение

- **Верхний предел** ($\limsup a_n$ или $\overline{\lim}\, a_n$) — это наибольший из частичных пределов.
- **Нижний предел** ($\liminf a_n$ или $\underline{\lim}\, a_n$) — это наименьший из частичных пределов.

Критерий существования предела
Последовательность имеет предел (конечный или бесконечный) тогда и только тогда, когда её верхний и нижний пределы совпадают:

$$\liminf_{\{n\to\infty\}} a_n = \limsup_{\{n\to\infty\}} a_n = \lim_{\{n\to\infty\}} a_n$$

Фундаментальные последовательности

Определение
Последовательность (a_n) называется **фундаментальной** (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для любых индексов $n, m > N$ выполняется неравенство:

$$|a_n - a_m| < \varepsilon$$

В чем фишка?
В определении обычного предела нам нужно знать число A. В определении фундаментальности нам нужно знать только сами члены последовательности. Если они «сгущаются» друг к другу на бесконечности, значит, они фундаментальны.

Критерий Коши

Критерий Коши
Для того чтобы последовательность (a_n) имела конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Доказательство. **1. Необходимость (⇒):** Пусть $\lim a_n = A$. Тогда для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует номер N, такой что при $n, m > N$:

$$|a_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

По неравенству треугольника:

$$|a_n - a_m| = |(a_n - A) - (a_m - A)| \le |a_n - A| + |a_m - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Следовательно, последовательность фундаментальна.

2. Достаточность (⇐): Пусть (a_n) фундаментальна.

- Сначала докажем, что она **ограничена**. Возьмем $\varepsilon = 1$, тогда $\forall n > N :$ $|a_n - a_{N+1}| < 1$. Все члены после N зажаты в окрестности a_{N+1}, значит, вся последовательность ограничена.
- По теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $a_{n_k} \to A$.
- Докажем, что и вся последовательность стремится к A.

$$|a_n - A| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - A|$$

Первое слагаемое можно сделать меньше $\frac{\varepsilon}{2}$ из-за фундаментальности (так как n и n_k велики), второе — из-за сходимости подпоследовательности. Значит, $a_n \to A$.

■

Примеры применения критерия Коши

Расходимость гармонической последовательности
Последовательность частичных сумм $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ расходится.

Доказательство. Воспользуемся отрицанием критерия Коши. Нам нужно показать, что:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall N, \exists n, m > N \Rightarrow |S_m - S_n| \ge \varepsilon$$

Пусть $m = 2n$. Рассмотрим разность:

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}$$

В этой сумме n слагаемых, и каждое из них не меньше самого маленького ($\frac{1}{2n}$):

$$|S_{2n} - S_n| \ge n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Мы нашли такое $\varepsilon = \frac{1}{2}$, что какую бы далекую часть ряда мы ни взяли, мы всегда можем найти кусок, сумма которого больше $\frac{1}{2}$. Значит, последовательность не фундаментальна, а следовательно — расходится. ■

Предел и непрерывность функций

Топология вещественной прямой

Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — некоторое числовое множество.

Определение

1. **Внутренняя точка:** Точка $x \in X$ называется внутренней, если она входит в X вместе с некоторой своей ε-окрестностью: $\exists \varepsilon > 0 : (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset X$.
2. **Предельная точка:** Точка a (не обязательно из X) называется предельной для X, если в любой её ε-окрестности содержится хотя бы одна точка из X, отличная от a. (Эквивалентно: бесконечно много точек из X).
3. **Изолированная точка:** Точка $x \in X$, которая не является предельной.
4. **Граничная точка:** Точка, в любой окрестности которой есть как точки из X, так и точки, не принадлежащие X.

Определение

- Множество называется **открытым**, если все его точки — внутренние.
- Множество называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры

- Интервал $(0, 1)$ — открытое множество.
- Отрезок $[0, 1]$ — замкнутое множество (содержит свои границы 0 и 1).
- Полуинтервал $[0, 1)$ — ни то, ни другое.

Предел функции по Гейне (на языке последовательностей)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение
Число A называется **предепом функции $f(x)$ в точке a**, если для любой последовательности (x_n), такой что:
1. $x_n \to a$ при $n \to \infty$;
2. $x_n \neq a$ (члены последовательности лежат в проколотой окрестности);

соответствующая последовательность значений функции сходится к A:

$$f(x_n) \to A$$

Записывается: $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Предел функции по Гейне (на языке последовательностей)

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение
Число A называется **пределом функции $f(x)$ в точке a**, если для любой последовательности (x_n), такой что:
1. $x_n \to a$ при $n \to \infty$;
2. $x_n \neq a$ (члены последовательности лежат в проколотой окрестности);

соответствующая последовательность значений функции сходится к A:

$$f(x_n) \to A$$

Записывается: $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

Свойства предела функции

Теорема
Если пределы $\lim_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim_{x\to a} g(x) = B$ существуют, то:

1. **Единственность:** Предел функции в точке единственен.
2. **Арифметика:** $\lim(f \pm g) = A \pm B$, $\lim(f \cdot g) = A \cdot B$, $\lim\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{A}{B}$ (при $B \neq 0$).
3. **Переход к пределу в неравенствах:** Если $f(x) \leq g(x)$ в окрестности a, то $A \leq B$.
4. **Теорема о зажатой функции:** Если $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ и $f, g \to A$, то $h(x) \to A$.

Предел сложной функции

Теорема
Пусть $\lim_{x\to a} g(x) = b$ и $\lim_{y\to b} f(y) = A$. Если в некоторой проколотой окрестности точки a выполняется $g(x) \neq b$, то:

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = A$$

Определение предела по Коши (на языке $\varepsilon - \delta$)

Определение
Число A называется **предел‍ом функции $f(x)$ в точке a**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(A)$$

Что такое $\dot{U}_\delta(a)$?
Это **проколотая** дельта-окрестность точки a. Условие $0 < |x - a|$ как раз исключает саму точку a. Нам не важно, что происходит в самой точке (функция там может быть даже не определена), нам важно, что происходит **рядом**.

Предел в бесконечности

Если точка a или предел A являются бесконечными, определение слегка меняется:

- $\lim_{x \to \infty} f(x) = A$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x : |x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$: $\forall E > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > E$.

Теорема о равносильности определений

Теорема
Определения предела функции по Гейне и по Коши эквивалентны.

Доказательство. **1. Коши $\Rightarrow$ Гейне:** Пусть предел по Коши существует. Возьмем любую $x_n \to a$. По определению Коши, для ε есть δ, в которую рано или поздно попадут все x_n (начиная с номера N). Значит, $f(x_n)$ попадет в ε-окрестность A. Сходимость есть.

2. Гейне $\Rightarrow$ Коши (от противного): Предположим, что определение Коши не выполняется. Тогда существует такое «плохое» ε, что для любого $\delta_n = \frac{1}{n}$ найдется точка x_n, которая лежит в δ_n-окрестности a, но $f(x_n)$ лежит вне ε-окрестности A. Мы построили последовательность $x_n \to a$, для которой $f(x_n) \nrightarrow A$. Это противоречит определению Гейне. ■

Свойства предела функции (локальные)

О локальной ограниченности
Если функция имеет конечный предел в точке a, то она ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Об отделимости от нуля
Если $\lim_{x \to a} f(x) = A$ и $A \neq 0$, то существует такая окрестность точки a, в которой значения функции имеют тот же знак, что и A, и отделены от нуля:

$$\exists \delta > 0, \exists c > 0 : \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| > c$$

Замечательные пределы

Первый замечательный

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Раскрывает неопределенность $\frac{0}{0}$ для тригонометрии.

Второй замечательный

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Или в форме $x \to 0$: $\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Односторонние пределы

Определение

1. **Предел слева:** Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое что для всех $x \in (a - \delta, a)$ выполняется $|f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначение: $\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a - 0) = A$.
2. **Предел справа:** Аналогично, но для $x \in (a, a + \delta)$. Обозначение: $\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a + 0) = A$.

Критерий существования предела

Теорема

Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, когда существуют оба односторонних предела и они равны между собой:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad f(a - 0) = f(a + 0) = A$$

Зачем это нужно?

Если пределы слева и справа существуют, но не равны, в этой точке у функции происходит «скачок» (разрыв первого рода).

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение
Функция $\alpha(x)$ называется **бесконечно малой** (б.м.) при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Определение
Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** (б.б.) при $x \to a$, если $\lim_{x\to a}|f(x)| = +\infty$.

Свойства бесконечно малых

1. Сумма конечного числа б.м. функций есть б.м. функция.
2. Произведение б.м. функции на ограниченную функцию есть б.м. функция.
3. Произведение двух б.м. функций есть б.м. функция.

Лемма о связи б.б. и б.м.

Теорема
Если $f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$, то $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция в этой точке (и наоборот, если б.м. функция не обращается в ноль в окрестности a).

Представление функции через бесконечно малую

Теорема
Число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда функцию можно представить в виде:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Связь бесконечно больших и бесконечно малых функций

Лемма

1. Если функция $f(x)$ является бесконечно большой при $x \to a$, то функция $\frac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.
2. Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$ и $\alpha(x) \neq 0$ в некоторой проколотой окрестности точки a, то функция $\frac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to a$.

Доказательство. Докажем первый пункт. Пусть $f(x)$ — б.б. при $x \to a$. По определению, для любого (сколь угодно большого) числа $E > 0$ существует $\delta > 0$, такое что:

$$\forall x \in \dot{U}_\delta(a) \Rightarrow |f(x)| > E$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $E = \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда найдется такое δ, что:

$$|f(x)| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{|f(x)|} < \varepsilon$$

Это в точности означает, что $\frac{1}{f(x)}$ — бесконечно малая функция. Второй пункт доказывается аналогично переходом от ε к $E = \frac{1}{\varepsilon}$. ■

Критерий существования конечного предела в терминах б.м.

Теорема
Число A является пределом функции $f(x)$ в точке a тогда и только тогда, когда функцию в окрестности точки a можно представить в виде:

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to a$.

Доказательство. **Необходимость (⇒):** Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$. Положим $\alpha(x) = f(x) - A$. Тогда $\lim_{x\to a} \alpha(x) = \lim_{x\to a}(f(x) - A) = A - A = 0$. Значит, $\alpha(x)$ — б.м. по определению, и $f(x) = A + \alpha(x)$.

Достаточность (⇐): Пусть $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$. По свойствам пределов (предел константы равен константе, предел суммы равен сумме пределов):

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(A + \alpha(x)) = \lim_{x\to a} A + \lim_{x\to a} \alpha(x) = A + 0 = A$$

Значит, предел функции равен A. ■

💡 **Почему это важно?**
Это представление — первый шаг к понятию **дифференцируемости**. Позже мы увидим, что если приращение функции можно представить как $\Delta f = L \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, то функция дифференцируема. Мы заменяем сложную функцию на простую линейную часть плюс «малый мусор».

Непрерывность функции в точке

Определение
Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке a**, если выполнены следующие три условия:
1. Функция определена в точке a (существует $f(a)$).
2. Существует конечный предел $\lim_{x\to a} f(x)$.
3. Этот предел равен значению функции в точке: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Теорема о равносильности трех формулировок

Для функции $f(x)$, определенной в окрестности точки a, следующие три определения непрерывности эквивалентны:

1. На языке пределов

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. На языке «эпсилон-дельта» (по Коши)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; \forall x \in U_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(Заметим, что здесь окрестность НЕ проколотая, так как при $x = a$ неравенство $0 < \varepsilon$ верно автоматически).

3. На языке приращений

Пусть $\Delta x = x - a$ — приращение аргумента, а $\Delta f = f(a + \Delta x) - f(a)$ — приращение функции. Тогда:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$$

Доказательство. **1 <=> 2:** Это прямое следствие эквивалентности определений предела по Коши и Гейне, с учетом того, что предел равен $f(a)$. Единственное отличие от стандартного определения предела — мы включаем саму точку a в рассмотрение (поэтому $|x - a| < \delta$ вместо $0 < |x - a| < \delta$).

1 <=> 3: Запишем $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ в другом виде. Пусть $x = a + \Delta x$. Тогда условие $x \to a$ эквивалентно $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(a + \Delta x) = f(a)$$

Перенесем $f(a)$ в левую часть под знак предела:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(a + \Delta x) - f(a)) = 0$$

Что по определению приращения есть $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = 0$. ■

Локальные свойства непрерывных функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке a.

Арифметические свойства

Следующие функции также будут непрерывны в точке a:

1. $f(x) \pm g(x)$ (Сумма и разность).
2. $f(x) \cdot g(x)$ (Произведение).
3. $\frac{f(x)}{g(x)}$, если $g(a) \neq 0$ (Частное).

Доказательство. Так как функции непрерывны, то $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ и $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$. По арифметическим свойствам пределов:

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x) = f(a) + g(a)$$

Что и означает непрерывность суммы в точке a. Для остальных операций доказательство аналогично. ∎

Локальная ограниченность

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Сохранение знака

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то существует такая окрестность $U_\delta(a)$, в которой для всех x знак функции совпадает со знаком $f(a)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) > 0$. Возьмем в определении непрерывности по Коши $\varepsilon = \frac{f(a)}{2} > 0$. Тогда существует $\delta > 0$, такое что для всех $x \in U_\delta(a)$:

$$|f(x) - f(a)| < \frac{f(a)}{2} \quad \Rightarrow \quad f(a) - \frac{f(a)}{2} < f(x) < f(a) + \frac{f(a)}{2}$$

Отсюда $f(x) > \frac{f(a)}{2} > 0$, то есть знак функции положителен во всей окрестности. ∎

Непрерывность сложной функции

Если функция $g(x)$ непрерывна в точке a, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $b = g(a)$, то сложная функция $h(x) = f(g(x))$ непрерывна в точке a.

Глобальные свойства непрерывных функций

Все следующие теоремы рассматривают функцию $f(x)$, которая непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$. В матане это записывается как $f \in C[a, b]$.

Теоремы Вейерштрасса

Первая теорема Вейерштрасса

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $f(x)$ не ограничена сверху. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in [a, b]$, что $f(x_n) > n$. Мы получили последовательность (x_n). Так как она лежит в отрезке, то по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $x_{n_k} \to c$. Так как отрезок замкнут, то $c \in [a, b]$. В силу непрерывности $f\left(x_{n_k}\right) \to f(c)$. Но по нашему построению $f\left(x_{n_k}\right) > n_k \to \infty$. Противоречие: предел не может быть одновременно числом $f(c)$ и бесконечностью. ■

Вторая теорема Вейерштрасса

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своих точных верхней и нижней граней (своего максимума и минимума).

Суть

Это значит, что существуют такие точки $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$, что:

$$f(x_{\min}) = \inf_{\{x \in [a,b]\}} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_{\max}) = \sup_{\{x \in [a,b]\}} f(x)$$

Теоремы Больцано — Коши

Первая теорема Больцано — Коши

Если функция непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков (т.е. $f(a) \cdot f(b) < 0$), то внутри отрезка найдется хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, в которой $f(c) = 0$.

Доказательство. (Метод деления отрезка пополам).

1. Делим $[a, b]$ пополам точкой x_0. Если $f(x_0) = 0$, точка найдена.
2. Если нет, выбираем ту половину, на концах которой знаки функции разные.

3. Повторяя процесс, строим систему вложенных отрезков, стремящихся к точке c. По непрерывности $f(c)$ должна быть одновременно ≤ 0 и ≥ 0 (как предел левых и правых концов). Значит, $f(c) = 0$.

■

Вторая теорема Больцано — Коши (о промежуточных значениях)
Если функция непрерывна на $[a, b]$, то она принимает любое промежуточное значение между $f(a)$ и $f(b)$.

Пример
Если $f(a) = 1$, а $f(b) = 5$, то для любого числа C между ними (например, $C = 3$) найдется точка на отрезке, где $f(x) = 3$.

Лемма о замкнутости отрезка

Лемма
Если последовательность точек x_n принадлежит отрезку $[a, b]$ и $x_n \to c$, то предельная точка c также принадлежит этому отрезку ($c \in [a, b]$).

Это свойство замкнутости критически важно для доказательства теорем Вейерштрасса. Для интервала (a, b) это неверно: последовательность $\frac{1}{n}$ лежит в $(0, 1)$, но её предел 0 не принадлежит интервалу.

Глобальные свойства: Теоремы Вейерштрасса

Эти теоремы работают только на **компакте** (в нашем случае — на отрезке $[a, b]$). Если отрезок заменить на интервал, магия исчезнет.

Первая теорема Вейерштрасса (об ограниченности)
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что функция $f(x)$ не ограничена сверху на $[a, b]$.

1. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in [a, b]$ такая, что $f(x_n) > n$.
2. Мы получили последовательность точек (x_n), лежащую на отрезке $[a, b]$.
3. По теореме Больцано — Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right)$, стремящуюся к некоторой точке c.
4. Так как отрезок замкнут, точка c также принадлежит $[a, b]$.
5. В силу непрерывности функции в точке c имеем: $\lim_{k\to\infty} f\left(x_{n_k}\right) = f(c)$.
6. Но по нашему построению $f\left(x_{n_k}\right) > n_k$, а значит $\lim f\left(x_{n_k}\right) = +\infty$.

Мы получили противоречие: предел не может быть одновременно числом $f(c)$ и бесконечностью. Значит, функция ограничена. ■

Вторая теорема Вейерштрасса (о достижении экстремумов)
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на нем своих точных верхней и нижней граней. (То есть существуют точки $x_1, x_2 \in [a, b]$ такие, что $f(x_1) = \sup f$ и $f(x_2) = \inf f$).

Доказательство. Докажем для верхней грани $M = \sup_{\{x\in[a,b]\}} f(x)$.

1. По первой теореме Вейерштрасса функция ограничена, значит M — конечное число.
2. По определению точной верхней грани, для любого $n \in \mathbb{N}$ найдется такая точка $x_n \in [a, b]$, что:

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

3. Из последовательности (x_n) снова выделяем подпоследовательность $\left(x_{n_k}\right)$, сходящуюся к $c \in [a, b]$.
4. Перейдем к пределу в неравенстве $M - \frac{1}{n_k} < f\left(x_{n_k}\right) \leq M$ при $k \to \infty$.
5. По теореме о зажатой переменной $\lim f\left(x_{n_k}\right) = M$.
6. С другой стороны, в силу непрерывности $\lim f\left(x_{n_k}\right) = f(c)$.

Следовательно, $f(c) = M$. Точная верхняя грань достигнута в точке c. ■

Первая теорема Больцано — Коши (о нуле функции)

Теорема
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Доказательство. Воспользуемся методом деления отрезка пополам (дихотомией). Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

1. Рассмотрим середину отрезка $x_1 = \frac{a+b}{2}$.
   - Если $f(x_1) = 0$, то точка $c = x_1$ найдена, и доказательство завершено.
   - Если $f(x_1) \neq 0$, то выберем из двух половин $[a, x_1]$ и $[x_1, b]$ ту, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Обозначим этот новый отрезок $[a_1, b_1]$.
2. Повторим процедуру для $[a_1, b_1]$, получим $[a_2, b_2]$, и так далее. В результате либо на каком-то конечном шаге мы попадем в нуль, либо получим бесконечную систему вложенных отрезков $[a_n, b_n]$ таких, что:
   - $f(a_n) < 0,\ f(b_n) > 0$ для всех n;
   - Длина отрезка $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \to 0$.
3. По лемме Кантора о вложенных отрезках существует единственная точка c, принадлежащая всем отрезкам: $\lim a_n = \lim b_n = c$.
4. В силу непрерывности функции в точке c:
   - $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq 0$ (так как все $f(a_n) < 0$).
   - $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq 0$ (так как все $f(b_n) > 0$).
5. Из двух неравенств $f(c) \leq 0$ и $f(c) \geq 0$ следует, что $f(c) = 0$.

Теорема доказана. ■

Вторая теорема Больцано — Коши (о промежуточных значениях)

Теорема
Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она принимает любое значение C, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ и выбрано произвольное число C, такое что $f(a) < C < f(b)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$g(x) = f(x) - C$$

1. Функция $g(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как она является разностью непрерывной функции и константы.
2. Вычислим значения $g(x)$ на концах отрезка:
   - $g(a) = f(a) - C < 0$ (так как $C > f(a)$).
   - $g(b) = f(b) - C > 0$ (так как $C < f(b)$).
3. Знаки функции $g(x)$ на концах отрезка различны. По **первой теореме Больцано — Коши**, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $g(c) = 0$.
4. Это означает, что $f(c) - C = 0$, то есть $f(c) = C$.

Теорема доказана. ■

Следствие (об образе отрезка)
Образом отрезка $[a, b]$ при непрерывном отображении также является отрезок. Действительно, по теоремам Вейерштрасса функция достигает своего минимума m и максимума M, а по второй теореме Больцано — Коши принимает все значения между ними. Таким образом, множество значений функции $f([a, b]) = [m, M]$.

Классификация точек разрыва

Определение
Точка a называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если функция определена в окрестности этой точки, но не является в ней непрерывной.

Разрывы делятся на два типа в зависимости от поведения односторонних пределов $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

1. Разрыв первого рода

Оба односторонних предела существуют и конечны.

- **Устранимый разрыв:** $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$. (Пределы равны, но в самой точке «дырка» или значение «выбито»).
- **Неустранимый разрыв (Скачок):** $f(a-0) \neq f(a+0)$.

2. Разрыв второго рода

Хотя бы один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

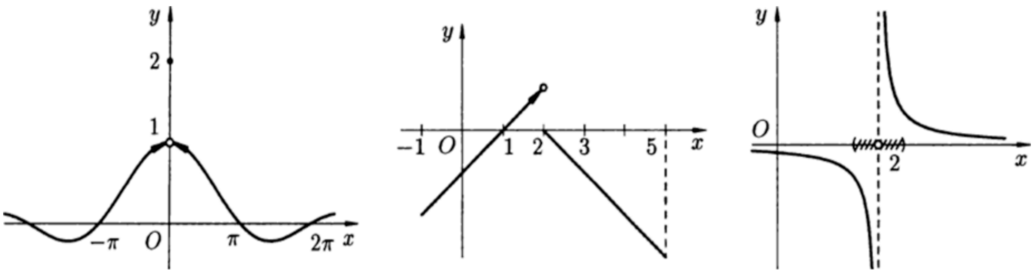

Рис. 1. Точки устранимого разрыва и 1, 2 рода

Разрывы монотонной функции

Теорема
Если функция $f(x)$ монотонна на интервале (a, b), то в любой точке этого интервала она:

1. Либо непрерывна.
2. Либо имеет разрыв **только первого рода** (скачок).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ возрастает. Рассмотрим точку $x_0 \in (a, b)$. Для всех $x < x_0$ значения $f(x) \leq f(x_0)$. Значит, множество значений функции слева ограничено сверху числом $f(x_0)$. По принципу верхней грани существует $\sup_{\{x<x_0\}} f(x)$, который и является левым пределом $f(x_0 - 0)$. Аналогично существует правый предел $f(x_0 + 0) = \inf_{\{x>x_0\}} f(x)$. Так как пределы конечны, разрыв может быть только первого рода. ∎

Следствия из первого замечательного предела

Все пределы ниже рассматриваются при $x \to 0$.

Для тангенса

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

Для обратных функций

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctgx}{x} = 1$$

Следствие для косинуса

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой двойного угла $1-\cos x = 2\sin^2(\frac{x}{2})$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\sin\frac{\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)\right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1^2 = \frac{1}{2}$$

■

Следствия из второго замечательного предела

Все пределы ниже рассматриваются при $x \to 0$.

Логарифмическое и экспоненциальное

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \ln a$

Следствие для степенной функции

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Доказательство. Используем основное логарифмическое тождество $(1+x)^\alpha = e^{\alpha\ln(1+x)}$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)} \cdot \frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

Первая дробь стремится к 1 (следствие для e^x), вторая дробь стремится к $\alpha \cdot 1$ (следствие для ln). Итого: $1 \cdot \alpha = \alpha$. ■

Таблица эквивалентных бесконечно малых

При $\alpha(x) \to 0$ справедливы следующие замены:

Функция	Эквивалента
$\sin \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$\operatorname{tg} \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$\arcsin \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$arctg \alpha(x)$	$\alpha(x)$
$1 - \cos \alpha(x)$	$\alpha^2 \frac{x}{2}$
$e^{\alpha(x)} - 1$	$\alpha(x)$
$\ln(1 + \alpha(x))$	$\alpha(x)$
$(1 + \alpha(x))^k - 1$	$k \cdot \alpha(x)$

Асимптотическое сравнение функций

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to a$.

Определение

1. **О-малое:** Говорят, что f есть «о-малое» от g ($f = o(g)$), если $f(x) = \alpha(x) \cdot g(x)$, где $\alpha(x) \to 0$. (Если $g \neq 0$, то это эквивалентно $\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 0$). *Интуиция: f стремится к нулю значительно быстрее, чем g.*
2. **О-большое:** Говорят, что f есть «О-большое» от g ($f = O(g)$), если существует константа $C > 0$ такая, что в окрестности a: $|f(x)| \leq C\ |g(x)|$. *Интуиция: f растет или убывает не быстрее, чем g.*
3. **Эквивалентность:** f эквивалентна g ($f \sim g$), если $\lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$.

Лемма о равносильных формулировках

Эта лемма — рабочий инструмент для всех доказательств с o-малым.

Лемма об эквивалентности и о-малом

Следующие условия эквивалентны:

1. $f \sim g$ при $x \to a$.
2. $f = g + o(g)$ при $x \to a$.

Доказательство.

- **($1 \Rightarrow 2$):** Если $\lim \frac{f}{g} = 1$, то $\frac{f}{g} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$. Умножая на g, получаем $f = g + \alpha(x)g$. По определению $\alpha(x)g = o(g)$.
- **($2 \Rightarrow 1$):** Если $f = g + o(g)$, то $f = g + \alpha(x)g = g(1 + \alpha(x))$. Тогда $\frac{f}{g} = 1 + \alpha(x) \to 1$ при $x \to a$.

■

Свойства (арифметика) о-малого

При $x \to a$ справедливы следующие символические равенства:

Правила игры

1. $o(f) \pm o(f) = o(f)$ (Сумма пренебрежимо малых — всё еще пренебрежимо мала).
2. $C \cdot o(f) = o(f)$
3. $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)$
4. $(o(f))^k = o\big(f^k\big)$ для $k > 0$.
5. $o(f + o(f)) = o(f)$

Дифференциальное исчисление

Производная функции

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x. Дадим аргументу приращение Δx (так, чтобы точка $x + \Delta x$ осталась в окрестности). Тогда приращение функции: $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение
Производной функции $f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Дифференцируемость

Определение
Функция $f(x)$ называется **дифференцируемой** в точке x, если её приращение Δf можно представить в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

где A — некоторое число, не зависящее от Δx.

💡 **Суть дифференцируемости**
Это значит, что в очень маленьком масштабе график функции практически не отличим от прямой линии. Часть $A \cdot \Delta x$ — это главная линейная часть, а $o(\Delta x)$ — это «кривизна», которой можно пренебречь при малых сдвигах.

Дифференциал функции

Определение
Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции. Обозначение: $df = A \cdot \Delta x$.

Поскольку для функции $y = x$ производная равна 1 ($dx = 1 \cdot \Delta x$), то принято писать $dx = \Delta x$. Тогда:

$$df = f'(x)dx$$

В чем разница между $f'(x)$ и df?

- **Производная** $f'(x)$ — это коэффициент (скорость изменения).
- **Дифференциал** df — это конкретное (хоть и малое) изменение значения по линейному закону.

На графике дифференциал — это приращение ординаты **касательной**, а не самой функции.

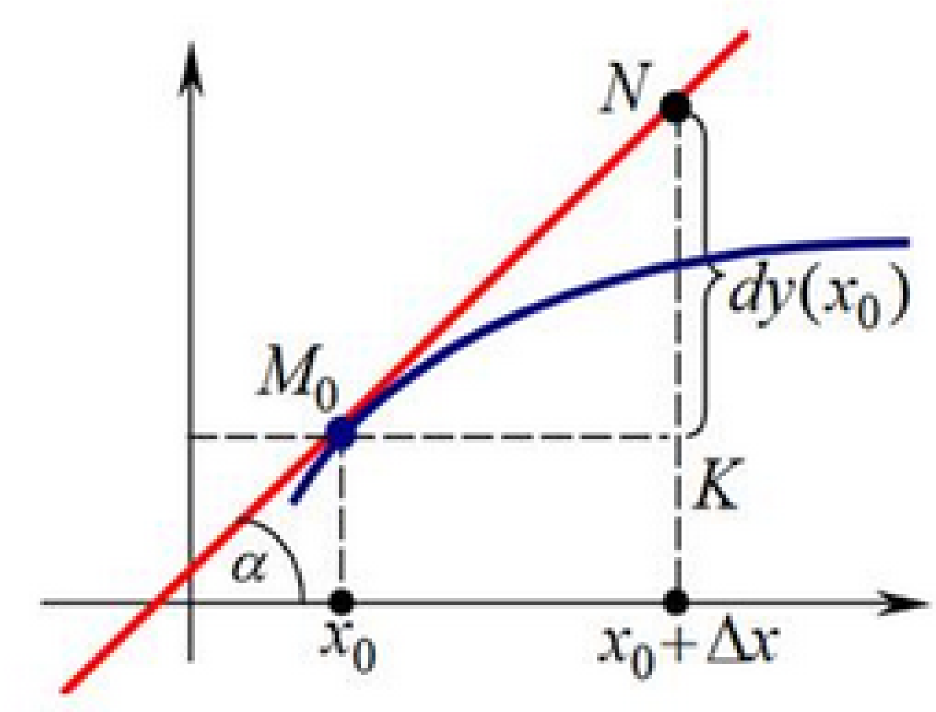

Рис. 2. Дифференциал функции

Производные и дифференциалы элементарных функций

Функция $f(x)$	Производная $f'(x)$	Дифференциал df
x^n	nx^{n-1}	$nx^{n-1}dx$
e^x	e^x	$e^x dx$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln a dx$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$d\frac{x}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$d\frac{x}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2} x$	$d\frac{x}{\cos^2} x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$d\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$arctgx$	$\frac{1}{1+x^2}$	$d\frac{x}{1+x^2}$

Пример вывода для $\sin x$

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin(\Delta\frac{x}{2})\cos(x + \Delta\frac{x}{2})}{\Delta x}$$

Используя первый замечательный предел $(\sin(\Delta\frac{x}{2}) \sim \Delta\frac{x}{2})$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot (\Delta\frac{x}{2}) \cdot \cos(x + \Delta\frac{x}{2})}{\Delta x} = \cos x$$

Критерий дифференцируемости

Теорема
Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x тогда и только тогда, когда в этой точке существует конечная производная $f'(x)$.

Доказательство. **1. Необходимость (⇒):** Пусть f дифференцируема, т.е. $\Delta f = A\Delta x + o(\Delta x)$. Поделим на Δx:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$$

При $\Delta x \to 0$ второе слагаемое стремится к 0. Значит, предел отношения существует и равен A. Т.е. $f'(x) = A$.

2. Достаточность (⇐): Пусть существует $f'(x) = \lim\left(\Delta \frac{f}{\Delta} x\right)$. По свойствам пределов:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \text{где } \alpha(\Delta x) \to 0$$

Умножим на Δx: $\Delta f = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Так как $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, мы получили определение дифференцируемости. ■

Необходимое условие дифференцируемости

Теорема
Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Раз функция дифференцируема, её приращение можно записать как:

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x)\Delta x + o(\Delta x)) = 0 + 0 = 0$$

Условие $\lim \Delta f = 0$ является определением непрерывности функции в точке.■

Односторонние производные

Определение

1. **Производная слева** в точке x_0:

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

2. **Производная справа** в точке x_0:

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Критерий существования производной

Теорема

Функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке существуют обе односторонние производные и они равны между собой:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Пример: Модуль

Рассмотрим $f(x) = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

- Справа ($\Delta x > 0$): $f(\Delta x) = \Delta x$, значит $f'_+(0) = \lim(\Delta \frac{x}{\Delta} x) = 1$.
- Слева ($\Delta x < 0$): $f(\Delta x) = -\Delta x$, значит $f'_-(0) = \lim(-\Delta \frac{x}{\Delta} x) = -1$.

Так как $1 \neq -1$, производной в нуле не существует. График имеет «излом».

Визуализация «излома»

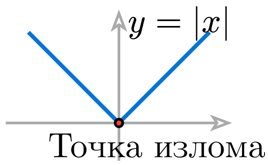

Рис. 3. В точке $x = 0$ касательную провести нельзя, так как левый и правый наклоны разные.

Геометрический смысл производной

Определение
Касательной к графику функции в точке M_0 называется предельное положение секущей M_0M, когда точка M стремится к M_0 вдоль графика.

Теорема
Производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла наклона α касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$, к положительному направлению оси Ox:

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

Уравнение касательной
Если функция дифференцируема в точке x_0, то уравнение касательной имеет вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Геометрический смысл дифференциала

Мы знаем, что $\Delta f = df + o(\Delta x)$. Посмотрим на это на графике:

- Δf (приращение функции) — это реальное изменение координаты y на кривой.
- df (дифференциал) — это изменение координаты y **вдоль линии касательной**.

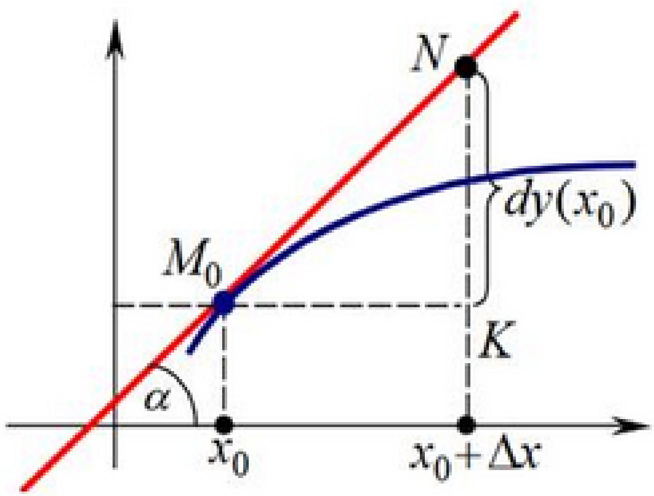

Рис. 4. опять diff

Арифметические свойства производной

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда:

1. **(Линейность)** $(Cu)' = Cu'$, $(u+v)' = u' + v'$.
2. **(Правило Лейбница)** $(uv)' = u'v + uv'$.
3. **(Производная частного)** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (при $v \neq 0$).

Доказательство правила Лейбница (произведение)

$$\Delta(uv) = u(x+\Delta x)v(x+\Delta x) - u(x)v(x)$$

Добавим и вычтем $u(x+\Delta x)v(x)$:

$$\begin{aligned}\Delta(uv) &= u(x+\Delta x)[v(x+\Delta x) - v(x)] + v(x)[u(x+\Delta x) - u(x)] \\ &= u(x+\Delta x)\Delta v + v(x)\Delta u\end{aligned}$$

Поделим на Δx и перейдем к пределу:

$$(uv)' = \lim\left(u(x+\Delta x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

Дифференцирование сложной функции

Теорема
Пусть функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = g(x_0)$, а функция $u = g(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда сложная функция $y = f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, и её производная равна:

$$y'_x = f'_u(u_0) \cdot g'_x(x_0)$$

Доказательство. Раз $u = g(x)$ дифференцируема, её приращение: $\Delta u = g'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$. Раз $y = f(u)$ дифференцируема: $\Delta y = f'(u)\Delta u + \beta(\Delta u)\Delta u$. Подставим Δu в выражение для Δy:

$$\Delta y = f'(u)[g'(x)\Delta x + o(\Delta x)] + o(\Delta u)$$

Поделим на Δx и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Заметим, что при $\Delta x \to 0$ также и $\Delta u \to 0$ (в силу непрерывности).

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)g'(x)$$

■

Дифференцирование обратной функции

Теорема
Пусть функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в окрестности точки x_0, и существует производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$, и её производная равна:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Геометрический смысл
Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$. Тангенсы углов их наклона — взаимно обратные величины: $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}}\alpha$.

Пример
Для $y = \sin x$ обратная функция $x = \arcsin y$. $(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Дифференцирование параметрически заданной функции

Пусть зависимость y от x задана через параметр t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

Теорема
Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то производная y по x вычисляется как:

$$y'_x = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

Доказательство. Используя формулу дифференциала: $dy = \psi'(t)dt$ и $dx = \varphi'(t)dt$. Тогда производная как отношение дифференциалов:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)dt}{\varphi'(t)dt} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

■

Достаточное условие монотонности функции

Теорема
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Тогда:

1. Если $f'(x) > 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ строго возрастает на этом интервале.
2. Если $f'(x) < 0$ для всех $x \in (a, b)$, то функция $f(x)$ строго убывает на этом интервале.

Доказательство. Воспользуемся теоремой Лагранжа (которую мы разберем чуть позже, но она тут база). Для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad \text{где } c \in (x_1, x_2)$$

Так как $(x_2 - x_1) > 0$, то знак разности $f(x_2) - f(x_1)$ полностью совпадает со знаком производной $f'(c)$. Если $f'(x) > 0$, то $f(x_2) > f(x_1)$ — функция возрастает. ∎

Теорема Ферма

Теорема
Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки c и имеет в этой точке локальный экстремум (максимум или минимум). Если в точке c существует производная $f'(c)$, то она равна нулю:

$$f'(c) = 0$$

Доказательство. Пусть для определенности точка c является точкой локального максимума. Тогда по определению максимума существует такая окрестность точки c, что для всех x из этой окрестности выполняется:

$$f(x) \leq f(c) \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(c) \leq 0$$

Рассмотрим производную как предел отношения приращений. Так как производная существует, она равна односторонним пределам:

1. **Справа ($\Delta x > 0$):** Поскольку $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, а $\Delta x > 0$, то:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \leq 0$$

   Переходя к пределу при $\Delta x \to 0 + 0$, получаем: $f'_+(c) \leq 0$.

2. **Слева ($\Delta x < 0$):** Поскольку $f(c + \Delta x) - f(c) \leq 0$, а $\Delta x < 0$, то знак дроби меняется:

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \geq 0$$

   Переходя к пределу при $\Delta x \to 0 - 0$, получаем: $f'_-(c) \geq 0$.

3. **Итог:** Так как производная $f'(c)$ существует, то $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$. Единственное число, которое одновременно ≤ 0 и ≥ 0 — это ноль. Значит, $f'(c) = 0$.

■

⚠️ **Важное замечание**
Теорема Ферма — это **необходимое**, но не **достаточное** условие. Если производная равна нулю, это не гарантирует экстремум. Классический пример: $f(x) = x^3$. В точке $x = 0$ производная $f'(0) = 0$, но там нет ни максимума, ни минимума (это точка перегиба).

Теорема Дарбу

Теорема
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a, b]$, и пусть $f'(a) = A$, $f'(b) = B$. Тогда производная $f'(x)$ принимает любое промежуточное значение между A и B.

Доказательство. Пусть для определенности $A < C < B$. Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$g(x) = f(x) - Cx$$

1. Функция $g(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ (как разность дифференцируемых функций), а значит, она непрерывна на $[a, b]$.
2. По второй теореме Вейерштрасса, непрерывная на отрезке функция достигает своего минимума в некоторой точке $c \in [a, b]$.
3. Проверим производные $g(x)$ на концах отрезка:
   - $g'(a) = f'(a) - C = A - C < 0$. Раз производная в точке a отрицательна, функция убывает вправо от a. Значит, минимум не может быть в точке a.
   - $g'(b) = f'(b) - C = B - C > 0$. Раз производная в точке b положительна, функция возрастает слева от b. Значит, минимум не может быть в точке b.
4. Следовательно, точка минимума c обязана лежать внутри интервала: $c \in (a, b)$.
5. По теореме Ферма, в точке локального экстремума (минимума) внутри интервала производная равна нулю:

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) - C = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = C$$

Теорема доказана. ■

💡 **В чем подвох?**
Эта теорема **не означает**, что $f'(x)$ непрерывна. Существуют функции (например, $x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$), производная которых разрывна, но при этом она всё равно «пробегает» все значения, не перепрыгивая их. Разрывы у производной могут быть только второго рода (бесконечные или осцилляции).

Теорема Ролля

Теорема
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет трем условиям:
1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).
3. На концах отрезка принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, по второй теореме Вейерштрасса она достигает на нем своего максимума M и минимума m.

Рассмотрим два случая:

1. **Случай $M = m$:** Это значит, что функция постоянна на всем отрезке ($f(x) = C$). Производная константы равна нулю в любой точке интервала. Любая точка может быть взята в качестве c.

2. **Случай $M > m$:** Так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно из этих экстремальных значений (либо максимум, либо минимум) достигается внутри интервала (a, b). Пусть, например, $f(c) = M$, где $c \in (a, b)$. По условию, функция дифференцируема в точке c. Тогда по теореме Ферма, в точке локального экстремума производная обязана быть равной нулю:

$$f'(c) = 0$$

Теорема доказана. ■

💡 **Важность условий**
Если убрать хотя бы одно условие, теорема перестанет работать:
- Без **непрерывности**: $f(x) = x$ на $[0, 1)$ и $f(1) = 0$. $f(0) = f(1)$, но производная везде 1.
- Без **дифференцируемости**: $f(x) = |x|$ на $[-1, 1]$. $f(-1) = f(1)$, но в «изломе» производной нет, и она нигде не ноль.

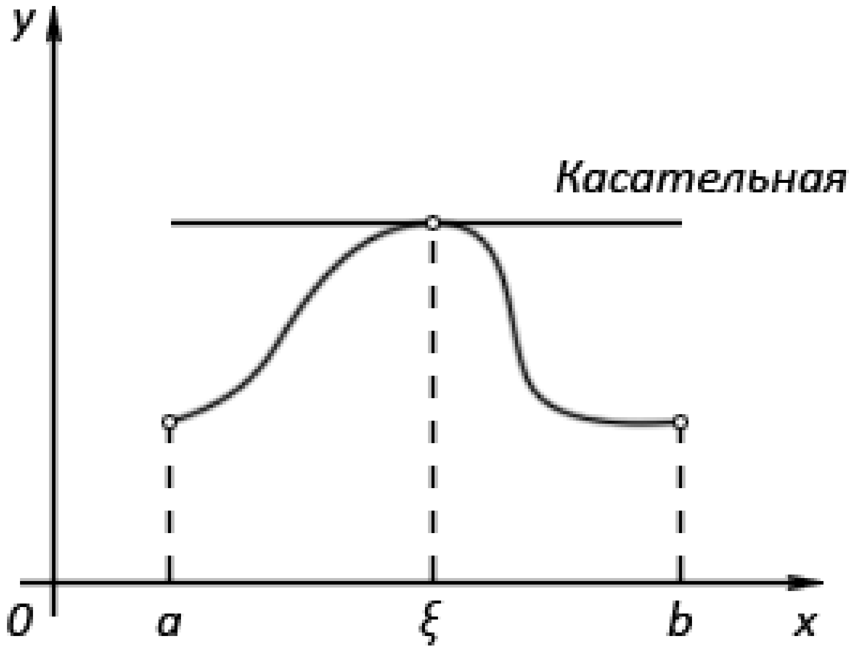

Рис. 5. Теорема Ролля

Теорема Лагранжа

Теорема
Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет двум условиям:
1. Непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируема на интервале (a, b).

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Доказательство. Сведем доказательство к теореме Ролля. Для этого введем вспомогательную функцию $g(x)$, которая представляет собой разность между функцией и хордой, соединяющей точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$.

Уравнение хорды: $y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Рассмотрим функцию:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

1. **Непрерывность и дифференцируемость:** $g(x)$ наследует эти свойства от $f(x)$.
2. **Значения на концах:**
   - $g(a) = f(a) - f(a) - 0 = 0$.

- $g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$

Функция $g(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Следовательно, существует точка $c \in (a, b)$, такая что $g'(c) = 0$. Вычислим производную:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Подставив c:

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Домножив на $(b - a)$, получаем требуемую формулу. ■

💡 **Почему это важно?**
Эта теорема связывает **значения** функции с её **производной**. Она позволяет оценивать приращение функции: если мы знаем, что производная ограничена ($|f'| \leq M$), то функция не может измениться слишком сильно: $|f(b) - f(a)| \leq M\ |b - a|$.

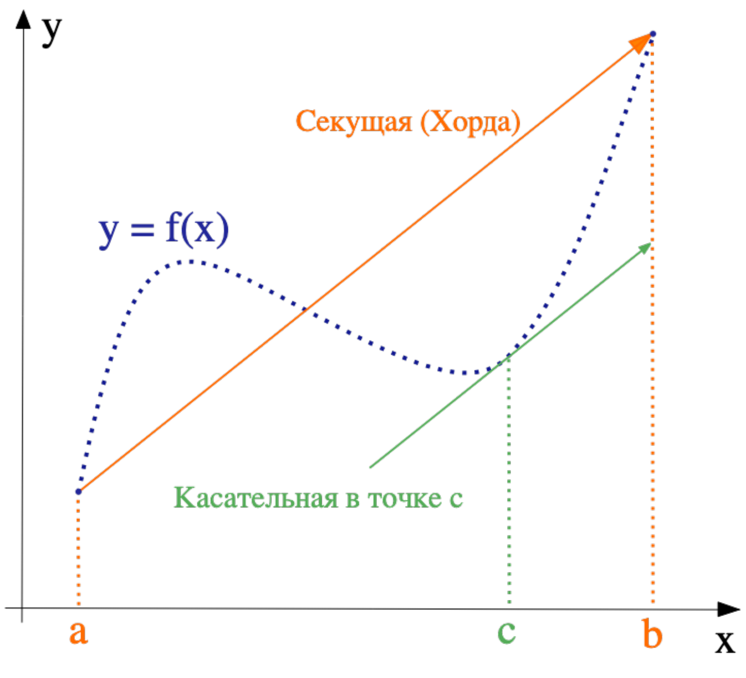

Рис. 6. Визуализация Теоремы Лагранжа

Теорема Коши

Теорема
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:
1. Непрерывны на отрезке $[a, b]$.
2. Дифференцируемы на интервале (a, b).
3. Производная $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая что:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Доказательство.

1. Сначала заметим, что из условия $g'(x) \neq 0$ и теоремы Ролля следует, что $g(b) \neq g(a)$ (иначе нашлась бы точка, где производная ноль). Значит, деление в левой части формулы корректно.
2. Введем вспомогательную функцию $F(x)$, аналогично тому, как мы это делали в теореме Лагранжа:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

3. Проверим условия теоремы Ролля для $F(x)$:
   - $F(x)$ непрерывна и дифференцируема (как линейная комбинация f и g).
   - $F(a) = f(a) - f(a) - (...)(g(a) - g(a)) = 0$.
   - $F(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(b) - g(a)) = 0$.
4. По теореме Ролля существует точка $c \in (a, b)$, такая что $F'(c) = 0$.
5. Вычислим производную:

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x)$$

Подставим c и приравняем к нулю:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

Так как $g'(c) \neq 0$, перенесем его в левую часть. Получаем искомую формулу.■

Правило Лопиталя

Теорема
Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в проколотой окрестности точки a. Если:

1. $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ и $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ (или оба предела равны ∞);
2. $g'(x) \neq 0$ в этой проколотой окрестности;
3. Существует предел отношения производных $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$ (конечный или бесконечный);

Тогда существует предел отношения функций, и он равен A:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Доказательство для случая $0/0$
Доопределим функции в точке a так, чтобы они стали непрерывными: $f(a) = 0, g(a) = 0$. Рассмотрим произвольную точку x из окрестности a. На отрезке $[a, x]$ функции удовлетворяют всем условиям **теоремы Коши**. Согласно теореме Коши, существует точка c между a и x такая, что:

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Так как $f(a) = 0$ и $g(a) = 0$, формула упрощается:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Перейдем к пределу при $x \to a$. Так как c зажата между a и x, то при $x \to a$ точка c также стремится к a ($c \to a$). Значит:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = A$$

⚠️ **Важные моменты**

1. **Не забывай проверять условия!** Если предел не является неопределенностью $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, правило Лопиталя даст неверный ответ.
2. **Цикличность:** Иногда правило Лопиталя можно применять несколько раз подряд, если неопределенность сохраняется.
3. **Обратное неверно:** Если предел отношения функций существует, это не значит, что предел отношения производных тоже существует. Пример: $\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = 1$, но предел производных $\frac{1+\cos x}{1}$ не существует.

💡 **Лайфхак для других неопределенностей**

- $0 \cdot \infty \to$ превращаем в $\frac{f}{\frac{1}{g}}$ (тип $\frac{0}{0}$) или $\frac{g}{\frac{1}{f}}$ (тип $\frac{\infty}{\infty}$).
- $\infty - \infty \to$ приводим к общему знаменателю.
- $0^0, 1^\infty, \infty^0 \to$ используем тождество $f^g = e^{g \ln f}$.

ВСЬО