

RAPPORT DE STAGE

Vibro-acoustique en trois dimensions de la table d'harmonie d'une guitare

Andry RAFARALAHY
Master 1 Mathématiques Appliquées

Mai 2020 - Août 2020

Tuteurs de stage : Matthieu AUSSAL et Marc BAKRY
Enseignant référent : Christine KERIBIN

Remerciements

Pour valider le Master 1 de Mathématiques et Applications de l'Université Paris-Saclay, j'ai effectué un stage de trois mois au sein du laboratoire « Centre de Mathématiques Appliquées » (CMAP) de l'École Polytechnique. Je tiens en premier lieu à remercier Madame Christine Keribin, enseignante-chercheuse à l'Université Paris-Saclay de m'avoir mis en relation avec Monsieur Aussal, chercheur au CMAP et grâce à qui j'ai pu effectuer ce stage. Je voudrais remercier également mes tuteurs de stage, Matthieu Aussal et Marc Bakry, chercheurs au CMAP pour leur disponibilité et pour toute l'aide qu'ils m'ont apporté durant ces trois mois de stage. Ce stage s'est déroulé dans un contexte particulier, c'est-à-dire en télétravail, pour cause de pandémie due au coronavirus, malgré cela les réunions par vidéo-conférence avec mes tuteurs ont été régulières et très instructives pour le bon déroulement de mon stage.

Table des matières

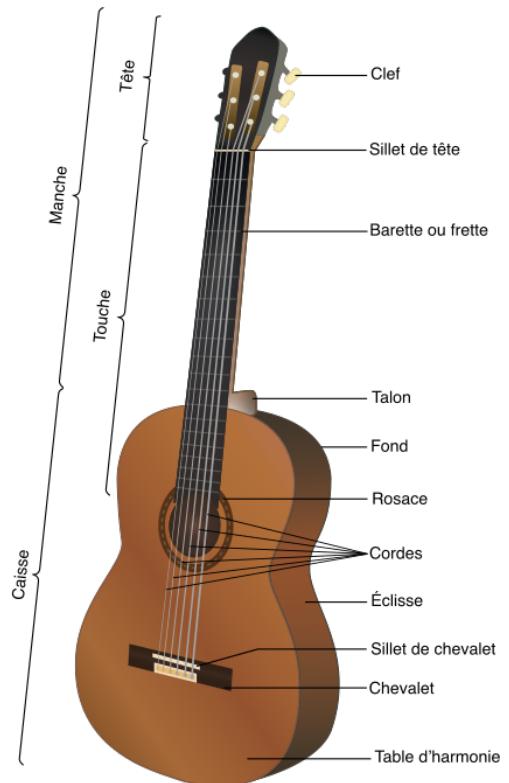
Introduction	3
1 Modélisation physique de la guitare	4
1.1 Les cordes	4
1.2 La table d'harmonie	5
1.3 Rayonnement dans l'air	6
2 Vibro-acoustique de plaque	7
2.1 Modèle mathématique	7
2.1.1 Élasticité linéaire 3-D	7
2.1.2 Formulation variationnelle	8
2.1.3 Modèle de plaque	10
2.2 Résolution numérique	12
2.2.1 Maillage et éléments finis	12
2.2.2 Implémentation	13
2.2.3 Validation	13
3 Application à la table d'harmonie d'une guitare	15
3.1 Géométrie, maillage et matériaux d'une table d'harmonie	15
3.2 Résultats	19
Conclusion	21

Introduction

La guitare acoustique est un instrument à cordes pincées, dont la forme moderne est apparue en Espagne. Elle comporte généralement six cordes, en nylon pour la guitare classique, en métal pour la guitare folk. Elle possède une table d'harmonie, dont le but est d'amplifier le son émis par la corde. En effet, le son rayonné dans l'air par la corde seule est très faible. Lorsque le guitariste pince la corde, celle-ci se met à vibrer, puis elle fait vibrer la table d'harmonie par l'intermédiaire du chevalet. Ensuite, la table transmet une partie de ses vibrations à l'air, donnant le son de la guitare. La table d'harmonie a donc une influence très importante sur les qualités musicales de l'instrument.

L'objet de ce stage est d'écrire un programme qui, en fonction des matériaux et de la géométrie d'une table d'harmonie, simule son comportement vibratoire. Plus précisément, il s'agit de calculer les modes propres de vibration d'une table d'harmonie, c'est-à-dire ses fréquences de vibration « naturelles » ainsi que les formes spatiales de vibration associées.

Notre travail est structuré selon le plan suivant. Dans un premier temps, nous présenterons la modélisation d'une guitare, du pincé de la corde jusqu'au rayonnement dans l'air, en se basant sur les travaux de modélisation instrumentale de [6] et [4]. Ensuite, nous décrirons les équations de l'élasticité linéaires en trois dimensions, qui seront utilisées pour caractériser les modes propres de vibration d'une plaque. La résolution se fera par éléments finis, et sera codée en Python, avec le framework FEniCS. La validation se fera par comparaison à un modèle de plaques, sur un problème simple. Pour finir, nous calculerons numériquement les modes propres de la table d'harmonie d'une guitare, et comparerons les résultats obtenus à ceux de [6].



Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/Guitare_classique

FIGURE 1 – Schéma d'une guitare classique

1 Modélisation physique de la guitare

Dans cette section, nous présentons, sans entrer dans les détails, un modèle de guitare, en se basant sur les travaux de modélisation instrumentale de [4] pour le piano et [6] pour la guitare. On décompose le modèle en trois parties :

- les vibrations de la corde
- les vibrations de la table d'harmonie
- le rayonnement dans l'air

Le modèle doit également décrire le couplage entre les différentes parties, qu'on ne détaillera pas ici. D'autres pièces de la guitare peuvent avoir une influence sur le son, comme le manche ou la partie arrière de la caisse de résonance. [6] et [4] font cependant le choix de ne considérer que la corde et la table d'harmonie, car leur influence sur le son de l'instrument est prépondérante.

1.1 Les cordes

Modèle simplifié

On peut modéliser une corde de guitare par l'équation de corde vibrante. On suppose une corde de longueur L , attachée à ses deux extrémités. Dans le cas d'une corde de guitare, une extrémité correspond à la partie touchant le chevalet, l'autre à la partie touchant le sillet de tête (ou une frette du manche si le joueur appuie son doigt sur la corde).

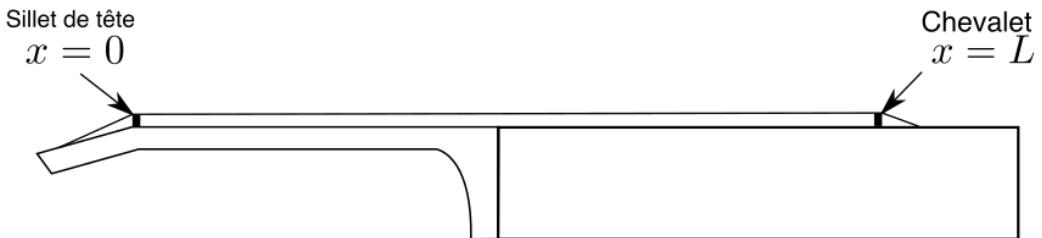


FIGURE 2 – Schéma simplifié d'une guitare vue de profil

On cherche à caractériser le déplacement transversal $u_c(x, t)$ de la corde, en chacun de ses points x , et pour tout instant t . L'équation de corde vibrante associée à ce problème est en fait une équation d'onde 1-D :

$$\frac{\partial^2 u_c}{\partial t^2}(x, t) - c^2 \frac{\partial^2 u_c}{\partial x^2}(x, t) = S(x, t) \quad \forall x \in [0, L] \quad (1)$$

avec :

- $c = \sqrt{T_0/\rho A}$: vitesse de propagation d'onde au sein de la corde, exprimée en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
- A : aire de la section circulaire de la corde, en m^2
- ρ : densité, en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- T_0 : tension au repos, en N

Le second membre S permet de modéliser les influences extérieures à la corde, comme par exemple l'action du joueur sur celle-ci. Le fait que la corde soit fixée à ses extrémités se traduit par les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} u_c(x = 0, t) = 0 \\ u_c(x = L, t) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Modèle réaliste

Le modèle de corde vibrante unidimensionnel n'est pas réaliste dans le sens où il ne prend pas en compte certains phénomènes physiques, qui peuvent avoir un effet sur le son émis. Entre autres, il ne modélise ni l'**inharmonicité** de la corde, ni les **effets de dissipation**. Pour modéliser une corde présentant des partiels inharmoniques, [4] propose d'utiliser un modèle de poutre comme le modèle d'Euler-Bernoulli ou le modèle de Timoshenko. Pour prendre en compte les phénomènes de dissipation, [6] propose d'ajouter des termes d'amortissement à l'équation de corde vibrante.

L'influence de ces phénomènes sur le spectre sonore de la corde est non négligeable, d'où l'importance de les prendre en compte pour une modélisation la plus réaliste possible.

1.2 La table d'harmonie

La table d'harmonie est une plaque de bois, généralement de l'épicéa, d'épaisseur comprise entre 2 et 3mm. Elle est munie, sur sa face arrière, de baguettes de bois, que l'on appelle les **raidisseurs**. Sur sa face avant se trouve le chevalet, dont le rôle est de transmettre les vibrations des cordes à la table. Le bois composant la table est dit **orthotrope**, c'est-à-dire qu'il possède des propriétés élastiques différentes dans trois directions orthogonales entre elles.



Source : <https://www.stevefischerguitars.com/>

FIGURE 3 – Vue arrière de la table d'harmonie d'une guitare

Les vibrations de la table peuvent être modélisées par l'équation de l'élasticité linéaire

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

avec :

- \mathbf{u} : déplacement, à valeurs dans \mathbb{R}^3
- Ω : domaine dans \mathbb{R}^3 , espace occupé par la plaque au repos

- $\sigma(\mathbf{u})$: tenseur des contraintes (que l'on explicite dans le cas orthotrope dans la section 2.1.1)
- ρ : densité du matériau en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Celle-ci permet de décrire les petites déformations élastiques dans un matériau solide. Le second membre \mathbf{S} peut être utilisé pour modéliser le transfert des vibrations de la corde à la table.

De par la faible épaisseur de la table, relativement à ses autres dimensions, il est aussi possible de modéliser ses vibrations par un modèle de plaque. [6] utilise de modèle de Kirchoff-Love pour modéliser la table d'harmonie d'une guitare, tandis que [4] utilise le modèle de Reissner-Mindlin pour modéliser celle d'un piano. Ces modèles de plaques permettent d'assimiler la table à une surface en deux dimensions.

Comme celles de la corde, les vibrations de la table sont sujettes à des phénomènes de dissipation. Il est possible de les modéliser en ajoutant des termes d'amortissement.

Quelque soit le modèle utilisé, l'inconnue du problème est une fonction \mathbf{u} de variables d'espace et de temps. Si l'on suppose une solution de la forme $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$, alors on obtient une équation dont les inconnues sont une fonction $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x})$ et un scalaire ω

$$D\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

où D est un opérateur différentiel. On se retrouve avec un système dont les solutions sont des couples (ω_n, \mathbf{u}_n) , où les ω_n sont les pulsations propres et les \mathbf{u}_n sont les modes propres, qui ne dépendent pas du temps. Les fréquences propres, obtenues grâce à la relation $\omega_n = 2\pi f_n$, sont en quelques sorte les fréquences « naturelles » auxquelles la table peut vibrer, et les modes propres associées représentent la forme des vibrations. La solution \mathbf{u} du système en temps peut s'écrire comme une superposition des modes propres \mathbf{u}_n .

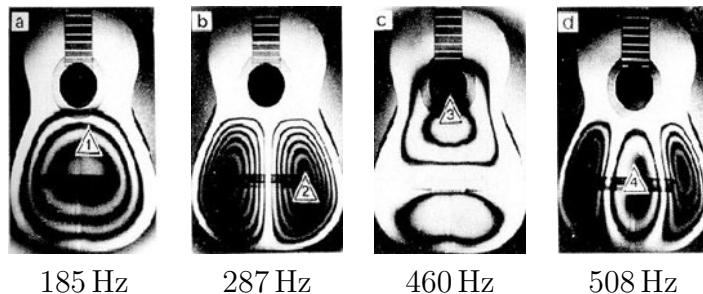


FIGURE 4 – 4 premiers modes de la table d'harmonie d'une guitare classique [8]

1.3 Rayonnement dans l'air

Pour avoir un modèle de guitare complet, il faut ajouter les interactions entre la guitare et l'air qui l'entoure. [4] et [6] ne modélisent que le rayonnement de la table d'harmonie, car c'est l'interaction qui a la plus grande influence sur le son de l'instrument.

La propagation du son dans l'air est décrite par le système suivant, d'inconnues p_a la pression acoustique, et \mathbf{V}_a la vitesse acoustique

$$\begin{cases} \frac{1}{c_a^2} \frac{\partial p_a}{\partial t} + \rho_a \operatorname{div} \mathbf{V}_a = 0, & \text{sur } \Omega_e \\ \rho_a \frac{\partial \mathbf{V}_a}{\partial t} + \nabla p_a = \mathbf{0}, & \text{sur } \Omega_e \end{cases} \quad (3)$$

où $\Omega_e = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ est un domaine non borné de \mathbb{R}^3 . À ce système il faut ajouter le couplage avec la table d'harmonie, et des conditions aux limites à l'infinie adéquates. Pour résoudre numériquement ce problème dans un domaine non borné, on peut par exemple utiliser la méthode des éléments finis avec conditions de type PML (perfectly match layer) ou encore la méthode des éléments finis de frontière.

2 Vibro-acoustique de plaque

2.1 Modèle mathématique

Nous cherchons à modéliser les vibrations d'une plaque, fixée sur ses bords latéraux. On note :

- Ω : domaine occupé par la plaque au repos
- Γ : bord de la plaque
- Γ_D : partie du bord sur laquelle on impose une condition de Dirichlet homogène (encastrement de la plaque)
- Γ_N : partie du bord sur laquelle on impose une condition de Neumann homogène (contrainte surfacique nulle)

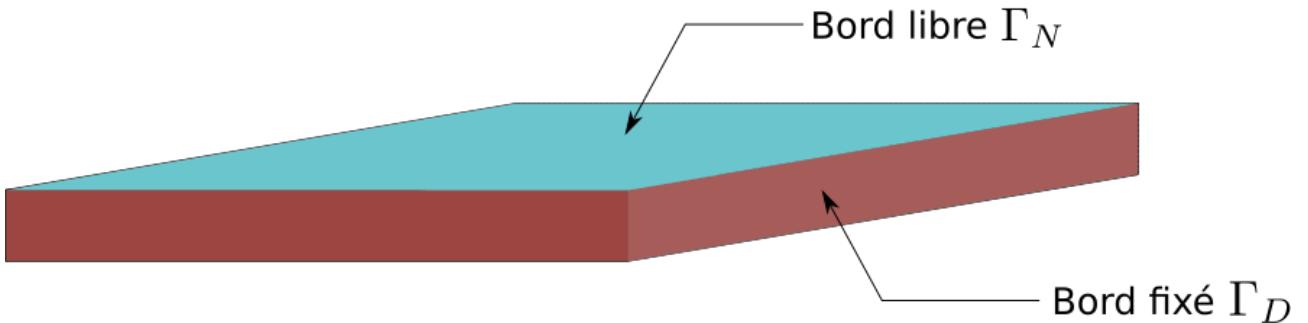


FIGURE 5 – Schéma d'une plaque et de ses bords

La modélisation des vibrations d'une plaque rentre dans le cadre de l'élasticité linéaire.

2.1.1 Élasticité linéaire 3-D

On rappelle que l'équation de l'élasticité linéaire 3-D s'écrit comme suit :

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{S}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

avec :

- \mathbf{u} : déplacement, à valeurs dans \mathbb{R}^3
- Ω : domaine dans \mathbb{R}^3 , espace occupé par la plaque au repos
- $\sigma(\mathbf{u})$: tenseur des contraintes
- ρ : densité du matériau en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Pour un point $\mathbf{x} \in \Omega$ et un instant t donnés, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ est un vecteur de \mathbb{R}^3 représentant le déplacement du point \mathbf{x} de la plaque.

$\sigma(\mathbf{u})$ est un tenseur d'ordre 2 symétrique, que l'on appelle le tenseur des contraintes. On peut l'exprimer à l'aide de la relation suivante

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (5)$$

C est le tenseur de rigidité, d'ordre 4, que l'on écrit ici sous forme matricielle, et ε est un autre tenseur d'ordre 2 symétrique, appelé le tenseur des déformations. ε est défini par

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\partial_i \mathbf{u}_j + \partial_j \mathbf{u}_i)$$

Dans le cas d'un matériau orthotrope, C s'écrit comme $C = S^{-1}$, où

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Les coefficients E_i , G_{ij} et ν_{ij} décrivent les propriétés élastiques du matériau :

- les E_i sont les modules de Young dans les trois directions principales, exprimés en Pa
- les G_{ij} sont les modules de cisaillement dans les trois directions principales, exprimés en Pa
- les ν_{ij} sont les coefficients de Poisson dans les trois directions principales (sans unité)

L'opérateur div doit être compris comme l'opérateur de divergence pour les tenseurs d'ordre 2 :

$$\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}))_i = \sum_j \partial_j \sigma_{ij}, \quad i = 1, 2, 3$$

Sur la partie du bord fixée Γ_D , on impose $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Sur la partie libre on impose une contrainte surfacique nulle $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ où \mathbf{n} est la normale extérieure à Γ et $\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$ est défini par la formule

$$(\sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n})_i = \sum_j \sigma_{ij} n_j, \quad i = 1, 2, 3$$

Les conditions aux bords du problème sont donc

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{cases} \quad (7)$$

Pour calculer les modes propres de vibration de la plaque, on prend comme second membre $\mathbf{S} = \mathbf{0}$ et suppose une solution \mathbf{u} de la forme

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re}(\mathbf{u}(\mathbf{x}) e^{i\omega t})$$

où ω est un réel. Alors on obtient le système suivant, d'inconnues \mathbf{u} et ω :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}))(\mathbf{x}) = \omega^2 \rho \mathbf{u}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma_D \\ \sigma(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Gamma_N \end{cases} \quad (8)$$

Nous nous intéressons aux couples de solution (ω, \mathbf{u}) où \mathbf{u} n'est pas identiquement nulle. En utilisant une approche variationnelle, on peut montrer que l'ensemble des pulsations propres ω est dénombrable (voir (10)), donc qu'on peut l'écrire sous forme d'une suite (ω_n) .

2.1.2 Formulation variationnelle

Pour obtenir une formulation variationnelle, on multiplie par une fonction test \mathbf{v} et on applique une formule de Green. Commençons par poser

$$V = \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \text{ tq } \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_D\}$$

La définition de V découle naturellement de la condition de Dirichlet sur la partie du bord fixée Γ_D . Partant de l'équation (8), on multiplie par une fonction $\mathbf{v} \in V$ et intègre sur Ω

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \omega^2 \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \mathbf{v} d\mathbf{x}$$

On peut développer le membre de gauche

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}))_i \mathbf{v}_i d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_j \sigma(\mathbf{u})_{ij} \mathbf{v}_i d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Par formule de Green on obtient que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \partial_j \sigma(\mathbf{u})_{ij} \mathbf{v}_i d\mathbf{x} &= \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j \mathbf{v}_i d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \mathbf{v}_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma \end{aligned}$$

L'intégrale sur Γ étant nulle d'après les conditions au bords, on obtient

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$$

La somme du second membre peut être décomposée comme suit

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j \mathbf{v}_i d\mathbf{x} = S + T$$

avec

$$S = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ii}(\mathbf{u}) \partial_i \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$$

et

$$T = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ j \neq i}} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_j \mathbf{v}_i d\mathbf{x}$$

On remarque que, comme σ est symétrique, T peut aussi s'écrire comme

$$T = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ j \neq i}} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \partial_i \mathbf{v}_j d\mathbf{x}$$

D'où, en sommant ces deux expressions

$$T = \sum_{i=1}^3 \sum_{\substack{1 \leq j \leq 3 \\ j \neq i}} \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$$

En sommant S et T , on obtient donc

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$$

ou encore, en écrivant les tenseurs sous forme vectorielle

$$\int_{\Omega} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} C\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$$

Finalement, on arrive à la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\omega, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times V \setminus \{0\} \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \omega^2 b(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{cases} \quad (9)$$

où $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} C\varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) d\mathbf{x}$ et $b(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}$. Cette formulation variationnelle peut aussi s'écrire de comme un problème aux valeurs propres

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\lambda, \mathbf{u}) \in \mathbb{R} \times V \setminus \{0\} \text{ telle que} \\ a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda b(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in V \end{cases} \quad (10)$$

Le problème aux valeurs propres (10) entre dans le cadre du théorème spectral (voir [2, Chapitre 1.2.2, Théorème 1.13]). Cela implique entre autres que les valeurs propres du problème (10) forment une suite de réels positifs (λ_n) , qui tend vers $+\infty$, d'où l'équivalence entre (9) et (10).

2.1.3 Modèle de plaque

Nous présentons ici brièvement le modèle de plaque de Reissner-Mindlin, car il sera utilisé pour valider notre implémentation de l'élasticité linéaire 3-D. Considérons une plaque d'épaisseur h . Le principe des modèles de plaques 2-D est d'assimiler une plaque en trois dimensions à sa surface médiane.

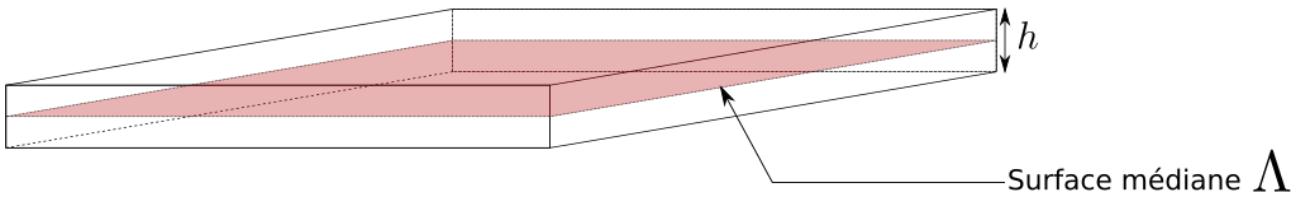


FIGURE 6 – Schéma d'une plaque et sa surface médiane

Pour obtenir les équations de Reissner-Mindlin, on fait des hypothèses simplificatrices sur le déplacement \mathbf{u} . Notons Λ la surface médiane de notre plaque. Les hypothèses de Reissner-Mindlin, stipulent que le vecteur de déplacement s'exprime en fonction de deux angles β_1 et β_2 et du déplacement vertical w

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} (x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} -x_3 \beta_1 (x_1, x_2) \\ -x_3 \beta_2 (x_1, x_2) \\ w (x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Pour caractériser le déplacement sur le domaine 3-D Ω , il suffit donc de le caractériser sur la surface médiane Λ . Les relations contraintes-déformations s'écrivent de la façon suivante (loi de Hooke modifiée) :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix}$$

avec le tenseur de déformation comme suit

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \partial_1 \beta_1 \\ -x_3 \partial_2 \beta_2 \\ 0 \\ (\partial_2 w - \beta_2) \\ (\partial_1 w - \beta_1) \\ -x_3 (\partial_2 \beta_1 + \partial_1 \beta_2) \end{pmatrix}$$

et \tilde{C} qui s'écrit en fonction du tenseur de raideur C

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{11} - \frac{c_{13}^2}{C_{33}} & C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} & 0 & 0 & 0 \\ & & \kappa C_{44} & 0 & 0 \\ & & & \kappa C_{55} & 0 \\ & & & & C_{66} \end{pmatrix}$$

avec κ un paramètre, appelé coefficient de cisaillement. Dans le cadre d'un problème aux valeurs propres, [5] recommande de prendre la valeur $\kappa = 5/6$. Une formulation variationnelle, pour la recherche de modes propres avec conditions aux bords équivalente à (7), est donnée par [5]

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\omega, \boldsymbol{\beta}, w) \in \mathbb{R} \times V^{RM} \text{ telle que :} \\ \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\eta}, v) = \omega^2 \mathcal{M}(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\eta}, v), \quad \forall (\boldsymbol{\eta}, v) \in V^{RM} \end{cases} \quad (11)$$

où V^{RM} est l'espace fonctionnel suivant

$$V^{RM} = \left\{ (\boldsymbol{\beta}, w) \in [H^1(\Lambda)]^3 ; \quad \beta_1 = \beta_2 = w = 0 \text{ sur } \partial\Lambda \right\}$$

et \mathcal{A} et \mathcal{M} sont des formes bilinéaires définies par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\eta}, v) &= \frac{h^3}{24} \int_{\omega} \tilde{C}_{11} \partial_1 \beta_1 \partial_1 \eta_1 + \tilde{C}_{12} (\partial_1 \beta_1 \partial_2 \eta_2 + \partial_2 \beta_2 \partial_1 \eta_1) \\ &\quad + \tilde{C}_{22} \partial_2 \beta_2 \partial_2 \eta_2 + \tilde{C}_{66} (\partial_2 \beta_1 + \partial_1 \beta_2) (\partial_2 \eta_1 + \partial_1 \eta_2) d(x_1, x_2) \\ &\quad + h \int_{\omega} \tilde{C}_{44} (\partial_2 w - \beta_2) (\partial_2 v - \eta_2) + \tilde{C}_{55} (\partial_1 w - \beta_1) (\partial_1 v - \eta_1) d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{M}(\boldsymbol{\beta}, w, \boldsymbol{\eta}, v) = \frac{h^3}{24} \int_{\omega} (\beta_1 \eta_1 + \beta_2 \eta_2) d(x_1, x_2) + h \int_{\omega} w v d(x_1, x_2)$$

2.2 Résolution numérique

2.2.1 Maillage et éléments finis

L'équation est résolue par éléments finis de Lagrange sur des maillages constitués de tétraèdres ou d'hexaèdres. Soit \mathcal{T}_h un maillage de Ω en tétraèdres ou en hexaèdres. On note V_h l'approximation de V par des éléments finis \mathbb{P}_k associés au maillage \mathcal{T}_h .

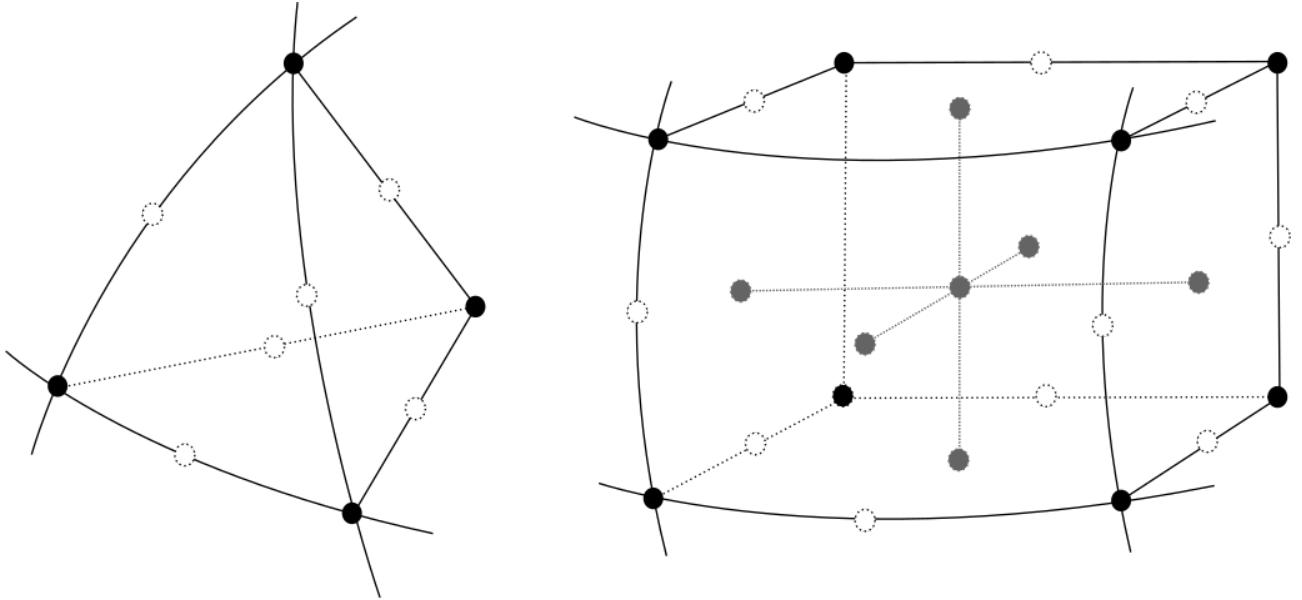


FIGURE 7 – Exemples d'éléments finis \mathbb{P}_2 , tétraédrique à gauche, hexaédrique à droite

Écrivons la formulation discrète du problème. Soient $(q_i)_{i=1,N}$ les degrés de libertés, et $(\phi_i)_{i=1,N} \subset V_h$ les fonctions de base associées telles que

$$\phi_i(q_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$$

Une solution approchée $(\omega_h, u_h) \in \mathbb{R} \times V_h$ doit vérifier

$$a(u_h, \phi_i) = \omega^2 b(u_h, \phi_i) \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}$$

Si l'on décompose u_h sur la base des (ϕ_i)

$$u_h = \sum_{i=1}^N u_h(q_i) \phi_i$$

alors u_h doit vérifier

$$\sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h(q_i) a(\phi_i, \phi_j) = \omega_h^2 \sum_{1 \leq i, j \leq N} u_h(q_i) b(\phi_i, \phi_j)$$

ou encore, sous forme matricielle

$$AU = \lambda BU$$

avec $A_{ij} = a(\phi_i, \phi_j)$, $B_{ij} = b(\phi_i, \phi_j)$, $U_i = u_h(q_i)$ et $\lambda = \omega_h^2$. On reconnaît là un problème aux valeurs propres généralisé. Pour les tailles de matrices que l'on va rencontrer (de l'ordre de $10^5 \times 10^5$), il n'est pas envisageable de chercher toutes les valeurs propres du problème. On se contente de chercher les plus petites valeurs propres. En effet, les sons de fréquences supérieures à 20 kHz n'étant pas audibles par l'oreille humaine, il n'est pas utile de chercher des valeurs propres supérieures à $(20000 \times 2\pi)^2$.

2.2.2 Implémentation

L'implémentation est réalisée en Python avec le framework FEnICS. FEnICS est un framework permettant de résoudre des équations aux dérivées partielles avec la méthode des éléments finis. Il est principalement écrit en langage C++, et il possède une interface en Python. Dans le code, les formes bilinéaires de la formulation variationnelle s'écrivent simplement comme

```
a = dot(C*epsilon(u), epsilon(v))*dx  
b = rho*dot(u, v) dx
```

puis l'assemblage se fait avec les lignes de code suivantes

```
A = assemble_matrix(a, [bc])  
B = assemble_matrix(b, [bc])
```

où bc est un object décrivant la condition de Dirichlet sur Γ_D .

FEnICS génère du code C++ à partir la formulation variationnelle, qui est ensuite compilé à la volée en code machine. Il n'y a donc aucun appel au code Python durant l'assemblage, ce qui permet d'obtenir de meilleures performances.

Le problème aux valeurs propres est ensuite résolu à l'aide de SciPy qui fournit une interface pour le solveur ARPACK.

FEnICS permet d'exporter les résultats afin qu'ils puissent être visualisés dans le logiciel ParaView. Cependant, le framework ne gère pas l'exportation de solutions définie sur un maillages hexaédrique. Nous avons donc réalisé une fonction Python pour le faire. Cette fonction permet de sauvegarder une solution sur un maillage tétraédrique ou hexaédrique dans le format de fichier VTK.

2.2.3 Validation

Notre test de validation consiste à comparer les premières fréquences propres obtenues par notre implémentation avec celles obtenues par la résolution numérique de Reissner-Mindlin. On se place dans le cas d'une plaque carrée d'un mètre de largeur et d'un millimètre d'épaisseur. Le matériau qui la compose est supposé **isotrope**, c'est-à-dire que ses propriétés élastiques sont les mêmes dans toutes les directions.

L'équation de Reissner-Mindlin est résolue par éléments finis, à partir de la formulation variationnelle (11). La résolution est faite avec des éléments finis de Lagrange \mathbb{P}_5 , sur un maillage de quadrangles, avec environ 180.000 degrés de liberté, et est implémentée avec le framework FEnICS.

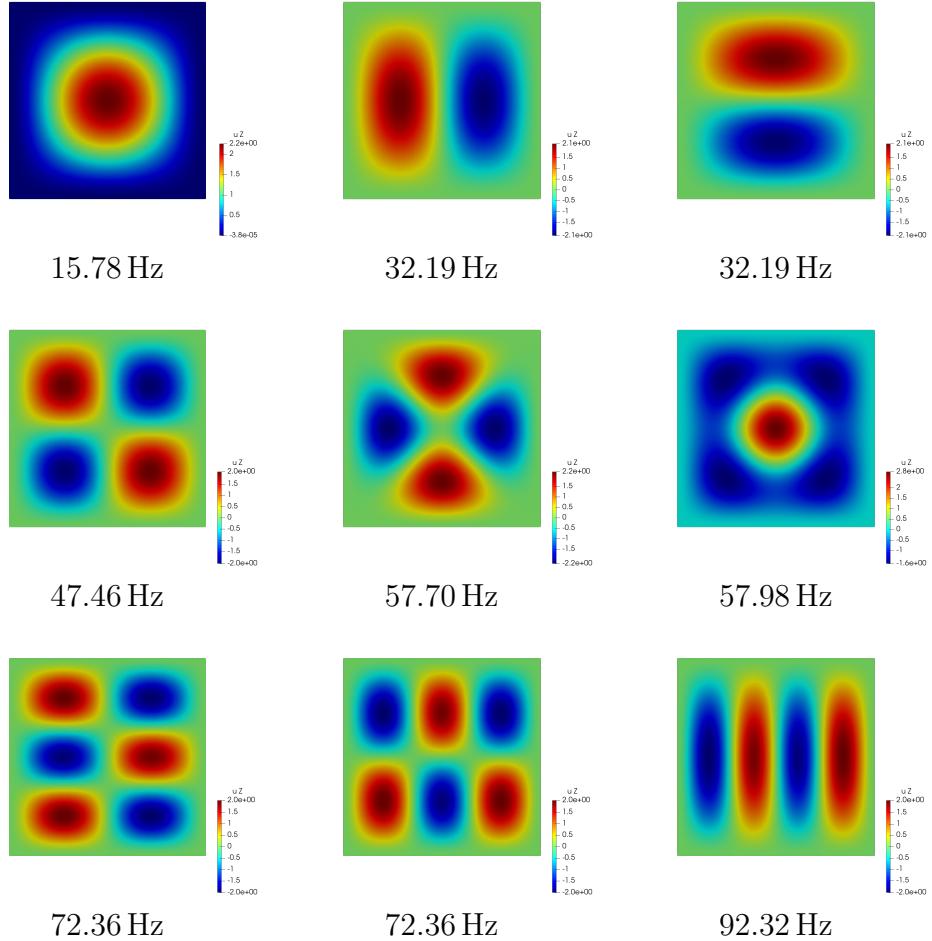


FIGURE 8 – 9 premiers mode de la plaque, calculés avec le modèle de Reissner-Mindlin

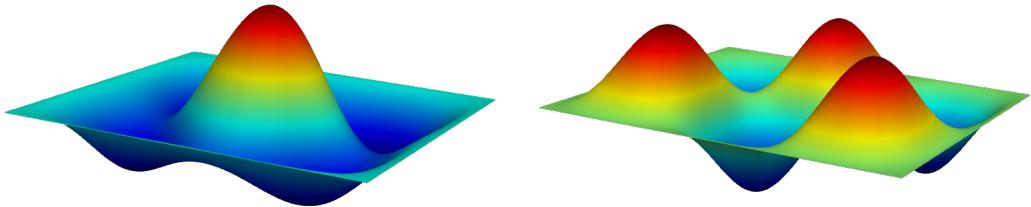


FIGURE 9 – Vue 3-D des sixième et septième modes de la plaque, calculés par le modèle de Reissner-Mindlin

Notre implémentation de l'élasticité linéaire 3-D est testée avec éléments finis de Lagrange d'ordre 2, 3, et 4, sur des maillages tétraédriques et sur des maillages hexaédriques, pour un nombre de degrés de liberté allant jusqu'à un million.

Notons

- $f_i^{3D}, i \in \mathbb{N}$ les fréquences propres trouvées pour élasticité linéaire
- $f_i^{RM}, i \in \mathbb{N}$ les fréquences propres trouvées pour Reissner-Mindlin

On calcule l'erreur relative en utilisant les quatre premières fréquences propres :

$$err = \max_{i=0,1,2,3} \left(\frac{|f_i^{3D} - f_i^{RM}|}{|f_i^{RM}|} \right)$$

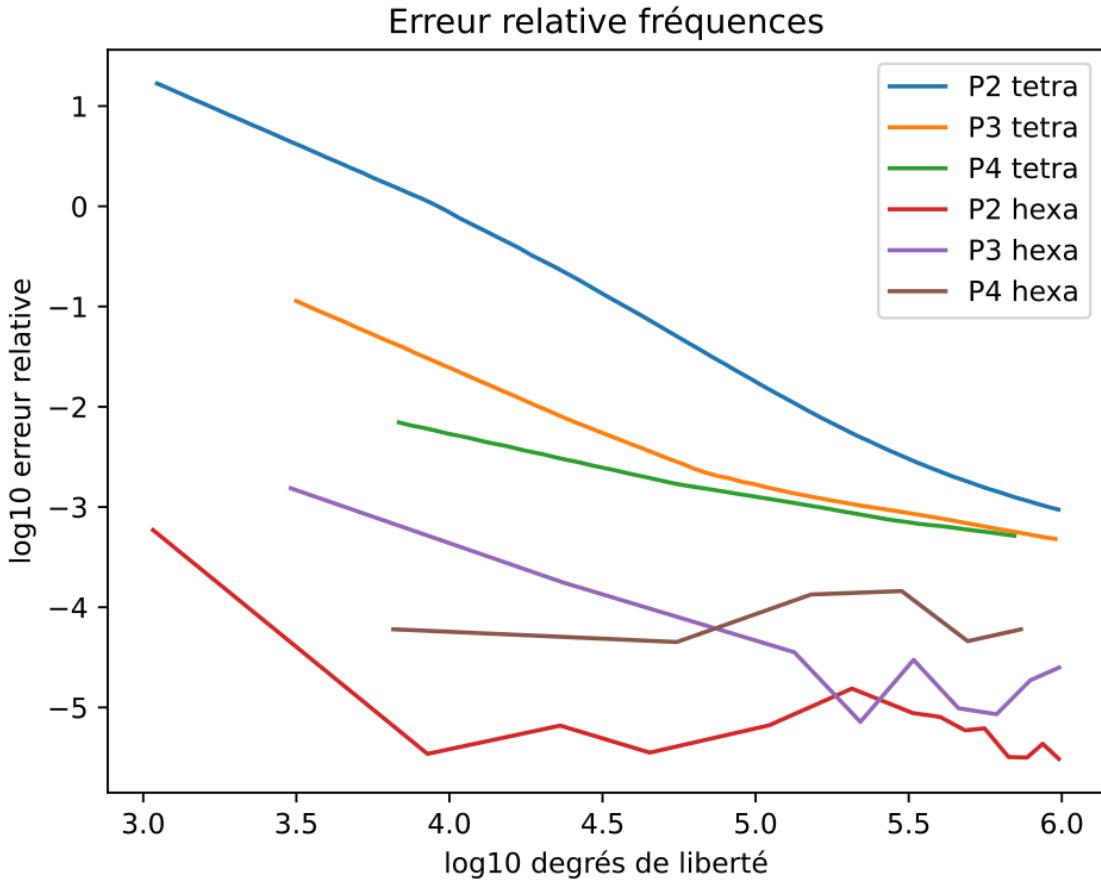


FIGURE 10 – Erreur relative des fréquences

On observe, que pour un nombre de degré de liberté fixé, les éléments finis hexaédriques semblent plus précis que les éléments finis tétraédriques. Il apparaît donc plus judicieux d'utiliser des éléments hexaédriques pour résoudre notre problème de table d'harmonie.

Par ailleurs, on observe que, pour les éléments hexaédriques, l'erreur relative décroît en fonction du nombre de degré de libertés, jusqu'à atteindre un plateau à environ 10^{-5} . Cela pourrait être dû à l'une des raisons suivantes :

- La résolution du modèle de Reissner-Mindlin n'a été faite qu'avec 180.000 degrés de libertés. Pour plus de précision, il aurait peut-être fallu résoudre le modèle sur un maillage plus fin.
- Les modèles de Reissner-Mindlin et de l'élasticité linéaire 3-D ne sont équivalents d'un point de vue mathématique. Il est donc possible que nos deux implémentations convergent vers des valeurs légèrement différentes.

Malgré cela, on peut considérer que notre implémentation passe le test de validation avec succès, car une erreur relative de 10^{-5} est tout à fait acceptable pour notre application.

3 Application à la table d'harmonie d'une guitare

3.1 Géométrie, maillage et matériaux d'une table d'harmonie

Pour calculer les modes propres d'une table d'harmonie, il faut d'abord réaliser son maillage. Nous nous sommes basés sur [7], qui nous donne des informations précises sur la forme d'une

table et de ses raidisseurs.

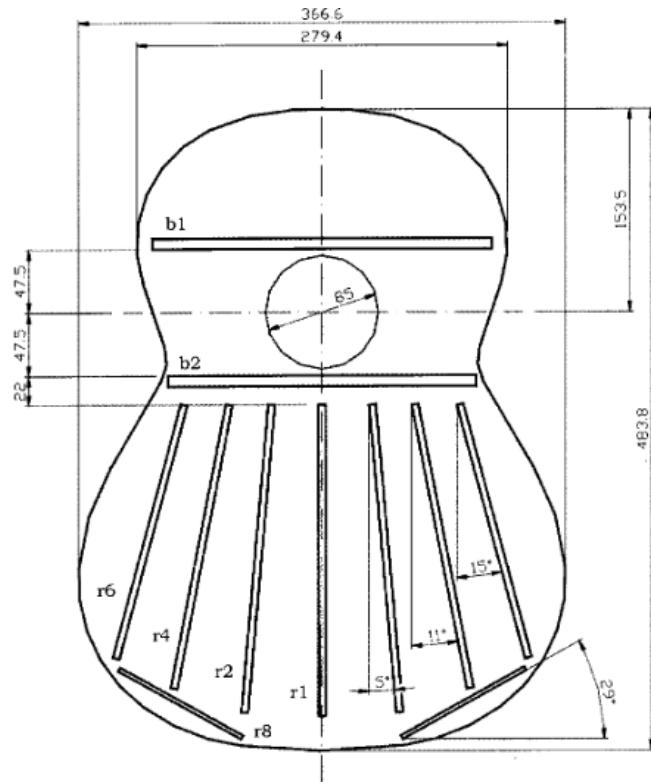


FIGURE 11 – Géométrie 2-D d'une table d'harmonie, d'après [7]



FIGURE 12 – Maillage de la table d'harmonie

La création du maillage à partir des informations disponibles s'est faite selon les étapes suivantes :

- **Reproduction 2-D de la géométrie de la table dans le logiciel de dessin vectoriel InkScape.** Il s'agit de représenter les contours de la table et des raidisseurs, à l'aide de figures géométriques comme des courbes, des segments, des ellipses, etc. La géométrie est sauvegardée au format .svg, que l'on peut ensuite importer dans une logiciel de CAO 3-D.

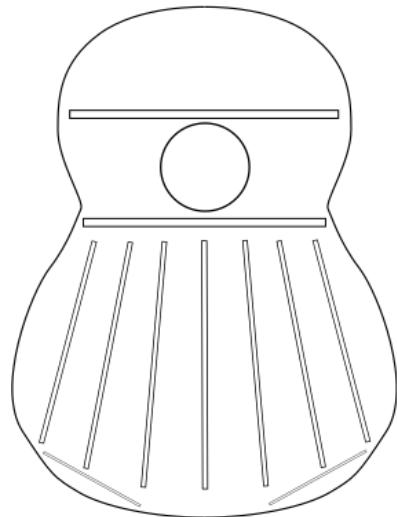


FIGURE 13 – Reproduction 2-D de la géométrie

- **Extrusion de la géométrie 2-D dans le logiciel FreeCAD afin d'obtenir une géométrie 3-D.** Cette étape consiste à donner une épaisseur à chacune des pièces, et à les placer correctement sur l'axe Z. La géométrie 3-D ainsi obtenue est exportée au format .brep.
- **Maillage de la géométrie 3-D avec Gmsh.** Il est important de préciser à Gmsh que les pièces sont solidaires entre elles, formant un solide d'un seul tenant. Pour cela on crée un fichier .geo dans lequel on ajoute les lignes suivantes :

```
SetFactory("OpenCASCADE");
v() = ShapeFromFile("geometrie.brep"); // on charge la géométrie 3-D
BooleanFragments{ Volume{v()}; Delete; }{} // les parties doivent être
→ solidaires entre elles
```

Notons qu'il est possible d'effectuer ces trois étapes entièrement avec le logiciel Gmsh, mais les deux premières sont plus faciles à réaliser à l'aide de logiciels spécialisés.

FEnICS utilise son propre format de fichier pour les maillages, qui est différent de celui utilisé par Gmsh. Nous avons donc écrit un script Python permettant de convertir les maillages générés par Gmsh vers le format supporté par FEnICS, en utilisant le module Python meshio.

Pour les matériaux, nous avons utilisés les données de [1]. La table est en *Picea Abies* tandis que les raidisseurs sont fait de *Sitka Spruce*.

	Table (Picea Abies)	Raidisseurs (Sitka Spruce)
E_1 [MPA]	10200	11880
E_2 [MPA]	1020	927
E_3 [MPA]	1600	927
G_{12} [MPA]	754	725
G_{13} [MPA]	812	760
G_{23} [MPA]	36	36
ν_{12}	0.51	0.48
ν_{13}	0.38	0.37
ν_{23}	0.31	0.24
ρ [kg · m ⁻³]	353	360

TABLE 1 – Coefficients des matériaux composant la table et les raidisseurs

La table ainsi que chacun des raidisseurs possède son propre repère d'orthotropie. Ceux des raidisseurs ne correspondent pas au repère géométrique du maillage. Il est donc nécessaire d'effectuer une rotation du tenseur de rigidité pour chacun des raidisseurs. L'expression du tenseur de rigidité, sous forme matricielle, dans le cas d'un matériau dont le repère d'orthotropie coïncide avec le repère géométrique canonique, est donnée en (6). La rotation d'angle θ dans le sens antihoraire selon l'axe Z du tenseur de rigidité s'écrit (voir [3])

$$C' = KCK^T$$

où

$$K = \begin{pmatrix} c^2 & s^2 & 0 & 0 & 0 & 2cs \\ s^2 & c^2 & 0 & 0 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ -cs & cs & 0 & 0 & 0 & c^2 - s^2 \end{pmatrix}$$

avec $c = \cos(\theta)$ et $s = \sin(\theta)$. On se retrouve donc avec un tenseur de rigidité différent pour la table d'harmonie et pour chacun des raidisseurs, ce qui fait en tout 12 tenseurs de rigidité. Pour gérer cela dans le code, on attribue un numéro à chaque élément du maillage, selon la pièce à laquelle il appartient (table, raidisseur numéro 1, raidisseur numéro 2, etc.), en utilisant les *physical groups* de Gmsh. FEnICS permet d'utiliser des opérateurs conditionnels dans l'écriture des formes variationnelles. Les expressions conditionnelles s'écrivent sous la forme suivante :

```
conditional(condition, valeur_si_condition_vraie, valeur_si_condition_fausse)
```

Les conditions peuvent s'écrire à l'aide d'opérateurs de comparaison. Par exemple `le(a,b)` est équivaut à $a \leq b$. Dans notre cas, le tenseur de rigidité peut s'écrire de la façon suivante :

```
C = conditional(le(physical_group, 1), C_1,
                 conditional(le(physical_group, 2), C_2,
# ...
                 conditional(le(physical_func, 11), C_11, C_12))))))))))
```

En ce qui concerne les conditions aux bords, en gardant les mêmes notations que dans la section 2 on considère :

- Γ_D : bord latéral, collé à la caisse, sur lequel on applique une condition de Dirichlet homogène

- Γ_N : reste du bord, libre, sur lequel on applique une condition de Neumann

Pour rappel, les conditions aux bords exactes ont été décrites en (7).

3.2 Résultats

Les modes propres sont calculés par éléments finis de Lagrange d'ordre 2, sur un maillage hexaédrique, avec 570.000 degrés de liberté.

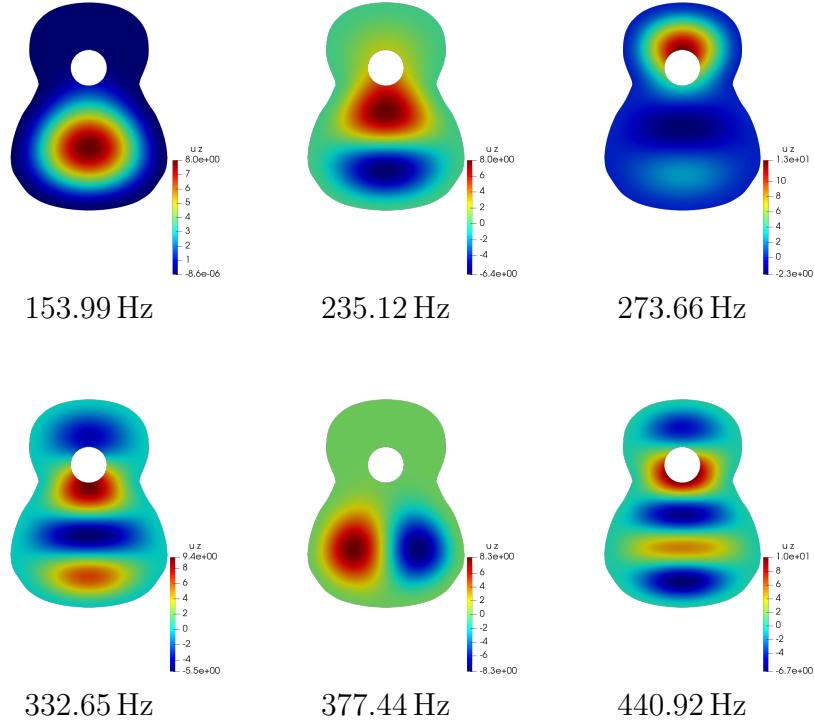


FIGURE 14 – 6 premiers mode de la table d'harmonie, sans raidisseurs

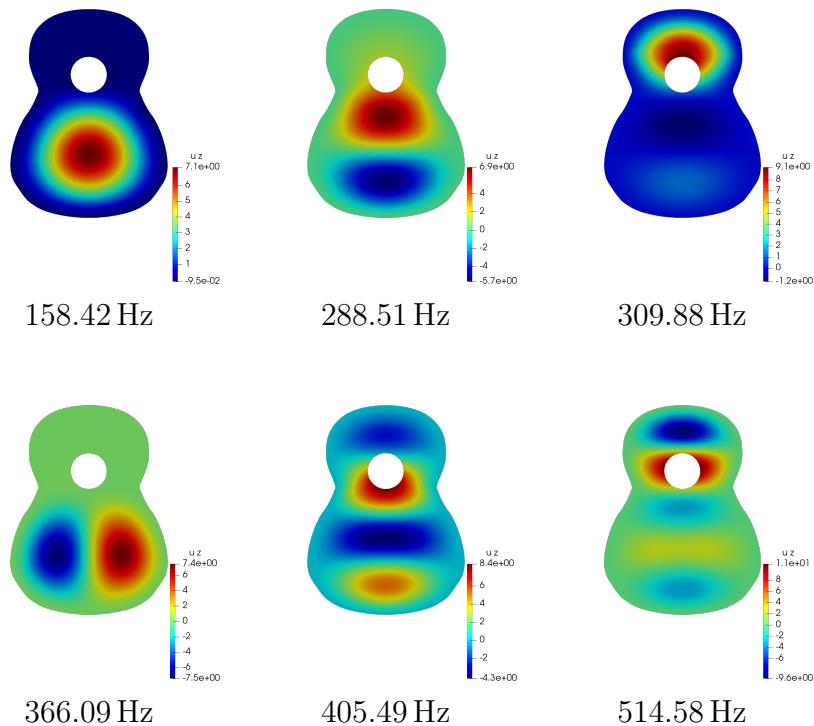


FIGURE 15 – 6 premiers mode de la table d'harmonie, avec raidisseurs

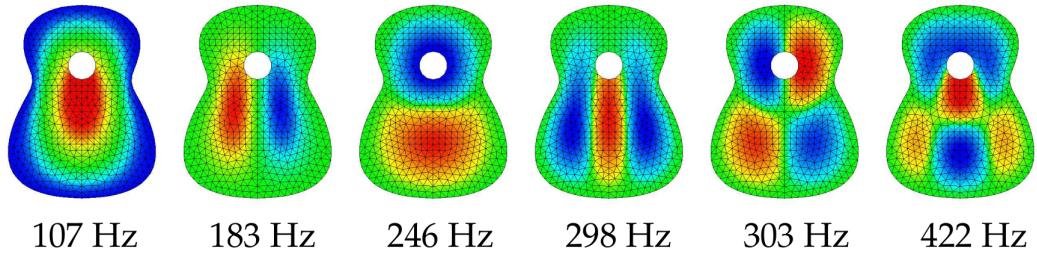


FIGURE 16 – 6 premiers mode de la table d’harmonie, sans raidisseurs, d’après [6]

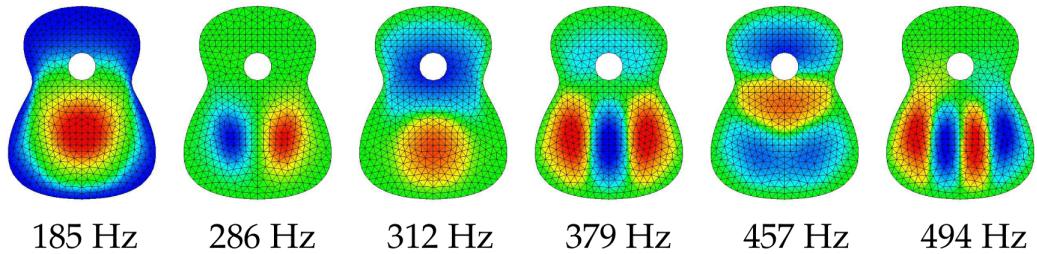


FIGURE 17 – 6 premiers mode de la table d’harmonie, avec raidisseurs, d’après [6]

La présence des raidisseurs semble avoir un effet significatif sur les fréquences propres. On observe en effet que les fréquences calculées avec raidisseurs sont plus élevées que celles calculées sans. On constate également que l’ordre d’apparition des modes propres est différent selon que la table soit raidie ou non.

En ordre de grandeur, les fréquences que nous avons trouvées semblent être en accord avec celles trouvées par [6]. En revanche, les formes des modes propres semblent être différentes, ce qui pourrait s’expliquer par les différences de géométrie ([6] utilise une géométrie simplifiée pour les raidisseurs), les différences de matériaux, et le fait que [6] utilise un modèle de plaque.

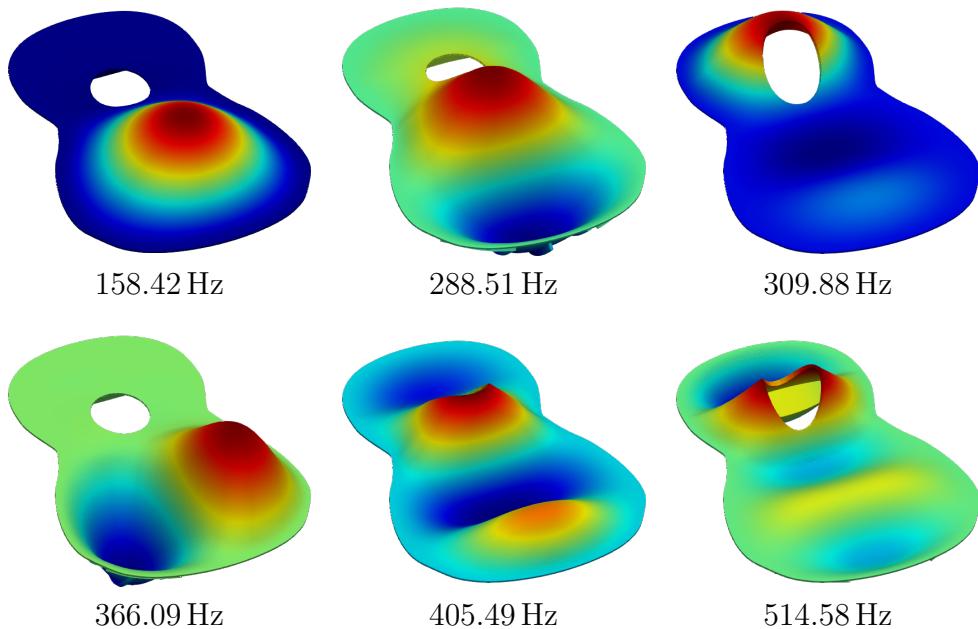


FIGURE 18 – Vue 3-D des 6 premiers mode de la table d’harmonie, avec raidisseurs

Conclusion

L'objectif de ce stage de trois mois était d'implémenter et de valider le calcul des modes propres de la table d'harmonie d'une guitare, à l'aide des équations de l'élasticité linéaire en trois dimensions.

La première partie de ce stage a été consacrée à de la recherche bibliographique, sur les domaines de la vibro-acoustique et de la modélisation instrumentale. Elle a permis de contextualiser notre travail, par rapport aux travaux déjà existants. Elle m'a également permis de me familiariser avec les équations de la vibro-acoustique.

Nous avons ensuite implémenté le calcul par éléments finis des modes propres d'une plaque. La validation de ce calcul a été faite par comparaison au modèle de plaque de Reissner-Mindlin, sur un problème test simple. Les modes propres pour ce modèle de plaque ont été calculées par éléments finis eux-aussi. Si les erreurs relatives par rapport au modèle de plaque sont satisfaisantes pour notre application, il pourrait être intéressant de pousser plus loin les calculs, afin d'observer s'il y a réellement convergence entre l'élasticité linéaire 3-D et le modèle de Reissner-Mindlin.

Nous avons finalement utilisé notre implémentation pour calculer des modes propres de la table d'harmonie d'une guitare. Les fréquences propres que nous avons obtenues sont comparables à celles que l'on trouve dans la littérature. En revanche, la forme des modes propres que nous avons calculés diffère des travaux précédents, probablement à cause des différence de géométrie, de matériaux et du modèle utilisé. Pour valider complètement nos résultats sur les modes propres d'une table d'harmonie, il serait intéressant de les confronter à d'autres résultats de simulation, ou à des données expérimentales, sur exactement la même guitare.

Enfin pour avoir une simulation instrumentale complète, il resterait à implémenter le couplage de la table à la corde, et le rayonnement de la table dans l'air, ce que nous n'avons pas fait par manque de temps. Nous avons en revanche tenté d'implémenter la synthèse du son de la guitare avec une approche simplifiée, qui n'impliquait pas de calcul de rayonnement. Malheureusement, les résultats obtenus n'étaient pas suffisamment aboutis pour être présentés dans ce rapport.

Table des figures

1	Schéma d'une guitare classique	3
2	Schéma simplifié d'une guitare vue de profil	4
3	Vue arrière de la table d'harmonie d'une guitare	5
4	4 premiers modes de la table d'harmonie d'une guitare classique [8]	6
5	Schéma d'une plaque et de ses bords	7
6	Schéma d'une plaque et sa surface médiane	10
7	Exemples d'éléments finis \mathbb{P}_2 , tétrahédrique à gauche, hexaédrique à droite	12
8	9 premiers mode de la plaque, calculés avec le modèle de Reissner-Mindlin	14
9	Vue 3-D des sixième et septième modes de la plaque, calculés par le modèle de Reissner-Mindlin	14
10	Erreur relative des fréquences	15
11	Géométrie 2-D d'une table d'harmonie, d'après [7]	16
12	Maillage de la table d'harmonie	16
13	Reproduction 2-D de la géométrie	17
14	6 premiers mode de la table d'harmonie, sans raidisseurs	19
15	6 premiers mode de la table d'harmonie, avec raidisseurs	19
16	6 premiers mode de la table d'harmonie, sans raidisseurs, d'après [6]	20
17	6 premiers mode de la table d'harmonie, avec raidisseurs, d'après [6]	20
18	Vue 3-D des 6 premiers mode de la table d'harmonie, avec raidisseurs	20

Liste des tableaux

1	Coefficients des matériaux composant la table et les raidisseurs	18
---	--	----

Références

- [1] Negin ABAEIAN. *Finite Element Design and Manufacturing of a Nylon-String Guitar Soundboard from Sandwich-Structured Composites*. 2017.
- [2] Éliane BÉCACHÉ et al. *La méthode des éléments finis. De la théorie à la pratique II. Compléments*. Les Presses de l'ENSTA, 2010.
- [3] Allan BOWER. *EN224 : Linear Elasticity*. URL : <https://www.brown.edu/Departments/Engineering/Courses/EN224/notes.htm>.
- [4] Juliette CHABASSIER. “Modélisation et simulation numérique d’un piano par modèles physiques”. Thèse de doct. École Polytechnique, 2012.
- [5] Monique DAUGE et Zohar YOSIBASH. “Eigen-frequencies in thin elastic 3-D domains and Reissner–Mindlin plate models”. In : *Mathematical Methods in the Applied Sciences* 25 (jan. 2002), p. 21-48. DOI : 10.1002/mma.278.
- [6] Grégoire DERVEAUX. “Modélisation numérique de la guitare acoustique”. Thèse de doct. École Polytechnique, 2002.
- [7] M. ELEJABARRIETA, A. EZCURRA et Carlos SANTAMARIA. “Evolution of the vibrational behavior of a guitar soundboard along successive construction phases by means of the modal analysis technique”. In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 108 (août 2000), p. 369-78. DOI : 10.1121/1.429470.
- [8] E. V. JANSSON. “A Study of Acoustical and Hologram Interferometric Measurements of the Top Plate Vibrations of a Guitar”. In : *Acta Acustica united with Acustica* 25.2 (1971).