Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów

Andrzej Kawula
Promotor: dr Monika Pilśniak

30.06.2018

Spis treści

1 Wprowadzenie

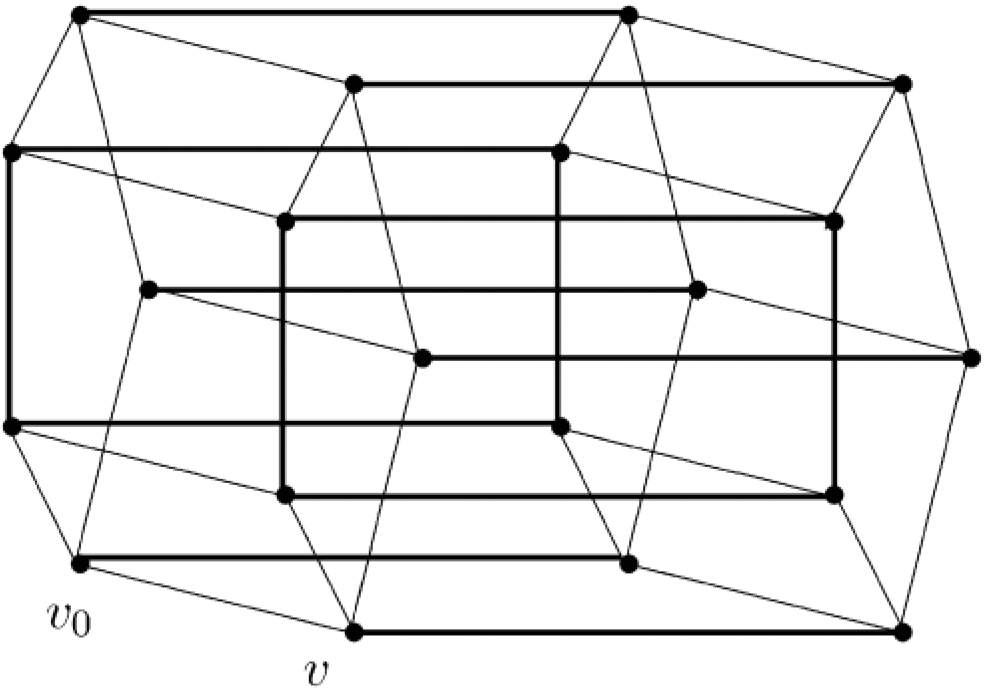
2 Wstęp

2.1 Informacje wstępne

Produktem kartezjańskim $G_1 \Box G_2$ grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy graf $G = (V, E)$, którego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów G_1 i G_2 ($V = V_1 \times V_2$), natomiast wierzchołki (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są połączone w grafie G jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 y_2 \in E_2$ lub $x_1 x_2 \in E_1$ oraz $y_1 = y_2$.
Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemiennym, z dokładnością do izomorfizu, elementem neutralym działania jest graf K_1.
Z łączności działania możemy zapisać $G_1 \Box G_2 \Box ... \Box G_k = G$ gdzie G jest produktem kartezjańskim grafów $G_1, G_2, ..., G_k$, a nastepnie poetykietować wierzchołki grafu G k-elementową listą $(v_1, v_2, ... v_k)$ gdzie $v_i \in V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Jeżeli v etykietowny jest przez listę $(v_1, v_2, ... v_k)$, można zdefiniować rzutowanie $p_i : V \to V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, które dane jest wzorem $p_i(v) = v_i$, gdzie v_i jest i-tym elemetem listy etykietującej wierzchołek v. Wierzchołek v_i ten będzie i-tą współrzędną wierzchołka v.
Jeżeli w grafie G dany jest wierzchołek v i rozważymy wierzchołki, które różnią się od wierzchołka v tylko na i-tej pozycji, to podgraf indukownay przez te wierzchołki utowrzy graf izomorficzny z grafem G_i. Podgraf ten będzie nazywany i-tą warsttwą G_i przechodzącą przez wierzchołek v a jego oznaczazeneim będzie G_i^v.
Niech v_0 będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie G. Warstwy przechodzące przez v_0 nazywamy warstwami jednostkowymi. Wierzchołek v_0 należy do każdej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory $V(G_i^{v_0}) \setminus \{v_0\}$ są parami rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant k$.
Rysunek będzie zmieniony

2.2 Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów

Niech dane będą dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Analizując współrzędne tych wierzchołków, łatwo można stwierdzić że różnią się one dokładne na jednej pozycji. Niech i oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź uv należy do G_i^v. Krawędzi uv otrzymuje kolor i czyli $c(uv) = i$, gdzie c jest kolorwaniem własciwym produktu kartezjańskiego. Podsumowując: funkcja $c : E(G) \to 1, 2, ..., k$ jest kolorowaniem własciwym produktu iloczynu kartezjańskiego jeżeli $c(uv) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków u oraz v różnią się na i-tej pozycji.
Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Rozważając podgraf grafu G



skaładający się z krawędzi koloru i to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu G.

2.3 Lemat o kwadracie

Niech graf G posiada własciwe pokolorowanie produktu kartezjańskiego. Dane sa dwie połączone krawędzie e i f różnych kolorów. Wówczas istieje dokładnie jeden kwadrat bez przekątnych (graf C_4) zawierający e oraz f.
Dowód:
Na początku rozważmy nastepujący fakt. Każdy trójkąt w grafie G jest pomalowany na ten sam kolor. Wynika to z tego, że dwa pierwsze wierzchołki różnią się na pozcyji i-tej, natomiast jeżeli wspólrzędne trzeciego wierzchołka różniły by się na pozycji j-tej która jest różna od i w porównaniu z pierwszym wierzchołkiem i jego współrzędnymi, nie było by możliwosci aby drugi i trzeci wierzchołek byłby by ze sobą połączone, ponieważ ich współrzędne różniły by się na dwóch pozycjach.
Na podstawie powyższego stwierdzenia stwierdzamy, że każdy kwadrat zawierający co najmniej jedną przekątną jest tego samego koloru.
Teraz własciwy dowodu lematu. Dane są następujące oznaczenia:
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wspólnego wierzchołka v krawędzi e oraz f
$(v_0, v_1, ..., v_i', ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wierzchołka v_e który jest drugim końcem

krawędzi e
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v'_j, ..., v_k)$ współrzędnymi wierzchołka v_f który jest drugim końcem krawędzi f
v' wierzchołek o współrzędnych $(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v'_j, ..., v_k)$
Łatwo stwierdzić, że wierzchołek v' jest połączony z wierzchołkiem v_e ponieważ ich współrzędne różnią się tylko na pozycji j oraz w grafie G_j istnieje krawędź $v_j v'_j$ ponieważ w grafie G isnieje krawęź f. Analogicznie stwierdzamy istnienie krawędzi $v'v_f$, co w połączeniu z faktem, że krawędzie e oraz f są różnego koloru i rozważaniom na temat kwadratów z przekątnymi daje nam tezę lematu. Co więcej na podstawie powyższego rozumowania, można wnioskowaćy że przeciwległe krawędzie w kwadracie mają ten sam kolor, niezależnie czy kwadrat posiada przekątne czy też nie.

2.4 Lemat o izomorfizmie

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem, natomiast $E_1, E_2, ..., E_k$ podziałem zbioru krawędzi. Niech każda spójna składowa $(V, \cup_{j \neq i} E_j)$ ma dokłdnie jeden punkt wspólny z każdą spóją skłądową (V, E_i) oraz krawędzie między dwoma składowymi (V, E_i) wyznaczają izomorfizm między tymi składowymi (jeżeli takie krawędzie istnieją). Wtedy:
$G = \Pi G_i$
gdzie G_i jest dowolną, spójną składową (V, E_i).
Dowód:
Tutaj chyba dowód indukcyjny ze względy na k, do sprawdzenia.

2.5 Lemat o udoskonaleniu faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego

3 Algorytm Faktoryzacji

3.1 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami

W tym podroździale przedstawimy algorytm kolorowania własciwego grafu względem iloczynu kartezjańskiego. Załóżmy, że mamy dane kolorywszystkich krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Kolorowanie pozostałych krawędzi będzie odbywało się w kolejnosci przeszukiwania grafu w algorytmie BFS z wierzchołkiem początkowym v_0.

Twierdzenie 3.1.1 Niech G=$G_1 \square G_2 \square ... \square G_k$ będzie grafem spójnym. Przypuscmy, że dane jest kolorawnie własciwe względem podanego rozkładu dla wszystkich krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Wtedy kolorowanie własciwe pro-

duktu kartezjańskiego może być uzyskane zgodnie z kolejnoscią algorytmu BFS o wierzchołku początkowym v_0. Złożonosć czasowa tego algorytmu to O(mn), natomiast złożonosć pamięciowa $O(n^2)$.

Dowód
Jako dowód przedstawiony zostanie algorytm kolorwania krawędzi. W pierwszym kroku algorytmu dzielimy zbiór wierzchołków grafu G na podzbiory $L_0, L_1, L_2, ..., L_r$ w taki sposób, że wierzchołek v należy do zbioru L_i wtedy i tylko wtedy gdy odległośc wierzchołka v od wierzchołka v_0 jest równa i. Zbiry te będziemy nazywać warstwami. Następnie dla każdego poziomu od 1 do r tworzymy trzy zbiory- krawędzie dolne, krawędzie poprzeczne oraz krawędzie górne. Definiowanie tych zbirów przebiega następująco. Rozważy poziom i, nastęnie dla wszystkich wierzchołków v należących do zbioru $L_i$rozważamy krawędzie vu incydentne z v. Wówczas jeżeli u należy do L_{i-1} to krawędź vu będzie krawędzią dolną. Jeżeli u należy do L_i wówczas uv będzie krawędzią poprzeczną, jeżeli natomiast u należy do L_{i+1} wówczas uv będzie krawędzią górną wierzchołka warstwy L_i. Zauważmy, że krawędzie dolne warstwy L_{i+1} to ten sam zbiór co krawędzie górne warstwy L_i .

Nasz algorytm rozpoczynamy od pokolorowania krawędzi poprzeczych L_1. Nie stanowi to problemy, ponieważ każdy trójkąt jest monochromatyczny. Tak więc każdej krawędzi uv nadajemy kolor krawędzi v_0v czyli $c(uv) := c(vv_0) = c(uv_0)$.

Następnie idnukcyjnie kolorujemy krawędzie dolne a następnie poprzeczne warstwy L_{i+1} mając już pokolorowane krawędzie dolne i poprzeczne warstwy L_i. Nie ma potrzeby kolorowania krawędzi górnych warstwy L_i ponieważ zbiór ten jest również zbiorem krawędzi dolnych warstwy L_{i+1}.

Zaczynamy od krawędzi dolych. Przeglądamy wierzchołki należące do L_{i+1} zgodnie z kolejnoscią wyznaczoną przez algorytm BFS. Niech dany będzie wierzchołek u oraz krawędź uv. Ponieważ wierzchołek v należy do L_i, gdzie $i \geqslant 1$ to istnieje wierzchołek w należący do L_{i-1} incydentny z v. Rozważmy dwa przypadki:

1. Nie istnieje wspólny sąsiad wierzchołków u oraz w różny od v. Wówczas nie istnieje kwadrat zawierający wierzchołki u oraz w a co za tym idzie kolory krawędzi uv oraz vw są te same czyli $c(uv) := c(vw)$.

2. Istnieje wspólny sąsiad x wierzchołków u oraz w różny od v. W tym przypadku $c(uv) := c(xw)$ oraz $c(ux) := c(vw)$.

Uzasadnienia w obydwu przypadkach wynikają z lematu o kwadracie (2.3).
Rozważmy teraz krawędzie poprzeczne warstwy L_{i+1}. W tym celu również przeglądamy wierzchołki należące do tej warstwy. Dla każdej krawędzi uv należącej do kra-

wędzi poprzecznych rozważaniej warstwy szukamy krawędzi dolnej uw i podobnie jak dla krawędzi dolych szukamy wspólnego sąsiada wierzchołków v oraz w. Jesli takowy wierzchołek x instnieje wówczas $c(uv) := c(wx)$, jesli nie $c(uv) := c(uw)$.

3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom

3.3 Etykietowanie produktu kartezjańskiego

3.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym

3.5 Sprawdzanie spójnosci kolorowanie właciwego produktu iloczynu kartezjańskiego

3.6 Opis algorytm faktoryzacji

4 Implementacja Algorytmu

4.1 Wprowadzenie

4.2 Dane wejsciowe

4.3 Opis pakietów i ważniejszych klas

4.4 Opis algorytm faktoryzacji