Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów

Andrzej Kawula
Promotor: dr Monika Pilśniak

30.06.2018

Spis treści

1 Wprowadzenie

2 Wstęp

2.1 Informacje wstępne

Produktem kartezjańskim $G_1 \square G_2$ grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazwyamy graf $G = (V, E)$, którrego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów G_1 i G_2 ($V = V_1 \times V_2$), natomiast wierzchołki (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są połączone w grafie G jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 y_2 \in E_2$ lub $x_1 x_2 \in E_1$ oraz $y_1 = y_2$.
Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemiennym, z dokładnością do izomorfizu, elementem neutralym działania jest graf K_1.
Z łączności działania możemy zapisać $G_1 \square G_2 \square ... \square G_k = G$ gdzie G jest produktem kartezjańskim grafów $G_1, G_2, ..., G_k$, a nastepnie poetykietować wierzchołki grafu G k-elementową listą $(v_1, v_2, ... v_k)$ gdzie $v_i \in V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Jeżeli v etykietowny jest przez listę $(v_1, v_2, ... v_k)$ możemy zdefiniować rzutowanie $p_i : V \to V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, które dane jest wzorem $p_i(v) = v_i$, gdzie v_i jest i-tym elemetem listy etykietującej wierzchołek v. Wierzchołek v_i będziemy nazywać i-tą współrzędną wierzchołka v.
Jeżeli w grafie G mamy wierzchołek v i rozważymy wierzchołki, które różnią się od wierzchołka v tylko na i-tej pozycji, to podgraf indukownay przez te wierzchołki utowrzy graf izomorficzny z grafem G_i. Podgraf ten będziemy nazywać i-tą warstwą G_i przechodzącą przez wierzchołek v i oznaczać G_i^v.
Niech v_0 będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie G. Warstwy przechodzące przez v_0 będziemy nazywać warstwami jednostkowymi. Wierzchołek v_0 należy do każej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory $V(G_i^{v_0}) \setminus \{v_0\}$ są parami rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant k$.
Tutaj będzie przykład

2.2 Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów

Rozważmy dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Jeżeli przenanalizujemy współrzędne tych wierzchołków to stwierdzimy że różnią się one dokładne na jednej pozycji. Niech i oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź uv należy do G_i^v. Nadajemy krawędzi uv kolor i i będziemy to oznaczać $c(uv) = i$. Podsumowując: funkcję $c : E(G) \to 1, 2, ..., k$ będzimy nazywać kolorowaniem własciwym produktu iloczynu kartezjańskiego jeżeli $c(uv) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków u oraz v różnią się na i-tej pozycji.

Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Jeżeli rozważymy podgraf grafu G skaładający się z krawędzi koloru i to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu G.

2.3 Lemat o kwadracie

Niech graf G posiadł własciwe pokolorowanie produktu kartezjańskiego. Rozważmy dwie połączone krawędzie e i f różnych kolorów. Wówczas istieje dokładnie jeden kwadrat bez przekątnych (graf C_4) zawierający e oraz f.
Dowód:
Zauważmy na początku nastepujący fakt. Każdy trójkąt w grafie G jest pomalowany na ten sam kolor. Wynika to z tego, że dwa pierwsze wierzchołki różnią się na pozcyji i-tej, natomiast jeżeli wspólrzędne trzeciego wierzchołka różniły by się na pozycji j-tej która jest różna od i w porównaniu z pierwszym wierzchołkiem i jego współrzędnymi, nie było by możliwosci aby drugi i trzeci wierzchołek byłby by ze sobą połączone, ponieważ ich współrzędne różniły by się na dwóch pozycjach.
Na podstawie powyższego stwierdzenia dochodzimy do wniosku, że każdy kwadrat zawierający co najmniej jedną przekątną jest tego samego koloru.
Przejdźmy teraz do dowodu lematu. Wprowadźmy następujące oznaczenia:
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wspólnego wierzchołka v krawędzi e oraz f
$(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wierzchołka v_e który jest drugim końcem krawędzi e
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v'_j, ..., v_k)$ współrzędnymi wierzchołka v_f który jest drugim końcem krawędzi f
v' wierzchołek o współrzędnych $(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v'_j, ..., v_k)$
Łatwo stwierdzić, że wierzchołek v' jest połączony z wierzchołkiem v_e ponieważ ich współrzędne różnią się tylko na pozycji j oraz w grafie G_j istnieje krawędź $v_j v'_j$ ponieważ w grafie G isnieje krawęź f. Analogicznie możemy stiwerdzić istnienie krawędzi $v' v_f$, co w połączeniu z faktem, że krawędzie e oraz f są różnego koloru i rozważaniom na temat kwadratów z przekątnymi daje nam tezę lematu. Co więcej na podstawie powyższego rozumowania, wnioskujemy że przeciwległe krawędzie w kwadracie mają ten sam kolor, niezależnie czy kwadrat posiada przekątne czy też nie.

3 Algorytm Faktoryzacji

3.1 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami

3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom

3.3 Etykietowanie produktu kartezjańskiego

3.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym

3.5 Sprawdzanie spójnosci kolorowanie właciwego produktu iloczynu kartezjańskiego

3.6 Opis algorytm faktoryzacji

3.7 Wprowadzenie

4 Implementacja Algorytmu

4.1 Wprowadzenie

4.2 Dane wejsciowe

4.3 Opis pakietów i ważniejszych klas

4.4 Opis algorytm faktoryzacji