Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów

Andrzej Kawula
Promotor: dr Monika Pilśniak

30.06.2018

Spis treści

1 Wprowadzenie

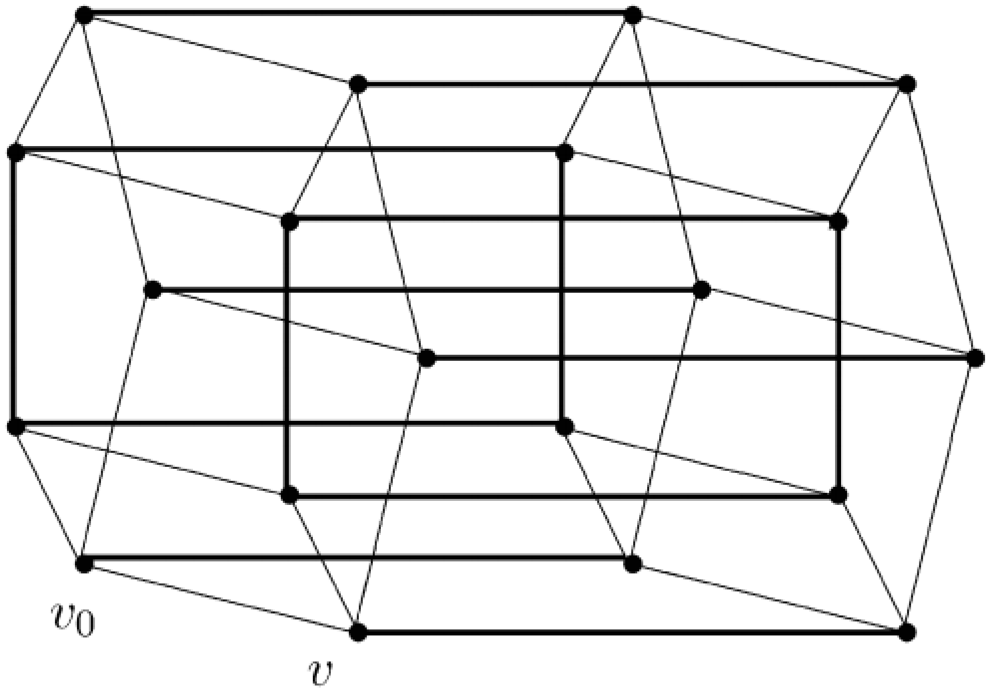
2 Wstęp

2.1 Informacje wstępne

Produktem kartezjańskim $G_1 \square G_2$ grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy graf $G = (V, E)$, którego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów G_1 i G_2 ($V = V_1 \times V_2$), natomiast wierzchołki (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są połączone w grafie G jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 y_2 \in E_2$ lub $x_1 x_2 \in E_1$ oraz $y_1 = y_2$.
Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemiennym, z dokładnością do izomorfizu, elementem neutralym działania jest graf K_1.
Z łączności działania możemy zapisać $G_1 \square G_2 \square ... \square G_k = G$ gdzie G jest produktem kartezjańskim grafów $G_1, G_2, ..., G_k$, a nastepnie poetykietować wierzchołki grafu G k-elementową listą $(v_1, v_2, ...v_k)$ gdzie $v_i \in V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Jeżeli v etykietowny jest przez listę $(v_1, v_2, ...v_k)$, można zdefiniować rzutowanie $p_i : V \to V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, które dane jest wzorem $p_i(v) = v_i$, gdzie v_i jest i-tym elemetem listy etykietującej wierzchołek v. Wierzchołek v_i ten będzie i-tą współrzędną wierzchołka v.
Jeżeli w grafie G dany jest wierzchołek v i rozważymy wierzchołki, które różnią się od wierzchołka v tylko na i-tej pozycji, to podgraf indukownay przez te wierzchołki utowrzy graf izomorficzny z grafem G_i. Podgraf ten będzie nazywany i-tą warsttwą G_i przechodzącą przez wierzchołek v a jego oznaczazeneim będzie G_i^v.
Niech v_0 będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie G. Warstwy przechodzące przez v_0 nazywamy warstwami jednostkowymi. Wierzchołek v_0 należy do każdej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory $V(G_i^{v_0}) \setminus \{v_0\}$ są parami rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant k$.
Rysunek będzie zmieniony

2.2 Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów

Niech dane będą dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Analizując współrzędne tych wierzchołków, łatwo można stwierdzić że różnią się one dokładne na jednej pozycji. Niech i oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź uv należy do G_i^v. Krawędzi uv otrzymuje kolor i czyli $c(uv) = i$, gdzie c jest kolorwaniem własciwym produktu kartezjańskiego. Podsumowując: funkcja $c : E(G) \to 1, 2, ..., k$ jest kolorowaniem własciwym produktu iloczynu kartezjańskiego jeżeli $c(uv) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków u oraz v różnią się na i-tej pozycji.
Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Rozważając podgraf grafu G



skaładający się z krawędzi koloru i to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu G.

2.3 Lemat o kwadracie

Niech graf G posiada własciwe pokolorowanie produktu kartezjańskiego. Dane sa dwie połączone krawędzie e i f różnych kolorów. Wówczas istieje dokładnie jeden kwadrat bez przekątnych (graf C_4) zawierający e oraz f.

Dowód:

Na początku rozważmy nastepujący fakt. Każdy trójkąt w grafie G jest pomalowany na ten sam kolor. Wynika to z tego, że dwa pierwsze wierzchołki różnią się na pozcyji i-tej, natomiast jeżeli wspólrzędne trzeciego wierzchołka różniły by się na pozycji j-tej która jest różna od i w porównaniu z pierwszym wierzchołkiem i jego współrzędnymi, nie było by możliwosci aby drugi i trzeci wierzchołek byłby by ze sobą połączone, ponieważ ich współrzędne różniły by się na dwóch pozycjach.
Na podstawie powyższego stwierdzenia stwierdzamy, że każdy kwadrat zawierający co najmniej jedną przekątną jest tego samego koloru.
Teraz własciwy dowodu lematu. Dane są następujące oznaczenia:
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wspólnego wierzchołka v krawędzi e oraz f
$(v_0, v_1, ..., v_i', ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędne wierzchołka v_e który jest drugim końcem

krawędzi e
$(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v'_j, ..., v_k)$ współrzędnymi wierzchołka v_f który jest drugim końcem krawędzi f
v' wierzchołek o współrzędnych $(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v'_j, ..., v_k)$
Łatwo stwierdzić, że wierzchołek v' jest połączony z wierzchołkiem v_e ponieważ ich współrzędne różnią się tylko na pozycji j oraz w grafie G_j istnieje krawędź $v_j v'_j$ ponieważ w grafie G isnieje krawęź f. Analogicznie stwierdzamy istnienie krawędzi $v'v_f$, co w połączeniu z faktem, że krawędzie e oraz f są różnego koloru i rozważaniom na temat kwadratów z przekątnymi daje nam tezę lematu. Co więcej na podstawie powyższego rozumowania, można wnioskowaćy że przeciwległe krawędzie w kwadracie mają ten sam kolor, niezależnie czy kwadrat posiada przekątne czy też nie.

2.4 Lemat o izomorfizmie

Niech $G = (V, E)$ będzie spójnym grafem, natomiast $E_1, E_2, ..., E_k$ podziałem zbioru krawędzi. Niech każda spójna składowa $(V, \cup_{j \neq i} E_j)$ ma dokłdnie jeden punkt wspólny z każdą spóją skłądową (V, E_i) oraz krawędzie między dwoma składowymi (V, E_i) wyznaczają izomorfizm między tymi składowymi (jeżeli takie krawędzie istnieją). Wtedy:
$G = \Pi G_i$
gdzie G_i jest dowolną, spójną składową (V, E_i).
Dowód:
Tutaj chyba dowód indukcyjny ze względy na k, do sprawdzenia.

2.5 Lemat o udoskonaleniu faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego

3 Algorytm Faktoryzacji

3.1 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami

W tym podroździale przedstawimy algorytm kolorowania własciwego grafu względem iloczynu kartezjańskiego. Załóżmy, że mamy dane kolorywszystkich krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Kolorowanie pozostałych krawędzi będzie odbywało się w kolejnosci przeszukiwania grafu w algorytmie BFS z wierzchołkiem początkowym v_0.

Twierdzenie 3.1.1 Niech G=$G_1 \square G_2 \square ... \square G_k$ będzie grafem spójnym. Dane jest kolorawnie własciwe względem podanego rozkładu dla wszystkich krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Wtedy kolorowanie własciwe produktu kartezjańskiego może być uzyskane zgodnie z kolejnoscią algorytmu BFS o wierzchołku początkowym v_0. Złożonosć czasowa tego algorytmu to $O(mn)$, natomiast złożonosć pamięciowa $O(n^2)$.

Dowód
Jako dowód przedstawiony zostanie algorytm kolorwania krawędzi. W pierwszym kroku algorytmu dzielimy zbiór wierzchołków grafu G na podzbiory $L_0, L_1, L_2, ..., L_r$ w taki sposób, że wierzchołek v należy do zbioru L_i wtedy i tylko wtedy gdy odległoćs wierzchołka v od wierzchołka v_0 jest równa i. Zbiory te będziemy nazywać poziomami. Następnie dla każdego wierzchołka, wszystkie krawędzie incydentne z tym wierzchołkiem dzielimy na trzy zbiory- zbiór kawędzi dolnych, poprzecznych i górnych. Definiowanie tych zbirów przebiega następująco. Rozważy poziom i, nastęnie dla wszystkich wierzchołków v należących do zbioru $L_i$rozważamy krawędzie vu incydentne z v. Wówczas jeżeli u należy do L_{i-1} to krawędź vu będzie krawędzią dolną. Jeżeli u należy do L_i wówczas uv będzie krawędzią poprzeczną, jeżeli natomiast u należy do L_{i+1} wówczas uv będzie krawędzią górną wierzchołka warstwy L_i. Zauważmy, że krawędzie dolne wierzchołków poziomu L_{i+1} są krawędziami górnymi wierzchołków poziomu L_i .

Nasz algorytm rozpoczynamy od pokolorowania krawędzi poprzeczych L_1. Nie stanowi to problemy, ponieważ każdy trójkąt jest monochromatyczny. Tak więc każdej krawędzi uv nadajemy kolor krawędzi v_0v czyli $c(uv) := c(vv_0) = c(uv_0)$.

Następnie idnukcyjnie kolorujemy krawędzie dolne a następnie poprzeczne L_{i+1} mając już pokolorowane krawędzie dolne i poprzeczne L_i. Nie ma potrzeby kolorowania krawędzi górnych L_i ponieważ zbiór ten jest również zbiorem krawędzi dolnych L_{i+1}.

Zaczynamy od krawędzi dolych. Przeglądamy wierzchołki należące do L_{i+1} zgodnie z kolejnoscią wyznaczoną przez algorytm BFS. Niech dany będzie wierzchołek u oraz krawędź uv. Ponieważ wierzchołek v należy do L_i, gdzie $i \geqslant 1$ to istnieje wierzchołek w należący do L_{i-1} sąsiedni z v. Rozważmy dwa przypadki:

1. Nie istnieje wspólny sąsiad wierzchołków u oraz w różny od v. Wówczas nie istnieje kwadrat zawierający wierzchołki u oraz w a co za tym idzie kolory krawędzi uv oraz vw są te same czyli $c(uv) := c(vw)$.

2. Istnieje wspólny sąsiad x wierzchołków u oraz w różny od v. W tym przypadku $c(uv) := c(xw)$ oraz $c(ux) := c(vw)$.

Uzasadnienia w obydwu przypadkach wynikają z lematu o kwadracie (2.3).
Rozważmy teraz krawędzie poprzeczne L_{i+1}. W tym celu również przeglądamy wierzchołki należące do tego poziomu. Dla każdej krawędzi uv należącej do krawędzi poprzecznych rozważanego poziomu szukamy krawędzi dolnej uw i podobnie jak dla krawędzi dolych szukamy wspólnego sąsiada wierzchołków v oraz w. Jesli takowy wierzchołek x instnieje wówczas $c(uv) := c(wx)$, jesli nie $c(uv) := c(uw)$.
Zauważmy, że aby wyznaczyć G_i wystarczy znaleźć $G_i^{v_0}$. Wierzchołek v należy do $V(G_i^{v_0})$ wtedy i tylko wtedy gdy wszyskie jego krawędzie dolne są koloru i. Tak więc aby wyznaczyć G_i wystarczy przejrzeć wszystkie krawędzie dolne wszystkich wierzchołków, jeżeli lista ta jest monochromatyczna wierzchołek ten będzie należał do $V(G_i^{v_0})$ gdzie i to kolor krawędzi dolych tego wierzchołka.
W rozdziale 2.1 zdefiniowalimy warstwy jednostkowe $G_i^{v_0}$. Wierzchołki należące do $G_i^{v_0}$ będziemy nazywać wierzchołkami warstwy jednostkowej. Oczywiscie wszystkie wierzchołki należące do L_1 będą wierzchołkami warstw jednostkowych.
Rozważając jeszcze raz krawędzie dolne oraz poprzeczne wierzchołków warstw jednostkowych, na podstawie spójnosci produktu iloczynu kartezjańsiego stwierdzamy, że i krawędzie dolne i krawędzie górne tychże wierzchołków należą do warst jednostkowych.
Na koniec pozostaje nam wykazanie, że nasz algorytm rzeczywiscie spełnia założenia dotyczące złożonosci pamięcowej i czasowej. Zauważmy że dla każdego wierzchołka należącego do L_i, gdzie $i > 0$ szukamy dolnego sąsiada, następnie przeglądamy wszystkie krawędzie dolne oraz poprzeczne. Tak więc wykonujemy co najwyżej $2m$ kroków w naszym algorytmie, gdzie m oznacza liczbę krawędzi naszego grafu G. Dla ustalonych krawędzi uv oraz uw szukamy wspólnego sąsiada x. Mamy co najwyżej $n = G(V)$ możliwosci wyboru tego sąsiada. Jeżeli informacje o krawędziach grafu są przetrzymywane w tablicy sąsiedztwa sprawdzenie czy dany wierzchołek jest sąsiadem innego można wykonać w czasie stałym. Tak więc dowiedlimy, że złożonosć czasowa algorytmu to $O(mn)$, natomiast złożonosć pamięciowa $O(n^2)$.

3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom

W poprzednim podroździale opisalismy algorytm kolorowania krawędzi, jednakże nie podawalismy spospobu, jak nadać współrzędne wierzchołkom. Zdefinukemy teraz algoytm, który nada współrzędne naszym wierzchołkom, mając już dane kolory wszystkich krawędzi.

Twierdzenie 3.2.1 Niech $G = G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_k$ *będzie grafem spójnym. Dane jest również kolorawnie właściwe produktu względem podanego rozkłądu. Algorytm nadania współrzędnych wierzchołkom może być zrealizowany w złożonosci czasowej i pamięciowej* $O(mn)$.

Dowód
Dla każdego wierzchołka, aby móc przechować informację o jego współrzędnych, potrzebujemy k-elementowej tablicy. Ponieważ k jest mniejsze od minimalnego stopnia grafu oraz $\delta(G) \cdot n \leqslant m$ to całkowity rozmiar tablic ze wszpółrzędnymi jest mniejszy bądź równy $O(m)$.

3.3 Etykietowanie produktu kartezjańskiego

3.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym

3.5 Sprawdzanie spójnosci kolorowanie właciwego produktu iloczynu kartezjańskiego

3.6 Opis algorytm faktoryzacji

4 Implementacja Algorytmu

4.1 Wprowadzenie

4.2 Dane wejsciowe

4.3 Opis pakietów i ważniejszych klas

4.4 Opis algorytm faktoryzacji