Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów

Andrzej Kawula
Promotor: dr Monika Pilśniak

30.06.2018

Spis treści

1 Wprowadzenie

2 Wstęp

2.1 Informacje wstępne

Produktem kartezjańskim $G_1 \square G_2$ grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazwyamy graf $G = (V, E)$, którrego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów G_1 i G_2 ($V = V_1 \times V_2$), natomiast wierzchołki (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są połączone w grafie G jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 y_2 \in E_2$ lub $x_1 x_2 \in E_1$ oraz $y_1 = y_2$.
Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemiennym, z dokładnością do izomorfizu, elementem neutralym działania jest graf K_1.
Z łączności działania możemy zapisać $G_1 \square G_2 \square ... \square G_k = G$ gdzie G jest produktem kartezjańskim grafów $G_1, G_2, ..., G_k$, a nastepnie poetykietować wierzchołki grafu G k-elementową listą $(v_1, v_2, ... v_k)$ gdzie $v_i \in V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Jeżeli v etykietowny jest przez listę $(v_1, v_2, ... v_k)$ możemy zdefiniować rzutowanie $p_i : V \to V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, które dane jest wzorem $p_i(v) = v_i$, gdzie v_i jest i-tym elemetem listy etykietującej wierzchołek v. Wierzchołek v_i będziemy nazywać i-tą współrzędną wierzchołka v.
Jeżeli w grafie G mamy wierzchołek v i rozważymy wierzchołki, które różnią się od wierzchołka v tylko na i-tej pozycji, to podgraf indukownay przez te wierzchołki utowrzy graf izomorficzny z grafem G_i. Podgraf ten będziemy nazywać i-tą warstwą G_i przechodzącą przez wierzchołek v i oznaczać G_i^v.
Niech v_0 będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie G. Warstwy przechodzące przez v_0 będziemy nazywać warstwami jednostkowymi. Wierzchołek v_0 należy do każej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory $V(G_i^{v_0})$ są parami rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant k$.
Tutaj będzie przykład

2.2 Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów

Rozważmy dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Jeżeli przenanalizujemy współrzędne tych wierzchołków to stwierdzimy że różnią się one dokładne na jednej pozycji. Niech i oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź uv należy do G_i^v. Nadajemy krawędzi uv kolor i i będziemy to oznaczać $c(uv) = i$. Podsumowując: funkcję $c : E(G) \to 1, 2, ..., k$ będzimy nazywać kolorowaniem własciwym produktu iloczynu kartezjańskiego jeżeli $c(uv) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków u oraz v różnią się na i-tej pozycji.

Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Jeżeli rozważymy podgraf grafu G skaładający się z krawędzi koloru i to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu G.

3 Algorytm Faktoryzacji

3.1 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami

3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom

3.3 Etykietowanie produktu kartezjańskiego

3.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym

3.5 Sprawdzanie spójnosci kolorowanie właciwego produktu iloczynu kartezjańskiego

3.6 Opis algorytm faktoryzacji

3.7 Wprowadzenie

4 Implementacja Algorytmu

4.1 Wprowadzenie

4.2 Dane wejsciowe

4.3 Opis pakietów i ważniejszych klas

4.4 Opis algorytm faktoryzacji