AGH

AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA
W KRAKOWIE

---

praca magisterska

Liniowy algorytm rozkładu iloczynu kartezjańskiego grafów na czynniki pierwsze

Andrzej Kawula

kierunek: matematyka

specjalizacja: matematyka w informatyce

nr albumu: 258604

opiekun: dr hab. Monika Pilśniak

WYDZIAŁ
MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kraków, 2019

Oświadczenie studenta

Uprzedzony(-a) o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2018 r. poz. 1191 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystyczne wykonanie albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także uprzedzony(-a) o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 307 ust. 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.) „Student podlega odpowiedzialności dyscyplinarnej za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyn uchybiający godności studenta.", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy. Jednocześnie Uczelnia informuje, że zgodnie z art. 15a ww. ustawy o prawie autorskim i prawach pokrewnych Uczelni przysługuje pierwszeństwo w opublikowaniu pracy dyplomowej studenta. Jeżeli Uczelnia nie opublikowała pracy dyplomowej w terminie 6 miesięcy od dnia jej obrony, autor może ją opublikować, chyba że praca jest częścią utworu zbiorowego. Ponadto Uczelnia jako podmiot, o którym mowa w art. 7 ust. 1 pkt 1 ustawy z dnia 20 lipca 2018 r. – Prawo o szkolnictwie wyższym i nauce (Dz. U. z 2018 r. poz. 1668 z późn. zm.), może korzystać bez wynagrodzenia i bez konieczności uzyskania zgody autora z utworu stworzonego przez studenta w wyniku wykonywania obowiązków związanych z odbywaniem studiów, udostępniać utwór ministrowi właściwemu do spraw szkolnictwa wyższego i nauki oraz korzystać z utworów znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych, w celu sprawdzania z wykorzystaniem systemu antyplagiatowego. Minister właściwy do spraw szkolnictwa wyższego i nauki może korzystać z prac dyplomowych znajdujących się w prowadzonych przez niego bazach danych w zakresie niezbędnym do zapewnienia prawidłowego utrzymania i rozwoju tych baz oraz współpracujących z nimi systemów informatycznych.

.....

(czytelny podpis studenta)

Streszczenie

Inspiracją oraz głównym źródłem wykorzystywanym w niniejszej pracy magisterskiej jest artykuł Wilfrieda Imricha oraz Iztoka Peterina z 2007 roku pod tytułem "Recognizing Cartesian product in linear time".

Pierwszy rozdział zawiera informacje o badaniach iloczynu kartezjańskiego grafów, ze szczególnym uwzględnieniem faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego na czynniki pierwsze oraz ogólną koncepcję algorytmu opisanego w pracy. Drugi rozdział to opis podstawowych definicji, związanych z teorią grafów, iloczynem kartezjańskim grafów i jego rozkładem oraz dowody lematów wykorzystywanych w algorytmie. Trzeci rozdział to opis algorytmu kolorowania krawędzi grafu. Czwarty opisuje procedurę etykietowania grafu będącą rozszerzeniem definicji kolorowania, opisanej w rozdziale trzecim. Piąty rozdział to opis procedury nazwanej sprawdzaniem spójności. Następny rozdział opisuje ostateczny algorytm faktoryzacji wykorzystujący, po za wspomnianymi wcześniej procedurami etykietowania i sprawdzania spójności, procedurę łączenia kolorów. Ostatni rozdział to podsumowanie prac.

Abstract

Article of Wilffred Imrich and Izotok Peterin from 2007 "Recognizing Cartesian product in linear time" was the inspiration and main origin using in this master thesis.

First chapter maintain information about researches with cartesian product of graph, mainly related with factorisation of cartesian product, and idea of algorith placed in this thesis. Second chapter describe theorems related with graph theory and cartesian product of graphs, also few lemmas, witch are used in our algorithm. Third chapter describe coloring algorithm. Fourth shows labbeling procedure, witch is extension of coloring, described in third chapter. Fifth chapter describe procedure called consistency check. Next chapter is finall algorithm of prime factorisation of cartesian product of graphs witch use also procedure called color merging, beside mention labelling and consistency check. Last chapter is conclusion of whole thesis.

Słowa kluczowe: graf, iloczyn kartezjański grafów, faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów, złożoność pamięciowa, złożoność obliczeniowa, przeszukiwanie grafu wszerz, kolorowanie, etykietowanie, sprawdzanie spójności, łączenie kolorów.

Keywords: graph, cartesian product of graphs, factoring cartesian product of graphs, memory complexity, computational complexity, breadth-first search, coloring, labelling, consistency check, colors merging.

Spis treści

1 Wstęp

Inspiracją oraz głównym źródłem wykorzystywanym w niniejszej pracy magisterskiej jest artykuł Wilfrieda Imricha oraz Iztoka Peterina z 2007 roku pod tytułem "Recognizing Cartesian product in linear time" [4].

Iloczyn kartezjański jest powszechny w teorii grafów. Ma on szczególne własności algebraiczne, strukturalne i metryczne. Najbardziej znanymi przykładami są hiperkostki, grafy Hamminga czy kraty. Hiperkostki to potęgi grafu K_2, grafy Hamminga to iloczyn grafów pełnych natomiast kraty to iloczyn ścieżek. Iloczyn kartezjański jak i izomorficzne podgrafy tegoż iloczynu mają wiele zastosowań w informatyce, chemii czy biologii.

Jeżeli chodzi o prace nad produktem kartezjańskim na początek trzeba wspomnieć o publikacjach Sabidussiego [6] oraz Wizinga [7] z lat '60 ubiegłego stulecia. Część rozważań dotyczyła możliwości rozłożenia danego grafu na iloczyn grafów prostych, gdzie grafem prostym nazywamy graf, który nie jest iloczynem kartezjańskim dwóch innych grafów nietrywialnych (czyli posiadających więcej niż jeden wierzchołek). Niezależnie Sabidussi oraz Wizing udowodnili, że każdy graf spójny posiada unikalny rozkład na iloczyn grafów prostych z dokładnością do kolejności oraz izomorfizmu czynników. Dla grafów niespójnych faktoryzacja grafów może być niejednoznaczna.

Jeżeli chodzi o dalsze prace nad iloczynem kartezjańskim grafów, w latach '70 powstało pytanie, czy istnieje wielomianowy algorytm, pozwalający na faktoryzację grafu spójnego na czynniki pierwsze. Pierwszy dowód tego faktu powstał w 1985 roku, kiedy to Feigenbaum [3] opisał algorytm o złożoności czasowej $O(n^{4.5})$, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków w grafie, będącym iloczynem kartezjańskim. Winkler [9] niezależnie skonstruował zupełnie inny algorytm o złożoności $O(n^4)$, a następnie Feder [2] algorytm o złożoności czasowej $O(nm)$ oraz pamięciowej $O(m)$. Następnie Aurenhammer [1] zmodyfikował jeszcze ten algorytm, dzięki czemu złożoność czasowa spadała do $O(m \cdot log(n))$.

Algorytm zaprezentowany w niniejszej pracy jest liniowy zarówno jeżeli chodzi o złożoność czasową jak i pamięciową. Tak więc osiągamy najmniejszą możliwą złożoność do osiągnięcia. Jest on również łatwiejszy jeżeli chodzi o samą koncepcję od przedstawionych powyżej. Polega on na podziale zbioru krawędzi grafu wejściowego na zbiory reprezentujące czynniki proste, będące elementami iloczynu kartezjańskiego. Ten podział krawędzi jest nieodłączną

własnością metryczną naszego wejściowego grafu. Wystarczy znaleźć ten podział, nie ma potrzeby tworzenia dodatkowych struktur, wystarczy rozszerzyć podstawowe. Nie trzeba także dokonywać dekompozycji naszego grafu wejściowego w czasie działania algorytmu.

Praca została podzielona na kilka rozdziałów. Pierwszy, jak można było przeczytać zawiera informacje o historii prac nad problemem faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego grafów. Drugi opisuje podstawowe pojęcia z teorii grafów, terminologię związaną z iloczynem kartezjańskim grafów, jak i twierdzenia wykorzystywane w kolejnych rozdziałach. Trzeci rozdział przedstawia algorytm kolorowania krawędzi, który posłuży nam następnie do faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego. Następny rozdział rozszerza kolorowanie przedstawione w poprzednim rozdziale, zwane dalej etykietowaniem krawędzi. Piąty rozdział przedstawia kompletny algorytm faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego grafów, wykorzystujący po za wspomnianym wcześniej etykietowaniem, procedurę łączenia kolorów. Ostatni rozdział to podsuwanie prac.

Tak jak wspomniano na początku praca ta opiera się na artykule ”Recognizing Cartesian product in linear time”. W ramach prac dokonano translacji tego artykułu, lekko zmieniając jego formę. W ramach pracy twórczej przeprowadzono dowód lematu o trójkącie oraz lematu o kwadracie , wykonano analizę tworzenia tablic inicjalizowanych częściowo oraz dowód liniowej złożoności sprawdzania spójności.

2 Wprowadzenie

W tym rozdziale opiszemy podstawowe definicje i twierdzenia związane z tematyką naszej pracy. Zaczniemy od podstawowych definicji z teorii grafów. Następnie przedstawimy algorytm przeszukiwania grafu. W dalszej części przejdziemy do definicji związanych z iloczynem kartezjańskim grafów a na końcu opiszemy kilka lematów wykorzystywanych w następnych rozdziałach.

2.1 Graf

Grafem nazywamy uporządkowaną parę (V, E), gdzie V jest niepustym zbiorem, natomiast $E \subseteq P_2(V)$, gdzie $P_2(V)$ jest zbiorem wszystkich dwuelementowych podzbiorów zbioru V. Zbiór V będzie nazywany zbiorem **wierzchołków**, natomiast E zbiorem **krawędzi**. **Rzędem** grafu nazywamy ilość wierzchołków, natomiast **rozmiar** grafu to ilość krawędzi. Dla danej krawędzi $\{v_1, v_2\}$ mówimy, że wierzchołki v_1 oraz v_2 są **końcami** tej krawędzi. Krawędź jest **incydentna** z wierzchołkiem, jeżeli jest on końcem tej krawędzi. Mówimy, że dwa wierzchołki $v_1, v_2 \in V$ są **sąsiednie**, jeżeli występuje między nimi krawędź, czyli $\{v_1, v_2\} \in E$ Jeżeli zbiór V jest zbiorem skończonym, wówczas mówimy o **grafach skończonych**, w przeciwnym przypadku mowa o **grafach nieskończonych**. W tej pracy skupimy się tylko i wyłącznie na grafach skończonych.

Podgrafem danego grafu G nazywamy graf, powstały poprzez usunięcie z grafu G wierzchołków lub krawędzi, przy czym usunięcie wierzchołka powoduje usunięcie wszystkich krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem. **Podgrafem indukowanym** na zbiorze wierzchołków V' nazywamy podgraf powstały przez usunięcie wszystkich wierzchołków nie należących do V'.

Listę $v_1, v_2, ..., v_k$, składającą się z wierzchołków, nazywamy **ścieżką**, jeżeli dla dowolnego $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$ wierzchołki v_i oraz v_{i+1} są sąsiednie. **Ścieżka prosta**, to ścieżka, w której dowolny wierzchołek pojawia się maksymalnie jeden raz. Analogicznie definiujemy **drogę** oraz **drogę prostą** między wierzchołkami, z tą różnicą, że elementami drogi są krawędzie oraz wierzchołek początkowy jest końcem pierwszej krawędzi w drodze, natomiast wierzchołek końcowy jest końcem ostatniej krawędzi. Jeżeli między dwoma wierzchołkami istnieje droga, to **odległością** między wierzchołkami nazywamy długość najkrótszej drogi między nimi. Jeżeli w grafie, między dwoma dowolnymi wierzchołkami, występuje ścieżka to graf ten nazywamy **grafem spójnym**. W tej pracy skupimy się wyłącznie na takich grafach.

Stopień wierzchołka v to ilość krawędzi, incydentnych z danym wierzchołkiem. Oznaczamy go $d(v)$.

Z tego, że każda krawędź ma dwa końce można wywnioskować następujący fakt, że w każdym grafie $G = (V,E)$ zachodzi równość:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Równość ta znana jest jako **lemat o uścisku dłoni**.

Najmniejszym stopniem wierzchołka w grafie nazywamy najmniejszy stopień, pośród wszystkich wierzchołków grafu, analogicznie definiujemy **największy stopień wierzchołka**.

Mówimy, że dwa grafy są **izomorficzne** jeżeli istnieje bijekcja zbioru wierzchołków grafu pierwszego na zbiór wierzchołków grafu drugiego, taka że jeżeli dwa wierzchołki są połączone w jednym z grafów to i również połączone są dwa odpowiadające im wierzchołki w drugim z grafów. Bijekcję tą nazywamy **izomorfizmem**. Izomorfizm grafów zachowuje wiele własności grafów, między innymi liczbę wierzchołków i krawędzi, stopnie wierzchołków, spójność. Dlatego często grafy izomorficzne utożsamia się ze sobą.

2.2 Reprezentacje grafów

Przez reprezentację grafu rozumiemy sposób, w jaki jest on przetrzymywany w pamięci. Jest to kluczowe zagadnienie w każdym algorytmie grafowym. Wśród reprezentacji grafów najczęściej rozpowszechnione są listy sąsiedztwa oraz tablica sąsiedztwa.

Jeżeli chodzi o listy sąsiedztwa, idea polega na tym że każdemu wierzchołkowi przyporządkowujemy listę długości stopnia danego wierzchołka. W liście tej znajdują się wszystkie wierzchołki sąsiadujące z danym wierzchołkiem. Całkowita długość tych list jak i czas potrzebny do inicjalizacji jest zatem proporcjonalny do liczby krawędzi grafu. W przypadku tablicy sąsiedztwa, tworzona jest dwuwymiarowa tablica $n \times n$, gdzie n to rząd grafu. W komórce (u,v) mamy informację czy wierzchołki u oraz v są połączone. W standardowym przypadku, jeżeli w komórce tej istnieje wartość 0 wówczas wierzchołki te są niepołączone, w przeciwnym przypadku widnieje tam wartość 1. Inicjalizacja takiej tablicy oraz ilość pamięci potrzebna do stworzenia takiej tablicy jest proporcjonalna do kwadratu ilości wierzchołków. Tak więc zaletą pierwszej reprezentacji jest

mniejsza złożoność czasowa i pamięciowa, jednakże druga reprezentacja pozwala w czasie stałym określić czy dane dwa wierzchołki są połączone, co dla pierwszej reprezentacji, w pesymistycznym przypadku może być wykonane w czasie proporcjonalnym do ilości krawędzi. Stosowanie pierwszej lub drugiej reprezentacji jest zatem zależne od problemu który mamy rozwiązać. W naszej pracy będziemy wykorzystywać obydwie reprezentację aczkolwiek końcowy algorytm będzie korzystał tylko z list sąsiedztwa, co jest wymuszone założeniami o złożoności czasowej i pamięciowej algorytmu faktoryzacji.

Wśród pozostałych reprezentacji warto wspomnieć o macierzy incydencji, tablicy krawędzi czy pękach wejściowych. Oczywiście dla specjalnych klas grafów mogą istnieć specyficzne reprezentacje. To samo tyczy się grafów nie będących grafami prostymi.

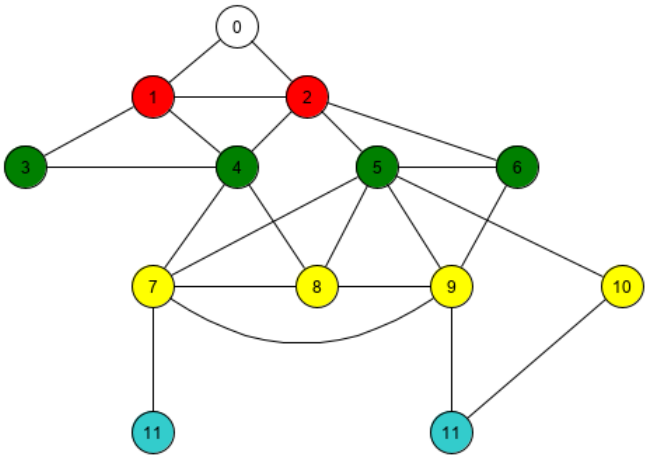
2.3 Przeszukiwanie grafu wszerz

W naszej pracy kilkukrotnie będziemy iterować po wszystkich wierzchołkach naszego grafu. Do tego celu będziemy wykorzystywać algorytm przeszukiwania grafu wszerz, nazywany dalej algorytmem BFS (ang. *breadth-first search, BFS*). Opiszemy tutaj wersję algorytmu dla grafów spójnych, gdyż jak już wcześniej wspomniano, tylko takimi grafami będziemy zajmować się w tej pracy.

Na wejściu otrzymujemy graf G oraz wyróżniony wierzchołek początkowy. Celem naszego algorytmu jest odwiedzenie wszystkich wierzchołków. W zależności od potrzeb podczas tych odwiedzin można wykonywać pewne operacje. Dla przykładu, będziemy obliczać odległość każdego wierzchołka od wierzchołka początkowego. Przedstawimy teraz pseudokod tegoż algorytmu.

```
BFS(Graf G, Wierzchołek s)
    dla każdego wierzchołka v grafu G
        odwiedzony[v] = nieodwiedzony;
        odległość[v] = nieskończoność;
    odwiedzony[s]=do odwiedzenia;
    odległość[s]=0;
    Q.dodaj(s);
    dopóki kolejka Q jest niepusta
        v=Q.pobierz pierwszy element
        dla każdego sąsiada u wierzchołka v
            jeżeli odwiedzony[u]=nieodwiedzony
                odwiedzony[u]=do odwiedzenia;
                odległość[u]=odległość[v]+1;
                Q.dodaj(u);
        odwiedzony[v]=odwiedzony;
```

Dla grafów spójnych algorytm ten odwiedzi każdy z wierzchołków.
Poniżej przykładowy graf i kolejność w jakiej zostały odwiedzone wierzchołki. Tym samym kolorem zostały oznaczone wierzchołki o takiej samej odległości od wierzchołka początkowego.



Rysunek 1: Kolejność odwiedzania wierzchołków w algorytmie BFS

Na koniec pozostaje nam kwestia złożoności czasowej i pamięciowej algorytmu BFS. Zakładamy, że graf podany na wejściu jest w postaci list sąsiedztwa. Niech n oznacza liczbę wierzchołków natomiast m liczbę krawędzi.

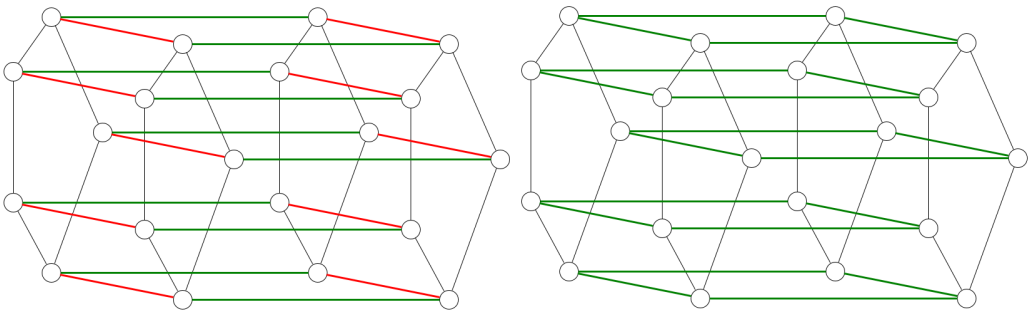
Jeżeli chodzi o złożoność pamięciową, na wejściu posiadamy tablicę wierzchołków długości n i listy sąsiedztwa o sumarycznej długości m. W trakcie działania algorytmu używamy dwóch tablic oraz kolejki, każda struktura o długości n. Tak więc sumaryczna złożoność pamięciowa jest równa $O(m+n)$ co dla grafów spójnych jest równoważne $O(m)$.

Co do złożoności czasowej, odwiedzamy każdy wierzchołek dokładnie raz a w pesymistycznym przypadku przechodzimy również po każdej krawędzi. Tak więc złożoność czasowa naszego algorytmu jest równa $O(m+n)$ co dla grafu spójnego znów sprowadza się do $O(m)$.

2.4 Iloczyn kartezjański grafów

Iloczynem kartezjańskim zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych par (a,b), takich że a należy do zbioru A natomiast b należy do B. Iloczyn kartezjański zbiorów A i B oznacza się symbolem $A \times B$.

Iloczynem kartezjańskim grafów $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ nazywamy graf $G = (V, E)$, którego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów G_1 i G_2 $(V = V_1 \times V_2)$, natomiast wierzchołki (x_1, y_1) oraz (x_2, y_2) są połączone w grafie G jeżeli $x_1 = x_2$ oraz $y_1 y_2 \in E_2$ lub $x_1 x_2 \in E_1$ oraz $y_1 = y_2$. Iloczyn kartezjański grafów oznaczamy symbolem $G_1 \square G_2$.



Rysunek 2: G=$C_5 \square K_2 \square K_2 = C_5 \square C_4$

Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemiennym, z dokładnością do izomorfizmu, elementem neutralnym działania jest graf K_1, co zaraz wykażemy.

Twierdzenie 1. *Iloczyn kartezjański grafów jest przemienny.*

Dowód

Mamy dane dwa grafy $G_1 = (V_1, E_1)$ oraz $G_2 = (V_2, E_2)$. Chcemy pokazać, że istnieje izomorfizm między grafami $G_1 \Box G_2$ oraz $G_2 \Box G_1$.

Zdefiniujmy zatem następujące odwzorowanie $\varphi : V_1 \times V_2 \to V_2 \times V_1$, takie że $\varphi(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$. Jest ono oczywiście bijekcją, bo jest to iniekcja i suriekcja. Tak więc musimy teraz wykazać, że wierzchołki w grafie $G_1 \Box G_2$ są połączone wtedy i tylko wtedy gdy odpowiadające wierzchołki, zgodnie z naszym odwzorowaniem φ, są połączone w grafie $G_2 \Box G_1$.

Rozważmy dwa połączone wierzchołki (v_1, v_2) oraz (v_1', v_2') grafu $G_1 \Box G_2$. Z definicji iloczynu kartezjańskiego wiemy, że $v_1 = v_1'$ i $v_2 v_2' \in E_2$ lub $v_1 v_1' \in E_1$ i $v_2 = v_2'$. Załóżmy ze zachodzi pierwszy warunek. Dowód dla drugiego przebiega analogicznie. Możemy zatem zapisać, że wierzchołki (v_1, v_2) oraz (v_1, v_2') są połączone. Zobaczy zatem jak wyglądają ich odwzorowania. Zgodnie z definicją $\varphi(v_1, v_2) = (v_2, v_1)$ oraz $\varphi(v_1, v_2') = (v_2', v_1)$. Tak więc wierzchołki (v_2, v_1) i (v_2', v_1) są połączone w grafie $G_2 \Box G_1$ ponieważ $v_2 v_2' \in E_2$, co chcieliśmy wykazać.

Dowód w drugą stronę przebiega analogicznie. Tak więc φ jest izomorfizmem, co kończy dowód.

■

Twierdzenie 2. *Graf K_1 jest elementem neutralnym iloczynu kartezjańskiego grafów.*

Dowód

Rozważmy graf $G = (V, E)$. Będziemy chcięli wykazać, że grafy G oraz $G_1 \Box K_1$ są izomorficzne.

Zdefiniujmy zatem następujące odwzorowanie $\varphi : V \to V \times \{v'\}$, takie że $\varphi(v) = (v, v')$, gdzie v' jest jedynym wierzchołkiem K_1. Odwzorowanie to jest oczywiście bijekcją. Trzeba wykazać że dwa wierzchołki w grafie G są połączone wtedy i tylko wtedy gdy dwa odpowiadające im wierzchołki, zgodnie z naszym odwzorowaniem, są połączone w grafie $G \Box K_1$.

Rozważmy dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Z definicji naszego odwzorowania $\varphi(u) = (u, v')$ oraz $\varphi(v) = (v, v')$. Z definicji iloczynu kartezjańskiego wierzchołki (u, v') oraz (v, v') są połączone, co chcieliśmy pokazać.

Dowód w drugą stronę przebiega analogicznie. Tak więc φ jest izomorfizmem, co chcieliśmy wykazać.

■

Twierdzenie 3. *Iloczyn kartezjański grafów jest łączny.*

Dowód

Rozważmy trzy grafy $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ oraz $G_3 = (V_3, E_3)$. Będziemy chcięli wykazać, że $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$ i $G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$ są izomorficzne.

Na początek dowodu rozważmy iloczyn kartezjański grafów $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$. Krótka analiza, na podstawie definicji iloczynu kartezjańskiego grafów, doprowadzi nas do konkluzji, że wierzchołki $((v_1, v_2), v_3)$ oraz $((v_1', v_2'), v_3')$ są połączone jeżeli $v_1 = v_1'$ i $v_2 = v_2'$ i $v_3 v_3' \in E_3$ lub $v_1 = v_1'$ i $v_2 v_2' \in E_2$ i $v_3 = v_3'$ lub $v_1 v_1' \in E_1$ i $v_2 = v_2'$ i $v_3 = v_3'$. Analogiczny wniosek jest dla grafu $G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$.

Rozważmy następujące odwzorowanie $\varphi : (V_1 \times V_2) \times V_3 \to V_1 \times (V_2 \times V_3)$, takie że $\varphi((v_1, v_2), v_3) = (v_1, (v_2, v_3))$. Odwzorowanie to jest oczywiście bijekcją. Musimy więc jeszcze wykazać, że dwa wierzchołki w grafie $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$ są połączone wtedy i tylko wtedy gdy dwa odpowiadające im wierzchołki, zgodnie z naszym odwzorowaniem, są połączone w grafie $G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$.

Rozważmy dwa połączone wierzchołki w grafie $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$. Przyjmijmy, że wierzchołki te można opisać jako $((v_1, v_2), v_3)$ oraz $(v_1, v_2), v_3')$. Pozostałe przypadki, gdy wierzchołki są połączone w grafie $(G_1 \Box G_2) \Box G_3$ dowodzi się analogicznie. Z definicji naszego odwzorowania $\varphi((v_1, v_2), v_3) = (v_1, (v_2, v_3))$ oraz $\varphi((v_1, v_2), v_3') = (v_1, (v_2, v_3'))$. Tak więc wierzchołki te są połączone w grafie $G_1 \Box (G_2 \Box G_3)$ ponieważ, z rozważania na początku dowodu, $v_3 v_3' \in E_3$, co chcieliśmy pokazać.

Dowód w drugą stronę przebiega analogicznie. Tak więc φ jest izomorfizmem, co chcieliśmy wykazać.

■

Z łączności iloczynu kartezjańskiego można zapisać $G_1 \Box G_2 \Box ... \Box G_k = G$. Wszystkim wierzchołkom grafu można przypisać k-elementową listę $(v_1, v_2, ...v_k)$, gdzie $v_i \in V(G_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Lista ta będzie odtąd nazywana **współrzędną wierzchołka** v i będzie służyć do określenia pozycji danego wierzchołka w produkcie.

Korzystając ze współrzędnych, możemy zdefiniować rzutowanie $p_i : V \to V_i$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$, które dane jest wzorem $p_i(v) = v_i$, gdzie v_i jest i-tym elementem współrzędnych wierzchołka v. Wierzchołek v_i grafu G_i będzie i-tą współrzędną wierzchołka v.

Jeżeli w grafie G dany jest wierzchołek v i rozważymy wierzchołki, które różnią się od wierzchołka v tylko na i-tej pozycji, to podgraf indukowany przez te wierzchołki utworzy graf izomorficzny z grafem G_i. Podgraf ten będzie nazywany i-tą **warstwą** G_i przechodzącą przez wierzchołek v a jego oznaczeniem będzie G_i^v.

Niech v_0 będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie G. Wierzchołek ten będziemy nazywać **wierzchołkiem jednostkowym**, natomiast wszystkie warstwy przechodzące przez v_0 nazywamy **warstwami jednostkowymi**. Wierzchołek v_0 należy do każdej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory $V(G_i^{v_0}) \setminus \{v_0\}$ są parami rozłączne dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Wierzchołek jednostkowy będzie pierwszym wierzchołkiem, od którego będziemy rozpoczynać wszystkie procedury opisane w następnych rozdziałach.

Faktoryzacja lub inaczej **rozkład na czynniki** to proces, którego celem, dla podanego na wejściu obiektu x, jest znalezienie takich obiektów, że ich iloczyn jest równy x. Obiekty te nazywamy **czynnikami**. **Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafu** polega zatam na znalezieniu takich grafów, których iloczyn kartezjański jest równy podanemu grafowi. **Faktoryzacją prostą iloczynu kartezjańskiego grafu** nazywamy taką faktoryzację, że każdy graf będący czynnikiem jest **grafem pierwszym**, czyli takim, że nie da się go przedstawić jako iloczynu dwóch nietrywialnych grafów, czyli grafów mających więcej niż jeden wierzchołek. Każdy graf spójny posiada jednoznaczną, z dokładnością do izomorfizmu i kolejności czynników, faktoryzację prostą. Dla grafów niespójnych faktoryzacja ta jest niejednoznaczna [6] [7].

Celem naszej pracy jest właśnie znalezienie algorytmu faktoryzacji prostej grafu spójnego. Do tego celu potrzeba nam jeszcze kilku twierdzeń.

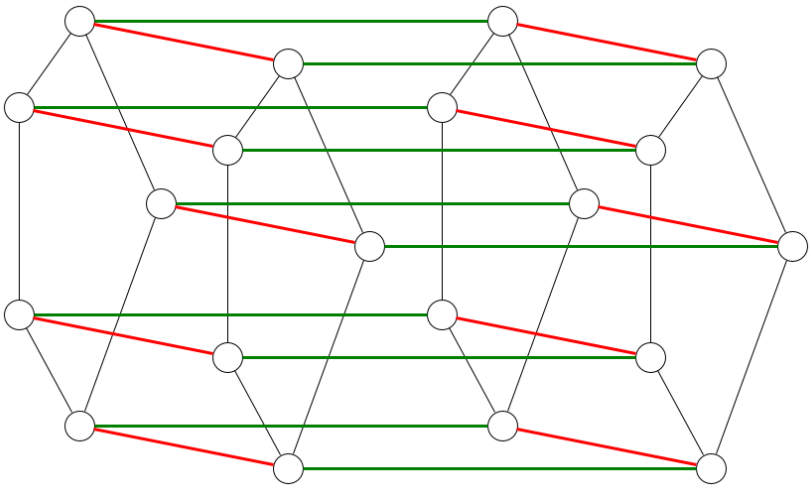
2.5 Lematy wykorzystywane w algorytmie faktoryzacji

W tym podroździale opiszemy kilka lematów niezbędnych do skonstruowania algorytmu faktoryzaji prostej iloczynu kartezjańskiego grafów.

Lemat 4 (Lemat o izomorfizmie)**.** *Niech $G = (V,E)$ będzie spójnym grafem, natomiast $E_1, E_2, ..., E_k$ podziałem zbioru krawędzi. Niech każda spójna składowa $(V, \cup_{j \neq i} E_j)$ ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą spójną składową (V, E_i) oraz krawędzie między dwoma składowymi (V, E_i) wyznaczają izomorfizm między tymi składowymi (jeżeli takie krawędzie istnieją). Wtedy: $G = \square_{i=1}^{k} G_i$ gdzie G_i jest dowolną, spójną składową (V, E_i).*

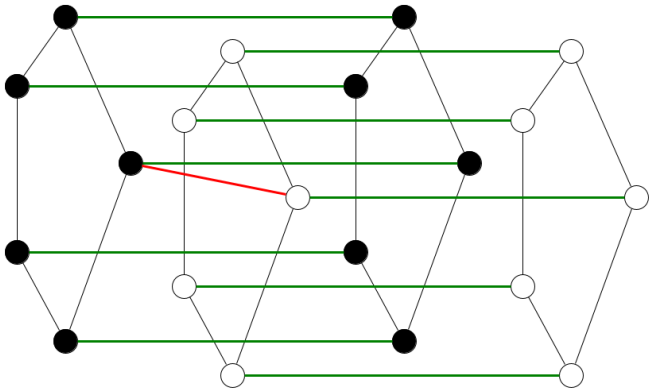
■

Aby lepiej przedstawić założenia tego lematu posłużymy się przykładem. Rysunek poniżej przedstawia podział zbioru krawędzi na trzy podzbiory. Każdy podzbiór reprezentowany jest przez jeden kolor.



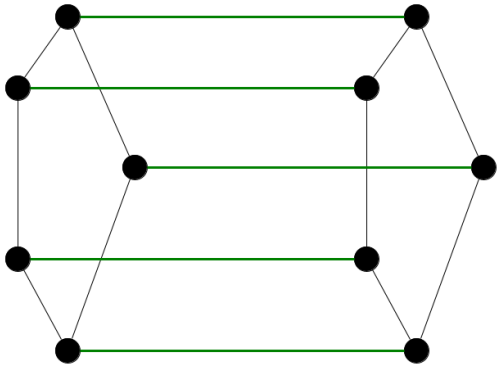
Rysunek 3: Podział zbioru krawędzi

Rozważmy jedną spójną składową koloru czerwonego oraz spójne składowe złożone z krawędzi koloru innego niż czerwony. Widzimy że każda z nich ma dokładnie jeden punkt wspólny z czerwoną składową. Podobną analizę można przeprowadzić dla każdej spójnej składowej dowolnego koloru.



Rysunek 4: Wspólne wierzchołki spójnych składowych

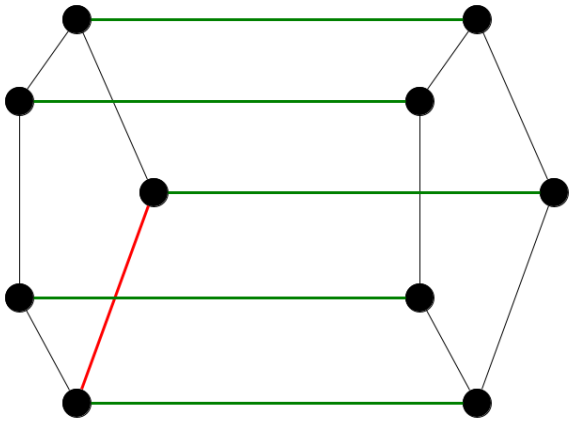
Przeanalizujmy teraz dwie spójne składowe czarnego koloru oraz krawędzie między tymi składkowymi, oznaczone zileonym kolorem. Przez określenie, że zielone krawędzie wyznaczają izomorfizm między czarnymi składowymi, rozumiemy, że obrazem danego wierzchołka w izomorfizmie jest drugi koniec zielonej krawędzi. Analogicznie możemy zbadać dwie dowolne sąsiednie spójne składowe tego samego koloru.



Rysunek 5: Izomorfizm między spójnymi składowymi

Tak więc ten podział krawędzi spełnia założenia lematu o izomorfizmie, a co za tym idzie nasz graf jest iloczynem grafu K_2 (czerwona składowa), K_2 (zielona składowa) oraz C_5 (czarna składowa).

Lemat o izomorfizmie pozwala nam na wyciągniecię kilku wniosków. Po pierwsze, jeżeli znajdziemy podział krawędzi spełniający założenia lematu o izomorfizmie w łatwy sposób jesteśmy w stanie znaleźć rozkład danego grafu. Drugi wniosek jest następujący. Załóżmy, że mamy podany pewien algorytm podziału krawędzi. Nie wiemy jednak czy w trakcie działania algorytmu dopasowanie danej krawędzi do pewnego podzbioru jest prawidłowe. Wówczas w trakcie działania algorytmu możemy sprawdzić czy podział ten jest odpowiedi, w szczególności, czy izomormizmy między sąsiednimi spójnymi składowymi są zachowane. Aby lepiej to zwizualizować zobaczmy na rysunek poniżej.



Rysunek 6: Zaburzenie izomorfizmu między spójnymi składowymi

Widzimy, że krawędzie zielone nie wyznaczają izomorfizmu między czarnymi składowymi. Mając tę informację możemy dokonywać pewnych modyfikacji naszego algorytmu, aby nasz podział krawędzi znów spełniał założenia lematu o izomorfizmie. Wniosek ten zostanie wykorzystany w rozdziale nazwanym sprawdzanie spójności.

Wracając do pierwszego wniosku zdefinujemy teraz kolorwanie właściwe iloczynu kartezjańskiego grafów, które jak się okaże będzie spełniało założenia lematu o izomorfizmie.

Rozważmy dwa połączone wierzchołki u oraz v w grafie G. Ponieważ są połączone to ich współrzędne różnią się dokładnie na jednej pozycji. Niech i oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź uv należy do G_i^y. Zdefiniujmy następującą funkcję c na zbiorze krawędzi G. Niech $c(uv) = i$.

Podsumowując: funkcja $c : E(G) \to \{1,2,...,k\}$ jest **kolorowaniem właściwym iloczynu kartezjańskiego**, jeżeli $c(uv) = i$ wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków u oraz v różnią się na i-tej pozycji. Warto zauważyć, że kolorwanie właściwe iloczynu kartezjańskiego nie jest kolorwaniem właściwym mimo iż nazwa może na to wskazywać.

Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Rozważając podgraf grafu G składający się z krawędzi koloru i to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu G.

Pokażemy teraz, że podział krawędzi zgodnie z kolorowaniem właściwym iloczynu kartezjańskiego spełnia założenia lematu o izomorfizmie. Podział ten jest prosty, mianowicie do jednego pozdbioru trafiają krawędzie tego samego koloru. Dowód ograniczymy do grafów spójnych.

Twierdzenie 5. *Podział krawędzi zgodnie z kolorowaniem właściwym iloczynu kartezjańskiego spełnia założenia lematu o izomorfizmie.*

Dowód

Musimy pokazać, że każda spójna składowa danego koloru ma dokładnie jeden punkt wspólny z każda spójną składową złożoną z krawędzi pozostałych kolorów oraz że krawędzie między dwiema warstwami tego samego koloru wyznaczają izomorfizm. Zaczniemy od dowodu pierwszego założenia.

Niech graf G będzie iloczynem grafów $G_1, G_2, ..., G_k$. Chcemy pokazać, że dowolna warstwa G_i ma dokładnie jeden punkt wspólny z każdą składową złożoną z krawędzi kolorów różnych od i. Niech G_i^* będzie grafem, będącym iloczynem grafów $G_1, G_2, ..., G_k$ z wyłączeniem grafu G_i. Wówczas każda spójna składowa złożona z krawędzi kolorów różnych od i jest izomorficzna do grafu G_i^*. Wynika to z faktu, że rozważamy tylko grafy spójne. Idąc dalej wystarczy rozważyć, że graf G jest iloczynem grafów G_i oraz G_i^* i pokazać, że każda warstwa G_i ma dokładnie jeden punkt wspólny z warstwą G_i^*. Niech wierzchołek v należy do G_i. Wówczas warstwa G_i^{v*} ma dokładnie jeden wierzchołek wspólny z G_i. Wynika to z krótkiej analizy współrzędnych względem rozkładu na grafy G_i oraz G_i^*. Analizę taką można wykonać dla każdego wierzchołka rozważanej warstwy G_i. A co za tym idzie pokazaliśmy, że każda warstwa G_i ma wspólny wierzchołek z każdą spójną składową złożoną z krawędzi kororów różnych od i.

Weźmy teraz pod uwagę dwie sąsiednie warstwy G_i. To, że są izomorficzne nie trzeba już udowadniać. Musimy pokazać tylko, że odpowiadające wierzchołki są sąsiednie. A jest tak ponieważ, skoro co najmniej dwa odpowiadające

wierzchołki są połączone to wszystkie odpowiadające wierzchołki są połączone. Wynika to z krótkiej analizy współrzędnych.

Tak więc pokazaliśmy, że podział krawędzi według kolorowania właściwego iloczynu kartezjańskiego spełnia założenia lematu o izomorfizmie.

■

Dzięki temu twierdzeniu wiemy, że wystarczy znaleźć kolorowanie właściwe iloczynu kartezjańskiego. Tak więc aby móc skorzystać w pełni z tego faktu, przedstawimy jeszcze dwa lematy związane z tym kolorowaniem.

Lemat 6 (Lemat o trójkącie)**.** *Niech G będzie produktem kartezjańskim grafów* $G_1, G_2, ..., G_k$ *oraz* $c : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ *kolorowaniem właściwym produktu iloczynu kartezjańskiego. Wówczas każdy trójkąt (graf* K_3*) w grafie G jest monochromatyczny.*

Dowód

Niech wierzchołki v_1, v_2, v_3 będą parami sąsiednie. Załóżmy, nie wprost, że $i = c(v_1v_2) \neq c(v_2v_3) = j$. Wówczas współrzędne wierzchołków v_1 i v_2 różnią się na i-tej pozycji natomiast v_2 i v_3 na j-tej pozycji. Tak więc współrzędne v_1 oraz v_3 różnią się na pozycjach i-tej oraz j-tej, W takim razie wierzchołki te nie mogą być ze sobą połączone. A więc dochodzimy do sprzeczność.
Na podstawie powyższego lematu stwierdzamy, że każdy kwadrat zawierający co najmniej jedną przekątną jest tego samego koloru.

■

Lemat 7 (Lemat o kwadracie)**.** *Niech G będzie produktem kartezjańskim grafów* $G_1, G_2, ..., G_k$ *oraz* $c : E(G) \to 1, 2, ..., k$ *będzie właściwym kolorowaniem grafu G będącego produktem kartezjańskim. Jeżeli istnieją dwie połączone krawędzie e i f różnych kolorów to istnieje dokładnie jeden kwadrat bez przekątnych (graf* C_4*) zawierający e oraz f.*

Dowód

Niech v będzie wspólnym wierzchołkiem krawędzi e oraz f, v_e- drugim końcem e, v_f- drugim końcem f. Niech $(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_k)$ będą współrzędnymi wierzchołka v, $(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v_j, ..., v_k)$ współrzędnymi wierzchołka v_e natomiast $(v_0, v_1, ..., v_i, ..., v'_j, ..., v_k)$ współrzędnymi wierzchołka v_f. Wyróżnimy również wierzchołke v' o współrzędnych $(v_0, v_1, ..., v'_i, ..., v'_j, ..., v_k)$.

Łatwo stwierdzić, że wierzchołek v' jest połączony z wierzchołkiem v_e ponieważ ich współrzędne różnią się tylko na pozycji j oraz w grafie G_j istnieje krawędź $v_j v'_j$ ponieważ w grafie G istnieje krawędź f. Analogicznie stwierdzamy istnienie krawędzi $v' v_f$, co w połączeniu z faktem, że krawędzie e oraz f są różnego koloru i rozważaniom na temat kwadratów z przekątnymi, z poprzedniego lematu, daje nam tezę. Co więcej na podstawie powyższego rozumowania, można wnioskować że przeciwległe krawędzie w kwadracie mają ten sam kolor, niezależnie czy kwadrat posiada przekątne czy też nie.

■

Lemat o kwadracie jest podstawowym lematem wykorzystywanym w następnym rozdziale o faktoryzacji iloczynu kartezjańskiego z dodatkowymi informacjami.

Przedstawimy teraz ostati lemat naszego rozdziału.

Lemat 8 (Lemat o udoskonaleniu faktoryzacji)**.** *Faktoryzacja prosta danego grafu spójnego jest taka sama lub lepsza niż każda inna faktoryzacja tegoż grafu.*

■

Przez stwierdzenie, że dana faktoryzacja jest lepsza rozumiemy, że posiada więcej czynników. Dowód tego twierdzenia wynika wprost z faktu, że każdy graf spójny podsiada jednoznaczną faktoryzację prostą.

Lemat ten będzie przez nas wykorzystywany w procedurze łączenia kolorów. W algorytmie opisanym w szóstym rozdziale zakładamy, że faktoryzacja grafu wejściowego będzie się składać z pewnej, oszacowanej przez nas z góry, liczby czynników, co daje nam pewność, że uzyskana przez nas końcowa faktoryzacją będzie faktoryzacją pierwszą.

3 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami

W tym rozdziale przedstawimy algorytm kolorowania właściwego grafu względem iloczynu kartezjańskiego, mając podane kolory krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka. Następnie pokażemy jak mając kolory wszystkich krawędzi nadać współrzędne wierzchołkom.

3.1 Algorytm kolorowania krawędzi

Załóżmy, że mamy dane kolory wszystkich krawędzi, w kolorowaniu iloczynu kartezjańskiego grafu, wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Kolorowanie pozostałych krawędzi będzie odbywało się w kolejności przeszukiwania grafu w algorytmie BFS z wierzchołkiem początkowym v_0.

Twierdzenie 9. *Niech $G=G_1\Box G_2\Box...\Box G_k$ będzie grafem spójnym. Dane jest kolorowanie właściwe względem podanego rozkładu dla wszystkich krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka v_0. Wtedy kolorowanie właściwe iloczynu kartezjańskiego może być uzyskane zgodnie z kolejnością algorytmu BFS o wierzchołku początkowym v_0. Złożoność czasowa tego algorytmu to $O(mn)$, natomiast złożoność pamięciowa $O(n^2)$.*

Dowód

Jako dowód przedstawiony zostanie algorytm kolorowania krawędzi. W pierwszym kroku algorytmu dzielimy zbiór wierzchołków grafu G na rozłączne podzbiory $L_0, L_1, L_2, ..., L_r$ w taki sposób, że wierzchołek v należy do zbioru L_i wtedy i tylko wtedy gdy odległość wierzchołka v od wierzchołka v_0 jest równa i. Zbiory te będziemy nazywać **poziomami**. Następnie dla każdego wierzchołka, wszystkie krawędzie incydentne z tym wierzchołkiem dzielimy na trzy zbiory- **zbiór krawędzi dolnych, poprzecznych i górnych**. Definiowanie tych zbirów przebiega następująco. Rozważy poziom i, następnie dla wszystkich wierzchołków v należących do zbioru L_i rozważamy krawędzie vu incydentne z v. Wówczas jeżeli u należy do L_{i-1} to krawędź vu będzie krawędzią dolną. Jeżeli u należy do L_i wówczas uv będzie krawędzią poprzeczną, jeżeli natomiast u należy do L_{i+1} wówczas uv będzie krawędzią górną wierzchołka warstwy L_i. Zauważmy, że krawędzie dolne wierzchołków poziomu L_{i+1} są krawędziami górnymi wierzchołków poziomu L_i .

Nasz algorytm rozpoczynamy od pokolorowania krawędzi poprzecznych L_1. Ponieważ każdy trójkąt jest monochromatyczny (patrz lemat 6) to każdej krawędzi poprzecznej uv nadajemy kolor krawędzi dolych v_0v oraz v_0u czyli $c(vv_0)$.

Następnie indukcyjnie kolorujemy krawędzie dolne a następnie poprzeczne warstwy L_{i+1} mając już pokolorowane krawędzie dolne i poprzeczne warstwy L_i. Nie ma potrzeby kolorowania krawędzi górnych L_i ponieważ zbiór ten jest również zbiorem krawędzi dolnych L_{i+1}.

Zaczynamy od krawędzi dolnych. Przeglądamy wierzchołki należące do L_{i+1} zgodnie z kolejnością wyznaczoną przez algorytm BFS. Niech dany będzie wierzchołek u oraz krawędź uv. Ponieważ wierzchołek v należy do L_i, gdzie $i \geqslant 1$ to istnieje wierzchołek w należący do L_{i-1} sąsiedni z v. Rozważmy dwa przypadki:

1. Nie istnieje wspólny sąsiad wierzchołków u oraz w różny od v. Wówczas nie istnieje kwadrat zawierający wierzchołki u oraz w a co za tym idzie kolory krawędzi uv oraz vw są te same czyli kolor krawędzi uv będzie taki sam jak kolor krawędzi vw.

2. Istnieje wspólny sąsiad x wierzchołków u oraz w różny od v. W tym przypadku krawędź uv otrzymuje kolor krawędzi wx, a krawędź ux kolor krawędzi vw.

Uzasadnienia w obydwu przypadkach wynikają z lematu o kwadracie.

Rozważmy teraz krawędzie poprzeczne L_{i+1}. W tym celu również przeglądamy wierzchołki należące do tego poziomu. Dla każdej krawędzi uv, należącej do krawędzi poprzecznych rozważanego poziomu, szukamy krawędzi dolnej uw i podobnie jak dla krawędzi dolnych szukamy wspólnego sąsiada wierzchołków v oraz w. Jeśli takowy wierzchołek x istnieje wówczas krawędź uv otrzymuje kolor krawędzi wx, jesli nie kolor krawędzi uw.

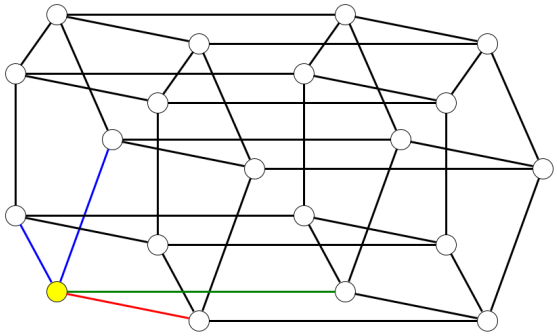
Zauważmy, że aby wyznaczyć G_i wystarczy znaleźć $G_i^{v_0}$. Wierzchołek v należy do $V(G_i^{v_0})$ wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie jego krawędzie dolne są koloru i. Tak więc aby wyznaczyć G_i wystarczy przejrzeć wszystkie krawędzie dolne wszystkich wierzchołków, jeżeli lista ta jest monochromatyczna wierzchołek ten będzie należał do $V(G_i^{v_0})$ gdzie i to kolor krawędzi dolnych tego wierzchołka.

Rozważając jeszcze raz krawędzie dolne oraz poprzeczne wierzchołków warstw jednostkowych, na podstawie spójności produktu iloczynu kartezjańskiego stwierdzamy, że i krawędzie dolne i krawędzie poprzeczne tychże wierzchołków należą do warstw jednostkowych.

Na koniec pozostaje nam wykazać, że nasz algorytm rzeczywiście spełnia założenia dotyczące złożoności pamięciowej i czasowej. Zauważmy że dla każdego wierzchołka należącego do L_i, gdzie $i > 0$ szukamy dolnego sąsiada, następnie przeglądamy wszystkie krawędzie dolne oraz poprzeczne. Tak więc wykonujemy co najwyżej $2m$ kroków w naszym algorytmie, gdzie m oznacza liczbę krawędzi naszego grafu G. Dla ustalonych krawędzi uv oraz uw szukamy wspólnego sąsiada x. Mamy co najwyżej $n = G(V)$ możliwości wyboru tego sąsiada. Jeżeli informacje o krawędziach grafu są przetrzymywane w tablicy sąsiedztwa sprawdzenie czy dany wierzchołek jest sąsiadem innego można wykonać w czasie stałym. Tak więc dowiedliśmy, że złożoność czasowa algorytmu to $O(mn)$. Natomiast złożoność pamięciowa $O(n^2)$. Zauważmy, że jedyną strukturą danych, którą stworzyliśmy w czasie działania programu są tablice krawędzi dolnych, poprzecznych i górnych. Tak więc całkowity rozmiar tych tablic będzie wynosił $2m$, ponieważ każda krawędź trafi dokładnie do dwóch tablic. Porównując to z wejściowymi strukturami danych, nasza złożoność pamięciowa nie wzrosła, gdyż jest ona ograniczona z góry przez $O(n^2)$, czyli rozmiar tablicy sąsiedztwa naszego grafu wejściowego.

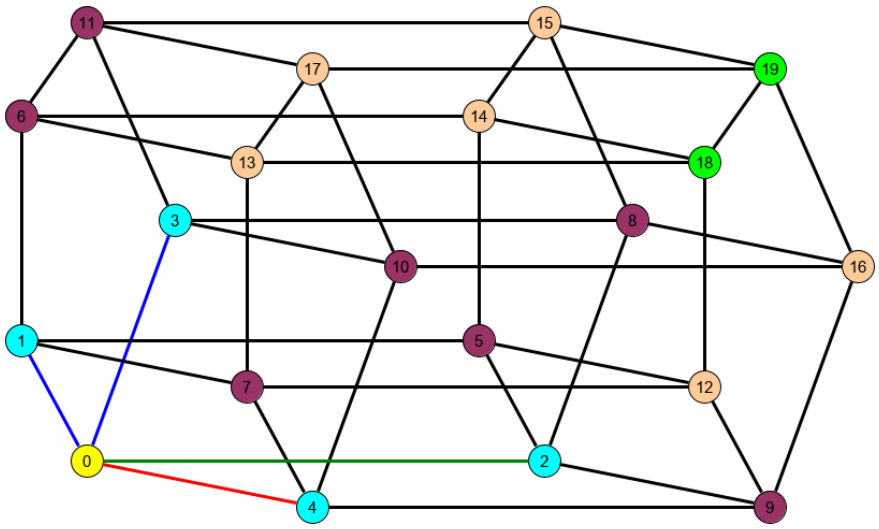
■

Aby lepiej pokazać działanie algorytmu zaprezentujemy przykład. Mamy podany na wejściu graf i kolory wychodzące z wierzchołka początkowego.



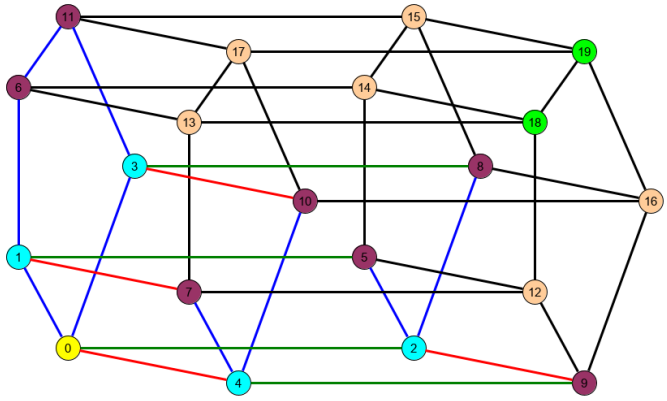
Rysunek 7: Graf wejściowy

Nastepnie przechodzimy po wszystkich wierzchołkach zgodnie z kolejnością algorytmu BFS. Jedym kolorem zostały oznaczone wierzchołki tego samego poziomu.



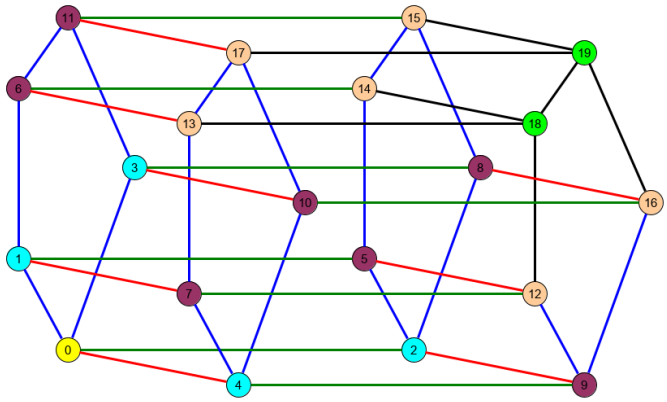
Rysunek 8: Kolejność odwiedzenia wierzchołków

Ponieważ nie mamy krawędzi poprzecznych warstwy L_1 przechodzimy do kolorowania krawędzi dolych i poprzeczych warstwy L_2.

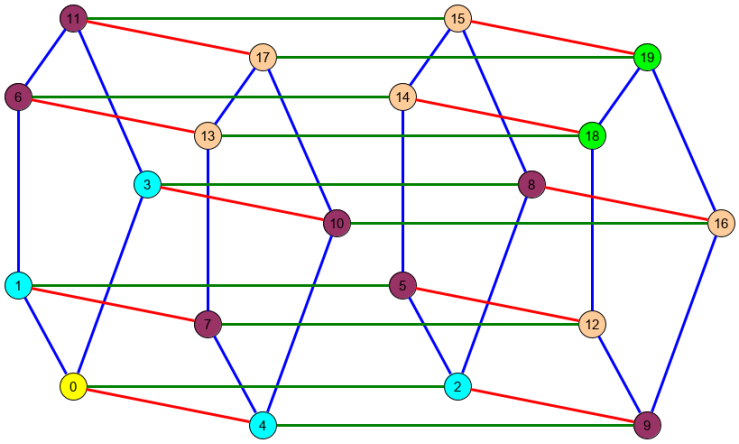


Rysunek 9: Kolorowanie wierzchołków warstwy L_2

Kolorujemy dalej wierzchołki warstwy L_3 oraz L_4.



Rysunek 10: Kolorowanie wierzchołków warstwy L_3



Rysunek 11: Kolorowanie wierzchołków warstwy L_4

Procedura naszego kolorowania zakończyła się.

3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom

W poprzednim podrozdziale opisaliśmy algorytm kolorowania krawędzi, jednakże nie podawaliśmy sposobu, jak nadać współrzędne wierzchołkom. Zdefiniujemy teraz algorytm, który nada współrzędne naszym wierzchołkom, mając już dane kolory wszystkich krawędzi.

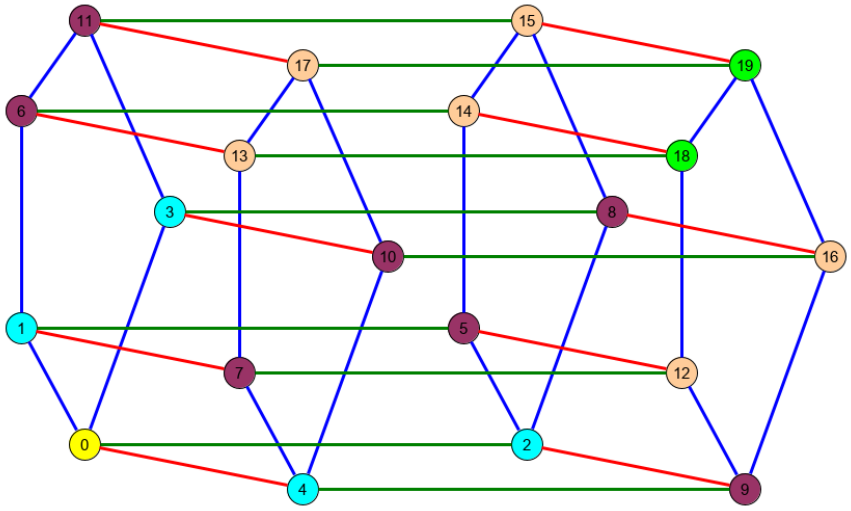
Twierdzenie 10. *Niech G=G_1□G_2□...□G_k będzie grafem spójnym. Dane jest również kolorowanie właściwe produktu względem podanego rozkładu. Algorytm nadania współrzędnych wierzchołkom może być zrealizowany w złożoności czasowej i pamięciowej $O(m)$.*

Dowód
Na początku dokonajmy obserwacji. Liczba czynników w rozkładzie względem iloczynu kartezjańskiego jest co najwyżej równa minimalnemu stopniowi w grafie wejściowym G. Aby to umotywować wystarczy wspomnieć, że każdy wierzchołek v należy do każdej z warstw $G_1, G_2, ..., G_k$, a co za tym idzie z tego

wierzchołka wychodzi co najmniej jedna krawędź każdego koloru. To rozważanie można oczywiście zastosować również do wierzchołka o minimalnym stopniu.
Dla każdego wierzchołka, aby móc przechować informację o jego współrzędnych, potrzebujemy k- elementowej tablicy. Ponieważ k jest mniejsze od minimalnego stopnia grafu d_0 oraz $d_0 \cdot n \leqslant m$ to całkowity rozmiar tablic ze współrzędnymi spełnia nasze założenie o złożoności pamięciowej naszego algorytmu. Algorytm rozpoczynamy od nadania wierzchołkowi v_0 współrzędnych składających się z samych 0. Następnie przeszukujemy wszystkie wierzchołki zgodnie z kolejnością algorytmu BFS.
Jeżeli wierzchołek należy do i-tej warstwy jednostkowej jego wszystkie współrzędne otrzymują wartość 0 z wyłączeniem i-tej współrzędnej. Przeszukując wierzchołki i-tej warstwy jednostkowej i-tej współrzędnej nadajemy kolejną liczbę naturalną. Zapisując formalnie jeżeli nasz wierzchołek u należy do warstwy jednostkowej $u_j = 0$ dla $j \neq i$ oraz $u_i = |max|\{v_i\} + 1$ gdzie v_i to i-te współrzędne wierzchołków należących do G_i, odwiedzonych wcześniej niż wierzchołek u w algorytmie BFS. Jeżeli natomiast wierzchołek nie należy do warstwy jednostkowej to istnieją co najmniej dwie krawędzie dolne tego wierzchołka, mające różne kolory. Niech tym wierzchołkiem będzie u natomiast jego krawędziami dolnymi uv oraz uw. Wówczas $u_i = max(v_i, w_i)$ dla $1 \leqslant i \leqslant k$. Tak więc dla pojedynczego wierzchołka wykonamy k operacji, i w zestawieniu z obserwacją na początku tego dowodu, stwierdzamy, że nasza zakładana złożoność obliczeniowa została osiągniętą.

■

Pokażemy na przykładzie jak przebiega nadawanie współrzędnych wierzchołkom. Mamy już kolory wszystkich krawędzi. Zaczynamy od wierzchołka v_0 a następnie przechodzimy po pozostałych zgodnie z kolejnością algorytmu BFS. Poniższa tabela przedstawia informację o tym czy dany wierzchołek jest wierzchołkiem jednostkowym oraz jeżeli nie jest, wyróżnionych dwóch sąsiadów których wsółrzędnych używamy do określenia wsółrzędncyh danego wierzchołka. Skorzystamy z przykładu z poprzedniego podroździału.



Rysunek 12: Przykładowy graf po skończonym kolorowaniu

Wierzchołek	**Należy do warstwy jednostkowej**	**Sąsiedzi**	**Współrzędne**
0	Tak		(0,0,0)
1	Tak		(1,0,0)
2	Tak		(0,1,0)
3	Tak		(2,0,0)
4	Tak		(0,0,1)
5	Nie	1, 2	(1,1,0)
6	Tak		(3,0,0)
7	Nie	1, 4	(1,0,1)
8	Nie	2, 3	(2,1,0)
9	Nie	2, 4	(0,1,1)
10	Nie	3, 4	(2,0,1)
11	Tak		(4,0,0)
12	Nie	7, 9	(1,1,1)
13	Nie	6, 7	(3,0,1)
14	Nie	5, 6	(3,1,0)
15	Nie	8, 11	(4,1,0)
16	Nie	8, 10	(2,1,1)
17	Nie	10, 11	(4,0,1)
18	Nie	12, 14	(3,1,1)
19	Nie	15, 16	(4,1,1)

4 Etykietowanie produktu kartezjańskiego

W tym rozdziale rozszerzymy definicję kolorowania i nazwiemy ją etykietowaniem. Będzie to funckja, która danej krawędzi, po za kolorem, przypisze jeszcze liczbę, która posłuży nam do określenia pozycji tej krawędzi w wykorzystywanych przez nas strukturach danych. Etykietowanie będzie istotne ponieważ pozwoli nam na zmniejszenie złożoności czasowej naszego algorytmu przedstawionego w poprzednim rozdziale. Następnie pokażemy jak pozbyć się tablicy sąsiedztwa aby możliwe było również zmniejszenie złożoności pamięciowej. Na początek jednak opiszemy struktury danych niezbędne do wykonania procedury etykietowania.

4.1 Struktury Danych

Zauważmy, że używamy współrzędnych wierzchołka do określenia jego pozycji w produkcie iloczynu kartezjańskiego. Całkowita długość tych wektorów jest równa $O(m)$. Przez pozycję krawędzi uv rozumiemy pozycję wierzchołka u, kolor krawędzi uv oraz rzutowanie $p_i(uv)$, czyli $p_i(u)p_i(v)$. Krawędź $p_i(uv)$ będziemy nazywać bazą krawędzi uv.
Krawędź uv ma ten sam kolor co krawędź $p_i(u)p_i(v)$ oraz tak samo jest krawędzią dolną, poprzeczną lub górną. Poniżej przedstawimy jak efektywnie przetrzymywać informację o bazie.
W poprzednich rozdziałach opisywaliśmy w jaki sposób dzielimy krawędzie incydentne z danym wierzchołkiem na krawędzie dolne, poprzeczne i górne. Następnie każdą taką listę można podzielić na krawędzie tego samego koloru. Pozycja krawędzi, w tak stworzonej monochromatycznej liście, posłuży nam do zlokalizowania $p_i(uv)$, będziemy ją nazywać numerem danej krawędzi i oznaczać $n(uv)$. W ogólnym przypadku $n(uv) \neq n(vu)$. Parę $< c(uv), n(uv) >$ będziemy nazywać etykietą uv i oznaczać $l(uv)$. Razem z $p_{c(uv)}(u)$ będzie ona opisywać pozycję krawędzi w produkcie.
Ilość tablic monochromatycznych będzie równa co najwyżej $3d(v_0)$ dla każdego wierzchołka (po $d(v_0)$ dla krawędzi dolnych, poprzecznych i górnych), tak więc dostęp do tych tablic może odbyć się w czasie stałym.
Tak więc etykietowanie zostało zdefiniowane. Jak się okaże, będzie ono zależne tylko od kolejności krawędzi należących do warstw jednostkowych oraz krawędzi górnych należących do wierzchołków z warstw jednostkowych. Kolejność pozostałych krawędzi, podana na wejściu, nie będzie miała wpływu na rezultat

etykietowania,co więcej naszym celem będzie ustalenie tej kolejności.
W algorytmie dobrze uwzględnić że krawędź dolna, poprzeczna lub górna uv ma początek w u natomiast koniec w v. Pozwoli to na znalezienie tej krawędzi w liście monochromatycznej w czasie stałym, jeżeli znamy jej numer. W tym celu zmodyfikujemy również macierz sąsiedztwa tak, aby w komórce uv mieć numer danej krawędzi aby znalezienie jej numeru mogło się dobyć w czasie stałym.
Podsumowując, w naszym algorytmie będziemy używać następujących struktur danych: dla każdego wierzchołka lista sąsiedztwa oraz zmodyfikowaną tablicę sąsiedztwa całego grafu. Dodatkowo każdy wierzchołek zostanie ułożony w tablicy zgodnie z kolejnością algorytmu BFS, będzie on posiadał numer swojego poziomu, wektor współrzędnych (o długości nie większej niż $d(v_0)$) oraz listę krawędzi dolnych, poprzecznych oraz górnych, które następnie będą dzielone na listy monochromatyczne. Budowa tychże struktur, z wyłączeniem list monochromatycznych jest możliwa w czasie $O(m)$. Pokażemy, że i te tablice można zbudować w takim czasie. W następnym rozdziale pokażemy również, jak zastąpić tablicę sąsiedztwa aby nasza złożoność pamięciowa uległa poprawie.

4.2 Algorytm Etykietowania

Twierdzenie 4.2: *Niech $G=G_1 \square G_2 \square ... \square G_k$ będzie grafem spójnym. Dane jest również kolorowanie właściwe produktu względem podanego rozkładu dla krawędzi wychodzących z wierzchołka v_0. Etykietowanie tego grafu może być zrobione w czasie O(m)*

Dowód
Opiszemy liniowy algorytm etykietowania. Poetykietowanie krawędzi wychodzących z v_0 nie stanowi problemu. Następnie etykietujemy krawędzie dolne i poprzeczne wierzchołków należących do warstwy L_1. To również nie stanowi problemu ponieważ wszystkie krawędzie dolne dostają numer 1 natomiast krawędzie poprzeczne kolorujemy tak jak w rozdziale 3, numery tych krawędzi są zgodne z kolejnością w jakiej zostały podane na wejściu.
Zakładamy, że mamy poetykietowane krawędzie dolne i poprzeczne dla warstwy L_i oraz górne warstwy L_{i-1} i indukcyjnie etykietujemy krawędzie dolne i poprzeczne warstwy L_{i+1} oraz górne warstwy L_i. Niech wierzchołek u należy do warstwy L_{i+1}. Zacznijmy od krawędzi dolnych.

1. Wierzchołek ma tylko jedną krawędź dolną. Wówczas kolorujemy tak, jak to było w rozdziale 3.1 natomiast krawędź otrzymuje numer 1.

2. Szukamy kwadratu bazowego dla wierzchołków posiadających więcej niż jedną krawędź dolną.
   Niech uv będzie pierwszą taką krawędzią. Natomiast niech vx będzie krawędzią dolną wierzchołka v. Szukamy wspólnego sąsiada wierzchołków u oraz x różnego oczywiście od wierzchołka v. Znalezienie tego sąsiada odbywa się z użyciem tablicy sąsiedztwa i porównaniu sąsiadów. Złożoność czasowa tej operacji to $O(d(u))$.

   a) Jeżeli wspólny sąsiad nie istnieje, wówczas $c(uv) := c(vx)$. Pozostałe krawędzie dolne również kolorujemy tym samym kolorem. Oznacza to, że wierzchołek u należy do warstwy jednostkowej, a co za tym idzie możemy ponumerować krawędzie zgodnie z tym, w jaki sposób podano je na wejściu.

   b) Tak więc rozważmy przypadek, że istnieje wierzchołek w będący wspólnym sąsiadem wierzchołków u oraz x. Jeżeli kolory krawędzi vx oraz xw są różne wówczas $l(uv) := l(wx)$ oraz $l(uw) := l(vx)$. Inicjalizacja tablic monochromatycznych dla dolnych krawędzi wierzchołka u również nie stanowi dla nas problemu. Wystarczy zauważyć, że, dla wierzchołka u, każda tablica, reprezentująca kolor różny od $c(uv)$ ma taką samą długość jak tablica dla wierzchołka v, natomiast tablica dla koloru $c(uv)$ będzie miała taką samą długość jak dla wierzchołka w. Samo etykietowanie tej krawędzi zostało wykonane w czasie stałym, dzięki modyfikacji tablicy sąsiedztwa, inicjalizacja tablic może być zrobiona w czasie $O(d(v_0))$. Kwadrat $uvxw$ będziemy odtąd nazywać kwadratem bazowym i posłuży on nam do poetykietowania pozostałych dolnych krawędzi wierzchołka u.

   c) Zostaje do rozważenia przypadek, gdy kolory krawędzi wx oraz vx są takie same, a co za tym idzie, krawędzie uw oraz uv będą miały ten sam kolor. Jeżeli wszystkie pozostałe krawędzie dolne wierzchołka v mają ten sam kolor wówczas wierzchołek u należy do warstwy jednostkowej i postępujemy analogicznie jak w przypadku 2a. Tak więc niech istnieje

krawędź vx', której kolor różni się od koloru vx a co za tym idzie również od uv. Tak więc musi istnieć wspólny sąsiad wierzchołków u oraz x' różny od v, nazwijmy go w'. Znalezienie takiego sąsiada może być wykonane w czasie $O(d(u))$. Dalej postępujemy jak w przypadku 2b a naszym kwadratem bazowym będzie $uvx'w'$.

3. Etykietowanie pozostałych krawędzi dolnych odbywa się z udziałem znalezionego wcześniej kwadratu bazowego. Załóżmy dla jasności sytuacji, że kwadrat ten składa się z wierzchołków u, v, x oraz w. Tak więc iterujemy po wszystkich krawędziach dolnych wierzchołka u. Niech uy będzie kolejną taką krawędzią. Dalej niech yz będzie dolną krawędzią wierzchołka y, taką, że $l(yz) = l(uv)$. Jeżeli okaże się że taka krawędź nie istnieje wówczas szukamy krawędzi yz takiej, że $l(yz) = l(uw)$. Dla każdego wierzchołka taka operacja jest wykonywana w czasie stałym, a dla wszystkich krawędzi sumarycznie czas potrzebny do poetykietowania krawędzi dolnych jest równy $O(d(u))$.

Tak więc etykietowanie krawędzi incydentnych z wierzchołkiem$u$ może być wykonane w złożoności czasowej $O(d(u) + d(v_0))$ co sprowadza się do $O(d(u))$. Suma ta wynika z następujących operacji: dwukrotne wyszukiwanie wspólnego sąsiada, inicjalizacja tablic monochromatycznych oraz etykietowanie poszczególnych krawędzi. Etykietowanie krawędzi górnych warstwy L_i oraz poprzecznych warstwy L_{i+1} przebiega w analogiczny sposób, więc i złożoność tych operacji jest taka sama.
Pozostaje sprawdzić złożoność czasową całej operacji, można ją opisać jako $O(\sum_{u \in V(G)} d(u)) = O(m)$.
Jeżeli chodzi o złożoność pamięciową, to używaliśmy struktur opisanych w rozdziale 4.1 tak więc, nie licząc tablicy sąsiedztwa, jest ona równa $O(m)$. Jednak użycie tejże tablicy sprawia, że całościowa złożoność pamięciowa jest równa $O(n^2)$, co jak się okaże za chwilę będzie można poprawić do satysfakcjonującej nas złożoności. Opiszmy najpierw jak tego dokonać.

4.3 Inicjalizowanie częściowe tablicy

W tym podrozdziale zajmiemy się następującym problemem. Chcemy utworzyć tablicę, która będzie wypełniona tylko we wskazanych na początku miej-

scach. Dokładnie, naszym zadaniem jest utworzenie tablicy o rozmiarze n, w której wypełnione będzie dokładnie d elementów (niekoniecznie początkowych i niekoniecznie spójnych). Tak utworzona tablica, w czasie stałym, ma nam dać informację, czy dane pole, o podanym indeksie, zostało zainicjalizowane, i jeśli tak, wskazać jaka wartość kryje się pod tym indeksem.
Zaczynamy od inicjalizacji pustej tablicy. W tym momencie, pod każdym indeksem w tej tablicy znajdziemy przypadkową wartość. Dokładając nowy element do tablicy wciąż jednak nie mamy informacji, czy element ten jest podaną przez nas wartością, czy jest on od momentu inicjalizacji. Tak więc tworzymy dodatkowy stos, na którym odkładamy indeksy, które zostały przez nas zainicjalizowane. W tym momencie, mamy już informację, które elementy są przez nas dodane a które nie. Jednakże sprawdzenie czy, dany element został przez nas dodany wymaga złożoności czasowej $O(n)$ w pesymistycznym przypadku. Potrzebna jest więc nam jeszcze jedna struktura. Tworzymy tablicę wskaźników o rozmiarze n. Na początku tablica ta zawiera przypadkowe wartości. W momencie dodawania nowego elementu do tablicy początkowej, najpierw umieszczamy indeks na stosie, a następnie dodajemy, do naszej drugiej tablicy, wskaźnik na nowo utworzony element na stosie. Operacja dodawania nowego elementu wykonywana jest w czasie stałym, dostęp do elementu również w takim czasie może być wykonany- sprawdzamy najpierw, czy w tablicy wskaźników element o podanym indeksie wskazuje na zmienną na naszym stosie- jeżeli nie, oznacza to, że nie inicjalizowaliśmy elementu o podanym indeksie. Jeżeli tak, w prosty sposób pobieramy wartość z naszej tablicy początkowej.
Złożoność pamięciowa naszej operacji to $O(n)$, gdyż mamy trzy struktury o takiej samej złożoności- tablicę początkową, stos, oraz tablicę wskaźników. Złożoność pamięciowa tej operacji to $O(d)$, gdzie d oznacza ilość inicjalizowancyh elementów.

4.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym

Dotychczas do sprawdzenia czy dwa wierzchołki są połączone używaliśmy macierzy sąsiedztwa, co wymagało od nas użycia $O(n^2)$ pamięci, gdzie n oznacza liczbę wierzchołków. Zaburza to nasze założenie o liniowej złożoności pamięciowej naszego algorytmu, co więcej inicjalizacja tej macierzy również może zaburzyć naszą złożoność czasową. Zauważmy jednak, że w każdym kroku naszego algorytmu potrzebujemy co najwyżej jednego wiersza z naszej tabeli są-

siedztwa. A ponieważ nasz graf jest spójny, czyli posiada co najmniej $n-1$ krawędzi, wiersz z macierzy sąsiedztwa nie zaburzy naszej złożoności pamięciowej. Pozostaje problem jak zainicjalizować nasz wiersz w taki sposób, aby sumaryczna inicjalizacja wszystkich wierszy nie zwiększyła złożoności czasowej z $O(m)$ do $O(n^2)$. W tym celu posłużymy się rozwiązaniem zaproponowanym w poprzednim podrozdziale.
Wykorzystując tę metodę, do tworzenia wiersza tablicy sąsiedztwa, zauważmy na początek, że czas potrzebny do stworzenia takiego wiersza dla wierzchołka x jest proporcjonalny do $d(x)$. A ponieważ $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m$ to złożoność czasowa potrzebna na wykonanie się algorytmu nie zmieni się, dopóki nie będziemy wykonywać naszej operacji więcej niż stałą ilość razy dla poszczególnych wierzchołków. Tak więc w tym podrozdziale opiszemy jak wykonać nasz algorytm tak, aby nasze założenie zostało wykonane, co pozwoli nam na utrzymanie złożoności czasowej, przy jednoczesnym zmniejszeniu złożoności pamięciowej.

Twierdzenie *Niech G=$G_1 \square G_2 \square ... \square G_k$ będzie grafem spójnym. Dane jest również kolorowanie właściwe produktu względem podanego rozkładu dla krawędzi wychodzących z wierzchołka v_0. Złożoność czasowa i pamięciowa tego algorytmu wynosi O(m).*

Dowód
W rozdziale 4.2 opisaliśmy liniowy, jeżeli chodzi o złożoność czasową algorytm, tutaj opiszemy jak go zmodyfikować aby i złożoność pamięciowa była liniowa. Opiszemy modyfikację trzech kroków z poprzedniego rozdziału.

1. Jeżeli chodzi o etykietowanie krawędzi dolnych wierzchołków posiadających jedną krawędź dolną procedura się nie zmienia.

2. Poszukiwanie kwadratu bazowego. Możliwe, że będą konieczne dwa przebiegi poszukiwań naszego kwadratu bazowego. W pierwszym przebiegu wierzchołek v jest dolnym wierzchołkiem u, gdzie $u \in L_{i+1}$ natomiast x jest dolnym wierzchołkiem v. Teraz szukamy pozostałych wierzchołków u' należących do warstwy L_{i+1}, dla których odległość od wierzchołka x również wynosi 2. Dopiero wtedy będziemy tworzyć wiersz macierzy sąsiedztwa wierzchołka x. W drugim przebiegu rozumowanie jest analogiczne.

3. W tym fragmencie konieczne będzie tworzenie wiersza macierzy sąsiedz-

twa maksymalnie dwa razy, tym razem jednak dla wierzchołków należących do warstwy L_i, a nie jak to było w punkcie 2 dla warstwy L_{i-1}.

Dla krawędzi górnych i poprzecznych procedura wygląda analogicznie (możliwe, że konieczne będą po dwa przebiegi kroku algorytmu). Tak więc podczas indukcyjnego kroku dla warstwy L_{i+1} maksymalnie 4 razy szukamy wiersza macierzy sąsiedztwa dla wierzchołków warstw L_i oraz L_{i-1} co oznacza, że dla danego wierzchołka, jego wiersz z macierzy sąsiedztwa będzie wyszukiwany nie więcej niż 8 razy, co należało dowieźć.

Ponieważ etykietowanie jest rozszerzeniem kolorowania, nadanie współrzędnych wierzchołkom grafu G może być wykonane przez algorytm opisany w rozdziale 3.2.

5 Sprawdzanie spójnosci

Poprzednie rozdziały opierały się na założeniach, że znamy kolory krawędzi wychodzących z pewnego wierzchołka. Następnie etykietowaliśmy pozostałe krawędzie. Odwróćmy teraz trochę sytuację i załóżmy, że mamy dane etykiety pewnych krawędzi wychodzących z danego wierzchołka a naszym zadaniem będzie sprawdzenie, czy dane etykietowanie jest etykietowaniem produktu iloczynu kartezjańskiego według pewnego rozkładu. Jak się okaże w następnym rozdziale, jeżeli podamy złe kolory dla krawędzi wychodzących z wierzchołka v_0 nasza procedura etykietowania, może się nie wykonać z pewnych przyczyn. Możliwe jest jednak, że wykona się ona bez problemu nawet, gdy podane kolory będą niepoprawne. W tym celu wracamy do lematu o izomorfiźmie. Naszym zadaniem będzie sprawdzenie, czy na danym etapie, założenia lematu o izomorfizmie, tak aby cały czas mieć pewność, że nasze kolorowanie może być kolorowaniem właściwym produktu iloczynu kartezjańskiego. Procedurę tę będziemy zwać sprawdzaniem spójności.
Izomorfizm grafów jest bijekcją na zbiorach wierzchołków zachowującą sąsiedztwo. Korzystając z kolejności wierzchołków grafu uzyskaną w algorytmie BFS, będziemy indukcyjnie sprawdzać czy dla danego poziomu L_i nasze założenia są spełnione i dalej kontynuować sprawdzenie dla następnych poziomów.

Twierdzenie *Załóżmy, że własności izomorfizmu są zachowane dla wierzchołków warstw L_1 do L_i. Sprawdzenie czy własności izomorfizmu dla wierzchołków należących do warstwy L_{i+1} może być wykonane w czasie proporcjonalnym do sumy ilości krawędzi dolnych i poprzecznych warstwy L_{i+1} oraz krawędzi górnych L_i.*

Dowód
Nasze sprawdzenie zaczyamy od dwustopniowej procedury.

1. Dla każdego wierzchołka u należącego do L_{i+1}, który nie jest wierzchołkiem warstwy jednostkowej, wybieramy dwie krawędzie dolne różnych kolorów uv oraz uw (można wybrać krawędzie należące do kwadratu bazowego) i sprawdzamy czy krawędzie dolne/poprzeczne wierzchołka u mają odpowiednika wśród krawędzi dolnych/poprzecznych wierzchołka v. Uściślając, dla każdej krawędzi dolnej/poprzecznej uz koloru różnego od $c(uv)$ istnieje dokładnie jedna krawędź dolna/poprzeczna vz' taka, że

$l(uz) = l(vz')$ i vice versa. Co więcej $l(uv) = l(zz')$.

2. Dla krawędzi górnych należących do L_i postępujemy analogicznie. Iterujemy po wszystkich wierzchołkach. Jeżeli u nie należy do warstwy jednostkowej wybieramy kwadrat bazowy $uvxw$ i dla wszystkich krawędzi górnych wierzchołka u porównujemy je z krawędziami uv lub uw w zależności od koloru.
   Jeżeli u należy do warstwy jednostkowej, załóżmy $G_i^{v_0}$, wybieramy jeden wierzchołek v, będący dolnym sąsiadem u. Porównujemy wówczas krawędzie górne wierzchołków u oraz v o kolorach różnych od i.

Ponieważ sprawdzenie, czy istnieje odpowiadająca krawędź, odkąd mamy posortowane listy monochromatyczne, może być wykonane w czasie stałym, czas potrzebny do znalezienia odpowiadających krawędzi, dla danego wierzchołka u, jest proporcjonalny do $d(u)$ a co za tym idzie, sumaryczna ilość czasu jest proporcjonalna do rozmiaru grafu. Żadne dodatkowe struktury danych nie są potrzebne.
Tak więc sprawdzanie izomorfizmów między warstwami może być wykonane w zadowalającej nas złożoności czasowej i pamięciowej. Aby wykazać, że jest to produkt iloczynu kartezjańskiego potrzeba jeszcze sprawdzić pozostałe założenia lematu o izomorfiźmie. Rozważmy wierzchołek a będący dolnym sąsiadem u, takim że $c(ua) \neq c(uv)$. Będziemy teraz rozważać izomorfizm między G_i^u oraz G_i^a indukowany między krawędziami występującymi między tymi warstwami dla $i \neq c(uv)$.
Naszym zadaniem jest pokazanie, że dla każdej krawędzi dolnej lub poprzecznej ab, takiej że $c(ab) \neq c(ua)$ istnieje dokładnie jedna krawędź uc, taka że $l(uc) = l(ab)$ oraz wierzchołki b i c są połączone oraz $l(ua) = l(bc)$. Oczywiście do tego musimy pokazać również że dla każdej dolnej lub poprzecznej krawędzi uc istnieje krawędź ab spełniająca te same założenia.
Rozważmy pierwszy przypadek. We wcześniejszych rozważaniach w tym rozdziale wykazaliśmy istnienie krawędzi aa', takiej że $l(uv) = l(aa')$. Z założenia indukcyjnego wiemy, że izomorfizmy są zachowane dla poziomów od L_1 do L_i. Skorzystamy teraz ponownie z lematu o kwadracie. Rozważając wierzchołki a, b, a' w stałym czasie możemy znaleźć kwadrat $abb'a'$. Idąc dalej rozważamy wierzchołki v, a', b' i również w czasie stałym możemy znaleźć kwadrat $va'b'c'$. Na koniec wystarczy rozważyć wierzchołki $b, b'c'$ i tak jak poprzednio w czasie stałym znajdujemy kwadrat $bb'c'c$. Krawędź vc' posiada taką samą etykietę jak ab oraz cc' posiada taką samą etykietę jak uv. A ponieważ izomorfizm między

wierzchołkami v oraz u został sprawdzony, wierzchołki u oraz c są połączone oraz etykiety uc i vc' są takie same, a co za tym idzie również etykieta ab jest taka sama, udowodniliśmy zakładaną tezę. Dowód w drugą stronę przebiega analogicznie.
Pozostaje jeszcze sprawdzenie czy złożoność czasowa i pamięciowa nie uległy pogorszeniu. Zaczynając od złożoności pamięciowej, widzimy, że nie używamy żadnych dodatkowych, złożonych struktur danych. Co do złożoności czasowej, zauważmy że sprawdzenie izomorfizmu dla danej krawędzi odbywa się w czasie stałym. Szukanie kwadratów opiera się na korzystaniu z już posortowanych monochromatycznych list, więc dostęp do nich odbywa się w czasie stałym. Tak więc sumaryczna złożoność czasowa sprawdzania spójności może być wykonana w czasie proporcjonalnym do rozmiaru grafu.

6 Faktoryzacja poprzez łączenie kolorów

W tym rozdziale opiszemy wszystkie konieczne narzędzia potrzebne do faktoryzacji spójnego grafu G na grafy proste, czyli takie które nie da się opisać jako iloczyn dwóch nietrywialnych grafów (przez graf trywialny rozumiemy graf K_1). Z lematu o udoskonaleniu chcemy znaleźć końcowy rozkład podanego na wejściu grafu G. Przez znalezienie rozkładu rozumiemy znalezienie finalnego kolorowania właściwego produktu iloczynu kartezjańskiego. Ma to być kolorowanie zachowujące izomorfizmy między warstwami tego samego koloru.

Twierdzenie *Faktoryzacja prosta grafu spójnego może być wykonana w czasie liniowym i w takiej samej złożoności pamięciowej*

Dowód: Jako dowód zaprezentujemy algorytm. Ideą naszego rozumowania będzie rozpoczęcie algorytmu ze wskazanym kolorowaniem początkowym krawędzi wychodzących z wierzchołka o minimalnym stopniu. Kolorowanie to nie będzie jeszcze tym, które będzie wskazywać na kolorowanie właściwe finalnego produktu kartezjańskiego, lecz w trakcie działania algorytmu będziemy łączyć dwa kolory w jeden jeżeli zajdzie taka konieczność.
Nasz algorytm w pierwszym kroku nadaje różne kolory wszystkim krawędzią wychodzącym z wierzchołka v_0, który to jest wierzchołkiem o minimalnym stopniu w naszym grafie wejściowym. Ponieważ każdy wierzchołek posiada krawędzie incydentne każdego koloru wiemy, że w naszym kolorowaniu finalnym nie będzie więcej kolorów. Użycie wierzchołka o minimalnym stopniu sprawia również, że nasza początkowa tablica kolorów ma możliwie najmniejszy rozmiar, a co bardziej istotne jej wielkość jest stałą.
Na początek uruchamiamy algorytm BFS z wierzchołkiem początkowym v_0, dzielimy wierzchołki na warstwy a krawędzie na krawędzie dolne, poprzeczne i górne. Następnie dla każdej warstwy wykonujemy etykietowanie a następnie sprawdzamy spójność. Może się okazać, że nasza procedura wykona się bez błędów i w taki oto sposób otrzymamy nasze kolorowanie końcowe produktu iloczynu kartezjańskiego, a co za tym idzie rozkład naszego grafu wyjściowego na iloczyn grafów prostych.
Bardziej prawdopodobne jest jednak, że etykietowanie lub sprawdzanie spójności nie wykona się poprawnie. Dla przykładu, będziemy kolorować krawędzie poprzeczne warstwy L_1, widzimy wówczas, że nie jesteśmy w stanie pokolorować w takiej krawędzi (patrz lemat o trójkącie). Oznacza to po prostu, że nasze

kolorowanie początkowe krawędzi wychodzących z v_0 jest niewłaściwe, użyliśmy zbyt dużej ilości kolorów. Wówczas procedura jest prosta- łączymy kolory krawędzi incydentnych z naszą krawędzią poprzeczną w jeden i wówczas możemy ją już pokolorować bez problemu. Cała idea naszego algorytmu opiera się na tym kopcenie: poetykietuj krawędzie i sprawdź spójność- jeżeli jest to niemożliwe- połącz kolory.
Jak się okazuje nie ma konieczności rekolorowania krawędzi, jeżeli już zostały pomalowane wcześniej, wystarczy tylko zanotować fakt, że dany kolor został połączony z innym. Ponieważ $d(v_0)^2 \leqslant d(v_0)n \leqslant 2m$ nie ma konieczności przetrzymywać danych o kolorach w żadnych skomplikowanych strukturach danych. Dodatkowo wiemy, że w finalnym kolorowaniu użyty będzie co najmniej jeden kolor, to operacji łączenia kolorów będzie również co najwyżej $d(v_0)$ co również nie zaburzy złożoności czasowej naszego algorytmu. W trakcie działania algorytmu kolory początkowe będziemy łączyć w zbiory połączonych kolorów. Kolor o najmniejszym indeksie w tablicy kolorów początkowych będziemy nazywać kolorem nominalnym i będzie on reprezentował zbiór kolorów połączonych w jeden. Te zbiory będziemy rozumieć jako nowe kolory. Tablice kolorów opisane w rozdziale o etykietowaniu będą zatem zawierać podtablicę kolorów początkowych i podziały będą tworzone właśnie według tych początkowych kolorów, oczywiście cały czas mając informację o tym czy i do jakiego koloru został dołączony dany kolor początkowy.
Generalnie krok naszego algorytmu będzie wyglądał następująco. Sprawdzamy spójność dla poziomu L_i. Następnie przechodzimy do etykietowania. Jeżeli nie będziemy mogli tego zrobić, oznacza to, że konieczne jest połączenie kolorów. Krótka analiza sprawia, że powody, dla których etykietowanie może nie zakończyć się sukcesem są następujące: zbyt mała liczba wierzchołków, zbyt mała liczba krawędzi lub przeciwnie zbyt duża liczba wierzchołków lub krawędzi. Może się również okazać, że algorytm, próbujący pobrać jakaś krawędź z list monochromatycznych nie będzie mógł tego zrobić ponieważ lista będzie za krótka. Analiza wykonana w pracy [5] pozwoli nam dojść do wniosku, że etykietowanie nie wykona się poprawnie tylko w przypadku gdy rozważany wierzchołek należy do warstwy jednostkowej lub krawędź jest incydentna z takim wierzchołkiem. Oznacza to, że krawędzie dolne i poprzeczne incydentne z tym wierzchołkiem powinny być połączone w jedną listę monochromatyczną, o ile oczywiście łączymy kolory tych list w jeden.
Łatwo można stwierdzić, że nie ma potrzeby przekolorowania krawędzi z niższych warstw. Co więcej nie ma potrzeby jeszcze raz sprawdzania spójności.

Wynika to z faktu, że mając mniej kolorów mamy mniej warstw, za to większych. A co za tym idzie, mamy mniej sprawdzania spójności między warstwami a sprawdzenia wykonane wcześniej dla krawędzi są wciąż ważne.
Następnie przechodzimy do sprawdzania spójności dla warstwy L_{i+1}. I podobnie jak dla etykietowania, jeżeli nie będziemy mogli przeprowadzić procedury z sukcesem, łączymy kolory. Podobnie jak dla etykietowania, stosując tę samą argumentację nie musimy sprawdzać niższych poziomów po połączeniu kolorów.

7 Literatura

[1] F. Aurenhammer, J. Hagauer, W. Imrich, Cartesian graph factorization at logarithmic cost per edge, Comput. Complexity 2 (1992) 331–349

[2] T. Feder, Product graph representations, J. Graph Theory 16 (1992) 467–488.

[3] J. Feigenbaum, J. Hershberger, A.A. Schäffer, A polynomial time algorithm for finding the prime factors of Cartesian-product graphs, Discrete Appl. Math. 12 (1985) 123–138

[4] W. Imrich, I. Peterin, W. Imrich, I. Peterin / Discrete Mathematics 307 (2007) 472 – 483

[5] W. Imrich, S. Klavžar, Product Graphs: Structure and Recognition, Wiley, New York, 2000

[6] G. Sabidussi, Graph multiplication, Math. Z. 72 (1960) 446–457.

[7] V.G. Vizing, The Cartesian product of graphs (Russian), Vycisl. Systemy 9 (1963) 30–43, English translation in Comput. Electron Syst. 2 (1966) 352–365.

[8] V.G. Vizing, Some unsolved problems in graph theory, Russian Math. Surveys 23 (1968) 125–141.

[9] P.M. Winkler, Factoring a graph in polynomial time, European J. Combin. 8 (1987) 209–212