

# Faktoryzacja iloczynu kartezjańskiego grafów

Andrzej Kawula  
Promotor: dr Monika Pilśniak

30.06.2018

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Wstęp</b>	<b>2</b>
2.1	Informacje wstępne . . . . .	2
2.2	Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów . . . . .	2
2.3	Lemat o kwadracie . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Algorytm Faktoryzacji</b>	<b>4</b>
3.1	Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami . . . . .	4
3.2	Nadawanie współrzędnych wierzchołkom . . . . .	4
3.3	Etykietowanie produktu kartezjańskiego . . . . .	4
3.4	Etykietowanie produktu w czasie liniowym . . . . .	4
3.5	Sprawdzanie spójności kolorowanie właściwego produktu iloczynu kartezjańskiego . . . . .	4
3.6	Opis algorytm faktoryzacji . . . . .	4
3.7	Wprowadzenie . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Implementacja Algorytmu</b>	<b>4</b>
4.1	Wprowadzenie . . . . .	4
4.2	Dane wejściowe . . . . .	4
4.3	Opis pakietów i ważniejszych klas . . . . .	4
4.4	Opis algorytm faktoryzacji . . . . .	4

# 1 Wprowadzenie

## 2 Wstęp

### 2.1 Informacje wstępne

Produktem kartezjańskim  $G_1 \square G_2$  grafów  $G_1 = (V_1, E_1)$  i  $G_2 = (V_2, E_2)$  jest graf  $G = (V, E)$ , którego zbiorem wierzchołków jest iloczyn kartezjański wierzchołków grafów  $G_1$  i  $G_2$  ( $V = V_1 \times V_2$ ), natomiast wierzchołki  $(x_1, y_1)$  oraz  $(x_2, y_2)$  są połączone w grafie  $G$  jeżeli  $x_1 = x_2$  oraz  $y_1 y_2 \in E_2$  lub  $x_1 x_2 \in E_1$  oraz  $y_1 = y_2$ .

Iloczyn kartezjański grafów jest działaniem łącznym, przemennym, z dokładnością do izomorfizmu, elementem neutralnym działania jest graf  $K_1$ .

Z łączności działania można zapisać  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k = G$  gdzie  $G$  jest produktem kartezjańskim grafów  $G_1, G_2, \dots, G_k$ , a następnie poetykietować wierzchołki grafu  $G$   $k$ -elementową listą  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  gdzie  $v_i \in V(G_i)$  dla  $1 \leq i \leq k$ . Jeżeli  $v$  etykietowny jest przez listę  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ , można zdefiniować rzutowanie  $p_i : V \rightarrow V_i$  dla  $1 \leq i \leq k$ , które dane jest wzorem  $p_i(v) = v_i$ , gdzie  $v_i$  jest  $i$ -tym elementem listy etykietującej wierzchołek  $v$ . Wierzchołek  $v_i$  ten będzie  $i$ -tą współrzędną wierzchołka  $v$ .

Jeżeli w grafie  $G$  dany jest wierzchołek  $v$  i rozważone zostaną wierzchołki, które różnią się od wierzchołka  $v$  tylko na  $i$ -tej pozycji, to podgraf indukowany przez te wierzchołki utworzy graf izomorficzny z grafem  $G_i$ . Podgraf ten będzie nazywany  $i$ -tą warstwą  $G_i$  przechodzącą przez wierzchołek  $v$  a jego oznaczeniem będzie  $G_i^v$ . Niech  $v_0$  będzie wyróżnionym wierzchołkiem w grafie  $G$ . Warstwy przechodzące przez  $v_0$  będą nazywane warstwami jednostkowymi. Wierzchołek  $v_0$  należy do każdej warstwy jednostkowej, natomiast zbiory  $V(G_i^{v_0}) \setminus \{v_0\}$  są parami rozłączne dla  $1 \leq i \leq k$ .

Tutaj będzie przykład

### 2.2 Kolorowanie produktu iloczynu kartezjańskiego grafów

Niech dane będą dwa połączone wierzchołki  $u$  oraz  $v$  w grafie  $G$ . Analizując współrzędne tych wierzchołków, łatwo można stwierdzić że różnią się one dokładnie na jednej pozycji. Niech  $i$  oznacza tę pozycję. Wtedy krawędź  $uv$  należy do  $G_i^v$ . Krawędzi  $uv$  otrzymuje kolor  $i$  czyli  $c(uv) = i$ , gdzie  $c$  jest kolorowaniem właściwym produktu kartezjańskiego. Podsumowując: funkcja  $c : E(G) \rightarrow 1, 2, \dots, k$  jest kolorowaniem właściwym produktu iloczynu kartezjańskiego jeżeli  $c(uv) = i$  wtedy i tylko wtedy gdy współrzędne wierzchołków  $u$  oraz  $v$  różnią się na  $i$ -tej pozycji.

Każda krawędź należy dokładnie do jednej warstwy. Rozważając podgraf grafu  $G$

składający się z krawędzi koloru  $i$  to każda spójna składowa tego podgrafu będzie oddzielną i-tą warstwą grafu  $G$ .

## 2.3 Lemat o kwadracie

Niech graf  $G$  posiada właściwe pokolorowanie produktu kartezjańskiego. Dane są dwie połączone krawędzie  $e$  i  $f$  różnych kolorów. Wówczas istnieje dokładnie jeden kwadrat bez przekątnych (graf  $C_4$ ) zawierający  $e$  oraz  $f$ .

*Dowód:*

Na początku przeanalizowany będzie następujący fakt. Każdy trójkąt w grafie  $G$  jest pomalowany na ten sam kolor. Wynika to z tego, że dwa pierwsze wierzchołki różnią się na pozycji  $i$ -tej, natomiast jeżeli współrzędne trzeciego wierzchołka różniłyby się na pozycji  $j$ -tej która jest różna od  $i$  w porównaniu z pierwszym wierzchołkiem i jego współrzędnymi, nie byłoby możliwości aby drugi i trzeci wierzchołek byłby ze sobą połączone, ponieważ ich współrzędne różniłyby się na dwóch pozycjach.

Na podstawie powyższego stwierdzenia można wnioskować, że każdy kwadrat zawierający co najmniej jedną przekątną jest tego samego koloru.

Teraz właściwy dowodu lematu. Dane są następujące oznaczenia:

$(v_0, v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$  współrzędne wspólnego wierzchołka  $v$  krawędzi  $e$  oraz  $f$   
 $(v_0, v_1, \dots, v'_i, \dots, v_j, \dots, v_k)$  współrzędne wierzchołka  $v_e$  który jest drugim końcem krawędzi  $e$

$(v_0, v_1, \dots, v_i, \dots, v'_j, \dots, v_k)$  współrzędnymi wierzchołka  $v_f$  który jest drugim końcem krawędzi  $f$

$v'$  wierzchołek o współrzędnych  $(v_0, v_1, \dots, v'_i, \dots, v'_j, \dots, v_k)$

Łatwo stwierdzić, że wierzchołek  $v'$  jest połączony z wierzchołkiem  $v_e$  ponieważ ich współrzędne różnią się tylko na pozycji  $j$  oraz w grafie  $G_j$  istnieje krawędź  $v_j v'_j$  ponieważ w grafie  $G$  istnieje krawędź  $f$ . Analogicznie możemy stwierdzić istnienie krawędzi  $v' v_f$ , co w połączeniu z faktem, że krawędzie  $e$  oraz  $f$  są różnego koloru i rozważaniom na temat kwadratów z przekątnymi daje nam tezę lematu. Co więcej na podstawie powyższego rozumowania, można wnioskować że przeciwległe krawędzie w kwadracie mają ten sam kolor, niezależnie czy kwadrat posiada przekątne czy też nie.

### **3 Algorytm Faktoryzacji**

#### **3.1 Faktoryzacja z dodatkowymi informacjami**

#### **3.2 Nadawanie współrzędnych wierzchołkom**

#### **3.3 Etykietowanie produktu kartezjańskiego**

#### **3.4 Etykietowanie produktu w czasie liniowym**

#### **3.5 Sprawdzanie spójności kolorowanie właściwego produktu iloczynu kartezjańskiego**

#### **3.6 Opis algorytm faktoryzacji**

#### **3.7 Wprowadzenie**

### **4 Implementacja Algorytmu**

#### **4.1 Wprowadzenie**

#### **4.2 Dane wejściowe**

#### **4.3 Opis pakietów i ważniejszych klas**

#### **4.4 Opis algorytm faktoryzacji**