

# Projekt 5

Ekonometria finansowa i dynamiczna

Informatyka i Ekonometria rok V semestr I

Grzegorz Bylina

Kamila Kucharska

Andrzej Miczek

## Spis treści

Wprowadzenie .....	3
Przygotowanie danych .....	4
Segmentacja danych na okna czasowe .....	5
Estymacja modeli jednowymiarowych .....	6
Estymacja modeli wielowymiarowych .....	6
Obliczanie VaR (Value at Risk) .....	6
Porównanie wyników VaR .....	7
GARCH z rozkładem normalnym .....	8
GARCH z rozkładem t-Studenta .....	8
DCC GARCH z rozkładem normalnym .....	8
DCC GARCH z rozkładem t-Studenta .....	8
BEKK z rozkładem normalnym .....	8
BEKK z rozkładem t-Studenta .....	8
Podsumowanie wyników VaR .....	9
Ocena zgodności rozkładów warunkowych reszt .....	9
Test zgodności reszt modelu GARCH z odpowiednim rozkładem warunkowym .....	9
Test zgodności reszt modelu DCC GARCH z rozkładem normalnym .....	10
Test zgodności reszt modelu DCC GARCH z rozkładem t-Studenta .....	10
Test zgodności reszt modelu BEKK z rozkładem normalnym .....	11
Test zgodności reszt modelu BEKK z rozkładem t-Studenta .....	11
Podsumowanie .....	12

# Wprowadzenie

Współczesne rynki finansowe cechują się dużą zmiennością, co wymaga stosowania zaawansowanych narzędzi do analizy ryzyka. Jednym z kluczowych zagadnień w zarządzaniu ryzykiem jest oszacowanie wartości zagrożonej (Value at Risk, VaR), która stanowi miarę potencjalnej straty w określonym horyzoncie czasowym przy zadanym poziomie ufności. W projekcie przedstawiono analizę przydatności wielowymiarowych modeli warunkowej wariancji do szacowania VaR na podstawie danych dziennych czterech spółek z jednego sektora w okresie od 2014 do 2024 roku.

Przeprowadzona analiza obejmuje zastosowanie i porównanie dwóch klas wielowymiarowych modeli GARCH: modelu BEKK oraz modelu DCC GARCH. W każdym z tych modeli rozważono dwa rodzaje warunkowych rozkładów: normalny i t-Studenta. Celem projektu jest ocena ich skuteczności w obliczaniu VaR przy poziomach ufności 1% oraz 5%. W ramach badania zastosowano podejście przesuwanych okien czasowych o długości dwóch lat, co umożliwia uwzględnienie zmienności parametrów w czasie i dostosowanie modeli do zmieniających się warunków rynkowych.

Dodatkowo wyniki uzyskane z wielowymiarowych modeli porównano z VaR obliczonym na podstawie jednowymiarowych modeli GARCH z warunkowymi rozkładami normalnym i t-Studenta. Ważnym elementem analizy jest również weryfikacja zgodności rozkładu warunkowego reszt z przyjętym rozkładem warunkowym, co pozwala na ocenę jakości kalibracji modeli.

Projekt pozwoli na lepsze zrozumienie możliwości i ograniczeń wielowymiarowych modeli GARCH w kontekście szacowania ryzyka finansowego oraz dostarczy praktycznych wskazówek dotyczących ich zastosowania na rynkach o dużej dynamice zmian.

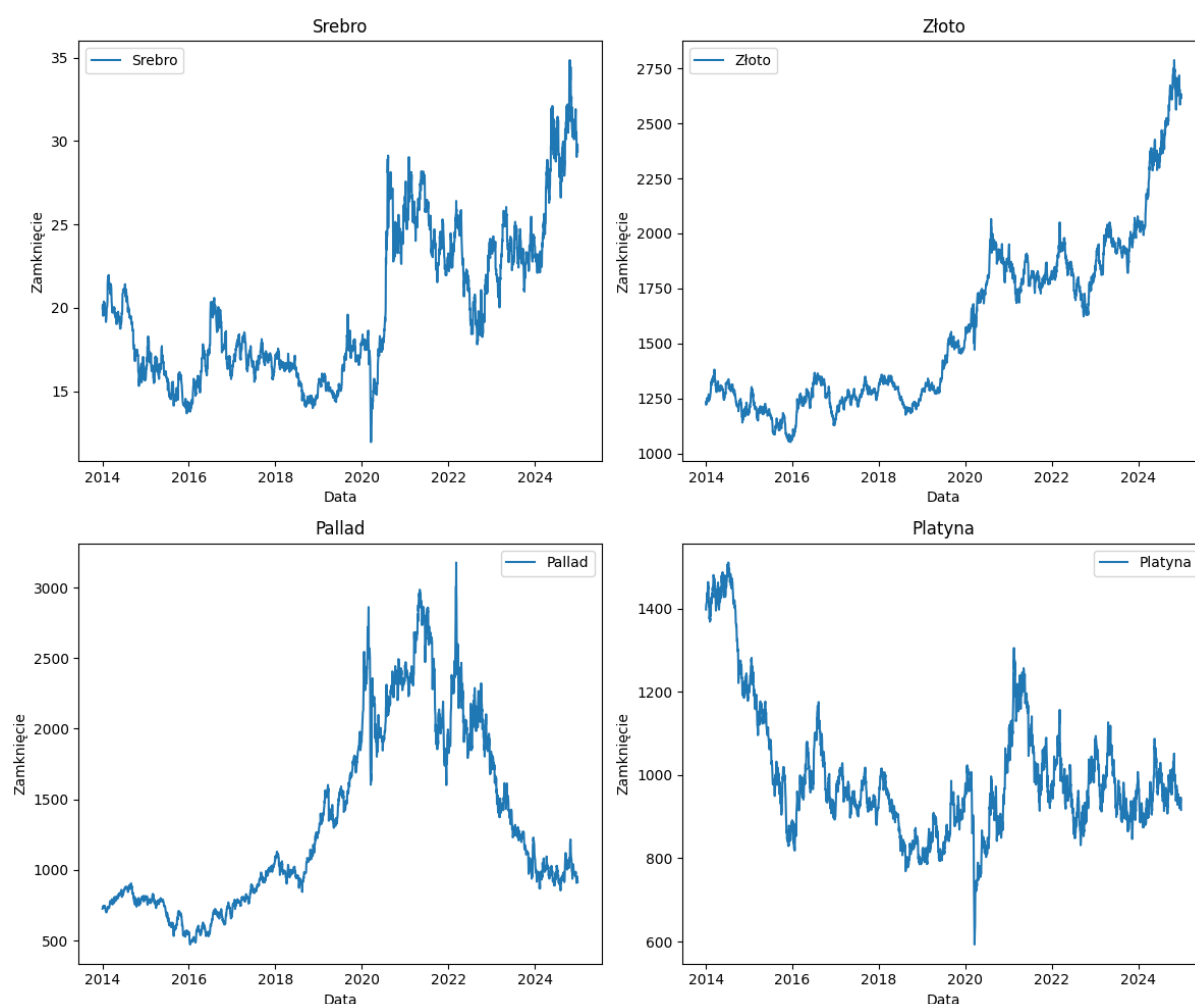
# Przygotowanie danych

Dane wykorzystane w projekcie zostały pobrane ze strony [stooq.pl](https://stooq.pl). Analizowane szeregi czasowe obejmują okres 2014–2024. Każdy szereg czasowy reprezentuje logarytmiczne stopy zwrotu (*Log\_Return*) dla wybranych aktywów finansowych:

- **xptusd** – kurs platyny względem USD,
- **xauusd** – kurs złota względem USD,
- **xpdusd** – kurs palladu względem USD,
- **xagusd** – kurs srebra względem USD.

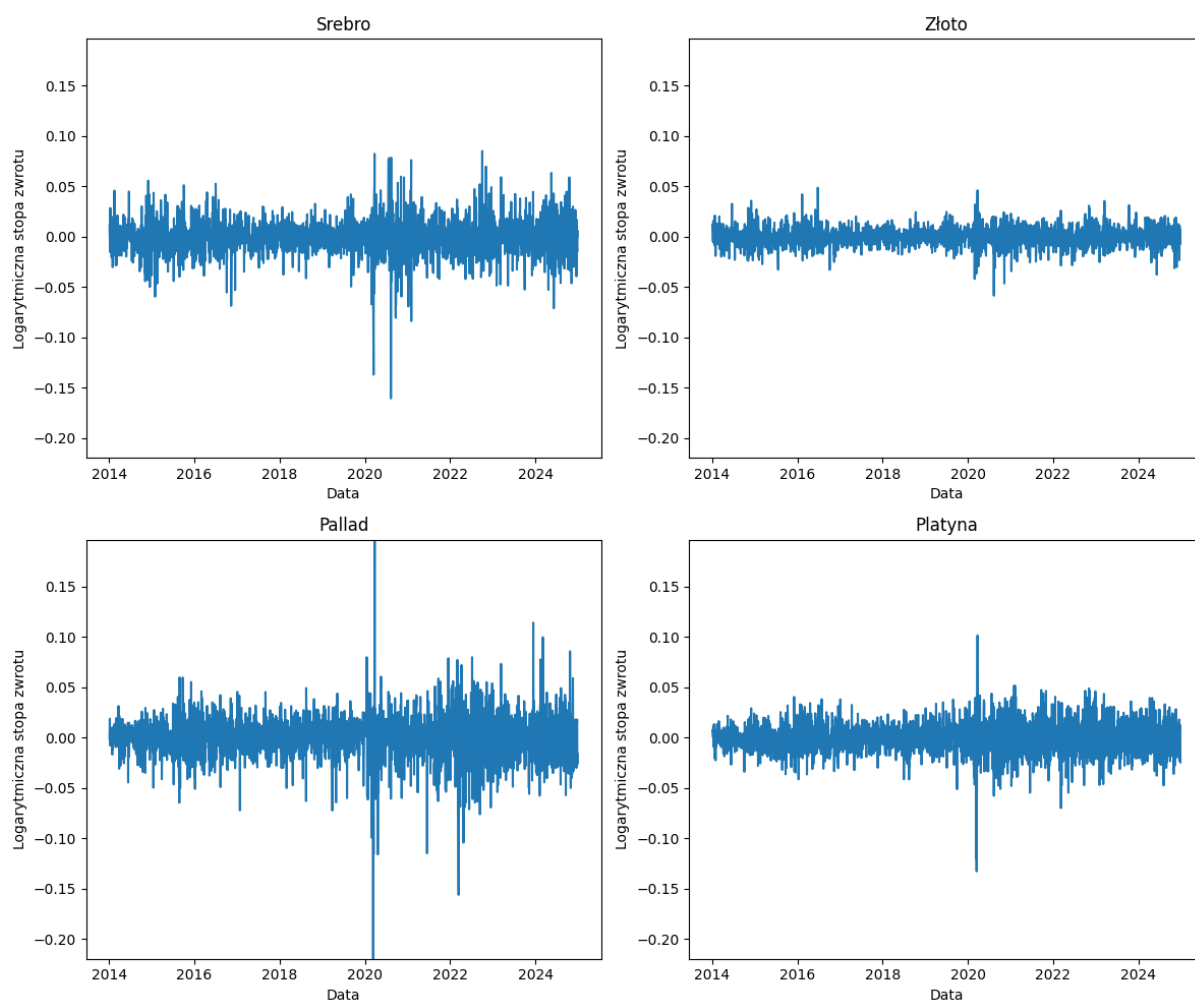
Dane zostały przekształcone w macierz wielowymiarową, która zawiera logarytmiczne stopy zwrotu dla wszystkich aktywów.

Następnie zostanie zaprezentowany wykres szeregów czasowych wybranych aktywów.



Można zauważyć stały trend wzrostowy złota i srebra na przestrzeni lat. Platyna posiada zauważalny trend spadkowy. Ciekawe jest zjawisko nagłego wzrostu każdego z metali w trakcie 2020-2022 co może sugerować wpływ pandemii Covid19 na zainteresowanie lokowania kapitału w metale.

Wykres logarytmicznych stóp zwrotu wybranych aktywów.



Największe wahania wartości stóp zwrotu otrzymujemy przy Palladzie, a najmniejsze przy złocie. Na tym wykresie również możemy zauważyć nagły impuls w podobnym okresie czasowym, prawdopodobnie spowodowany pandemią Covid19.

## Segmentacja danych na okna czasowe

Dla przeprowadzenia analizy wykorzystano metodę przesuwanych okien czasowych. Dane zostały podzielone na okna obejmujące dwa lata, czyli około 504 dni giełdowych (252 dni w roku). Okna czasowe były przesuwane codziennie o jedno notowanie. Dla każdego okna czasowego utworzono osobny podzbiór danych, który obejmował logarytmiczne stopy zwrotu wszystkich instrumentów w analizowanym przedziale.

## Estymacja modeli jednowymiarowych

Estymacja modeli jednowymiarowych GARCH była pierwszym etapem analizy, w którym skupiono się na modelowaniu zmienności dla pojedynczego instrumentu finansowego z dostępnego zbioru danych. Do tego celu wybrano instrument xptusd (kurs platyny), reprezentowany jako pierwsza kolumna w przetworzonym zbiorze danych multivariate\_data.

Dla danych instrumentu xptusd dopasowano dwa warianty modeli GARCH: z rozkładem normalnym oraz t-Studenta. W pierwszym modelu założono, że reszty modelu mają rozkład normalny. Estymacja parametrów była przeprowadzona za pomocą funkcji, która iteracyjnie dopasowywała parametry modelu tak, aby zmaksymalizować funkcję wiarygodności dla danych. Drugi model GARCH z rozkładem t-Studenta uwzględniał możliwość występowania grubych ogonów w rozkładzie reszt. Taka specyfikacja lepiej opisuje ryzyko ekstremalnych zdarzeń, które często są niedoszacowane w przypadku rozkładu normalnego. Specyfikacja modelu była podobna do wariantu z rozkładem normalnym, z tą różnicą, że rozkład reszt został ustawiony jako std (rozkład t-Studenta).

W obu przypadkach estymacja modeli jednowymiarowych była procesem iteracyjnym, w którym parametry były dopasowywane w taki sposób, aby uzyskać najlepsze dopasowanie do danych.

## Estymacja modeli wielowymiarowych

Estymacja modeli wielowymiarowych była kolejnym etapem analizy, w którym skupiono się na modelowaniu współzależności zmienności pomiędzy kilkoma instrumentami finansowymi jednocześnie. Dla danych tych instrumentów dopasowano dwa typy wielowymiarowych modeli GARCH: BEKK oraz DCC, każdy z rozkładami normalnym oraz t-Studenta.

W obu przypadkach, zarówno dla modelu BEKK, jak i DCC, estymacja parametrów była procesem iteracyjnym, w którym parametry były dopasowywane w taki sposób, aby uzyskać najlepsze dopasowanie do danych.

## Obliczanie VaR (Value at Risk)

Po uzyskaniu prognoz wartości VaR dla poszczególnych instrumentów finansowych z wykorzystaniem modeli BEKK i DCC GARCH, kolejnym krokiem było przeprowadzenie porównania wyników z wartościami uzyskanymi z modeli GARCH jednowymiarowych. Celem tego etapu było ocena skuteczności i precyzyjności wielowymiarowych modeli w kontekście przewidywania ryzyka oraz ocena, czy modelowanie współzależności między instrumentami finansowymi poprawia prognozy VaR w porównaniu do prostszych modeli jednowymiarowych.

W przypadku modeli wielowymiarowych, takich jak BEKK i DCC GARCH, obliczanie VaR uwzględniało współzależności pomiędzy badanymi instrumentami finansowymi. Dla każdego momentu w czasie oszacowano wielowymiarową macierz wariancji-kowariancji, która była następnie wykorzystywana do określenia VaR portfela inwestycyjnego złożonego z badanych aktywów.

# Porównanie wyników VaR

Tabela zawierająca wartości VaR dla różnych modeli oraz poziomów ryzyka (1% i 5%).

Model	VaR (1%)	VaR (5%)
GARCH Normalny	-0,0321	-0,0228
GARCH t-Studenta	-0,4382	-0,0873
DCC GARCH Normalny	-0,2715	-0,1921
DCC GARCH Normalny	-0,2292	-0,1620
DCC GARCH Normalny	-0,3202	-0,2264
DCC GARCH Normalny	-0,3019	-0,2135
DCC GARCH t-Studenta	-3,7063	-0,7358
DCC GARCH t-Studenta	-3,1359	-0,6222
DCC GARCH t-Studenta	-4,3796	-0,8690
DCC GARCH t-Studenta	-4,1245	-0,8187
BEKK Normalny	-0,0353	-0,0249
BEKK Normalny	-0,0204	-0,0144
BEKK Normalny	-0,0498	-0,0352
BEKK Normalny	-0,0385	-0,0272
BEKK t-Studenta	-0,4831	-0,0956
BEKK t-Studenta	-0,2789	-0,0552
BEKK t-Studenta	-0,6811	-0,1350
BEKK t-Studenta	-0,5271	-0,1044
BEKK t-Studenta	-0,4832	-0,0958
BEKK t-Studenta	-0,2789	-0,0552
BEKK t-Studenta	-0,6812	-0,1351
BEKK t-Studenta	-0,5271	-0,1045
BEKK t-Studenta	-0,4831	-0,0957
BEKK t-Studenta	-0,2789	-0,0553
BEKK t-Studenta	-0,6809	-0,1347
BEKK t-Studenta	-0,5271	-0,1044
BEKK t-Studenta	-0,4832	-0,0957
BEKK t-Studenta	-0,2789	-0,0552
BEKK t-Studenta	-0,6812	-0,1350
BEKK t-Studenta	-0,5269	-0,1043

Dla BEKK z rozkładem t-Studenta występuje więcej wyników, ponieważ przy tym rozkładzie generowane są wyniki dla każdego zestawu czasowego.

VaR na poziomie 1% wskazuje na wartość, która oznacza stratę, którą nie powinno się przekroczyć w 1% najgorszych przypadków. Oczekiwane jest, że ta wartość będzie bardziej ujemna niż dla 5%, ponieważ mniejsze prawdopodobieństwo oznacza większą wartość straty. Na przykład, jeśli mamy VaR na poziomie 1% wynoszący -0.438, a dla 5% wynosi on -0.087, to naturalnie dla poziomu 1% wartość VaR będzie bardziej ekstremalna, ponieważ mówimy o wyższym ryzyku (bardziej skrajnych stratach).

Podobnie, dla rozkładu t-Studenta, który ma dłuższe ogony, różnica między VaR na poziomie 1% a 5% będzie jeszcze wyraźniejsza. Wartości dla 1% będą bardziej rozciągnięte (większe ujemne wartości), co widać w wynikach (np. -3.7063 dla 1% w DCC GARCH t-Student vs. -0.7358 dla 5%).

## GARCH z rozkładem normalnym

Na poziomie 1% ryzyka, oczekiwany spadek wartości aktywów w jednym dniu wynosi około 3.21% w porównaniu do aktualnej wartości. Na poziomie 5% ryzyka, oczekiwany spadek wartości aktywów wynosi 2.29%.

## GARCH z rozkładem t-Studenta

Dla poziomu 1% oczekiwany spadek wartości aktywów w jednym dniu wynosi aż 43.82%, co wskazuje na bardzo wysoki potencjalny spadek, prawdopodobnie z powodu większej zmienności, jaką t-Student modeluje. Na poziomie 5%, oczekiwany spadek to 8.73%, co także jest znacząco wyższe niż w przypadku rozkładu normalnego.

## DCC GARCH z rozkładem normalnym

Dla różnych par aktywów VaR na poziomie 1% waha się od 22.92% do 32.03%, co wskazuje na zmienność pomiędzy różnymi pozycjami w portfelu. Na poziomie 5% ryzyka wartości te wahają się od 16.21% do 22.61%, co również świadczy o zmienności w portfelu.

## DCC GARCH z rozkładem t-Studenta

Wartości te są znacznie wyższe, co wskazuje na jeszcze większą zmienność w porównaniu do rozkładu normalnego. Dla poziomu 1% ryzyka straty sięgają 370-437%, co jest bardzo wysokim ryzykiem. Na poziomie 5% ryzyko spadku wartości aktywów wynosi od 62.2% do 86.9%, co jest również bardzo dużym wynikiem.

## BEKK z rozkładem normalnym

Dla różnych par aktywów wartości te wahają się od 2.04% do 4.98%. VaR dla tego modelu jest wyraźnie mniejsze w porównaniu do DCC GARCH z rozkładem t-Studenta. Na poziomie 5% ryzyko wynosi od 1.44% do 3.52%.

## BEKK z rozkładem t-Studenta

Dla tego modelu wartości są stosunkowo mniejsze niż w przypadku DCC GARCH z rozkładem t-Studenta, ale większe niż w przypadku BEKK z rozkładem normalnym. Na poziomie 5% ryzyko wynosi od 5.53% do 13.5%. Możemy zauważyć powtarzające się wartości.



## Podsumowanie wyników VaR

Wyniki dla 1% wydają się naturalne i spójne z oczekiwaniami, ponieważ są bardziej ekstremalne niż dla 5%, co jest zgodne z definicją VaR i typowym zachowaniem rozkładów prawdopodobieństwa.

Modele oparte na rozkładzie t-Studenta (zwłaszcza dla DCC GARCH) generują bardzo wysokie wartości VaR, co sugeruje większe ryzyko w porównaniu do rozkładu normalnego. Wartości te mogą sugerować, że aktywa w badanych grupach mają tendencję do wykazywania większych skoków zmienności i dużych, nieoczekiwanych spadków prawdopodobnie spowodowane przez pandemię Covid19.

Modele GARCH i BEKK z rozkładem normalnym generują niższe wartości VaR, wskazując na bardziej stonowane ryzyko.

## Ocena zgodności rozkładów warunkowych reszt

### Test zgodności reszt modelu GARCH z odpowiednim rozkładem warunkowym

Test Jarque-Bera i test Kołmogorowa-Smirnowa			
Model	Statystyka	p-value	Decyzja
Rozkład normalny	2824,096	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Rozkład t-Studenta	0,5107314	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t

Wyniki testów dla modeli z założeniami o rozkładzie normalnym i t-Studenta wskazują na brak zgodności empirycznych rozkładów reszt z przyjętymi założeniami. W przypadku modelu z rozkładem normalnym test Jarque-Bera wykazał statystykę 2824,096 i p-value równą 0, co wskazuje na istotne odchylenie od normalności. Hipoteza zerowa została odrzucona, co oznacza, że rozkład normalny nie pasuje do danych. Podobnie w modelu z rozkładem t-Studenta test Kołmogorowa-Smirnowa wykazał statystykę 0,5107314 i p-value równą 0, co również prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Model ten nie odwzorowuje w pełni właściwości danych. Podsumowując, ani rozkład normalny, ani t-Studenta nie są odpowiednie dla analizowanych metali, które mogą charakteryzować się bardziej złożonymi właściwościami.

## Test zgodności reszt modelu DCC GARCH z rozkładem normalnym

Dla każdego poniższego testu dla modeli DCC GARCH oraz dla modeli BEKK dokonano iteracja przez zmienne standaryzowanych reszt. Każda zmienna w modelu reprezentuje odrębną serię czasową, dlatego konieczne jest przeprowadzenie analizy reszt indywidualnie dla każdej zmiennej. Iteracja przez standaryzowane reszty, czyli takie, które zostały przeskalowane względem zmienności warunkowej, pozwala na ocenę zgodności badanego rozkładu reszt z przyjętymi teoretycznymi założeniami modeli.

Test Jarque-Bera			
Zmienna	Statystyka	p-value	Decyzja
Plantyna	158,806	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Złoto	681,3873	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Pallad	2163,759	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Srebro	752,0631	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt

Wyniki testu Jarque-Bera dla modelu DCC GARCH z rozkładem normalnym wskazują, że reszty dla wszystkich badanych zmiennych (platyna, złoto, pallad, srebro) znacząco odbiegają od normalności. Wysokie wartości statystyki testu i p-value równe 0 we wszystkich przypadkach prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności reszt. Oznacza to, że rozkład normalny nie jest odpowiedni dla tych danych, co może wynikać z ich specyficznych cech.

## Test zgodności reszt modelu DCC GARCH z rozkładem t-Studenta

Test Kołmogorowa-Smirnowa			
Zmienna	Statystyka	p-value	Decyzja
Plantyna	0,8233131	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Złoto	0,8665562	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Pallad	0,8331441	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Srebro	0,8518723	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t

Test Kołmogorowa-Smirnowa dla modelu DCC GARCH z rozkładem t-Studenta wykazał brak zgodności reszt z tym rozkładem dla wszystkich zmiennych. Wysokie statystyki i p-value równe 0 prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej, co oznacza, że model z rozkładem t-Studenta nie odwzorowuje w pełni danych.

## Test zgodności reszt modelu BEKK z rozkładem normalnym

Test Jarque-Bera			
Zmienna	Statystyka	p-value	Decyzja
Plantyna	158,806	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Złoto	681,3873	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Pallad	2163,759	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt
Srebro	752,0631	0	Odrzucamy hipotezę o normalności reszt

Test Jarque-Bera dla modelu BEKK z rozkładem normalnym wskazuje na brak zgodności reszt z rozkładem normalnym dla wszystkich badanych zmiennych. Wysokie wartości statystyki testu (np. platyna: 158,806, pallad: 2163,759) oraz p-value równe 0 prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności reszt. Oznacza to, że model BEKK z założeniem normalności reszt nie odwzorowuje właściwości danych w sposób odpowiedni.

## Test zgodności reszt modelu BEKK z rozkładem t-Studenta

Test Kołmogorowa-Smirnowa			
Zmienna	Statystyka	p-value	Decyzja
Plantyna	0,9163231	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Złoto	0,9606947	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Pallad	0,913728	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t
Srebro	0,9483443	0	Odrzucamy hipotezę o zgodności z rozkładem t

Test Kołmogorowa-Smirnowa dla modelu BEKK z rozkładem t-Studenta wykazał brak zgodności reszt z tym rozkładem dla wszystkich badanych zmiennych. Wysokie wartości statystyki testu (np. platyna: 0,9163231, złoto: 0,9606947) oraz p-value równe 0 prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej. Oznacza to, że model BEKK z założeniem rozkładu t-Studenta nie odwzorowuje w pełni właściwości danych.

Podsumowując, wyniki jednoznacznie pokazują, że zarówno rozkład normalny, jak i t-Studenta, nie są odpowiednie dla analizowanych danych, co wskazują, że można by zastosować inne modele lub rozkłady, które lepiej uwzględnią charakterystyki danych finansowych dotyczących cen wybranych metali.

## Podsumowanie

Analiza obejmowała ocenę przydatności modeli wielowymiarowych BEKK i DCC GARCH oraz jednowymiarowych GARCH do szacowania wartości zagrożonej (VaR) na poziomach ufności 1% i 5%. Badanie przeprowadzono na danych dziennych cen wybranych metali w okresie 2014–2024, korzystając z przesuwanych okien czasowych o długości dwóch lat. Uwzględniono dwa rodzaje rozkładów warunkowych: normalny i t-Studenta. Dodatkowo zweryfikowano zgodność rozkładu warunkowego reszt z przyjętymi założeniami.

Testy Jarque-Bera i Kołmogorowa-Smirnowa wykazały brak zgodności reszt z założonymi rozkładami dla wszystkich analizowanych modeli. Modele oparte na t-Studencie generowały wyższe wartości VaR, co wskazuje na ich większą wrażliwość na skrajne zdarzenia.

Porównanie modeli jednowymiarowych i wielowymiarowych ujawniło, że modele wielowymiarowe lepiej uwzględniają współzależności między zmiennymi, prowadząc do bardziej kompleksowej oceny w kontekście cen badanych metali. Generowały one wyższe wartości VaR w porównaniu z modelami jednowymiarowymi, co odzwierciedla dodatkowe ryzyko wynikające z korelacji między aktywami. Modele jednowymiarowe, choć prostsze, nie wykryły możliwych współzależności, co może skutkować nie dokładnymi prognozami.

Podsumowując, wielowymiarowe modele okazały się bardziej zaawansowanym narzędziem do szacowania VaR, szczególnie z wieloma zmiennymi. Jednak ich skuteczność jest ograniczona przez przyjęte założenia rozkładowe, co wskazuje, że inny dobór założeń w przypadku tego badania mógłby prowadzić do osiągnięcia lepszych wyników. Dodatkowo ważnym czynnikiem mogącym mieć wpływ na wyniki badań jest występowanie zdarzenia losowego, które mieściło się w ramach czasowych naszego badania, jakim była światowa pandemia COVID, co dobrze obrazują wykresy umieszczone na początku pracy.