INTERPOLACJA

1. Wstęp

Załóżmy że dane są wartości funkcji $f(x)$ na zbiorze punktów $x_0, x_1, ..., x_n$ zwanych **węzłami interpolacji**. Zadaniem interpolacji jest wyznaczenie przybliżonych wartości funkcji $f(x)$ zwanej **funkcją interpolowaną** w punktach nie będących węzłami interpolacji. Przybliżoną wartość funkcji $f(x)$ obliczamy za pomocą funkcji $F(x)$ zwaną **funkcją interpolującą**, która w węzłach ma te same wartości co funkcja interpolowana.

Funkcja interpolująca jest funkcją pewnej klasy. Najczęściej będzie to wielomian algebraiczny, wielomian trygonometryczny, funkcja wymierna lub funkcja sklejana.

Interpolację stosuje się najczęściej gdy nie znamy analitycznej postaci funkcji $f(x)$ (jest ona tylko stablicowana) lub gdy jej postać analityczna jest zbyt skomplikowana.

2. Interpolacja wielomianowa, wzory Lagrange'a i Newtona, schemat Aitkena

2.1. Sformułowanie problemu

Dane są węzły interpolacyjne $x_0, x_1, ..., x_n$, parami różne tzn. $x_i \neq x_j \Leftrightarrow i \neq j$. Dane są wartości funkcji interpolowanej w węzłach $f_0, f_1, ..., f_n$ gdzie $f_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, ..., n$. Zadanie interpolacji polega na znalezieniu wielomianu $L_n(x)$ stopnia co najwyżej n, by wartości tego wielomianu i funkcji interpolowanej w węzłach były sobie równe czyli

$$L_n(x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, 2, ..., n. \tag{1}$$

Twierdzenie 1. Zadanie interpolacji wielomianowej posiada jednoznaczne rozwiązanie, czyli istnieje tylko jeden wielomian spełniający warunek (1).

Szukany wielomian ma postać:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i \prod_{j=0\; j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}. \tag{2}$$

Wzór (2) nosi nazwę **wzoru Lagrange'a**.

Aby obliczyć wartość wielomianu Lagrange'a w punkcie x często stosuje się **algorytm iteracyjny Aitkena**. Niech $P_{i,i+1,...,i+j-1,i+j}(x)$ oznacza wartość wielomianu interpolacyjnego w punkcie x zbudowanego na węzłach $x_i, x_{i+1}, ..., x_{i+j-1}, x_{i+j}$. Można wykazać

$$P_{i,i+1,...,i+j-1,i+j}(x) = \frac{(x - x_i)P_{i+1,...,i+j-1,i+j}(x) - (x - x_{i+j})P_{i,i+1,...,i+j-1}(x)}{x_{i+j} - x_i} \tag{3}$$

przy czym $P_i(x) = f(x_i) = f_i$.

$P_{0,1,\ldots n}(x)$ jest więc wartością wielomianu interpolacyjnego w punkcie x i zbudowanego w oparciu o węzły $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Wyznacza się jego wartość wg następującego schematu

$$\begin{array}{lllllll}
x_0 & P_0(x) & P_{0,1}(x) & P_{0,1,2}(x) & \cdots & P_{0,1,\ldots,n-2}(x) & P_{0,1,\ldots,n-1}(x) & P_{0,1,\ldots,n}(x) \\
x_1 & P_1(x) & P_{1,2}(x) & P_{1,2,3}(x) & \cdots & P_{1,2,\ldots,n-1}(x) & P_{1,2,\ldots,n}(x) & \\
x_2 & P_2(x) & P_{2,3}(x) & P_{2,3,4}(x) & \cdots & P_{2,3,\ldots,n}(x) & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & & & \\
x_{n-2} & P_{n-2}(x) & P_{n-2,n-1}(x) & P_{n-2,n-1,n}(x) & & & & \\
x_{n-1} & P_{n-1}(x) & P_{n-1,n}(x) & & & & & \\
x_n & P_n(x) & & & & & &
\end{array} \qquad (4)$$

Wielomian w postaci wzoru Lagrange'a jest niewygodny zarówno do wyznaczania jego wartości w dowolnym punkcie (stosuje się wzór Aitkena) jak i jego całkowania bądź różniczkowania. Częściej wielomian interpolacyjny określa się w postaci wzoru Newtona przy czym obydwa wzory są sobie równoważne ponieważ, zgodnie z twierdzeniem 1, istnieje tylko jeden wielomian interpolacyjny dla węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Wzór Newtona dla węzłów dowolnych ma postać

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \omega_i(x) \qquad (5)$$

gdzie $\omega_i(x)$ jest **wielomianem czynnikowym** stopnia i-tego określonym następująco

$$\begin{cases} \omega_0(x) = 1 \\ \omega_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1}) = \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j) \quad i = 1,2,\ldots,n. \end{cases} \qquad (6)$$

Zauważmy, że jeśli wielomiany $L_n(x)$ i $L_{n-1}(x)$ są zbudowane na węzłach odpowiednio $x_0, x_1, \ldots, x_n$ i $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ spełniają ważną zależność rekurencyjną

$$L_n(x) = L_{n-1}(x) + a_n \omega_n(x).$$

Porównując wzory (2) i (5), otrzymamy

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f_i}{\prod_{j=0\ j \neq i}^{n} (x_i - x_j)}. \qquad (7)$$

Wyrażenie (7) nazywane jest **ilorazem różnicowym rzędu *n*** opartym na węzłach $x_0, x_1, \ldots, x_n$, często oznaczanym symbolicznie $f[x_0, x_1, \ldots, x_n]$. Iloraz różnicowy rzędu zerowego oparty na węźle x_i definiuje się jako wartość funkcji interpolowanej w tym punkcie, czyli

$$f[x_i] = f(x_i) = f_i. \qquad (8)$$

Dowolny iloraz różnicowy rzędu j-tego oparty na węzłach $x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_{i+j}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}, x_{i+j}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}, x_{i+j}] - f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}. \qquad (9)$$

Współczynniki a_i we wzorze Newtona [5] są równe ilorazom różnicowym rzędu i-tego opartych na węzłach $x_0, x_1, ..., x_i$ czyli

$$a_i = f[x_0, x_1, ..., x_i] \tag{10}$$

i można je wyliczyć wg następującego schematu:

$$\begin{array}{llllll}
x_0 & f[x_0] & & & & \\
x_1 & f[x_1] & f[x_0,x_1] & & & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_1,x_2] & f[x_0,x_1,x_2] & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-2},x_{n-1}] & f[x_{n-3},x_{n-2},x_{n-1}] & \cdots \; f[x_0,x_1,...,x_{n-1}] & \\
x_n & f[x_n] & f[x_{n-1},x_n] & f[x_{n-2},x_{n-1},x_n] & \cdots \; f[x_1,x_2,...,x_n] & f[x_0,x_1,...,x_n]
\end{array} \tag{11}$$

Ilorazy różnicowe przedstawione wyżej wyznacza się na podstawie wzorów (8) i(9).

3. Błąd interpolacji wielomianowej i optymalny dobór węzłów

Jak zaznaczono we wstępie, za pomocą wielomianu interpolacyjnego można wyznaczyć przybliżoną wartość funkcji interpolowanej w punktach nie będących węzłami. Jeśli funkcja interpolowana $f(x)$ jest klasy C^{n+1} (posiada ciągłą pochodną (n+1)-go rzędu) w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz wszystkie węzły $x_0, x_1, ..., x_n$ też należą do tego przedziału to błąd bezwzględny interpolacji wielomianem Lagrange'a można oszacować wzorem

$$R_n(x) = \left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| \omega_{n+1}(x) \right| \tag{12}$$

gdzie $M_{n+1} = \max\limits_{x \in \langle a,b \rangle} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$ a $\omega_{n+1}(x)$ jest wielomianem czynnikowym określonym wzorem (6).

Zauważmy, że błąd interpolacji zależy nie tylko od (n+1)-szej pochodnej funkcji interpolowanej ale również od wielomianu czynnikowego $\omega_{n+1}(x)$, który z kolei zależy od doboru węzłów interpolacji $x_0, x_1, ..., x_n$. Problem optymalnego doboru węzłów interpolacyjnych rozwiązał Czebyszew. Wykazał, że wartości węzłów w przedziale $\langle a,b \rangle$, optymalnie dobranych są określone wzorem

$$x_i = \frac{1}{2}(a+b) - \frac{1}{2}(b-a)\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \quad i = 0,1,...n. \tag{13}$$

Wtedy najmniejsze oszacowanie błędu interpolacji wynosi

$$R_n(x) = \left| f(x) - L_n(x) \right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \tag{14}$$

Optymalnie dobrane węzły wcale nie są równo odległe lecz zagęszczają się przy końcach przedziału.

4. Funkcje sklejane

W dotychchczasowych rozważaniach funkcja była interpolowana jednym wielomianem. Oczywiście, jeśli wzrasta liczba węzłów wzrasta również stopień wielomianu interpolacyjnego i może się okazać, że nie będzie on zbieżny do funkcji interpolowanej. Można inaczej sformułować problem.

Niech dane będą węzły uporządkowane następująco $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. W każdym z podprzedziałów $\langle x_i, x_{i+1})$ $i = 0,1,2,\ldots,n-1$ będziemy funkcję interpolowaną przybliżać wielomianem stosunkowo niskiego stopnia. Na ogół w każdym podprzedziale wielomian będzie różny ale cała funkcja interpolująca powinna być ciągła wraz z odpowiednimi pochodnymi na odcinku $\langle a, b\rangle$.

Definicja 1. Funkcja $S_m(x)$ jest **funkcją sklejaną** stopnia *m*, jeśli wraz z węzłami $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ spełnia dwa warunki:

- w każdym podprzedziale $\langle x_i, x_{i+1})$, $i = -1,0,1,\ldots,n$, gdzie $x_{-1} \overset{df}{=} -\infty$, $x_{n+1} \overset{df}{=} +\infty$ $S_m(x)$, jest wielomianem stopnia co najwyżej *m*,
- jest klasy C^{m-1} na całej osi rzeczywistej.

W najprostszym przypadku *m*=1 funkcja sklejana jest po prostu linią łamaną.

Definicja 2. Funkcja $S_{2m-1}(x)$ jest **naturalną funkcją sklejaną,** jeśli w przedziałach $(-\infty, x_0)$ i $(x_n, +\infty)$ jest wielomianem stopnia *m*−1 (a nie 2*m*−1).

Definicja 3. Funkcja $S_m(x)$ jest interpolacyjną funkcją sklejaną jeśli w węzłach interpolacji jej wartości i wartości funkcji interpolowanej są sobie równe.

4.1. Algorytm wyznaczania naturalnej, interpolacyjnej funkcji sklejanej stopnia 3

Niech w każdym podprzedziale $\langle x_i, x_{i+1})$ funkcja sklejana ma postać:

$$S_3(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad i = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{15}$$

gdzie współczynniki a_i, b_i, c_i, d_i wyznacza się następująco:

A. Należy rozwiązać układ równań liniowych o postaci

$$\begin{bmatrix} 2 & w_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 2 & w_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_3 & 2 & w_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n-2} & 2 & w_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & u_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ c_3^* \\ \vdots \\ c_{n-2}^* \\ c_{n-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{n-2} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} \tag{16}$$

gdzie:

$$\begin{cases} u_{i+1} = \dfrac{h_i}{h_i + h_{i+1}}, \quad w_{i+1} = \dfrac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \\ v_{i+1} = \left(\dfrac{f_{i+2} - f_{i+1}}{h_{i+1}} - \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} \right) : (h_i + h_{i+1}) \end{cases} \qquad i = 0,1,2,\dots,n-2$$

$$h_i = x_{i+1} - x_i, \qquad i = 0,1,2,\dots,n-1$$

$$f_i = f(x_i), \qquad i = 0,1,2,\dots,n$$

z którego wyznacza się współczynniki c_i^*, $i = 1,2,\dots,n-1$.

B. Współczynniki c_i są określone następująco

$$c_0 = c_n = 0, \quad c_i = 3c_i^*, \quad i = 1,2,\dots,n-1 \tag{17}$$

a współczynniki: a_i, b_i, d_i oblicza się wg wzorów:

$$\begin{cases} a_i = f_i \\ b_i = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \dfrac{h_i}{3}(c_{i+1} + 2c_i), \\ d_i = \dfrac{c_{i+1} - c_i}{3h_i} \end{cases} \qquad i = 0,1,2,\dots,n-1. \tag{18}$$

5. Interpolacja trygonometryczna

Interpolacja trygonometryczna to przybliżanie funkcji okresowych wielomianem trygonometrycznym. Zakładać będziemy, że funkcja interpolowana jest funkcją okresową o okresie 2π, ($x \in \langle 0, 2\pi \rangle$). Jeśli funkcja interpolowana $g(y)$ ma okres o długości $(b-a)$, $y \in \langle a, b \rangle$, to dokonując skalowania $y = a + (b-a) \cdot x/(2\pi)$ otrzymamy funkcję o okresie 2π

$$f(x) = g(a + (b-a) \cdot x/(2\pi)). \tag{19}$$

5.1. Sformułowanie problemu

Załóżmy, że funkcja interpolowana $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie 2π, oraz jest funkcją zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych. Dane są węzły $x_0, x_1, \dots, x_n$ parami różne ($x_k \neq x_j \Leftrightarrow k \neq j$) oraz $x_k \in \langle 0, 2\pi)$ $k = 0,1,2,\dots,n$. Dane są wartości funkcji interpolowanej w węzłach $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n)$. Zadaniem interpolacji trygonometrycznej jest znalezienie wielomianu trygonometrycznego $t_n(x)$ o postaci

$$t_n(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j \exp(ijx), \text{ gdzie } i = \sqrt{-1} \text{ a } \exp(a) = e^a \tag{20}$$

który w (n+1) różnych węzłach przyjmuje te same wartości co funkcja interpolowana $f(x)$

$$t_n(x_k) = f(x_k)\,,\quad k = 0,1,2,...,n\,. \tag{21}$$

Twierdzenie 2. Zadanie interpolacji ma jednoznaczne rozwiązanie.

Aby znaleźć współczynniki c_j należy rozwiązać n+1 równań liniowych o n+1 niewiadomych o postaci

$$\sum_{j=0}^{n} c_j \exp(ijx_k) = f(x_k)\,,\quad k = 0,1,2,...,n\,.$$

Macierz współczynników tego układu równań jest nieosobliwa ,a jej wyznacznik jest tzw. wyznacznikiem Vandermonde'a.

Współczynniki c_j można znaleźć nie rozwiązując układu równań, jeśli węzły będą równoodległe.

Twierdzenie 3. Jeśli węzły są równoodległe

$$x_k = \frac{2\pi k}{n+1},\quad k = 0,1,2,...,n \tag{22}$$

to współczynniki wielomianu trygonometrycznego c_j są określone wzorem

$$c_j = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot\exp(-ijx_k)\,,\quad j = 0,1,2,...,n\,. \tag{23}$$

Twierdzenie 4. Wielomian trygonometryczny interpolujący funkcję $f(x)$ zbudowany na węzłach równoodległych [22] może być przedstawiony w postaci równoważnej wzorom (20) i (23) jako

$$t_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{m}\{a_j\cos(jx) + b_j\sin(jx)\} + \frac{\delta}{2}a_{m+1}\cos((m+1)x) \qquad [24]$$

gdzie: $\delta = 0,\ m = \frac{1}{2}n$, gdy n parzyste lub $\delta = 1,\ m = \frac{1}{2}(n-1)$, gdy n nieparzyste, a współczynniki wielomianu trygonometrycznego a_j, b_j wyznacza się

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot\cos(jx_k) \\ b_j = \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f(x_k)\cdot\sin(jx_k). \end{cases} \tag{25}$$

Postać wielomianu trygonometrycznego określona wzorami [24] i [25] jest szczególnie przydatna przy interpolacji funkcji o wartościach rzeczywistych. Zauważmy, że współczynniki a_j, b_j mają wtedy wartości rzeczywiste.

Aby obliczyć współczynniki a_j, b_j należy wykonać 4n+3 mnożeń i 2n sumowań oraz obliczyć aż 2n wartości funkcji trygonometrycznych. Stosując algorytm Goertzela można zmniejszyć liczbę mnożeń.

5.2. Algorytm Goertzela

Niech

$$\beta_j = j\,\frac{2\pi}{n+1} = x_j \tag{26}$$

Współczynniki a_j, b_j oblicza się wg wzorów

$$\begin{cases} a_j = \dfrac{2}{n+1}\left(f(x_0) + u_1\cos(\beta_j) - u_2\right) \\ b_j = \dfrac{2}{n+1}\,u_1\sin(\beta_j) \end{cases} \tag{27}$$

a dwa pierwsze wyrazy ciągu u_1, u_2 oblicza się ze wzoru na ciąg u_n

$$u_k = f(x_k) + 2u_{k+1}\cos(\beta_j) - u_{k+2} \quad u_{n+2} = u_{n+1} = 0 \quad k = n,(n-1),\ldots,1\,. \tag{28}$$

Algorytm Goertzela jest „tańszy”. Obliczenie wartości współczynników a_j, b_j wymaga bowiem tylko n+6 mnożeń i 2n+1 dodawań nie mówiąc o obliczeniach wartości funkcji trygonometrycznych (tylko 2 razy!). Niestety algorytm ten może dawać bardzo niedokładne wyniki dla małych β_j. Modyfikacja algorytmu Goertzela zaproponowana przez Reinscha pozwala uniknąć tego niebezpieczeństwa.

5.3. Algorytm Reinscha

Niech

$$\beta_j = j\,\frac{2\pi}{n+1} = x_j\,.$$

Rozpatrujemy dwa przypadki

A. $\cos(\beta_j) \ge 0$

$$w = -4\sin^2\left(\frac{\beta_j}{2}\right)$$

$$\begin{cases} u_{k+1} = v_{k+1} + u_{k+2} \\ v_k = wu_{k+1} + v_{k+1} + f(x_k) \end{cases} \qquad k = n,(n-1),\ldots,1,0 \tag{29}$$

przy czym $u_{n+2} = v_{n+1} = 0$.

B. $\cos(\beta_j) < 0$

$$w = 4\cos^2\left(\frac{\beta_j}{2}\right)$$

$$\begin{cases} u_{k+1} = v_{k+1} - u_{k+2} \\ v_k = wu_{k+1} - v_{k+1} + f(x_k) \end{cases} \qquad k = n,(n-1),\ldots,1,0 \tag{30}$$

przy czym $u_{n+2} = v_{n+1} = 0$.

i ostatecznie współczynniki a_j, b_j obliczamy

$$\begin{cases} a_j = \frac{2}{n+1}(v_0 - w\frac{u_1}{2}) \\ b_j = \frac{2}{n+1} u_1 \sin(\beta_j). \end{cases} \tag{31}$$

6. Program ćwiczenia

1. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu Lagrange'a dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych lub dobranych optymalnie (13) i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej.
2. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu Newtona dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych lub dobranych optymalnie (13) i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej.
3. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu wg schematu Aitkena dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych lub dobranych optymalnie (13) i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej.
4. Napisać program, który oblicza wartości funkcji sklejanej stopnia 3 dla dowolnych punktów x, węzłów równoodległych lub nierównoodległych i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej. Program powinien również obliczyć wartości współczynników a_i, b_i, c_i, d_i.
5. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu trygonometrycznego dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej, okresowej (ewentualnie dokonać skalowania). Do obliczenia wartości współczynników a_j, b_j wielomianu wykorzystać wzory (25).
6. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu trygonometrycznego dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej, okresowej (ewentualnie dokonać skalowania). Do obliczenia wartości współczynników a_j, b_j wielomianu wykorzystać algorytm Goertzela.
7. Napisać program, który oblicza wartości wielomianu trygonometrycznego dla dowolnych punktów *x*, węzłów równoodległych i zadanej przez prowadzącego funkcji interpolowanej, okresowej (ewentualnie dokonać skalowania). Do obliczenia wartości współczynników a_j, b_j wielomianu wykorzystać algorytm Reinscha.
8. Napisać sprawozdanie zawierające:
   a) tekst programu i wyniki przeprowadzonych obliczeń,
   b) opis przeprowadzonych badań,
   c) analizę uzyskanych wyników,
   d) wnioski.

7. Pytania kontrolne

1. Co to jest interpolacja i po co się ją stosuje?
2. Sformułuj problem interpolacji wielomianowej.
3. Podaj wzór Lagrange'a. Dla podanych przez prowadzącego węzłów i wartości funkcji interpolowanej w tych węzłach znajdź wielomian interpolacyjny (zastosuj wzór Lagrange'a).
4. Podaj wzór Newtona. Dla podanych przez prowadzącego węzłów i wartości funkcji interpolowanej w tych węzłach znajdź wielomian interpolacyjny (zastosuj wzór Newtona).
5. Podaj definicję ilorazu różnicowego stopnia *n*-tego. Jaką zależność rekurencyjną spełnia iloraz różnicowy?
6. Podaj wzór na błąd interpolacji wielomianowej. Jak wygląda optymalny dobór węzłów interpolacji?
7. Scharakteryzuj algorytm Aitkena, po co się go stosuje?
8. Podaj definicję funkcji sklejanej $S_m(x)$. Co to jest naturalna funkcja sklejana? Co to jest interpolacyjna funkcja sklejana?
9. Sformułuj problem interpolacji trygonometrycznej.
10. Przedstaw rozwiązanie problemu iterpolacji trygonometrycznej dla węzłów nierówno-odległych i równoodległych.

8. Rozwiązanie układu równań z macierzą trójdiagonalną

W przypadku zastosowania do interpolacji funkcji sklejanych należy rozwiązać układ równań o postaci [16]. Można do tego celu wykorzystać jedną z metod dokładnych prezentowanych w ćwiczeniu Układy Równań Liniowych albo zastosować prosty algorytm przedstawiony niżej.

Dany jest układ równań liniowych z macierzą trójdiagonalną o postaci:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & b_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \tag{32}$$

Przewidujemy rozwiązanie o postaci:

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i . \tag{33}$$

Wyznaczmy wartości współczynników α_i i β_i. Z równania pierwszego układu (32) mamy:

$$x_1 = -\frac{c_1}{b_1} x_2 + \frac{d_1}{b_1} = \alpha_1 x_2 + \beta_1, \quad b_1 \neq 0, \quad \text{gdzie} \quad \alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Wstawiając to równanie do drugiego z układu (32) otrzymamy po przekształceniach:

$$x_2 = -\frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1} x_3 + \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1} = \alpha_2 x_3 + \beta_2, \quad b_2 + a_2\alpha_1 \neq 0$$

gdzie: $\alpha_2 = -\dfrac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1}, \quad \beta_2 = \dfrac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1}.$

Wstawiając to równanie do trzeciego z układu [32] otrzymamy po przekształceniach:

$$x_3 = -\frac{c_3}{b_3 + a_3\alpha_2} x_4 + \frac{d_3 - a_3\beta_2}{b_3 + a_3\alpha_2} = \alpha_3 x_4 + \beta_3, \quad b_3 + a_3\alpha_2 \neq 0$$

gdzie: $\alpha_3 = -\dfrac{c_3}{b_3 + a_3\alpha_2}, \quad \beta_3 = \dfrac{d_3 - a_3\beta_2}{b_3 + a_3\alpha_2}.$

Ostatecznie współczynniki α_i i β_i są określone:

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}}, \quad i = 2,3,\ldots,n-1.$$

Wstawiając $x_{n-1} = \alpha_{n-1}x_n + \beta_{n-1}$ do ostatniego równania z układu [32] otrzymamy:

$$x_n = \frac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{b_n + a_n\alpha_{n-1}} = \beta_n, \quad b_n + a_n\alpha_{n-1} \neq 0.$$

Reasumując, algorytm rozwiązania układu równań z macierzą trójdiagonalną jest:

- Wyznacz wektory α_i i β_i $\quad i = 1,2,\ldots,n$ wg wzorów:

$$\alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1} \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$\alpha_i = -\frac{c_i}{b_i + a_i\alpha_{i-1}} \quad \beta_i = \frac{d_i - a_i\beta_{i-1}}{b_i + a_i\alpha_{i-1}} \quad i = 2,3,\ldots,n.$$

- Znajdź składowe wektora rozwiązań $x_1, x_2, \ldots, x_n$ następująco:

$$x_n = \beta_n$$
$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i \quad i = n-1, n-2,\ldots,2,1.$$