O USO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAS NA MODELAGEM DE CIRCUITOS RLC

Antônio Andson da Silva[1]**, João Mateus Dias do Carmo**[1]

[1]Engenharia de Computação – Universidade Federal do Ceará (UFC)
Endereço: Av. José de Freitas Queiroz, 5003 – Cedro – Quixadá – Ceará - Brasil 63902-580

andsonsilva@alu.ufc.br, joaomateus102030@gmail.com

1. Introdução

Um circuito elétrico é a ligação de elementos elétricos, tais como resistores, indutores, capacitores, diodos, fontes de tensão, fontes de corrente, linhas de transmissão, e interruptores, de modo que formem pelo menos um caminho fechado para a corrente elétrica. Existem vários tipos de circuitos elétricos, mas no decorrer desta atividade, vamos realçar os circuitos RLC ou circuitos Ressonante. Um circuito RLC é um circuito elétrico consistindo de um resistor (R), um indutor (L), e um capacitor (C), conectados em série ou em paralelo. Este circuito também é chamado de circuito de segunda ordem visto que qualquer tensão ou corrente nele pode ser descrita por uma equação diferencial de segunda ordem.

Tensão elétrica também conhecida como diferença de potencial (DDP), é a diferença em energia potencial elétrica por unidade de carga elétrica entre dois pontos. A corrente elétrica designa o movimento ordenado de cargas elétricas dentro de um sistema condutor. Na Figura 1 é ilustrado o circuito RLC série. A associação em série é uma das formas básicas de se conectarem componentes elétricos ou eletrônicos. A nomeação descreve o método como os componentes são conectados. No circuito série, a mesma corrente tem que passar através de todos os componentes em série.

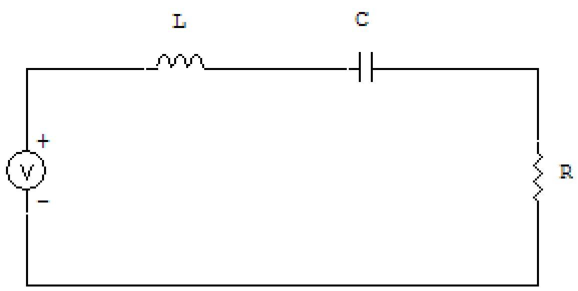

Figura 1. Circuito RLC SÉRIE

2. Equação Diferencial

Nessa sessão, vamos abordar algumas definições em relação a tensão, visto que a partir delas vamos encontrar uma equação diferencial. Não vai ser abordado o porquê dessas definições, já que não é o intuito nessa atividade.

A tensão entre os terminais de um indutor é proporcional à taxa de variação da corrente que o atravessa. Matematicamente, temos: $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$, onde $u(t)$ é a tensão instantânea, L é a indutância, $i(t)$ é a corrente instantânea e t é o tempo.

A diferença de potencial entre os terminais de um circuito é igual ao produto da resistência desse circuito pela intensidade da corrente elétrica que passa por tal circuito. Matematicamente, temos: $V = R * I$. A tensão em cima de um condutor é dada por $\frac{1}{C} * q$, onde q é a carga. Em um circuito em série a soma das quedas de tensão é igual a sua fonte de tensão. Uma fonte de tensão ou gerador de tensão é qualquer dispositivo ou sistema que gere uma força eletromotiva entre seus terminais. Considerando um circuito em série, temos,

$$L\frac{di(t)}{dt} + R * I + \frac{1}{C} * q(t) = E(t) \text{ (1)}$$

Até o momento foi citadas algumas definições em relação a tensão. Vamos discutir outra definição. A intensidade da corrente é a variação de carga em relação ao tempo, logo, $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$. Derivando a intensidade da corrente, temos, $\frac{di(t)}{dt} = \frac{d^2q(t)}{dt^2}$. Achamos uma relação da intensidade da corrente e da sua derivada com a fórmula (1), substituindo essas relações em (1), obtemos,

$$L\frac{d^2q(t)}{dtdt} + R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} * q(t) = E(t) \text{ (2)}$$

A equações (2) podemos escrevê-la como,

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t) \text{ (3)}$$

Pela equação (3), fica explícito que essa equação é uma equação diferencial, por consequência, podemos encontrar o valor da carga e da corrente em um determinado tempo.

3. Modelando problema e utilizando Transformada de Laplace

Vamos utilizar a equação (3) para resolver o seguinte problema: dado um circuito em série com L = 2 H (Henry), C = 0,02 F (Farad), R = 16 Ω (Ohm) e E = 300 V (Volt), encontre o valor da carga e da corrente em um tempo qualquer. Substituindo os valores L, C, R e E na equação (3), temos,

$$2q''(t) + 16q'(t) + \frac{1}{0{,}02}q(t) = 300$$

$$2q''(t) + 16q'(t) + 50q(t) = 300$$

$$q''(t) + 8q'(t) + 25q(t) = 150 \text{ (4)}$$

Transformada de Laplace

A transformada de Laplace, especificamente na análise funcional, é um método operacional de resolução de problemas de valor inicial que permite levar a resolução de equações diferenciais à resolução de equações polinomiais, que são muito mais simples de resolver. A transformada de Laplace de uma função $f(t)$, cuja integral existe, definida para todo número real $t \geq 0$ é a função $F(s)$.

Suas propriedades permitem transformar sistemas dinâmicos, representados por equações diferenciais ordinárias, em equações algébricas de fácil solução e manipulação. O projeto de controladores realizados no domínio “s” permite que as diversas relações dinâmicas presentes num processo sejam fragmentação em funções de transferência e

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt$$

Figura 2. Laplace de uma função

tratadas como subpartes do problema. Os resultados, porém, para terem interpretação física e poderem ser implementados, precisam ser convertidos de volta ao domínio do tempo (transformação inversa de Laplace). A ilustração abaixo mostrar as relações entre os domínios.

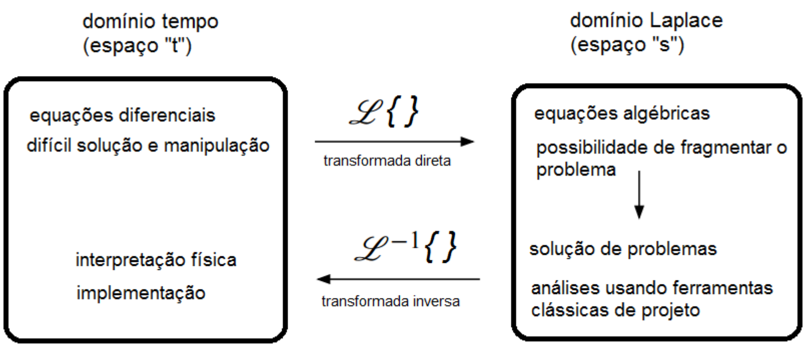

Figura 3. Domínios

Lembrando que os passos a seguir, o leitor deve ter conhecimento sobre a transformada de Laplace. Fazendo a transformação na equação (4), temos,

$$s^2Q(s) - sq(0) - q'(0) + 8[sQ(s) - q(0)] + 25Q(s) = \frac{150}{s}$$

Abstraindo o circuito da Figura 1, visto que o mesmo é meramente ilustrativo, podemos induzir que no instante $t = 0$, o $q(0) = 0$, consequentemente, $q'(0) = 0$. t é tempo. Assim,

$$s^2Q(s) + 8[sQ(s)] + 25Q(s) = \frac{150}{s}$$
$$(s^2 + 8s + 25)Q(s) = \frac{150}{s}$$
$$Q(s) = \frac{150}{s(s^2+8s+25)}$$

Resolvendo por frações parciais e fazendo algumas manipulações algébricas, temos,

$$Q(s) = 6\frac{1}{s} - 6[\frac{s+4}{(s+4)^2+3^2}] - 8[\frac{3}{(s+4)^2+3^2}] \quad (5)$$

Deixamos a equação (5) em função de algumas transformadas conhecidas e agora utilizando a transformada inversa e voltando para o domínio do tempo, temos,

$$q(t) = 6 - 6e^{-4t}cos(3t) - 8e^{-4t}sen(3t)$$

Achamos a função carga, agora para conseguir a função intensidade de corrente, é simplesmente derivar a função carga.

4. Considerações Finais

Como vimos, as equações diferencias podem ser aplicadas, falamos apenas de uma área, mas elas se aplicam em vários contextos.

Referências

Nilsson, J. W. (2008). *Electric circuits*. Pearson Education India.

Zill, D. G. (2003). Equações diferenciais com aplicação em modelagem. *Sao Paulo: Pioneira Thompson Learning*.