1 Dualidade

Todo problema de programação linear tem associado a ele outro problema de programação linear chamado de **dual**. Dá-se o nome de **primal** ao problema original.

As soluções do primal e dual guardam uma estreita relação no sentido de que a solução ótima de qualquer um dos problemas dá diretamente a solução ótima do outro. Em um problema de PL no qual o número de variáveis é consideravelmente menor do que o número de restrições, pode-se conseguir economias de cálculo resolvendo o problema dual.

Qual é o valor ótima do seguinte PL:

$$\begin{array}{lll} \max & z = x_1 + 6x_2 & \\ & x_1 & \leq 200(1) \\ & x_2 & \leq 300(2) \\ & x_1 + x2 & \leq 400(3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Como podemos mostrar que a solução ótima é $(x_1, x_2) = (100, 300)$ com $z = 1900$?

Podemos obter um limite superior para o valor ótimo do PL, multiplicando a equação (2) por 6 e somando com a equação (1):

$$x_1 + 6x_2 \leq 2000 \tag{1}$$

Um outro limite superior pode ser obtido multiplicando a equação (2) por 5 e somando com a equação (3):

$$x_1 + 6x_2 \leq 1900 \tag{2}$$

Dessa maneira, podemos concluir que $(x_1, x_2) = (100, 300)$ é uma solução ótima para PL.

$$\begin{array}{lll} \max & z = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 2(1) \\ & x_2 + x_4 & \leq 1(2) \\ & x_1 + 2x_3 & \leq 1\ (3) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Mostre que a solução ótima é $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ com $z = 2.5$?

Um limite superior para o valor ótimo do PL, multiplicando a equação (1) por $\frac{1}{2}$ e somando com a equação (2) e somando com a equação (3) multiplicada por $\frac{1}{2}$:

$$x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \leq 2.5 \tag{3}$$

Observe que

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 + x_4 \leq 2.5 \tag{4}$$

Essa idéia pode ser generalizada da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n & \\
 & a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & \leq b_1 \ (1) \\
 & \vdots & \\
 & a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & \leq b_m \ (1) \\
 & x_1 \geq 0 & \\
 & \vdots & \\
 & x_n \geq 0 &
\end{array}
$$

A partir de cada multiplicador não-negativo $y_1, y_2, \ldots, y_m$, podemos obter a seguinte desigualdade

$$y_1(a_{1,1}x_1+\ldots+a_{1,n}x_n)+\ldots+y_m(a_{m,1}x_1+\ldots+a_{m,n}x_n) \leq y_1b_1+\ldots+y_mb_m \quad (5)$$

Reescrevendo a equação acima, obtemos:

$$x_1(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,m}y_m)+\ldots+x_n(a_{1,n}y_1+\ldots+a_{m,n}x_ny_m) \leq y_1b_1+\ldots+y_mb_m \quad (6)$$

Queremos que o valor encontrado seja um limite superior para o problema original. Logo,

$$
\begin{array}{l}
a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,m}y_m \geq c_1 \\
\vdots \\
a_{1,n}y_1 + \ldots + a_{m,n}x_ny_m \geq c_n
\end{array}
$$

Satisfazendo as condições acima, temos:

$$c_1x_1+\ldots+c_nx_n \leq x_1(a_{1,1}y_1+\ldots+a_{1,m}y_m)+\ldots+x_n(a_{1,n}y_1+\ldots+a_{m,n}x_ny_m) \quad (7)$$

Logo,

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \leq y_1b_1 + \ldots + y_mb_m \quad (8)$$

Claramente, queremos encontrar o menor limite superior superior:

$$
\begin{array}{lll}
\min & y_1b_1 + \ldots + y_mb_m & \\
 & a_{1,1}y_1 + \ldots + a_{1,m}y_m & \geq c_1 \\
 & \vdots & \\
 & a_{1,n}y_1 + \ldots + a_{m,n}x_ny_m & \geq c_n \\
 & y_1 \geq 0 & \\
 & \vdots & \\
 & y_m \geq 0 &
\end{array}
$$

Relação entre o par primal e dual

Problema Primal	Problema Dual
Uma restrição	Uma variável
Uma variável	Uma restrição
A	A^T
Coeficiente da função objetivo	Termo independente
Termo independente	Coeficiente da função objetivo
Problema de maximização com restrições de desigualdade do tipo $\leq$	Problema de minimização com restrições de desigualdade do tipo $\geq$

Problema Primal	Problema Dual
Maximização	Minimização
Variável	Restrição
≥ 0	$\geq$
≤ 0	$\leq$
livre	$=$
Restrição	Variável
$\leq$	≥ 0
$\geq$	≤ 0
$=$	livre

Exemplo 1:
Primal:

$$\begin{array}{lll} \max & 2x_1 + 1x_2 & \\ & x_1 + x_2 & \leq 5 \ (y_1) \\ & x_1 + 2x_2 & \leq 8 \ (y_2) \\ & x_1 & \leq 4 \ (y_3) \\ & x_1, x_2 \geq 0 & \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{lll} \min & 5y_1 + 8y_2 + 4y_3 & \\ & y_1 + y_2 + y_3 & \geq 2 \\ & y_1 + 2y_2 & \geq 1 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 & \end{array}$$

Método Geral:

Example 1 *Encontre o dual do seguinte PL:*

$$\begin{array}{lll} max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 10 \ (y_1) \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 8 \ (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Transforme o primal para a forma de equação:

$$\begin{array}{lll} max & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 0x_4 & \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 1x_4 & = 10 \ (y_1) \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 & = 8 \ (y_2) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 & \end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{lll} min & 10y_1 + 8y_2 & \\ & y_1 + 2y_2 & \geq 5 \\ & 2y_1 - y_2 & \geq 12 \\ & y_1 + 3y_2 & \geq 4 \\ & y_1 & \geq 0 \\ & y_1, y_2 \ irrestrita & \rightarrow \ y_2 \ irrestrita \end{array}$$

Example 2 *Encontre o dual do seguinte PL:*

$$
\begin{array}{lll}
min & x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5 & \\
 & -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 2x_4 - 5x_5 & = -20 \ (y_1) \\
 & x_1 - x_2 + 5x_3 + 0x_4 + x_5 & \geq 8 \ (y_2) \\
 & 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 & \leq 100 \ (y_3) \\
 & x_1, x_2 \geq 0 & \\
 & x_3 \ livre & \\
 & x_4 \geq 0 & \\
 & x_5 \leq 0 &
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lll}
max & -20y_1 + 8y_2 + 100y_3 & \\
 & -5y_1 + y_2 + 2y_3 & \leq 1 \\
 & 4y_1 - y_2 + 0y_3 & \leq 6 \\
 & -13y_1 + 5y_2 - y_3 & = -7 \\
 & 2y_1 + 0y_2 + 1y_3 & \leq 1 \\
 & -5y_1 + 1y_2 + 0y_3 & \geq -5 \\
 & y_1 \ livre & \\
 & y_2 \geq 0 & \\
 & y_3 \leq 0 &
\end{array}
$$

Example 3 *Encontre o dual do seguinte PL:*

$$
\begin{array}{lll}
max & 5x_1 + 6x_2 & \\
 & x_1 + 2x_2 & = 5 \ (y_1) \\
 & -x_1 + 5x_2 & \geq 3 \ (y_2) \\
 & 4x_1 + 7x_2 & \leq 8 \ (y_3) \\
 & x_1 \ livre & \\
 & x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lll}
min & 5y_1 + 3y_2 + 8y_3 & \\
 & y_1 - y_2 + 4y_3 & = 5 \\
 & 2y_1 + 5y_2 + 7y_3 & \geq 6 \\
 & y_1 \ livre & \\
 & y_2 \leq 0 & \\
 & y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Example 4 *Encontre o dual do seguinte PL:*

$$
\begin{array}{lll}
max & 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 & \\
 & x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq 100 \ (y_1) \\
 & 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 & \leq 360 \ (y_2) \\
 & 8x_1 + 4x_2 + 4x_3 & \leq 400 \ (y_3) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{lll}
min & 100y_1 + 360y_2 + 400y_3 & \\
 & y_1 + 6y_2 + 8y_3 & \geq 4 \\
 & 2y_1 + 6y_2 + 4y_3 & \geq 5 \\
 & 2y_1 + 4y_2 + 4y_3 & \geq 3 \\
 & y_1 \geq 0 & \\
 & y_2 \geq 0 & \\
 & y_3 \geq 0 &
\end{array}
$$

Example 5 *Encontre o dual do seguinte PL:*

$$\begin{array}{lll}
min & x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 - 5x_5 & \\
& -5x_1 + 4x_2 - 13x_3 + 2x_4 - 5x_5 & = -20\ (y_1) \\
& x_1 - x_2 + 5x_3 + 0x_4 + x_5 & \geq 8\ (y_2) \\
& 2x_1 + 0x_2 - 1x_3 + 1x_4 + 0x_5 & \leq 100\ (y_3) \\
& x_1, x_2 \geq 0 & \\
& x_3\ livre & \\
& x_4 \geq 0 & \\
& x_5 \leq 0 &
\end{array}$$

Transformando o primal:

$$\begin{array}{lll}
max & -x_1 - 6x_2 + 7x_3 - x_4 + 5x_5 & \\
& 5x_1 - 4x_2 + 13x_3 - 2x_4 + 5x_5 & = 20\ (y_1) \\
& -x_1 + x_2 - 5x_3 - 0x_4 - x_5 & \leq -8\ (y_2) \\
& -2x_1 - 0x_2 + 1x_3 - 1x_4 - 0x_5 & \geq -100\ (y_3) \\
& x_1, x_2 \geq 0 & \\
& x_3\ livre & \\
& x_4 \geq 0 & \\
& x_5 \leq 0 &
\end{array}$$

Dual:

$$\begin{array}{lll}
min & 20y_1 - 8y_2 - 100y_3 & \\
& 5y_1 - y_2 - 2y_3 & \geq -1 \\
& -4y_1 + y_2 - 0y_3 & \geq -6 \\
& 13y_1 - 5y_2 + y_3 & = 7 \\
& -2y_1 - 0y_2 - y_3 & \geq -1 \\
& 5y_1 - 1y_2 - 0y_3 & \leq 5 \\
& y_1\ livre & \\
& y_2 \geq 0 & \\
& y_3 \leq 0 &
\end{array}$$

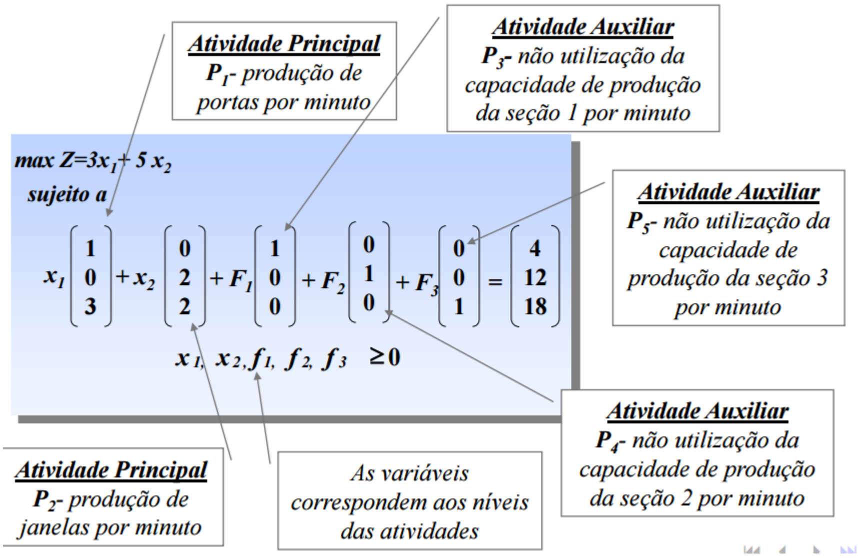
Transformando o dual:

$$\begin{array}{lll}
max & -20y_1 + 8y_2 + 100y_3 & \\
& -5y_1 + y_2 + 2y_3 & \leq 1 \\
& 4y_1 - y_2 + 0y_3 & \leq 6 \\
& -13y_1 + 5y_2 - y_3 & = -7 \\
& 2y_1 + 0y_2 + y_3 & \leq 1 \\
& -5y_1 + 1y_2 + 0y_3 & \geq -5 \\
& y_1\ livre & \\
& y_2 \geq 0 & \\
& y_3 \leq 0 &
\end{array}$$

2 Interpretação econômica

Considere o seguinte PL:

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = 3x_1 + 5x_2 & \\
 & x_1 & \leq 4 \\
 & 2x_2 & \leq 12 \\
 & 3x_1 + 2x_2 & \leq 18 \\
 & x_1, x_2 \geq 0 &
\end{array}
$$



Variáveis de decisão:

- x_1 - nível de produção de portas por minuto;
- x_2 - nível de produção de janelas por minuto;

Variáveis de folga:

- F_1 - capacidade de produção não utilizada na 1° seção, por minuto;
- F_2 - capacidade de produção não utilizada na 2° seção, por minuto;
- F_3 - capacidade de produção não utilizada na 3° seção, por minuto;

Função objetivo

- Maximizar o lucro total por minuto.

$$\max Z = 3x_1 + 5x_2$$

sa

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + F_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2, F_1, F_2, F_3 \geq 0$$

Solução do Dual

	E_1	E_2	y_1	y_2	y_3	
Base	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z				3/2	1	36
f_1			1	1/3	-1/3	2
x_2		1		1/2	0	6
x_1	1			-1/3	1/3	2

o valor da f.o. traduz o valor total atribuído aos recursos

$$\min \quad W = 4\, y_1 + 12\, y_2 + 18\, y_3$$

As variáveis de decisão duais ***y_1, y_2, y_3*** *são valorizações unitárias a atribuir a cada recurso e podem ser interpretadas como a contribuição ao lucro total por cada unidade de recurso i utilizada. Estes são* ***preços internos****, também designados como* ***preços sombra***

$$y_1 + 3\,y_3 \geq 3$$

$$2\,y_2 + 2\,y_3 \geq 5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Preço sombra ou **preço dual** corresponde ao custo de oportunidade de uma atividade, que pode ser referido como sendo o seu verdadeiro preço econômico. Na pesquisa operacional, o preço sombra é a variação do valor objetivo da solução ótima de um problema de programação linear obtido através do relaxamento da restrição por uma unidade - é a utilidade marginal de relaxar a restrição.

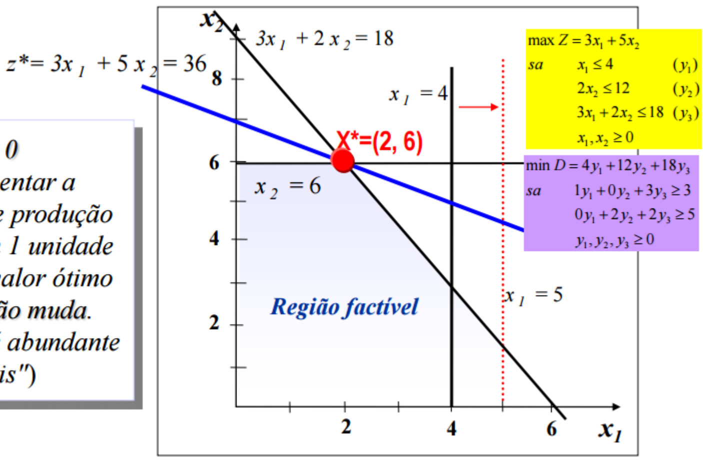
Um exemplo custo de oportunidade: imagine uma fábrica que produzia 20 cadeiras por mês num mercado que absorvia totalmente esta produção. Diante de uma oportunidade de negócios, esta fábrica resolveu iniciar uma produção de um novo produto: mesas. Porém, ao alocar recursos para tal, descobriu que terá de deixar de produzir 2 cadeiras para suprir a demanda de 2 mesas. O custo de oportunidade está no valor perdido da venda das 2 cadeiras que deixaram de ser fabricadas.

$$\begin{array}{llllll}
\min & W = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 & & & & \\
sa & y_1 & & + 3y_3 & \geq & 3 \\
 & & 2y_2 & + 2y_3 & \geq & 5 \\
 & y_1, y_2, y_3 \geq 0 & & & &
\end{array}$$

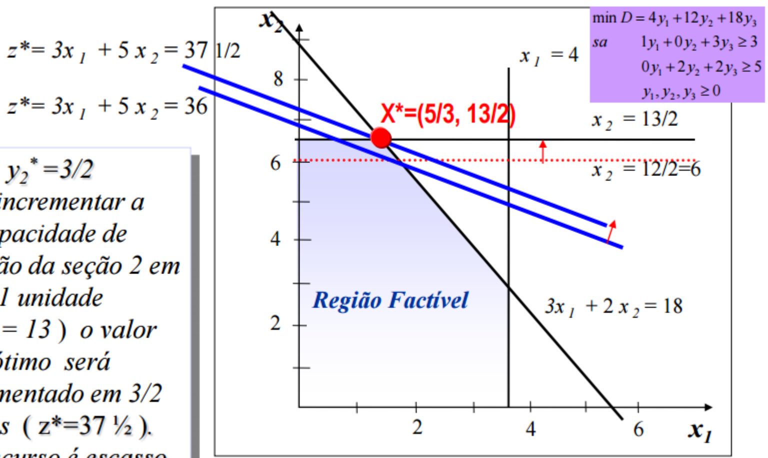
Solução do Primal

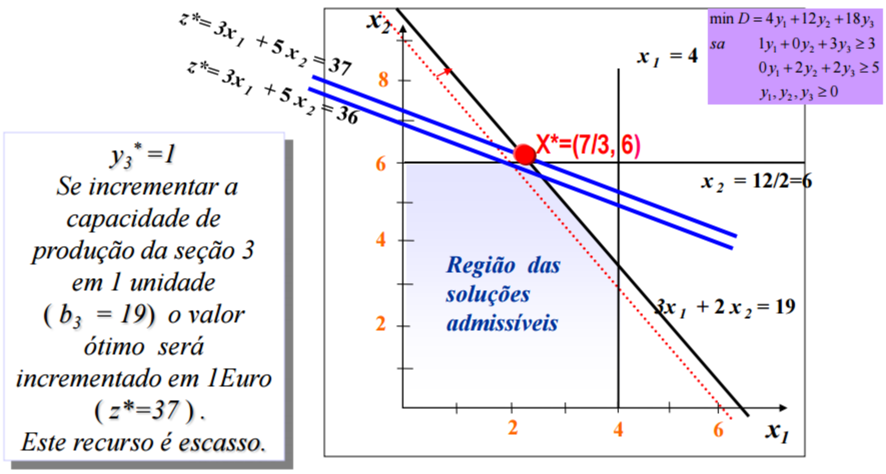
	F_1	F_2	F_3	x_1	x_2	
Base	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	b
$-W$	2			2	6	36
y_3	1/3		1	-1/3	0	1
y_2	-1/3	1		1/3	-1/2	3/2

$y_1^* = 0$
Se incrementar a capacidade de produção da seção 1 em 1 unidade (b_1 = 5) o valor ótimo (z=36) não muda. Este recurso é abundante ("gratis")*



$y_2^* = 3/2$
Se incrementar a capacidade de produção da seção 2 em 1 unidade (b_2 = 13) o valor ótimo será incrementado em 3/2 Euros (z=37 ½). Este recurso é escasso.*





	E_1	E_2	y_1	y_2	y_3	
Base	x_1	x_2	F_1	F_2	F_3	b
Z				3/2	1	36
f_1			1	1/3	-1/3	2
x_2		1		1/2	0	6
x_1	1			-1/3	1/3	2

	F_1	F_2	F_3	x_1	x_2	
Base	y_1	y_2	y_3	E_1	E_2	b
$-W$	2			2	6	36
y_3	1/3		1	-1/3	0	1
y_2	-1/3	1		1/3	-1/2	3/2

$Z^*= 36$	$W^*= 36$
$x_1^*= 2$	$y_1^*= 0$
$x_2^*= 6$	$y_2^*= 3/2$
$F_1^*= 2$	$y_3^*= 1$
$F_2^*= 0$	$E_1^*= 0$
$F_3^*= 0$	$E_2^*= 0$

3 Propriedades Fundamentais da Dualidade

Propriedades Fundamentais da Dualidade

Os resultados listados aqui estão considerando o problema primal de maximização.

Resultado 1(Teorema Fraco da Dualidade): O valor da função objetiva, z, de qualquer solução viável do problema primal não é maior que o valor da função objetiva, w, de qualquer solução viável do dual: $z \leq w$.

Resultado 2(Teorema Forte da Dualidade): Se x^* e y^* são soluções viáveis para o primal e dual, respectivamente, tais que $z^* = w^*$, então x^* e y^* são as soluções ótimas do primal e dual, respectivamente.

Resultado 3:

- Se o problema primal tem solução ótima x^* então o problema dual tem uma solução ótima $y*$ com $z^* = c^T x^* = b^T y* = w^*$.
- Se o problema primal (dual) tiver solução viável e for ilimitado então o problema dual (primal) é inviável.

- Se o problema primal (dual) for inviável então o problema dual (primal) é ilimitado.

4 Propriedade das folgas complementares

Se, em uma solução ótima de um PL, o valor da variável dual (preço sombra) está associada com a restrição é diferente de zero, então a restrição deve ser satisfeita na igualdade. Quando a variável dual é diferente de zero, significa que o valor da folga da restrição deve ser zero. Logo, a restrição é satisfeita na igualdade.

Se a restrição é satisfeita com uma desigualade estrita, então a variável correspondente é igual a zero.

Considere o seguinte par de problema primal-dual:

$$\begin{array}{lll} \max & c^T x & \\ & Ax & \leq b \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & b^T y & \\ & A^T y & \geq c \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

1. Se $\hat{y}_i > 0$ então $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j = b_i$
2. Se $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\hat{x}_j < b_i$ então $\hat{y}_i = 0$
3. Se $\hat{x}_j = 0$ então $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i = c_j$
4. Se $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\hat{y}_i > c_j$ então $\hat{x}_j = 0$

Se $\hat{x}_j$, para $j = 1, 2, \ldots, n$ e $\hat{y}_i$,para $i = 1, 2, \ldots, m$ são soluções viáveis para o problema primal e dual, respectivamente, então elas são soluções ótimas para os problemas se somente se as condições de folgas complementares valem para os dois problemas.

Example 6 *Considere os seguintes problemas:*

$$\begin{array}{lll} max & x_1 - x_2 & \\ & -2x_1 + x_2 & \leq 2 \\ & x_1 - 2x_2 & \leq 1 \\ & x_1 + x_2 & \leq 4 \\ & x \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} min & 2y_1 + y_2 + 4y_3 & \\ & -2y_1 + y_2 + y_3 & \geq 1 \\ & -y_1 + 2y_2 - y_3 & \geq 1 \\ & y \geq 0 & \end{array}$$

Verifique se $(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (3, 1, 0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ *satisfaz as condições de folgas complementares:*

- $(-2x_1+x_2-2)y_1 = 0$, *como* $y_1 = 0$ *então* $(-2x_1+x_2-2) = (-6+1-2) < 0$
- $(x_1 - x_2 - 1)y_2$, *como* $y_2 \geq 0$ *então* $(x_1 - 2x_2 - 1) = (3 - 2 - 1) = 0$
- $(x_1 + x_2 - 4)y_3$, *como* $y_3 \geq 0$ *então* $(x_1 + x_2 - 4) = (3 + 1 - 4) = 0$
- $(-2y_1+y_2+y_3-1)x_1$, *como* $x_1 \geq 0$ *então* $(-2y_1+y_2+y_3-1) = \frac{2}{3}+\frac{1}{3}-1 = 0$
- $(-y_1+2y_2-y_3-1)x_2$, *como* $x_2 \geq 0$ *então* $(-y_1+2y_2-y_3-1) = \frac{4}{3}-\frac{1}{3}-1 = 0$

5 Algoritmo Dual Simplex

Algoritmo Dual Simplex

1. Escolher uma linha tal que $\overline{b}_r < 0$ (variável a sair da base). Se todos os $\overline{b}_r \geq 0$ então termina.

2. Escolher o pivô $\overline{a}_{rs}$ tal que

$$\frac{\overline{c}_s}{-\overline{a}_{rs}} = \min\{\frac{\overline{c}_j}{-\overline{a}_{rs}} : \overline{a}_{rs} < 0\} \tag{9}$$

   Esta escolha tem o objetivo de manter todos os custos do primal não negativos, ou seja, manter o problema dual viável. Se todos os $\overline{a}_{rs} \geq 0$, o problema não tem solução.

3. Efectuar a pivoteamento.

4. Voltar para o passo 1.

Considere o seguinte PL:

$$\begin{array}{ll} \max & -3x_1 - 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \quad \geq 10 \rightarrow -2x_1 - x_2 \leq -10 \\ & x_1 + 5x_2 \quad \geq 15 \rightarrow -x_1 - 5x_2 \leq -15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Realizando as transformações necessárias, encontramos uma solução primal inviável e dual viável.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	-2	-1	1	0	-10
x_4	-1	-5	0	1	-15
z	3	2	0	0	0

A variável x_4 vai sair da base e a variável. Para determinar a variável que vai entrar na base, precisamos comparar as seguintes razões: $\frac{3}{1}$ e $\frac{2}{-5}$. A variável x_2 é escolhida para entrar na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_3	$\frac{9}{5}$	0	1	$-\frac{1}{5}$	-7
x_2	$\frac{1}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	3
z	$\frac{13}{5}$	0	0	$\frac{2}{5}$	-6

A variável x_3 vai sair da base e a variável. Para determinar a variável que vai entrar na base, precisamos comparar as seguintes razões: $\frac{13}{9}$ e $\frac{2}{1}$. A variável x_1 é escolhida para entrar na base.

	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
x_1	1	0	$-\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{35}{9}$
x_2	0	1	$\frac{1}{9}$	$-\frac{10}{45}$	$\frac{20}{9}$
z	0	0	$\frac{13}{9}$	$\frac{5}{45}$	$-\frac{145}{9}$

Exercicio 7 *Resolva o seguinte PL usando o método dual-simplex:*

$$\begin{array}{ll} max & -5x_1 - 35x_2 - 20x_3 \\ & x_1 - x_2 - x_3 \leq -2 \\ & -x_1 - 3x_2 \leq -3 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Solução: $z = -55, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1$

Exercicio 8 *Resolva o seguinte PL usando o método dual-simplex:*

$$\begin{array}{ll} max & -x_1 - x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \geq 8 \\ & 3x_1 + 7x_2 \geq 21 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solução: $z = -\frac{53}{11}, x_1 = \frac{35}{11}, x_2 = \frac{18}{11}$

Exercicio 9 *Resolva o seguinte PL usando o método dual-simplex:*

$$\begin{array}{ll} max & -20x_1 - 5x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 40 \\ & 3x_1 + 2x_2 \geq 60 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Solução: $z = -150, x_1 = 0, x_2 = 30$