Matemática Computacional
Sistemas Lineares

Prof. Wladimir A. Tavares
Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá

Forma Geral

- Sistemas de equações lineares é um conjunto finito de equações lineares em um conjunto finito de incógnitas.

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
$$

Forma Matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\,x\,n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\,x\,1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\,x\,1}$$

$$A\,x = b$$

onde

- A é a matriz dos coeficientes;
- x é o vetor de incógnitas;
- b é o vetor de constantes.

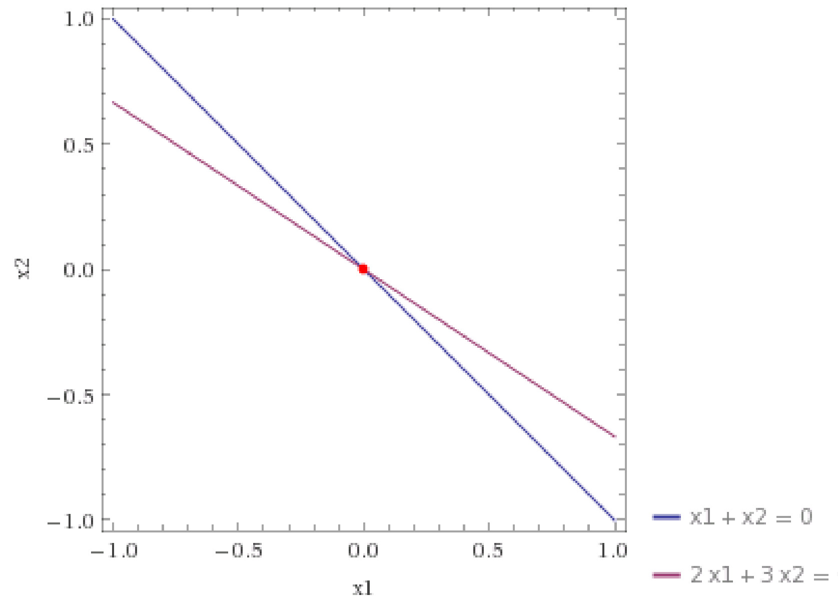
Classificação de Sistemas Lineares

- O sistema de equações lineares pode ser classificado:
  - Compatível, quando possui solução.
    - Determinado, quando possui uma única solução.
    - Indeteminado, quando possui infinitas soluções.
  - Incompatível, quando não possui solução.

Exemplo 1

Considere o sistema de equação linear:

$$\begin{cases} x1 + x2 = 0 \\ 2x1 + 3x2 = 0 \end{cases}$$

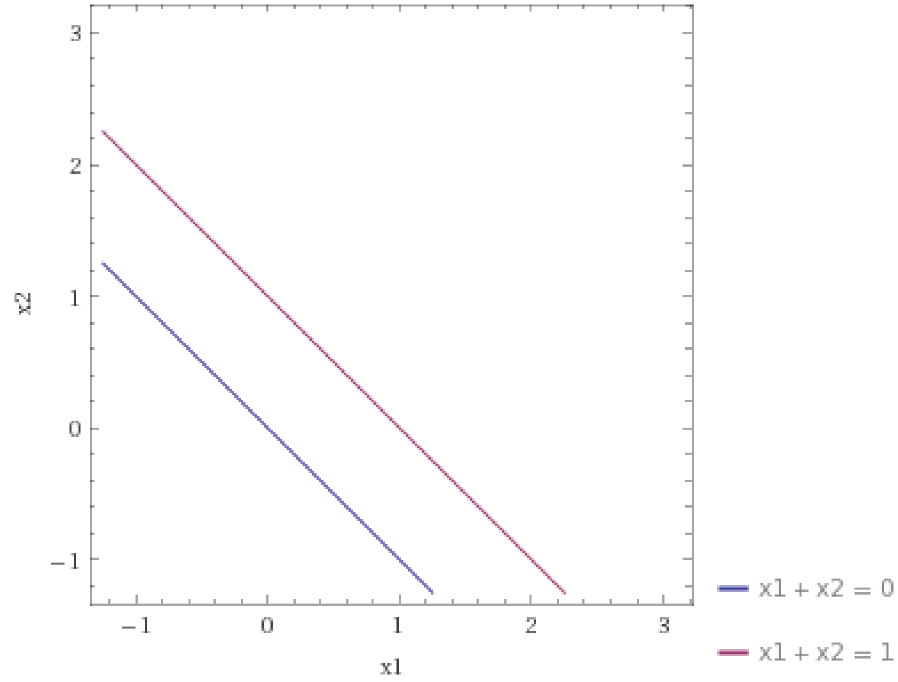


Quando b = 0, dizemos que o sistema é homogêneo. Todo sistema homogêneo é compatível. Ele possui a solução (0,0).

Exemplo 2

Considere o sistema de equação linear:

$$\begin{cases} x1 + x2 = 0 \\ x1 + x2 = 1 \end{cases}$$

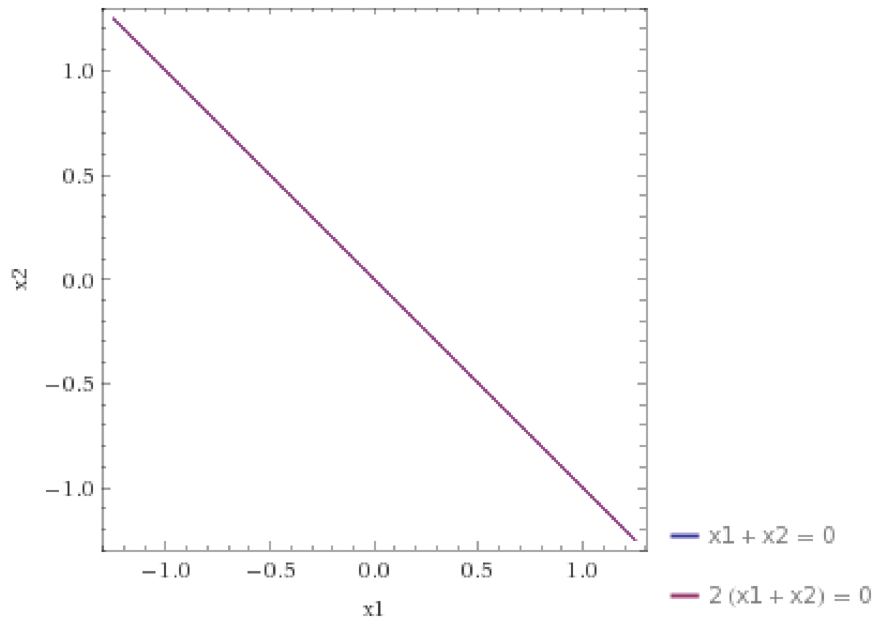


O sistema de equações lineares é incompatível.

Exemplo 3

Considere o sistema de equação linear:

$$\begin{cases} x1 + x2 = 0 \\ 2x1 + 2x2 = 0 \end{cases}$$



O sistema de equações lineares é compatível e possui infinitas soluções (α,-α)

Sistemas Triangulares

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ 0 \ + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \vdots \\ 0 + 0 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Os sistemas triangulares podem ser resolvidos pelo método Substituições retroativas ou progressivas.

Exemplo 1

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \qquad\quad x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad\quad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad\quad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$x_4 = 1$

$4x_3 - 5x_4 = 3 \rightarrow x_3 = 8/4 \rightarrow x_3 = 2$

$x_2 + 2 - 2 = -1 \rightarrow x_2 = -1$

$3x_1 + 4(-1) - 5(2) + 1 = -10 \rightarrow 3x_1 = 3 \rightarrow x_1 = 1$

Exemplo 2

Classifique o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \quad\quad\quad\quad x_3 - 2x_4 = 0 \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Exemplo2

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 - 2x_4 = 0 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$2x_4=2 \rightarrow x_4=1$

$4x_3 - 5x_4=3 \rightarrow 4x_3=3+5 \rightarrow x_3=2$

$0x_2+x_3-2x_4=0 \rightarrow 0x_2=0-2+2*1 \rightarrow 0x_2=0$

Qualquer valor de x_2 satisfaz a equação

$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \rightarrow 3x_1 = -10-4x_2+5x_3-x_4 \rightarrow$

$3x1=-10-4\lambda+10-1=x_1=-4\lambda-1/3$

Exemplo 3

Classifique o seguinte sistema triangular superior:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ \qquad\qquad\quad x_3 - 2x_4 = -1 \\ \qquad\qquad 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad\qquad 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Exemplo 3

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 = -10 \\ x_3 - 2x_4 = -1 \\ 4x_3 - 5x_4 = 3 \\ 2x_4 = 2 \end{cases}$$

$2x_4=2 \rightarrow x_4=1$

$4x_3-5x_4=3 \rightarrow 4x_3-5=3 \rightarrow x_3=2$

0x2+x3-2x4=-1$\rightarrow 0x_2=-1$

Nenhum valor de x_2 satisfaz a equação. O sistema é incompatível.

Exercícios

Resolva o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \\ \quad\quad x_3 + x_4 = 2 \\ \quad\quad\quad x_4 = 1 \end{cases}$$

Transformações Lineares

- **Transformações Elementares**: operações sobre as equações de um sistema linear.
  - Trocar a ordem de duas equações do sistema;
  - Multiplicar uma equação por uma constante $k \neq 0$;
  - Adicionar um múltiplo de uma equação a uma outra equação;

Sistemas Equivalentes

- Dois sistemas S1 e S2 serão equivalentes se S2 pode ser obtido de S1 através de transformações lineares.

- Se S1 e S2 são equivalentes então ou ambos são incompatíveis ou ambos têm as mesmas soluções.

Método de Gauss

- Em n-1 passos, o sistema $Ax = b$ pode ser transformado em um sistema triangular superior equivalente:

$$Ux = c$$

o qual se resolve por substituição.

Pseudocódigo

- Para i=1 até n
  - Anule os coeficientes da coluna i das linhas L_{i+1} até L_n
  - Para j=i+1 até n

    $$L_j \leftarrow L_j - m_{ji} L_i$$

Exemplo 1

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$$[A\,|\,b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a21}{a11} = \frac{4}{2} = 2$$

$L_2 = L_2 – m_{21}L_1 = [4\ 4\ -3\ 3] – 2[2\ 3\ -1\ 5]$
$L_2 = [0\ -2\ -1\ -7]$

$$m_{31} = \frac{a31}{a11} = \frac{2}{2} = 1$$

$L_3 = L_3 – m_{31}L_1 = [2\ -3\ 1\ -1] – 1[2\ 3\ -1\ 5]$
$L_3 = [0\ -6\ 2\ -6]$

Iteração 2

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & -6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{a32}{a22} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$L_3 = L_3 – m_{32}L_2$ = [0 -6 2 -6] – 3[0 -2 -1 -7]
L_3 = [0 0 5 15]

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Exemplo 1

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

$$5x3 = 15 \Rightarrow x3 = 3$$

$$-2x2 - x3 = -7 \Rightarrow -2x2 = -7 + 3 \Rightarrow x2 = 2$$

$$2x1 + 3x2 - x3 = 5 \Rightarrow 2x1 + 6 - 3 = 5 \Rightarrow$$

$$2x1 = 2 \Rightarrow x1 = 1$$

Exemplo 2

Calcule a solução do sistema linear em F(10,3,-1000,100):

$$\begin{cases} 1x_1 + 4x_2 + 52\,x_3 = 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 = 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 38 \end{cases}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$$[A\,|\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a21}{a11} = \frac{27}{1} = 27$$

$L_2 = L_2 – m_{21}L_1$ = [27 110 -3 134] – 27[1 4 52 57]
L_2= [0 2 -1400 -1410]

$$m_{31} = \frac{a31}{a11} = \frac{22}{2} = 22$$

$L_3 = L_3 – m_{31}L_1$ = [22 2 14 38] – 22[1 4 52 57]
L_3 = [0 -86 -1130 1210]

$$[A\,|\,b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1410 \\ 0 & -86 & -1130 & 1210 \end{bmatrix}$$

Iteração 2

$$[A\,|\,b]=\begin{bmatrix}1 & 4 & 52 & 57\\ 0 & 2 & -1400 & -1410\\ 0 & -86 & -1130 & 1210\end{bmatrix}$$

$$m_{32}=\frac{a32}{a22}=\frac{-86}{2}=-43$$

$L_3 = L_3 – m_{32}L_2 =$
[0 -86 -1130 1210] – (-43)[0 2 1400 -1410]
L_3 = [0 0 -61300 -61800]

$$[A\,|\,b]=\begin{bmatrix}1 & 4 & 52 & 57\\ 0 & 2 & -1400 & -1400\\ 0 & 0 & -61300 & -61800\end{bmatrix}$$

Exemplo 2

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 0 & 2 & -1400 & -1400 \\ 0 & 0 & -61300 & -61800 \end{bmatrix}$$

$$x3 = 1{,}01$$

$$x2 = 0{,}0$$

$$x1 = 4{,}5$$

Porém, a solução exata é:

$x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = 1$

Pivoteamento Parcial e Completo

- Pivôs pequenos geram multiplicadores grandes, que aumentam os erros de arredondamento...
- Uma simples alteração no método de Gauss é escolher como pivô o elemento de maior módulo:
  - em cada coluna (pivoteamento parcial)
  - dentre todos os elementos possíveis no processo de eliminação (pivoteamento completo)

Exemplo 4

Considere o sistema linear Ax=b, em que A e b são:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

A única solução do sistema é $x^T = [1\ 1]$. Porém, não é possível encontrá-la usando o método de eliminação de Gauss. Precisamos utilizar algum método de pivoteamento.

Pivoteamento Parcial

É usada quando o pivô é nulo é próximo de zero.

- No início da etapa i, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes da coluna i.

  $|a_{ki}| = \max_{i<=j<=n} (a_{ji})$ coeficiente.

- Trocar as linhas k e i se for necessário.

Pivoteamento Parcial

```
Para i = 1 até n faça
    Determine k tal que |a_ki| = max i<=j<=n (a_ji)
    if( abs(a[k][i]) > EPS) troque(a[i],a[k])
    else devolva "MATRIX SINGULAR"
    Para j = i+1 até n faça
        r = a[j][i]/a[i][i]
        Para k = i até n faça
            a[j][k] -= a[i][k]*r;
```

Pivoteamento Parcial

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Passo 1: Encontrar um pivô para linha 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x2 = 1$$

$$x1 = 1$$

Pivotemento Parcial

Calcule a solução do sistema linear em F(10,3,-1000,100):

$$\begin{cases} 1x_1 + 4x_2 + 52\, x_3 = 57 \\ 27x_1 + 110x_2 - 3x_3 = 134 \\ 22x_1 + 2x_2 + 14x_3 = 38 \end{cases}$$

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

Iteração 1

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 52 & 57 \\ 27 & 110 & -3 & 134 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 1 & 4 & 52 & 57 \\ 22 & 2 & 14 & 38 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{a21}{a11} = \frac{1}{27} = 0,370 \times 10^{-1}$$

$$m_{31} = \frac{a31}{a11} = \frac{22}{27} = 0,815 \times 10^{0}$$

$L_2 = L_2 – m_{21}L_1$ = [1 4 52 57] – $0,370x10^{-1}$[27 110 -3 134]
L_2= [0 -0.07 52.1 52]

$L_3 = L_3 – m_{31}L_1$ = [22 2 14 38] – $0,815x10^{0}$[27 110 -3 134]
L_3 = [0 -87.6 16.5 -71]

Iteração 2

$$[A|b] = \begin{bmatrix} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -0.07 & 52.1 & 52 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \\ 0 & -0.07 & 52.1 & 52 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{a32}{a22} = \frac{-0.07}{-87.6} = 0{,}799 \times 10^{-3}$$

$L_3 = L_3 – m_{32}L_2 =$
[0 -0,07 52.1 52] – (-0.07/-87.6)[0 -87.6 16.5 -71]
L_3 = [0 0 5208 5256]

Solução

$$\begin{bmatrix} 27 & 110 & -3 & 134 \\ 0 & -87.6 & 16.5 & -71 \\ 0 & 0 & 5208 & 5256 \end{bmatrix}$$

$x_1 = 0,991$

$x_2 = 0,997$

$x_3 = 1,011$

Método de Gauss-Jordan

- Consiste em efetuar operações sobre as equações do sistema, com a finalidade de obter uma sistema com a diagonal unitária equivalente, isto é, os elementos aij da matriz A, onde i ≠j, são todos nulos.
- A idéia é similar a Eliminação de Gauss porém sendo feito para criar zeros abaixo da diagonal principal e depois acima da diagonal principal.

Exemplo Gauss-Jordan

$$\begin{cases} 5x + 5y = 15 \\ 2x + 4y + z = 10 \\ 3x + 4y = 11 \end{cases}$$

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 15 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

$\text{Passo1: Encontrar o pivô da linha}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 10 \\ 3 & 4 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

Exemplo Gauss-Jordan

Passo 2 : Zerar os elementos da primeira coluna

$$\mathrm{L}_2 = L_2 - a_{21} / a_{11} * L_1 =$$

$$L_2 = [0 \quad 2 \quad 1 \quad 4]$$

$$\mathrm{L}_3 = L_3 - a_{31} / a_{11} * L_1$$

$$L_3 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplo Gauss-Jordan

$$\text{Passo 3: Encontrar o pivô da linha 2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{Passo 4: Zerar os elementos da coluna 2}$$

$$L_1 = L_1 \text{-} a_{21}/a_{22} L_2$$

$$L_3 = L_3 \text{-} a_{32}/a_{22} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_1=1$
$x_2=2$
$x_3=0$

Exemplo Gauss-Jordan

$$\begin{cases} x1 + x2 + 2x3 = 4 \\ 2x1 - x2 - x3 = 0 \\ x1 - x2 - x3 = -1 \end{cases}$$

Matriz Aumentada

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Passo1: Encontrar o pivô da linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo Gauss-Jordan

$\text{Passo 2: Zerar os elementos da primeira coluna}$

$$\mathrm{L}_2 = L_2 - a_{21}/a_{11} * L_1 =$$

$$L_2 = [0 \quad -3 \quad -5 \quad -8]$$

$$\mathrm{L}_3 = L_3 - a_{31}/a_{11} * L_1$$

$$L_3 = [0 \quad -2 \quad -3 \quad -5]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

Exemplo Gauss-Jordan

$\text{Passo 3: Encontrar o pivô da linha 2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -5 & -8 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & -2 & -3 & -5 \end{bmatrix}$$

$\text{Passo 4: Zerar os elementos da coluna 2}$

$L_1 = L_1\text{-}a_{21}/a_{22}L_2$

$L_3 = L_3\text{-}a_{32}/a_{22}L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Exemplo Gauss-Jordan

$$\text{Passo 5: Encontrar o pivô da linha 3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & 5/3 & 8/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Passo 4: Zerar os elementos da coluna 3}$$

$$L_1 = L_1 \text{-} a_{13}/a_{33} L_2$$

$$L_2 = L_2 \text{-} a_{23}/a_{33} L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Cálculo do Determinante

- Da propriedade de determinantes sabemos que as operações elementares realizadas sobre as linhas de A, alteram o determinante de A, det(A), da seguinte forma:
    1. trocar duas linhas: determinante da matriz resultante troca de sinal;
    2. multiplicar uma linha por uma constante não nula: determinante fica multiplicado por esta constante;
    3. adicionar a uma linha um múltiplo de outra linha: determinante não se altera.
- No processo de eliminação de Gauss e método de Gauss-Jordan realizamos uma sequência de operações do tipo (iii).

Cálculo do Determinante

- O determinante de uma matriz triangular ou diagonal é o produto dos elementos das diagonais então o determinante pode ser obtido pelo método de Gauss ou Gauss-Jordan
- Método de Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \det(U) = 2(-2)(5) = -20$$

Refinamento de Soluções

- Seja x^0 um solução aproximada para $Ax=b$
- O resíduo r^0 produzido pela solução aproximada x^0 é $b-Ax^0$
- Uma solução melhorada x^1 pode ser obtida calculando uma parcela de correção δ^0 da seguinte maneira:

$$x^1 = x^0 + \delta^0$$

- Multiplicando a equação acima por A e tomando $Ax^1=b$ temos:

$$Ax^1 = Ax^0 + A\delta^0 \Rightarrow b= Ax^0 + A\delta^0 \Rightarrow A\delta^0 =b- Ax^0= r^0$$

- Esses cálculos permitem o refinamento da solução encontrada.

Exemplo

- Vamos refinar a solução do seguinte sistema:

$$
\begin{aligned}
8{,}7x_1 + 3{,}0x_2 + 9{,}3x_3 + 11{,}0x_4 &= 16{,}4 \\
24{,}5x_1 - 8{,}8x_2 + 11{,}5x_3 - 45{,}1x_4 &= -49{,}7 \\
53{,}3x_1 - 8{,}8x_2 - 23{,}5x_3 + 11{,}4x_4 &= -80{,}8 \\
21{,}0x_1 - 81{,}0x_2 - 13{,}2x_3 + 21{,}5x_4 &= -106{,}3
\end{aligned}
$$

- A solução encontrada pelo método de Gauss é:

$$x^0 = [0{,}97 \quad 1{,}98 \quad -0{,}97 \quad 1{,}00]^T$$

- O resíduo da solução aproximada é:

$$r^0 = b - Ax^0 = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Cálculo do vetor de correção $\delta 0$

$$A\delta^0 = r^0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8{,}7 & 3{,}0 & 9{,}3 & 11{,}0 \\ 24{,}5 & -8{,}8 & 11{,}5 & -45{,}1 \\ 53{,}3 & -8{,}8 & -23{,}5 & 11{,}4 \\ 21{,}0 & -81{,}0 & -13{,}2 & 21{,}5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}042 \\ 0{,}214 \\ 0{,}594 \\ -0{,}594 \end{bmatrix}$$

- Vetor de correção

$$\delta^0 = \; = \begin{bmatrix} 0{,}0295 \\ 0{,}0195 \\ -0{,}0294 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Solução melhorada

$$x^1 = x^0 + \delta^0 = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \\ -0{,}9999 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Novo resíduo

$$r^1 = \begin{bmatrix} -0{,}009 \\ -0{,}011 \\ 0{,}024 \\ 0{,}013 \end{bmatrix}$$

Exemplo

- Vetor de correção δ^1:

$$\delta^1 = \begin{bmatrix} -0{,}0002 \\ -0{,}0002 \\ -0{,}0007 \\ 0{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Solução melhorada

$$x^2 = x^1 + \delta^1 = \begin{bmatrix} 1{,}0000 \\ 2{,}0000 \\ -1{,}0000 \\ 1{,}0000 \end{bmatrix}$$

- Resíduo r^2:

$$r^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Melhor Aproximação

- Dado um sistema Ax = b, sejam y e z duas aproximações da solução exata x. Como saber qual delas é a melhor?
- A estratégia mais lógica parece ser comparar os respectivos resíduos: o menor seria da melhor solução
- Infelizmente, isso nem sempre é verdade...
- Exemplo:

$$\begin{cases} 0{,}24x_1 + 0{,}36x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}84 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}24x_3 = 0{,}52 \\ 0{,}15x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}25x_3 = 0{,}64 \end{cases} \qquad y = \begin{bmatrix} 25 \\ -14 \\ -1 \end{bmatrix} \quad z = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r_y = \begin{bmatrix} 0{,}00 \\ 0{,}00 \\ 0{,}08 \end{bmatrix} \quad r_z = \begin{bmatrix} 0{,}12 \\ 0{,}24 \\ 0{,}25 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Conclusão: nem sempre a aproximação de menor resíduo é a melhor ou a mais exata

Condicionamento

- Se encontrar resíduos menores não garante melhores soluções, como saber se o processo de refinamento por resíduos funciona?
- Um problema é dito mal condicionado se pequenas alterações nos dados de entrada ocasionam grandes erros no resultado final
- Exemplo: $\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}119 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases}$ Solução: x=1 e y=-1
- Suponha que os valores desse sistema sejam obtido experimentalmente, e por isso os termos independentes possam variar de ±0,001:

$$\begin{cases} 0{,}992x + 0{,}873y = 0{,}120 \\ 0{,}481x + 0{,}421y = 0{,}060 \end{cases}$$

Solução: x=0,815 e y=-0,789

Erro na entrada: (|0,119-0,120|/|0.119|) ≈ 0,8%

Erro no resultado: (|1.0-0,815|/|1.0|) ≈ 18,5%

Condicionamento

- No entanto, esses cálculos não resolvem o mal condicionamento apenas indicam a existência...
- Pode ser demonstrado que é possível detectar o mau condicionamento de um sistema de equações apenas com o uso dos refinamentos:
- Se os resíduos $r^{(0)}$, $r^{(1)}$, ..., $r^{(n)}$ são pequenos, mas as correções $\delta^{(0)}$,$\delta^{(1)}$, ..., $\delta^{(n)}$ são grandes, então o *sistema é mal condicionado.*