

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú



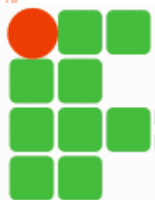
PESQUISA OPERACIONAL - PROGRAMAÇÃO LINEAR MÉTODO SIMPLEX

Prof. Angelo Augusto Frozza, M.Sc.

MÉTODO SIMPLEX

- A ideia geral é

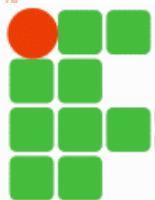
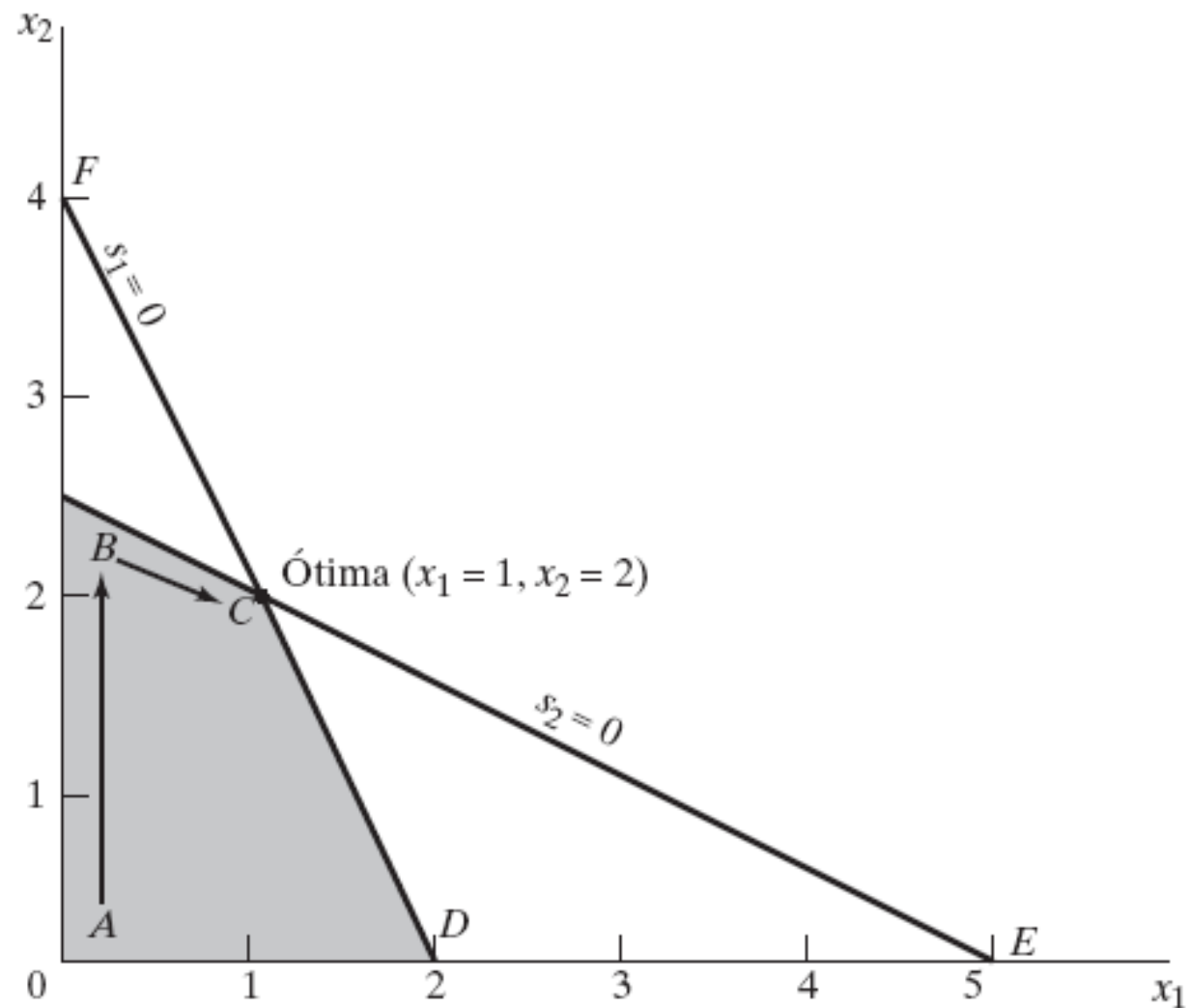
- Em vez de enumerar ***todas*** as soluções básicas (pontos extremos) do problema de PL, o Método Simplex investiga somente ***algumas dessas soluções selecionadas***.
- Dessa forma, o desenvolvimento dos cálculos do Método torna-se ***iterativo***.



MÉTODO SIMPLEX

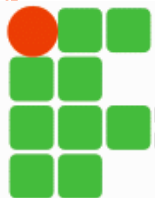
Figura 3.3

Processo iterativo do método simplex



MÉTODO SIMPLEX

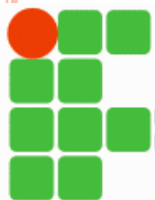
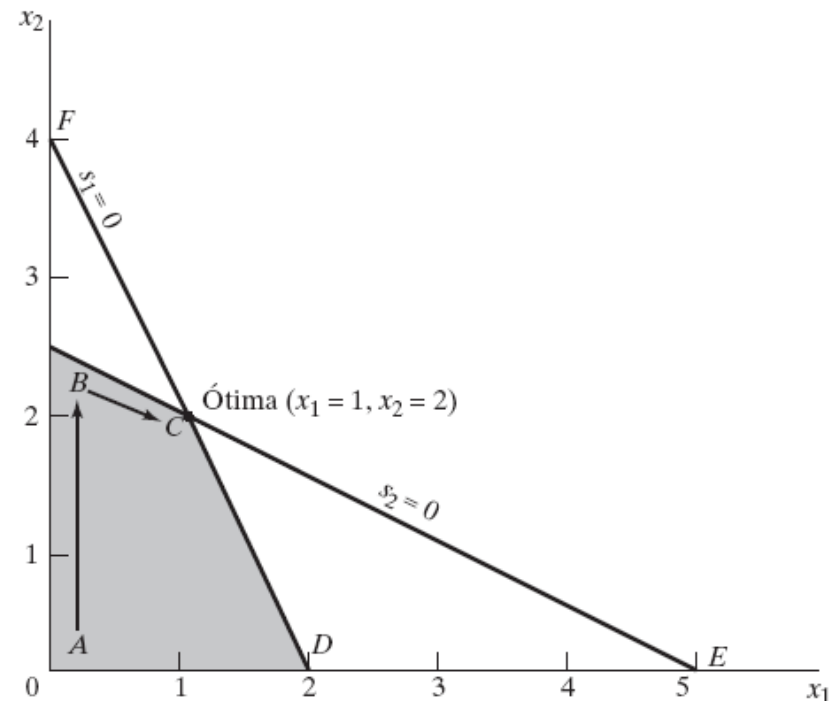
- Normalmente o Método Simplex começa a análise pela *origem* (ponto A), onde $x_1 = x_2 = 0$.
 - Nesse ponto, o valor da função objetivo (z) é zero.
- **Pergunta a ser feita:**
 - Se um aumento em x_1 ou x_2 não básicas, acima de seus valores zero atuais pode melhorar (aumentar) o valor de z?
 - RESPOSTA: investigue a função objetivo, por exemplo
$$\text{Maximizar } z = 2x_1 + 3x_2$$
 - A função mostra que um aumento em x_1 ou x_2 (ou ambas) acima de seus valores zero atuais **melhorará** o valor de z.
 - Porém, o Método exige o *aumento de uma variável por vez*.
 - A variável selecionada será aquela que tiver **a maior taxa de melhoria** em z.



MÉTODO SIMPLEX

- No exemplo, o valor de z aumentará
 - em 2 para cada unidade de aumento em x_1 e
 - em 3 para cada unidade de aumento em x_2 .
- Isso significa que a **taxa de melhoria** no valor de z é 2 para x_1 e 3 para x_2 .
- Assim, a opção é aumentar x_2 .
- O valor de x_2 deve ser aumentado até alcançar o ponto extremo de B .
 - Parar antes de B não é ótimo;
 - Parar depois de B não é viável.

Figura 3.3
Processo iterativo do método simplex



MÉTODO SIMPLEX

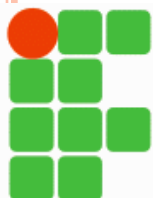
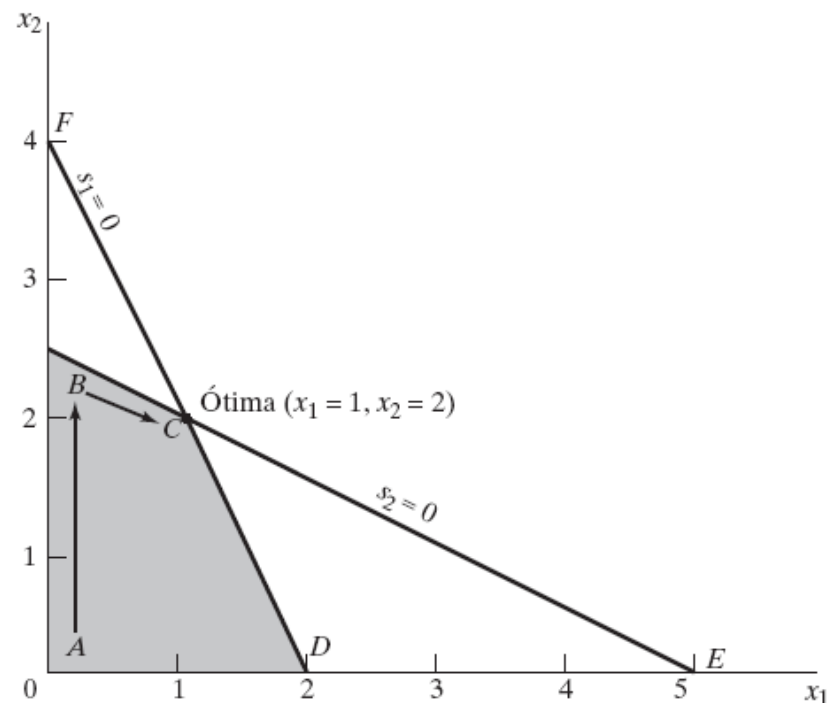
- A partir de B , o Método aumentará o valor de x_1 para alcançar o ponto C , que é a *solução ótima*.
- Assim, o caminho do Método Simplex foi definido como **$A \rightarrow B \rightarrow C$** .
- Cada ponto extremo é associado a uma **iteração**.
 - Lembrando que o Método percorre as **bordas** da região de soluções.

Tabela 3.2 Variáveis básicas e não básicas

Ponto extremo	Variáveis básicas	Variáveis (zero) não básicas
A	s_1, s_2	x_1, x_2
B	s_1, x_2	x_1, s_2
C	x_1, x_2	s_1, s_2

Figura 3.3

Processo iterativo do método simplex



MÉTODO SIMPLEX

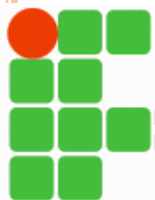
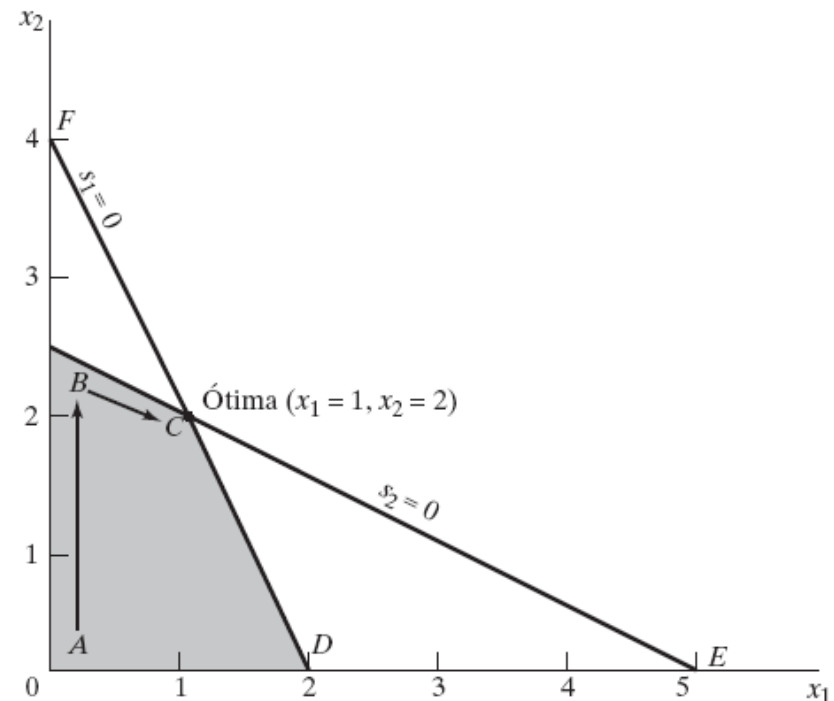
○ Exercícios

1. Na figura do exemplo, suponha que a função objetivo é alterada para

$$\text{Maximizar } z = 8x_1 + 4x_2$$

- Identifique o caminho do Método Simplex e as variáveis básicas e não básicas que definem esse caminho.

Figura 3.3
Processo iterativo do método simplex



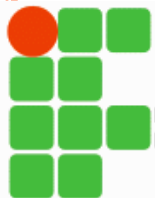
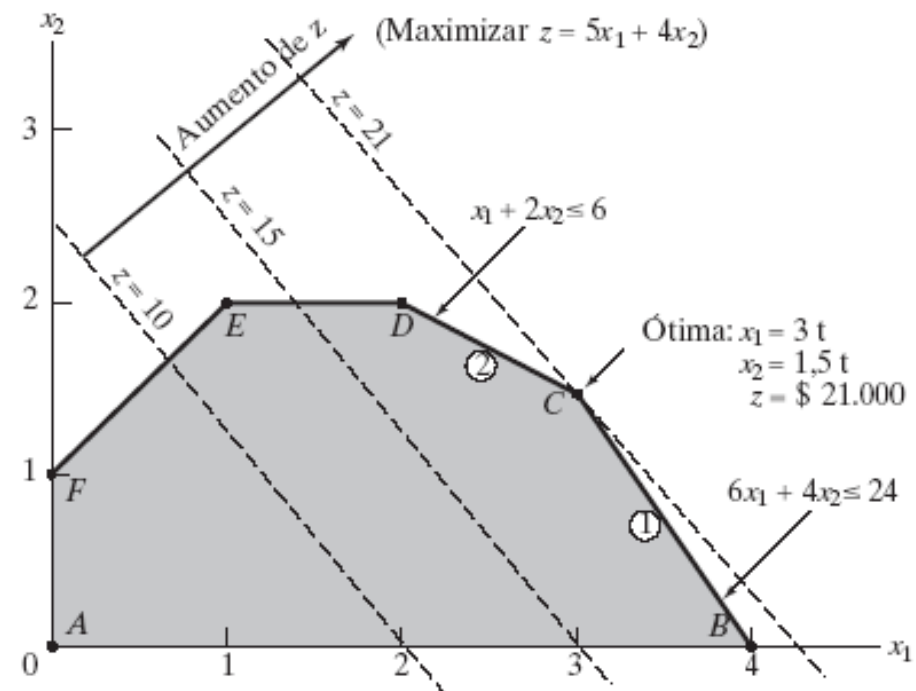
MÉTODO SIMPLEX

○ Exercícios

2. Considere a solução gráfica do modelo da Tintas e Tintas. Identifique o caminho do Método Simplex e as variáveis básicas e não básicas que definem esse caminho.

Figura 2.2

Solução ótima do modelo da Reddy Mikks



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Considere o problema da Tintas e Tintas S.A. para entender o Método Simplex

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2$$

Sujeito a

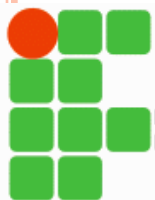
$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \text{ (matéria prima M1)}$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ (matéria prima M2)}$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \text{ (limite de mercado)}$$

$$x_2 \leq 2 \text{ (limite da demanda)}$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \text{ (não negatividade)}$$



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Expressando o problema na forma de equações:

$$\text{Maximizar } z = 5x_1 + 4x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

Sujeito a

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24$$

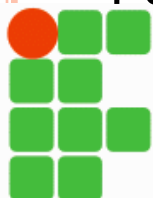
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + s_3 = 1$$

$$x_2 + s_4 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0$$

Função objetivo: $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Agora criamos a tabela Simplex inicial

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução	
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	linha z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	linha s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	linha s_2
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	linha s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	linha s_4

- Essa tabela especifica o conjunto de variáveis básicas (s_1, s_2, s_3, s_4) e não básicas (x_1, x_2), bem como apresenta a solução associada com a iteração inicial.



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Agora criamos a tabela Simplex inicial

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução	
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	linha z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	linha s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	linha s_2
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	linha s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	linha s_4

- As iterações começam na origem $(x_1, x_2) = (0, 0)$
 - Variáveis (zero) não básicas: (x_1, x_2)
 - Variáveis básicas: (s_1, s_2, s_3, s_4)



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Agora criamos a tabela Simplex inicial

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução	
z	1	-5	-4	0	0	0	0	0	linha z
s_1	0	6	4	1	0	0	0	24	linha s_1
s_2	0	1	2	0	1	0	0	6	linha s_2
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1	linha s_3
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	linha s_4

- Substituindo as variáveis não básicas $(x_1, x_2) = (0, 0)$ e observando o arranjo especial 0-1 dos coeficientes de z , bem como as variáveis básicas (s_1, s_2, s_3, s_4) , a seguinte solução está disponível (sem nenhum cálculo):

$$z = 0$$

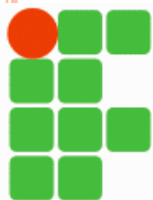
$$s_1 = 24$$

$$s_2 = 6$$

$$s_3 = 1$$

$$s_4 = 2$$

$$\text{Ponto A: } (x_1, x_2) = (0, 0)$$



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- A solução inicial é ótima?

$$(x_1, x_2) = (0, 0)$$

$$z = 0$$

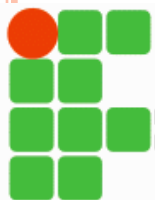
$$s_1 = 24$$

$$s_2 = 6$$

$$s_3 = 1$$

$$s_4 = 2$$

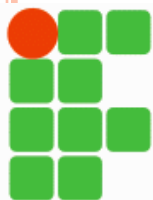
- A função objetivo $z = 5x_1 + 4x_2$ mostra que a solução pode ser melhorada aumentando x_1 ou x_2 .
 - Para tanto, escolhe-se aumentar a variável que tem o *coeficiente mais positivo*;
 - Ou seja, essa será a ***variável a entrar na base***.
 - Se fosse considerada a ***equação*** $z - 5x_1 - 4x_2 = 0$, seria escolhida a variável com ***coeficiente mais negativo***.
 - Regra denominada ***condição de otimalidade***.



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Para determinar a **variável que sai da base**, deve-se fazer o cálculo das **razões não negativas** entre o lado direito das equações (coluna *Solução*) e o coeficiente de restrição correspondente à variável que entra (x_1)
 - A **razão mínima não negativa** identifica automaticamente a variável s_1 como a variável que sai da base e designa para a variável que entra na base (x_1) o valor de 4.

Base	Entrando x_1	Solução	Razão (ou intercepto)
s_1	6	24	$x_1 = 24/6 = 4 \leftarrow$ mínimo
s_2	1	6	$x_1 = 6/1 = 6$
s_3	-1	1	$x_1 = 1 / -1 = -1 \leftarrow$ (ignorar)
s_4	0	2	$x_1 = 2 / 0 = \infty \leftarrow$ (ignorar)

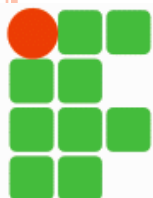
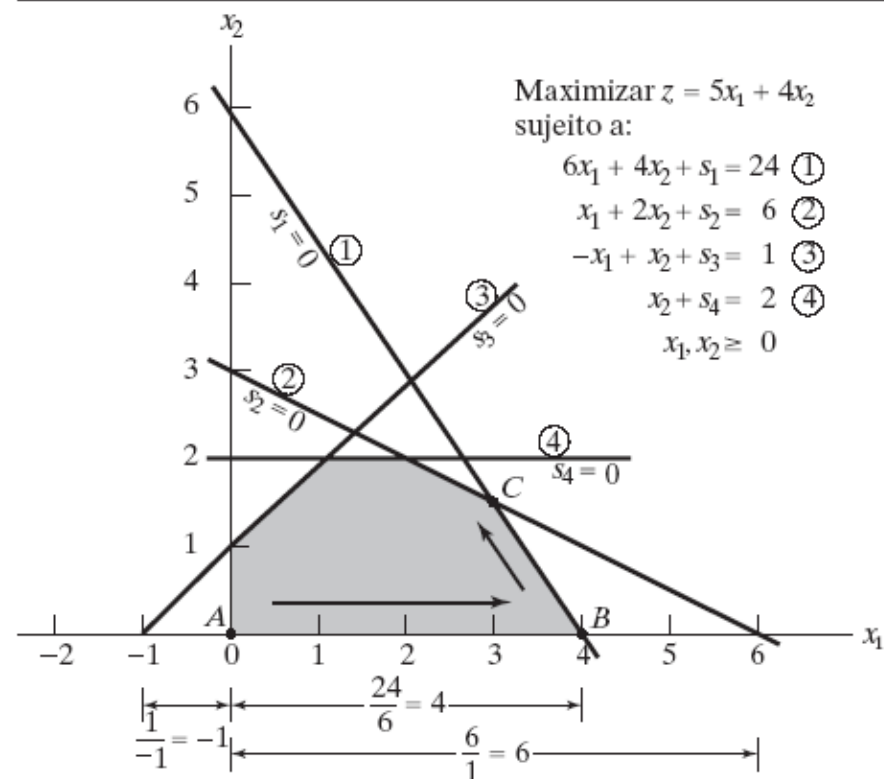


DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- As razões calculadas são as intersecções das restrições com o eixo (x_1) da variável que entra na base.
 - Um aumento que ultrapasse B é inviável
 - Um aumento menor do que B desconsidera outras soluções viáveis (e a solução ótima)

Figura 3.5

Interpretação gráfica das razões do método simplex no modelo da Reddy Mikks



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- O novo **ponto de solução B** é determinado pela “troca” entre a variável que entra na base (x_1) e a variável que sai da base s_1 na tabela Simplex, para produzir os seguintes conjuntos de variáveis:
 - Variáveis básicas em B : (x_1, s_2, s_3, s_4)
 - Variáveis não básicas (zero) em B : (s_1, x_2)
- O processo de troca é baseado nas **operações de Gauss-Jordan**, que identifica:
 - a coluna da variável que entra na base como **coluna do pivô**
 - a linha da variável que sai como a **linha do pivô**
 - a intersecção da coluna do pivô com a linha do pivô como **elemento pivô**.



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

<div> <div>Entra</div> <div>↓</div> </div>									
	Base	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
	z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
Sai ←	s_1	0	6	4	1	0	0	0	24
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
	s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2
<div> <div>Coluna</div> <div>do pivô</div> </div>									
<div> <div>linha do pivô</div> </div>									
<div> <div>linha z</div> </div>									
<div> <div>linha s_2</div> </div>									
<div> <div>linha s_3</div> </div>									
<div> <div>linha s_4</div> </div>									



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Os cálculos por *Gauss-Jordan* necessários para produzir a nova solução básica são de dois tipos:

- Linha do pivô***

- a) Substituir a variável que sai da base na coluna *Base* pela variável que entra na base.
- b) Nova linha do pivô = Linha do pivô atual \div Elemento pivô

- Exemplo:*

$$\begin{aligned}\text{Nova linha } x_1 &= \text{Linha } s_1 \text{ atual} \div 6 \\ &= 1/6 (0 \ 6 \ 4 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 24) \\ &= (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4)\end{aligned}$$



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Os cálculos por *Gauss-Jordan* necessários para produzir a nova solução básica são de dois tipos:

- Linha do pivô***

- Substituir a variável que sai da base na coluna *Base* pela variável que entra na base.
- Nova linha do pivô = Linha do pivô atual \div Elemento pivô

↓									
	Base	Z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
	z	1	-5	-4	0	0	0	0	0
←	x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
	s_2	0	1	2	0	1	0	0	6
	s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- ***Todas as outras linhas, incluindo z***

$$\text{Nova linha} = (\text{Linha atual}) - (\text{Seu coeficiente da coluna pivô}) * (\text{Nova linha do pivô})$$

- *Exemplo:*

$$\begin{aligned}\text{Nova linha } z &= \text{Linha } z \text{ atual} - (-5) * \text{Nova linha } x_1 \\ &= (1 \ -5 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) - (-5) * (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4) \\ &= (1 \ -5 \ -4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) - (0 \ -5 \ -10/3 \ -5/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ -20) \\ &= (1 \ 0 \ -2/3 \ 5/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 20)\end{aligned}$$

Lembrete:

$$-4 - 10/3 \Rightarrow (-12 - 10)/3 \Rightarrow -2/3$$

- Achar o MDC
- Dividir o MDC pelo denominador
- Multiplicar o resultado pelo numerador

DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

$$\begin{aligned}\text{Nova linha } s_2 &= \text{Linha } s_2 \text{ atual} - (1) * \text{Nova linha } x_1 \\ &= (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 6) - (1) * (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4) \\ &= (0 \ 1 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 6) - (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4) \\ &= (0 \ 0 \ 4/3 \ -1/6 \ 1 \ 0 \ 0 \ 2)\end{aligned}$$

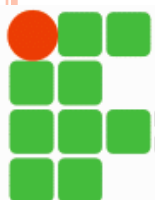
$$\begin{aligned}\text{Nova linha } s_3 &= \text{Linha } s_3 \text{ atual} - (-1) * \text{Nova linha } x_1 \\ &= (0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) - (-1) * (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4) \\ &= (0 \ -1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1) - (0 \ -1 \ -2/3 \ -1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ -4) \\ &= (0 \ 0 \ 5/3 \ 1/6 \ 0 \ 1 \ 0 \ 5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Nova linha } s_4 &= \text{Linha } s_4 \text{ atual} - (0) * \text{Nova linha } x_1 \\ &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) - (0) * (0 \ 1 \ 2/3 \ 1/6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 4) \\ &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2) - (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0) \\ &= (0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 2)\end{aligned}$$

DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- A nova solução básica é (x_1, s_2, s_3, s_4) e a nova tabela se torna:

↓									
	Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
	z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
←	x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
	s_2	0	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
	s_3	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

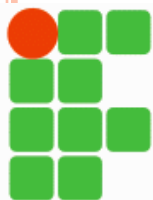


DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- A nova solução básica é (x_1, s_2, s_3, s_4) e a nova tabela se torna:

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
z	1	0	$-2/3$	$5/6$	0	0	0	20
x_1	0	1	$2/3$	$1/6$	0	0	0	4
s_2	0	0	$4/3$	$-1/6$	1	0	0	2
s_3	0	0	$5/3$	$1/6$	0	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

- Agora verifica-se qual a próxima variável vai entrar na base...



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Identifica-se a próxima variável a entrar na base:

Base	Entrando x_2	Solução	Razão (ou intercepto)
x_1	$2/3$	4	$x_2 = 4 \div 2/3 = 12/2 = 6$
s_2	$4/3$	2	$x_2 = 2 \div 4/3 = 6/4 = 3/2 = 1,5 \leftarrow \text{mínimo}$
s_3	$5/3$	5	$x_2 = 5 \div 5/3 = 15/5 = 3$
s_4	1	2	$x_2 = 2 / 1 = 2$

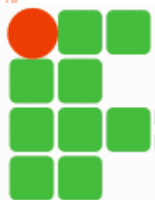
- Assim, s_2 sai da solução básica e o novo valor de x_2 é 1,5



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

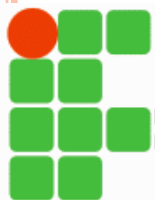
- Alteração na tabela da 2ª iteração

				↓					
	Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
	z	1	0	-2/3	5/6	0	0	0	20
	x_1	0	1	2/3	1/6	0	0	0	4
←	s_2	0	0	4/3	-1/6	1	0	0	2
	s_3	0	0	5/3	1/6	0	1	0	5
	s_4	0	0	1	0	0	0	1	2



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Alteração na tabela da 2ª iteração:
 - Nova linha do pivô $x_2 = \text{Linha } s_2 \text{ atual} \div 4/3$
 - Nova linha $z = \text{Linha } z \text{ atual} - (-2/3) * \text{Nova linha } x_2$
 - Nova linha $x_1 = \text{Linha } x_1 \text{ atual} - (2/3) * \text{Nova linha } x_2$
 - Nova linha $s_3 = \text{Linha } s_3 \text{ atual} - (5/3) * \text{Nova linha } x_2$
 - Nova linha $s_4 = \text{Linha } s_4 \text{ atual} - (1) * \text{Nova linha } x_2$

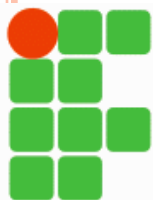


DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- A nova solução básica é (x_1, x_2, s_3, s_4) e a nova tabela se torna (3ª iteração):

Base	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	Solução
z	1	0	0	3/4	1/2	0	0	21
x_1	0	1	0	1/4	-1/2	0	0	3
x_2	0	0	1	-1/8	3/4	0	0	3/2
s_3	0	0	0	3/8	-5/4	1	0	5/2
s_4	0	0	0	1/8	-3/4	0	1	1/2

- Com base na **condição de otimalidade**, nenhum dos coeficientes da linha z associados com as variáveis não básicas, s_1 e s_2 , é negativo



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- Assim, essa tabela Simplex é **ótima**.
- A solução ótima pode ser lida na tabela Simplex como:
 - Os valores ótimos das variáveis na coluna *Base* são dados na coluna *Solução* do lado direito da tabela
 - A interpretação é demonstrada na tabela a seguir:

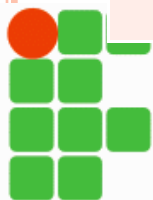
Variável de decisão	Valor ótimo	Recomendação
x_1	3	Produzir 3 t diárias de tintas para exteriores
x_2	3/2	Produzir 1,5 t diárias de tintas para interiores
z	21	Lucro diário é R\$ 21.000,00



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

- A solução também dá o status dos recursos:
 - **Escasso** – se as atividades (variáveis) do modelo o usarem totalmente
 - **Abundante**
- Essa informação é obtida da tabela ótima pela verificação do valor da *variável de folga* associado à restrição que representa o recurso:
 - Variável de folga = ZERO, o recurso é totalmente utilizado / ESCASSO
 - Variável de folga > ZERO, o recurso é ABUNDANTE

Recurso	Valor da folga	Status
Matéria prima $M1$	$s_1 = 0$	Escasso
Matéria prima $M2$	$s_2 = 0$	Escasso
Limite de mercado	$s_3 = 5/2$	Abundante
Limite de demanda	$s_4 = 1/2$	Abundante



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

○ Finalizando...

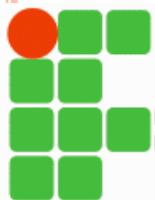
- A tabela Simplex oferece diversas informações adicionais:
 - *Análise de sensibilidade* – trata da determinação das condições que manterão a solução atual inalterada;
 - *Análise pós-otimização* – trata de achar uma nova solução ótima quando os dados do modelo original são alterados.



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

○ Finalizando...

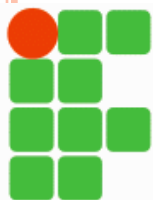
- Em problemas de **MINIMIZAÇÃO**, as condições de otimalidade exigem a seleção da **variável que entra na base** como a **variável não básica que tenha o coeficiente mais positivo** na função objetivo.
 - Isso é o oposto da regra de *Maximização*.
 - $Max\ z = Min\ (-z)$
- Quanto à *condição de viabilidade* para selecionar a *variável que sai*, a regra permanece sem alteração.



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

○ **Condição de otimalidade**

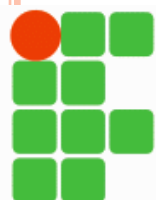
- A *variável que entra na base* em um problema de **maximização** é a *variável não básica* que tiver o *coeficiente mais negativo na linha z*.
 - A linha z deve estar no formato de equação.
- Em problemas de **minimização**, é a *variável não básica* com o *coeficiente mais positivo na linha z*.
- A **solução ótima** é obtida na iteração em que *todos os coeficientes da linha z das variáveis não básicas* forem **não negativos** (na maximização) ou **não positivos** (na minimização).



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

○ **Condição de viabilidade**

- Tanto em problemas de **maximização** quanto para os de **minimização**, a *variável que sai da base* é a **variável básica** associada com a **menor razão não negativa** (que tenha um denominador *estritamente positivo*).



DETALHES DO CÁLCULO DO ALGORITMO SIMPLEX

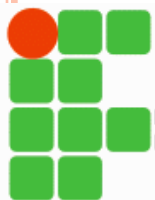
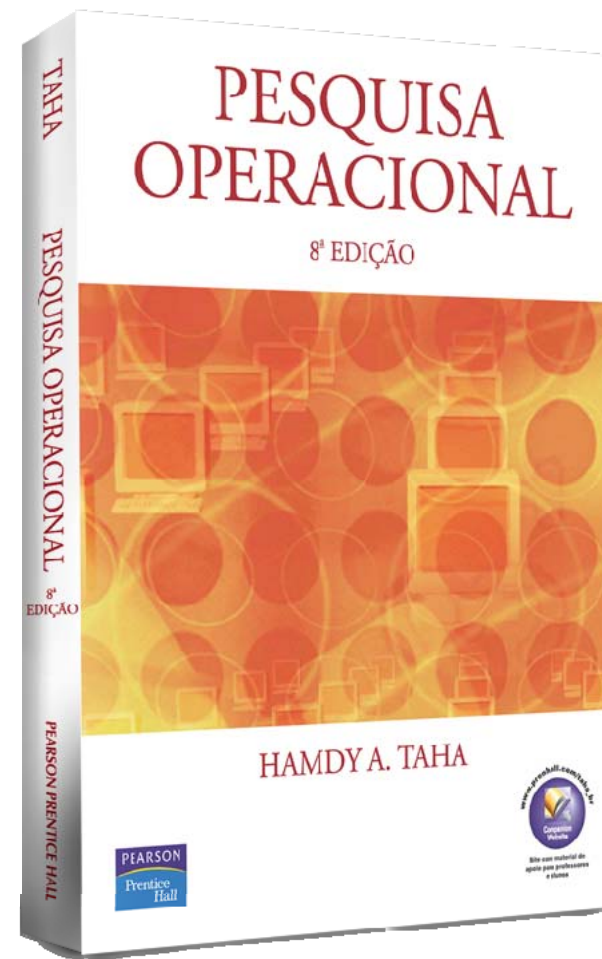
○ **Exercícios**

- Resolva o problema da Casa das Rações pelo Método Simplex;
- Desenvolva todos os cálculos necessários, passo a passo;
- Encaminhe a solução para o *e-mail* do professor.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú