MÉTODO SIMPLEX – SOLUÇÃO INICIAL ARTIFICIAL

- Problemas de PL nos quais todas as restrições são (≤) com lados direitos não negativos oferecem uma ***solução básica inicial*** viável conveniente, na qual todas as variáveis são de folga.

- Isso não acontece com os modelos que envolvem restrições (=) ou (≥).
  - Chamados de problemas de PL "*mal comportados*"

MÉTODO SIMPLEX – SOLUÇÃO INICIAL ARTIFICIAL

- O procedimento para ***iniciar*** a resolução de problemas de PL "mal comportados", com restrições (**=**) ou (**≥**), é usar ***variáveis artificiais*** que desempenham o papel de folgas na primeira iteração e, então, descartá-las legitimamente em iterações posteriores.

- Para isso, existem dois métodos principais:
  - ***Método M-Grande*** – mais antigo, porém não utilizado em situações práticas;
  - ***Método das Duas Fases***

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***Fase I***
  - Expresse o problema na forma de equações e *adicione as variáveis artificiais* necessárias às restrições para garantir uma *solução básica inicial*.
  - Em seguida, ache uma solução básica com as equações resultantes que, *independentemente* de o problema de PL ser de *Maximização* ou *Minimização*, ***sempre minimizará*** a soma das variáveis artificiais.
    - Se o *valor mínimo da soma for positivo*, o problema de PL não tem solução viável, o que encerra o processo (OBS.: uma variável artificial positiva significa que uma restrição original não foi satisfeita.
    - Caso contrário, passe para a FASE II.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***Fase II***

  - Use a solução viável da *Fase I* como uma solução básica viável inicial para o problema original.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- Dado o problema de PL

$$\textit{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

Sujeito a

$$3x_1 + x_2 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- Dado o problema de PL

$$\textit{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

Sujeito a

$$\mathbf{3x_1 + x_2 = 3}$$
$$\mathbf{4x_1 + 3x_2 \geq 6}$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

Método Simplex – Método das Duas Fases

- Transformando em equações:

$$\textit{Minimizar } z = 4x_1 + x_2$$

$$(z - 4x_1 - x_2 = 0)$$

Sujeito a

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \mathbf{- s_1} &= 6 \\ x_1 + 2x_2 \mathbf{+ s_2} &= 4 \\ x_1, x_2, s_1, s_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE I*** – Adicionando as variáveis artificiais R_1 e R_2

$$\textit{Minimizar } z = R_1 + R_2$$
$$(z - R_1 - R_2 = 0)$$

Sujeito a

$$3x_1 + x_2 + R_1 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - s_1 + R_2 = 6$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 4$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1, R_2 \geq 0$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE I*** – A tabela inicial é

Base	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*R1*	*R2*	*Solução*
z	0	0	0	0	-1	-1	0
R_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

- **Próximo passo**:
  - A tabela está inconsistente, em função da inclusão de R_1 e R_2
  - Substituir os valores de R_1 e R_2 na linha z usando o cálculo:

*Nova Linha z = Velha Linha z + (1 * Linha* R_1 *+ 1 * Linha* R_2*)*

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE I*** – A tabela inicial é

*Nova Linha z = Velha Linha z + (1 * Linha R_1 + 1 * Linha R_2)*

Nova Linha z = (0 0 0 0 -1 -1 0) +
((3 1 0 0 1 0 3) + (4 3 -1 0 0 1 6))

Nova Linha z = (0 0 0 0 -1 -1 0) + (7 4 -1 0 1 1 9)

Nova Linha z = (7 4 -1 0 0 0 9)

Método Simplex – Método das Duas Fases

- ***FASE I*** – A tabela inicial é

Base	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*R1*	*R2*	*Solução*
z	7	4	-1	0	0	0	9
R_1	3	1	0	0	1	0	3
R_2	4	3	-1	0	0	1	6
x_4	1	2	0	1	0	0	4

- **Próximo passo**:
  - Resolver normalmente a FASE I do problema, a fim de encontrar uma nova solução em que R_1 e R_2 não façam parte da solução.

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE I*** – A tabela ótima da Fase I é

Base	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*R1*	*R2*	*Solução*
z	0	0	0	0	-1	-1	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5	-1/5	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
x_4	0	0	1	1	1	-1	1

- **Próximo passo**:
  - Com $z = 0$, a Fase I produz a solução básica viável $x_1 = 3/5$, $x_2 = 6/5$ e $x_4 = 1$.
  - As variáveis artificiais concluíram sua missão e suas colunas podem ser eliminadas.
  - Passamos para a Fase II.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE II*** – Solução final
  - O problema "*original*" é reescrito como

$$\textbf{\textit{Minimizar } } z = 4x_1 + x_2$$

$$(z - 4x_1 - x_2 = 0)$$

Sujeito a

$$x_1 + 1/5s_1 = 3/5$$

$$x_2 - 3/5s_1 = 6/5$$

$$s_1 + s_2 = 1$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE II*** – A tabela da Fase II representa uma *solução básica viável inicial*

Base	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*Solução*
z	-4	-1	0	0	0
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

- **Próximo passo**:
  - Como as variáveis básicas x1 e x2 têm coeficientes não zero na linha z, elas devem ser substituídas com o seguinte cálculo:

*Nova Linha z = Velha Linha z + (4 * Linha x_1 + 1 * Linha x_2)*

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE II*** – A *Nova Linha z* é

*Nova Linha z = Velha Linha z + (4 * Linha x_1 + 1 * Linha x_2)*

Nova Linha z = (-4 -1 0 0 0) +
*(4 * (1 0 1/5 0 3/5) + 1 * (0 1 -3/5 0 6/5))*

Nova Linha z = (-4 -1 0 0 0) +
((4 0 4/5 0 12/5) + (0 1 -3/5 0 6/5))

Nova Linha z = (-4 -1 0 0 0) + (4 1 1/5 0 18/5)

Nova Linha z = (0 0 1/5 0 18/5)

MÉTODO SIMPLEX – MÉTODO DAS DUAS FASES

- ***FASE II*** – A nova tabela inicial é

Base	*x1*	*x2*	*s1*	*s2*	*Solução*
z	0	0	1/5	0	18/5
x_1	1	0	1/5	0	3/5
x_2	0	1	-3/5	0	6/5
x_4	0	0	1	1	1

- **Próximo passo**:
  - Resolver normalmente pelo método Simplex
  - s_1 entra na solução básica e s_2 sai, sendo necessário apenas concluir essa iteração para encontrar a solução ótima.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

Método Simplex – Método das Duas Fases

- ***Exercícios***

  - Agora sim....
  - Resolva o problema da Casa das Rações pelo Método Simplex;
  - Desenvolva todos os cálculos necessários, passo a passo;
  - Compare a sua solução com a realizada no *software* TORA;
  - Encaminhe a solução para o *e-mail* do professor.

Método Simplex – Método das Duas Fases

- **Comentários finais:**

  - A remoção das variáveis artificiais e suas colunas no final da Fase I só pode ocorrer quando todas elas forem ***não básicas***.

  - Se uma ou mais variáveis artificiais forem ***básicas*** no final da Fase I, então é preciso executar as etapas a seguir para removê-las antes do início da Fase II.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

Método Simplex – Método das Duas Fases

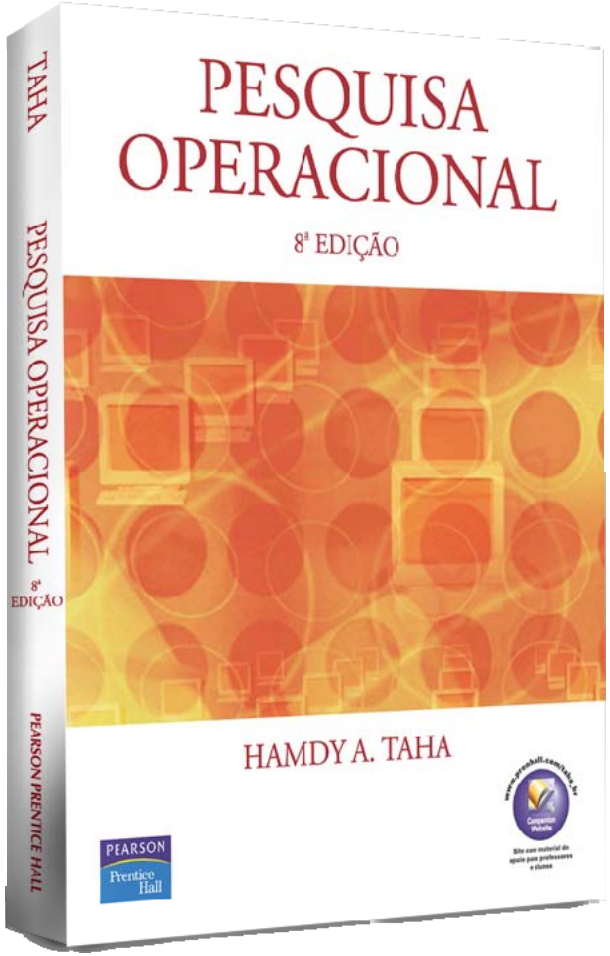
Comentários finais:

- **Etapa 1**
  - Selecione uma variável artificial com coeficiente igual a zero para sair da solução básica e designe sua linha como a *linha pivô*.
  - A variável que entra pode ser *qualquer* variável não básica (não artificial) que tenha um coeficiente *não zero* (positivo ou negativo) na linha pivô.
  - Execute a iteração simplex associada.

- **Etapa 2**
  - Remova da tabela a coluna da variável artificial (que acabou de sair).
  - Se todas as variáveis artificiais com coeficiente igual a zero tiverem sido removidas da solução básica, passe para a Fase II.
  - Caso contrário, volte para a Etapa I.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú