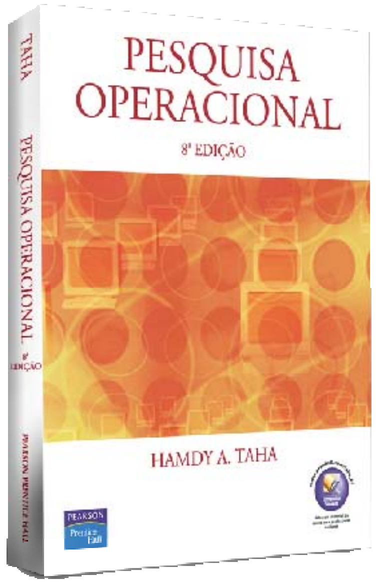
INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# PESQUISA OPERACIONAL - PROGRAMAÇÃO LINEAR

Prof. Angelo Augusto Frozza, M.Sc.

# ROTEIRO

- Esta aula tem por base o Capítulo 2 do livro de Taha (2008):
  - Introdução
  - O modelo de PL de duas variáveis
  - Propriedades do modelo de PL
  - Solução gráfica em PL
  - Facilitando a vida: *Excel* + *Solver*
  - Solução gráfica em PL - Minimização




INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE
Campus Camboriú

# INTRODUÇÃO

- O modelo de Programação Linear (PL), como qualquer modelo de PO, tem três componentes básicos:

1. **Variáveis**
   - de decisão que procuramos determinar;
2. **Objetivo**
   - (meta) que precisamos otimizar (maximizar ou minimizar);
3. **Restrições**
   - que a solução deve satisfazer.

## INTRODUÇÃO

- A definição adequada das variáveis de decisão é uma primeira etapa essencial no desenvolvimento do modelo.

- Uma vez concluída, a tarefa de construir a função objetivo e as restrições torna-se mais direta.

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - A Tintas e Tintas S.A. produz tintas para interiores e exteriores com base em duas matérias primas, *M1* e *M2*.
  - Uma pesquisa de mercado indica que a demanda diária de tintas para interiores não pode ultrapassar a de tintas para exteriores por mais de 1 tonelada.
  - Além disso, a demanda máxima diária de tinta para interiores é 2 t.

  - **A Tintas e Tintas S.A. quer determinar o mix ótimo (o melhor) de produtos de tintas para interiores e exteriores que maximize o lucro total diário.**

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - Precisamos determinar as quantidades diárias a produzir de tintas para exteriores e interiores.

  - Para tanto, precisamos definir:

    - Variáveis de decisão

    - (função) Objetivo

    - Restrições

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - A tabela abaixo apresenta os dados básicos do problema:

| | Toneladas de matéria prima por tonelada de | | Disponibilidade máxima diária (ton) |
|---|---|---|---|
| | Tinta para exteriores | Tinta para interiores | |
| Matéria prima M1 | 6 | 4 | 24 |
| Matéria Prima M2 | 1 | 2 | 6 |
| **Lucro por tonelada (R$ 1.000)** | **5** | **4** | |

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - As variáveis (de decisão) do modelo são:
    - $x_1$ = toneladas de tinta para exteriores produzidas diariamente
    - $x_2$ = toneladas de tinta para interiores produzidas diariamente

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - **Função objetivo:**
    - A empresa quer ***MAXIMIZAR*** (ou seja, aumentar o máximo possível) o lucro total diário para as tintas.

    - Considerando que o lucro por tonelada das tintas para exteriores e interiores é de 5 e 4 (mil) reais, respectivamente, temos:

      - Lucro total da tinta para exteriores = $5x_1$ (mil) reais
      - Lucro total da tinta para interiores = $4x_2$ (mil) reais

    - Sendo $z$ o Lucro total diário, temos:
      - **Maximizar** $z = 5x_1 + 4x_2$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - **Restrições:**
    - Devem limitar a **utilização da matéria prima** e a **demanda do produto**.

**Matéria prima:**

| [Utilização de uma matéria prima para ambas as tintas ] | $\leq$ | [Máxima disponibilidade de matéria prima] |
|---|---|---|

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - **Restrições:**
    - Sobre a utilização diária de matéria prima **M1** temos:
      - M1 = $6x_1$ t/ton tinta exteriores
      - M1 = $4x_2$ t/ton tinta interiores
      - **Utilização diária de M1 = $6x_1 + 4x_2$ t/dia**
    - De forma semelhante, para **M2** temos:
      - **Utilização diária de M2 = $1x_1 + 2x_2$ t/dia**

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - **Restrições:**
    - Como a disponibilidade diária das matérias primas M1 e M2 está limitada a 24t e 6t, respectivamente, temos:
      - **Para M1** $\Rightarrow 6x_1 + 4x_2 \leq 24$
      - **Para M2** $\Rightarrow x_1 + 2x_2 \leq 6$

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - **Restrições:**

    - Com relação à demanda, temos:

      - O excesso de produção diária de tinta para interiores em relação à de tintas para exteriores, $x_2 - x_1$, não deve ultrapassar 1t:

        **Limite de mercado** $\Rightarrow -x1 + x_2 \leq 1$

      - A demanda diária máxima de tinta para interiores está limitada a 2t:

        **Limite de demanda** $\Rightarrow x_2 \leq 2$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - **Restrições:**
    - Uma restrição implícita (ou subentendida) é que as variáveis $x_1$ e $x_2$ não podem assumir valores negativos (**restrições de não-negatividade**)

$$\mathbf{x_1 \geq 0}$$

$$\mathbf{x_2 \geq 0}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**
  - O modelo completo para o problema da Tintas e Tintas S.A. é:

**Maximizar $z = 5x_1 + 4x_2$**

Sujeito a:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2)$$
$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$
$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$
$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (5)$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - Qualquer valor de $x_1$ e $x_2$ que satisfaçam **TODAS** as cinco restrições constituem uma **solução viável** para o problema.
  - Caso contrário a solução é **inviável**.

  - Exemplo de solução viável:
    - $x_1$ = 3 t/dia
    - $x_2$ = 1 t/dia

  - Exemplo de solução inviável:
    - $x_1$ = 4 t/dia
    - $x_2$ = 1 t/dia

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Exercícios:
  - Resolva a lista de exercícios 01, Modelagem do Problema
    - Definição de Variáveis
    - Definição de Função objetivo
    - Definição de Restrições

# O MODELO DE PL DE DUAS VARIÁVEIS

- Caso: **Tintas e Tintas S.A.**

  - A meta do problema é achar a **melhor solução viável**, ou seja, a solução **ótima**.

  - Para isso, precisamos saber *quantas soluções viáveis* o problema possui.
    - Resposta: infinitas
    - Não é possível resolver o problema por enumeração

**Precisamos um *procedimento sistemático* que localizará a solução ótima em um número finito de etapas.**

- *Solução gráfica* ou *generalização algébrica*

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# PROPRIEDADES DO MODELO DE PL

- No exemplo da Tintas e Tintas S.A., o **objetivo** e as **restrições** são todos **funções lineares**.

- **Linearidade** implica que a PL deve satisfazer três propriedades básicas:

  - Proporcionalidade

  - Aditividade

  - Certeza

# PROPRIEDADES DO MODELO DE PL

- **Proporcionalidade:**
  - A contribuição de cada variável de decisão (p.ex. $x_1$ e $x_2$), tanto na função objetivo quanto nas restrições, seja *diretamente proporcional* ao valor da variável
    - Por exemplo, $5x_1$ e $4x_2$ definem o lucro para a produção de $x_1$ e $x_2$ toneladas de tinta para exteriores e interiores, respectivamente, sendo que os lucros unitários por tonelada (5 e 4) darão as constantes de proporcionalidade;
    - Por outro lado, se a empresa der algum desconto por quantidade quando as vendas ultrapassarem certas quantidades, o lucro não será mais proporcional às quantidades de produção, $x_1$ e $x_2$, e a função lucro se torna não linear;

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

# PROPRIEDADES DO MODELO DE PL

- **Aditividade:**
  - A contribuição total de todas as variáveis da função objetivo e das restrições é a soma direta das contribuições individuais de cada variável
    - No exemplo, o lucro total é igual à soma dos dois componentes individuais do lucro;
    - Por outro lado, se os dois produtos *competirem* por participação de mercado, de modo que um aumento nas vendas de um deles provoque um efeito adverso nas vendas do outro, então a propriedade de Aditividade não é satisfeita e o modelo deixa de ser linear;

# PROPRIEDADES DO MODELO DE PL

- **Certeza:**
  - Todos os coeficientes da função objetivo e das restrições do modelo de PL são determinísticos, o que significa que são constantes conhecidas
    - Isso raramente ocorre na vida real, sendo que o mais provável é que os dados sejam representados por distribuições de probabilidade;
    - Em essência, os coeficientes em PL são aproximações do valor médio das distribuições de probabilidade;
    - Se os desvios padrão dessas distribuições forem suficientemente pequenos, a aproximação será aceitável;
    - Grandes desvios padrão dessas distribuições podem ser levados em conta diretamente com a utilização de algoritmos estocásticos de PL ou indiretamente pela aplicação de análise de sensibilidade à solução ótima.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

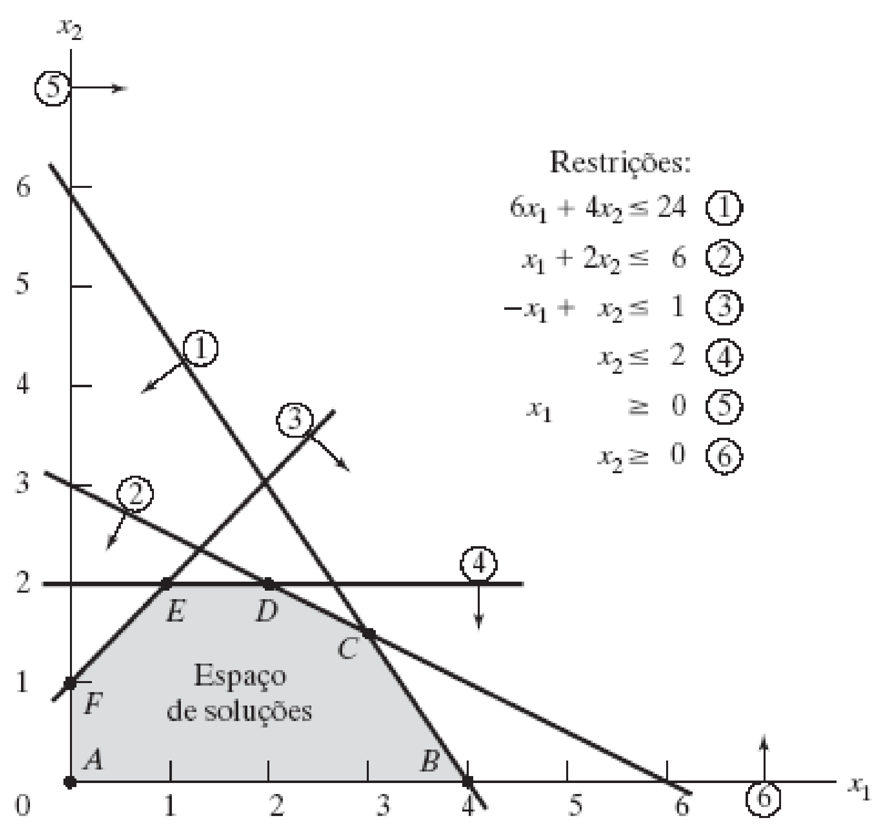
- O procedimento gráfico inclui duas etapas:
  - Determinar a **região de soluções viáveis**;
  - Determinar a **solução ótima** entre todos os pontos viáveis da região de soluções;

A seguir vamos resolver o modelo de **maximização** do problema da Tintas e Tintas S.A. usando a **solução gráfica**

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:

**Figura 2.1**
Região viável do modelo da Reddy Mikks





INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:

1. Considere as restrições de não negatividade $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$;

    - $x_1$ corresponde ao eixo horizontal

    - $x_2$ corresponde ao eixo vertical

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:

2. Nas demais restrições
   - substitua cada desigualdade por uma equação

| | | |
|---|---|---|
| $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ | | $6x_1 + 4x_2 = 24$ |
| $x_1 + 2x_2 \leq 6$ | $\Rightarrow$ | $x_1 + 2x_2 = 6$ |
| $-x_1 + x_2 \leq 1$ | | $-x_1 + x_2 = 1$ |
| $x_2 \leq 2$ | | $x_2 = 2$ |

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:

| | | |
|---|---|---|
| $6x_1 + 4x_2 \leq 24$ | $\Rightarrow$ | $6x_1 + 4x_2 = 24$ |

  - ...
  - represente no gráfico a linha resultante localizando dois pontos distintos nela
  - Para $x_1 = 0$ $\quad x_2 = \frac{24}{4} = 6$ $\quad$ tem-se o ponto (0,6)
  - Para $x_2 = 0$ $\quad x_1 = \frac{24}{6} = 4$ $\quad$ tem-se o ponto (0,4)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

## SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

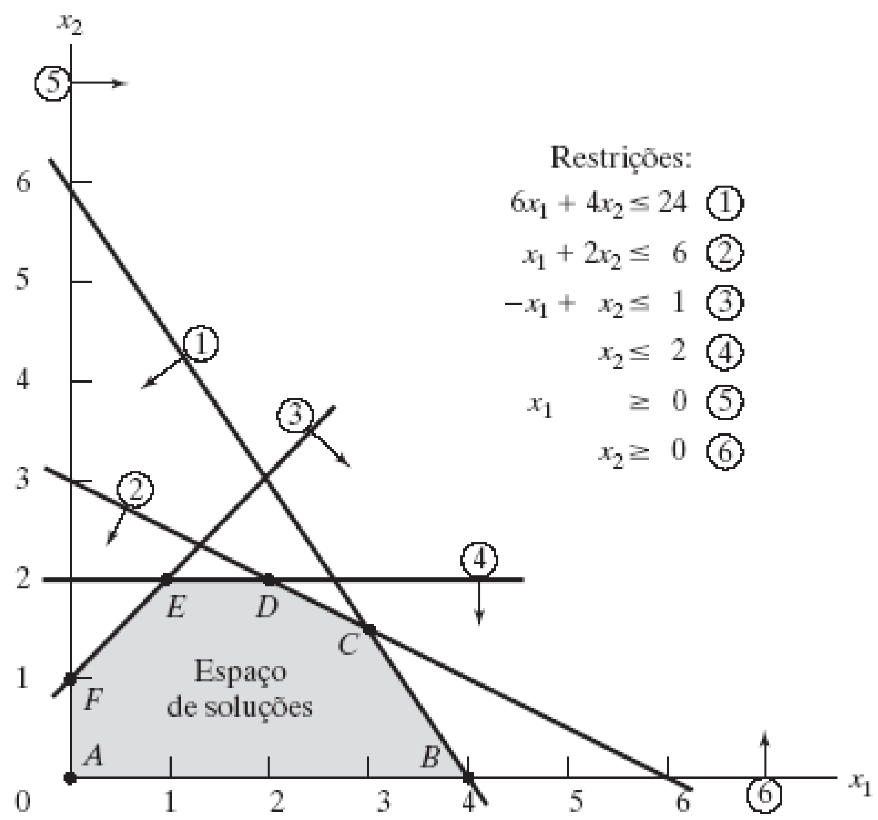
- Determinar a região de **soluções viáveis**:
  - ...
  - Considere o efeito da desigualdade
    - Tudo o que ela faz é dividir o plano ($x_1$, $x_2$) em dois meio-espaços, um de cada lado da reta representada no gráfico;
    - Só uma dessas duas metades satisfaz a desigualdade;
    - Para determinar o lado correto, tome (0,0) como um *ponto de referência*;
    - Se ele satisfazer a desigualdade, o lado no qual ele se encontra é a meia-região viável, caso contrário, o outro lado é o viável;

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24 \quad \Rightarrow \quad 6 \times 0 + 4 \times 0 = \mathbf{0 \leq 24}$$

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:

Figura 2.1
Região viável do modelo da Reddy Mikks



# Solução gráfica em PL

- Determinar a região de **soluções viáveis**:
  - Aplique o procedimento para as demais restrições do modelo...
  - A **região de soluções viáveis** do problema representa a área do primeiro quadrante na qual todas as restrições são satisfeitas simultaneamente;
  - Qualquer ponto que esteja dentro ou sobre o contorno da área *ABCDEF* é parte da região de soluções viáveis;
    - Todos os pontos fora dessa área são inviáveis;

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a **solução ótima**:
  - Agora que conhecemos a região viável, precisamos de um procedimento sistemático para identificar a solução ótima
  - Determinar a solução ótima requer identificar a direção na qual a função *Lucro* $z = 5x_1 + 4x_2$ aumenta (*maximizar z*)
  - Solução: designar valores crescentes arbitrários para *z*
    - Por exemplo: $z = 10$ e $z = 15$
    - Obtém-se as retas:
      - $5x_1 + 4x_2 = 10$
      - $5x_1 + 4x_2 = 15$

# Solução gráfica em PL

- Determinar a **solução ótima**:
  - As duas retas paralelas são representadas no gráfico
    - A direção do aumento de *z* indica onde está a solução ótima;
    - No caso do exemplo, é no ponto *C* (ver gráfico), que é o ponto na região de soluções além do qual qualquer aumento adicional levará *z* para fora dos contornos *ABCDEF*;
    - Os valores de $x_1$ e $x_2$ relacionados com o ponto ótimo *C* são determinados pela resolução das equações relacionadas com as retas (1) e (2)

$$6x_1 + 4x_2 = 24$$

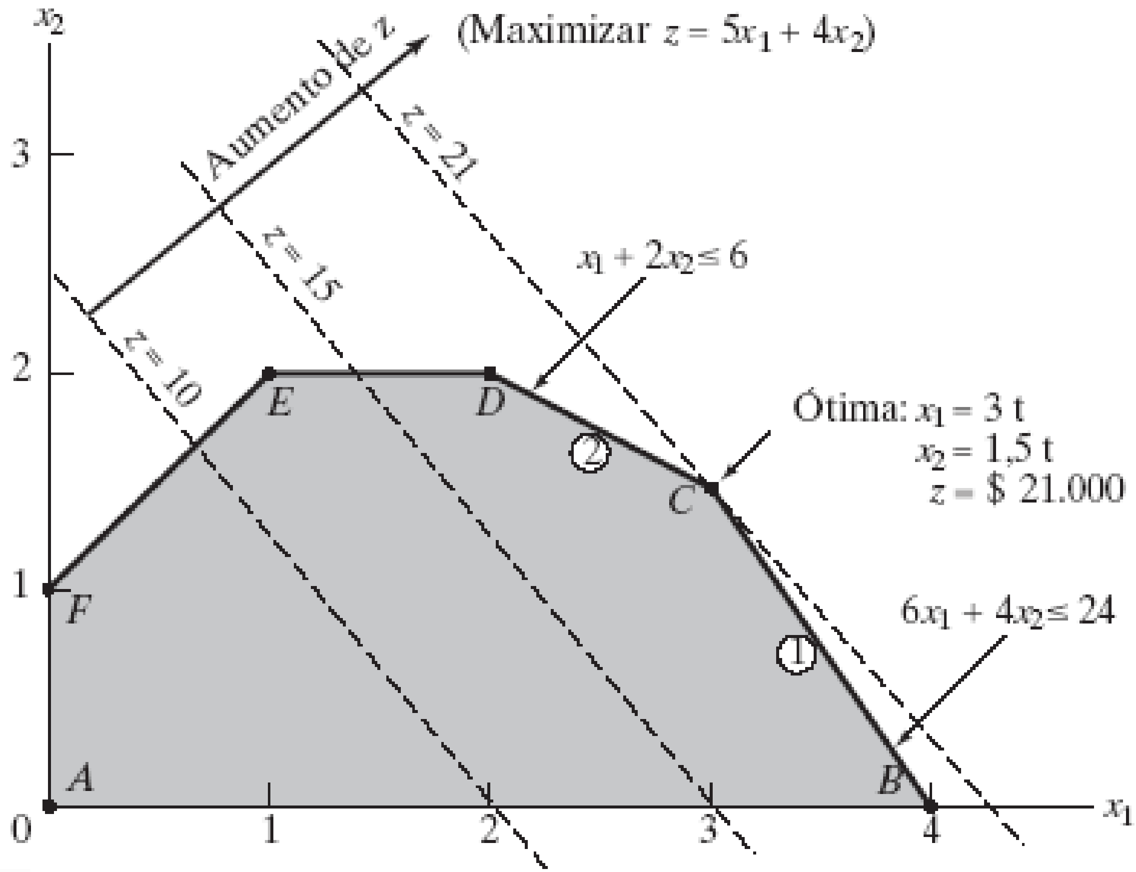
$$x_1 + 2x_2 = 6$$

      - $x_1 = 3$ (toneladas de tinta para exteriores)
      - $x_2 = 1{,}5$ (toneladas de tinta para interiores)
      - $z = 5 \times 3 + 5 \times 1{,}5 = 21$ (lucro diário maximizado)

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a **solução ótima**:

**Figura 2.2**
Solução ótima do modelo da Reddy Mikks




INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a **solução ótima**:

  - Uma característica importante da solução ótima de PL é que ela *sempre* está relacionada com um **ponto extremo** da região de soluções viáveis (em que duas retas se cruzam);
    - Isso é válido até se, por acaso, a função objetivo for paralela a uma restrição;

  - No nosso exemplo, se a função objetivo for $z = 6x_1 + 4x_2$, que é paralela à restrição 1, sempre podemos dizer que a solução ótima ocorre no ponto extremo *B* ou no ponto extremo *C*;
    - Na verdade, qualquer ponto sobre o segmento *BC* será uma *alternativa ótima*;

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- Determinar a **solução ótima**:

  - A observação de que a solução ótima em PL está sempre associada a um ponto extremo significa que a solução ótima pode ser encontrada pela simples enumeração de todos os pontos extremos

| **Ponto extremo** | $(x_1; x_2)$ | $z$ | |
|---|---|---|---|
| $A$ | (0; 0) | 0 | |
| $B$ | (4; 0) | 20 | |
| $C$ | **(3; 15)** | **21** | **(ÓTIMA)** |
| $D$ | (2; 2) | 18 | |
| $E$ | (1; 2) | 13 | |
| $F$ | (0; 1) | 4 | |

# SOLUÇÃO GRÁFICA EM PL

- **Concluindo...**

  - À medida que o número de restrições e variáveis aumenta, o número de pontos extremos também aumenta, e o procedimento de enumeração proposto torna-se menos viável em termos de cálculo.

  - Para esse tipo de problema, utiliza-se algoritmo algébrico denominado *método simplex*...

# FACILITANDO A VIDA: EXCEL + *SOLVER*

**Tintas e Tintas S.A.**

**Dados de entrada:**

| | x1 | x2 | Totais | | Limites |
|---|---|---|---|---|---|
| | Exterior | Interior | | | |
| Função objetivo | | | 0 | | |
| Matéria Prima M1 | | | 0 | <= | |
| Matéria Prima M2 | | | 0 | <= | |
| Limites de mercado | | | 0 | <= | |
| Limites de demanda | | | 0 | <= | |
| | >=0 | >=0 | | | |

**Resultado:**

| | x1 | x2 | z |
|---|---|---|---|
| Solução | 0 | 0 | 0 |

# EXERCÍCIOS

- Encontre manualmente a solução para os problemas apresentados na lista de exercícios 02 – Solução gráfica em PL (TAHA, 2008)

- Verifique a sua solução criando as respectivas planilhas no *Excel*

**Desafio:**

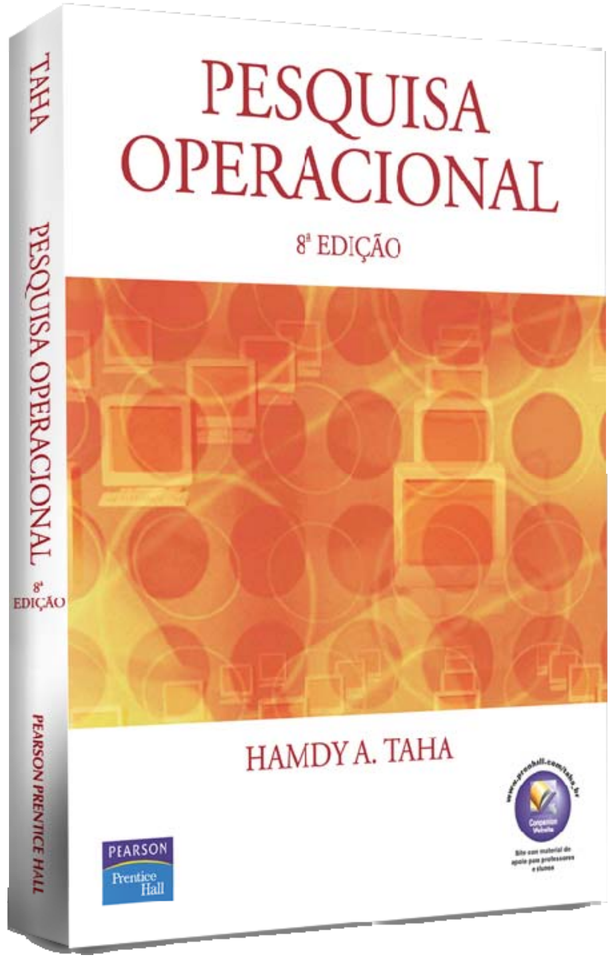
Experimente encontrar a solução para esses mesmos problemas usando o *software* LINDO® ou o *software* PROLIN

MARINS, F. A. S. **Introdução à Pesquisa Operacional**. São Paulo: Cultura Acadêmica/UNESP, 2011. (http://www.feg.unesp.br/~fmarins/ -> Material de Apoio)

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú