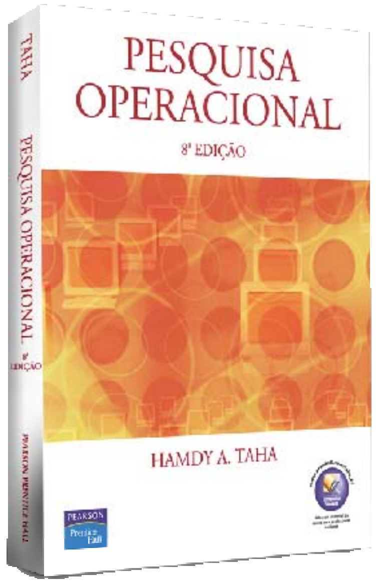
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

PESQUISA OPERACIONAL
- PROGRAMAÇÃO LINEAR
MÉTODO SIMPLEX

Prof. Angelo Augusto Frozza, M.Sc.

ROTEIRO

- Esta aula tem por base o Capítulo 3 do livro de Taha (2008):
  - Motivação
  - Conceitos Matemáticos Iniciais
  - Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica
  - Determinação algébrica dos Pontos Extremos
  - Método Simplex
  - Detalhes do cálculo do Algoritmo Simplex

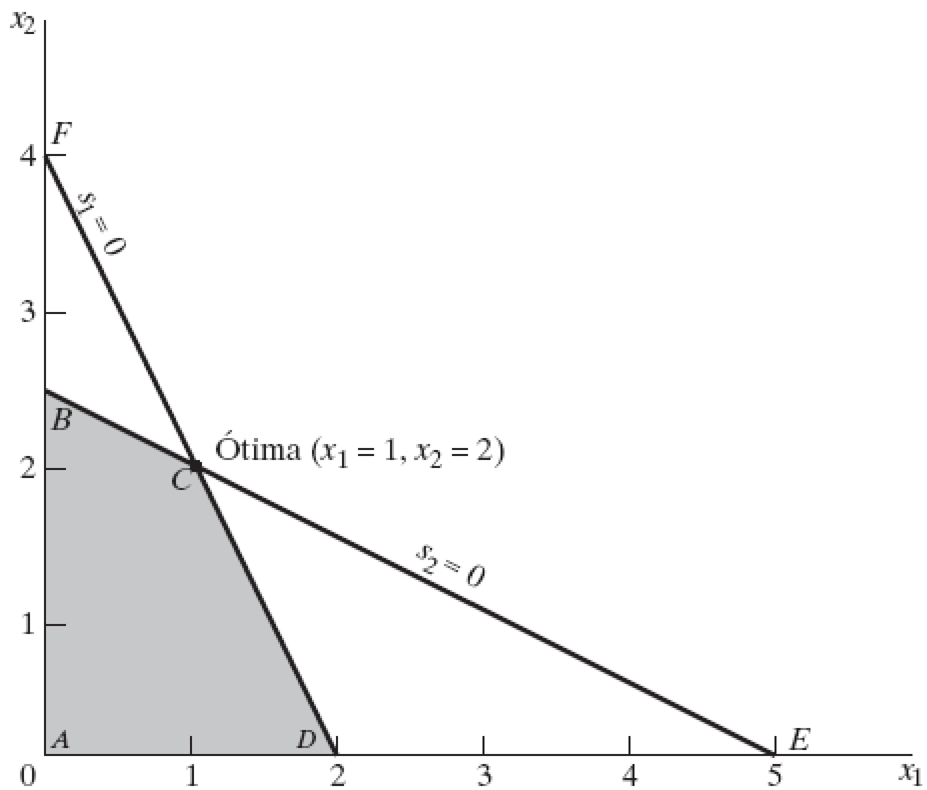


INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MOTIVAÇÃO

- A resolução de um problema de Programação Linear pelo Método Gráfico só é válida para os casos em que se tem 2, no máximo, 3 variáveis.

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1

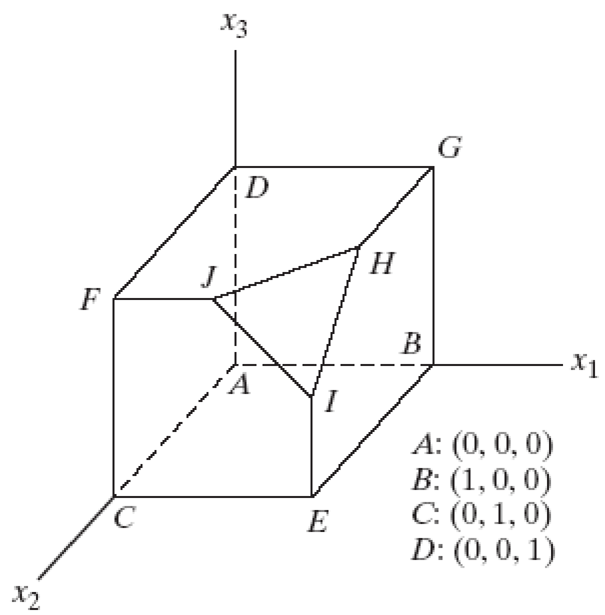


INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

MOTIVAÇÃO

- A resolução de um problema de Programação Linear pelo Método Gráfico só é válida para os casos em que se tem 2, no máximo, 3 variáveis.

Figura 3.4
Região de soluções do Problema 3, Conjunto 3.2B



Motivação

- A solução, então, é usar um Método Algébrico, por exemplo, o **Método Simplex**.

- O desenvolvimento dos cálculos do Método Simplex é facilitado pela imposição de dois requisitos às restrições do problema:

  - Todas as restrições (com exceção da não negatividade das variáveis) são equações cujos lados direitos são não negativos;

  - Todas as variáveis são não negativas.

- Esses requisitos padronizam e tornam mais eficientes os cálculos do Método Simplex.

CONCEITOS MATEMÁTICOS INICIAIS

- **Conversão de desigualdades em equações com o lado direito não negativo**

  - **Em restrições MENOR OU IGUAL (≤)**

LADO ESQUERDO	≤	LADO DIREITO
$6x_1 + 4x_2$	$\leq$	24
Representa a utilização desse recurso limitado pelas atividades (variáveis) do modelo.		Representa o limite imposto à disponibilidade de um recurso.

  - A **diferença** entre o **lado direito** e o **lado esquerdo** da restrição (≤) resulta na quantidade de recurso ***não utilizada*** ou ***folga***.

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

CONCEITOS MATEMÁTICOS INICIAIS

- **Conversão de desigualdades em equações com o lado direito não negativo**

  - **Em restrições MENOR OU IGUAL (≤)**

    - Para converter uma desigualdade (≤) em uma equação, uma ***variável de folga*** é adicionada ao lado esquerdo da restrição

    - Por exemplo:

$$6x_1 + 4x_2 \leq 24$$

Define-se $\boldsymbol{s_1}$ como variável de folga

$$6x_1 + 4x_2 + s_1 = 24, \; s_1 \geq 0$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

CONCEITOS MATEMÁTICOS INICIAIS

- **Conversão de desigualdades em equações com o lado direito não negativo**

  - **Em restrições MAIOR OU IGUAL (≥)**

    - Uma restrição (≥) estabelece um limite inferior para as atividades do modelo de PL.
    - A quantidade pela qual o lado esquerdo excede esse limite mínimo representa uma ***sobra***, que é representada por uma ***variável de sobra***.
    - A conversão para igualdade (=) é feita subtraindo-se a *variável de sobra* no lado esquerdo da desigualdade.

    - Por exemplo:

$$x_1 + x_2 \geq 800$$

Define-se $\boldsymbol{S_1}$ como variável de sobra

$$x_1 + x_2 - S_1 = 800,\ S_1 \geq 0$$

CONCEITOS MATEMÁTICOS INICIAIS

- **Conversão de desigualdades em equações com o lado direito não negativo**
  - O único requisito restante é que o lado direito da equação resultante seja não negativo.
  - Por exemplo:

$$-x_1 + x_2 \leq -3$$

Define-se $\boldsymbol{s_1}$ como variável de folga

$$-x_1 + x_2 + s_1 = -3,\ s_1 \geq 0$$

Multiplica-se a equação por -1

$$x_1 - x_2 - s_1 = 3$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

CONCEITOS MATEMÁTICOS INICIAIS

- **Exercícios:**

  - No modelo da Tintas & Tintas, considere a solução viável $x_1 = 3$ e $x_2 = 1$ t. Determine o valor das folgas associadas para as matérias primas *M1* e *M2*.

  - No modelo da Casa das Rações, determine a quantidade excedente (sobra) de ração obtida na mistura de 500kg de milho e 600Kg de soja.

  - Considere a seguinte desigualdade:

    $$10x_1 - 3x_2 \geq -5$$

    Mostre que multiplicar ambos os lados da desigualdade por -1 e então converter a desigualdade resultante em uma equação é o mesmo que primeiro convertê-la em uma equação e depois multiplicar ambos os lados por -1.

Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

Figura 3.1
Transição de solução gráfica para solução algébrica

Método gráfico	Método algébrico
Represente todas as restrições em gráfico, entre elas as restrições de não-negatividade	Represente a região de soluções por m equações em n variáveis e restrinja todas as variáveis a valores não negativos, $m < n$
Região de soluções consiste em um número infinito de pontos viáveis	O sistema tem um número infinito de soluções viáveis
↓	↓
Identifique os pontos extremos viáveis da região de soluções	Determine as soluções básicas viáveis das equações
Candidatos à solução ótima são dados por um número finito de pontos extremos	Candidatas à solução ótima são dadas por um número finito de soluções básicas viáveis
↓	↓
Use a função objetivo para determinar o ponto extremo ótimo entre todos os candidatos	Use a função objetivo para determinar a solução básica viável ótima entre todas as candidatas

Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

- No Método Gráfico, a região de soluções viáveis é delineada pelos meios-espaços, que representam as restrições.

- No Método Simplex, a região de soluções viáveis é representada por ***m*** *equações lineares* simultâneas e ***n*** *variáveis não negativas*.

Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

- **Lembre-se:**

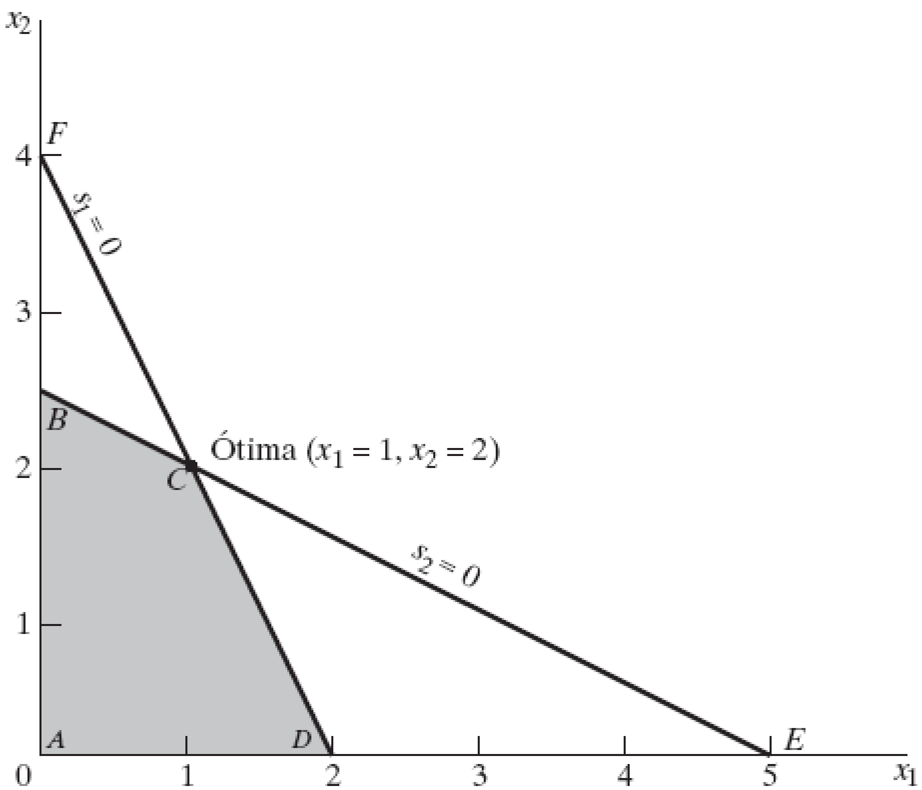
$$\boldsymbol{m} = \textit{equações lineares}$$

$$\boldsymbol{n} = \textit{variáveis não negativas}$$

Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

- Pode-se verificar visualmente pelo gráfico por que a região de soluções viáveis tem um número infinito de pontos de solução.

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

- Mas como tirar a mesma conclusão da representação algébrica da região de soluções?

- **Resposta:**

  - Na representação algébrica, o número de equações ***m*** é sempre ***menor do que*** ou ***igual ao*** número de variáveis ***n***.

  - Caso ***m*** *for maior do que* ***n***, então no mínimo ***m – n*** equações devem ser redundantes.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

Transição da Solução Gráfica para a Solução Algébrica

- Se $m = n$, e as equações forem consistentes, o sistema tem somente uma solução.

  - P.ex.: dada a equação $x = 2$

    $m = n = 1$

- Se $m < n$ (maioria dos problemas em PL), e as equações forem consistentes, então tem-se um número infinito de soluções.

  - P.ex.: dada a equação $x + y = 1$

    $m = 1$

    $n = 2$

    => número infinito de soluções

    (qualquer ponto sobre a reta $x + y = 1$ é uma solução)

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- Em um conjunto de *m x n* equações (*m* < *n*)
  - Se igualarmos *n* – *m* variáveis a zero,
  - E depois resolvermos as *m* equações para as *m* variáveis restantes,
  - A solução resultante, se for única, é denominada **solução básica** e deve corresponder a um ponto extremo (viável ou inviável) da região de soluções.
    - O número máximo de pontos extremos é:

$$C_m^n = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

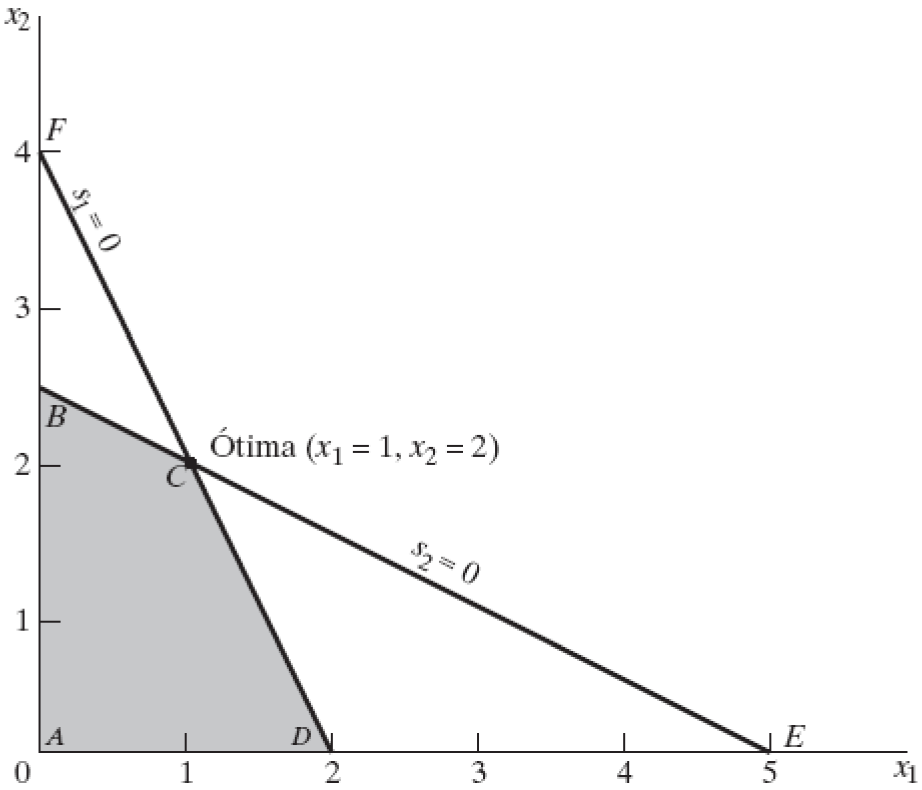
- **Exemplo:**

$$Max\ z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a

$$2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

Exemplo:

- Em linguagem algébrica, a região de soluções do problema de PL é representado como:

$$2x_1 + x_2 + s_1 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 + s_2 = 5$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

- Esse sistema tem:
  - $m = 2$ equações
  - $n = 4$ variáveis

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA CATARINENSE Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

Exemplo:

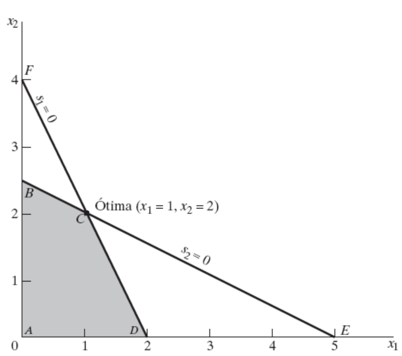
- Os pontos extremos são determinados algebricamente igualando ***n* – *m* = 4 – 2 = 2** variáveis a zero e depois resolvendo as ***m* = 2** variáveis restantes.

- Fazendo $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$, as equações dão a solução (básica) única:

$$s_1 = 4,\ s_2 = 5$$

- Esta solução corresponde ao ponto *A* na figura...

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

Exemplo:

- Outro ponto pode ser determinado fazendo

$$s_1 = 0 \text{ e } s_2 = 0$$

- E resolvendo as duas equações *(sai s_1 e s_2)*

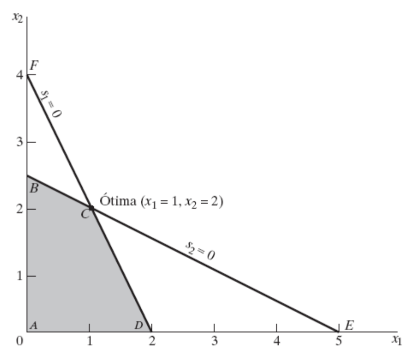
$$2x_1 + x_2 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 = 5$$

- A solução básica é:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2$$

- Que corresponde ao ponto *C* na figura...

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



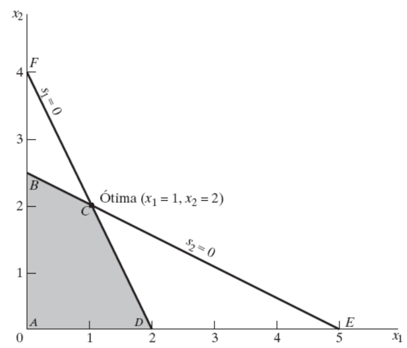
DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- **Exemplo:**

  - Você deve estar perguntando como decidir quais (***n* – *m***) variáveis devem ser igualadas a zero para chegar a um ponto extremo específico?

  - Resposta:
    - Sem o auxílio da solução gráfica (aplicável apenas a 2 ou 3 variáveis), não há como definir quais ***n* – *m*** variáveis zero estão associadas com quais pontos extremos.

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

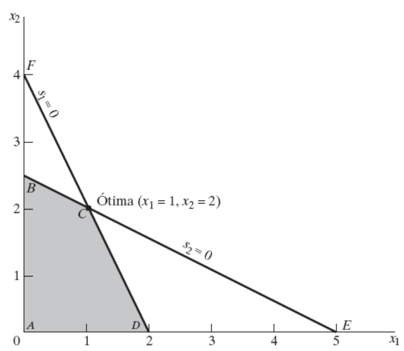
Exemplo:

- Mas isso não nos impede de enumerar ***TODOS** os pontos extremos* da região de soluções.

- Basta considerar ***TODAS** as combinações* nas quais ***n – m*** variáveis sejam igualadas a zero e resolver as equações resultantes.

- Feito isso, a solução ótima é a solução básica viável (ponto extremo) que resultar no melhor valor para a função objetivo.

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



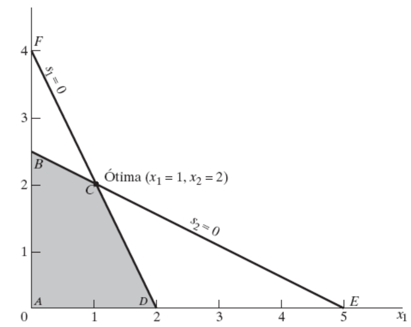
DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- **Exemplo:**

Tabela 3.1 Soluções básicas e não básicas

Variáveis (zero) não básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Ponto extremo associado	Viável?	Valor da função objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4; 5)	A	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4; –3)	F	Não	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2,5;	B	Sim	7,5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	1,5)	D	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(2; 3)	E	Não	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	(5; –6)	C	**Sim**	**8**
		(1; 2)			**(ótimo)**

Exemplo 3.2-1



DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

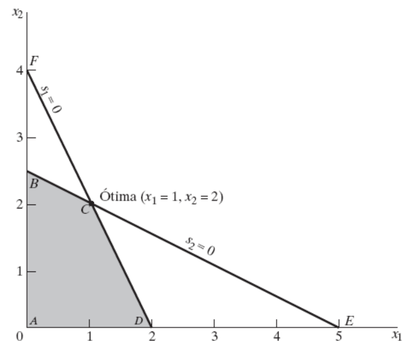
- **Exemplo:**

  - No exemplo temos os seguintes pontos extremos (soluções básicas)

$$C_2^4 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

  - Que correspondem a quatro pontos extremos viáveis: *A*, *B*, *C* e *D*
  - E dois pontos na região não viável: *E* e *F*

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CATARINENSE
Campus Camboriú

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

Exemplo:

- Lembre-se:

As $n - m$ variáveis zero são **variáveis não básicas**

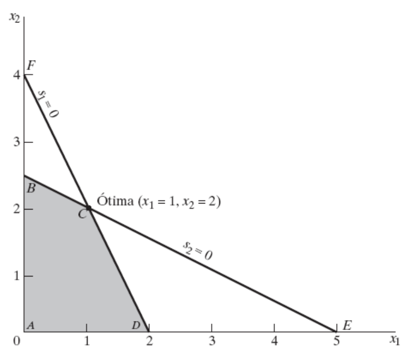
As demais variáveis são **variáveis básicas**

A solução para cada conjunto de $n - m$ é uma **solução básica**

Tabela 3.1 Soluções básicas e não básicas

Variáveis (zero) não básicas	Variáveis básicas	Solução básica	Ponto extremo associado	Viável?	Valor da função objetivo, z
(x_1, x_2)	(s_1, s_2)	(4; 5)	A	Sim	0
(x_1, s_1)	(x_2, s_2)	(4; –3)	F	Não	—
(x_1, s_2)	(x_2, s_1)	(2,5; 1,5)	B	Sim	7,5
(x_2, s_1)	(x_1, s_2)	(2; 3)	D	Sim	4
(x_2, s_2)	(x_1, s_1)	(5; –6)	E	Não	—
(s_1, s_2)	(x_1, x_2)	**(1; 2)**	C	**Sim**	**8 (ótimo)**

Figura 3.2
Região de soluções do problema de PL do Exemplo 3.2-1



DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- **Considerações finais:**
  - À medida que o tamanho do problema aumenta (isto é, *m* e *n* ficam maiores), enumerar todas as soluções básicas envolve cálculos impraticáveis.
    - Por exemplo: para $m = 10$ e $n = 20$ é necessário resolver 184.756 conjuntos de 10 x 10 equações.
    - Este é um tipo de problema comum na vida real.
  - O Método Simplex ameniza drasticamente essa tarefa árdua de cálculo investigando apenas uma fração de todas as possíveis soluções básicas viáveis (pontos extremos) da região de soluções.
  - Em essência, o Método Simplex utiliza uma busca inteligente que localiza o ponto extremo ótimo de maneira eficiente.

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- **Exercício:**
  - Considere o seguinte problema de PL:

$$Maximizar\ z = 2x_1 + 3x_2$$

Sujeito a

$$x_1 + 3x_2 \leq 6$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

DETERMINAÇÃO ALGÉBRICA DOS PONTOS EXTREMOS

- **Exercício:**

  a) Expresse o problema em forma de equação.

  b) Determine todas as soluções básicas do problema e classifique-as como viáveis e não viáveis.

  c) Use substituição direta na função objetivo para determinar a solução básica viável ótima.

  d) Verifique graficamente que a solução obtida em (c) é a solução ótima do problema de PL – então, conclua que a solução ótima pode ser determinada algebricamente considerando somente soluções básicas viáveis

  e) Mostre como as soluções básicas *não viáveis* são representadas graficamente na região de soluções básicas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- TAHA, H. A. **Pesquisa Operacional**. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.