

Behandling av experimentella resultat

En introduktion för fysikstudenter om hur man ska hantera mätresultat och feluppskattningar

Andréas Sundström*

2016-08-09, v 2.2.1[†]

Förord

Det här kompendiet är skrivet som en introduktion i experimentella mätningar, med fokus på feluppskattningar, för det svenska IPhO-laget. Men tanken är också att det här kompendiet ska vara mer allmät än IPhO och kunna vara en första introduktion för någon som ämnar studera vidare inom fysik/naturvetenskap eller teknik.

Jag har försökt fatta mig kort, men jag har en tendens att kunna dra iväg när jag skriver. Jag har också försökt lägga innehållet på en nivå för att kunna förstås av en gymnasieelev, men det är inte alltid det går så bra... Ni är de första som läser det här kompendiet. Tycker du att det här var för svårförståeligt så har **jag** skrivit för komplicerat, och du är inte ensam om att tycka att kompediet var svårt. *Så säg till om det var krångligt!*

Huvuddelen av kompendiet börjar med ett par punkter om vett och etikett för experimentella problem. Sedan kommer huvudinnehållet, med felanalys och regression, i avsnitt 2–4. Men jag tyckte att det även kunde vara intressant med en liten teoretisk bakgrund till varför man gör felanalysen som man gör den. Bakgrunden finns i bilaga A, men man behöver inte läsa det för att hänga med i resten av kompendiet. Avslutningsvis räknas ett par exempel, med lite feluppskattning och regresion/linjärisering, i avsnitt 5

Utöver en bakgrund i statistik har jag även lagt till en bilaga om Taylorutvecklingar, bilaga B. Den hör inte så mycket ihop med resten av det här kompendiet, men det är matnyttigt att kunna göra uppskattningar både för teoretiska och experimentella beräkningar.

Andréas Sundström
Göteborg, 2016-06-18

*sundstrom.andreas@gmail.com Jag tar gärna emot synpunkter och förslag.

[†]Den senaste versionen finns att hämta här: <https://github.com/andsunds/Fysikpris/blob/master/experimentguide/experimentguide.pdf>.

Innehåll

1	Innan man börjar felanalysen	1
2	Olika typer av mätfel	1
2.1	Systematiska fel – noggrannhet och precision	2
2.1.1	Mätupplösning	3
2.2	Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem	3
3	Felpropagering	5
3.1	Insättningsmetoden – en inte så bra metod	5
3.2	Linjärisering – ett bättre sätt att göra det på	5
3.2.1	Potenssamband	7
4	Regression	8
4.1	Olika sorts linjärisering	8
4.2	Felgränser	9
5	Exempelproblem	9
5.1	Mätning av g med pendel	9
5.2	Mätning av g med vattenparabel	11
5.3	Diod och serieresistor	12
6	Sammanfattning	14

Bilagor

A	Sannolihetslära och statistik	A1
A.1	Stokastiska variabler	A1
A.2	Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner	A1
A.2.1	Normalfördelningen	A3
A.3	Väntevärden, varianser och standardavvikelser	A3
A.3.1	Några nyttiga satser	A4
A.3.2	Skattning från mätdata	A5
B	Taylorutvecklingar	A6

1 Innan man börjar felanalysen

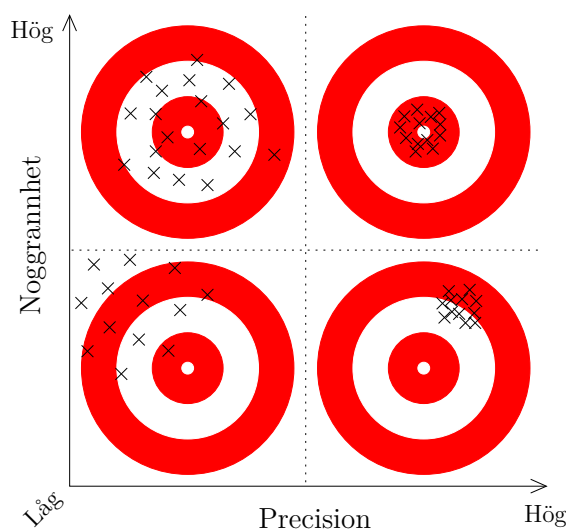
Det finns ett par saker som är bra att tänka på innan, under och efter man börjar göra sina mätningar.

- *Vad behöver jag mäta?* Det är alltid bra att tänka igenom vilka samband som gäller och vilka parametar som behöver mätas. Allt detta för att slippa göra om en mätning i onödan eller behöva göra en ny mätning.
- *Vad förväntar jag mig att få som resultat?* Det är inte alltid det går att uppskatta vad man borde få för resultat, men i de fall där man faktiskt kan göra det är det bra om man kan lägga några minuter på att uppskatta vad man borde få för resultat.
- *Var behöver jag mäta?* När man håller på och tar upp en mätserie är det dumt att hålla på och ta upp punkter som ligger onödigt tätt. Det är oftast bättre att börja med att gå igenom mätintervallet med ganska stora steg och notera var de intressanta ställena ligger; sen kan du gå tillbaks dit och ta några fler mätpunkter där. (I IPhO brukar de vilja att man tar minst 10 mätpunkter i en serie.)
- *Blev någon mätning dålig?* Det är okej att slänga bort enstaka mätvärden som är väldigt utstickande. Titta över era mätningar och se om någon mätpunkt verkar ligga långt ifrån det förväntade innan ni börjar med den övriga dataanalysen. (I mätningar i en mätserie kan man behöva plotta ut sina mätpunkter innan man kan hitta någon avvikelse.)
- *Verkar slutresultatet rimligt?* Utöver enskilda mätvärden bör man också titta på det slutgiltiga resultatet och se om det verkar stämma. (Om svaret verkar helt tokigt, säg det! Ibland kanske det går att få till förmildrande omständigheter om man påpekar att det verkar fel.)
- *Hur ska resultatet presenteras?* Kolla över uppgiftspapprena för att se hur svaret till varje deluppgit ska presenteras.
 - OBS: Glöm inte **enheter!** (Det gäller allt: tabellhuvuden, axler till grafer, uträkningar på pappret och så klart i svaret.)
 - Tänk på hur många värdesiffror det är rimligt att ta med. (Det kan ge poängavdrag i IPhO att ta med för många, eller för få, värdesiffror.)

2 Olika typer av mätfel

När man vill uppskatta hur stora experimentella fel/osäkerheter man har finns det två typer av fel och två typer av feluppskattningar. De två typerna av fel som finns är systematiska och statistiska. Sedan är de två typerna av feluppskattningar som man behöver kunna. Dels direkt feluppskattning (av statistiska fel), dels propagering av osäkerhet.

I det här avsnittet presenteras de två typerna av fel och direkt feluppskattning. Efter detta kommer nästa avsnitt att handla om felpropagering.



Figur 1: Illustration av skillnaden mellan noggrannhet och precision. Måltavlorna representerar en mätning, där mitten på måltavlan svarar mot det "sanna" värdet. Fallen med låg noggrannhet svarar mot systematiska fel som inte går att avhjälpa med medelvärden av fler mätningar.

2.1 Systematiska fel – noggrannhet och precision

Ett systematiskt fel är något som gör att ens mätresultat hela tiden är lite fel åt något håll¹. Dessa karakteriseras av att det inte hjälper med flera mätningar för att få bättre mätresultat.

Man brukar skilja på två olika typer av godhet i mätningar. Det finns dels noggrannhet, dels precision. Noggrannhet, eller rikighet som det ibland kallas, svarar mot hur nära det "sanna"² värdet mätningarna kommer i medel. Precisionen svarar å andra sida mot hur tätt mätresultaten hamnar, eller hur liten spridning man får i dem. De två koncepten illustreras i Figur 1.

Som kan ses i Figur 1 svarar låg noggrannhet mot ett systematiskt fel som gör att medelvärdet avviker från det "sanna" värdet. Vidare kan man med statistisk analys bara ta reda på spridningen i resultaten – alltså hur bra precision man har. Tillsammans ger detta en ganska prekär situation att hantera i felanalys: *Man vill veta hur **noggranna** ens mätningar är, men man kan bara ta reda på hur **precisa** de är.*

Sättet man löser detta på är att låtsas som att det regnar och strunta i eventuella systematiska fel när man redovisar sin felanalys. Detta förutsätter såklart att man verkligen har försökt eliminera alla systematiska fel; de som är kvar är dock de som man inte kände till, vilket betder att det i princip är omöjligt att kunna uppskatta storleken

¹Det behöver inte nödvändigtvis vara så att det är just fel åt samma håll hela tiden, men oftast är ett systematiskt fel något som ger en förskjutning av ens mätresultat.

²Jag sätter "sanna" inom citationstecken för att ur ett experimentalistiskt perspektiv finns det inget sätt att veta det verkligt sanna värdet – man kan bara se var man träffade men inte måltavlan. Detta gör att det inte går att säga att man har fått det sanna värdet.

på dem. I praktiken redovisar man oftast bara spridningen i mätresultaten och säger att märosäkerheten är samma som spridningen – man antar alltså att det inte längre finns några systematiska fel.

2.1.1 Mätupplösning

En sorts systematiska³ osäkerheter som man ofta kommer att stöta på härör från mätinstrumentets upplösning. Ett exempel på detta är en linjal; oavsett hur många gånger man försöker mäta bredden på ett hårstrå kommer man bara att få 0 mm som resultat.

Sättet att hantera detta på är att erkänna att man har ett systematiskt fel som kommer från upplösningen, och ta med det i beräkningarna. Detta gör man genom att själv uppskatta vad avrundningsfelet kan vara i mätningen. Generellt gäller att

- analoga instrument har ett avrundningsfel som är halva avståndet mellan markörer. Alltså att en linjal som är mm-graderad får en mätosäkerhet på $\pm 0,5$ mm (även om man tycker att mätningar ser ut att vara närmare skalstecket än så).
- digitala instrument är ganska opålitliga i hur noggranna de är. Detta betyder att osäkerheten *inte* behöver vara i sista siffran, utan man måste kolla manualen för att veta hur bra de är. *I IPhO gäller dock att man får anta att osäkerhetsgränsen ligger på "plus-minus ett" i den sista siffran.*
- tidtagning med tidtagarur har en osäkerhet på *minst* $\pm 0,1$ s (även om tidtagaruret går ner till hundradels sekunder). Detta är helt enkelt för att den mänskliga reaktionstiden inte är snabbare än så. Dock är tidtagning något som typiskt lämpar sig väl för upprepade mätningar.

Dessa tumregler kan användas i fall där man bedömer att upprepade mätningar inte kommer att kunna ge förändrade mätresultat. Några (men inte alla) typfall där detta gäller är längdmätning (av något objekt) med linjal eller skjutmått, och spännings- eller strömmätning/mätning med multimeter. I andra fall är det alltid rekommenderat att göra upprepade mätningar (gärna upp till 10 stycken men minst 3).

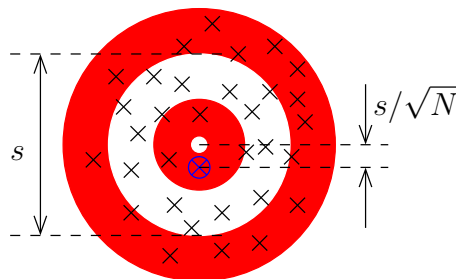
2.2 Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem

För att ta reda på precisionen i mätresultaten behövs statistik. Om ens noggrannhet är hög (övre halvan i Figur 1) behöver man ändå veta hur god precision man har. Gör man bara en mätning har man ingen möjlighet att veta hur nära det "sanna" resultatet man kom. Det är där man måste börja använda lite statistik.

Säg att det finns en storhet x som ska mätas, men att varje mätning har ett mätfel δx . Det som mäts blir då

$$\tilde{x}_i = x + \delta x_i. \quad (1)$$

³Jag har valt att klassa dem som systematiska av anledningen att det oftast inte hjälper att ta ett medelvärde av flera mätningar.



Figur 2: Jämförelse mellan spridningen bland alla mätpunkterna och i medelvärdet. Med hög noggrannhet bör medelvärdet hamna nära mitten, men det bör också hamna närmare mitten än vad varje enskild mätpunkt förväntas göra.

Utan någon mer information om δx går det inte att säga så mycket mer från mätningen. Men som sagts tidigare antas mätfelet δx vara normalfördelat med $\mu = 0$ fast med ett okänt σ . Det är oftast σ som man tar reda på för att sen få en osäkerhetsuppskattning av ens mätning.

För att få fram ett värde på x tar man ett medelvärde av flera mätningar. Detta ger

$$\bar{x} = \frac{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \cdots + \tilde{x}_N}{N} = \frac{Nx + \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_N}{N} = x + \overline{\delta x}. \quad (2)$$

Vi utnyttjar nu att medelvärdet $\overline{\delta x} \approx \mu = 0$, vilket ger att $\bar{x} \approx x$. Här syns att antagandet $\mu = 0$ betyder att det inte finns något systematiskt fel.

För att sedan ta reda på precisionen i mätningarna behövs standardavvikelsen av δx . Denna fås enkelt som standardfelet från (34) i bilaga A.3.1. Men eftersom det beräknade värdet \bar{x} är ett medelvärde betyder det att osäkerheten är mindre i \bar{x} än i varje enskild \tilde{x}_i . Standardfelet från (34) ger däremot en mått på hur spridda värden man har fått. Som nämnts tidigare får man standardavvikelsen i *medelvärdet* genom att dela med \sqrt{N} . Mätosäkerheten⁴ Δx blir då

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3)$$

Detta är en av de vanligaste beräkningarna man kommer att behöva göra i felanalys. De räknare som används på IPhO kan därför ställas in för att göra precis den här beräkningen, men bara nästan: man får s , sen måste man själv dela med \sqrt{N} . Samtidigt känns det lite som fusk att man bara kan "slänga in ett extra \sqrt{N} och så blev osäkerheten plötsligt mindre".⁵ Men matten i bilaga A (särskilt A.3.1) visar att man ska göra det.

⁴Notera skillnaden mellan δx och Δx . Den första är felet i varje enskild mätning, medan den andra är den totala osäkerheten i slutresultatet av en längre mätserie.

⁵Det här var en av de svåraste sakerna att acceptera med felanalys när jag började med sånt. Men allt följer från (31).

Det går också att visualisera varför medelvärdet bör ha en mindre standardavvikelse. I Figur 2 syns ett sätt att se på varför man ska använda s/\sqrt{N} för att skatta osäkerheten i medelvärdet. Medelvärdet bör helt enkelt ligga närmare det ”sanna” värdet än vad man förväntar sig av en enskild märpunkt. Alltså att s ger hur spridda *alla* mätpunkterna är. Medan medelvärdet bör ha lägre sannolikhet att vara spritt, och det visar sig att den spridningen är just s/\sqrt{N} .

3 Felpropagering

Oftast kan man inte mäta den eftersökta storheten direkt. Man brukar istället mäta ett antal andra storheter och utnyttja något teoretiskt samband för att få värdet på den eftersökta storheten. Då kan man utnyttja feluppskattningarna ovan för att ta reda på felet i varje uppmätt värde. Men hur får man reda på osäkerheten i slutresultatet? Det är här som man måste använda felpropagering.

3.1 Insättningsmetoden – en inte så bra metod

Man skulle kunna göra en insättning av största eller minsta möjliga värde på de uppmätta storheterna i sambandet för att få ett största eller minsta värde på slutresultatet. På så sätt kan man beräkna mellan vilka värden slutresultatet skulle kunna variera, vilket ger en uppskattning av osäkerheten i det.

Exempel 1: Tänk er att ni vill mäta arean av en rektangel och att ni har fått dess sidlängder som $a = 5 \pm 1$ cm och $b = 8 \pm 2$ cm. Då blir arean $\bar{A} = 40$ cm². Men maximalt skulle den kunna vara $A_{\max} = 6$ cm \times 10 cm = 60 cm² och minimalt $A_{\min} = 4$ cm \times 6 cm = 24 cm², vilket skulle ge en osäkerhet på $\hat{\Delta}A = \frac{1}{2}(60 - 24)$ cm² = 18 cm². Detta är en ganska stor osäkerhet i förhållande till arean.

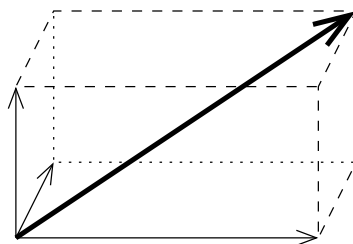
Som exemplet visar så blev osäkerheten väldigt stor. Detta beror på att max- och minvärdena beräknas genom att låta alla mätfel dra åt samma håll. Alltså att både a och b togs till sina respektive max- och minvärden för att beräkna areans max- och minvärde. *Men mätfel antas vara slumpmässiga så det är inte särskilt sannolikt att båda mätningarna var felaktiga ”åt samma håll”.*

3.2 Linjärisering – ett bättre sätt att göra det på

Ett annat problem med insättningsmetoden är att den är ganska tidskrävande att göra för hand. Då är det lättare att anta att felen är små och använda en linjärapproximation (se bilaga B) av sambandet för att uppskatta hur mycket slutvärdet ändrar sig om man ändrar de uppmätta parametrarna något.

Låt säga att en storhet G ska bestämmas genom något godtyckligt samband

$$G = G(x, y, z), \quad (4)$$



Figur 3: Ett sätt att se på hur fel i flera inparametrar kan samverka för att skapa ett totalt fel i slutresultatet. Alla felen drar åt varsitt håll, men i varsin dimension. Detta gör att man får ett resulterande fel vars storlek kan beräknas med "Pythagoras sats".

där de uppmätta storheterna har varsina osäkerheter $x = \bar{x} + \Delta x$, $y = \bar{y} + \Delta y$ och $z = \bar{z} + \Delta z$. Då blir $\bar{G} = g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, men hur uppskattar man osäkerheten?

Börja med att anta att det bara finns fel i x – alltså att $\Delta y = \Delta z = 0$. Då ger en linjärapproximation att ^{6 7}

$$\frac{\Delta G}{\Delta x} \approx \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \iff \Delta G \approx \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \Delta x. \quad (5)$$

Härifrån ses att Δx måste vara ganska litet för att approximationen ska vara tillförlitlig, men det är oftast inga problem.

Det här ska nu utvidgas till resten av variablerna. Detta görs genom att använda det andra av de två uttrycken ovan. Bidragen från varje invariabel bestäms på ett analogt sätt med hur det gjordes för bara x . Men för att inte hamna i samma situation som med insättningsmetoden, (att alla felen drar åt samma håll) räcker det inte med att addera ihop felen från varje variabel. Man tänker sig istället ungefär att felen drar åt var sitt håll fast i flera dimensioner som i Figur 3. Det totala felet i slutresultatet fås då som en slags "Pythagoras sats": ⁸

$$\Delta G \approx \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \Delta z \right)^2}. \quad (6)$$

När man beräknar ett propagerat fel med den här formeln ska man komma ihåg att alla derivatorna ska beräknas med $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$ och $z = \bar{z}$. Det här uttrycket kan självklart utvidgas till vilket antal invariabler som helst.

Exempel 2: Nu kan vi beräkna osäkerheten på rektangelarean från det förra exemplet. Eftersom $A = a \cdot b$ blir

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \quad \text{och} \quad \frac{\partial A}{\partial b} = a,$$

⁶Derivator med krulliga d:n (∂) används för funktioner av flera variabler, och betyder att man deriverar funktionen med avseende på endast en variabel och betraktar de andra som konstanter.

⁷Jag sätter beloppstecken på derivatorna för att osäkerheterna ΔG och Δx av konvention alltid är positiva.

⁸Beloppstecknen i (5) har försvunnit här för att kvadraten ändå alltid är positiv.

vilket med (6) ger

$$\Delta A = \sqrt{(\bar{b} \Delta a)^2 + (\bar{a} \Delta b)^2} = \sqrt{(8 \text{ cm} \times 1 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm})^2} = 13 \text{ cm}^2.$$

Den här osäkerheten är betydligt mindre jämfört med det från insättningsmetoden: $\hat{\Delta} A = 36 \text{ cm}^2$ från exempel 1.

Tittar man på de relativa⁹ osäkerheterna så ligger de på 20–25 % för a och b , medan man får $\Delta A/\bar{A} = 32 \%$ respektive $\hat{\Delta} A/\bar{A} = 45 \%$ som relativ osäkerhet i arean. Här verkar ju alternativet med 32 % stämma bättre överens med hur stora fel vi hade från början.

3.2.1 Potenssamband

Det kanske känns som att metoden i (6) inte är mycket enklare att använda än insättningsmetoden, men den här metoden har en stor styrka: med rena potenssamband blir den väldigt enkel. Och ärligt talat så är ganska många fysikaliska samband någon form av potenssamband.

Antag nu att sambandet i (4) är ett potenssamband:

$$G = G(x, y, z) = c x^\alpha y^\beta z^\gamma, \quad (7)$$

där c , α , β och γ är konstanter. Då kan derivatorna skrivas

$$\frac{\partial G}{\partial x} = c \alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma = \alpha \frac{G}{x} \quad (8)$$

och på samma sätt för y och z . Detta ger att (5) kan skrivas om till (med $\Delta y = \Delta z = 0$)

$$\frac{\Delta G}{G} \approx |\alpha| \frac{\Delta x}{x}. \quad (9)$$

Det som står här är en *formel för det relativa felet*, vilket enkelt kan utvidgas till (för godtyckliga Δy och Δz)

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta z}{z}\right)^2}. \quad (10)$$

Och den här formeln är betydligt trevligare att arbeta med än någon av de tidigare. Notera också att beloppstecken på α , β och γ inte används här eftersom kvadreringen tar bort eventuella minustecken.

Exempel 3: Vi tar en titt på rektangeln igen. Med (10) fås den relativa osäkerheten i arean till

$$\frac{\Delta A}{\bar{A}} = \sqrt{\left(1 \times \frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 \times \frac{2}{8}\right)^2} = \sqrt{0,20^2 + 0,25^2} = 0,32 = 32\%.$$

⁹En relativ osäkerhet är bara osäkerheten uttryckt i procent istället för absoluta värden.

För att sen få den absoluta osäkerheten är det bara att multiplicera med \bar{A} :

$$\Delta A = 0,32 \times 40 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2,$$

vilket är det samma som vi fick i det förra exemplet

4 Regression

Ibland räcker det dock inte med att bara använda en mätpunkt och göra flera mätningar där. Då brukar man försöka göra någon form av kurvanpassning. Oftast försöker man göra en linjäranpassning för att de dels är lätta att göra med linjal, och dels är vi människor ganska bra på att uppskatta en trendlinje genom datapunkter. Oftast vill man se till att använda ett samband så att den eftersökta storheten hamnar som linjens lutning.

Vidare är kurvanpassning att föredra före att beräkna ett värde från en datapunkt. Dels för att en kurvanpassning betyder att fler mätpunkter har använts, dels för att det är lättare att upptäcka om någon enstaka mätpunkt råkade bli väldigt fel så att man kan bortse från den.

En annan sak att vara uppmärksam på när det gäller att mäta lutningar är huruvida linjen ska gå genom origo eller inte. Ifall man *vet* att den ska göra det, så kan man utgå från en linje i origo och sen försöka anpassa lutningen till datapunkterna. Men om linjen inte behöver gå genom origo behöver man anpassa *både* lutning och var den skär y -axeln.

Tips: Det kan vara bra att ha med sig en *genomskinlig* linjal så att man kan se alla sina utmarkerade mätpunkter när man gör sina anpassningar.

4.1 Olika sorts linjärisering

Logaritmering En välbekant metod för att ta reda på exponenten i ett potenssamband. Om man vet att man har ett potenssamband

$$y = c x^\alpha \tag{11}$$

så kan man få ett linjärt samband genom att logaritmera båda leden

$$\log(y) = \log(c) + \alpha \log(x). \tag{12}$$

Här kan "log" betyda vilken logaritm man vill, men den vanligaste att använda är den naturliga logaritmen "ln".

Konstruera "egna" linjära samband Man ska också komma ihåg att man själv får arrangera om uttryck så att man får linjära samband. Det kan handla om att göra ett fiffigt val av vad man ska ha på axlarna. Man måste heller inte ha just exakt den eftersökta storheten som lutningen, utan det kan vara någon funktion av den.

Exempel 4: Ta reda på fjäderkonstanten i en spiralfjäder genom att mäta periodtiden som funktion av massa. En fjäderpendels periodtid ges av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Om vi ska använda linjärisering vill vi skriva om uttrycket så att man får (nästan) k som lutning på en linje. Det kan göras genom att möblera om uttrycket ovan till

$$m = \frac{k}{2\pi} T^2.$$

Så genom att sätta T^2 på x -axeln och m på y -axeln, kan man få en linje vars lutning är $k/2\pi$. Sedan är det bara att multiplicera lutningen med 2π för att få k .

4.2 Felgränser

Det är linte lika lätt att göra fenanalys på värden som man (medvetet) varierar för att få en linjeanpassning. Det enklaste sättet när man gör en analys för hand är att göra en huvudanpassning och sen försöka göra två linjer till som ligger på gränsen till vad datan tillåter.

Ska man ta reda på lutningen gör man två linjer som lutar så mycket/lite som det går men fortfarande passar någotlunda. Ska man istället ta reda på en skärningspunkt med någon axel kan det vara bra att även försöka flytta runt lite på linjen (inte bara ändra lutningen). Båda dessa typerna av feluppskattningar är exempel på insättningsmetoden där den faktiskt funkar bra.

Exempel 5: Se Figur 4 hörande till exempelproblemet i avsnitt 5.2, som är ett exempel på hur man kan uppskatta osäkerheten i lutningen.

5 Exempelproblem

Här presenteras lite större exempel än de som har förekommit tidigare i texten. De här problemen är ganska lätta (och mycket av fysiken utlämnas), så betoningen ligger här på felanalyser och linjäranpassningar.

5.1 Mätning av g med pendel

Som vi alla känner till så ges periodtiden för en matematisk pendel (punktmassa som hänger i ett masslöst snöre) av

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{13}$$

där l är punktmassans avstånd från upphängningspunkten. Notera att den här formeln bara gäller för pendlar med små utslag.

Mät upp g genom att använda en pendel. Hur stor osäkerhet får du i ditt resultat?

Lösning Till att börja med skriver vi om (13) till:

$$g = 4\pi^2 l T^{-2}. \quad (14)$$

Därefter är det bara att börja mäta. Uppställningen som jag använde bestod av en (ganska stor) mutter upphängd i en bit sytråd.

För att mäta längden använde jag min långa linjal. Den är visserligen graderad i mm, men på grund av att muttern är så stor är det inte rimligt att använda $\pm 0,5$ mm som osäkerhet. För att vara på den säkra sidan tog jag en osäkerhet på $\Delta l = 2$ cm, som motsvarade storleken på muttern (det kanske är lite väl mycket, men hellre lite för mycket än för lite). Pendelns längd var alltså

$$l = \bar{l} \pm \Delta l = 94 \pm 2 \text{ cm}.$$

För att mäta periodtiden använde jag det gamla knepet att mäta tiden för 10 svängningar och dela på 10 för att i varje mätning få ett medelvärde på periodtiden. Med 5 mätningar fick jag värdena:

$10T$ /[s]	19,2	19,5	19,2	19,0	19,4
T /[s]	1,92	1,95	1,92	1,90	1,94
$\bar{T} \pm \Delta T$ /[s]	$1,93 \pm 0,01$				

Här har medelvärdet och osäkerheten räknats ut genom att använda miniräknarens inbyggda statistikfunktion.

Med (14) fås

$$\bar{g} = 4\pi^2 \frac{\bar{l}}{\bar{T}} = 4\pi^2 \frac{0,94 \text{ m}}{(1,93 \text{ s})^2} = 9,96 \text{ m/s}^2, \quad (15)$$

och osäkerheten ges med (10) till

$$\begin{aligned} \Delta g &= \bar{g} \sqrt{\left(1 \times \frac{\Delta l}{\bar{l}}\right)^2 + \left(2 \times \frac{\Delta T}{\bar{T}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(1 \times \frac{2}{94}\right)^2 + \left(2 \times \frac{0,01}{1,93}\right)^2} \times 9,96 \text{ m/s}^2 = 0,24 \text{ m/s}^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Det slutgiltiga svaret blir då:

$$g = 9,96 \pm 0,24 \text{ m/s}^2.$$

Anmärkningar

1. Resultatet ser ut att kunna stämma överens med vad vi förväntar oss.
2. Kom ihåg **enheter!**
3. Ha med lagom många värdesiffror i svaret. En tumregel är att inte ha med mer än två¹⁰ värdesiffror i osäkerheten, och sen inte ha fler decimaler än vad den angivna osäkerheten har.

5.2 Mätning av g med vattenparabel

Det visar sig att vattenytan i en roterande skål med vatten kommer att forma en parabel¹¹. Vidare gäller att en parabel kommer att folusera plant infallande ljus till en fokalpunkt som visar sig ligga på höjden

$$h = \frac{g}{2\omega^2}. \quad (17)$$

Här är ω rotationens vinkelhastighet.

Lösning Från sambandet ser vi att det är lämpligt att plotta h mot $(2\omega^2)^{-1}$. Det är en bra idé att tänka ut detta i förväg innan man börja mäta så att man vet vad man ska mätas. Sen gör man upp en tabell med sina ursprungliga mätvärden, t.ex. h och periodtiden, men också vilka värden som ska plottas. I det här fallet blir det alltså en tabell på formen:

T / [s]	$(2\omega^2)^{-1}$ / [s ²]	h / [cm]
\vdots	\vdots	\vdots

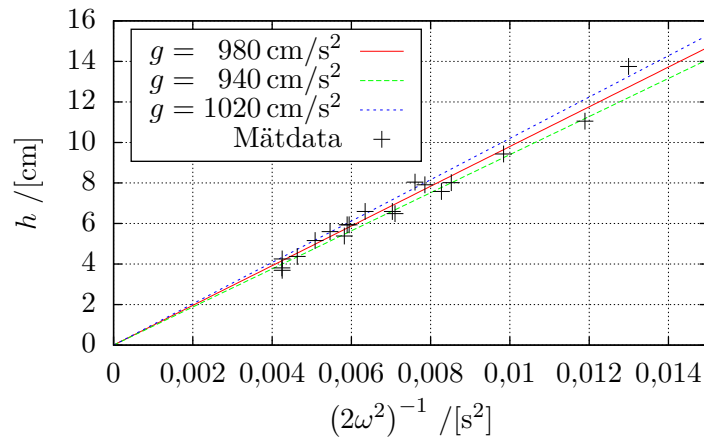
Därefter är det bara att överföra datan till en plot och göra sina linjäranpassningar, som i Figur 4.

För att uppskatta felet gör man en huvudanpassning, men också en övre och en undre anpassning som sätter en osäkerhetsgräns på lutningen. I det här fallet ser det som om resultatet från den övre och undre gränsen blev en osäkerhet på $\Delta g = 0,4 \text{ m/s}^2$. Och det slutgiltiga svaret blir:

$$g = 9,8 \pm 0,4 \text{ m/s}^2.$$

¹⁰Helst ska man bara ha med en värdesiffra i osäkerheten, men jag tycker att man kan ha med två om avrundningsfelet blir stort. T.ex. är det inte så stor skillnad (ca 5 %) på 0,95 och 1, men mellan 0,15 och 0,2 är avrundningsfelet över 30 %. Så jag skulle ha två värdesiffror i det senare fallet men en i det första.

¹¹Se https://github.com/andsunds/Rotating_Bowl för en utförligare beskrivning av teorin och experimentupställningen. (Filen heter `Sundstrom-Adawi_2016.pdf`, för att ladda ner trycker man på "raw".)



Figur 4: Fokalhöjden över botten på en parabel formad av vattenytan i en roterande skål. Här ges g som lutningen av linjeanpassningen; den undre och övre linjen svarar mot det minsta respektive största värdet på g som den uppmätta datan tillåter. Notera också att alla linjer utgår från origo.

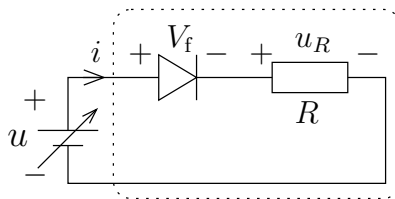
Anmärkningar

1. Även här verkar resultatet stämma, men här är osäkerheten lite större än med pendeln.
2. Glöm inte **enheter!**
3. Man behöver inte göra livet för krångligt med enheterna. I Figur 4 är g angiven i enheten cm/s^2 för att axlarnas enheter var just cm och s^2 . Om det sen står att man ska svara i någon annan enhet kan man göra enhetsomvandlingen i slutet.
4. Försök göra tabellen så att det blir lätt att se vilka värden som ska användas för plottning. I det här fallet mäts T och h , men ordningen i tabellen är T , $(2\omega^2)^{-1}$ och h för att det är de två sista som ska användas i plotten.

5.3 Diod och serieresistor

En diod är en elektrisk komponent som fungerar som en backventil – ström kan bara flöda genom den i en riktning. Idealt skulle dioder kunna betrakts som att ström börjar flyta genom dem så fort spänningen är positiv. Verkliga dioder har dock ett *framspänningsfall* V_f , vilket betyder att de istället kan approximeras med att strömen börjar flyta så fort spänningen över dem överstiger V_f .

Antag att vi har en svart låda kopplad som i Figur 5. Ta reda på resistansen R och framspänningsfallet V_f , enbart med kännedom om u och i .¹²



Figur 5: Kopplingsschema för en diod med en serieresistor. Den punktade ramen svarar mot en svart låda.

Lösning Med Kirchhoffs spänningslag fås att (med $u \geq V_f$)

$$u = V_f + u_R, \quad (18)$$

men Ohms lag säger att $u_R = iR$. Tillsammans ges dessa två uttrycken ett samband för i som funktion av u , V_f och R :

$$i = \begin{cases} 0 & , u < V_f \\ \frac{1}{R}(u - V_f) & , u \geq V_f. \end{cases} \quad (19)$$

Alltså ligger i platt 0 tills u kommer upp till V_f , då börjar den stiga linjärt med lutning $1/R$. Vi kan alltså finna de eftersökta storheterna genom att ta reda på linjens lutning och var den korsar x -axeln.

Mäter man ström-spänning-karakteristiken för den svarta lådan får man ett utseende som i Figur 6. Detta ser ut att stämma väl överens med beskrivningen av (19). Notera dock att de uppmätta mätpunkterna avviker något från linjäranpassningen för de allra lägsta strömmarna, vilket beror på att den approximationen som används inte heller är helt korrekt.

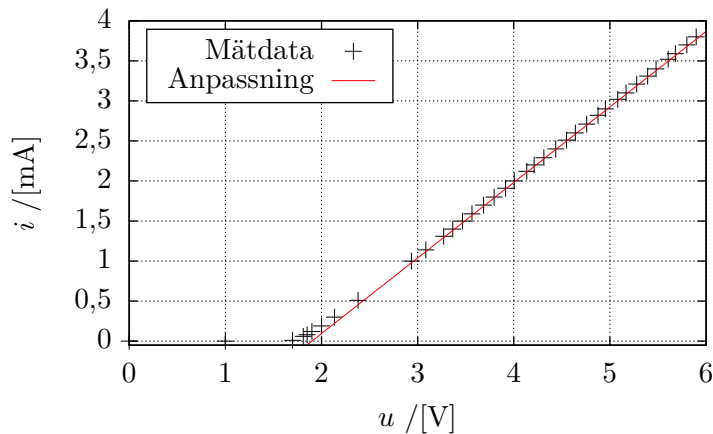
Från linjäranpassningen avläses sedan resultaten

$$\begin{aligned} V_f &= 1,8 \text{ V} \\ R &= 1,1 \text{ k}\Omega. \end{aligned}$$

Anmärkningar

1. Från bygget av uppställningen vet jag att resistansen skulle vara $1 \text{ k}\Omega$, men toleransen på de resistorerna är 10% . Så resistansen verkar stämma.
2. När det gäller att bestämma V_f är det bättre att använda linjäranpassningen hellre än att försöka titta på när man kan börja se ström gå. Detta är för att dioden inte riktigt beter sig som i modellen precis när den börjar släppa igenom strömmen.

¹²Jämför detta med finalexperimentet "LED-karakteristik" från Wallenbergs fysikpris 2015. Mer information om detta finns på <https://github.com/andsunds/Fysikpris>, under Experiment2015/LED/.



Figur 6: Ström-spänning-karakteristik för en diod med en serieresistor som i Figur 5. Linjär-anpassningen är gjord efter de mätpunkter med u från ca 3 V och uppåt.

6 Sammanfattning

Det finns många saker att tänka på när man ska göra experiment. Felanalys är en av dem, men i grund och botten är det inte mer än två eller tre formler att kunna.

Den första formeln är den för standardfelet i medelvärdet

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}.$$

Den ska användas för att beräkna osäkerheten i ett medelvärde (\bar{x}) av upprepade mätningar (x_i) av någon storhet. Det finns även inbyggt i många lite mer avancerade miniräknare att automatiskt räkna ut s från en serie inmatade värden. Kom bara ihåg att dela med \sqrt{N} .

Sen är det formeln för hur man propagerar fel från uppmätta variabler genom ett samband. Osäkerheten i den uträknade parametern blir då

$$\Delta G \approx \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x} \Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y} \Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z} \Delta z\right)^2}.$$

Den här formeln ska användas om man har något godtyckligt samband mellan de uppmätta storheterna (x , y och z) och slutparametern som söks (G). Om det däremot rör sig om ett potenssamband kan man använda den lite enklare formeln:

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta z}{z}\right)^2},$$

där α , β och γ är exponenterna på x , y respektive z .

Det sista man ska ta med sig härifrån är att om man tar upp en mätserie är det bra om man kan försöka plotta upp sin mätdata på ett sätt så att man får linjära samband. De är oftast enklare att hantera.

A Sannolihetslära och statistik

När man gör mätningar vill man oftast ta reda på någon storhets värde – exempelvis periodtiden på en pendel. Med endast en mätning kan man dock inte säga något om hur bra mätningen var. Men med flera mätningar kan vi börja göra statistik över dem. Då kan man börja uppskatta hur säker man kan vara på ens resultat.

Jag vill även betona vikten av statistik i framtida vetenskapliga och tekniska karriärer. *Statistik är ett mycket kraftfullt verktyg.* Statistiken, när man börjar behärska den, är mycket mer än bara ”medelvärden och standardavvikelser”; den spelar en väsentlig roll i mer eller mindre all experimentell vetenskap – särskilt vid feluppskattningar.

A.1 Stokastiska variabler

»*Stoka'stisk* (grekiska *stochastiko's* 'som hör till gissning'; 'skicklig på att gissa', av *stocha'zomai* 'gissa')» (NE)

Om något är *stokastiskt* betyder det att det är slumpmässigt. Alltså att det inte går att förutspå dess utslag eller fölopp med säkerhet. Däremot kan man fortfarande analysera något som är stokastiskt, men då utifrån ett sannolikhetsperspektiv.

Precis som vanliga variabler används stokastiska variabler för att beteckna något okänt. Men i fallet med stokastiska variabler saknar de ett värde. De är mer tänkta som ett koncept för att beteckna en slumpartad händelse eller process. Man kan göra en observation/mätning av en stokastisk variabel och få ett värde, men det är bara ett ensilt mätvärde som man får och inte den stokastiska variabelns värde.

Exempel 6: Ett tärningskast är ett exempel som kan beskrivas med en (diskret) stokastisk variabel. Låt den stokastiska variabeln X beskriva tärningskastet. Den kan då mätas till ett visst utfall x . I fallet med tärningen X finns ett utfallsrum som består av talen 1 till 6: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Varje element i utfallsrummet har också en viss sannolikhet, $1/6$ i det här fallet.

Själva variabeln X (tärningen) kan alltså inte i sig ha ett värde. Men när man gör en observation (kastar tärningen) kan man få ett mätresultat x , som (när tärningen är kastad) har ett fast värde för just det kastet.

Fördelen med att ha stokastiska variabler är att man, likt vanliga variabler, kan börja räkna med dem mer generellt än om man bara har vissa specialfall. I det här avsnittet kommer de att användas för att uttrycka statistiska och stokastiska samband, men det läggs inte så stor vikt vid dem.

A.2 Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner

Den statistik och sannolikhetslära man får lära sig i gymnasiet brukar för det mesta vara diskret (och ändlig). Alltså att det finns ett ändligt antal möjliga utfall och varje utfall är distinkt. Exempel på detta är tärningskast, lottdragning och kortlekar.

Verkligheten är dock oftast mer komplicerad än så. När man gör mätningar handlar det oftast om mätningar av en reellvärd storhet som t.ex. en längd¹³. Detta betyder att längden kommer att anta ett reellt antal milimetrar och inte vara begränsad till ett ändligt antal möjliga värden. För att analysera detta behövs statistik för kontinuerliga fördelningar.

Sannolikhetsfördelningar karakteriseras av sin täthetsfunktion, som brukar betecknas f . Täthetsfunktionen talar om hur sannolikt det är att få ett värde i ett visst intervall. Notera dock att den *inte* ger sannolikheten att få ett specifikt värde. Eftersom det finns (ouppräknerligt) oändligt många möjliga utfall så är sannolikheten att få ett visst exakt värde

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{1}{\infty} = 0. \quad (20)$$

För att istället beräkna sannolikheten att få sitt utfall X i ett visst intervall $[a, b]$ måste man integrera:

$$\mathcal{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (21)$$

Sannolikheten att få $a < X < b$ bestäms alltså av arean under $f(x)$.

Exempel 7: Sannolikheten för att en radioaktiv kärna ska sönderfalla kan beskrivas med den så kallade exponentialfördelningen:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

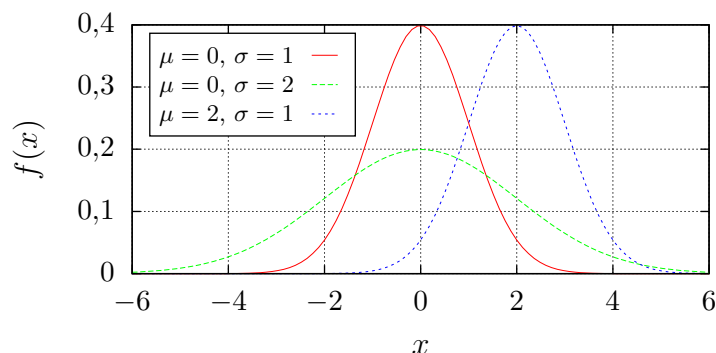
där λ är en konstant som kallas isotopens sönderfallskonstant. Vad är sannolikheten att kärnan har sönderfallit vid tiden $\tau = \ln(2)/\lambda$?

Sannolikheten att en kärna sönderfaller mellan tiden 0 och τ ges enligt (21) helt enkelt av integralen

$$\mathcal{P}(0 < T_{\text{sönderfall}} < \tau) = \int_0^{\tau} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \frac{e^0 - e^{-\lambda \tau}}{\lambda} = 1 - e^{-\lambda \tau} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tolkningen av detta är att om man har väldigt många kärnor, så kommer hälften av dem att ha sönderfallit vid tiden $\ln(2)/\lambda$. Detta är alltså vad man kallar isotopens *halveringstid*.

¹³”Aha!” tänker ni: atomer och kvantfysik gör att det bara finns diskreta längder. ”Nähä!” säger jag: som fysiker måste man kunna hantera approximationer och veta begränsningarna i sina mätningar. Med en linjal eller skjutmått finns det ingen chans i världen att man skulle kunna stöta på problem orsakade av kvantfysik. Man kan alltså betrakta det som om de möjliga värden som längden kan anta ligger kontinuerligt.



Figur 7: Täthetsfunktioner till normalfördelningar med olika värden på väntevärdet μ och standardavvikelsen σ . Varje kurva har den klassiska Gaußiska klockformen.

A.2.1 Normalfördelningen

En av de vanligaste fördelningarna är normalfördelningen. Den har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (22)$$

där μ kallas fördelningens *väntevärde* och σ är dess *standardavvikelse*. I Figur 7 visas täthetsfunktionen för några olika val av μ och σ . Där ser vi att μ svarar mot var någonstans fördelningen är centrerad, och att σ svarar mot hur bred fördelningen blir.

Kvadraten i exponentialen ger täthetsfunktionen den klassiska klockformen hos en Gaußisk kurva, och faktorn framför säkerställer att den totala integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (23)$$

Detta är något som *gäller för alla täthetsfunktioner*.

Normalfördelningen kallas just "normal" för att det finns en sats som säger att i princip alla slumpfenomen blir normalfördelade om samma process upprepas väldigt många gånger. Ett exempel på detta är om man sannolikheten att få ett visst antal "klave" efter flera slantsinglingar. Den här egenskapen gör att de allra flesta mätfelen antas vara normalfördelade.

A.3 Väntevärden, varianser och standardavvikelser

De vanligaste fördelningarna har, som normalfördelningen, väntevärde och varians. Dessa beräknas med hjälp av täthetsfunktionen. I felanalys används främst den så kallade standardavvikelsen, som är roten ur variansen.

Väntevärdet av den stokastiska variabeln X , med täthetsfunktion f , definieras som

$$\langle X \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (24)$$

Det är inte helt klart vad tolkningen ska vara direkt från definitionen, men man kan jämföra väntevärdesintegralen med en slags tyngdpunktsberäkning. Man lägger ihop varje punkts "sannolikhetsmassa", $f(x)dx$, gånger punktes avstånd, x , från origo; till slut får man den sammanlagda tyngdpunkten. Man kan faktiskt, om man vill, hitta en fördelnings väntevärde genom att kippa ut en (styv) pappersbit formad efter ytan under kurvan och balansera den utklippta formen.

Sedan kan variansen definieras med hjälp av väntevärden:

$$\text{var}[X] = \sigma^2 = \langle (X - \mu)^2 \rangle. \quad (25)$$

Tolkningen av variansen är att det är ett väntevärde på hur mycket avvikelse man får från μ , men för att inte positiva och negativa avvikelser ska ta utvarandra, kvadreras de innan man tar väntevärdet. Detta ger dock ett mått som är "kvadratisk"¹⁴, så för att få något som kan jämföras med själva värdena man får från X använder man *standardavvikelsen som är roten ur variansen*.

A.3.1 Några nyttiga satser

Det viktigaste man behöver veta om väntevärden är att de är linjära. Alltså att

$$\langle \alpha X + \beta Y + \gamma \rangle = \alpha \langle X \rangle + \beta \langle Y \rangle + \gamma, \quad (26)$$

för godtyckliga stokastiska variabler X och Y samt några konstanter α , β och γ . Den här regeln kan utvidgas till ett godtyckligt antal variabler.

För variansen gäller en liknande regel

$$\text{var}[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha^2 \text{var}[X] + \beta^2 \text{var}[Y], \quad (27)$$

men här måste X och Y vara statistiskt oberoende¹⁵. Även här kan man utvidga regeln till ett godtyckligt antal oberoende variabler.

Med hjälp av (26) kan man även skriva om uttrycket för variansens definition till

$$\text{var}[X] = \langle (X - \mu)^2 \rangle = \langle X^2 + \mu^2 - 2\mu X \rangle = \langle X^2 \rangle - \mu^2. \quad (28)$$

Det här uttrycket kan vara bra att kunna, särskilt om man vill göra fler teoretiska analyser.

Medelvärden Speciellt gäller att om man har N stycken oberoende stokastiska variabler X_i med lika fördelning och man vill ta ett medelvärde

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (29)$$

¹⁴Om till exempel X är en sorts längd, med enhet meter, bli $\text{var}[X]$ en storhet som är en längd i kvadrat, med enhet kvadratmeter.

¹⁵Statistiskt oberoende är en ganska knepig term att definiera. Men enkelt sett så betyder det ungefär vad magkänslan säger: att resultatet av en mätning på den ena ska inte påverka resultatet på den andra.

så kan man beräkna dess väntevärde och varians med hjälp av reglerna ovan. Väntevärdet ges då från (26) som

$$\langle \bar{X} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overbrace{\langle X_i \rangle}^{\mu} = \mu, \quad (30)$$

där μ är väntevärdet av varje enskild variabel från den givna fördelningen. Variansen får man med (27) sedan som

$$\text{var}[\bar{X}] = \text{var}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \text{var}\left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \overbrace{\text{var}[X_i]}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (31)$$

Dessa resultat kommer att användas i feluppsättningar genom att betrakta varje X_i som en mätning av en viss storhet.

A.3.2 Skattning från mätdata

Har man ett stokastiskt system och vill försöka mäta dess väntevärde och standardavvikelse, så måste man ha många mätningar på det. Det är nu som statistiken kommer in i bilden.

Väntevärde Det visade det sig att väntevärdet av ett medelvärde är samma som väntevärdet av det man mäter på. Vidare visade det sig att variansen av medelvärdet minskade som $1/N$. Tillsammans ger detta att *ju fler mätningar man gör desto större är sannolikheten att medelvärdet ligger nära väntevärdet*. Detta betyder att man kan skatta väntevärdet med

$$\langle X \rangle = \mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (32)$$

Här användes små bokstäver x_i för att beteckna att de redan är uppmätta värden.

Beviset av detta följer direkt från (30) och (31).

Standardavvikelse Om nu väntevärden gick att skatta som medelvärden bör man väl kunna göra det samma för varianser. Definitionen av varians i (25) består ju av två väntevärden (två stycken eftersom $\mu = \langle X \rangle$), så det borde gå att skatta variansen med medelvärdet av $(x_i - \bar{x})^2$. Svaret är att det nästan går. Eftersom man bara får ett ungefärligt värde på μ från (32) måste medelvärdet justeras något. Det visar sig att man ska använda

$$\text{var}[X] = \sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (33)$$

för att skatta variansen. Standardavvikelsen fås enkelt genom att dra roten ur skattningen av variansen:

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (34)$$

Detta kallas *standardfelet* och är det namn som man har gett till skattningen av standardavvikelsen. Notera att s är standardfelet i uppsättningen av alla mätpunkter. För att få *standardfelet i medelvärdet* använder man (31) och får s/\sqrt{N} .

För att bevisa att (33) är en riktig skattning av variansen betraktar man återigen N stycken oberoende likafördelade stokastiska variabler X_i och deras medelvärde $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_N)/N$. Sedan betraktar man summan

$$\hat{S} = \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2 = \sum_{i=1}^N \left((X_i - \mu) - (\bar{X} - \mu) \right)^2 \quad (35)$$

vars väntevärde kan beräknas med generaliseringen av (26). Man får då

$$\langle \hat{S} \rangle = \sum_{i=1}^N \overbrace{\langle (X_i - \mu)^2 \rangle}^{=\sigma^2, \text{ per def.}} + \sum_{i=1}^N \overbrace{\langle (\bar{X} - \mu)^2 \rangle}^{=\sigma^2/N, \text{ enl. (31)}} - 2 \sum_{i=1}^N \langle (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) \rangle. \quad (36)$$

De två första uttrycken är ganska lätthanterliga, men det sista kräver mer behandling. Här kommer det in att X_i skulle vara *oberoende*; det ger att $(X_i - \mu)$ och $(\bar{X} - \mu)$ bara "överlappar" varandra i en N :tedel av fallen¹⁶, vilket betyder att

$$\langle (X_i - \mu)(\bar{X} - \mu) \rangle = \left\langle (X_i - \mu) \left(\frac{X_i - \mu}{N} \right) \right\rangle = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (37)$$

Det går nu att till slut knyta ihop säcken för (36):

$$\langle \hat{S} \rangle = N\sigma^2 + N\frac{\sigma^2}{N} - 2N\frac{\sigma^2}{N} = (N-1)\sigma^2. \quad (38)$$

Detta visar att väntevärdet man förväntas få när man gör skattningen i (33) faktiskt är variansen σ^2 .¹⁷ Detta kallas att skattningen är väntevärdesriktig.

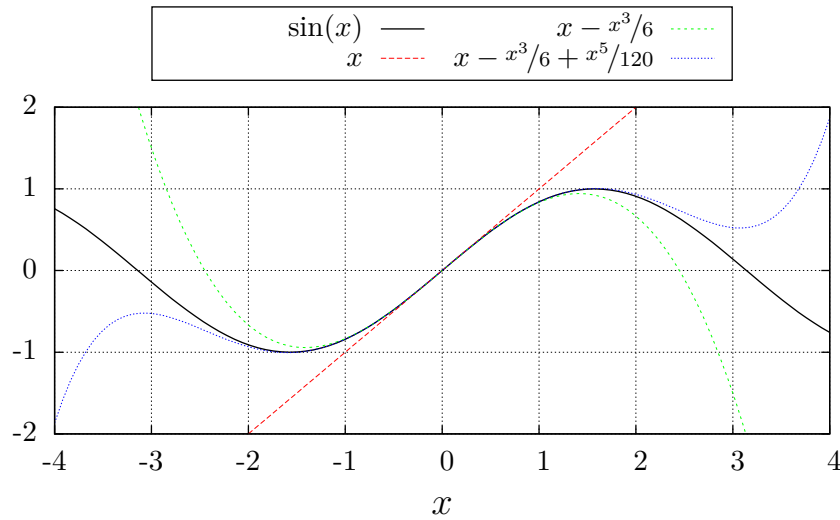
B Taylorutvecklingar

Ibland är det svårt att hantera exakta uttryck, antingen för att de är jobbiga att beräkna numeriskt eller att de lätt blir väldigt svåra att hantera matematiskt. Därför är det nyttigt att kunna approximera. En av de vanligaste approximationerna som används i fysiken är Taylorutvecklingar¹⁸. De används för att approximera funktioner med polynom av olika hög grad, Taylorpolynomen. Till exempel visar Figur 8 de tre första (unika) Taylorpolynomen för $\sin(x)$ kring $x = 0$.

¹⁶Kom ihåg att $\bar{X} = (X_1 + \dots + X_N)/N$, vilket gör att \bar{X} till en N :tedel består av just X_i för varje i . Det krävs egentligen lite mer utförligare argument, men de slutar i rätt så långa och trista algebraiska manövrer.

¹⁷Det går även att bevisa att $\text{var}[\hat{S}]$ minskar ungefär som $1/N$, men det är en betydligt längre och snårigare väg att vandra än det vi visade här.

¹⁸Mer eller mindre all fysik bygger på en Taylorutveckling någonstans. Ett extremfall är Newtonsk mekanik som egentligen bara är en första ordningens Taylorutveckling av Einsteins relativitetsteori.



Figur 8: Funktionen $\sin(x)$ och några av dess Taylorpolynom kring $x = 0$. Det syns att approximationerna är som bäst nära just $x = 0$, och att ju högre ordnings polynom desto bättre approximation.

Har man en funktion f (som är tillräckligt många gånger deriverbar) kan man uttrycka den n :te ordningens Taylorpolynom, p_n , kring punkten a som:

$$\begin{aligned} p_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}. \end{aligned} \quad (39)$$

Ju fler termer som tas med destu bättre blir approximationen, men destu snårigare blir också uttrycket. Oftas nöjer man sig dock med första ordningens Taylorutveckling/Taylorpolynom, vilket är samma som att linjärapproximera funktionen med dess tangent:

$$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a). \quad (40)$$

En trevlig sak med att göra en linjärapproximation är att uttrycket $\Delta p_1 / \Delta x$ blir samma som derivatan $f'(a)$. Med andra ord så är

$$f'(a) \Delta x = \Delta p_1 \approx \Delta f. \quad (41)$$

Detta kan användas för att uppskatta osäkerheten i ett beräknat uttryck, f , givet osäkerheten i inparametern, x .

Exempel 8: En solcells effekt beror bl.a. på solstrålarnas infallsvinkel. Det följer direkt av att mängden solstrålning som träffar panelen beror på vinkeln.

Det går lätt att visa att beroendet blir $\cos(\theta)$, där θ mäts från normalen.
Med hur många procent minskar effekten från solcellen om solen sjunker lite,
så att θ går från 30° till 35° ?

Vi kan börja med att ta fram första ordningens Taylorutveckling med (40).
Vi får då

$$p_1(\theta) = \cos(\theta_0) - \sin(\theta_0)(\theta - \theta_0).$$

Och förändringen kan approximeras med förändringen i taylorpolynomet:

$$\Delta(\cos \theta) \approx \Delta p_1 = \left| p_1(\theta_0 + \Delta\theta) - p_1(\theta_0) \right| = \sin(\theta_0) \Delta\theta.$$

Med $\sin 30^\circ = 1/2$ och $\Delta\theta = 5^\circ \approx 0,09 \text{ rad}$, blir den absoluta förändringen
 $\Delta(\cos \theta) \approx 0,045$, vilket skulle svara mot en relativ förändring på

$$\frac{\Delta(\cos \theta)}{\cos \theta_0} \approx \frac{0,045}{\sqrt{3}/2} \approx 0,052 \approx 5 \, \%.$$