

Behandling av experimentella resultat

En introduktion för fysikstudenter om hur man ska hantera mätresultat och feluppskattningar

Andréas Sundström*

2016-06-11, v 0.0

Förord

Det här kompendiet är skrivet som en introduktion till feluppskattningar för det svenska IPhO-laget. Jag har försökt fatta mig kort, men jag har en tendens att kunna dra iväg när jag skriver.

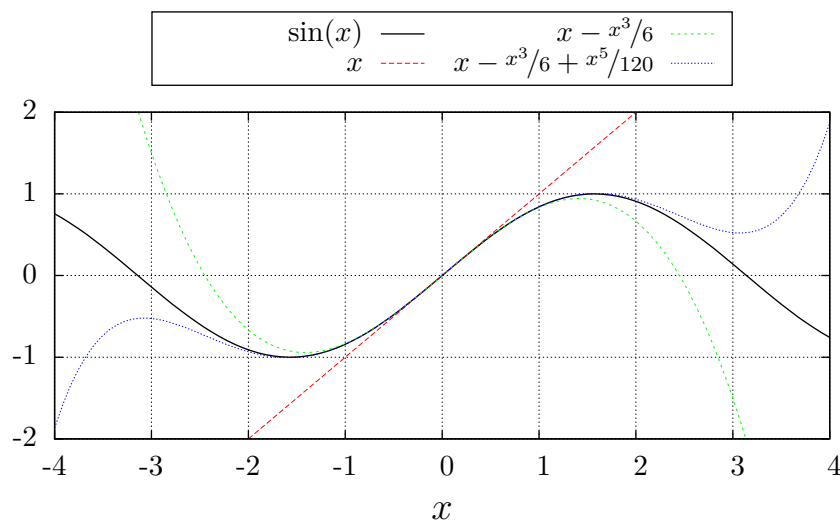
Det viktigaste innehållet finns i avsnitt 2, men jag tyckte att det behövs en liten teoretisk bakgrund också, den finns i avsnitt 1. Det avsnittet ska man läsa om man vill få en lite klarare bild om varför feluppskattningarna på det ena eller andra viset. Sedan finns här jag även lagt till ett avsnitt om approximationer. Detta avsnitt hör inte så mycket ihop med resten av det här kompendiet, men det är matnyttigt att kunna göra uppskattningar både för teoretiska och experimentella beräkningar.

Andréas Sundström
Göteborg, 2016-06-10

Innehåll

0 Approximationer – Taylorutvecklingar	2
1 Sannolikhetslära och statistik	2
1.1 Stokastiska variabler	2
1.2 Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner	2
1.2.1 Normalfördelningen	3
1.3 Väntevärden, standardavvikelser och hur man skattar dem	4
2 Feluppskattningar	4
2.1 Systematiska fel – noggrannhet och precision	4
2.1.1 Hanterbara systematiska fel	6
2.2 Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem	6
2.3 Felpropagering	6
2.3.1 När det handlar om ett potenssamband	6

*Synpunkter och förslag tas gärna emot till sundstrom.andreas@gmail.com.



Figur 1

0 Approximationer – Taylorutvecklingar

1 Sannolikhetslära och statistik

När man gör mätningar vill man oftast ta reda på någon storhets värde – exempelvis periodtiden på en pendel. Med en mätning kan man dock inte säga något om hur bra mätningen var. Men med flera mätningar kan vi börja göra statistik över dem. Då

Jag vill även betona vikten av statistik i framtida vetenskapliga och tekniska karriärer. *Statistik är ett mycket kraftfullt verktyg.* Statistiken, när man börjar behärska den, är mycket mer än bara ”medelvärden och standardavvikelser”; den spelar en väsentlig roll i mer eller mindre all experimentell vetenskap – särskilt vid feluppskattningar.

1.1 Stokastiska variabler

1.2 Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner

Den statistik och sannolikhetslära man får lära sig i gymnasiet brukar för det mesta vara diskret (och ändlig). Alltså att det finns ett ändligt antal möjliga utfall och varje utfall är distikt. Exempel på detta är tärningskast, lottdragning och kortlekar.

Verkligheten är dock oftast mer komplicerad än så. När man gör mätningar handlar det oftast om mätningar av en reellvärd storhet som t.ex. en längd¹. Detta betyder att längden kommer att anta ett reellt antal milimetrar och inte vara begränsad till ett ändligt antal möjliga värden. För att analysera detta behövs statistik för kontinuerliga fördelningar.

¹”Aha!” tänker ni: atomer och kvantfysik gör att det bara finns diskreta längder. ”Nähä!” säger jag: som fysiker måste man kunna hantera approximationer och veta begränsningarna i sina mätningar. Med

Sannolikhetsfördelningar karakteriseras av sin täthetsfunktion, som brukar betecknas f . Täthetsfunktionen talar om hur sannolikt det är att få ett värde i ett visst intervall. Notera dock att den *inte* ger sannolikheten att få ett specifikt värde. Eftersom det finns (ouppräknerligt) oändligt många möjliga utfall så är sannolikheten att få ett visst exakt värde

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{1}{\infty} = 0. \quad (1)$$

För att beräkna sannolikheten att få sitt utfall X i ett visst intervall $[a, b]$ måste man integrera:

$$\mathcal{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Sannolikheten att få $a < X < b$ bestäms av täthetsfunktionen och intervallet och motsvarar arean under $f(x)$.

1.2.1 Normalfördelningen

En av de vanligaste fördelningarna är normalfördelningen. Den har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3)$$

där μ är fördelningens *väntevärde* och σ är dess *standardavvikelse*. I Figur 2 visas täthetsfunktionen för några olika val av μ och σ . Där ser vi att μ svarar mot var någonstans fördelningen är centrerad, och att σ svarar mot hur bred fördelningen blir.

Kvadraten i exponentialen ger täthetsfunktionen den klassiska klockformen hos en Gaußisk kurva, och faktorn framför säkerställer att den totala integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (4)$$

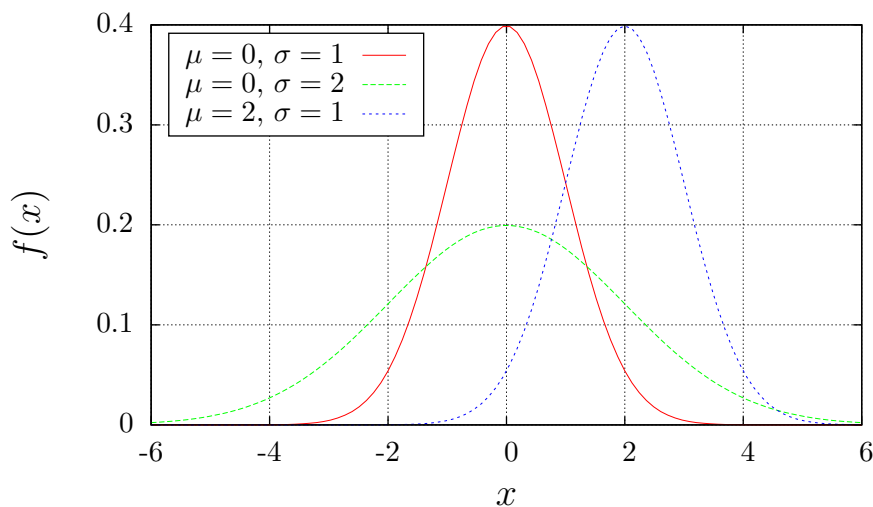
Detta är något som *gäller för alla täthetsfunktioner*.

Normalfördelningen kallas just "normal" för att det finns en sats som säger att i princip alla slumpfenomen blir normalfördelade om samma process upprepas väldigt många gånger. Ett exempel på detta är om man sannolikheten att få ett visst antal "klave" efter flera slantsinglingar. Den här egenskapen gör att de allra flesta *mätfelen antas vara normalfördelade*.

Vidare är normalfördelningen en väldigt trevlig fördelning att arbeta med. Regeln för normalfördelningar är att om X och Y båda är normalfördelade med väntevärde μ_X och standardavvikelse σ_X respektive μ_Y och σ_Y , så är

$$Z = \alpha X + \beta Y \quad (5)$$

en linjal eller skjutmått finns det ingen chans i världen att man skulle kunna stöta på problem orsakade av kvantfysik. Man kan alltså betrakta det som om de möjliga värden som längden kan anta ligger kontinuerligt.



Figur 2: Täthetsfunktioner till normalfördelningar med olika värden på väntevärdet μ och standardavvikelsen σ . Varje kurva har den klassiska Gaußiska klockformen.

också normalfördelad med väntevärde $(\alpha\mu_X + \beta\mu_Y)$ och standardavvikelse $\sqrt{\alpha\sigma_X^2 + \beta\sigma_Y^2}$. Med andra ord funkar väntevärdena som man kan tro och standardavvikelserna fungerar lite som Pythagoras sats.

1.3 Väntevärden, standardavvikelser och hur man skattar dem

2 Feluppskattningar

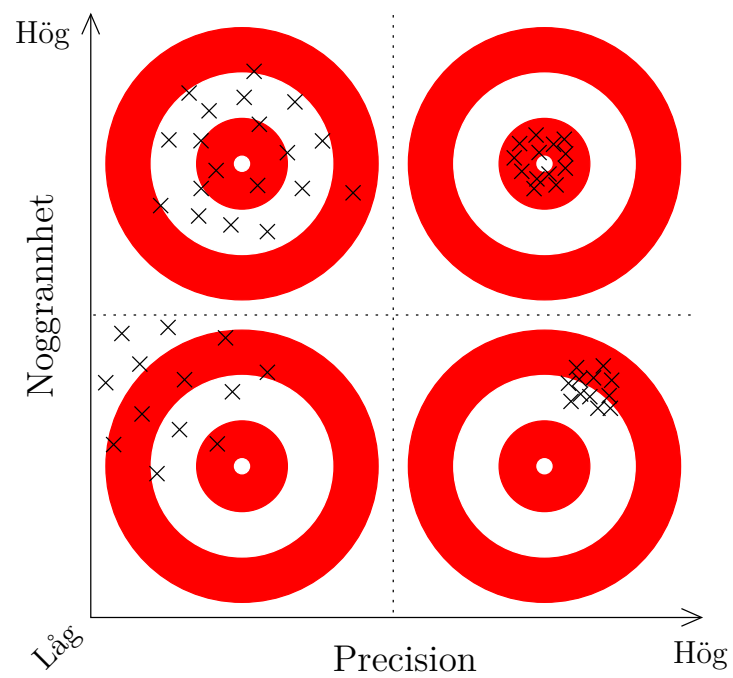
När man vill uppskatta hur stora experimentella fel/osäkerheter man har finns det två typer av fel och två typer av feluppskattningar. De två typerna av fel som finns är systematiska och statistiska. Sedan är de två typerna av feluppskattningar som man behöver kunna dels direkt feluppskattning (av statistiska fel), dels propagering av osäkerhet.

2.1 Systematiska fel – noggrannhet och precision

Ett systematiskt fel är något som gör att ens mätresultat hela tiden är lite fel åt något håll². Dessa karakteriseras av att det inte hjälper med flera mätningar för att få bättre mätresultat.

Man brukar skilja på två olika typer av godhet i mätningar. Det finns dels noggrannhet, dels precision. Noggrannhet, eller rikighet som det ibland kallas, svarar mot hur nära det "sanna" värdet mätningarna kommer i medel. Precisionen svarar å andra sida mot hur tätt mätresultaten hamnar, eller hur liten spridning man får i dem. De två koncepten illustreras i Figur 3.

²Det behöver inte nödvändigtvis vara så att det är just fel åt samma håll hela tiden, men oftast är ett systematiskt fel något som ger en förskjutning av ens mätresultat.



Figur 3: Illustration av skillnaden mellan noggrannhet och precision. Måltavlorna representerar en mätning, där mitten på måltavlan svarar mot det "sanna" värdet. Fallen med låg noggrannhet svarar mot systematiska fel som inte går att avhjälpa med medelvärden av fler mätningar.

Som kan ses i Figur 3 svarar låg noggrannhet mot ett systematiskt fel som gör att medelvärdet avviker från det "sanna" värdet. Vidare kan man med statistisk analys bara ta reda på spridningen i resultaten – alltså hur bra precision man har. Tillsammans ger detta en ganska prekär situation att hantera i felanalys: *Man vill veta hur noggranna ens mätningar är, men man kan bara ta reda på hur precisa de är.*

Sättet man löser detta på är att låtsas som att det regnar och strunta i eventuella systematiska fel när man redovisar sin felanalys. Detta förutsätter såklart att man verkligen har försökt eliminera alla systematiska fel; de som är kvar är dock de som man inte kände till, vilket betyder att det i princip är omöjligt att kunna uppskatta storleken på dem. I praktiken redovisar man oftast bara spridningen i mätresultaten och säger att märosäkerheten är samma som spridningen.

2.1.1 Hanterbara systematiska fel

2.2 Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem

För att ta reda på precisionen i mätresultaten behövs statistik. Om ens noggrannhet är hög, övre halvan i Figur 3, behöver man ändå veta hur god precision man har. Gör man bara en mätning har man ingen möjlighet att veta hur nära det "sanna" resultatet man kom. Det är där man måste börja använda lite statistik.

Säg att det finns en storhet x som ska mätas, men att varje mätning har ett mätfel δx . Det som mäts blir då

$$\hat{x} = x + \delta x. \quad (6)$$

Utan någon mer information om δx går det inte att säga så mycket mer från mätningen. Men som sagts tidigare antas mätfelet δx vara normalfördelat med $\mu = 0$ fast med ett okänt σ . Det är oftast σ som man tar reda på för att ge en osäkerhetsuppskattning av ens mätning.

För att få fram ett värde på x_0 tar man ett medelvärde av flera mätningar. Detta ger

$$\bar{x} = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_N}{N} = \frac{Nx + \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_N}{N} = x + \overline{\delta x}. \quad (7)$$

Vi utnyttjar nu att medelvärdet $\overline{\delta x} \approx \mu = 0$, vilket ger att $\bar{x} \approx x$. Här syns att antagandet $\mu = 0$ betyder att det inte finns något systematiskt fel som ändrar ger ett felaktigt medelvärde.

2.3 Felpropagering

2.3.1 När det handlar om ett potenssamband