

# Behandling av experimentella resultat

En introduktion för fysikstudenter om hur man ska  
hantera mätresultat och feluppskattningar

Andréas Sundström\*

2016-06-15, v 0.1

## Förord

Det här kompendiet är skrivet som en introduktion till feluppskattningar för det svenska IPhO-laget. Jag har försökt fatta mig kort, men jag har en tendens att kunna dra iväg när jag skriver. Jag har försökt lägga innehållet på en nivå för att kunna förstås av en gymnasieelev, men det är inte alltid det går så bra... Ni är de första som läser det här kompendiet. Tycker du att det här var för svårförståeligt så har **jag** skrivit för komplicerat, och du är inte ensam om att tycka att kompediet var svårt. *Så säg till om det var krångligt!*

Det viktigaste innehållet finns i avsnitt 2, men jag tyckte att det behövs en liten teoretisk bakgrund också, den finns i avsnitt 0. Det avsnittet ska man läsa om man vill få en lite klarare bild om varför feluppskattningarna beräknas på det ena eller andra viset. Avslutningsvis räknas ett exempel med lite olika feluppskattningar.

Uppdatera

Sedan har jag även lagt till en bilaga om Taylorutvecklingar. Den hör inte så mycket ihop med resten av det här kompendiet, men det är matnyttigt att kunna göra uppskattningar både för teoretiska och experimentella beräkningar.

Andréas Sundström  
Göteborg, 2016-06-12

---

\*sundstrom.andreas@gmail.com Jag tar gärna emot synpunkter och förslag.

# Innehåll

<b>0</b>	<b>Sannolikhetslära och statistik (överkurs)</b>	<b>1</b>
0.1	Stokastiska variabler . . . . .	1
0.2	Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner . . . . .	1
0.2.1	Normalfördelningen . . . . .	2
0.3	Väntevärden, varianser och standardavvikelse . . . . .	3
0.3.1	Några nyttiga satser . . . . .	4
0.3.2	Skattning från mätdata . . . . .	5
<b>1</b>	<b>Innan man börjar felanalysen</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Olika typer av mätfel</b>	<b>5</b>
2.1	Systematiska fel – noggrannhet och precision . . . . .	6
2.1.1	Mätupplösning . . . . .	7
2.2	Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Felpropagering</b>	<b>8</b>
3.1	Maxfel – en inte så bra metod . . . . .	8
3.2	Linjärisering – ett bättre sätt att göra det på . . . . .	9
3.2.1	Potenssamband . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Regression</b>	<b>11</b>
4.1	Olika sorts linjärisering . . . . .	12
4.2	Osäkerhet i lutningen . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Exempelproblem</b>	<b>13</b>
5.1	Mätning av $g$ med vattenparabel . . . . .	13
5.2	Diod och serieresistor . . . . .	14
5.3	Radioaktivt sönderfall av två silverisotoper . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Sammanfattning</b>	<b>15</b>

## Bilagor

<b>A</b>	<b>Taylorutvecklingar</b>	<b>A1</b>
----------	---------------------------	-----------

## 0 Sannolikhetslära och statistik (överkurs)

När man gör mätningar vill man oftast ta reda på någon storhets värde – exempelvis periodtiden på en pendel. Med en mätning kan man dock inte säga något om hur bra mätningen var. Men med flera mätningar kan vi börja göra statistik över dem. Då

Jag vill även betona vikten av statistik i framtida vetenskapliga och tekniska karriärer. *Statistik är ett mycket kraftfullt verktyg.* Statistiken, när man börjar behärska den, är mycket mer än bara ”medelvärden och standardavvikelser”; den spelar en väsentlig roll i mer eller mindre all experimentell vetenskap – särskilt vid feluppskattningar.

### 0.1 Stokastiska variabler

Precis som vanliga variabler används stokastiska variabler för att beteckna något okänt. Men i fallet med stokastiska variabler saknar de ett värde. De är mer tänkta som ett koncept för att beteckna en slumpartad händelse eller process. Man kan göra en observation/mätning av en stokastisk variabel och få ett värde, men det är bara ett mätvärde som man kan få.

**Exempel 1:** Ett tärningskast är ett exempel som kan beskrivas med en diskret stokastisk variabel. Låt den stokastiska variabeln  $X$  beskriva tärningskastet. Den kan då mätas till ett visst utfall  $x$ . I fallet med en tärning  $X$  har ett utfallsrum som består av talen 1 till 6:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Varje element i utfallsrummet har också en viss sannolikhet,  $1/6$  i det här fallet.

Själva variabeln  $X$  (tärningen) kan alltså inte i sig ha ett värde. Men när man gör en observation (kastar tärningen) kan man få ett mätresultat  $x$ , som (när tärningen är kastad) har ett fast värde.

Fördelen med att ha stokastiska variabler är att man, likt vanliga variabler, kan börja räkna med dem mer generellt än om man bara har vissa specialfall. I det här kompendiet kommer de att användas, men inte med så stor vikt. (Stokastiska variabler kommer här att betecknas med stora bokstäver.)

### 0.2 Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner

Den statistik och sannolikhetslära man får lära sig i gymnasiet brukar för det mesta vara diskret (och ändlig). Alltså att det finns ett ändligt antal möjliga utfall och varje utfall är distinkt. Exempel på detta är tärningskast, lottdragning och kortlekar.

Verkligheten är dock oftast mer komplicerad än så. När man gör mätningar handrar det oftast om mätningar av en reellvärd storhet som t.ex. en längd<sup>1</sup>. Detta betyder att längden kommer att anta ett reellt antal milimetrar och inte vara begränsad till ett ändligt antal möjliga värden. För att analysera detta behövs statistik för kontinuerliga fördelningar.

---

<sup>1</sup>”Aha!” tänker ni: atomer och kvantfysik gör att det bara finns diskreta längder. ”Nähä!” säger jag: som fysiker måste man kunna hantera approximationer och veta begränsningarna i sina mätningar. Med

Sannolikhetsfördelningar karakteriseras av sin täthetsfunktion, som brukar betecknas  $f$ . Täthetsfunktionen talar om hur sannolikt det är att få ett värde i ett visst intervall. Notera dock att den *inte* ger sannolikheten att få ett specifikt värde. Eftersom det finns (ouppräknerligt) oändligt många möjliga utfall så är sannolikheten att få ett visst exakt värde

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{1}{\infty} = 0. \quad (1)$$

För att istället beräkna sannolikheten att få sitt utfall  $X$  i ett visst intervall  $[a, b]$  måste man integrera:

$$\mathcal{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Sannolikheten att få  $a < X < b$  bestäms alltså av arean under  $f(x)$ .

**Exempel 2:** Sannolikheten för att en radioaktiv kärna ska sönderfalla kan beskrivas med den så kallade exponentialfördelningen:

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

där  $\lambda$  är en konstant som kallas isotopens sönderfallskonstant. Vad är sannolikheten att kärnan har sönderfallit vid tiden  $\tau = \ln(2)/\lambda$ ?

Sannolikheten att en kärna sönderfaller mellan tiden 0 och  $\tau$  ges enligt (2) helt enkelt av integralen

$$\mathcal{P}(0 < T_{\text{sönderfall}} < \tau) = \int_0^{\tau} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \frac{e^0 - e^{-\lambda\tau}}{\lambda} = 1 - e^{-\lambda\tau} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Tiden  $\ln(2)/\lambda$  är alltså isotopens halveringstid.

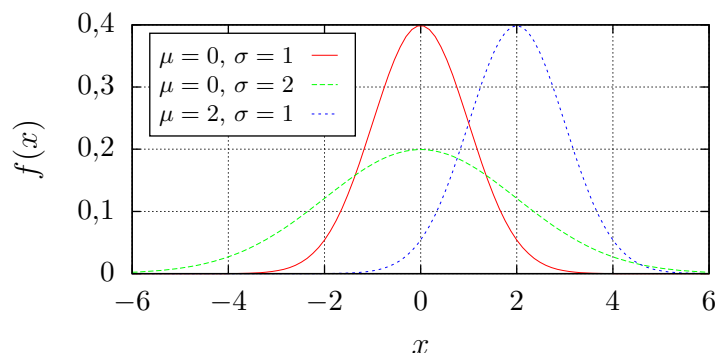
### 0.2.1 Normalfördelningen

En av de vanligaste fördelningarna är normalfördelningen. Den har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3)$$

där  $\mu$  är fördelningens *väntevärde* och  $\sigma$  är dess *standardavvikelse*. I Figur 1 visas täthetsfunktionen för några olika val av  $\mu$  och  $\sigma$ . Där ser vi att  $\mu$  svarar mot var någonstans fördelningen är centrerad, och att  $\sigma$  svarar mot hur bred fördelningen blir.

Som kan ses i Figur 1 går sannolikhetsfördelningen ner och blir väldigt liten för värden långt ifrån  $\mu$ . Till exempel ligger ca 98 % av all sannolikhet/area under kurvan



Figur 1: Täthetsfunktioner till normalfördelningar med olika värden på väntevärdet  $\mu$  och standardavvikelsen  $\sigma$ . Varje kurva har den klassiska Gaußiska klockformen.

inom  $\mu \pm 2\sigma$ , men sen går det snabbt – fortsätter man uppåt så ligger 99,99997% inom  $\mu \pm 5\sigma$ .

Kvadraten i exponentialen ger täthetsfunktionen den klassiska klockformen hos en Gaußisk kurva, och faktorn framför säkerställer att den totala integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (4)$$

Detta är något som *gäller för alla täthetsfunktioner*.

Normalfördelningen kallas just "normal" för att det finns en sats som säger att i princip alla slumpfenomen blir normalfördelade om samma process upprepas väldigt många gånger. Ett exempel på detta är om man sannolikheten att få ett visst antal "klave" efter flera slantsinglingar. Den här egenskapen gör att de allra flesta *mätfelen antas vara normalfördelade*.

### 0.3 Väntevärden, varianser och standardavvikelser

De vanligaste fördelningarna har, som normalfördelningen, väntevärde och varians. Dessa beräknas med täthetsfunktionen. Det är också dessa som främst används i felanalys.

Väntevärdet av den stokastiska variabeln  $X$ , med täthetsfunktion  $f$ , definieras som

$$\langle X \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (5)$$

Det är inte helt klart vad tolkningen ska vara direkt från definitionen, men man kan jämföra väntevärdesintegralen med en slags tyngdpunktsberäkning. Man lägger ihop

---

en linjal eller skjutmått finns det ingen chans i världen att man skulle kunna stöta på problem orsakade av kvantfysik. Man kan alltså betrakta det som om de möjliga värden som längden kan anta ligger kontinuerligt.

varje punkts "sannolikhetsmassa",  $f(x) dx$ , gånger punktes avstånd,  $x$ , från origo; till slut får man den sammanlagda tyngdpunkten. Man kan faktiskt hitta en fördelnings väntevärde genom att kippa ut en (styv) pappersbit formad efter ytan under kurvan och balanseta den utklippta formen.

Sedan kan variansen definieras med hjälp av väntevärden:

$$\text{var}[X] = \sigma^2 = \langle (X - \mu)^2 \rangle. \quad (6)$$

Tolkningen av variansen är att det är ett väntevärde på hur mycket avvikelse man får från  $\mu$ , men för att ta med både positiva och negativa avvikelser kvadreras de innan man tar väntevärdet. Härifrån syns också att *standardavvikelsen ges som roten ur variansen*.

### 0.3.1 Några nyttiga satser

Det viktigaste man behöver veta om väntevärden är att de är linjära. Alltså att

$$\langle \alpha X + \beta Y + \gamma \rangle = \alpha \langle X \rangle + \beta \langle Y \rangle + \gamma, \quad (7)$$

för godtyckliga stokastiska variabler  $X$  och  $Y$  samt några konstanter  $\alpha$ ,  $\beta$  och  $\gamma$ . Den här regeln kan utvidgas till ett godtyckligt antal variabler.

För variansen gäller en liknande regel

$$\text{var}[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha^2 \text{var}[X] + \beta^2 \text{var}[Y], \quad (8)$$

men här måste  $X$  och  $Y$  vara statistiskt oberoende<sup>2</sup>. Även här kan man utvidga regeln till ett godtyckligt antal oberoende variabler.

Speciellt gäller att om man har  $N$  stycken oberoende stokastiska variabler  $X_i$  med lika fördelning och man vill ta ett medelvärde

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (9)$$

så kan man beräkna dess väntevärde och varians med hjälp av reglerna ovan. Väntevärdet ges då från (7) som

$$\langle \bar{X} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overbrace{\langle X_i \rangle}^{\mu} = \mu, \quad (10)$$

där  $\mu$  är väntevärdet av varje enskild variabel från den givna fördelningen. Variansen får man med (8) sedan som

$$\text{var}[\bar{X}] = \text{var}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \text{var}\left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \overbrace{\text{var}[X_i]}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (11)$$

Dessa resultat kommer att användas i feluppsättningar genom att betrakta varje mätning som en observation av respektive  $X_i$ .

---

<sup>2</sup>Statistiskt oberoende är en ganska knepig term att definiera. Men enkelt sett så betyder det ungefär vad magkänslan säger: att resultatet av en mätning på den ena ska inte påverka resultatet på den andra.

### 0.3.2 Skattning från mätdata

Har man ett stokastiskt system och vill försöka mäta dess väntevärde och standardavvikelse, så måste man ha många mätningar på det. Det är nu som statistiken kommer in i bilden – hur man behandlar tagna mätningar av en stokastisk variabel.

Från (10) visade det sig att väntevärdet av ett medelvärde är samma som väntevärdet av det man mäter på. Vidare visade det sig att variansen av medelvärdet minskade som  $1/N$ . Tillsammans ger detta att *ju fler mätningar man gör desto större är sannolikheten att medelvärdet man får blir just väntevärdet*. Detta betyder att man kan skatta väntevärdet med

$$\langle X \rangle = \mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (12)$$

Här användes små bokstäver  $x_i$  för att beteckna att de är tagna mätvärden – de har alltså ett fast värde.

Om nu väntevärden gick att skatta som medelvärden bör man väl kunna göra det samma för varianser. Definitionen av varians i (6) består ju av två väntevärden (två stycken eftersom  $\mu = \langle X \rangle$ ), så det borde gå att skatta variansen med medelvärdet av  $(x_i - \bar{x})^2$ . Svaret är att det nästan går. Eftersom man bara får ett ungefärligt värde på  $\mu$  från (12) måste medelvärdet justeras något. Det visar sig att man ska använda

$$\text{var}[X] = \sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (13)$$

för att skatta variansen. Standardavvikelsen fås enkelt genom att dra roten ur skattningen av variansen:

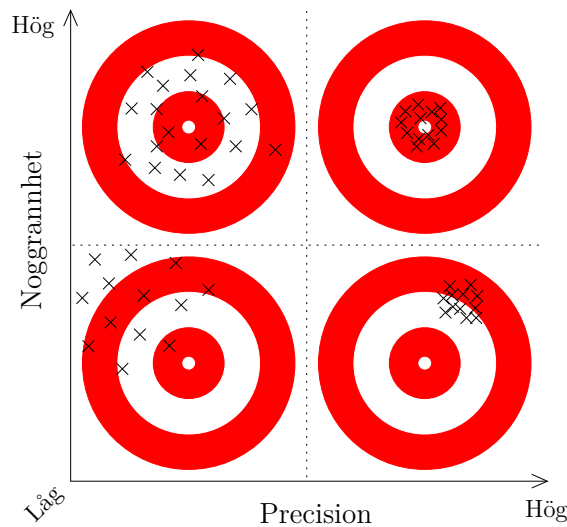
$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

Detta kallas *standradfelet* och är det namn som man har gett till skattningen av standardavvikelsen. Notera att  $s$  är standradfelet i uppsättningen av alla mätpunkter. För att få *standardfelet i medelvärdet* använder man (11) och får  $s/\sqrt{N}$ .

## 1 Innan man börjar felanalysen

## 2 Olika typer av mätfel

När man vill uppskatta hur stora experimentella fel/osäkerheter man har finns det två typer av fel och två typer av feluppskattningar. De två typerna av fel som finns är systematiska och statistiska. Sedan är de två typerna av feluppskattningar som man behöver kunna. Dels direkt feluppskattning (av statistiska fel), dels propagering av osäkerhet.



Figur 2: Illustration av skillnaden mellan noggrannhet och precision. Måltavlorna representerar en mätning, där mitten på måltavlan svarar mot det "sanna" värdet. Fallen med låg noggrannhet svarar mot systematiska fel som inte går att avhjälpa med medelvärden av fler mätningar.

## 2.1 Systematiska fel – noggrannhet och precision

Ett systematiskt fel är något som gör att ens mätresultat hela tiden är lite fel åt något håll<sup>3</sup>. Dessa karakteriseras av att det inte hjälper med flera mätningar för att få bättre mätresultat.

Man brukar skilja på två olika typer av godhet i mätningar. Det finns dels noggrannhet, dels precision. Noggrannhet, eller rikighet som det ibland kallas, svarar mot hur nära det "sanna"<sup>4</sup> värdet mätningarna kommer i medel. Precisionen svarar å andra sida mot hur tätt mätresultaten hamnar, eller hur liten spridning man får i dem. De två koncepten illustreras i Figur 2.

Som kan ses i Figur 2 svarar låg noggrannhet mot ett systematiskt fel som gör att medelvärdet avviker från det "sanna" värdet. Vidare kan man med statistisk analys bara ta reda på spridningen i resultaten – alltså hur bra precision man har. Tillsammans ger detta en ganska prekär situation att hantera i felanalys: *Man vill veta hur **noggranna** ens mätningar är, men man kan bara ta reda på hur **precisa** de är.*

Sättet man löser detta på är att låtsas som att det regnar och strunta i eventuella systematiska fel när man redovisar sin felanalys. Detta förutsätter såklart att man verkligen har försökt eliminera alla systematiska fel; de som är kvar är dock de som man inte kände till, vilket betder att det i princip är omöjligt att kunna uppskatta storleken

<sup>3</sup>Det behöver inte nödvändigtvis vara så att det är just fel åt samma håll hela tiden, men oftast är ett systematiskt fel något som ger en förskjutning av ens mätresultat.

<sup>4</sup>Jag sätter "sanna" inom citationstecken för att ur ett experimentalistiskt perspektiv finns det inget sätt att veta det verkligt sanna värdet – man kan bara se var man träffade men inte måltavlan. Detta gör att det inte går att säga att man har fått det sanna värdet.



på dem. I praktiken redovisar man oftast bara spridningen i mätresultaten och säger att märosäkerheten är samma som spridningen.

### 2.1.1 Mätupplösning

En sorts systematiska<sup>5</sup> osäkerheter som man ofta kommer att stöta på härör från mätinstrumentets upplösning. Ett tydligt exempel på detta är en linjal; oavsett hur många gånger man försöker mäta bredden på ett hårstrå kommer man bara att få 0 mm som resultat.

Sättet att hantera detta på är att erkänna att man har ett systematiskt fel som kommer från upplösningen, och ta med det i beräkningarna. Detta gör man genom att själv uppskatta vad avrundningsfelet kan vara i mätningen. I generellt gäller att

- analoga instrument har ett avrundningsfel som är halva avståndet mellan markörer. Alltså att en linjal som är mm-graderad får en mätosäkerhet på  $\pm 0,5$  mm (även om man tycker att mätningar ser ut att vara närmare skalstecket än så).
- digitala instrument är ganska opålitliga i hur noggranna de är. Detta betyder att osäkerheten *inte* behöver vara i sista siffran, utan man måste kolla manualen för att vara helt säker. *I IPhO gäller dock att man får anta att osäkerhetsgränsen ligger i sista siffran.*
- tidtagning med tidtagarur har en osäkerhet på *minst*  $\pm 0,1$  s (även om tidtagaruret går ner till hundradels sekunder). Detta är helt enkelt för att den mänskliga reaktionstiden inte är snabbare än så.

Dessa tumregler kan användas i fall där man bedömer att upprepade mätningar inte kommer att kunna ge förändrade mätresultat. Typfall där detta gäller är längdmätning (av något objekt) med linjal eller skjutmått, och spännings- eller strömmätning med multimeter. I andra fall är det alltid rekommenderat att göra upprepade mätningar (gärna upp till 10 stycken men minst 3).

## 2.2 Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem

För att ta reda på precisionen i mätresultaten behövs statistik. Om ens noggrannhet är hög, övre halvan i Figur 2, behöver man ändå veta hur god precision man har. Gör man bara en mätning har man ingen möjlighet att veta hur nära det "sanna" resultatet man kom. Det är där man måste börja använda lite statistik.

Säg att det finns en storhet  $x$  som ska mätas, men att varje mätning har ett mätfel  $\delta x$ . Det som mäts blir då

$$\hat{x}_i = x + \delta x_i. \quad (15)$$

Utan någon mer information om  $\delta x$  går det inte att säga så mycket mer från mätningen. Men som sagts tidigare antas mätfelet  $\delta x$  vara normalfördelat med  $\mu = 0$  fast med ett

---

<sup>5</sup>Jag har valt att klassa dem som systematiska av anledningen att det oftast inte hjälper att ta ett medelvärde av flera mätningar.

okänt  $\sigma$ . Det är oftast  $\sigma$  som man tar reda på för att ge en osäkerhetsuppskattning av ens mätning.

För att få fram ett värde på  $x$  tar man ett medelvärde av flera mätningar. Detta ger

$$\bar{x} = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \cdots + \hat{x}_N}{N} = \frac{Nx + \delta x_1 + \delta x_2 + \cdots + \delta x_N}{N} = x + \overline{\delta x}. \quad (16)$$

Vi utnyttjar nu att medelvärdet  $\overline{\delta x} \approx \mu = 0$ , vilket ger att  $\bar{x} \approx x$ . Här syns att antagandet  $\mu = 0$  betyder att det inte finns något systematiskt fel.

För att sedan ta reda på precisionen i mätningarna behövs standardavvikelsen av  $\delta x$ . Denna fås enkelt som standardfelet från (14). Men eftersom det beräknade värdet  $\bar{x}$  är ett medelvärde betyder det att osäkerheten är mindre i  $\bar{x}$  än i varje enskilt  $\hat{x}_i$ . Standardfelet från (14) ger däremot en mått på hur spridda värden man har fått. Som nämnts tidigare får man standardavvikelsen i *medelvärdet* genom att dela med  $\sqrt{N}$ . Mätosäkerheten<sup>6</sup>  $\Delta x$  blir då

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (17)$$

Detta är en av de vanligaste beräkningarna man kommer att behöva göra i felanalys. De räknare som används på IPhO kan därför ställas in för att göra precis den här beräkningen, men bara nästan: man får  $s$ , sen måste man själv dela med  $\sqrt{N}$ . Samtidigt känns det lite som fusk att man bara kan ”slänga in ett extra  $\sqrt{N}$  och så blev osäkerheten plötsligt mindre”.<sup>7</sup> Men matten i avsnitt 0.3.1 visar att man ska göra det.

### 3 Felpropagering

Oftast kan man inte mäta den eftersökta storheten direk. Man brukar istället mäta ett antal andra storheter och utnyttja något teoretiskt samband för att få värdet på den eftersökta storheten. Då kan man utnyttja feluppskattningarna ovan för att ta reda på felet i varje uppmätt värde. Men hur får man reda på osäkerheten i slutresultatet? Det är här som man måste använda felpropagering.

#### 3.1 Maxfel – en inte så bra metod

Man skulle kunna göra någon insättning av största och minsta möjliga värde på en uppmätt storhet i sambandet för att få ett största och minsta värde på slutresultatet. Den här metoden kallas maxfel för den ger det största möjliga värdet på osäkerheten.

<sup>6</sup>Notera skillnaden mellan  $\delta x$  och  $\Delta x$ . Den första är felet i varje enskild mätning, medan den andra är den totala osäkerheten i slutresultatet av en längre mätserie.

<sup>7</sup> Det här var en av de svåraste sakerna att acceptera med felanalys när jag började med sånt. Men allt följer från (11).

**Exempel 3:** Tänk er att ni vill mäta arean av en rektangel och att ni har fått dess sidlängder som  $a = 5 \pm 1$  cm och  $b = 8 \pm 2$  cm. Då blir arean  $\bar{A} = 40$  cm<sup>2</sup>. Men maximalt skulle den kunna vara  $A_{\max} = 6$  cm  $\times$  10 cm = 60 cm<sup>2</sup> och minimalt  $A_{\min} = 4$  cm  $\times$  6 cm = 24 cm<sup>2</sup>, vilket skulle ge ett maxfel på  $\hat{\Delta}A = (60 - 24)$  cm<sup>2</sup> = 36 cm<sup>2</sup>. Detta är en *väldig stor* osäkerhet.

Som exemplet visar så blev osäkerheten väldigt stor. Detta beror på att max- och minvärdena beräknas genom att låta alla mätfel dra åt samma håll. Alltså att både  $a$  och  $b$  togs till sina respektive max- och minvärden för att beräkna areans max- och minvärde. *Men mätfel antas vara slumpmässiga så det är inte särskilt sannolikt att båda mätningarna var felaktiga "åt samma håll".*

### 3.2 Linjärisering – ett bättre sätt att göra det på

Ett annat problem med maxfelsmetoden är att den är ganska tidskrävande att göra för hand. Då är det lättare att anta att felen är små och använda en linjärapproximation (se bilaga A) av sambandet för att uppskatta hur mycket slutvärdet ändrar sig om man ändrar de uppmätta parametrarna något.

Låt säga att en storhet  $G$  ska bestämmas genom något godtyckligt samband

$$G = G(x, y, z), \quad (18)$$

där de uppmätta storheterna har varsina osäkerheter  $x = \bar{x} + \Delta x$ ,  $y = \bar{y} + \Delta y$  och  $z = \bar{z} + \Delta z$ . Då blir  $\bar{G} = g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , men hur uppskattar man osäkerheten?

Börja med att anta att det bara finns fel i  $x$  – alltså att  $\Delta y = \Delta z = 0$ . Då ger en linjär approximation att<sup>8</sup>

$$\frac{\Delta G}{\Delta x} \approx \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \iff \Delta G \approx \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| \Delta x. \quad (19)$$

Härifrån ses att  $\Delta x$  måste vara ganska litet för att approximationen ska vara tillförlitlig, men det är oftast inga problem.

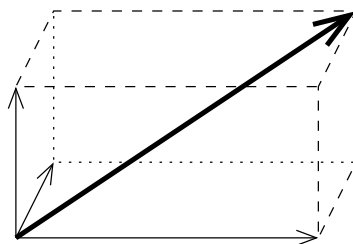
Det här ska nu utvidgas till resten av variablerna. Detta görs genom att använda det andra av de två uttrycken ovan. Men för att inte hamna i samma situation som med maxfelet, att alla felen drar åt samma håll, räcker det inte med att addera ihop felen från varje variabel. Man tänker sig ungefär istället att felen drar åt varisitt håll i flera dimensioner som i Figur 3. Det totala felet i slutresultatet fås då som en slags "Pythagoras sats":

$$\Delta G \approx \sqrt{\left( \frac{\partial G}{\partial x} \Delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial y} \Delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial G}{\partial z} \Delta z \right)^2}. \quad (20)$$

---

<sup>8</sup>Notationsförklaring:

- Derivator med krulliga  $d$ :n ( $\partial$ ) används för funktioner av flera variabler, och betyder att man deriverar funktionen med avseende på endast en variabel och betraktar de andra som konstanter.
- Jag sätter beloppstecken på derivatorna för att osäkerheterna  $\Delta G$  och  $\Delta x$  av konvention alltid är positiva.



Figur 3: Ett sätt att se på hur fel i flera inparametrar kan samverka för att skapa ett totalt fel i slutresultatet. Alla felen drar åt varsitt håll, men i varsin dimension. Detta gör att man får ett resulterande fel vars storlek kan beräknas med "Pythagoras sats".

Det här uttrycket kan självklart utvidgas till vilket antal invariabler som helst.

När man beräknar ett propagerat fel med den här formeln ska man komma ihåg att alla derivatorna ska beräknas med  $x = \bar{x}$ ,  $y = \bar{y}$  och  $z = \bar{z}$ .

**Exempel 4:** Nu kan vi beräkna osäkerheten på rektangelarean från det förra exemplet. Eftersom  $A = a \cdot b$  blir

$$\frac{\partial A}{\partial a} = b \quad \text{och} \quad \frac{\partial A}{\partial b} = a,$$

vilket med (20) ger

$$\Delta A = \sqrt{(\bar{b} \Delta a)^2 + (\bar{a} \Delta b)^2} = \sqrt{(8 \text{ cm} \times 1 \text{ cm})^2 + (5 \text{ cm} \times 2 \text{ cm})^2} = 13 \text{ cm}^2.$$

Den här osäkerheten är betydligt mindre jämfört med maxfelet  $\hat{\Delta} A = 36 \text{ cm}^2$  från exempel 3.

Tittar man på de relativa<sup>9</sup> osäkerheterna så ligger de på 20–25 % för  $a$  och  $b$ , medan man får  $\Delta A / \bar{A} = 32 \%$  respektive  $\hat{\Delta} A / \bar{A} = 90 \%$  som relativ osäkerhet i arean. Här verkar ju alternativet med 32 % stämma betydligt bättre överens med hur stora fel vi hade från början.

### 3.2.1 Potenssamband

Det kanske känns som att metoden i (20) inte är mycket enklare att använda än maxfelet, men den här metoden har en stor styrka: med rena potenssamband blir den väldigt enkel. Och ärligt talat så är ganska många fysikaliska samband någon form av potenssamband.

Antag nu att sambandet i (18) är ett potenssamband:

$$G = G(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma. \quad (21)$$

Då kan derivatorna skrivas

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} y^\beta z^\gamma = \alpha \frac{G}{x} \quad (22)$$

<sup>9</sup>En relativt osäkerhet är bara osäkerheten uttryckt i procent istället för absoluta värden.

och på samma sätt för  $y$  och  $z$ . Detta ger att (19) kan skrivas om till (med  $\Delta y = \Delta z = 0$ )

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \alpha \frac{\Delta x}{x}. \quad (23)$$

Det som står här är en *formel för den relativa felet*, vilket enkelt kan utvidgas till (för godtyckliga  $\Delta y$  och  $\Delta z$ )

$$\frac{\Delta G}{G} \approx \sqrt{\left(\alpha \frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\beta \frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(\gamma \frac{\Delta z}{z}\right)^2}. \quad (24)$$

Och den här formeln är betydligt trevligare att arbeta med än någon av de tidigare.

**Exempel 5:** Vi tar en titt på rektangeln igen. Med (24) fås den relativa osäkerheten i arean till

$$\frac{\Delta A}{\bar{A}} = \sqrt{\left(1 \times \frac{1}{5}\right)^2 + \left(1 \times \frac{2}{8}\right)^2} = \sqrt{0,20^2 + 0,25^2} = 0,32 = 32\%.$$

För att sen få den absoluta osäkerheten är det bara att multiplicera med  $\bar{A}$ :

$$\Delta A = 0,32 \times 40 \text{ cm}^2 = 13 \text{ cm}^2,$$

vilket är det samma som vi fick i det förra exemplet

## 4 Regression

Ibland räcker det dock inte med att bara använda en mätpunkt och göra flera mätningar där. Då brukar man försöka göra någon form av kurvanpassning. Oftast försöker man göra en linjäranpassning för att de dels är lätta att göra med linjal, och dels är vi människor ganska bra på att uppskatta en trendlinje genom datapunkter. Oftast vill man se till att använda ett samband så att den eftersökta storheten hamnar som linjens lutning.

Vidare är kurvanpassning att föredra före att beräkna ett värde från en datapunkt. Dels för att en kurvanpassning betyder att flermät punkter har använts, dels för att det är lättare att upptäcka om någon enstaka mätpunkt råkade bli väldigt fel så att man kan bortse från den.

En annan sak att vara uppmärksam på när det gäller att mäta lutningar är huruvida linjen ska gå genom origo eller inte. Ifall man *vet* att den ska göra det, så kan man utgå från en linje i origo och sen försöka anpassa lutningen till datapunkterna. Men om linjen inte behöver gå genom origo behöver man anpassa *både* lutning och var den skär  $y$ -axeln.

## 4.1 Olika sorts linjärisering

**Logaritmering** En välbekant metod för att ta reda på exponenten i ett potenssamband. Om man vet att man har ett potenssamband

$$y = c x^\alpha \quad (25)$$

så kan man få ett linjärt samband genom att logaritmera båda leden

$$\log(y) = \log(c) + \alpha \log(x). \quad (26)$$

Här kan "log" betyda vilken logaritm man vill, men den vanligaste att använda är den naturliga logaritmen "ln".

**Konstruera "egna" linjära samband** Man ska också komma ihåg att man själv får arrangera om uttryck så att man får linjära samband. Det kan handla om att göra ett fiffigt val av vad man ska ha på axlarna. Man måste heller inte ha just exakt den eftersökta storheten som lutningen, utan det kan vara någon funktion av den.

**Exempel 6:** Ta reda på fjäderkonstanten i en spiralfjäder genom att mäta periodtiden som funktion av massa. En fjäderpendels periodtid ges av

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Om vi ska använda linjärisering vill vi skriva om uttrycket så att man får (nästan)  $k$  som lutning på en linje. Det kan göras genom att möblera om uttrycket ovan till

$$m = \frac{k}{2\pi} T^2.$$

Så genom att sätta  $T^2$  på  $x$ -axeln och  $m$  på  $y$ -axeln, kan man få en linje vars lutning är  $k/2\pi$ . Sedan är det bara att multiplicera lutningen med  $2\pi$  för att få  $k$ .

## 4.2 Osäkerhet i lutningen

Det är inte lika lätt att göra fenanalys på värden som man (medvetet) varierar för att få en linjeanpassning. Det enklaste sättet när man gör en analys för hand är att göra en huvudanpassning och sen försöka göra två som lutar så mycket/lite som det går men fortfarande passa någotlunda.

**Exempel 7:** Se Figur 4 hörande till exempelproblemet i avsnitt 5.1, som är ett exempel på hur man kan uppskatta osäkerheten i lutningen.

## 5 Exempelproblem

Här presenteras lite större exempel än de som har förekommit tidigare i texten. De här problemen är ganska lätta (och mycket av fysiken utlämnas), men betoningen ligger här på felanalysen.

### 5.1 Mätning av $g$ med vattenparabel

Det visar sig att vattenytan i en roterande skål med vatten kommer att forma en parabel<sup>10</sup>. Vidare gäller att en parabel kommer att folusera plant infallande ljus till en fokalpunkt som visar sig ligga på höjden

$$h = \frac{g}{2\omega^2}. \quad (27)$$

Här är  $\omega$  rotationens vinkelhastighet.

Från sambandet ser vi att det är lämpligt att plotta  $h$  mot  $(2\omega^2)^{-1}$ . Det är en bra idé att tänka ut detta i förväg innan man börja mäta så att man vet vad man ska mätas. Sen gör man upp en tabell med sina ursprungliga mätvärden, t.ex.  $h$  och periodtiden, men också vilka värden som ska plottas. I det här fallet blir det alltså en tabell på formen:

$T$ / [s]	$(2\omega^2)^{-1}$ / [s <sup>2</sup> ]	$h$ / [cm]
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Därefter är det bara att överföra datan till en plot och göra sina linjäranpassningar, som i Figur 4.

För att uppskatta felet gör man en huvudanpassning, men också en övre och en undre anpassning som sätter en osäkerhetsgräns på lutningen. I det här fallet ser det som om resultatet från den övre och undre gränsen blev en osäkerhet på  $\Delta g = 0,4 \text{ m/s}^2$ . Och det slutgiltiga svaret blir:

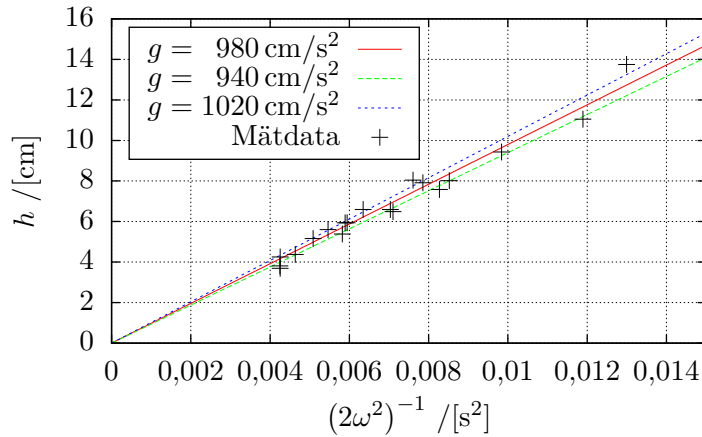
$$g = 9,8 \pm 0,4 \text{ m/s}^2.$$

#### Anmärkningar:

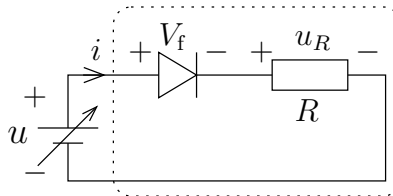
1. Kom alltid ihåg **enheter** på allt som ska ha det (tabellhuvuden, axlar till plottar, enskilda värden som används någonstans ...)
2. Man behöver inte göra livet för krångligt med enheterna. I Figur 4 är  $g$  angiven i enheten  $\text{cm/s}^2$  för att axlarnas enheter var just  $\text{cm}$  och  $\text{s}^2$ . Om det sen står att man ska svara i någon annan enhet kan man göra enhetsomvandlingen i slutet.
3. Försök göra tabellen så att det blir lätt att se vilka värden som ska användas för plottning. I det här fallet mäts  $T$  och  $h$ , men ordningen i tabellen är  $T$ ,  $(2\omega^2)^{-1}$  och  $h$  för att det är de två sista som ska användas i plotten.

---

<sup>10</sup>Se [https://github.com/andsunds/Rotating\\_Bowl](https://github.com/andsunds/Rotating_Bowl) för en utförligare beskrivning av teorin och experimentuppställningen. (Artikeln ligger under: `text/Rotating_bowl.pdf`, för att ladda ner trycker man på "raw".)



Figur 4: Fokalhöjden över botten på en parabel formad av vattenytan i en roterande skål. Här ges  $g$  som lutningen av linjeanpassningen; den undre och övre linjen svarar mot det minsta respektive största värdet på  $g$  som den uppmätta datan tillåter. Notera också att alla linjer utgår från origo.



Figur 5: Kopplingsschema för en diod med en serieresistor. Den punktade ramen svarar mot en svart låda.

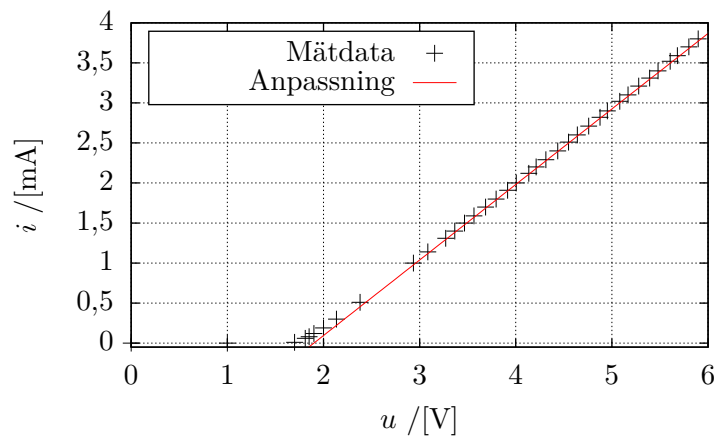
## 5.2 Diod och serieresistor

En diod är en elektrisk komponent som fungerar som en backventil – ström kan bara flöda genom den i en riktning. Idealt skulle dioder kunna betrakts som att ström börjar flyta genom dem så fort spänningen är positiv. Verkliga dioder har dock ett *framspänningsfall*  $V_f$ , vilket betyder att de istället kan approximeras med att strömen börjar flyta så fort spänningen över dem överstiger  $V_f$ .

Antag att vi har en svart låda kopplad som i Figur 5. Ta reda på resistansen  $R$  och framspänningsfallet  $V_f$ , enbart med kännedom om  $u$  och  $i$ .<sup>11</sup>

<sup>11</sup>Jämför detta med finalexperimentet "LED-karakteristik" från Wallenbergs fysikpris 2015. Mer information om detta finns på <https://github.com/andsunds/Fysikpris>, under Experiment2015/LED/.





Figur 6

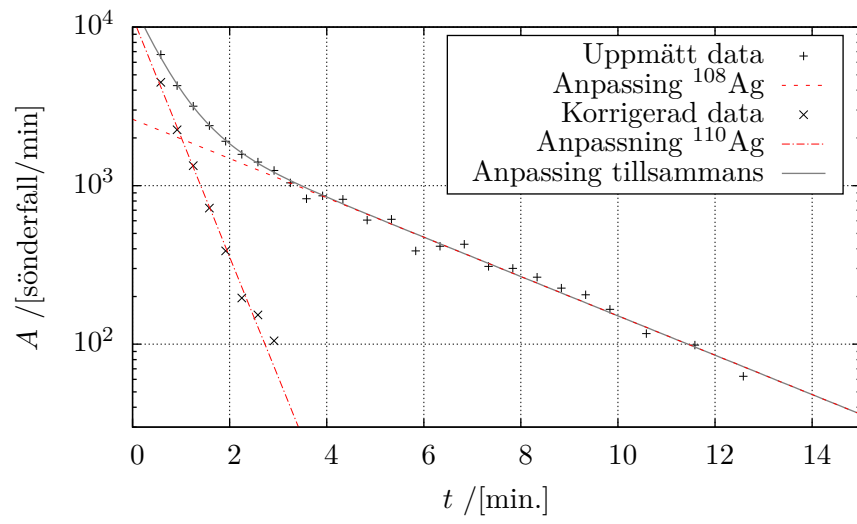
### 5.3 Radioaktivt sönderfall av två silverisotoper

Det finns två naturligt förekommande isotoper av silver. GENom att bestråla dessa med neutroner kan man skapa två nya, radioaktiva isotoper med varsina halveringstider.<sup>12</sup>

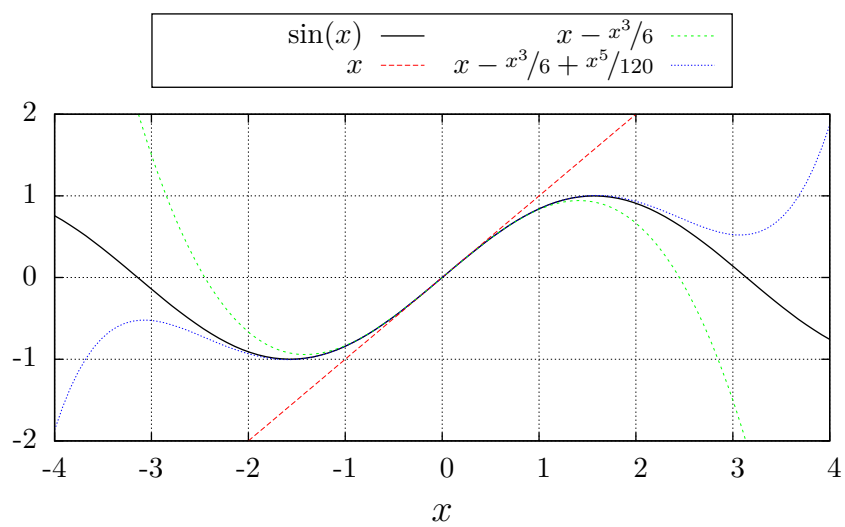
## 6 Sammanfattning

---

<sup>12</sup>För vidare läsning, se <https://github.com/andsunds/Fysikpris> under K6, men du måste själv kompilera `tex`-filen. (Jag lägger inte upp pdf-filen för att göra tröskan att försöka kopiera min rapport något högre.)



Figur 7



Figur 8

## A Taylorutvecklingar