

Behandling av experimentella resultat

En introduktion för fysikstudenter om hur man ska hantera mätresultat och feluppskattningar

Andréas Sundström*

2016-06-12, v 0.1

Förord

Det här kompendiet är skrivet som en introduktion till feluppskattningar för det svenska IPhO-laget. Jag har försökt fatta mig kort, men jag har en tendens att kunna dra iväg när jag skriver. Jag har försökt lägga innehållet på en nivå för att kunna förstås av en gymnasieelev, men det är inte alltid det går så bra... Ni är de första som läser det här kompendiet. Tycker du att det här var för svårförståeligt så har **jag** skrivit för komplicerat, och du är inte ensam om att tycka att kompediet var svårt. *Så säg till om det var krångligt!*

Det viktigaste innehållet finns i avsnitt 2, men jag tyckte att det behövs en liten teoretisk bakgrund också, den finns i avsnitt 1. Det avsnittet ska man läsa om man vill få en lite klarare bild om varför feluppskattningarna beräknas på det ena eller andra viset. Avslutningsvis räknas ett exempel med lite olika feluppskattningar.

Sedan har jag även lagt till en bilaga om Taylorutvecklingar. Den hör inte så mycket ihop med resten av det här kompendiet, men det är matnyttigt att kunna göra uppskattningar både för teoretiska och experimentella beräkningar.

Andréas Sundström
Göteborg, 2016-06-12

*sundstrom.andreas@gmail.com Jag tar gärna emot synpunkter och förslag.

Innehåll

1	Sannolihetslära och statistik	1
1.1	Stokastiska variabler	1
1.2	Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner	1
1.2.1	Normalfördelningen	2
1.3	Väntevärden, varianser och standardavvikelse	2
1.3.1	Några nyttiga satser (överkurs)	3
1.3.2	Skattning från mätdata	4
2	Feluppskattningar	5
2.1	Systematiska fel – noggrannhet och precision	5
2.1.1	Mätupplösning	6
2.2	Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem	7
2.3	Felpropagering	8
2.3.1	När det handlar om ett potenssamband	8
3	Regression	8
4	Exempel på feluppskattning	8
4.1	Mätning av g med fritt fall	8
4.2	Mätning av g med pendel	8
5	Sammanfattning	8

Bilagor

A	Approximationer	A1
A.1	Olika storleksordningar	A1
A.2	Taylorutvecklingar	A1

1 Sannolikhetslära och statistik

När man gör mätningar vill man oftast ta reda på någon storhets värde – exempelvis periodtiden på en pendel. Med en mätning kan man dock inte säga något om hur bra mätningen var. Men med flera mätningar kan vi börja göra statistik över dem. Då

Jag vill även betona vikten av statistik i framtida vetenskapliga och tekniska karriärer. *Statistik är ett mycket kraftfullt verktyg.* Statistiken, när man börjar behärska den, är mycket mer än bara ”medelvärden och standardavvikelser”; den spelar en väsentlig roll i mer eller mindre all experimentell vetenskap – särskilt vid feluppskattningar.

1.1 Stokastiska variabler

Precis som vanliga variabler används stokastiska variabler för att beteckna något okänt. Men i fallet med stokastiska variabler saknar de ett värde. De är mer tänkta som ett koncept för att beteckna en slumpartad händelse eller process. Man kan göra en observation/mätning av en stokastisk variabel och få ett värde, men det är bara ett mätvärde som man kan få.

Till exempel kan man betrakta ett tärningskast. Det kan beskrivas med en stokastisk variabel X som sen kan mätas till ett visst utfall x . Alltså att själva tärningen i sig inte kan ha ett värde, men när man gör en observation (kastar tärningen) kan man få ett mätresultat. Den stokastiska variabeln X sägs ha ett visst utfallsrum, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, och varje punkt i utfallsrummet har en viss sannolikhet, $1/6$.

Fördelen med att ha stokastiska variabler är att man, likt vanliga variabler, kan börja räkna med dem mer generellt än om man bara har vissa specialfall. I det här kompendiet kommer de att användas, men inte med så stor vikt. (Stokastiska variabler kommer här att betecknas med stora bokstäver.)

1.2 Sannolikhetsfördelningar och täthetsfunktioner

Den statistik och sannolikhetslära man får lära sig i gymnasiet brukar för det mesta vara diskret (och ändlig). Alltså att det finns ett ändligt antal möjliga utfall och varje utfall är distinkt. Exempel på detta är tärningskast, lottdragning och kortlekar.

Verkligheten är dock oftast mer komplicerad än så. När man gör mätningar handlar det oftast om mätningar av en reellvärd storhet som t.ex. en längd¹. Detta betyder att längden kommer att anta ett reellt antal milimetrar och inte vara begränsad till ett ändligt antal möjliga värden. För att analysera detta behövs statistik för kontinuerliga fördelningar.

Sannolikhetsfördelningar karakteriseras av sin täthetsfunktion, som brukar betecknas f . Täthetsfunktionen talar om hur sannolikt det är att få ett värde i ett visst intervall.

¹”Aha!” tänker ni: atomer och kvantfysik gör att det bara finns diskreta längder. ”Nähä!” säger jag: som fysiker måste man kunna hantera approximationer och veta begränsningarna i sina mätningar. Med en linjal eller skjutmått finns det ingen chans i världen att man skulle kunna stöta på problem orsakade av kvantfysik. Man kan alltså betrakta det som om de möjliga värden som längden kan anta ligger kontinuerligt.

Notera dock att den *inte* ger sannolikheten att få ett specifikt värde. Eftersom det finns (ouppräknerligt) oändligt många möjliga utfall så är sannolikheten att få ett visst exakt värde

$$\mathcal{P}(X = x) = \frac{1}{\infty} = 0. \quad (1)$$

För att istället beräkna sannolikheten att få sitt utfall X i ett visst intervall $[a, b]$ måste man integrera:

$$\mathcal{P}(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Sannolikheten att få $a < X < b$ bestäms alltså av arean under $f(x)$.

1.2.1 Normalfördelningen

En av de vanligaste fördelningarna är normalfördelningen. Den har täthetsfunktionen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad (3)$$

där μ är fördelningens *väntevärde* och σ är dess *standardavvikelse*. I Figur 1 visas täthetsfunktionen för några olika val av μ och σ . Där ser vi att μ svarar mot var någonstans fördelningen är centrerad, och att σ svarar mot hur bred fördelningen blir.

Som kan ses i Figur 1 går sannolikhetsfördelningen ner och blir väldigt liten för värden långt ifrån μ . Till exempel ligger ca 98 % av all sannolikhet/area under kurvan inom $\mu \pm 2\sigma$, men sen går det snabbt – fortsätter man uppåt så ligger 99,99997 % inom $\mu \pm 5\sigma$.

Kvadraten i exponentialen ger täthetsfunktionen den klassiska klockformen hos en Gaußisk kurva, och faktorn framför säkerställer att den totala integralen

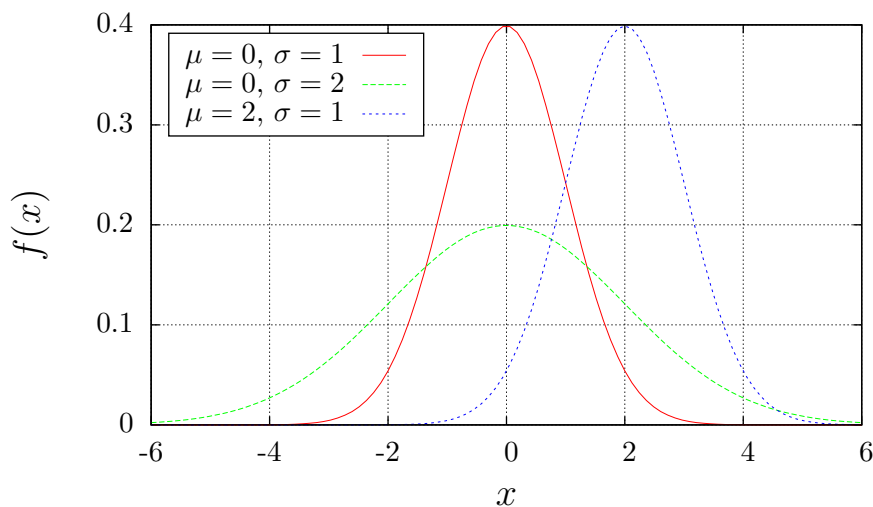
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (4)$$

Detta är något som *gäller för alla täthetsfunktioner*.

Normalfördelningen kallas just "normal" för att det finns en sats som säger att i princip alla slumpfenomen blir normalfördelade om samma process upprepas väldigt många gånger. Ett exempel på detta är om man sannolikheten att få ett visst antal "klave" efter flera slantsinglingar. Den här egenskapen gör att de allra flesta *mätfelen antas vara normalfördelade*.

1.3 Väntevärden, varianser och standardavvikelser

De vanligaste fördelningarna har, som normalfördelningen, väntevärde och varians. Dessa beräknas med täthetsfunktionen. Det är också dessa som främst används i felanalys.



Figur 1: Täthetsfunktioner till normalfördelningar med olika värden på väntevärdet μ och standardavvikelsen σ . Varje kurva har den klassiska Gaußiska klockformen.

Väntevärdet av den stokastiska variabeln X , med täthetsfunktion f , definieras som

$$\langle X \rangle = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx. \quad (5)$$

Det är inte helt klart vad tolkningen ska vara direkt från definitionen, men man kan jämföra väntevärdesintegralen med en slags tyngdpunktsberäkning. Man lägger ihop varje punkts "sannolikhetsmassa", $f(x) dx$, gånger punktes avstånd, x , från origo; till slut får man den sammanlagda tyngdpunkten. Man kan faktiskt hitta en fördelnings väntevärde genom att kippa ut en (styv) pappersbit formad efter ytan under kurvan och balansera den utklippta formen.

Sedan kan variansen definieras med hjälp av väntevärden:

$$\text{var}[X] = \sigma^2 = \langle (X - \mu)^2 \rangle. \quad (6)$$

Tolkningen av variansen är att det är ett väntevärde på hur mycket avvikelse man får från μ , men för att ta med både positiva och negativa avvikelser kvadreras de innan man tar väntevärdet. Härifrån syns också att *standardavvikelsen ges som roten ur variansen*.

1.3.1 Några nyttiga satser (översikt)

Det viktigaste man behöver veta om väntevärden är att de är linjära. Alltså att

$$\langle \alpha X + \beta Y + \gamma \rangle = \alpha \langle X \rangle + \beta \langle Y \rangle + \gamma, \quad (7)$$

för godtyckliga stokastiska variabler X och Y samt några konstanter α , β och γ . Den här regeln kan utvidgas till ett godtyckligt antal variabler.

För variansen gäller en liknande regel

$$\text{var}[\alpha X + \beta Y + \gamma] = \alpha^2 \text{var}[X] + \beta^2 \text{var}[Y], \quad (8)$$

men här måste X och Y vara statistiskt oberoende². Även här kan man utvidga regeln till ett godtyckligt antal oberoende variabler.

Speciellt gäller att om man har N stycken oberoende stokastiska variabler X_i med lika fördelning och man vill ta ett medelvärde

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \quad (9)$$

så kan man beräkna dess väntevärde och varians med hjälp av reglerna ovan. Väntevärdet ges då från (7) som

$$\langle \bar{X} \rangle = \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \overbrace{\langle X_i \rangle}^{\mu} = \mu, \quad (10)$$

där μ är väntevärdet av varje enskild variabel från den givna fördelningen. Variansen får man med (8) sedan som

$$\text{var}[\bar{X}] = \text{var}\left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i\right] = \text{var}\left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N^2} \overbrace{\text{var}[X_i]}^{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{N}. \quad (11)$$

Dessa resultat kommer att användas i feluppsättningar genom att betrakta varje mätning som en observation av respektive X_i .

1.3.2 Skattning från mätdata

Har man ett stokastiskt system och vill försöka mäta dess väntevärde och standardavvikelse, så måste man ha många mätningar på det. Det är nu som statistiken kommer in i bilden – hur man behandlar tagna mätningar av en stokastisk variabel.

Från (10) visade det sig att väntevärdet av ett medelvärde är samma som väntevärdet av det man mäter på. Vidare visade det sig att variansen av medelvärdet minskade som $1/N$. Tillsammans ger detta att *ju fler mätningar man gör desto större är sannolikheten att medelvärdet man får blir just väntevärdet*. Detta betyder att man kan skatta väntevärdet med

$$\langle X \rangle = \mu \approx \bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (12)$$

Här användes små bokstäver x_i för att beteckna att de är tagna mätvärden – de har alltså ett fast värde.

²Statistiskt oberoende är en ganska knepig term att definiera. Men enkelt sett så betyder det ungefär vad magkänslan säger: att resultatet av en mätning på den ena ska inte påverka resultatet på den andra.

Om nu väntevärden gick att skatta som medelvärden bör man väl kunna göra det samma för varianser. Definitionen av varians i (6) består ju av två väntevärden (två stycken eftersom $\mu = \langle X \rangle$), så det borde gå att skatta variansen med medelvärdet av $(x_i - \bar{x})^2$. Svaret är att det nästan går. Eftersom man bara får ett ungefärligt värde på μ från (12) måste medelvärdet justeras något. Det visar sig att man ska använda

$$\text{var}[X] = \sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (13)$$

för att skatta variansen. Standardavvikelsen fås enkelt genom att dra roten ur skattningen av variansen:

$$\sigma \approx s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (14)$$

Detta kallas *standradfelet* och är det namn som man har gett till skattningen av standardavvikelsen. Notera att s är standradfelet i uppsättningen av alla mätpunkter. För att få *standardfelet i medelvärdet* använder man (11) och får s/\sqrt{N} .

2 Feluppskattningar

När man vill uppskatta hur stora experimentella fel/osäkerheter man har finns det två typer av fel och två typer av feluppskattningar. De två typerna av fel som finns är systematiska och statistiska. Sedan är de två typerna av feluppskattningar som man behöver kunna. Dels direkt feluppskattning (av statistiska fel), dels propagering av osäkerhet.

2.1 Systematiska fel – noggrannhet och precision

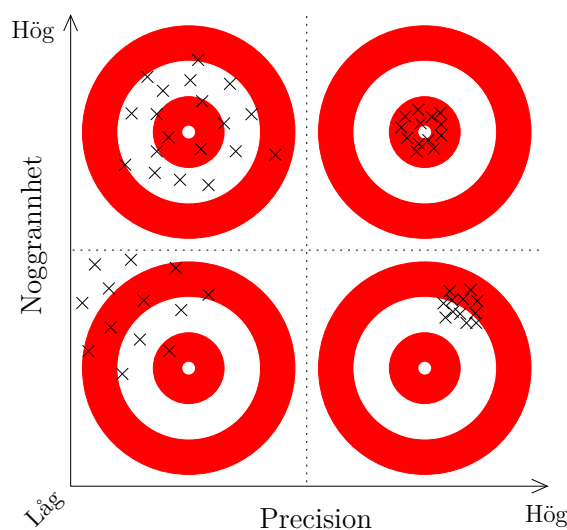
Ett systematiskt fel är något som gör att ens mätresultat hela tiden är lite fel åt något håll³. Dessa karakteriseras av att det inte hjälper med flera mätningar för att få bättre mätresultat.

Man brukar skilja på två olika typer av godhet i mätningar. Det finns dels noggrannhet, dels precision. Noggrannhet, eller rikighet som det ibland kallas, svarar mot hur nära det "sanna"⁴ värdet mätningarna kommer i medel. Precisionen svarar å andra sida mot hur tätt mätresultaten hamnar, eller hur liten spridning man får i dem. De två koncepten illustreras i Figur 2.

Som kan ses i Figur 2 svarar låg noggrannhet mot ett systematiskt fel som gör att medelvärdet avviker från det "sanna" värdet. Vidare kan man med statistisk analys bara ta reda på spridningen i resultaten – alltså hur bra precision man har. Tillsammans ger

³Det behöver inte nödvändigtvis vara så att det är just fel åt samma håll hela tiden, men oftast är ett systematiskt fel något som ger en förskjutning av ens mätresultat.

⁴Jag sätter "sanna" inom citationstecken för att ur ett experimentalistiskt perspektiv finns det inget sätt att veta det verkligt sanna värdet – man kan bara se var man träffade men inte måltavlan. Detta gör att det inte går att säga att man har fått det sanna värdet.



Figur 2: Illustration av skillnaden mellan noggrannhet och precision. Måltavlorna representerar en mätning, där mitten på måltavlan svarar mot det "sanna" värdet. Fallen med låg noggrannhet svarar mot systematiska fel som inte går att avhjälpa med medelvärden av fler mätningar.

detta en ganska prekär situation att hantera i felanalys: *Man vill veta hur **noggranna** ens mätningar är, men man kan bara ta reda på hur **precisa** de är.*

Sättet man löser detta på är att låtsas som att det regnar och strunta i eventuella systematiska fel när man redovisar sin felanalys. Detta förutsätter såklart att man verkligen har försökt eliminera alla systematiska fel; de som är kvar är dock de som man inte kände till, vilket betyder att det i princip är omöjligt att kunna uppskatta storleken på dem. I praktiken redovisar man oftast bara spridningen i mätresultaten och säger att märosäkerheten är samma som spridningen.

2.1.1 Mätupplösning

En sorts systematiska⁵ osäkerheter som man ofta kommer att stöta på härör från mätinstrumentets upplösning. Ett tydligt exempel på detta är en linjal; oavsett hur många gånger man försöker mäta bredden på ett hårstrå kommer man bara att få 0 mm som resultat.

Sättet att hantera detta på är att erkänna att man har ett systematiskt fel som kommer från upplösningen, och ta med det i beräkningarna. Detta gör man genom att själv uppskatta vad avrundningsfelet kan vara i mätningen. I generellt gäller att

- analoga instrument har ett avrundningsfel som är \pm halva avståndet mellan markörer. Alltså att en linjal som är mm-graderad får en mätosäkerhet på $\pm 0,5$ mm

⁵Jag har valt att klassa dem som systematiska av anledningen att det oftast inte hjälper att ta ett medelvärde av flera mätningar.

(även om man tycker att mätningar ser ut att vara närmare skalstecket än så).

- digitala instrument är ganska opålitliga i hur noggranna de är. Detta betyder att osäkerheten *inte* behöver vara i sista siffran, utan man måste kolla manualen för att vara helt säker. *I IPhO gäller dock att man får anta att osäkerhetsgränsen ligger i sista siffran.*

Dessa tumregler kan användas i fall där man bedömer att upprepade mätningar inte kommer att kunna ge förändrade mätresultat. Typfall där detta gäller är längdmätning (av något objekt) med linjal eller skjutmått, och spännings- eller strömmätningmätning med multimeter. I andra fall är det alltid rekommenderat att göra upprepade mätningar (gärna upp till 10 stycken men minst 3).

2.2 Statistiska osäkerheter och hur man uppskattar dem

För att ta reda på precisionen i mätresultaten behövs statistik. Om ens noggrannhet är hög, övre halvan i Figur 2, behöver man ändå veta hur god precision man har. Gör man bara en mätning har man ingen möjlighet att veta hur nära det "sanna" resultatet man kom. Det är där man måste börja använda lite statistik.

Säg att det finns en storhet x som ska mätas, men att varje mätning har ett mätfel δx . Det som mäts blir då

$$\hat{x}_i = x + \delta x_i. \quad (15)$$

Utan någon mer information om δx går det inte att säga så mycket mer från mätningen. Men som sagts tidigare antas mätfelet δx vara normalfördelat med $\mu = 0$ fast med ett okänt σ . Det är oftast σ som man tar reda på för att ge en osäkerhetsuppskattning av ens mätning.

För att få fram ett värde på x tar man ett medelvärde av flera mätningar. Detta ger

$$\bar{x} = \frac{\hat{x}_1 + \hat{x}_2 + \dots + \hat{x}_N}{N} = \frac{Nx + \delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_N}{N} = x + \bar{\delta x}. \quad (16)$$

Vi utnyttjar nu att medelvärdet $\bar{\delta x} \approx \mu = 0$, vilket ger att $\bar{x} \approx x$. Här syns att antagandet $\mu = 0$ betyder att det inte finns något systematiskt fel.

För att sedan ta reda på precisionen i mätningarna behövs standardavvikelsen av δx . Denna fås enkelt som standardfelet från (14). Men eftersom det beräknade värdet \bar{x} är ett medelvärde betyder det att osäkerheten är mindre i \bar{x} än i varje enskilt \hat{x}_i . Standardfelet från (14) ger däremot en mått på hur spridda värden man har fått. Som nämnts tidigare får man standardavvikelsen i *medelvärdet* genom att dela med \sqrt{N} . Mätosäkerheten⁶ Δx blir då

$$\Delta x = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (17)$$

Detta är en av de vanligaste beräkningarna man kommer att behöva göra i felanalys.⁷

⁶Notera skillnaden mellan δx och Δx . Den första är felet i varje enskild mätning, medan den andra är den totala osäkerheten i slutresultatet av en längre mätserie.

⁷ Samtidigt känns det lite som fusk att man bara kan "slänga in ett extra \sqrt{N} och så blev osäkerheten

2.3 Felpropagering

2.3.1 När det handlar om ett potenssamband

3 Regression

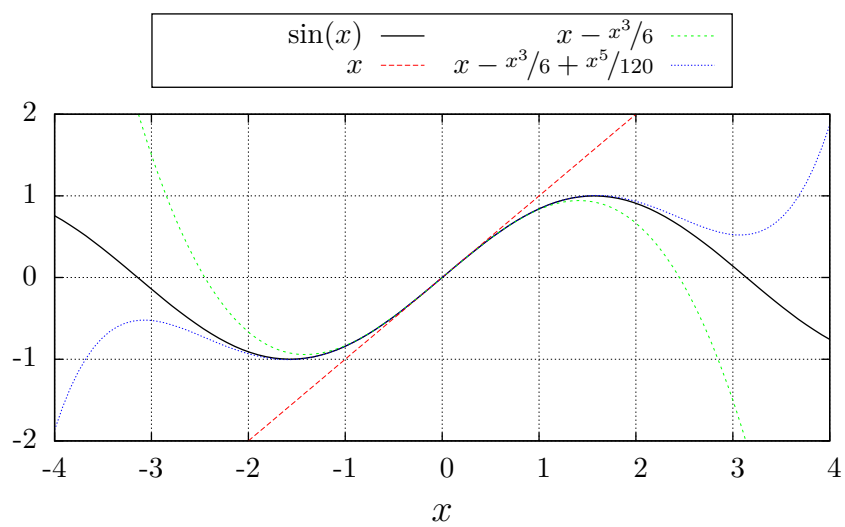
4 Exempel på feluppskattning

4.1 Mätning av g med fritt fall

4.2 Mätning av g med pendel

5 Sammanfattning

plötsligt mindre”. Det här var en av de svåraste sakerna att acceptera med felanalys när jag började med sånt. Men allt följer från (11).



Figur 3

A Approximationer

A.1 Olika storleksordningar

A.2 Taylorutvecklingar