

Concurso Público do Instituto Federal de Sertão

EBTT Física.

André V. Silva

www.andrevsilva.com

Friday 29th August, 2025

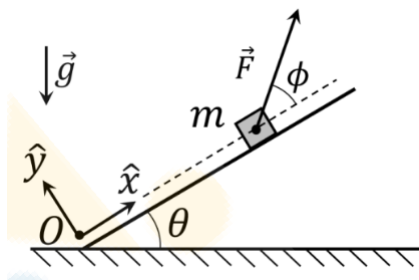
Contents

1	Mecânica	2
1.1	Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima .	2
1.2	Questão 42 — Cilindro com atrito	4
1.3	Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência	7
1.4	Questão 44 - Pêndulo Físico	12
1.5	Questão 45 - Colisão Unidimensional inelástica	14
1.6	Questão 47 - Oscilações acopladas	15
2	Gravitação	17
2.1	Questão 46 - Balança de torção de Cavendish	17

1 Mecânica

1.1 Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima

Um bloco de massa m encontra-se em repouso sobre um plano inclinado de ângulo θ com a horizontal. Uma força \vec{F} é aplicada ao bloco, formando ângulo φ com a direção do plano, como indicado na figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é μ . Determine a intensidade mínima da força \vec{F} necessária para colocar o bloco na iminência de subir a rampa.



1) Equilíbrio de forças

Projetando as forças ao longo dos eixos \hat{x} (paralelo à rampa, apontando para cima) e \hat{y} (normal ao plano):

$$F \cos \varphi - mg \sin \theta - \mu N = 0 \quad (1)$$

$$N - mg \cos \theta + F \sin \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg \cos \theta - F \sin \varphi \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$F \cos \varphi = mg \sin \theta + \mu (mg \cos \theta - F \sin \varphi). \quad (3)$$

2) Expressão para a força aplicada

Da equação (3), resulta:

$$F(\varphi) = \frac{mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\cos \varphi + \mu \sin \varphi}. \quad (4)$$

3) Maximização do denominador via Cauchy–Schwarz

O denominador pode ser escrito como produto escalar:

$$\cos \varphi + \mu \sin \varphi = (\cos \varphi, \sin \varphi) \cdot (1, \mu).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz :

$$\boxed{\cos \varphi + \mu \sin \varphi \leq \sqrt{1 + \mu^2}.} \quad (5)$$

A igualdade em (5) ocorre quando

$$\tan \varphi^* = \mu, \quad (6)$$

isto é,

$$\cos \varphi^* = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}}, \quad \sin \varphi^* = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}.$$

4) Força mínima

Substituindo o valor máximo do denominador (5) em (4), temos:

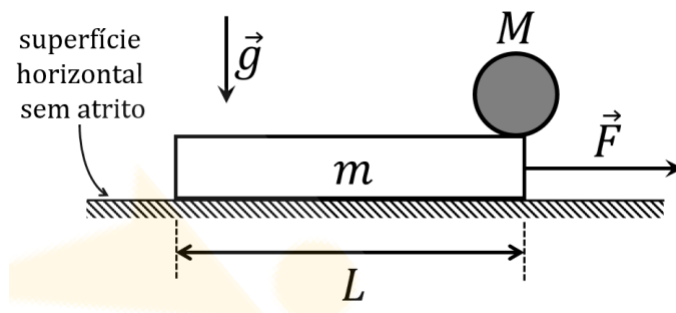
$$F_{\min} = \frac{mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)}{\sqrt{1 + \mu^2}}. \quad (7)$$

Portanto, a força mínima aplicada que coloca o bloco na iminência de subir a rampa é dada por (7), atingida quando (6) vale.

Alternativa correta: D.

1.2 Questão 42 — Cilindro com atrito

Uma prancha de madeira, com comprimento $L = 1,0$ m e massa $m = 0,4$ kg, possui um cilindro maciço e homogêneo de aço, com massa $M = 0,6$ kg, localizado na extremidade direita da prancha. O sistema está em repouso sobre um plano horizontal liso. Uma força constante $\vec{F} = (20 \text{ N}) \hat{x}$ é aplicada à prancha, fazendo com que os objetos comecem a se mover acelerados. O cilindro rola suavemente, sem escorregar, sobre a prancha, devido à presença de atrito entre eles. Desprezando o atrito entre a prancha e a superfície horizontal, bem como qualquer força de resistência do ar, determine o intervalo de tempo, em segundos, que o cilindro levará para cair da prancha, ou seja, para atingir a extremidade oposta e deixar de estar em contato com ela.



- (A) 0,1 s
- (B) 0,2 s
- (C) 0,3 s
- (D) 0,4 s
- (E) 0,5 s

1) Definição das variáveis e forças

Seja a_p a aceleração da prancha (para a direita) e a_c a aceleração do centro do cilindro (para a direita), ambas medidas no referencial inercial do solo. Seja f a força de atrito

horizontal exercida pela prancha sobre o cilindro (no ponto de contato). Pela ação e reação, a prancha sofre $-f$ da parte do cilindro.

Para o cilindro maciço homogêneo, momento de inércia em relação ao centro:

$$I = \frac{1}{2}MR^2. \quad (8)$$

Não precisamos do valor de R explicitamente, apenas das relações de rotação/translação.

2) Equações de movimento

Equilíbrio (segunda lei) para a prancha (força total horizontal):

$$F - f = ma_p. \quad (9)$$

Equação de translação para o cilindro:

$$f = Ma_c. \quad (10)$$

Equação de rotação para o cilindro (torque causado por f):

$$fR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha. \quad (11)$$

Condição de rolamento sem escorregar entre cilindro e prancha: a velocidade do ponto de contato do cilindro iguala a velocidade da prancha. Em termos das acelerações:

$$a_c - a_p = -R\alpha. \quad (12)$$

(A escolha do sinal garante consistência: se a prancha acelera mais que o cilindro, o contato induz uma rotação que satisfaz (12).)

3) Eliminação das incógnitas

Da (11) e de (12) obtemos:

$$fR = \frac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{2}MR\alpha.$$

Usando (12) $\alpha = -(a_c - a_p)/R$, resulta

$$f = -\frac{1}{2}M(a_c - a_p). \quad (13)$$

Por outro lado, pela translação do cilindro (10):

$$f = Ma_c. \quad (14)$$

Igualando (13) e (14):

$$Ma_c = -\frac{1}{2}M(a_c - a_p).$$

Dividindo por M e rearranjando:

$$a_c = -\frac{1}{2}a_c + \frac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{2}a_c = \frac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{1}{3}a_p.$$

Substituindo (1.2) em (9) e usando (10) ($f = Ma_c$):

$$F - Ma_c = ma_p.$$

Como $a_c = a_p/3$, obtemos

$$F - M\frac{a_p}{3} = ma_p \quad \Rightarrow \quad F = a_p\left(m + \frac{M}{3}\right).$$

Logo a aceleração da prancha:

$$a_p = \frac{F}{m + \frac{M}{3}} = \frac{3F}{3m + M}. \quad (15)$$

E, pela (1.2),

$$a_c = \frac{a_p}{3} = \frac{F}{3m + M}. \quad (16)$$

4) Aceleração relativa e tempo até cair

A aceleração relativa entre prancha e cilindro (aceleração com que a prancha “afasta-se” do cilindro) é

$$a_{\text{rel}} = a_p - a_c = a_p - \frac{a_p}{3} = \frac{2}{3}a_p.$$

Usando (15):

$$a_{\text{rel}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3F}{3m + M} = \frac{2F}{3m + M}. \quad (17)$$

Inicialmente a velocidade relativa é zero (sistema parte do repouso). A distância relativa a percorrer para que o cilindro passe da extremidade direita até a esquerda da prancha é L . Para movimento uniformemente acelerado, o tempo t satisfaz $L = \frac{1}{2}a_{\text{rel}}t^2$, portanto

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{rel}}}} = \sqrt{\frac{2L(3m + M)}{2F}} = \sqrt{\frac{(3m + M)L}{F}}. \quad (18)$$

5) Substituição numérica

Dados: $m = 0,4$ kg, $M = 0,6$ kg, $L = 1,0$ m, $F = 20$ N.

Calcule $3m + M$:

$$3m + M = 3(0,4) + 0,6 = 1,2 + 0,6 = 1,8 \text{ kg}.$$

Substituindo em (18):

$$t = \sqrt{\frac{(3m + M)L}{F}} = \sqrt{\frac{1,8 \times 1,0}{20}} = \sqrt{\frac{1,8}{20}} = \sqrt{0,09} = 0,30 \text{ s}.$$

Resposta: $t = 0,3$ s. (Alternativa C.)

1.3 Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência

Um projétil de massa m é lançado verticalmente para cima a partir da posição $z = 0$ com velocidade inicial $\vec{v} = v_0\hat{z}$ ($v_0 > 0$) no instante $t = 0$. Além da força gravitacional, atua sobre ele uma força de resistência do ar proporcional à velocidade: $\vec{F} = -\beta m\vec{v}$, onde $\beta > 0$ é o parâmetro de amortecimento. A aceleração da gravidade é $\vec{g} = -g\hat{z}$. Determine o trabalho realizado pela força de resistência desde o lançamento até a altura máxima.

Solução:

A força de resistência é:

$$\vec{F}_r = -\beta m\vec{v} = -\beta mv\hat{z}.$$

O trabalho realizado pela força de resistência até a altura máxima é:

$$W_r = \int_0^{z_{\max}} \vec{F}_r \cdot d\vec{z} = -\beta m \int_0^{z_{\max}} v \, dz.$$

A equação do movimento é:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - \beta m v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \beta v = -g.}$$

Solução da equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \beta v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \beta v$$

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -dt$$

$$\int \frac{dv}{g + \beta v} = - \int dt$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} = -t + C$$

Usando as condições de contorno do problema (quando $t = 0$ e $v = v_0$):

$$C = \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} = -t + \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{\ln(g + \beta v)}{\beta} - \frac{\ln(g + \beta v_0)}{\beta} = -t$$

$$\ln(g + \beta v) - \ln(g + \beta v_0) = -\beta t$$

$$\ln \left[\frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)} \right] = -\beta t$$

$$\frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)} = e^{-\beta t}$$

$$(g + \beta v) = (g + \beta v_0) e^{-\beta t}$$

$$\beta v = (g + \beta v_0) e^{-\beta t} - g$$

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}.$$

Altura máxima ocorre em t_{\max} tal que $v(t_{\max}) = 0$:

$$0 = \left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t_{\max}} - \frac{g}{\beta} \Rightarrow e^{-\beta t_{\max}} = \frac{g/\beta}{v_0 + g/\beta} \Rightarrow t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right).$$

O trabalho da força de resistência:

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} v^2(t) dt = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \right]^2 dt.$$

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta} \right]^2 dt$$

$$\begin{aligned} W_r &= -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2 e^{-2\beta t} - 2 \left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) \frac{g}{\beta} e^{-\beta t} + \left(\frac{g}{\beta} \right)^2 \right] dt \\ &= -\beta m \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2 \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt - 2 \left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right) \frac{g}{\beta} \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt + \left(\frac{g}{\beta} \right)^2 \int_0^{t_{\max}} dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} dt &= t_{\max}. \end{aligned}$$

Integrando e substituindo t_{\max} e $e^{-\beta t_{\max}}$:

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-2\beta \left(\frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right)}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^{-2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2 - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{1 + \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^2}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta} = \frac{1}{2\beta} \frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{\left(\frac{\beta}{g} \right)^2 \left(\frac{g}{\beta} + v_0 \right)^2}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{g^2}{2\beta^3} \frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta} \right)^2}. \quad \checkmark$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\beta \left(\frac{1}{\beta} \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{\ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)^{-1}}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right) - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\frac{\beta}{g} \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)} = \frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta} = \frac{\frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}}{\beta} = \frac{v_0}{\beta \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{v_0}{\beta \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}. \quad \checkmark$$

$$W_r = -\beta m \left[\left(\cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)^2 \left[\frac{g^2 \left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{2\beta^3 \left(\cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)^2} \right] - 2 \left(\cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right) \frac{g}{\beta} \frac{v_0}{\beta \left(\cancel{v_0 + \frac{g}{\beta}} \right)} + \left(\frac{g^2}{\beta^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = -\beta m \left[\frac{g^2 \left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right]}{2\beta^3} - 2g \frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{g^2}{\beta^3} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = - \left[\frac{mg^2}{2\beta^2} \left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} \right] - 2mg \frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

$$W_r = - \left[\frac{mgv_0}{\beta} + \frac{mv_0^2}{2} - 2mg \frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right]$$

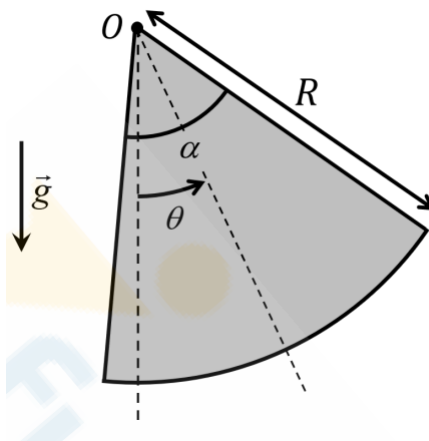
$$W_r = - \frac{mgv_0}{\beta} - \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right)$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} \left[1 - \left(\frac{mg^2}{\beta^2} \right) \ln \left(1 + \frac{\beta v_0}{g} \right) \right] - \frac{mv_0^2}{2} \quad \blacksquare$$

1.4 Questão 44 - Pêndulo Físico

Um pêndulo físico constituído por uma placa fina e homogênea em forma de um setor circular de raio R e ângulo central α , está suspenso verticalmente no centro O do disco de origem. O pêndulo é deslocado por um ângulo θ em relação à vertical e, em seguida, abandonado a partir do repouso para oscilar. A aceleração local da gravidade é g e possíveis atritos são desprezíveis. Assinale a alternativa que apresenta a expressão correta para a frequência angular ω de pequenas oscilações do pêndulo físico.



- (A) $\omega = \sqrt{\frac{4g}{3R}}$
- (B) $\omega = \sqrt{\frac{8g \cos(\alpha)}{3R \alpha}}$
- (C) $\omega = \sqrt{\frac{8g \sin(\alpha/2)}{3R \alpha}}$
- (D) $\omega = \sqrt{\frac{4g \sin(\alpha)}{3R \alpha}}$
- (E) $\omega = \sqrt{\frac{4g \cos(\alpha/2)}{3R \alpha}}$

Solução:

Para pequenas oscilações linearizamos $\sin \theta \approx \theta$ e usamos a equação do pêndulo físico:

$$I_O \ddot{\theta} + mgh \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O} \theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0,$$

onde I_O é o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão O (eixo perpendicular ao plano) e h é a distância do centro de massa ao ponto O .

1) Massa e momento de inércia:

Para uma placa homogênea em forma de setor, a densidade superficial σ satisfaz

$$m = \sigma \cdot \text{área} = \sigma \left(\frac{1}{2} \alpha R^2 \right).$$

O momento de inércia em relação a O (eixo perpendicular ao plano) é

$$I_O = \sigma \int_0^\alpha \int_0^R r^2 r dr d\phi = \sigma \frac{\alpha R^4}{4}.$$

Substituindo $\sigma = \frac{2m}{\alpha R^2}$ obtemos

$$I_O = \frac{2m}{\alpha R^2} \cdot \frac{\alpha R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

2) Centro de massa (distância radial h a partir de O):

O centro de massa de um setor circular encontra-se sobre a bissetriz e sua distância ao centro é

$$h = r_{CM} = \frac{4R \sin(\alpha/2)}{3\alpha}.$$

3) Frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mg \frac{4R \sin(\alpha/2)}{3\alpha}}{\frac{mR^2}{2}}} = \sqrt{\frac{8g \sin(\alpha/2)}{3R\alpha}}.$$

Portanto, a alternativa correta é **(C)**.

1.5 Questão 45 - Colisão Unidimensional inelástica

Considere uma partícula de massa m , que se move com velocidade v_0 , e realiza uma colisão unidimensional inelástica com outra partícula de massa M , inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição do material constituinte das partículas é denotado por ε . Considerando que a razão das massas das partículas é $M/m = \lambda$, analise as assertivas abaixo:

- I. A velocidade da partícula de massa m após a colisão é $v = v_0(1 - \varepsilon\lambda)/(1 + \lambda)$.
- II. A velocidade da partícula de massa M após a colisão é $V = v_0(1 + \varepsilon)/(1 + \lambda)$.
- III. A razão entre a energia cinética adquirida pela partícula de massa M e a energia cinética inicial da partícula de massa m é $\lambda(\varepsilon + 1)/(\lambda + 1)$.

Quais estão corretas?

- (A) Apenas I.
- (B) Apenas II.
- (C) Apenas III.
- (D) Apenas I e II.
- (E) I, II e III.

Solução:

Pela conservação do momento e definição do coeficiente de restituição:

$$mv_0 = mv + MV, \quad V - v = \varepsilon(v_0 - 0) = \varepsilon v_0.$$

Da segunda equação temos $V = v + \varepsilon v_0$. Substituindo na conservação do momento:

$$mv_0 = mv + M(v + \varepsilon v_0) = (m + M)v + M\varepsilon v_0.$$

Isolando v :

$$(m + M)v = v_0(m - M\varepsilon) \Rightarrow v = v_0 \frac{m - M\varepsilon}{m + M} = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \lambda},$$

o que confirma a assertiva **I**.

Agora $V = v + \varepsilon v_0$:

$$V = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon}{1 + \lambda} + \varepsilon v_0 = v_0 \frac{1 - \lambda\varepsilon + \varepsilon(1 + \lambda)}{1 + \lambda} = v_0 \frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda},$$

confirmando a assertiva **II**.

Para a assertiva **III**, calculemos a razão das energias:

$$\frac{K_M}{K_{m, \text{inicial}}} = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{M}{m} \left(\frac{V}{v_0} \right)^2 = \lambda \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 + \lambda} \right)^2 = \frac{\lambda(1 + \varepsilon)^2}{(1 + \lambda)^2},$$

que **não** coincide com $\frac{\lambda(1 + \varepsilon)}{1 + \lambda}$ (a dada na III). Portanto a assertiva **III** é falsa.

Assim, estão corretas apenas I e II.

A resposta correta é alternativa **(D)**.

1.6 Questão 47 - Oscilações acopladas

Dois blocos (1 e 2) de massas iguais a $m = 0,5 \text{ kg}$ são conectados a três molas entre paredes, conforme a figura. As molas externas possuem constante elástica $k = 2,0 \text{ N/m}$ e a mola central $k_0 = 8,0 \text{ N/m}$. As molas têm massa desprezível e satisfazem a lei de Hooke. Quando os blocos estão em equilíbrio, as molas não apresentam deformação. Seja $x_1(t)$ o deslocamento do bloco (1) em relação à posição de equilíbrio e $x_2(t)$ o deslocamento do bloco (2). No instante inicial $t = 0$, ambos os blocos são soltos do repouso, com $x_1(0) = 10 \text{ cm}$ e $x_2(0) = 0$.

Determine as funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

(A) $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(6t)] \text{ m}$, $x_2(t) = 0,05[\cos(2t) - \cos(6t)] \text{ m}$

(B) $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(4t)] \text{ m}$, $x_2(t) = 0,05[\cos(4t) - \cos(2t)] \text{ m}$

(C) $x_1(t) = 0,05 \cos(3t) \cos(t) \text{ m}$, $x_2(t) = 0,05 \sin(3t) \sin(t) \text{ m}$

(D) $x_1(t) = 0,10 \cos(4t) \text{ m}$, $x_2(t) = 0,10 \sin(2t) \text{ m}$

$$(E) \quad x_1(t) = 0,10 \cos(2t) \text{ m}, \quad x_2(t) = 0,10 \sin(4t) \text{ m}$$

Solução:

1) **Equações de movimento:** Para o bloco 1:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_0(x_1 - x_2).$$

Para o bloco 2:

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_0(x_2 - x_1).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k_0}{m}x_1 - \frac{k_0}{m}x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k+k_0}{m}x_2 - \frac{k_0}{m}x_1 = 0. \end{cases}$$

2) **Matriz do sistema:**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{m} \begin{bmatrix} k+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k+k_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Com $m = 0,5$, $k = 2$ e $k_0 = 8$:

$$A = \frac{1}{0,5} \begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix}.$$

3) **Autovalores (modos normais):**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow (20 - \lambda)^2 - (-16)^2 = 0,$$

$$(20 - \lambda)^2 - 256 = 0, \Rightarrow 20 - \lambda = \pm 16.$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 36.$$

Logo, as frequências são:

$$\omega_1 = \sqrt{4} = 2, \quad \omega_2 = \sqrt{36} = 6.$$

4) **Autovetores:** Para $\lambda_1 = 4$:

$$(20 - 4)x_1 - 16x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Para $\lambda_2 = 36$:

$$(20 - 36)x_1 - 16x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2.$$

Modos normais:

$$\begin{cases} \text{Modo 1 (freq. 2 rad/s): } x_1 = x_2, \\ \text{Modo 2 (freq. 6 rad/s): } x_1 = -x_2. \end{cases}$$

5) **Combinação linear:** Solução geral:

$$x_1(t) = A \cos(2t) + B \cos(6t), \quad x_2(t) = A \cos(2t) - B \cos(6t).$$

6) **Condições iniciais:** No instante $t = 0$:

$$x_1(0) = A + B = 0,10, \quad x_2(0) = A - B = 0.$$

$$A = B = 0,05.$$

7) **Solução final:**

$$x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(6t)] \text{ m}, \quad x_2(t) = 0,05[\cos(2t) - \cos(6t)] \text{ m}.$$

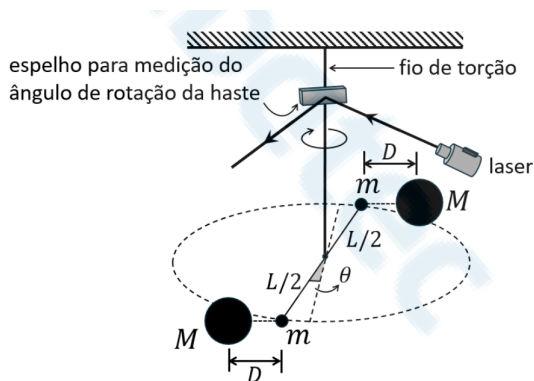
A resposta correta é a alternativa **(A)**.

2 Gravitação

2.1 Questão 46 - Balança de torção de Cavendish

No experimento de Henry Cavendish, de 1797, foi utilizada uma balança de torção para determinar o valor da constante gravitacional G da lei da gravitação universal de Newton. Considere uma balança de torção composta por uma barra de massa desprezível e comprimento L , suspensa horizontalmente pelo seu centro por um fio de

torção vertical. Duas pequenas esferas de massa igual a m estão presas em cada extremidade da barra. No primeiro passo do experimento, observa-se que, quando a barra é girada com um pequeno ângulo, torcendo o fio, e depois solta, o pêndulo de torção resultante sofre movimento harmônico simples com um período T . Em seguida, após o pêndulo ser parado e estar em sua posição de equilíbrio, um par de esferas grandes de massa igual a M são colocadas em lados opostos da barra, cada uma próxima a uma das massas m . Devido à atração gravitacional apenas entre cada par de massas, a barra é observada girando por um pequeno ângulo θ e depois parar nessa posição, com cada massa M a uma distância D da massa m correspondente. Determine uma expressão para G em termos das variáveis dadas no problema.



- (A) $G = \frac{\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$
- (B) $G = \frac{2\pi^2 D^2 L \theta}{MT^2}$
- (C) $G = \frac{4\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$
- (D) $G = \frac{\pi^2 D^2 L \theta}{mT^2}$
- (E) $G = \frac{\pi^2 D^2 L \theta}{4mT^2}$

Solução:

1) **Constante de torção via o período.** Para pequenas oscilações, o pêndulo de torção satisfaz

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{\kappa}} \Rightarrow \kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}.$$

A barra é desprezível e há duas massas m a $L/2$ do eixo, logo

$$I = 2m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{2} \Rightarrow \kappa = \frac{4\pi^2}{T^2} \frac{mL^2}{2} = \frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}.$$

2) **Equilíbrio com as massas M .** A força gravitacional entre M e m é

$$F = \frac{GmM}{D^2}.$$

Cada força produz um torque de módulo $F \cdot (L/2)$ em torno do centro; são duas forças simétricas, portanto o torque gravitacional total vale

$$\tau_g = 2F \left(\frac{L}{2} \right) = FL.$$

No novo equilíbrio, o torque elástico do fio $\tau_\kappa = \kappa \theta$ (para pequeno θ) equilibra o torque gravitacional:

$$\kappa \theta = FL = \frac{GmM}{D^2} L.$$

3) **Isolando G .** Substituindo κ :

$$\frac{2\pi^2 mL^2}{T^2} \theta = \frac{GmM}{D^2} L \Rightarrow \boxed{G = \frac{2\pi^2 D^2 L \theta}{MT^2}}.$$

A resposta correta é a alternativa **(B)**.

Problema. Um pêndulo de massa m_2 e comprimento L é solto do repouso na posição A , que faz um ângulo θ com a vertical. A corda passa por uma roldana ideal e traciona um bloco de massa m_1 sobre uma mesa horizontal. Ao o pêndulo atingir o ponto mais baixo B , qual deve ser o menor coeficiente de atrito estático μ_s entre m_1 e a mesa para que m_1 não deslize?

Solução.

1) *Velocidade do pêndulo em B.* Pela conservação de energia entre A e B :

$$m_2 g L (1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 \Rightarrow v_B^2 = 2 g L (1 - \cos \theta).$$

2) *Tração na corda em B.* No ponto mais baixo, as forças radiais no pêndulo dão

$$T_B - m_2 g = m_2 \frac{v_B^2}{L} \Rightarrow T_B = m_2 \left(g + \frac{v_B^2}{L} \right) = m_2 g [1 + 2(1 - \cos \theta)] = m_2 g (3 - 2 \cos \theta).$$

Como a roldana é ideal, a tração que puxa m_1 na horizontal é T_B .

3) *Condição de não deslizamento de m_1 .* Para m_1 permanecer em repouso, a força de atrito estático máxima deve ser ao menos igual à tração:

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \geq T_B.$$

Logo, o coeficiente mínimo é

$$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{T_B}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1} (3 - 2 \cos \theta)}.$$

Observação: O ponto B é o ponto mais baixo da trajetória, onde a tração é máxima; portanto, se m_1 não desliza em B , não deslizará em nenhuma outra posição.