ter 03 jun 2025 19:09:14

1.

Um estudante chuta um bloco sem atrito com uma velocidade inicial v_0, de modo que ele desliza reto para cima ao longo de um plano que está inclinado com um ângulo θ acima da horizontal.

(a) Escreva a segunda lei de Newton para o bloco e resolva-a para obter a posição do bloco como uma função do tempo.

(b) Quanto tempo o bloco levará até retornar à sua posição original?

Solução

(a) Segunda Lei de Newton e Posição em função do tempo

Como o plano está **sem atrito**, a única força atuando sobre o bloco ao longo do plano inclinado é a componente do peso. Projetando o peso na direção do plano, temos:

$$F = -mg\sin\theta$$

Aplicando a segunda lei de Newton:

$$F = ma \Rightarrow -mg\sin\theta = ma \Rightarrow a = -g\sin\theta$$

A aceleração é constante, então usamos a equação horária do movimento uniformemente acelerado (MRUA):

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Supondo que a posição inicial seja $x_0 = 0$, temos:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2$$

Portanto, a posição do bloco em função do tempo é:

$$\boxed{x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2}$$

(b) Tempo para retornar à posição original

O bloco retorna à posição original quando $x(t) = 0$. Usamos a equação obtida:

$$v_0 t - \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t^2 = 0$$

Colocando t em evidência:

$$t\left(v_0 - \frac{1}{2} g \sin\theta \cdot t\right) = 0$$

As soluções são:

$$t = 0 \quad \text{(instante inicial)}, \quad t = \frac{2v_0}{g \sin\theta}$$

Portanto, o tempo total até o bloco retornar à posição inicial é:

$$\boxed{t = \frac{2v_0}{g \sin\theta}}$$

2.

Considere uma esfera (diâmetro D, densidade ρ_{esf}) caindo no ar (densidade ρ_{ar}) e assuma que a força de arrasto é puramente quadrática.

(a) Use a equação (1) (com $\kappa = 1/4$ para a esfera) para mostrar que a velocidade limite será dada pela equação (2).

$$f_{\text{quad}} = \kappa \rho_{\text{ar}} A v^2 \tag{1}$$

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{8}{3} D g \cdot \frac{\rho_{\text{esf}}}{\rho_{\text{ar}}}} \tag{2}$$

(b) Use esse resultado para mostrar que em duas esferas do mesmo tamanho, a mais densa irá eventualmente cair mais rápido.

(c) Para duas esferas do mesmo material, mostre que a maior irá eventualmente cair mais rapidamente.

Solução

(a) Derivação da velocidade limite

No regime de queda com velocidade constante (velocidade limite), a força peso é equilibrada pela força de arrasto quadrática:

$$\boxed{P = f_{\text{quad}}}$$

A força peso de uma esfera de densidade ρ_{esf}, volume V, e aceleração gravitacional g é:

$$P = mg = \rho_{\text{esf}} V g = \rho_{\text{esf}} \cdot \frac{\pi D^3}{6} \cdot g$$

A área de seção transversal da esfera é:

$$A = \frac{\pi D^2}{4}$$

A força de arrasto é:

$$f_{\text{quad}} = \kappa \rho_{\text{ar}} A v_{\text{lim}}^2 = \kappa \rho_{\text{ar}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_{\text{lim}}^2$$

Igualando as forças:

$$\rho_{\text{esf}} \cdot \frac{\pi D^3}{6} \cdot g = \kappa \rho_{\text{ar}} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot v_{\text{lim}}^2$$

Cancelando π dos dois lados e isolando v_{lim}^2:

$$\rho_{\text{esf}} \cdot \frac{D^3}{6} \cdot g = \kappa \rho_{\text{ar}} \cdot \frac{D^2}{4} \cdot v_{\text{lim}}^2$$

$$v_{\text{lim}}^2 = \frac{\rho_{\text{esf}} \cdot D^3 \cdot g}{6\kappa \rho_{\text{ar}} \cdot D^2/4} = \frac{4\rho_{\text{esf}} D g}{6\kappa \rho_{\text{ar}}}$$

Substituindo $\kappa = \frac{1}{4}$:

$$v_{\text{lim}}^2 = \frac{4\rho_{\text{esf}} D g}{6 \cdot \frac{1}{4}\rho_{\text{ar}}} = \frac{16}{6} \cdot \frac{\rho_{\text{esf}} D g}{\rho_{\text{ar}}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{\rho_{\text{esf}} D g}{\rho_{\text{ar}}}$$

Logo,

$$\boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{8}{3} D g \cdot \frac{\rho_{\text{esf}}}{\rho_{\text{ar}}}}} \quad \checkmark$$

(b) Comparando densidades com mesmo diâmetro

Se duas esferas têm o mesmo diâmetro D, então:

$$v_{\text{lim}} \propto \sqrt{\rho_{\text{esf}}}$$

Ou seja, quanto maior for ρ_{esf}, maior será v_{lim}. Logo, a esfera mais densa cai mais rapidamente.

(c) Comparando tamanhos com mesmo material

Se duas esferas são do mesmo material, então ρ_{esf} é constante. Logo:

$$v_{\text{lim}} \propto \sqrt{D}$$

Ou seja, quanto maior o diâmetro D, maior a velocidade limite. Assim, a esfera maior cairá mais rapidamente.

3.

Uma partícula de massa m está se movendo sobre uma mesa sem atrito e está presa a uma mola de massa desprezível, cujo lado oposto passa através de um orifício sobre a mesa, onde ela é fixada. Inicialmente, a partícula está se movendo em um círculo de raio r_0 com velocidade angular ω_0, mas agora puxamos a mola na direção do orifício até um comprimento r ser formado entre o orifício e a partícula. Qual é a velocidade angular da partícula nesse momento?

Solução

Como não há torques externos, o **momento angular** da partícula em relação ao orifício é conservado.

Momento Angular Inicial

$$L_0 = I_0\omega_0 = mr_0^2\omega_0$$

Momento Angular Final

$$L = I\omega = mr^2\omega$$

Conservação do Momento Angular

$$L_0 = L \Rightarrow mr_0^2\omega_0 = mr^2\omega$$

Cancelando a massa m dos dois lados:

$$r_0^2\omega_0 = r^2\omega$$

Resolvendo para ω:

$$\boxed{\omega = \frac{r_0^2}{r^2}\omega_0}$$

Interpretação Física

Como $r < r_0$, segue que $\omega > \omega_0$. Isso significa que a velocidade angular da partícula aumenta à medida que ela se aproxima do orifício. Esse efeito é análogo ao de uma patinadora que recolhe os braços para girar mais rápido: ao reduzir o momento de inércia, a velocidade angular aumenta para conservar o momento angular total.

4.

Considere um foguete sujeito a uma força de resistência linear, $f = -bv$, e mais nenhuma outra força externa. Use a equação (3) para mostrar que, se o foguete parte do repouso e expele a massa a uma constante $k = -\dot{m}$, então, a sua velocidade será dada pela equação (4).

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{\text{ex}} + F^{\text{ext}} \tag{3}$$

$$v = \frac{k}{b}v_{\text{ex}}\left[1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{b/k}\right] \tag{4}$$

Solução

A equação (3) pode ser escrita como:

$$m\dot{v} = -\dot{m}v_{\text{ex}} - bv$$

Como $\dot{m} = -k$, temos $-\dot{m} = k$, logo:

$$m\dot{v} = kv_{\text{ex}} - bv$$

Dividindo ambos os lados por m:

$$\dot{v} = \frac{k}{m}v_{\text{ex}} - \frac{b}{m}v \tag{5}$$

Agora, usamos a relação entre massa e tempo. Como $\dot{m} = -k$, temos:

$$m(t) = m_0 - kt$$

Queremos eliminar t e resolver em função de m. Escrevemos $\dot{v}$ como derivada em relação à massa m usando a regra da cadeia:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dm} \cdot \frac{dm}{dt} = -k\frac{dv}{dm}$$

Substituindo isso na equação (5):

$$-k\frac{dv}{dm} = \frac{k}{m}v_{\text{ex}} - \frac{b}{m}v$$

Multiplicando ambos os lados por m:

$$-km\frac{dv}{dm} = kv_{\text{ex}} - bv$$

Multiplicando ambos os lados por $\frac{1}{k}$:

$$-m\frac{dv}{dm} = v_{\text{ex}} - \frac{b}{k}v$$

Reorganizando:

$$\frac{dv}{dm} + \frac{b}{km}v = \frac{v_{\text{ex}}}{m}$$

Essa é uma equação linear de primeira ordem para $v(m)$. O fator integrante é:

$$\mu(m) = \exp\left(\int \frac{b}{km}\,dm\right) = m^{b/k}$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\mu(m)$:

$$m^{b/k}\frac{dv}{dm} + \frac{b}{k}m^{b/k-1}v = v_{\text{ex}}m^{b/k-1}$$

O lado esquerdo é a derivada do produto:

$$\frac{d}{dm}\left(m^{b/k}v\right) = v_{\text{ex}}m^{b/k-1}$$

Integrando ambos os lados:

$$\int \frac{d}{dm}\left(m^{b/k}v\right)\,dm = \int v_{\mathrm{ex}} m^{b/k-1}\,dm$$

$$m^{b/k}v = v_{\mathrm{ex}} \cdot \frac{m^{b/k}}{b/k} + C$$

$$m^{b/k}v = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} m^{b/k} + C$$

Dividindo ambos os lados por $m^{b/k}$:

$$v = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} + \frac{C}{m^{b/k}}$$

Para encontrar a constante C, usamos a condição inicial: no instante em que $m = m_0$, $v = 0$:

$$0 = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} + \frac{C}{m_0^{b/k}} \Rightarrow \boxed{C = -\frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} m_0^{b/k}}$$

Substituindo C na equação da velocidade:

$$v = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} - \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} \left(\frac{m_0}{m}\right)^{b/k}$$

$$v = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} \left[1 - \left(\frac{m_0}{m}\right)^{b/k}\right]$$

Finalmente, reescrevendo como na equação (4):

$$\boxed{v = \frac{k}{b} v_{\mathrm{ex}} \left[1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^{b/k}\right]} \quad \checkmark$$