UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Primeira lista complementar de Eletromagnetismo 1

Março de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto
Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Sunday 30th March, 2025

Problema 1

a) Mostre que o rotacional de um gradiente de uma função qualquer é zero: $\nabla \times (\nabla f) = 0$, de duas formas: abrindo em componentes e argumentando pelo teorema de Stokes. **b)** Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

Solução:

Em componentes cartesianas, o gradiente de uma função escalar f é:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \tag{1}$$

O rotacional é definido como:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \hat{k}. \tag{3}$$

Como as derivadas parciais mistas são comutativas (desde que f seja suave), cada termo é zero:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \tag{4}$$

Pelo teorema de Stokes, a integral de linha de um gradiente ao longo de um caminho fechado é zero, implicando que seu rotacional é nulo.

b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{5}$$

de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

A divergência é definida como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Aplicando à definição do rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{7}$$

resultando em:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \tag{8}$$

Tomando a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \tag{9}$$

Como as derivadas mistas comutam, cada termo se anula, resultando em:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{10}$$

Pelo teorema da divergência, a integral de volume da divergência de um rotacional se reduz a uma integral de superfície de um campo tangencial, que desaparece, confirmando o resultado.

Problema 2

Encontre a área de um círculo no plano xy centrado na origem usando:
(i) coordenadas retangulares $x^2 + y^2 = a^2$
Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a} \right) \right] \tag{11}$$

(ii) coordenadas cilíndricas $r = a$. Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

A área do círculo pode ser calculada integrando a função da semicircunferência superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ em relação a x de $-a$ a a e depois dobrando o resultado:

$$A = 2 \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx. \tag{12}$$

Utilizando a dica fornecida:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a} \\ &= \left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}. \end{aligned}$$

Substituindo os limites:

$$\begin{aligned} A &= \left[a\sqrt{a^2-a^2} + a^2 \arcsin(1)\right] - \left[-a\sqrt{a^2-a^2} + a^2 \arcsin(-1)\right] \\ &= \left[a^2\frac{\pi}{2}\right] - \left[a^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= a^2\frac{\pi}{2} + a^2\frac{\pi}{2} \\ &= a^2\pi. \end{aligned}$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

Em coordenadas polares, a área do círculo é dada por:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\,dr\,d\theta. \tag{13}$$

Resolvendo a integral interna:

$$\int_0^a r\,dr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\,d\theta \\ &= \left.\frac{a^2}{2}\theta\right|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2}(2\pi - 0) \\ &= a^2\pi. \end{aligned}$$

Conclusão

O resultado final é o mesmo nos dois métodos, $A = \pi a^2$. No entanto, o cálculo utilizando coordenadas polares é significativamente mais simples, pois evita o uso de funções trigonométricas inversas e manipulação algébrica complexa.

Problema 3

Encontre o volume de uma esfera de raio R centrada na origem usando:
(i) Coordenadas retangulares $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
Dica:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] \tag{14}$$

(ii) Coordenadas cilíndricas $r^2 + z^2 = R^2$;
(iii) Coordenadas esféricas $r = R$.
Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?
Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

O volume da esfera pode ser encontrado integrando seções transversais circulares ao longo do eixo z:

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz. \tag{15}$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)\, dz \\
&= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{3R^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{2R^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

O volume da esfera é calculado como:

$$V = \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} 2\pi r\, dr\, dz. \tag{16}$$

Resolvendo a integral interna:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} 2\pi r\, dr &= 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \\
&= \pi(R^2 - z^2).
\end{aligned}$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\, dz,$$

que já foi resolvida anteriormente e resulta em:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{17}$$

(iii) Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, o volume é dado por:

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta\, d\phi\, d\theta\, dr. \tag{18}$$

Resolvendo as integrais:

$$\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi,$$
$$\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \int_0^{\pi} d(-\cos\theta) = (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} = (1+1) = 2,$$
$$\int_0^R r^2 \, dr = \frac{R^3}{3}.$$

Multiplicando os resultados:

$$V = 2\pi \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{19}$$

Conclusão

O volume obtido é o mesmo em todos os casos, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. No entanto, o método de coordenadas esféricas é o mais eficiente, pois evita integrais mais complexas e simplifica a abordagem diretamente para o volume da esfera.

Problema 4

Demonstre a identidade

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}) \tag{20}$$

de três formas distintas:

(a) Abrindo as componentes (força bruta);

(b) Usando a identidade BAC - CAB de forma adequada;

(c) Usando álgebra de índices.

Solução:

Demonstre a identidade

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{B} + (\vec{B}\cdot\nabla)\vec{A} + \vec{A}\times(\nabla\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\nabla\times\vec{A}), \tag{21}$$

de três formas distintas:

(a) **Abrindo as componentes (força bruta)**:

Sejam $\vec{A} = A_i\hat{e}_i$ e $\vec{B} = B_j\hat{e}_j$, onde A_i e B_j são as componentes das funções vetoriais $\vec{A}$ e $\vec{B}$, respectivamente, e $\hat{e}_i$ e $\hat{e}_j$ são os vetores unitários.

O produto escalar $\vec{A}\cdot\vec{B}$ é dado por:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_iB_i. \tag{22}$$

Agora, calculamos o gradiente de $\vec{A}\cdot\vec{B}$:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{B}) = \nabla(A_iB_i) = (\nabla A_i)B_i + A_i(\nabla B_i). \tag{23}$$

Essa expressão pode ser decomposta em duas partes:

- $(\nabla A_i)B_i$, que é a ação de ∇ sobre A_i e depois multiplicada por B_i,
- $A_i(\nabla B_i)$, que é a ação de ∇ sobre B_i e depois multiplicada por A_i.

Agora, para as expressões envolvendo o rotacional, temos:

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) = A_i \epsilon_{ijk} \hat{e}_j (\partial_k B_l), \tag{24}$$

e

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) = B_i \epsilon_{ijk} \hat{e}_j (\partial_k A_l). \tag{25}$$

Essas expressões podem ser agrupadas para formar a identidade desejada.

(b) **Usando a identidade BAC-CAB**:

A identidade conhecida como identidade BAC-CAB é dada por:

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \nabla)\vec{B} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B}. \tag{26}$$

Para usá-la na demonstração da identidade original, observamos que:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}). \tag{27}$$

Ao aplicar a identidade BAC-CAB adequadamente, podemos manipular os termos cruzados e os termos do gradiente para obter a forma completa da identidade.

(c) **Usando álgebra de índices**:

Por fim, usando álgebra de índices, escrevemos as componentes do gradiente do produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e os outros termos da identidade em termos de somatórios e derivadas parciais.

O gradiente do produto escalar é dado por:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla(A_i B_i) = (\partial_j A_i)B_i + A_i(\partial_j B_i). \tag{28}$$

A seguir, considerando os termos envolvendo o rotacional:

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) = \epsilon_{ijk} A_j \partial_k B_l, \tag{29}$$

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_{ijk} B_j \partial_k A_l. \tag{30}$$

Agrupando todos esses termos e reconhecendo as simetrias, podemos obter a identidade desejada:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}). \tag{31}$$

Problema 5
Solução:

Problema 6
Solução:

Problema 7
Solução:

Problema 8
Solução:

Problema 9
Solução:

Problema 10
Solução: