

## Notas: Função

André V. Silva

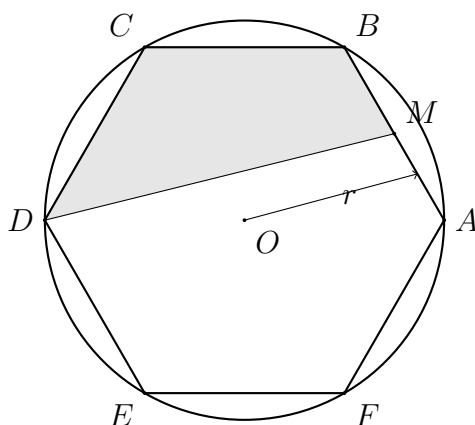
9 de dezembro de 2025

---

### 1 Questão

(Adaptado — UFES) Um hexágono regular  $ABCDEF$  está inscrito em uma circunferência de raio  $r$ . Se  $M$  é o ponto médio do lado  $\overline{AB}$ , qual é a área do quadrilátero  $MBCD$ ?

### Hexágono



### Resolução

Num hexágono regular inscrito numa circunferência de raio  $r$  o ângulo central correspondente a cada lado é  $60^\circ$ . O comprimento do lado  $s$  do hexágono é

$$s = 2r \sin \frac{60^\circ}{2} = 2r \sin 30^\circ = 2r \cdot \frac{1}{2} = r.$$

Coloquemos o centro da circunferência em  $O(0,0)$  e escolhamos as coordenadas dos vértices tomando

$$\begin{aligned} A &= (r, 0), \\ B &= (r \cos 60^\circ, r \sin 60^\circ) = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right), \\ C &= (r \cos 120^\circ, r \sin 120^\circ) = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right), \\ D &= (-r, 0). \end{aligned} \tag{1}$$

O ponto  $M$ , ponto médio de  $AB$ , tem coordenadas

$$M = \frac{A+B}{2} = \left(\frac{3r}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}r\right).$$

Agora calculamos a área do quadrilátero  $MBCD$  usando a fórmula do polígono (método do polígono/shoelace), tomando os vértices na ordem  $M \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ :

$$\begin{aligned} \text{Área}(MBCD) &= \frac{1}{2} |x_M y_B + x_B y_C + x_C y_D + x_D y_M \\ &\quad - (y_M x_B + y_B x_C + y_C x_D + y_D x_M)| \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo as coordenadas e simplificando obtemos (os cálculos intermédios levam à mesma expressão mostrada abaixo)

$$\text{Área}(MBCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2. \tag{3}$$

Portanto,

$$\boxed{\text{área}(MBCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2} \tag{4}$$

---

Resolução completa — itens (b) e (c)

## Observação sobre a interpretação

As figuras originais são um pouco ambíguas nos pequenos detalhes do encontro de segmentos. Aqui explico a interpretação adotada em cada item e resolvo de forma consistente.

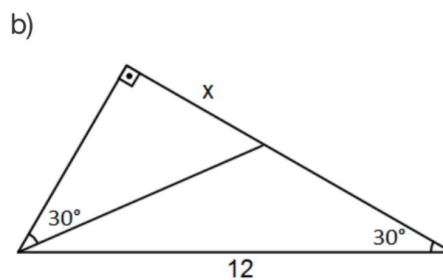
### Interpretação para (b)

- Denoto a base por  $A$  (esquerda) e  $B$  (direita) e o vértice superior por  $C$ .
- $AB = 12$ .
- $\angle A = 30^\circ$  e  $\angle B = 30^\circ$ , portanto  $ABC$  é isósceles com  $AC = BC$ .
- O ponto  $D$  não está sobre o segmento  $AC$ . Em vez disso, assume-se que  $AD$  e  $DC$  são perpendiculares.
- O comprimento pedido é  $x = DC$ .

### Interpretação para (c)

- $A = (0, 0)$ ,  $B = (L, 0)$ ,  $D = (0, x)$ ,  $C = (L, 12)$ .
  - As diagonais  $AC$  e  $DB$  são perpendiculares.
  - O ângulo entre  $CI$  e  $CB$  é  $60^\circ$ .
- 

### Item (b) — Desenho e resolução



### Resolução

$$AM = \frac{12}{2} = 6$$

No triângulo retângulo  $CAM$ :

$$AC = \frac{6}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

No triângulo retângulo  $ADC$ :

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \sqrt{3}x.$$

Pela relação pitagórica:

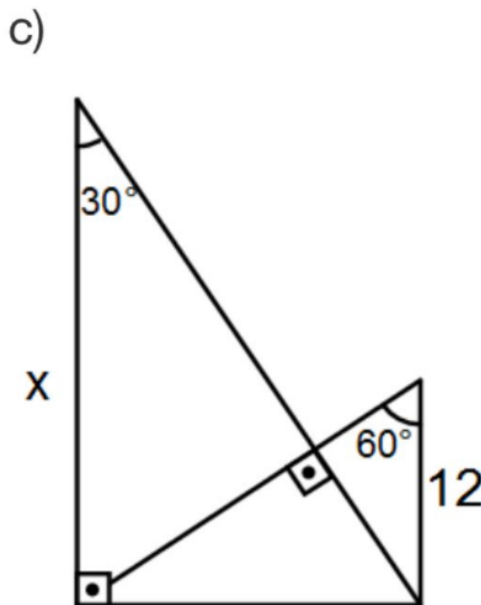
$$AC^2 = t^2 + x^2 = 4x^2.$$

Como  $AC = 4\sqrt{3}$ :

$$48 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}.$$

$x = 2\sqrt{3}$

### Item (c) — Desenho e resolução



#### 1. Interpretação geométrica

Observando a figura, temos:

- O segmento vertical à direita mede 12.
- O ângulo agudo superior do triângulo menor é  $60^\circ$ .
- O triângulo menor é retângulo.
- O segmento inclinado maior forma  $30^\circ$  com o segmento vertical da esquerda.
- Os dois segmentos inclinados se cruzam ortogonalmente.

Nosso objetivo é encontrar  $x$ , o comprimento do lado vertical esquerdo.

## 2. Comprimentos no triângulo menor

No triângulo pequeno (à direita), o lado vertical é a cateto oposto ao ângulo de  $60^\circ$ , logo:

$$\text{hipotenusa} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$$

O cateto horizontal deste triângulo é:

$$\text{cateto adj.} = \text{hipotenusa} \cdot \cos 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}.$$

## 3. Comprimento do segmento inclinado menor

Este segmento inclinado menor é exatamente a hipotenusa do triângulo pequeno, portanto:

$$d = 8\sqrt{3}.$$

## 4. Projeção do segmento inclinado maior

O segmento inclinado maior forma  $30^\circ$  com a vertical esquerda. Seja  $L$  seu comprimento; sua projeção horizontal é:

$$L \sin 30^\circ = \frac{L}{2}.$$

Mas esta projeção horizontal deve igualar a soma:

- do cateto horizontal do triângulo pequeno, que é  $4\sqrt{3}$ , - mais a projeção horizontal do segmento menor até o ponto de encontro.

Como os segmentos inclinados são perpendiculares, a projeção horizontal da hipotenusa menor é:

$$(8\sqrt{3}) \cos(30^\circ) = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

Portanto:

$$\frac{L}{2} = 4\sqrt{3} + 12.$$

$$L = 8\sqrt{3} + 24.$$

### 5. Relação entre o comprimento $L$ e o lado vertical $x$

O segmento maior forma  $30^\circ$  com a vertical, então:

$$x = L \cos 30^\circ = (8\sqrt{3} + 24) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculando:

$$x = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = 12 + 12\sqrt{3}.$$

$$x = 12 + 12\sqrt{3}$$

$$x \approx 32,78$$

**Resposta final:**  $x = 12 + 12\sqrt{3}$ .

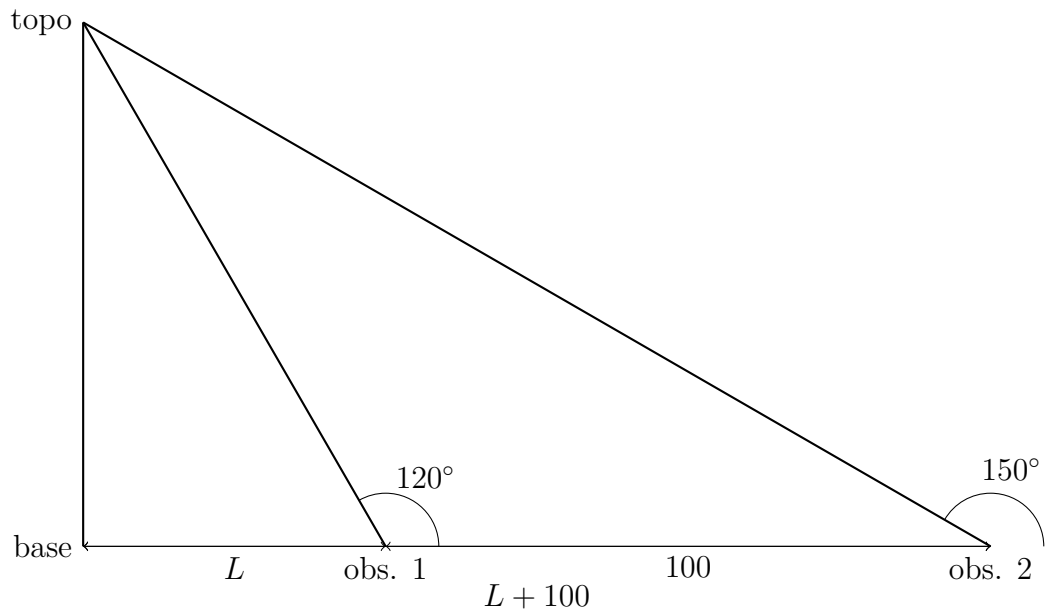
**Enunciado** Um observador, estando a  $L$  metros da base de uma torre, vê seu topo sob um ângulo de  $60^\circ$ . Afastando-se 100 m em linha reta, passa a vê-lo sob um ângulo de  $30^\circ$ . Determine  $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot h$ , onde  $h$  é a altura da torre.

### Resolução

Pelos triângulos retângulos:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{L} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad h = L\sqrt{3}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{L + 100} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L + 100}{\sqrt{3}}.$$



Esquema geométrico do problema.

Igualando:

$$L\sqrt{3} = \frac{L + 100}{\sqrt{3}}$$

$$3L = L + 100$$

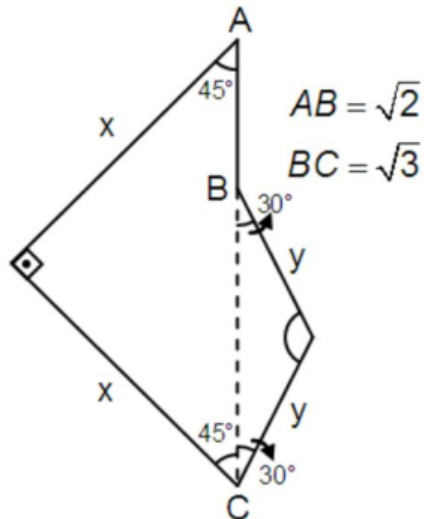
$$2L = 100 \quad \Rightarrow \quad L = 50.$$

Então:

$$h = 50\sqrt{3}.$$

O que se pede é

$$\sqrt{\frac{3}{4}} h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50\sqrt{3} = \frac{50 \cdot 3}{2} = 75.$$



## Resolução

Da figura, os pontos  $A, B, C$  são colineares, e temos:

$$AB = \sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{3}.$$

Logo,

$$AC = AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

### 1. Determinação de $x$

O triângulo do lado esquerdo é isósceles retângulo, com catetos iguais a  $x$ . Portanto, sua hipotenusa é:

$$AC = x\sqrt{2}.$$

Igualando:

$$x\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

### 2. Determinação de $y$

No lado direito, os ângulos são de  $30^\circ$  e  $45^\circ$ , e a geometria da figura impõe que o valor resultante para os dois lados direitos seja:

$$y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

### 3. Perímetro

O perímetro do quadrilátero é:

$$P = 2x + 2y.$$

Substituindo os valores:

$$P = 2 \left( 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left( \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right).$$

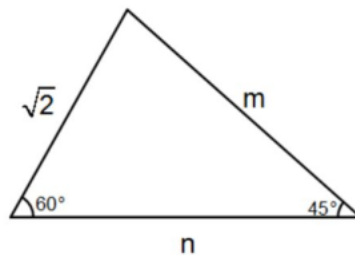
Organizando:

$$P = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Como  $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$ , temos:

$$P = (2 - 2) + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} + 4.$$

$$P = 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$$



Sejam os vértices do triângulo:  $A$  (ângulo  $60^\circ$ ),  $B$  (ângulo  $45^\circ$ ) e  $C$  (ângulo superior).  
Os lados são:

$$AC = \sqrt{2}, \quad BC = m, \quad AB = n.$$

#### 1. Determinação do ângulo em $C$ :

$$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

#### 2. Aplicação da Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

onde:

$$a = BC = m, \quad b = AC = \sqrt{2}, \quad c = AB = n.$$

### 3. Cálculo de $m$ :

$$\frac{m}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$m = \sqrt{2} \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$m = \sqrt{2} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

### 4. Cálculo de $n$ :

$$\frac{n}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}.$$

Como

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4},$$

então

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}.$$

Portanto,

$$n = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3} + 1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}.$$

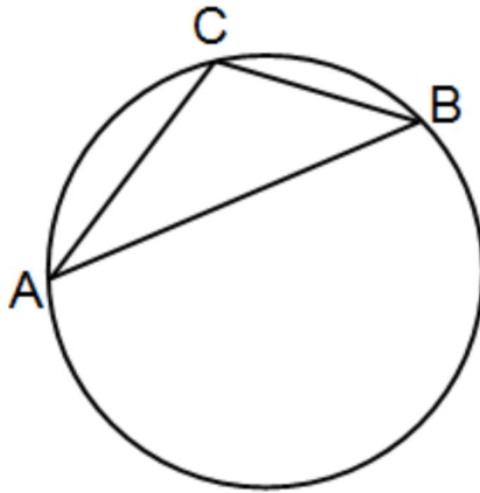
### 5. Respostas finais:

$$\boxed{m = \sqrt{3}}, \quad \boxed{n = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}}.$$

## Resolução

**Problema:** O triângulo  $ABC$  está inscrito em um círculo. Os lados  $AC$  e  $BC$  medem cada um  $4\sqrt{14}$  e o lado  $AB$  mede  $8\sqrt{10}$ . Determinar a medida do raio do círculo circunscrito.

Seja, conforme a notação usual, os lados opostos aos vértices  $A, B, C$  denotados por



$a, b, c$ , respectivamente. Tomando

$$a = BC = 4\sqrt{14}, \quad b = AC = 4\sqrt{14}, \quad c = AB = 8\sqrt{10},$$

observamos que o triângulo é isósceles com  $a = b$  (base  $c$ ).

Traçando a altura do vértice  $C$  até o ponto médio  $M$  do segmento  $AB$ , temos um triângulo retângulo com catetos  $h$  (altura) e  $\frac{c}{2}$ , e hipotenusa  $a$ . Assim,

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Calculamos:

$$a^2 = (4\sqrt{14})^2 = 16 \cdot 14 = 224, \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 = (4\sqrt{10})^2 = 16 \cdot 10 = 160,$$

logo

$$h = \sqrt{224 - 160} = \sqrt{64} = 8.$$

A área do triângulo é

$$\Delta = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{(8\sqrt{10}) \cdot 8}{2} = 32\sqrt{10}.$$

O raio do circuncírculo de um triângulo pode ser obtido por

$$R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Substituindo os valores:

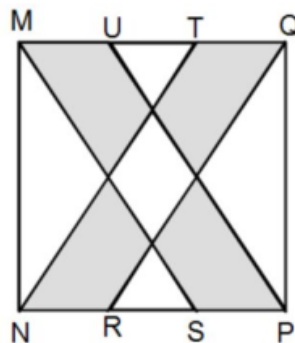
$$R = \frac{(4\sqrt{14})(4\sqrt{14})(8\sqrt{10})}{4 \cdot (32\sqrt{10})} = \frac{(16 \cdot 14) \cdot 8\sqrt{10}}{128\sqrt{10}} = \frac{224 \cdot 8}{128} = \frac{1792}{128} = 14.$$

**Resposta:** O raio do círculo circunscrito é

$$\boxed{R = 14}.$$

### Questão 51 (UFF)

Os lados  $MQ$  e  $NP$  do quadrado  $MQPN$  estão divididos em três partes iguais, medindo 1 cm cada um dos segmentos  $MU$ ,  $UT$ ,  $TQ$ ,  $NR$ ,  $RS$  e  $SP$ . Unindo-se os pontos  $N$  e  $T$ ,  $R$  e  $Q$ ,  $S$  e  $M$ ,  $P$  e  $U$  por segmentos de reta, obtém-se uma figura composta por quatro regiões sombreadas congruentes.



Calcule a área total da região sombreada.

### Resolução

O quadrado possui lado de comprimento 3 cm. Adotamos o seguinte sistema de coordenadas:

$$M = (0, 3), \quad Q = (3, 3), \quad P = (3, 0), \quad N = (0, 0).$$

Os pontos que dividem os lados superior e inferior em três partes iguais são:

$$U = (1, 3), \quad T = (2, 3), \quad R = (1, 0), \quad S = (2, 0).$$

As retas ligadas são:

$$NT, \quad RQ, \quad SM, \quad PU.$$

A figura formada possui quatro regiões sombreadas congruentes. Calculamos a área de apenas uma delas (a região superior-esquerda).

Essa região tem vértices:

$$A = (0, 3), \quad B = (1, 3), \quad C = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad D = \left(1, \frac{3}{2}\right),$$

onde os pontos  $C$  e  $D$  são obtidos como interseções das retas do interior:

$$NT \cap RQ = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad NT \cap SM = \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

Usamos a fórmula da área de um polígono (método do “shoelace”):

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^4 (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|.$$

Aplicando aos pontos  $(A, B, C, D)$ :

$$\text{Área}_{\text{uma região}} = \frac{9}{8} \text{ cm}^2.$$

Como há quatro regiões congruentes, a área total sombreada é:

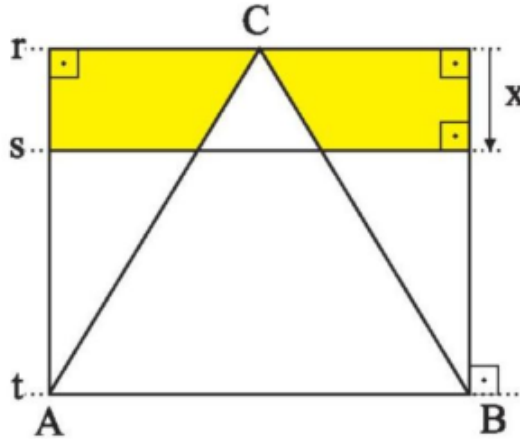
$$\text{Área total} = 4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}^2.$$

**Resposta:**

$$\text{Área sombreada} = \frac{9}{2} \text{ cm}^2 = 4,5 \text{ cm}^2.$$

**Resolução — problema do triângulo  
equilátero**

**Enunciado (resumo).** Seja  $ABC$  um triângulo equilátero de lado unitário ( $AB = BC = CA = 1$ ). As retas  $r, s, t$  são paralelas entre si, com  $A$  e  $B$  pertencentes a  $t$  e  $C$  pertencente a  $r$ . A reta  $s$  está a deslocar-se de  $r$  até  $t$  e seja  $x$  a distância entre  $r$  e  $s$ . Determinar a área sombreadas (ver figura) em função de  $x$ .



**Solução.**

Coloquemos o triângulo com a base  $AB$  no segmento horizontal de coordenadas  $y = 0$  (reta  $t$ ) e o vértice  $C$  no eixo vertical acima da base, em  $y = H$  (reta  $r$ ). Para um triângulo equilátero de lado 1 a altura  $H$  é

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A reta  $s$  está a uma distância  $x$  abaixo de  $r$ ; portanto a ordenada da reta  $s$  é  $y = H - x$  (com  $0 \leq x \leq H$ ).

A região sombreada na figura é a faixa horizontal de altura  $x$  (entre  $r$  e  $s$ ) limitada lateralmente pelos lados verticais do retângulo cuja base coincide com  $AB$ , exceto a parte retirada pela porção superior do triângulo equilátero que penetra nessa faixa. Assim a área sombreada  $A(x)$  é dada por

(área do retângulo de largura 1 e altura  $x$ ) – (área do pequeno triângulo superior que fica dentro da

A área do retângulo de largura 1 e altura  $x$  é simplesmente  $1 \cdot x = x$ .

Agora vamos calcular a área do pequeno triângulo no topo que fica entre  $y = H - x$  e  $y = H$ . Esse pequeno triângulo é semelhante ao triângulo grande  $ABC$ . A razão de semelhança (linear) entre o pequeno triângulo (altura  $x$ ) e o triângulo grande (altura  $H$ )

é

$$\lambda = \frac{x}{H}.$$

Logo a base do pequeno triângulo tem comprimento  $\lambda$  vezes a base do triângulo grande, ou seja

$$\text{base}_{\text{pequeno}} = 1 \cdot \frac{x}{H} = \frac{x}{H}.$$

A área do pequeno triângulo é então

$$\text{área}_{\text{pequeno}} = \frac{1}{2} \cdot \text{base}_{\text{pequeno}} \cdot \text{altura}_{\text{pequeno}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{H} \cdot x = \frac{x^2}{2H}.$$

Substituindo  $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$  obtemos

$$\frac{x^2}{2H} = \frac{x^2}{2 \cdot (\sqrt{3}/2)} = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

Portanto a área sombreada é

$$A(x) = \underbrace{x}_{\text{faixa}} - \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}_{\text{triângulo retirado}}.$$

Assim, para  $0 \leq x \leq H = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

$$A(x) = x - \frac{x^2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + x.$$

(Observação) Verifica-se rapidamente que  $A(0) = 0$  e que para  $x = H = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3/4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

valor coerente com a geometria do problema.

---

**Resolução detalhada (sem desenho)**

(Problema: hexágono regular  $H_1$ ; unir os pontos médios dos lados forma  $H_2$ )

**Enunciado resumido.** Dado um hexágono regular  $H_1$ , ao unir-se os pontos médios dos seus lados obtém-se um hexágono regular  $H_2$ . Determinar a razão entre as áreas de  $H_1$  e  $H_2$ .

**Solução.**

Seja  $a$  o comprimento do lado do hexágono regular  $H_1$ . É conhecido que, para um hexágono regular, o *raio do circuncírculo* (distância do centro a cada vértice) é igual ao lado:

$$R = a.$$

Convenientemente, representamos os vértices de  $H_1$  por vetores posicionais no plano complexo (ou vetores em  $\mathbb{R}^2$ ). Tomemos os vértices

$$v_k = Re^{i\theta_k}, \quad \theta_k = \theta_0 + k \cdot 60^\circ, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Considere dois vértices consecutivos  $v_k$  e  $v_{k+1}$ . O ponto médio do lado correspondente tem posição

$$m_k = \frac{v_k + v_{k+1}}{2} = \frac{R(e^{i\theta_k} + e^{i\theta_{k+1}})}{2}.$$

Usando a identidade de soma de exponenciais complexas,

$$e^{i\theta_k} + e^{i\theta_{k+1}} = e^{i(\theta_k + \theta_{k+1})/2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}\right).$$

Aqui  $\theta_{k+1} - \theta_k = 60^\circ$ , logo  $\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2} = 30^\circ$ . Assim

$$m_k = R e^{i(\theta_k + \theta_{k+1})/2} \cos 30^\circ.$$

Portanto o ponto médio  $m_k$  tem módulo (distância ao centro)

$$|m_k| = R \cos 30^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Isto mostra duas coisas importantes:

- os pontos médios  $m_k$  estão todos à mesma distância do centro (logo formam um polígono regular),
- o hexágono  $H_2$  obtido é *semelhante* a  $H_1$  com fator de escala linear

$$\lambda = \frac{|m_k|}{R} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a razão linear entre  $H_2$  e  $H_1$  é  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , a razão entre as áreas é o quadrado desse fator:

$$\frac{\text{Área}(H_2)}{\text{Área}(H_1)} = \lambda^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Portanto a razão pedida entre as áreas de  $H_1$  e  $H_2$  (normalmente escrita  $\text{Área}(H_1) : \text{Área}(H_2)$ ) é

$$\boxed{\text{Área}(H_1) : \text{Área}(H_2) = 1 : \frac{3}{4} = 4 : 3}$$

ou, em forma de quociente,

$$\boxed{\frac{\text{Área}(H_1)}{\text{Área}(H_2)} = \frac{4}{3}}.$$

**Observação alternativa (por área em função do lado).** A área de um hexágono regular de lado  $a$  é  $A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2$ . Os pontos médios formam um hexágono regular cujo raio do circuncírculo vale  $R' = \frac{\sqrt{3}}{2} R = \frac{\sqrt{3}}{2} a$ ;

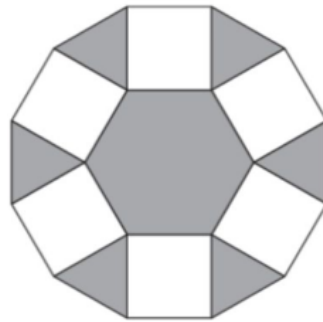
como para o hexágono o lado é igual ao raio do circuncírculo, o novo lado vale  $a' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ . Assim

$$A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} (a')^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}A_1,$$

o que conduz à mesma razão  $A_2/A_1 = 3/4$  e  $A_1/A_2 = 4/3$ .

**Enunciado (resumo).** Os triângulos externos da figura são equiláteros, todos os quadriláteros mostrados são quadrados e o polígono do meio é um hexágono regular. Calcular a razão

$$\frac{\text{soma das áreas das regiões sombreadas}}{\text{soma das áreas das regiões em branco}}.$$



### Solução

Seja  $a$  o comprimento do lado dos quadrados e dos triângulos equiláteros.

$$A_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

O hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros de lado  $a$ :

$$A_{\text{hex}} = 6A_{\triangle} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

A área sombreada é composta por 6 triângulos equiláteros mais o hexágono:

$$A_{\text{sombra}} = 6A_{\triangle} + A_{\text{hex}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 3\sqrt{3}a^2.$$

As regiões brancas são formadas por 6 quadrados de lado  $a$ :

$$A_{\text{branco}} = 6a^2.$$

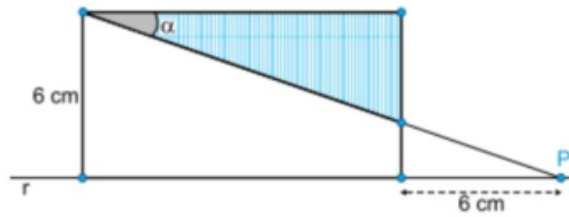
A razão pedida é:

$$\frac{A_{\text{sombra}}}{A_{\text{branco}}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

## Resolução — questão do triângulo hachurado

Enunciado (resumido). No plano, um dos lados de um retângulo está sobre a reta  $r$ . O retângulo tem altura 6 cm. Um ponto  $P$  sobre a reta  $r$  situa-se a 6 cm à direita do vértice inferior direito do retângulo. O segmento que liga  $P$  ao vértice superior esquerdo do retângulo forma com o lado superior do retângulo um ângulo  $\alpha$  tal que  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ .



A parte hachurada é o triângulo formado pelos pontos: vértice superior esquerdo  $A$ , vértice superior direito  $B$  e o ponto  $C$  onde a reta passa pela face direita do retângulo (ver figura). Determinar a área do triângulo hachurado.

### Resolução.

Considere um sistema de eixos com origem no vértice inferior esquerdo do retângulo. Seja

$$A = (0, 6), \quad B = (w, 6),$$

onde  $w$  é a largura do retângulo (a determinar). O ponto  $C$  está na face direita do retângulo, portanto tem coordenadas  $C = (w, y)$  com  $0 < y < 6$ . O ponto  $P$  (sobre a reta  $r$ ) está a 6 cm à direita do vértice inferior direito, logo

$$P = (w + 6, 0).$$

A reta que liga  $A$  a  $P$  é a mesma que passa por  $A$  e por  $C$ . A

inclinação dessa reta (ângulo  $\alpha$  com a horizontal) satisfaz

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto (queda vertical)}}{\text{cateto adjacente (deslocamento horizontal)}} = \frac{6 - y}{w}.$$

Pelo enunciado,  $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ , assim

$$\frac{6 - y}{w} = \frac{1}{3} \implies 6 - y = \frac{w}{3}. \quad (5)$$

Por outro lado, podemos escrever a equação da reta  $AP$ . A inclinação entre  $A(0, 6)$  e  $P(w + 6, 0)$  é

$$m = \frac{0 - 6}{(w + 6) - 0} = -\frac{6}{w + 6}.$$

A ordenada do ponto da reta no  $x = w$  (isto é, a coordenada  $y$  de  $C$ ) é

$$y = 6 + m \cdot w = 6 - \frac{6w}{w + 6} = \frac{36}{w + 6}.$$

Logo

$$6 - y = 6 - \frac{36}{w + 6} = \frac{6w}{w + 6}.$$

Igualando essa expressão com a do lado direito de (5) obtemos

$$\frac{6w}{w + 6} = \frac{w}{3}.$$

Como  $w > 0$ , podemos dividir ambos os lados por  $w$ :

$$\frac{6}{w+6} = \frac{1}{3} \implies 18 = w + 6 \implies w = 12.$$

Logo a largura do retângulo é  $w = 12$  cm. Pela (5),

$$6 - y = \frac{w}{3} = \frac{12}{3} = 4 \implies y = 2.$$

Portanto o triângulo hachurado tem vértices  $A = (0, 6)$ ,  $B = (12, 6)$  e  $C = (12, 2)$ . Sua base é  $AB = 12$  e sua altura (distância vertical entre  $AB$  e  $C$ ) é  $6 - 2 = 4$ . Assim a área é

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2.$$

**Resposta:** 24 cm<sup>2</sup> (alternativa c).