UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

Abril de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Monday 28th April, 2025

Problema 1

Uma esfera inicialmente carregada com uma carga total Q e colocada em contato momentâneo com uma esfera idêntica inicialmente descarregada.

a) Qual é a carga em cada esfera após o contato?

b) Esse processo é repetido com N esferas identicas inicialmente descarregadas. Qual é a carga em cada uma das N + 1 esferas, incluindo a esfera que originalmente possuia a carga?

c) Qual é a carga total no sistema após N contatos?

Solução:

a) Quando duas esferas idênticas entram em contato, a carga total se redistribui igualmente entre elas. Assim, a carga em cada esfera será:

$$q = \frac{Q}{2} \tag{1}$$

b) O processo se repete: a esfera originalmente carregada (agora com carga $\frac{Q}{2}$) entra em contato com uma nova esfera descarregada, dividindo novamente sua carga por dois.

Após cada contato, a carga da esfera carregada será dividida pela metade. Assim, após N contatos, a carga da esfera original será:

$$q_N = \frac{Q}{2^N} \tag{2}$$

Cada nova esfera tocada recebe metade da carga da esfera carregada no momento do contato. Portanto:

- 1ª esfera tocada: $\frac{Q}{2}$
- 2ª esfera tocada: $\frac{Q}{4}$
- 3ª esfera tocada: $\frac{Q}{8}$
- $\vdots$
- N-ésima esfera tocada: $\frac{Q}{2^N}$
- original: $\frac{Q}{2^N}$

c) A carga total do sistema após os N contatos será a soma das cargas de todas as esferas:

$$Q_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}\right) + \frac{Q}{2^N} \tag{3}$$

O somatório $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$.
A soma dos N primeiros termos é:

$$S = \frac{\frac{Q}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right)}{1 - \frac{1}{2}} = Q\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \tag{4}$$

Somando com a carga restante na esfera original:

$$Q_{\text{total}} = Q\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) + \frac{Q}{2^N} \tag{5}$$

$$Q_{\text{total}} = Q \tag{6}$$

Portanto, a carga total do sistema permanece constante e igual a Q, respeitando a da carga elétrica.

Problema 2

Uma placa infinita nos eixos x e y possui a seguinte distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x, y) = \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \tag{7}$$

onde a e b são constantes.

Solução:

A carga total Q na placa é dada pela integral da densidade superficial de carga $\sigma(x, y)$ sobre toda a área da placa:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y)\, dx\, dy \tag{8}$$

Substituindo a expressão de $\sigma(x, y)$, temos:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2}\, dx\, dy \tag{9}$$

Passo 1: Integral sobre x

Calculamos a integral sobre x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\, dx \tag{10}$$

Dividindo a integral em duas partes (por causa da função $|x|$), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\, dx = 2 \int_{0}^{\infty} e^{-x/a}\, dx \tag{11}$$

A integral da exponencial é dada por:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x/a}\, dx = a \tag{12}$$

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\, dx = 2a \tag{13}$$

Passo 2: Integral sobre y

Agora, calculamos a integral sobre y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} \, dy \tag{14}$$

Essa é uma integral padrão, conhecida como a integral de Cauchy, que resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} \, dy = \pi b \tag{15}$$

Passo 3: Cálculo da carga total

Agora que temos as integrais sobre x e y, podemos calcular a carga total:

$$Q = \sigma_0 \cdot 2a \cdot \pi b \tag{16}$$

Portanto, a carga total na placa é:

$$\boxed{Q = \sigma_0 2\pi ab} \tag{17}$$

Problema 3

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z. Calcule o potencial elétrico em um ponto de campo localizado a uma distância r do eixo z (por exemplo, no plano xy) e a uma altura z. Calcule o campo elétrico no mesmo ponto a partir do potencial. Calcule os limites quando $L \gg r$ e calcule também o limite quando $r \gg L$.

Solução:

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z.

Potencial Elétrico

Um elemento infinitesimal de carga é dado por:

$$dq = \lambda_0 \, dz' \tag{18}$$

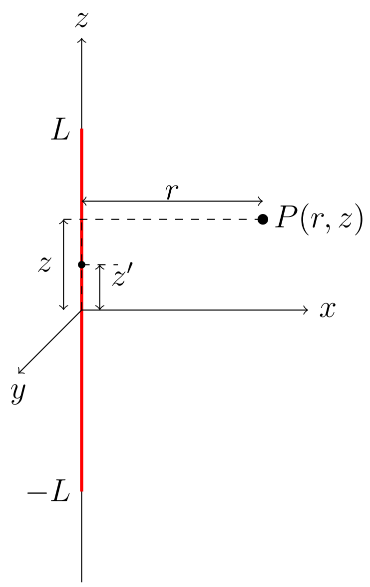

Figure 1: Linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z.

O potencial devido a esse elemento no ponto (r, z) é:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{19}$$

Substituindo dq:

$$dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{20}$$

O potencial total é a integral de dV de $z' = -L$ até $z' = L$:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{21}$$

Fazendo a substituição $u = z - z'$, com $du = -dz'$, temos:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} \tag{22}$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{r^2 + u^2}\right) + C \tag{23}$$

Aplicando os limites:

$$V(r,z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}\right) - \ln\left(z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}\right)\right] \tag{24}$$

$$V(r,z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}\right) \tag{25}$$

Campo Elétrico

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{26}$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e considerando a simetria do problema:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_\theta = 0 \tag{27}$$

Limites

1. Quando $L \gg r$

Neste caso, a linha de carga se comporta como um fio infinito. Aproximadamente:

$$V(r) \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2L}{r}\right) \tag{28}$$

$$E_r \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad E_z \sim 0 \tag{29}$$

2. Quando $r \gg L$

Aqui, o sistema se comporta como uma carga pontual de carga total $Q = 2L\lambda_0$. Portanto:

$$V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2L\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{30}$$

$$\vec{E} \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{31}$$

Problema 4

Considere um elétron em um átomo de hidrogênio a uma distância de $0{,}53 \times 10^{-10}$ m do próton. Sabendo que o próton tem carga $+e$ e o elétron $-e$, resolva:

a) Calcule a energia potencial eletrostática do elétron em eV.

b) Sabendo que a velocidade do elétron é $v = 2{,}189 \times 10^6$ m/s, calcule a energia total do elétron no átomo de hidrogênio em eV.

Solução:

Letra (a): Energia Potencial Eletrostática

A fórmula da energia potencial eletrostática U entre duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r} \tag{32}$$

onde:

$$k = 8,99 \times 10^9\,\mathrm{N \cdot m^2/C^2} \quad \text{(constante eletrostática)}, \tag{33}$$

$$q_1 = e = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad \text{(carga do próton)}, \tag{34}$$

$$q_2 = -e = -1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad \text{(carga do elétron)}, \tag{35}$$

$$r = 0,53 \times 10^{-10}\,\mathrm{m} \quad \text{(distância entre as cargas)}. \tag{36}$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$U = \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-1,6 \times 10^{-19})}{0,53 \times 10^{-10}} \tag{37}$$

Calculando:

$$U \approx \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (-2,56 \times 10^{-38})}{0,53 \times 10^{-10}} \approx -4,32 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} \tag{38}$$

Convertendo para eV, usando $1\,\mathrm{eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J:

$$U \approx \frac{-4,32 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx -27\,\mathrm{eV} \tag{39}$$

Portanto, a energia potencial eletrostática é:

$$\boxed{U \approx -27\,\mathrm{eV}} \tag{40}$$

Letra (b): Energia Total do Elétron

A energia total E do elétron é a soma da energia cinética E_{cinet} e da energia potencial U. A energia cinética é dada por:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{41}$$

onde:

$$m = 9,11 \times 10^{-31}\,\text{kg} \quad \text{(massa do elétron)}, \tag{42}$$

$$v = 2,189 \times 10^{6}\,\text{m/s} \quad \text{(velocidade do elétron)}. \tag{43}$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \times 10^{-31}) \cdot (2,189 \times 10^{6})^2 \tag{44}$$

Calculando:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{1}{2} \cdot 9,11 \times 10^{-31} \cdot 4,79 \times 10^{12} \approx 2,18 \times 10^{-18}\,\text{J} \tag{45}$$

Convertendo para eV:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{2,18 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx 13,6\,\text{eV} \tag{46}$$

Agora, a energia total do elétron é a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E = E_{\text{cinet}} + U \tag{47}$$

$$E = 13,6\,\text{eV} + (-27\,\text{eV}) \approx -13,6\,\text{eV} \tag{48}$$

Portanto, a energia total do elétron no átomo de hidrogênio é:

$$\boxed{E \approx -13,6\,\text{eV}} \tag{49}$$

Problema 5

Imagine que a Terra tenha densidade uniforme e que um túnel seja escavado ao longo de um diâmetro.

a) Se um objeto for solto no túnel, mostre que ele oscilaria com um período P igual ao período de um satélite em órbita na superfície da Terra.

b) Calcule P.

Solução:

(a) Movimento do objeto no túnel

A força gravitacional sentida a uma distância r do centro é devida apenas à massa dentro da esfera de raio r, e é dada por:

$$M_{\text{interna}} = M\left(\frac{r^3}{R^3}\right) \tag{50}$$

Assim, a força gravitacional é:

$$F = -G\frac{M_{\text{interna}}m}{r^2} = -G\frac{M\left(\frac{r^3}{R^3}\right)m}{r^2} \tag{51}$$

Simplificando:

$$F = -G\frac{Mm}{R^3}r \tag{52}$$

Esta força é proporcional a r e dirigida para o centro, característica típica de um *movimento harmônico simples* (MHS).

A equação do movimento é:

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{Mm}{R^3}r \tag{53}$$

Dividindo por m:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\left(G\frac{M}{R^3}\right)r \tag{54}$$

Portanto, a frequência angular ω do movimento é:

$$\omega^2 = G\frac{M}{R^3} \tag{55}$$

e o período P é:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{56}$$

Para um satélite em órbita na superfície da Terra, o período também é dado por:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \tag{57}$$

com $r = R$, portanto:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \tag{58}$$

Assim, o período do objeto no túnel é **igual** ao período do satélite em órbita rasante.

(b) Cálculo do período

Sabemos que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = gR^2 \tag{59}$$

Substituindo:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \tag{60}$$

Substituindo os valores:

$$R = 6{,}37 \times 10^6\,\mathrm{m}, \quad g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \tag{61}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{6{,}37 \times 10^6}{9{,}8}} \tag{62}$$

$$P = 2\pi\sqrt{650000} \tag{63}$$

$$P = 2\pi \times 806{,}2 \tag{64}$$

$$P \approx 5065\,\text{segundos} \tag{65}$$

Convertendo para minutos:

$$P \approx \frac{5065}{60} \approx 84{,}4\,\text{minutos} \tag{66}$$

Resposta final:

$$\boxed{P \approx 84{,}4\,\text{minutos}} \tag{67}$$

Problema 6

Dois cilindros condutores longos e concêntricos são isolados entre si e carregados. Longe das extremidades, o cilindro interno possui densidade de carga linear $+\lambda_1$, e o cilindro externo possui densidade de carga linear $+\lambda_2$.

O cilindro interno apresenta raios interno r_1 e externo r_2, enquanto o cilindro externo apresenta raios interno r_3 e externo r_4.

(a) Encontre o campo elétrico $E(r)$:

  (1) Em um ponto próximo ao meio dos cilindros (desprezando efeitos de borda).

  (2) Logo fora do cilindro externo.

(b) Encontre a diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os dois cilindros.

(c) Descreva qualitativamente as mudanças nos campos elétricos e nos potenciais se:

  (1) O raio interno r_1 do cilindro interno for diminuído.

  (2) O raio externo r_2 do cilindro interno for aumentado.

  (3) A seção transversal externa do cilindro interno for transformada em quadrado de lado $2r_2$ (assumindo $2r_2 < r_3$).

Solução:

Dois cilindros condutores longos e concêntricos possuem densidades lineares de carga λ_1 (interno) e λ_2 (externo). Vamos resolver as questões:

(a) Encontrar $E(r)$:

  (1) **Em um ponto próximo ao meio (entre $r_2 < r < r_3$):**

  Aplicando a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0}$$

Como o sistema é cilíndrico:

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda_{\text{enc}} L}{\varepsilon_0}$$

Logo:

$$E(r) = \frac{\lambda_{\text{enc}}}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Onde λ_{enc} é a carga linear total até o raio r.

Para $r_2 < r < r_3$, somente o cilindro interno contribui, logo:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1$$

Assim:

$$E(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(2) **Logo fora do cilindro externo ($r > r_4$)**:

Agora, as cargas dos dois cilindros contribuem:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1 + \lambda_2$$

Portanto:

$$E(r) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

(b) Encontrar a diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os dois cilindros:

O potencial $\phi(r)$ é dado por:

$$\phi(r) = -\int E(r)\, dr$$

Logo, a diferença de potencial entre r_2 e r_3 é:

$$\Delta\phi = \phi(r_3) - \phi(r_2)$$

Integrando:

$$\Delta\phi = -\int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\, dr$$

$$\Delta\phi = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

(c) Descrever qualitativamente:

(1) Se r_1 for diminuído:

A distribuição de carga no cilindro interno se concentra mais, mas, fora dele ($r > r_2$), o campo não muda, pois depende apenas da carga linear total λ_1.

(2) Se r_2 for aumentado:

O cilindro interno se torna mais largo. A distância até o cilindro externo diminui, o que pode alterar a diferença de potencial $\Delta\phi$ (diminuindo a magnitude do potencial).

(3) Se a seção transversal externa do cilindro interno for transformada em um quadrado de lado $2r_2$:

A simetria cilíndrica se perde. Assim, o campo elétrico deixa de ser puramente radial e passa a variar conforme a direção, especialmente próximo às bordas do quadrado. No entanto, se $\sqrt{2}r_2 < r_3$, ainda há uma região entre o quadrado e o cilindro externo onde o campo pode ser aproximadamente radial.

Problema 7

A partícula 1 tem massa $m_1 = 3{,}6 \times 10^{-6}$ kg, enquanto a partícula 2 tem massa $m_2 = 6{,}2 \times 10^{-6}$ kg. Ambas possuem a mesma carga elétrica. As partículas estão inicialmente em repouso, e o sistema de duas partículas possui uma energia potencial elétrica inicial de 0,150 J.

As partículas são então liberadas e se repelem devido à força elétrica. Efeitos gravitacionais são desprezados, e nenhuma outra força atua sobre as partículas. Em um instante após a liberação, a velocidade da partícula 1 é medida como $v_1 = 170\,\text{m/s}$.

(a) Qual é a energia potencial elétrica do sistema de duas partículas nesse instante?

(b) Que tipos de energia o sistema tinha inicialmente?

(c) Que tipos de energia o sistema tem no instante posterior?

(d) O princípio da conservação de energia se aplica? Justifique.

(e) O princípio da conservação do momento linear se aplica? Justifique.

Solução:

Problema 8

Duas cargas puntiformes idênticas $q_A = q_B = +2{,}4 \times 10^{-9}\,\text{C}$ estão fixas no espaço e separadas por $0{,}50\,\text{m}$. Determine o campo elétrico e o potencial elétrico no ponto médio da linha entre as cargas q_A e q_B.

(a) Quais são as direções das contribuições individuais do campo elétrico de q_A e q_B no ponto médio?

(b) O campo elétrico líquido no ponto médio tem módulo maior, menor ou igual a zero?

(c) O potencial elétrico total no ponto médio é positivo, negativo ou zero?

(d) O potencial elétrico total tem direção associada?

(e) Calcule o valor do campo e do potencial elétrico no ponto médio.

Solução:

Dados do problema

- Massa da partícula 1: $m_1 = 3{,}6 \times 10^{-6}\,\text{kg}$
- Massa da partícula 2: $m_2 = 6{,}2 \times 10^{-6}\,\text{kg}$

- Velocidade da partícula 1: $v_1 = 170\,\mathrm{m/s}$
- Energia potencial inicial: $U_i = 0{,}150\,\mathrm{J}$

Efeitos gravitacionais são desprezados, e apenas forças elétricas atuam.

(a) Energia potencial elétrica do sistema nesse instante

Pela conservação da energia:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}}$$

$$U_i = U_f + K$$

Onde K é a energia cinética total:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Utilizando a conservação do momento linear:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v_1$$

Substituindo os valores:

$$v_2 = -\frac{3{,}6 \times 10^{-6}}{6{,}2 \times 10^{-6}} \times 170 \quad \Rightarrow \quad v_2 \approx -98{,}7\,\mathrm{m/s}$$

Calculando a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}(3{,}6 \times 10^{-6})(170)^2 + \frac{1}{2}(6{,}2 \times 10^{-6})(98{,}7)^2$$

$$K = (1{,}8 \times 10^{-6})(28900) + (3{,}1 \times 10^{-6})(9746{,}69)$$

$$K = 0{,}05202 + 0{,}03031 = 0{,}08233\,\mathrm{J}$$

Agora, determinamos U_f:

$$U_f = U_i - K$$

$$U_f = 0{,}150 - 0{,}08233$$

$$\boxed{U_f = 0{,}0677\,\mathrm{J}}$$

(b) Tipos de energia inicialmente

Inicialmente, as partículas estavam em repouso, logo:

$$\text{Energia inicial} = \text{energia potencial elétrica}$$

Resposta: Apenas energia potencial elétrica.

(c) Tipos de energia no instante posterior

Após serem liberadas, as partículas possuem:

$$\text{Energia posterior} = \text{energia cinética} + \text{energia potencial elétrica}$$

Resposta: Energia cinética e energia potencial elétrica.

(d) Conservação da energia

Sim, a conservação da energia se aplica, pois:

- O sistema é isolado (sem forças externas realizando trabalho).
- Apenas forças internas (elétricas) atuam.

Resposta: O princípio da conservação da energia se aplica.

(e) Conservação do momento linear

Sim, a conservação do momento linear se aplica, pois:

- O sistema está isolado (sem forças externas).

Resposta: O princípio da conservação do momento linear se aplica.

Problema 9

Uma região esférica de raio R está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2}\mathbf{r}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição a partir do centro da esfera, e E_0 é uma constante. Determine a densidade de carga na região.

Solução:

Uma região esférica de raio R está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2}\mathbf{r} \tag{68}$$

onde $\mathbf{r}$ é o vetor posição a partir do centro da esfera, e E_0 é uma constante. Determine a densidade de carga na região.

Solução

Para determinar a densidade de carga, usamos a Lei de Gauss na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{69}$$

onde ρ é a densidade de carga e ε_0 é a permissividade do vácuo.

O campo elétrico no interior da esfera é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2}\mathbf{r} \tag{70}$$

Agora, vamos calcular o divergente do campo elétrico.

Cálculo do Divergente de E

O campo elétrico tem a forma:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2}(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}) \tag{71}$$

Onde $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é o vetor posição.

O divergente em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \tag{72}$$

Com:

$$E_x = \frac{E_0}{R^2}x, \quad E_y = \frac{E_0}{R^2}y, \quad E_z = \frac{E_0}{R^2}z \tag{73}$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{E_0}{R^2} \tag{74}$$

Somando as derivadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 3 \times \frac{E_0}{R^2} = \frac{3E_0}{R^2} \tag{75}$$

Aplicando a Lei de Gauss

De acordo com a Lei de Gauss, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{76}$$

Substituindo o valor do divergente:

$$\frac{3E_0}{R^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{77}$$

Isolando ρ:

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{3E_0}{R^2} \tag{78}$$

Resultado Final

A densidade de carga na região é:

$$\boxed{\rho = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{R^2}} \tag{79}$$

Problema 10

Determine o campo elétrico $\vec{E}$ e a densidade volumétrica de carga ρ para as seguintes distribuições de potencial elétrico:

(a) $V = Ax^2$

(b) $V = Axyz$

Solução:

(a) $V = Ax^2$

1. Calcular o campo elétrico $\vec{E}$

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{80}$$

Para $V = Ax^2$, calculamos o gradiente em coordenadas cartesianas. Como V depende apenas de x, temos:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \tag{81}$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \tag{82}$$

Portanto, o gradiente de V é:

$$\nabla V = 2Ax\hat{\imath} \tag{83}$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -2Ax\hat{\imath} \tag{84}$$

2. Calcular a densidade de carga ρ

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{85}$$

Primeiro, calculamos o divergente do campo elétrico $\vec{E}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-2Ax) + 0 + 0 = -2A \tag{86}$$

Portanto:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -2A \tag{87}$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\rho = -2A\varepsilon_0 \tag{88}$$

(b) $V = Axyz$

1. Calcular o campo elétrico $\vec{E}$

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{89}$$

Para $V = Axyz$, calculamos o gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \tag{90}$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Ayz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Axz, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Axy \tag{91}$$

Portanto, o gradiente de V é:

$$\nabla V = Ayz\hat{\imath} + Axz\hat{\jmath} + Axy\hat{k} \tag{92}$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -Ayz\hat{\imath} - Axz\hat{\jmath} - Axy\hat{k} \tag{93}$$

2. Calcular a densidade de carga ρ

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{94}$$

Calculando o divergente de $\vec{E}$:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-Ayz) + \frac{\partial}{\partial y}(-Axz) + \frac{\partial}{\partial z}(-Axy) \tag{95}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 + 0 + 0 = 0 \tag{96}$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\rho = 0 \tag{97}$$

Resultado Final

Para o potencial $V = Ax^2$:

- Campo elétrico: $\vec{E} = -2Ax\hat{i}$
- Densidade de carga: $\rho = -2A\varepsilon_0$

Para o potencial $V = Axyz$:

- Campo elétrico: $\vec{E} = -Ayz\hat{i} - Axz\hat{j} - Axy\hat{k}$
- Densidade de carga: $\rho = 0$

Problema 11

Quais dos seguintes vetores podem ser um campo elétrico? Se forem, qual é a densidade volumétrica de carga associada?

(a) $\vec{E} = ax^2y^2\,\hat{x}$

(b) $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$

Solução:

(a) $\vec{E} = ax^2y^2\,\hat{x}$

Para verificar se o vetor $\vec{E} = ax^2y^2\hat{x}$ pode ser um campo elétrico, devemos calcular seu divergente.

Em coordenadas cartesianas, o divergente de $\vec{E}$ é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \tag{98}$$

Como $\vec{E}$ não depende de y nem de z, temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) = 2axy^2 \tag{99}$$

Portanto, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0(2axy^2) \tag{100}$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga não uniforme, logo, $\vec{E} = ax^2y^2\hat{x}$ pode representar um campo elétrico.

(b) $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$

Agora, temos o campo elétrico $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$ em coordenadas cilíndricas. Para verificar se esse vetor pode ser um campo elétrico, devemos calcular o seu divergente.

Em coordenadas cilíndricas, o divergente de um vetor $\vec{E} = E_r\hat{r} + E_\theta\hat{\theta}$ é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z) \tag{101}$$

Para o campo $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$, temos:

$$E_r = a\cos\theta, \quad E_\theta = -a\sin\theta, \quad E_z = 0 \tag{102}$$

Logo, o divergente de $\vec{E}$ em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ra\cos\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(-a\sin\theta) \tag{103}$$

A primeira derivada em r é zero, pois E_r não depende de r. A segunda derivada em θ é:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(-a\sin\theta) = -a\cos\theta \tag{104}$$

Portanto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a\cos\theta}{r} \tag{105}$$

Então, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{a\varepsilon_0\cos\theta}{r} \tag{106}$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga que depende de θ e r. Logo, $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$ também pode representar um campo elétrico.

Resultado Final

- Para o campo $\vec{E} = ax^2y^2\hat{x}$, o divergente é $\nabla \cdot \vec{E} = 2axy^2$, e a densidade de carga associada é $\rho = \varepsilon_0(2axy^2)$. - Para o campo $\vec{E} = a(\hat{r}\cos\theta - \hat{\theta}\sin\theta)$, o divergente é $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a\cos\theta}{r}$, e a densidade de carga associada é $\rho = -\frac{a\varepsilon_0\cos\theta}{r}$.