
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

Abril de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletrromagnetismo I

André V. Silva

Sunday 27th April, 2025

Problema 1

Uma esfera inicialmente carregada com uma carga total Q e colocada em contato momentâneo com uma esfera idêntica inicialmente descarregada.

- a) Qual é a carga em cada esfera após o contato?
- b) Esse processo é repetido com N esferas idênticas inicialmente descarregadas. Qual é a carga em cada uma das $N + 1$ esferas, incluindo a esfera que originalmente possuía a carga?
- c) Qual é a carga total no sistema após N contatos?

Solução:

a) Quando duas esferas idênticas entram em contato, a carga total se redistribui igualmente entre elas. Assim, a carga em cada esfera será:

$$q = \frac{Q}{2} \quad (1)$$

b) O processo se repete: a esfera originalmente carregada (agora com carga $\frac{Q}{2}$) entra em contato com uma nova esfera descarregada, dividindo novamente sua carga por dois.

Após cada contato, a carga da esfera carregada será dividida pela metade. Assim, após N contatos, a carga da esfera original será:

$$q_N = \frac{Q}{2^N} \quad (2)$$

Cada nova esfera tocada recebe metade da carga da esfera carregada no momento do contato. Portanto:

- 1ª esfera tocada: $\frac{Q}{2}$
- 2ª esfera tocada: $\frac{Q}{4}$
- 3ª esfera tocada: $\frac{Q}{8}$
- \vdots
- N -ésima esfera tocada: $\frac{Q}{2^N}$
- original: $\frac{Q}{2^N}$

c) A carga total do sistema após os N contatos será a soma das cargas de todas as esferas:

$$Q_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N} \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (3)$$

O somatório $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$.

A soma dos N primeiros termos é:

$$S = \frac{\frac{Q}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right)}{1 - \frac{1}{2}} = Q \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right) \quad (4)$$

Somando com a carga restante na esfera original:

$$Q_{\text{total}} = Q \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (5)$$

$$Q_{\text{total}} = Q \quad (6)$$

Portanto, a carga total do sistema permanece constante e igual a Q , respeitando a da carga elétrica.

Problema 2

Uma placa infinita nos eixos x e y possui a seguinte distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x, y) = \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \quad (7)$$

onde a e b são constantes.

Solução:

A carga total Q na placa é dada pela integral da densidade superficial de carga $\sigma(x, y)$ sobre toda a área da placa:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) \, dx \, dy \quad (8)$$

Substituindo a expressão de $\sigma(x, y)$, temos:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \, dx \, dy \quad (9)$$

Passo 1: Integral sobre x

Calculamos a integral sobre x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx \quad (10)$$

Dividindo a integral em duas partes (por causa da função $|x|$), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x/a} \, dx \quad (11)$$

A integral da exponencial é dada por:

$$\int_0^{\infty} e^{-x/a} \, dx = a \quad (12)$$

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx = 2a \quad (13)$$

Passo 2: Integral sobre y

Agora, calculamos a integral sobre y :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy \quad (14)$$

Essa é uma integral padrão, conhecida como a integral de Cauchy, que resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy = \pi b \quad (15)$$

Passo 3: Cálculo da carga total

Agora que temos as integrais sobre x e y , podemos calcular a carga total:

$$Q = \sigma_0 \cdot 2a \cdot \pi b \quad (16)$$

Portanto, a carga total na placa é:

$$\boxed{Q = \sigma_0 2\pi ab} \quad (17)$$

Problema 3

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z . Calcule o potencial elétrico em um ponto de campo localizado a uma distância r do eixo z (por exemplo, no plano xy) e a uma altura z . Calcule o campo elétrico no mesmo ponto a partir do potencial. Calcule os limites quando $L \gg r$ e calcule também o limite quando $r \gg L$.

Solução:

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z .

Potencial Elétrico

Um elemento infinitesimal de carga é dado por:

$$dq = \lambda_0 dz' \quad (18)$$

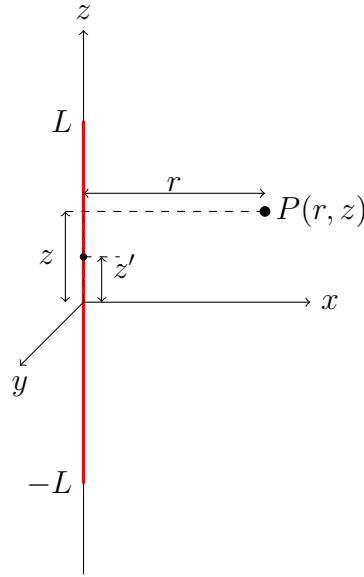


Figure 1: Linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z .

O potencial devido a esse elemento no ponto (r, z) é:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (19)$$

Substituindo dq :

$$dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (20)$$

O potencial total é a integral de dV de $z' = -L$ até $z' = L$:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (21)$$

Fazendo a substituição $u = z - z'$, com $du = -dz'$, temos:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} \quad (22)$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{r^2 + u^2}) + C \quad (23)$$

Aplicando os limites:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2} \right) - \ln \left(z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2} \right) \right] \quad (24)$$

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right) \quad (25)$$

Campo Elétrico

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e considerando a simetria do problema:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_\theta = 0 \quad (27)$$

Limites

1. Quando $L \gg r$

Neste caso, a linha de carga se comporta como um fio infinito. Aproximadamente:

$$V(r) \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2L}{r} \right) \quad (28)$$

$$E_r \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_z \sim 0 \quad (29)$$

2. Quando $r \gg L$

Aqui, o sistema se comporta como uma carga pontual de carga total $Q = 2L\lambda_0$. Portanto:

$$V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2L\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (30)$$

$$\vec{E} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (31)$$

Problema 4

Considere um elétron em um átomo de hidrogênio a uma distância de $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$ do próton. Sabendo que o próton tem carga $+e$ e o elétron $-e$, resolva:

- a) Calcule a energia potencial eletrostática do elétron em eV.
- b) Sabendo que a velocidade do elétron é $v = 2,189 \times 10^6$ m/s, calcule a energia total do elétron no átomo de hidrogênio em eV.

Solução:

Letra (a): Energia Potencial Eletrostática

A fórmula da energia potencial eletrostática U entre duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r} \quad (32)$$

onde:

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (\text{constante eletrostática}), \quad (33)$$

$$q_1 = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do próton}), \quad (34)$$

$$q_2 = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do elétron}), \quad (35)$$

$$r = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{distância entre as cargas}). \quad (36)$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$U = \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-1,6 \times 10^{-19})}{0,53 \times 10^{-10}} \quad (37)$$

Calculando:

$$U \approx \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (-2,56 \times 10^{-38})}{0,53 \times 10^{-10}} \approx -4,32 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (38)$$

Convertendo para eV, usando $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$:

$$U \approx \frac{-4,32 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx -27 \text{ eV} \quad (39)$$

Portanto, a energia potencial eletrostática é:

$$\boxed{U \approx -27 \text{ eV}} \quad (40)$$

Letra (b): Energia Total do Elétron

A energia total E do elétron é a soma da energia cinética E_{cinet} e da energia potencial U .

A energia cinética é dada por:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (41)$$

onde:

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\text{massa do elétron}), \quad (42)$$

$$v = 2,189 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade do elétron}). \quad (43)$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \times 10^{-31}) \cdot (2,189 \times 10^6)^2 \quad (44)$$

Calculando:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{1}{2} \cdot 9,11 \times 10^{-31} \cdot 4,79 \times 10^{12} \approx 2,18 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (45)$$

Convertendo para eV:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{2,18 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx 13,6 \text{ eV} \quad (46)$$

Agora, a energia total do elétron é a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E = E_{\text{cinet}} + U \quad (47)$$

$$E = 13,6 \text{ eV} + (-27 \text{ eV}) \approx -13,6 \text{ eV} \quad (48)$$

Portanto, a energia total do elétron no átomo de hidrogênio é:

$$\boxed{E \approx -13,6 \text{ eV}} \quad (49)$$

Problema 5

Imagine que a Terra tenha densidade uniforme e que um túnel seja escavado ao longo de um diâmetro.

a) Se um objeto for solto no túnel, mostre que ele oscilaria com um período P igual ao período de um satélite em órbita na superfície da Terra.

b) Calcule P .

Solução:

(a) Movimento do objeto no túnel

A força gravitacional sentida a uma distância r do centro é devida apenas à massa dentro da esfera de raio r , e é dada por:

$$M_{\text{interna}} = M \left(\frac{r^3}{R^3} \right) \quad (50)$$

Assim, a força gravitacional é:

$$F = -G \frac{M_{\text{interna}} m}{r^2} = -G \frac{M \left(\frac{r^3}{R^3} \right) m}{r^2} \quad (51)$$

Simplificando:

$$F = -G \frac{Mm}{R^3} r \quad (52)$$

Esta força é proporcional a r e dirigida para o centro, característica típica de um *movimento harmônico simples* (MHS).

A equação do movimento é:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{Mm}{R^3} r \quad (53)$$

Dividindo por m :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \left(G \frac{M}{R^3} \right) r \quad (54)$$

Portanto, a frequência angular ω do movimento é:

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3} \quad (55)$$

e o período P é:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (56)$$

Para um satélite em órbita na superfície da Terra, o período também é dado por:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (57)$$

com $r = R$, portanto:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (58)$$

Assim, o período do objeto no túnel é **igual** ao período do satélite em órbita rasante.

(b) Cálculo do período

Sabemos que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = gR^2 \quad (59)$$

Substituindo:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad (60)$$

Substituindo os valores:

$$R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad (61)$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{6,37 \times 10^6}{9,8}} \quad (62)$$

$$P = 2\pi\sqrt{650000} \quad (63)$$

$$P = 2\pi \times 806,2 \quad (64)$$

$$P \approx 5065 \text{ segundos} \quad (65)$$

Convertendo para minutos:

$$P \approx \frac{5065}{60} \approx 84,4 \text{ minutos} \quad (66)$$

Resposta final:

$$\boxed{P \approx 84,4 \text{ minutos}} \quad (67)$$

Problema 6

Dois cilindros condutores longos e concêntricos são isolados entre si e carregados. Longe das extremidades, o cilindro interno possui densidade de carga linear $+\lambda_1$, e o cilindro externo possui densidade de carga linear $+\lambda_2$.

O cilindro interno apresenta raios interno r_1 e externo r_2 , enquanto o cilindro externo apresenta raios interno r_3 e externo r_4 .

- (a) Encontre o campo elétrico $E(r)$:
 - (1) Em um ponto próximo ao meio dos cilindros (desprezando efeitos de borda).
 - (2) Logo fora do cilindro externo.
- (b) Encontre a diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os dois cilindros.
- (c) Descreva qualitativamente as mudanças nos campos elétricos e nos potenciais se:
 - (1) O raio interno r_1 do cilindro interno for diminuído.
 - (2) O raio externo r_2 do cilindro interno for aumentado.
 - (3) A seção transversal externa do cilindro interno for transformada em quadrado de lado $2r_2$ (assumindo $2r_2 < r_3$).

Solução:

Problema 7

Solução:

Problema 8

Solução:

Problema 9

Solução:

Problema 10

Solução:

Problema 11

Solução: