Concurso Público do Instituto Federal de Sertão EBTT **Física**.

André V. Silva

www.andrevsilva.com

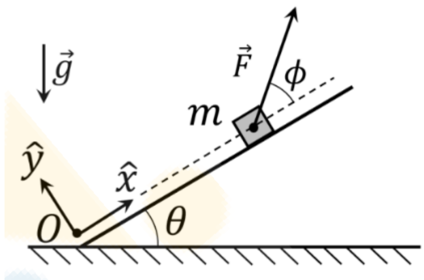
Wednesday 27th August, 2025

Contents

1 Mecânica

1.1 Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima

Um bloco de massa m encontra-se em repouso sobre um plano inclinado de ângulo θ com a horizontal. Uma força $\vec{F}$ é aplicada ao bloco, formando ângulo φ com a direção do plano, como indicado na figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é μ. Determine a intensidade mínima da força $\vec{F}$ necessária para colocar o bloco na iminência de subir a rampa.



1) Equilíbrio de forças

Projetando as forças ao longo dos eixos $\hat{x}$ (paralelo à rampa, apontando para cima) e $\hat{y}$ (normal ao plano):

$$F\cos\varphi - mg\sin\theta - \mu N = 0 \tag{1}$$

$$N - mg\cos\theta + F\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta - F\sin\varphi \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$F\cos\varphi = mg\sin\theta + \mu\Big(mg\cos\theta - F\sin\varphi\Big). \tag{3}$$

2) Expressão para a força aplicada

Da equação (3), resulta:

$$F(\varphi) = \frac{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi}. \tag{4}$$

3) Maximização do denominador via Cauchy–Schwarz

O denominador pode ser escrito como produto escalar:

$$\cos\varphi + \mu\sin\varphi = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)\cdot(1,\ \mu).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz:

$$\boxed{\cos\varphi + \mu\sin\varphi \le \sqrt{1+\mu^2}.} \tag{5}$$

A igualdade em (5) ocorre quando

$$\tan\varphi^\star = \mu, \tag{6}$$

isto é,

$$\cos\varphi^\star = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \sin\varphi^\star = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

4) Força mínima

Substituindo o valor máximo do denominador (5) em (4), temos:

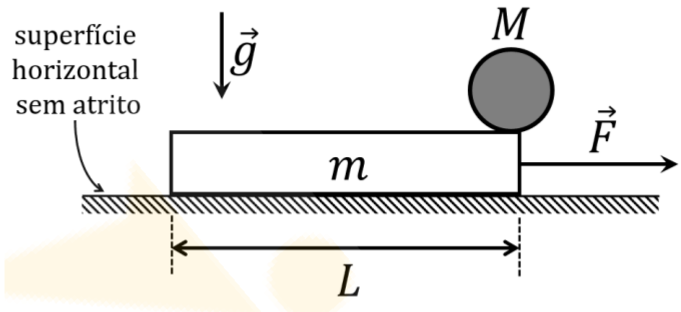
$$F_{\min} = \frac{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{7}$$

Portanto, a força mínima aplicada que coloca o bloco na iminência de subir a rampa é dada por (7), atingida quando (6) vale.

Alternativa correta: D.

1.2 Questão 42 — Cilindro com atrito

Uma prancha de madeira, com comprimento $L = 1{,}0$ m e massa $m = 0{,}4$ kg, possui um cilindro maciço e homogêneo de aço, com massa $M = 0{,}6$ kg, localizado na extremidade direita da prancha. O sistema está em repouso sobre um plano horizontal liso. Uma força constante $\vec{F} = (20\ \text{N})\,\hat{x}$ é aplicada à prancha, fazendo com que os objetos comecem a se mover acelerados. O cilindro rola suavemente, sem escorregar, sobre a prancha, devido à presença de atrito entre eles. Desprezando o atrito entre a prancha e a superfície horizontal, bem como qualquer força de resistência do ar, determine o intervalo de tempo, em segundos, que o cilindro levará para cair da prancha, ou seja, para atingir a extremidade oposta e deixar de estar em contato com ela.



(A) 0,1 s

(B) 0,2 s

(C) 0,3 s

(D) 0,4 s

(E) 0,5 s

1) Definição das variáveis e forças

Seja a_p a aceleração da prancha (para a direita) e a_c a aceleração do centro do cilindro (para a direita), ambas medidas no referencial inercial do solo. Seja f a força de atrito

horizontal exercida pela prancha sobre o cilindro (no ponto de contato). Pela ação e reação, a prancha sofre $-f$ da parte do cilindro.
Para o cilindro maciço homogêneo, momento de inércia em relação ao centro:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}MR^2.} \tag{8}$$

Não precisamos do valor de R explicitamente, apenas das relações de rotação/translação.

2) Equações de movimento

Equilíbrio (segunda lei) para a prancha (força total horizontal):

$$F - f = ma_p. \tag{9}$$

Equação de translação para o cilindro:

$$f = Ma_c. \tag{10}$$

Equação de rotação para o cilindro (torque causado por f):

$$fR = I\alpha = \left(\frac{1}{2}MR^2\right)\alpha. \tag{11}$$

Condição de rolamento sem escorregar entre cilindro e prancha: a velocidade do ponto de contato do cilindro iguala a velocidade da prancha. Em termos das acelerações:

$$a_c - a_p = -R\alpha. \tag{12}$$

(A escolha do sinal garante consistência: se a prancha acelera mais que o cilindro, o contato induz uma rotação que satisfaz (12).)

3) Eliminação das incógnitas

Da (11) e de (12) obtemos:

$$fR = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha \quad \Rightarrow \quad f = \tfrac{1}{2}MR\alpha.$$

Usando (12) $\alpha = -(a_c - a_p)/R$, resulta

$$f = -\tfrac{1}{2}M(a_c - a_p). \tag{13}$$

Por outro lado, pela translação do cilindro (10):

$$f = Ma_c. \tag{14}$$

Igualando (13) e (14):

$$Ma_c = -\tfrac{1}{2}M(a_c - a_p).$$

Dividindo por M e rearranjando:

$$a_c = -\tfrac{1}{2}a_c + \tfrac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{2}a_c = \tfrac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad a_c = \tfrac{1}{3}a_p.$$

Substituindo (1.2) em (9) e usando (10) ($f = Ma_c$):

$$F - Ma_c = ma_p.$$

Como $a_c = a_p/3$, obtemos

$$F - M\frac{a_p}{3} = ma_p \quad \Rightarrow \quad F = a_p\Big(m + \frac{M}{3}\Big).$$

Logo a aceleração da prancha:

$$a_p = \frac{F}{m + \dfrac{M}{3}} = \frac{3F}{3m + M}. \tag{15}$$

E, pela (1.2),

$$a_c = \frac{a_p}{3} = \frac{F}{3m + M}. \tag{16}$$

4) Aceleração relativa e tempo até cair

A aceleração relativa entre prancha e cilindro (aceleração com que a prancha “afasta-se” do cilindro) é

$$a_{\text{rel}} = a_p - a_c = a_p - \frac{a_p}{3} = \frac{2}{3}a_p.$$

Usando (15):

$$a_{\text{rel}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3F}{3m+M} = \frac{2F}{3m+M}. \tag{17}$$

Inicialmente a velocidade relativa é zero (sistema parte do repouso). A distância relativa a percorrer para que o cilindro passe da extremidade direita até a esquerda da prancha é L. Para movimento uniformemente acelerado, o tempo t satisfaz $L = \frac{1}{2}a_{\text{rel}}t^2$, portanto

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{rel}}}} = \sqrt{\frac{2L(3m+M)}{2F}} = \sqrt{\frac{(3m+M)\,L}{F}}. \tag{18}$$

5) Substituição numérica

Dados: $m = 0{,}4$ kg, $M = 0{,}6$ kg, $L = 1{,}0$ m, $F = 20$ N.

Calcule $3m + M$:

$$3m + M = 3(0{,}4) + 0{,}6 = 1{,}2 + 0{,}6 = 1{,}8 \text{ kg}.$$

Substituindo em (18):

$$t = \sqrt{\frac{(3m+M)L}{F}} = \sqrt{\frac{1{,}8 \times 1{,}0}{20}} = \sqrt{\frac{1{,}8}{20}} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}30 \text{ s}.$$

Resposta: $t = 0{,}3$ s. (Alternativa **C**.)

1.3 Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência

Um projétil de massa m é lançado verticalmente para cima a partir da posição $z = 0$ com velocidade inicial $\vec{v} = v_0\hat{z}$ ($v_0 > 0$) no instante $t = 0$. Além da força gravitacional, atua sobre ele uma força de resistência do ar proporcional à velocidade: $\vec{F} = -\beta m\vec{v}$, onde $\beta > 0$ é o parâmetro de amortecimento. A aceleração da gravidade é $\vec{g} = -g\hat{z}$. Determine o trabalho realizado pela força de resistência desde o lançamento até a altura máxima.

Solução:

A força de resistência é:

$$\vec{F}_r = -\beta m\vec{v} = -\beta m v\hat{z}.$$

O trabalho realizado pela força de resistência até a altura máxima é:

$$W_r = \int_0^{z_{\max}} \vec{F}_r \cdot d\vec{z} = -\beta m \int_0^{z_{\max}} v\, dz.$$

A equação do movimento é:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \beta mv \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \beta v = -g.}$$

Solução da equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \beta v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \beta v$$

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -dt$$

$$\int \frac{dv}{g + \beta v} = -\int dt$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} = -t + C$$

Usando as condições de contorno do problema (quando $t = 0$ e $v = v_o$):

$$C = \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} = -t + \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} - \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta} = -t$$

$$ln\,(g + \beta v) - ln\,(g + \beta v_0) = -\beta t$$

$$ln\left[\frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)}\right] = -\beta t$$

$$\frac{(g+\beta v)}{(g+\beta v_0)} = e^{-\beta t}$$

$$(g+\beta v) = (g+\beta v_0)\, e^{-\beta t}$$

$$\beta v = (g+\beta v_0)\, e^{-\beta t} - g$$

$$\boxed{v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}.}$$

Altura máxima ocorre em $t_{\max}$ tal que $v(t_{\max}) = 0$:

$$0 = \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t_{\max}} - \frac{g}{\beta} \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta t_{\max}} = \frac{g/\beta}{v_0 + g/\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right).}$$

O trabalho da força de resistência:

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} v^2(t)\, dt = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}\right]^2 dt.$$

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}\right]^2 dt$$

$$\begin{aligned} W_r &= -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2 e^{-2\beta t} - 2\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)\frac{g}{\beta} e^{-\beta t} + \left(\frac{g}{\beta}\right)^2\right] dt \\ &= -\beta m \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2 \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt - 2\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)\frac{g}{\beta}\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt + \left(\frac{g}{\beta}\right)^2 \int_0^{t_{\max}} dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} dt &= t_{\max}. \end{aligned}$$

Integrando e substituindo $t_{\max}$ e $e^{-\beta t_{\max}}$:

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-2\beta\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)\right)}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)^{-2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2 - 1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{1 + \frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2} - 1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$\boxed{1 - e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta} = \frac{1}{2\beta} \frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\left(\frac{\beta}{g}\right)^2 \left(\frac{g}{\beta} + v_0\right)^2}}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt = \frac{g^2}{2\beta^3} \frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2}. \quad \checkmark}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{-\beta\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - e^{\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right) - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\frac{\beta}{g}\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)} = \frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta} = \frac{\frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}}{\beta} = \frac{v_0}{\beta\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{v_0}{\beta\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}. \quad \checkmark$$

$$W_r = -\beta m \left[\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2} \left[\frac{g^2}{2\beta^3} \frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\cancel{\left(v_0 + \frac{\beta}{g}\right)^2}}\right] - 2\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)} \frac{g}{\beta} \frac{v_0}{\beta\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}} + \left(\frac{g^2}{\beta^3}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\beta m \left[\frac{g^2 \left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{2\beta^3} - 2g\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{g^2}{\beta^3}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\left[\frac{mg^2}{2\beta^2}\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right] - 2mg\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\left[\frac{mgv_0}{\beta} + \frac{mv_0^2}{2} - 2mg\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\frac{mgv_0}{\beta} - \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right) - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\boxed{W_r = \frac{mgv_0}{\beta}\left[1 - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right) \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right] - \frac{mv_0^2}{2}} \quad \blacksquare$$

Problema. Um pêndulo de massa m_2 e comprimento L é solto do repouso na posição A, que faz um ângulo θ com a vertical. A corda passa por uma roldana ideal e traciona um bloco de massa m_1 sobre uma mesa horizontal. Ao o pêndulo atingir o ponto mais baixo B, qual deve ser o menor coeficiente de atrito estático μ_s entre m_1 e a mesa para que m_1 não deslize?

Solução.

1) Velocidade do pêndulo em B. Pela conservação de energia entre A e B:

$$m_2 g L\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 \quad\Rightarrow\quad v_B^2 = 2gL\,(1-\cos\theta).$$

2) Tração na corda em B. No ponto mais baixo, as forças radiais no pêndulo dão

$$T_B - m_2 g = m_2 \frac{v_B^2}{L} \quad\Rightarrow\quad T_B = m_2\left(g + \frac{v_B^2}{L}\right) = m_2 g\Big[1 + 2(1-\cos\theta)\Big] = m_2 g\,(3 - 2\cos\theta).$$

Como a roldana é ideal, a tração que puxa m_1 na horizontal é T_B.

3) Condição de não deslizamento de m_1. Para m_1 permanecer em repouso, a força de atrito estático máxima deve ser ao menos igual à tração:

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \;\geq\; T_B.$$

Logo, o coeficiente mínimo é

$$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{T_B}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}\Big(3 - 2\cos\theta\Big)}.$$

Observação: O ponto B é o ponto mais baixo da trajetória, onde a tração é máxima; portanto, se m_1 não desliza em B, não deslizará em nenhuma outra posição.