UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

Abril de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Sunday 27th April, 2025

Problema 1

Uma esfera inicialmente carregada com uma carga total Q e colocada em contato momentâneo com uma esfera idêntica inicialmente descarregada.

a) Qual é a carga em cada esfera após o contato?

b) Esse processo é repetido com N esferas identicas inicialmente descarregadas. Qual é a carga em cada uma das N + 1 esferas, incluindo a esfera que originalmente possuia a carga?

c) Qual é a carga total no sistema após N contatos?

Solução:

a) Quando duas esferas idênticas entram em contato, a carga total se redistribui igualmente entre elas. Assim, a carga em cada esfera será:

$$q = \frac{Q}{2} \tag{1}$$

b) O processo se repete: a esfera originalmente carregada (agora com carga $\frac{Q}{2}$) entra em contato com uma nova esfera descarregada, dividindo novamente sua carga por dois.

Após cada contato, a carga da esfera carregada será dividida pela metade. Assim, após N contatos, a carga da esfera original será:

$$q_N = \frac{Q}{2^N} \tag{2}$$

Cada nova esfera tocada recebe metade da carga da esfera carregada no momento do contato. Portanto:

- 1^{a} esfera tocada: $\frac{Q}{2}$
- 2^{a} esfera tocada: $\frac{Q}{4}$
- 3^{a} esfera tocada: $\frac{Q}{8}$
- $\vdots$
- N-ésima esfera tocada: $\frac{Q}{2^N}$
- original: $\frac{Q}{2^N}$

c) A carga total do sistema após os N contatos será a soma das cargas de todas as esferas:

$$Q_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}\right) + \frac{Q}{2^N} \tag{3}$$

O somatório $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$. A soma dos N primeiros termos é:

$$S = \frac{\frac{Q}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right)}{1 - \frac{1}{2}} = Q\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) \tag{4}$$

Somando com a carga restante na esfera original:

$$Q_{\text{total}} = Q\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^N\right) + \frac{Q}{2^N} \tag{5}$$

$$Q_{\text{total}} = Q \tag{6}$$

Portanto, a carga total do sistema permanece constante e igual a Q, respeitando a da carga elétrica.

Problema 2

Uma placa infinita nos eixos x e y possui a seguinte distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x,y) = \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1+(y/b)^2} \tag{7}$$

onde a e b são constantes.

Solução:

A carga total Q na placa é dada pela integral da densidade superficial de carga $\sigma(x,y)$ sobre toda a área da placa:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x,y)\,dx\,dy \tag{8}$$

Substituindo a expressão de $\sigma(x,y)$, temos:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1+(y/b)^2}\,dx\,dy \tag{9}$$

Passo 1: Integral sobre x

Calculamos a integral sobre x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\,dx \tag{10}$$

Dividindo a integral em duas partes (por causa da função $|x|$), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-x/a}\,dx \tag{11}$$

A integral da exponencial é dada por:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x/a}\,dx = a \tag{12}$$

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a}\,dx = 2a \tag{13}$$

Passo 2: Integral sobre y

Agora, calculamos a integral sobre y:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(y/b)^2}\, dy \tag{14}$$

Essa é uma integral padrão, conhecida como a integral de Cauchy, que resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(y/b)^2}\, dy = \pi b \tag{15}$$

Passo 3: Cálculo da carga total

Agora que temos as integrais sobre x e y, podemos calcular a carga total:

$$Q = \sigma_0 \cdot 2a \cdot \pi b \tag{16}$$

Portanto, a carga total na placa é:

$$\boxed{Q = \sigma_0 2\pi ab} \tag{17}$$

Problema 3

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z. Calcule o potencial elétrico em um ponto de campo localizado a uma distância r do eixo z (por exemplo, no plano xy) e a uma altura z. Calcule o campo elétrico no mesmo ponto a partir do potencial. Calcule os limites quando $L \gg r$ e calcule também o limite quando $r \gg L$.

Solução:

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z.

Potencial Elétrico

Um elemento infinitesimal de carga é dado por:

$$dq = \lambda_0\, dz' \tag{18}$$

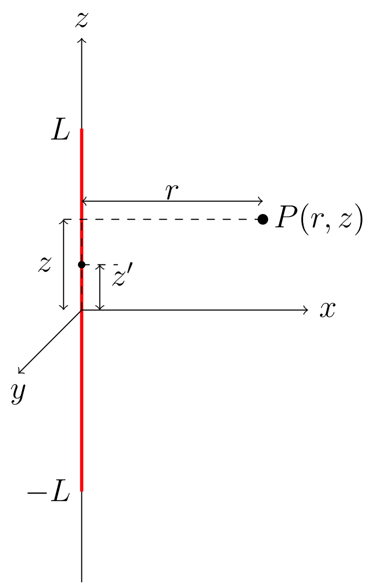

Figure 1: Linha de carga com densidade linear uniforme λ_0, de comprimento total $2L$, centrada no eixo z.

O potencial devido a esse elemento no ponto (r, z) é:

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{19}$$

Substituindo dq:

$$dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{20}$$

O potencial total é a integral de dV de $z' = -L$ até $z' = L$:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L}^{L} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \tag{21}$$

Fazendo a substituição $u = z - z'$, com $du = -dz'$, temos:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} \tag{22}$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \ln\left(u + \sqrt{r^2 + u^2}\right) + C \tag{23}$$

Aplicando os limites:

$$V(r,z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}\right) - \ln\left(z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}\right)\right] \tag{24}$$

$$V(r,z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{z+L+\sqrt{r^2+(z+L)^2}}{z-L+\sqrt{r^2+(z-L)^2}}\right) \tag{25}$$

Campo Elétrico

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \tag{26}$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e considerando a simetria do problema:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_\theta = 0 \tag{27}$$

Limites

1. Quando $L \gg r$

Neste caso, a linha de carga se comporta como um fio infinito. Aproximadamente:

$$V(r) \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{2L}{r}\right) \tag{28}$$

$$E_r \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\varepsilon_0 r}, \quad E_z \sim 0 \tag{29}$$

2. Quando $r \gg L$

Aqui, o sistema se comporta como uma carga pontual de carga total $Q = 2L\lambda_0$. Portanto:

$$V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2L\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 r} \tag{30}$$

$$\vec{E} \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} \tag{31}$$

Problema 4

Considere um elétron em um átomo de hidrogênio a uma distância de $0{,}53 \times 10^{-10}$ m do próton. Sabendo que o próton tem carga $+e$ e o elétron $-e$, resolva:

a) Calcule a energia potencial eletrostática do elétron em eV.

b) Sabendo que a velocidade do elétron é $v = 2{,}189 \times 10^6$ m/s, calcule a energia total do elétron no átomo de hidrogênio em eV.

Solução:

Letra (a): Energia Potencial Eletrostática

A fórmula da energia potencial eletrostática U entre duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r} \tag{32}$$

onde:

$$k = 8,99 \times 10^9 \, \mathrm{N \cdot m^2/C^2} \quad \text{(constante eletrostática)}, \tag{33}$$

$$q_1 = e = 1,6 \times 10^{-19} \, \mathrm{C} \quad \text{(carga do próton)}, \tag{34}$$

$$q_2 = -e = -1,6 \times 10^{-19} \, \mathrm{C} \quad \text{(carga do elétron)}, \tag{35}$$

$$r = 0,53 \times 10^{-10} \, \mathrm{m} \quad \text{(distância entre as cargas)}. \tag{36}$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$U = \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-1,6 \times 10^{-19})}{0,53 \times 10^{-10}} \tag{37}$$

Calculando:

$$U \approx \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (-2,56 \times 10^{-38})}{0,53 \times 10^{-10}} \approx -4,32 \times 10^{-18} \, \mathrm{J} \tag{38}$$

Convertendo para eV, usando $1 \, \mathrm{eV} = 1,602 \times 10^{-19}$ J:

$$U \approx \frac{-4,32 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx -27 \, \mathrm{eV} \tag{39}$$

Portanto, a energia potencial eletrostática é:

$$\boxed{U \approx -27 \, \mathrm{eV}} \tag{40}$$

Letra (b): Energia Total do Elétron

A energia total E do elétron é a soma da energia cinética E_{cinet} e da energia potencial U. A energia cinética é dada por:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{41}$$

onde:

$$m = 9,11 \times 10^{-31}\,\text{kg} \quad \text{(massa do elétron)}, \tag{42}$$

$$v = 2,189 \times 10^{6}\,\text{m/s} \quad \text{(velocidade do elétron)}. \tag{43}$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \times 10^{-31}) \cdot (2,189 \times 10^{6})^2 \tag{44}$$

Calculando:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{1}{2} \cdot 9,11 \times 10^{-31} \cdot 4,79 \times 10^{12} \approx 2,18 \times 10^{-18}\,\text{J} \tag{45}$$

Convertendo para eV:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{2,18 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx 13,6\,\text{eV} \tag{46}$$

Agora, a energia total do elétron é a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E = E_{\text{cinet}} + U \tag{47}$$

$$E = 13,6\,\text{eV} + (-27\,\text{eV}) \approx -13,6\,\text{eV} \tag{48}$$

Portanto, a energia total do elétron no átomo de hidrogênio é:

$$\boxed{E \approx -13,6\,\text{eV}} \tag{49}$$

Problema 5

Imagine que a Terra tenha densidade uniforme e que um túnel seja escavado ao longo de um diâmetro.

a) Se um objeto for solto no túnel, mostre que ele oscilaria com um período P igual ao período de um satélite em órbita na superfície da Terra.

b) Calcule P.

Solução:

Problema 6

Solução:

Problema 7

Solução:

Problema 8

Solução:

Problema 9

Solução:

Problema 10

Solução:

Problema 11

Solução: