

---

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
INSTITUTO DE FÍSICA

**Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1**

**Abril de 2025**

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

---

# Eletrromagnetismo I

André V. Silva

Thursday 1<sup>st</sup> May, 2025

---

## Problema 1

Uma esfera inicialmente carregada com uma carga total  $Q$  e colocada em contato momentâneo com uma esfera idêntica inicialmente descarregada.

- a) Qual é a carga em cada esfera após o contato?
- b) Esse processo é repetido com  $N$  esferas idênticas inicialmente descarregadas. Qual é a carga em cada uma das  $N + 1$  esferas, incluindo a esfera que originalmente possuía a carga?
- c) Qual é a carga total no sistema após  $N$  contatos?

### Solução:

a) Quando duas esferas idênticas entram em contato, a carga total se redistribui igualmente entre elas. Assim, a carga em cada esfera será:

$$q = \frac{Q}{2} \quad (1)$$

b) O processo se repete: a esfera originalmente carregada (agora com carga  $\frac{Q}{2}$ ) entra em contato com uma nova esfera descarregada, dividindo novamente sua carga por dois.

Após cada contato, a carga da esfera carregada será dividida pela metade. Assim, após  $N$  contatos, a carga da esfera original será:

$$q_N = \frac{Q}{2^N} \quad (2)$$

Cada nova esfera tocada recebe metade da carga da esfera carregada no momento do contato. Portanto:

- 1ª esfera tocada:  $\frac{Q}{2}$
- 2ª esfera tocada:  $\frac{Q}{4}$
- 3ª esfera tocada:  $\frac{Q}{8}$
- $\vdots$
- $N$ -ésima esfera tocada:  $\frac{Q}{2^N}$
- original:  $\frac{Q}{2^N}$

c) A carga total do sistema após os  $N$  contatos será a soma das cargas de todas as esferas:

$$Q_{\text{total}} = \left( \frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N} \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (3)$$

O somatório  $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}$  é uma progressão geométrica de razão  $r = \frac{1}{2}$ .

A soma dos  $N$  primeiros termos é:

$$S = \frac{\frac{Q}{2} \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^N \right)}{1 - \frac{1}{2}} = Q \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^N \right) \quad (4)$$

Somando com a carga restante na esfera original:

$$Q_{\text{total}} = Q \left( 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^N \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (5)$$

$$Q_{\text{total}} = Q \quad (6)$$

Portanto, a carga total do sistema permanece constante e igual a  $Q$ , respeitando a conservação da carga elétrica.

## Problema 2

Uma placa infinita nos eixos  $x$  e  $y$  possui a seguinte distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x, y) = \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \quad (7)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes.

### Solução:

A carga total  $Q$  na placa é dada pela integral da densidade superficial de carga  $\sigma(x, y)$  sobre toda a área da placa:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) \, dx \, dy \quad (8)$$

Substituindo a expressão de  $\sigma(x, y)$ , temos:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \, dx \, dy \quad (9)$$

### Passo 1: Integral sobre $x$

Calculamos a integral sobre  $x$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx \quad (10)$$

Dividindo a integral em duas partes (por causa da função  $|x|$ ), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x/a} \, dx \quad (11)$$

A integral da exponencial é dada por:

$$\int_0^{\infty} e^{-x/a} \, dx = a \quad (12)$$

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx = 2a \quad (13)$$

## Passo 2: Integral sobre $y$

Agora, calculamos a integral sobre  $y$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy \quad (14)$$

Essa é uma integral padrão, conhecida como a integral de Cauchy, que resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy = \pi b \quad (15)$$

## Passo 3: Cálculo da carga total

Agora que temos as integrais sobre  $x$  e  $y$ , podemos calcular a carga total:

$$Q = \sigma_0 \cdot 2a \cdot \pi b \quad (16)$$

Portanto, a carga total na placa é:

$$\boxed{Q = \sigma_0 2\pi ab} \quad (17)$$

## Problema 3

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme  $\lambda_0$ , de comprimento total  $2L$ , centrada no eixo  $z$ . Calcule o potencial elétrico em um ponto de campo localizado a uma distância  $r$  do eixo  $z$  (por exemplo, no plano  $xy$ ) e a uma altura  $z$ . Calcule o campo elétrico no mesmo ponto a partir do potencial. Calcule os limites quando  $L \gg r$  e calcule também o limite quando  $r \gg L$ .

### Solução:

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme  $\lambda_0$ , de comprimento total  $2L$ , centrada no eixo  $z$ .

### Potencial Elétrico

Um elemento infinitesimal de carga é dado por:

$$dq = \lambda_0 dz' \quad (18)$$

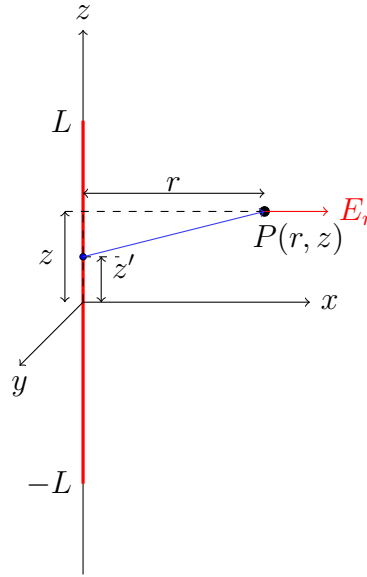


Figure 1: Linha de carga com densidade linear uniforme  $\lambda_0$ , de comprimento total  $2L$ , centrada no eixo  $z$ .

O potencial devido a esse elemento no ponto  $(r, z)$  é:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (19)$$

Substituindo  $dq$ :

$$dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (20)$$

O potencial total é a integral de  $dV$  de  $z' = -L$  até  $z' = L$ :

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (21)$$

Fazendo a substituição  $u = z - z'$ , com  $du = -dz'$ , temos:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} \quad (22)$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{r^2 + u^2}) + C \quad (23)$$

Aplicando os limites:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[ \ln \left( z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2} \right) - \ln \left( z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2} \right) \right] \quad (24)$$

$$\boxed{V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right)} \quad (25)$$

## Campo Elétrico

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Em coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  e considerando a simetria do problema:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_\theta = 0 \quad (27)$$

## Limites

### 1. Quando $L \gg r$

Neste caso, a linha de carga se comporta como um fio infinito. Aproximadamente:

$$\boxed{V(r) \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left( \frac{2L}{r} \right)} \quad (28)$$

$$\boxed{E_r \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_z \sim 0} \quad (29)$$

### 2. Quando $r \gg L$

Aqui, o sistema se comporta como uma carga pontual de carga total  $Q = 2L\lambda_0$ . Portanto:

$$\boxed{V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2L\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad (30)$$

$$\boxed{\vec{E} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}} \quad (31)$$

## Problema 4

Considere um elétron em um átomo de hidrogênio a uma distância de  $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$  do próton. Sabendo que o próton tem carga  $+e$  e o elétron  $-e$ ,

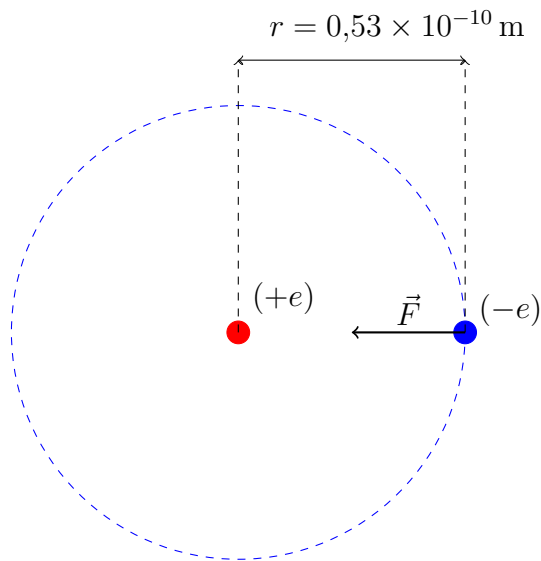


Figure 2: Esquema do elétron orbitando o próton em um átomo de hidrogênio.

resolva:

- Calcule a energia potencial eletrostática do elétron em eV.
- Sabendo que a velocidade do elétron é  $v = 2,189 \times 10^6 \text{ m/s}$ , calcule a energia total do elétron no átomo de hidrogênio em eV.

**Solução:**

### Letra (a): Energia Potencial Eletrostática

A fórmula da energia potencial eletrostática  $U$  entre duas cargas  $q_1$  e  $q_2$  separadas por uma distância  $r$  é dada por:

$$U = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r} \quad (32)$$

onde:

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (\text{constante eletrostática}), \quad (33)$$

$$q_1 = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do próton}), \quad (34)$$

$$q_2 = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do elétron}), \quad (35)$$



$$r = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{distância entre as cargas}). \quad (36)$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$U = \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-1,6 \times 10^{-19})}{0,53 \times 10^{-10}} \quad (37)$$

Calculando:

$$U \approx \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (-2,56 \times 10^{-38})}{0,53 \times 10^{-10}} \approx -4,32 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (38)$$

Convertendo para eV, usando  $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$ :

$$U \approx \frac{-4,32 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx -27 \text{ eV} \quad (39)$$

Portanto, a energia energia potencial eletrostática é :

$$\boxed{U \approx -27 \text{ eV}} \quad (40)$$

### Letra (b): Energia Total do Elétron

A energia total  $E$  do elétron é a soma da energia cinética  $E_{\text{cinet}}$  e da energia potencial  $U$ .

A energia cinética é dada por:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2}mv^2 \quad (41)$$

onde:

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\text{massa do elétron}), \quad (42)$$

$$v = 2,189 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade do elétron}). \quad (43)$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \times 10^{-31}) \cdot (2,189 \times 10^6)^2 \quad (44)$$

Calculando:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{1}{2} \cdot 9,11 \times 10^{-31} \cdot 4,79 \times 10^{12} \approx 2,18 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (45)$$

Convertendo para eV:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{2,18 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx 13,6 \text{ eV} \quad (46)$$

Agora, a energia total do elétron é a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E = E_{\text{cinet}} + U \quad (47)$$

$$E = 13,6 \text{ eV} + (-27 \text{ eV}) \approx -13,6 \text{ eV} \quad (48)$$

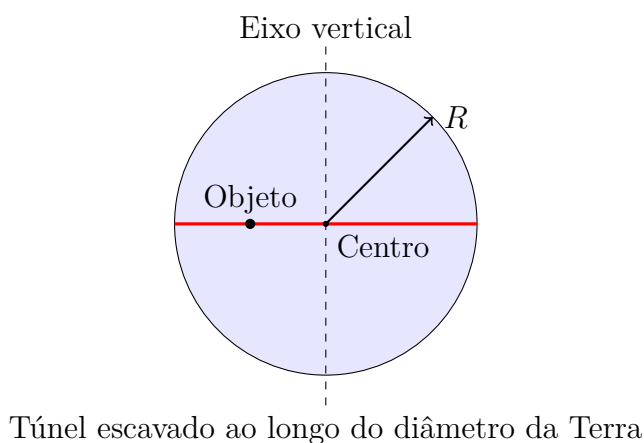
Portanto, a energia total do elétron no átomo de hidrogênio é:

$$E \approx -13,6 \text{ eV} \quad (49)$$

## Problema 5

Imagine que a Terra tenha densidade uniforme e que um túnel seja escavado ao longo de um diâmetro.

- Se um objeto for solto no túnel, mostre que ele oscilaria com um período  $P$  igual ao período de um satélite em órbita na superfície da Terra.
- Calcule  $P$ .



### Solução:

#### (a) Movimento do objeto no túnel

A força gravitacional sentida a uma distância  $r$  do centro é devida apenas à massa dentro da esfera de raio  $r$ , e é dada por:

$$M_{\text{interna}} = M \left( \frac{r^3}{R^3} \right) \quad (50)$$

Assim, a força gravitacional é:

$$F = -G \frac{M_{\text{interna}} m}{r^2} = -G \frac{M \left( \frac{r^3}{R^3} \right) m}{r^2} \quad (51)$$

Simplificando:

$$F = -G \frac{Mm}{R^3} r \quad (52)$$

Esta força é proporcional a  $r$  e dirigida para o centro, característica típica de um *movimento harmônico simples* (MHS).

A equação do movimento é:

$$\boxed{m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{Mm}{R^3} r} \quad (53)$$

Dividindo por  $m$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \left( G \frac{M}{R^3} \right) r \quad (54)$$

Portanto, a frequência angular  $\omega$  do movimento é:

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3} \quad (55)$$

e o período  $P$  é:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (56)$$

Para um satélite em órbita na superfície da Terra, o período também é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (57)$$

com  $r = R$ , portanto:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (58)$$

Assim, o período do objeto no túnel é **igual** ao período do satélite em órbita rasante.

### (b) Cálculo do período

Sabemos que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \Rightarrow GM = gR^2 \quad (59)$$

Substituindo:

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \quad (60)$$

Substituindo os valores:

$$R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad (61)$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{6,37 \times 10^6}{9,8}} \quad (62)$$

$$P = 2\pi\sqrt{650000} \quad (63)$$

$$P = 2\pi \times 806,2 \quad (64)$$

$$P \approx 5065 \text{ segundos} \quad (65)$$

Convertendo para minutos:

$$P \approx \frac{5065}{60} \approx 84,4 \text{ minutos} \quad (66)$$

**Resposta final:**

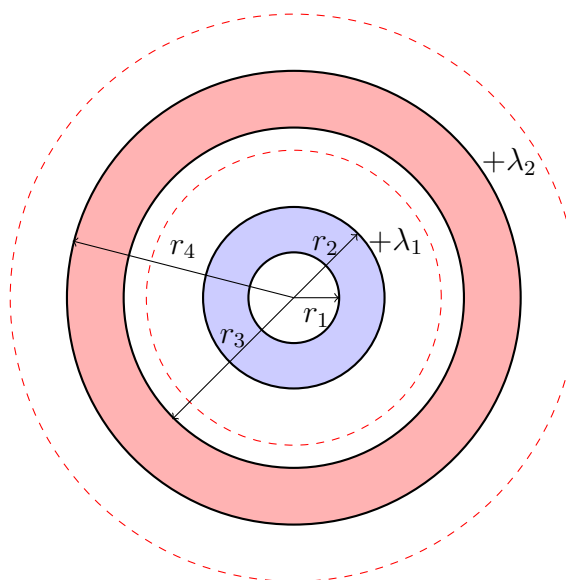
$$\boxed{P \approx 84,4 \text{ minutos}} \quad (67)$$

## Problema 6

Dois cilindros condutores longos e concêntricos são isolados entre si e carregados. Longe

das extremidades, o cilindro interno possui densidade de carga linear  $+\lambda_1$ , e o cilindro externo possui densidade de carga linear  $+\lambda_2$ .

O cilindro interno apresenta raios interno  $r_1$  e externo  $r_2$ , enquanto o cilindro externo apresenta raios interno  $r_3$  e externo  $r_4$ .



(a) Encontre o campo elétrico  $E(r)$ :

- (1) Em um ponto próximo ao meio dos cilindros (desprezando efeitos de borda).
- (2) Logo fora do cilindro externo.

(b) Encontre a diferença de potencial  $\Delta\phi$  entre os dois cilindros.

(c) Descreva qualitativamente as mudanças nos campos elétricos e nos potenciais se:

- (1) O raio interno  $r_1$  do cilindro interno for diminuído.
- (2) O raio externo  $r_2$  do cilindro interno for aumentado.
- (3) A seção transversal externa do cilindro interno for transformada em quadrado de lado  $2r_2$  (assumindo  $2r_2 < r_3$ ).

### Solução:

Dois cilindros condutores longos e concêntricos possuem densidades lineares de carga  $\lambda_1$  (interno) e  $\lambda_2$  (externo). Vamos resolver as questões:

(a) Encontrar  $E(r)$ :

(1) **Em um ponto próximo ao meio (entre  $r_2 < r < r_3$ ):**

Aplicando a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0} \quad (68)$$

Como o sistema é cilíndrico:

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda_{\text{enc}} L}{\varepsilon_0} \quad (69)$$

Logo:

$$E(r) = \frac{\lambda_{\text{enc}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (70)$$

Onde  $\lambda_{\text{enc}}$  é a carga linear total até o raio  $r$ .

Para  $r_2 < r < r_3$ , somente o cilindro interno contribui, logo:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1 \quad (71)$$

Assim:

$$E(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (72)$$

(2) **Logo fora do cilindro externo ( $r > r_4$ ):**

Agora, as cargas dos dois cilindros contribuem:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (73)$$

Portanto:

$$E(r) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (74)$$

(b) Encontrar a diferença de potencial  $\Delta\phi$  entre os dois cilindros:

O potencial  $\phi(r)$  é dado por:

$$\phi(r) = - \int E(r) dr \quad (75)$$

Logo, a diferença de potencial entre  $r_2$  e  $r_3$  é:

$$\Delta\phi = \phi(r_3) - \phi(r_2) \quad (76)$$

Integrando:

$$\Delta\phi = - \int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (77)$$

$$\Delta\phi = - \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right) \quad (78)$$

(c) Descrever qualitativamente:

(1) Se  $r_1$  for diminuído:

A distribuição de carga no cilindro interno se concentra mais, mas, fora dele ( $r > r_2$ ), o campo não muda, pois depende apenas da carga linear total  $\lambda_1$ .

(2) Se  $r_2$  for aumentado:

O cilindro interno se torna mais largo. A distância até o cilindro externo diminui, o que pode alterar a diferença de potencial  $\Delta\phi$  (diminuindo a magnitude do potencial).

(3) Se a seção transversal externa do cilindro interno for transformada em um quadrado de lado  $2r_2$ :

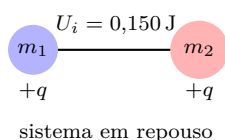
A simetria cilíndrica se perde. Assim, o campo elétrico deixa de ser puramente radial e passa a variar conforme a direção, especialmente próximo às bordas do quadrado. No entanto, se  $\sqrt{2}r_2 < r_3$ , ainda há uma região entre o quadrado e o cilindro externo onde o campo pode ser aproximadamente radial.

## Problema 7

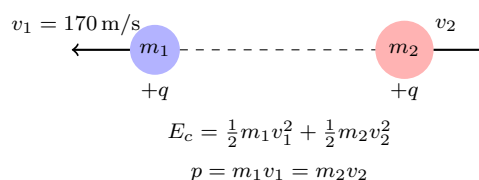
A partícula 1 tem massa  $m_1 = 3,6 \times 10^{-6}$  kg, enquanto a partícula 2 tem massa  $m_2 = 6,2 \times 10^{-6}$  kg. Ambas possuem a mesma carga elétrica. As partículas estão inicialmente em repouso, e o sistema de duas partículas possui uma energia potencial elétrica inicial de 0,150 J.

As partículas são então liberadas e se repelem devido à força elétrica. Efeitos gravitacionais são desprezados, e nenhuma outra força atua sobre as partículas. Em um instante após a liberação, a velocidade da partícula 1 é medida como  $v_1 = 170 \text{ m/s}$ .

**Antes da liberação**



**Após a liberação**



- Qual é a energia potencial elétrica do sistema de duas partículas nesse instante?
- Que tipos de energia o sistema tinha inicialmente?
- Que tipos de energia o sistema tem no instante posterior?
- O princípio da conservação de energia se aplica? Justifique.
- O princípio da conservação do momento linear se aplica? Justifique.

**Solução:**

### Dados do problema

- Massa da partícula 1:  $m_1 = 3,6 \times 10^{-6} \text{ kg}$
- Massa da partícula 2:  $m_2 = 6,2 \times 10^{-6} \text{ kg}$
- Velocidade da partícula 1:  $v_1 = 170 \text{ m/s}$
- Energia potencial inicial:  $U_i = 0,150 \text{ J}$

Efeitos gravitacionais são desprezados, e apenas forças elétricas atuam.

### (a) Energia potencial elétrica do sistema nesse instante

Pela conservação da energia:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad (79)$$



$$U_i = U_f + K \quad (80)$$

Onde  $K$  é a energia cinética total:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (81)$$

Utilizando a conservação do momento linear:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v_1 \quad (82)$$

Substituindo os valores:

$$v_2 = -\frac{3,6 \times 10^{-6}}{6,2 \times 10^{-6}} \times 170 \quad \Rightarrow \quad v_2 \approx -98,7 \text{ m/s} \quad (83)$$

Calculando a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}(3,6 \times 10^{-6})(170)^2 + \frac{1}{2}(6,2 \times 10^{-6})(98,7)^2 \quad (84)$$

$$K = (1,8 \times 10^{-6})(28900) + (3,1 \times 10^{-6})(9746,69) \quad (85)$$

$$K = 0,05202 + 0,03031 = 0,08233 \text{ J} \quad (86)$$

Agora, determinamos  $U_f$ :

$$U_f = U_i - K \quad (87)$$

$$U_f = 0,150 - 0,08233 \quad (88)$$

$$\boxed{U_f = 0,0677 \text{ J}} \quad (89)$$

## (b) Tipos de energia inicialmente

Inicialmente, as partículas estavam em repouso, logo:

$$\text{Energia inicial} = \text{energia potencial elétrica} \quad (90)$$

**Resposta:** Apenas energia potencial elétrica.

### (c) Tipos de energia no instante posterior

Após serem liberadas, as partículas possuem:

$$\text{Energia posterior} = \text{energia cinética} + \text{energia potencial elétrica} \quad (91)$$

**Resposta:** Energia cinética e energia potencial elétrica.

### (d) Conservação da energia

Sim, a conservação da energia se aplica, pois:

- O sistema é isolado (sem forças externas realizando trabalho).
- Apenas forças internas (elétricas) atuam.

**Resposta:** O princípio da conservação da energia se aplica.

### (e) Conservação do momento linear

Sim, a conservação do momento linear se aplica, pois:

- O sistema está isolado (sem forças externas).

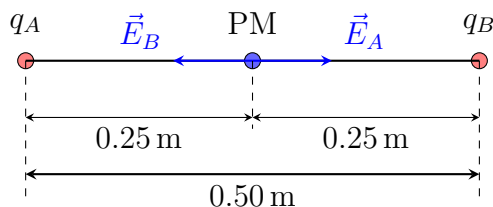
**Resposta:** O princípio da conservação do momento linear se aplica.

## Problema 8

Duas cargas puntiformes idênticas  $q_A = q_B = +2,4 \times 10^{-9} \text{ C}$  estão fixas no espaço e separadas por 0,50 m. Determine o campo elétrico e o potencial elétrico no ponto médio da linha entre as cargas  $q_A$  e  $q_B$ .

- Quais são as direções das contribuições individuais do campo elétrico de  $q_A$  e  $q_B$  no ponto médio (PM)?
- O campo elétrico líquido no ponto médio tem módulo maior, menor ou igual a zero?
- O potencial elétrico total no ponto médio é positivo, negativo ou zero?

- (d) O potencial elétrico total tem direção associada?
- (e) Calcule o valor do campo e do potencial elétrico no ponto médio.



### Solução:

1. **Quais são as direções das contribuições individuais do campo elétrico de  $q_A$  e  $q_B$  no ponto médio?**

Como as duas cargas são positivas, o campo elétrico gerado por cada uma delas no ponto médio aponta para fora da carga, ou seja:

- O campo de  $q_A$  aponta para a direita.
- O campo de  $q_B$  aponta para a esquerda.

2. **O campo elétrico líquido no ponto médio tem módulo maior, menor ou igual a zero?**

Como os campos têm mesma intensidade e direções opostas, eles se anulam.

$$\boxed{E_{\text{total}} = 0} \quad (92)$$

3. **O potencial elétrico total no ponto médio é positivo, negativo ou zero?**

O potencial elétrico é escalar e soma-se algébrica e positivamente no ponto médio, já que ambas as cargas são positivas.

$$\boxed{V_{\text{total}} > 0} \quad (93)$$

4. **O potencial elétrico total tem direção associada?**

Não. O potencial elétrico é uma grandeza escalar, portanto:

$$\boxed{\text{O potencial não possui direção associada.}} \quad (94)$$

5. Calcule o valor do campo e do potencial elétrico no ponto médio.

Distância de cada carga ao ponto médio:  $r = \frac{0,50}{2} = 0,25 \text{ m}$

• **Campo elétrico (contribuição de uma carga):**

$$E = k \frac{q}{r^2} = 9,0 \times 10^9 \cdot \frac{2,4 \times 10^{-9}}{(0,25)^2} = \frac{21,6}{0,0625} = 345,6 \text{ N/C} \quad (95)$$

Como os campos se anulam:

$$\boxed{E_{\text{total}} = 0 \text{ N/C}} \quad (96)$$

• **Potencial elétrico total:**

$$V = 2 \cdot k \frac{q}{r} = 2 \cdot 9,0 \times 10^9 \cdot \frac{2,4 \times 10^{-9}}{0,25} = 2 \cdot \frac{21,6}{0,25} = 172,8 \text{ V} \quad (97)$$

$$\boxed{V_{\text{total}} = 172,8 \text{ V}} \quad (98)$$

## Problema 9

Uma região esférica de raio  $R$  está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (99)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição a partir do centro da esfera, e  $E_0$  é uma constante.

Determine a densidade de carga na região.

**Solução:**

Uma região esférica de raio  $R$  está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (100)$$

onde  $\mathbf{r}$  é o vetor posição a partir do centro da esfera, e  $E_0$  é uma constante. Determine a densidade de carga na região.

## Solução

Para determinar a densidade de carga, usamos a Lei de Gauss na forma diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (101)$$

onde  $\rho$  é a densidade de carga e  $\varepsilon_0$  é a permissividade do vácuo.

O campo elétrico no interior da esfera é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (102)$$

Agora, vamos calcular o divergente do campo elétrico.

### Cálculo do Divergente de $\mathbf{E}$

O campo elétrico tem a forma:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (103)$$

Onde  $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$  é o vetor posição.

O divergente em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (104)$$

Com:

$$E_x = \frac{E_0}{R^2}x, \quad E_y = \frac{E_0}{R^2}y, \quad E_z = \frac{E_0}{R^2}z \quad (105)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{E_0}{R^2} \quad (106)$$

Somando as derivadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 3 \times \frac{E_0}{R^2} = \frac{3E_0}{R^2} \quad (107)$$

### Aplicando a Lei de Gauss

De acordo com a Lei de Gauss, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (108)$$

Substituindo o valor do divergente:

$$\frac{3E_0}{R^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (109)$$

Isolando  $\rho$ :

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{3E_0}{R^2} \quad (110)$$

### Resultado Final

A densidade de carga na região é:

$$\boxed{\rho = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{R^2}} \quad (111)$$

## Problema 10

Determine o campo elétrico  $\vec{E}$  e a densidade volumétrica de carga  $\rho$  para as seguintes distribuições de potencial elétrico:

(a)  $V = Ax^2$

(b)  $V = Axyz$

### Solução:

(a)  $V = Ax^2$

1. Calcular o campo elétrico  $\vec{E}$

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (112)$$

Para  $V = Ax^2$ , calculamos o gradiente em coordenadas cartesianas. Como  $V$  depende apenas de  $x$ , temos:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (113)$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (114)$$

Portanto, o gradiente de  $V$  é:

$$\nabla V = 2Ax \hat{i} \quad (115)$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -2Ax \hat{i} \quad (116)$$

2. Calcular a densidade de carga  $\rho$

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (117)$$

Primeiro, calculamos o divergente do campo elétrico  $\vec{E}$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-2Ax) + 0 + 0 = -2A \quad (118)$$

Portanto:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -2A \quad (119)$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\rho = -2A\varepsilon_0 \quad (120)$$

(b)  $V = Axyz$

1. Calcular o campo elétrico  $\vec{E}$

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (121)$$

Para  $V = Axyz$ , calculamos o gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (122)$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Ayz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Axz, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Axy \quad (123)$$

Portanto, o gradiente de  $V$  é:

$$\nabla V = Ayz \hat{i} + Axz \hat{j} + Axy \hat{k} \quad (124)$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -Ayz \hat{i} - Axz \hat{j} - Axy \hat{k} \quad (125)$$

2. Calcular a densidade de carga  $\rho$

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (126)$$

Calculando o divergente de  $\vec{E}$ :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-Ayz) + \frac{\partial}{\partial y}(-Axz) + \frac{\partial}{\partial z}(-Axy) \quad (127)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (128)$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\rho = 0 \quad (129)$$

## Resultado Final

Para o potencial  $V = Ax^2$ :

- Campo elétrico:  $\vec{E} = -2Ax \hat{i}$



- Densidade de carga:  $\rho = -2A\epsilon_0$

Para o potencial  $V = Axyz$ :

- Campo elétrico:  $\vec{E} = -Ayz\hat{i} - Axz\hat{j} - Axy\hat{k}$
- Densidade de carga:  $\rho = 0$

## Problema 11

Quais dos seguintes vetores podem ser um campo elétrico? Se forem, qual é a densidade volumétrica de carga associada?

(a)  $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$

(b)  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$

**Solução:**

(a)  $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$

Para verificar se o vetor  $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$  pode ser um campo elétrico, devemos calcular seu divergente.

Em coordenadas cartesianas, o divergente de  $\vec{E}$  é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \quad (130)$$

Como  $\vec{E}$  não depende de  $y$  nem de  $z$ , temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) = 2axy^2 \quad (131)$$

Portanto, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \epsilon_0(2axy^2) \quad (132)$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga não uniforme, logo,  $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$  pode representar um campo elétrico.

(b)  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$

Agora, temos o campo elétrico  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$  em coordenadas cilíndricas. Para verificar se esse vetor pode ser um campo elétrico, devemos calcular o seu divergente.

Em coordenadas cilíndricas, o divergente de um vetor  $\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$  é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z) \quad (133)$$

Para o campo  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ , temos:

$$E_r = a \cos \theta, \quad E_\theta = -a \sin \theta, \quad E_z = 0 \quad (134)$$

Logo, o divergente de  $\vec{E}$  em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r a \cos \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(-a \sin \theta) \quad (135)$$

A primeira derivada em  $r$  é zero, pois  $E_r$  não depende de  $r$ . A segunda derivada em  $\theta$  é:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(-a \sin \theta) = -a \cos \theta \quad (136)$$

Portanto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a \cos \theta}{r} \quad (137)$$

Então, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{a \varepsilon_0 \cos \theta}{r} \quad (138)$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga que depende de  $\theta$  e  $r$ . Logo,  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$  também pode representar um campo elétrico.

## Resultado Final

- Para o campo  $\vec{E} = ax^2y^2\hat{x}$ , o divergente é  $\nabla \cdot \vec{E} = 2axy^2$ , e a densidade de carga associada é  $\rho = \varepsilon_0(2axy^2)$ .

- Para o campo  $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ , o divergente é  $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a \cos \theta}{r}$ , e a densidade de carga associada é  $\rho = -\frac{a\epsilon_0 \cos \theta}{r}$ .