UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Primeira lista complementar de Eletromagnetismo 1

Março de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto
Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Saturday 29th March, 2025

Problema 1

a) Mostre que o rotacional de um gradiente de uma função qualquer é zero: $\nabla \times (\nabla f) = 0$, de duas formas: abrindo em componentes e argumentando pelo teorema de Stokes. **b)** Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

Solução:

Em componentes cartesianas, o gradiente de uma função escalar f é:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \tag{1}$$

O rotacional é definido como:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \hat{k}. \tag{3}$$

Como as derivadas parciais mistas são comutativas (desde que f seja suave), cada termo é zero:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \tag{4}$$

Pelo teorema de Stokes, a integral de linha de um gradiente ao longo de um caminho fechado é zero, implicando que seu rotacional é nulo.

b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{5}$$

de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

A divergência é definida como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{6}$$

Aplicando à definição do rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{7}$$

resultando em:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{k}. \tag{8}$$

Tomando a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right). \tag{9}$$

Como as derivadas mistas comutam, cada termo se anula, resultando em:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \tag{10}$$

Pelo teorema da divergência, a integral de volume da divergência de um rotacional se reduz a uma integral de superfície de um campo tangencial, que desaparece, confirmando o resultado.