Notas: Função

André V. Silva

2 de dezembro de 2025

Enunciado

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t},$$

com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 10

Resolução detalhada

O golfinho está fora da água sempre que $h(t) > 0$. Sabemos que $h(0) = 0$, portanto o instante inicial é $t = 0$. Para descobrir quando ele volta a mergulhar, devemos encontrar o próximo instante $T > 0$ tal que

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t} = 0.$$

Primeiro, fatoramos t:

$$h(t) = t\left(4 - 2^{0,2t}\right).$$

Igualando a zero:

$$t\left(4 - 2^{0,2t}\right) = 0.$$

Daí, temos duas possibilidades:

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - 2^{0,2t} = 0.$$

A segunda equação fornece o tempo de mergulho:

$$4 = 2^{0,2t}.$$

Como $4 = 2^2$, obtemos:

$$2^{0,2t} = 2^2.$$

Igualando os expoentes:

$$0,2t = 2.$$

Resolvendo para t:

$$t = \frac{2}{0,2} = 10.$$

Portanto, o golfinho permaneceu fora da água durante:

$$T = 10 \text{ segundos}.$$

Logo, a alternativa correta é **(e) 10**.

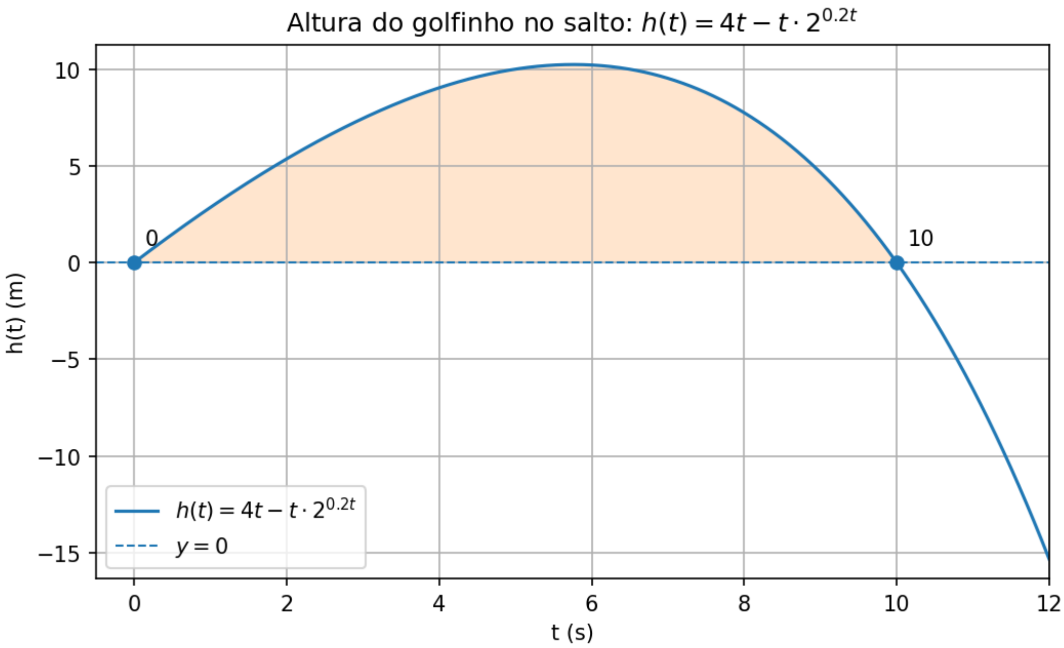


Figura 1: função do 2 Grau para altura do saldo do golfinho

Enunciado

Resolver a inequação:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \leq \frac{1}{3}.$$

Resolução

Escrevemos o número do lado direito como potência da mesma base:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1.$$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, a função a^x é decrescente. Assim,

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^A \leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^B \quad \Longleftrightarrow \quad A \geq B.$$

Aplicando à inequação:

$$x^2 - 3 \geq 1.$$

Logo:

$$x^2 \geq 4.$$

Portanto:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

A solução é:

$$\boxed{x \leq -2 \;\text{ ou }\; x \geq 2}.$$

Gráfico da função $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-3}$

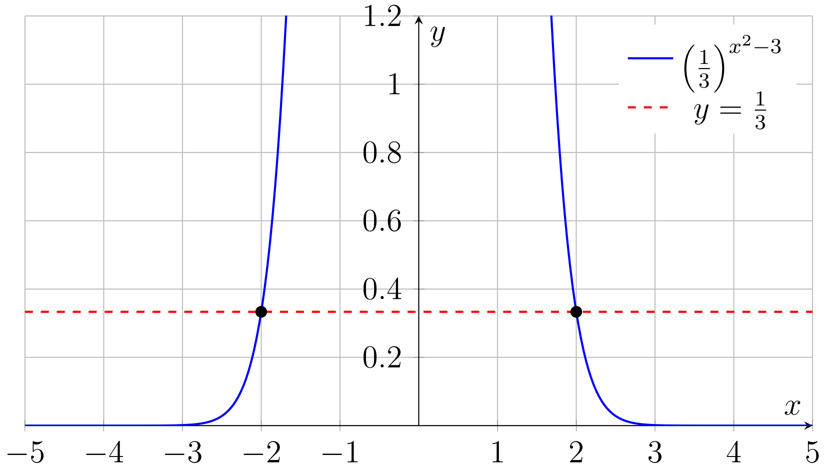
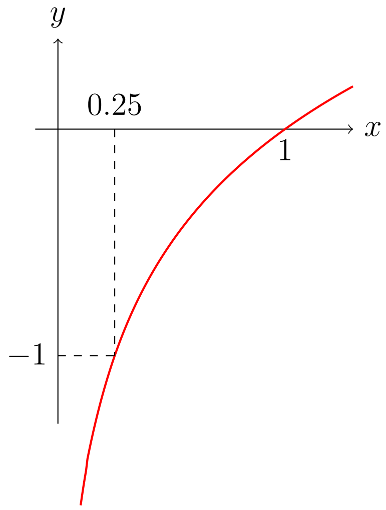


Gráfico da função $y = \log_4(x)$



Sabemos que o gráfico representa a função $y = \log_b(x)$.

Observe que o ponto destacado na figura é

$$(0{,}25,\ -1).$$

Isso significa que

$$\log_b(0{,}25) = -1.$$

Usando a definição de logaritmo:

$$\log_b(0{,}25) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^{-1} = 0{,}25.$$

Mas

$$0{,}25 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$b^{-1} = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 4.$$

$$\boxed{b = 4}$$

Resoluções – Questões de Funções Quadráticas

Questão 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 - 18x + 65.$$

(a) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

- Primeiro encontramos as raízes da equação quadrática $f(x) = 0$:

$$x^2 - 18x + 65 = 0.$$

Calcule o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64.$$

- Raízes:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2}.$$

Assim

$$x_1 = \frac{18-8}{2} = 5, \qquad x_2 = \frac{18+8}{2} = 13.$$

- Como o coeficiente $a = 1 > 0$, a parábola abre para cima; portanto $f(x) \leq 0$ entre as raízes:

$$\boxed{5 \leq x \leq 13\,.}$$

(b) Determine a ordenada do vértice (y_V) diretamente pela fórmula.

Para um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, a ordenada do vértice pode ser calculada por

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

Aqui $a = 1$ e $b = -18$, então a abscissa do vértice é

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9.$$

Calcule $y_V = f(9)$:

$$y_V = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

Logo,

$$\boxed{y_V = -16\,.}$$

(c) Confirme o resultado determinando primeiro x_V e depois impondo que y_V seja imagem de x_V por f.

- Já calculamos $x_V = 9$.

- Agora avaliamos $f(9)$ (repetindo o cálculo da forma indicada):

$$f(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

- Assim confirma-se que a ordenada do vértice é $y_V = -16$, exatamente como em (b).

Questão 3

Uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem seu gráfico passando pelos pontos $(-3, 0)$, $(11, 0)$ e $(1, -80)$.

(a) Determine essa função, em forma fatorada.

(b) Essa função tem valor máximo ou mínimo para seu conjunto imagem? Justifique e determine-o.

Questão 1

a) $\sqrt{21 - x} = 9 + x$

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{4x - 3} + 1$

Enunciado:

Sejam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = x^2 - 4x + 10 \qquad \text{e} \qquad g(x) = -5x + 20.$$

Calcule o valor de

$$\frac{(f(4))^2 - g\big(f(4)\big)}{f(0) - g\big(f(0)\big)}.$$

Questão 53

Sejam $f(x) = 4^x$ e $g(x) = 1{,}5x$. Então a função composta $f \circ g$ tem lei:

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big).$$

Questão 54

Considere as funções $g(x) = 4x + 5$ e $h(x) = 3x - 2$, definidas em $\mathbb{R}$. Um estudante que resolve corretamente a equação

$$g\big(h(x)\big) + h\big(g(x)\big) = g\big(h(2)\big) - h\big(g(0)\big)$$

encontra para x que satisfaz a equação acima.

Questão - 55

Enunciado

Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7, & \text{se } x \leq 5, \\ 18 - 3x, & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

O valor de

$$f\big(f(6)\big) - f\big(f(0)\big)$$

é igual a:

(A) 26

(B) 39

(C) -13

(D) -28

(E) 14

Questão - 56

Enunciado

Seja $f(x) = 2x - 3$ e $g\big(f(x)\big) = f\left(\dfrac{x}{2} + 1\right)$. Então $g(5)$ é igual a:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Enunciado

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$g(x) = \pi \cdot f(2x).$$

Então o gráfico de $g(x)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x)$ através de:

(a) uma dilatação horizontal e uma dilatação vertical.

(b) uma dilatação horizontal e uma compressão vertical.

(c) uma compressão horizontal e uma dilatação vertical.

(d) uma compressão horizontal e uma compressão vertical.

(e) uma dilatação horizontal e uma translação vertical.

Enunciado

O gráfico da função $f(x)$, definida para todo número real, está representado abaixo:

(gráfico em V, com vértice na origem)

O gráfico que melhor representa a função

$$g(x) = f(x-1) + 2$$

é:

$$\text{Dada } f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, \quad \text{calcule } g(x) = f(f(x))$$

$$g(x) = f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

$$p(x) = \frac{1}{x-2}$$

Domínio:

$$D(p) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$g(x) = \frac{3x-1}{x}$$

Separando os termos:

$$g(x) = \frac{3x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

Domínio:

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$h(x) = \frac{x}{x+1}$$

Escrevendo como soma:

$$h(x) = \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$h(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Domínio:

$$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$