**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO**

**INSTITUTO DE FÍSICA**

# Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

**Maio de 2025**

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

**Eletromagnetismo I**

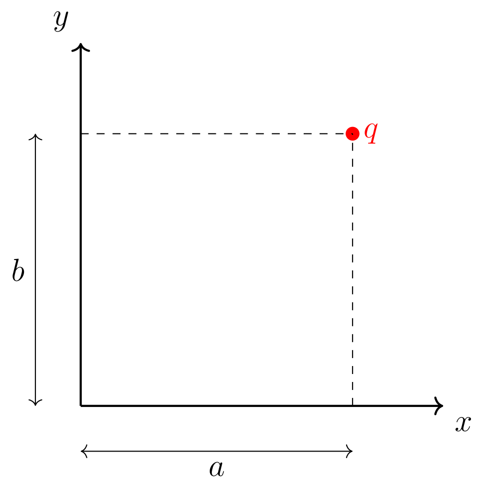
André V. Silva

Monday 12$^{\text{th}}$ May, 2025

---

# Problema 1

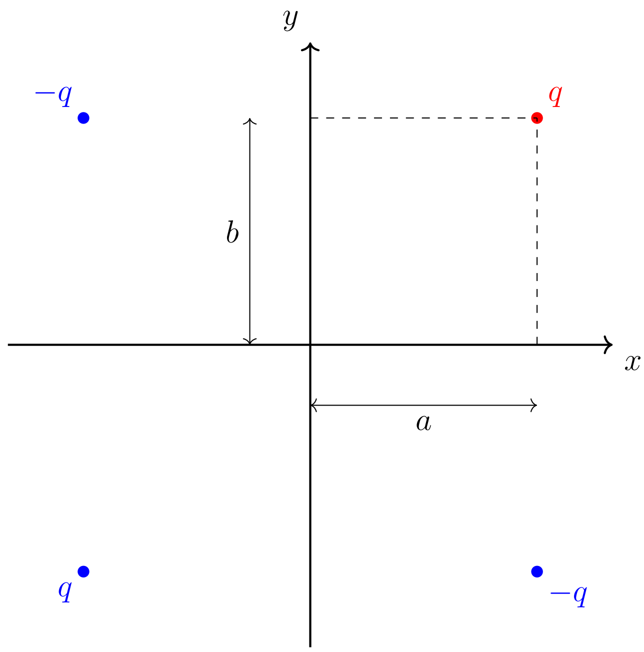
Dois planos condutores aterrados ao longo dos eixos $x$ e $y$ se interceptam na origem, conforme mostrado na figura. Uma carga $q$ é colocada a uma distância $b$ acima do eixo $x$ e a uma distância $a$ à direita do eixo $y$. Determine a força sobre a carga.
**Sugestão:** as cargas imagens devem fazer com que as condições de contorno sejam mantidas nos dois planos simultaneamente.




**Solução:**

Como os planos condutores estão aterrados, o potencial ao longo dos eixos $x = 0$ e $y = 0$ deve ser nulo. Para satisfazer essa condição, usaremos o **método das cargas imagem**. A carga real $q$ está localizada no ponto $(a, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$, no primeiro quadrante. Para que o potencial seja nulo nos eixos coordenados, inserimos três cargas imagem:

- Uma carga imagem $-q$ em $(-a, b)$, que anula o potencial no plano $x = 0$,
- Uma carga imagem $-q$ em $(a, -b)$, que anula o potencial no plano $y = 0$,
- Uma carga imagem $+q$ em $(-a, -b)$, que garante simultaneamente que o potencial seja zero nos dois planos.




**Cálculo da força**

A força total sobre a carga real $q$ é a soma das forças de Coulomb exercidas pelas cargas imagem.

**Força devido a $-q$ em $(-a, b)$:**

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(-q)}{(2a)^2}\hat{\imath} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\imath} \tag{1}$$

**Força devido a $-q$ em $(a, -b)$:**

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(-q)}{(2b)^2}\hat{\jmath} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{\jmath} \tag{2}$$

**Força devido a $+q$ em $(-a, -b)$:**

A distância até a carga real é $2\sqrt{a^2 + b^2}$. O vetor deslocamento é $(2a, 2b)$, portanto:

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2\sqrt{a^2+b^2})^2} \cdot \frac{(2a, 2b)}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}) \tag{3}$$

**Resultado final**

Somando os três termos:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \tag{4}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{\imath} + \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}\right]} \tag{5}$$

# Problema 2

Uma distribuição de carga elétrica produz o campo elétrico

$$\mathbf{E} = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right)\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6}$$

onde $c$ e $\alpha$ são constantes. Encontre a carga total dentro do raio $r = \frac{1}{\alpha}$.

**Solução:**

Utilizaremos o **teorema de Gauss**, que relaciona o fluxo do campo elétrico com a carga total no interior de uma superfície fechada:

$$\oint_{\text{superfície}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

Como o campo é radial e depende apenas de $r$, escolhemos uma superfície gaussiana esférica de raio $r = \frac{1}{\alpha}$. O campo elétrico sobre essa superfície tem módulo:

$$|\mathbf{E}(r)| = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right)\frac{1}{r^2} \tag{8}$$

O vetor de área é $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\, r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$, portanto:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{E}(r)| \cdot 4\pi r^2 \tag{9}$$

Substituindo:

$$\Phi_E = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \tag{10}$$
$$= 4\pi c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \tag{11}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$Q_{\text{int}} = \varepsilon_0 \Phi_E = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \tag{12}$$

Finalmente, substituímos $r = \frac{1}{\alpha}$:

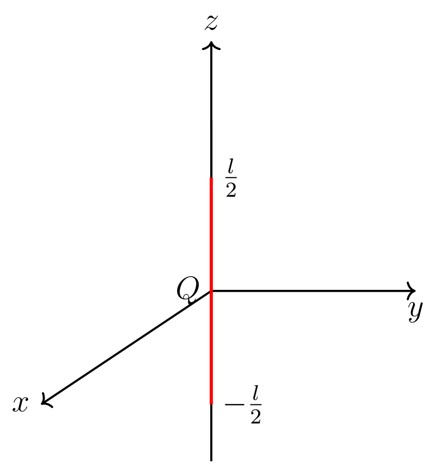
$$Q = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - e^{-1}\right) \tag{13}$$

### Resposta final

$$\boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - \frac{1}{e}\right)} \tag{14}$$

## Problema 3

Uma haste fina e não condutora de comprimento $l$ carrega uma carga $Q$ uniformemente distribuída e está orientada conforme mostrado na figura:




(a) Determine o potencial $V$ devido à haste carregada para qualquer ponto sobre o eixo $z$, com $z > l/2$.

(b) Encontre $V(r, \theta, \varphi)$ para todos os pontos com $|\mathbf{r}| > l/2$, onde $r, \theta, \varphi$ são as coordenadas esféricas usuais.

**Sugestão para a parte b:** A solução geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal é dada por

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta), \qquad \text{Griffiths, 3.65,} \tag{15}$$

Os coeficientes são determinados a partir das condições de contorno de cada problema.

**Solução:**

### (a) Potencial sobre o eixo $z$ com $z > \frac{l}{2}$

A densidade linear de carga da haste é

$$\lambda = \frac{Q}{l} \tag{16}$$

O potencial eletrostático gerado por uma linha de carga no ponto $z$ (com $z > l/2$) é dado por:

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\lambda\, dz'}{|z - z'|} \tag{17}$$

Como $z > z'$ em todo o intervalo, podemos retirar o módulo:

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz'}{z - z'} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \left[\ln(z - z')\right]_{z'=-l/2}^{z'=l/2} \tag{18}$$

$$V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left( \frac{z + l/2}{z - l/2} \right) \tag{19}$$

**Resposta da parte (a):**

$$\boxed{V(z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left( \frac{z + l/2}{z - l/2} \right)} \quad \text{para } z > \frac{l}{2} \tag{20}$$

### (b) Potencial em coordenadas esféricas para $r > \frac{l}{2}$

A solução geral da equação de Laplace com simetria azimutal é:

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta)} \tag{21}$$

Como estamos fora da distribuição de cargas, não há termo crescente ($A_l = 0$), então:

$$\boxed{V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)} \tag{22}$$

Os coeficientes $B_l$ são dados por:

$$B_l = \frac{1}{\varepsilon_0(2l+1)} \int \rho(\vec{r}')\,(r')^l\,P_l(\cos\theta')\,d\tau' \tag{23}$$

Como a carga está ao longo do eixo $z$, temos:

$$\rho(\vec{r'}) = \lambda\,\delta(x')\delta(y') \Rightarrow dq = \lambda\,dz' \quad \text{e} \quad \cos\theta' = \frac{z'}{|z'|} \tag{24}$$

Então:

$$\boxed{B_l = \frac{\lambda}{\varepsilon_0(2l+1)} \int_{-l/2}^{l/2} z'^l\,dz'} \quad \checkmark \tag{25}$$

**Paridade:**

- Para $l$ ímpar: integral de função ímpar $\Rightarrow 0$
- Para $l$ par: integral de função par $\Rightarrow 2\int_0^{l/2} z'^l\,dz'$

**Termo monopolar ($l = 0$):**

$$B_0 = \frac{\lambda}{\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} dz' = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{26}$$

$$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} \tag{27}$$

**Termo quadrupolar ($l = 2$):**

$$B_2 = \frac{\lambda}{5\varepsilon_0} \int_{-l/2}^{l/2} z'^2\,dz' = \frac{\lambda}{5\varepsilon_0} \cdot \frac{l^3}{12} = \frac{\lambda l^3}{60\varepsilon_0} \tag{28}$$

$$V_2(r,\theta) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda l^3}{60 r^3} \cdot \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) \tag{29}$$

**Resposta da parte (b):**

$$\boxed{V(r,\theta) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\lambda l^3}{60r^3}\left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2}\right) + \cdots\right] \quad \text{para } r > \frac{l}{2}} \tag{30}$$

# Problema 4

Considere uma esfera de raio $a$ contendo uma densidade de carga uniforme $\rho$ no seu interior, e sem carga no exterior. Deseja-se determinar o potencial eletrostático $V(r)$ e o campo elétrico $\mathbf{E}(r)$ em todo o espaço, assumindo que $V \to 0$ quando $r \to \infty$.
Determine o campo elétrico dentro e fora da esfera. Resolva a equação de Poisson para dentro e fora da esfera.
**Obs:** esse problema foi resolvido muitas vezes desde Física 3 por meio da lei de Gauss na formulação integral.
**Solução:**

## 1. Campo Elétrico via Lei de Gauss

Pela simetria esférica, o campo elétrico é radial, ou seja, $\mathbf{E}(r) = E(r)\,\hat{r}$. Utilizamos a Lei de Gauss:

$$\boxed{\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}} \tag{31}$$

**Para $r < a$ (interior da esfera):**

$$Q_{\text{int}} = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}} \tag{32}$$

**Para $r > a$ (exterior da esfera):**

$$Q = \rho\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r^2} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}} \tag{33}$$

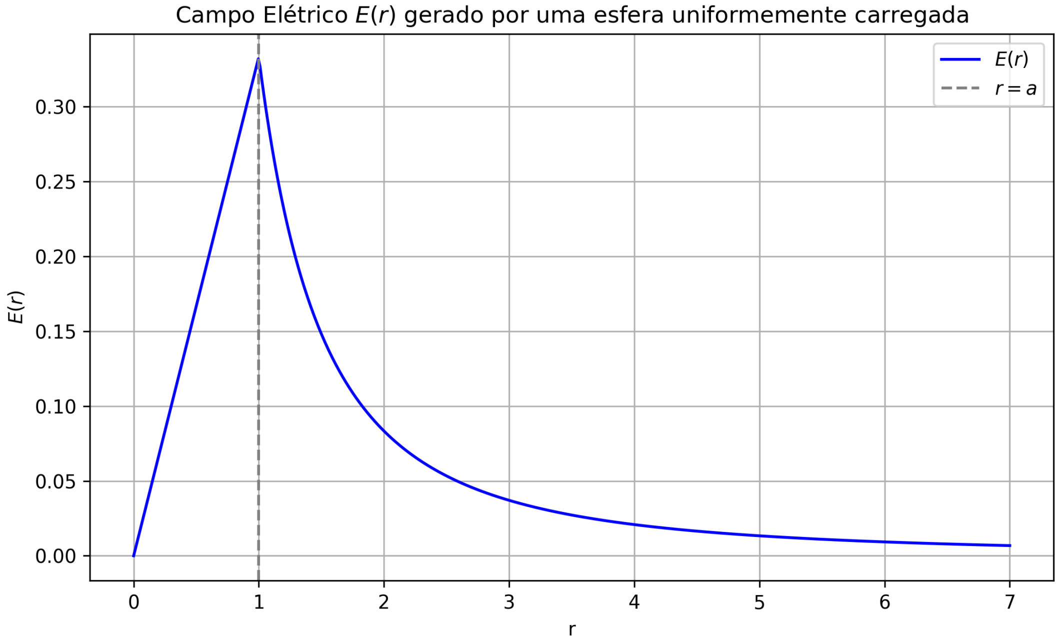



Figure 1: Campo elétrico dentro e fora da esfera.

## 2. Potencial Elétrico via Equação de Poisson

A equação de Poisson para simetria esférica é:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon_0} \tag{34}$$

**Para $r < a$ (com $\rho =$ constante)**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{\rho r^2}{\varepsilon_0} \tag{35}$$

Integrando:

$$r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{r^3}{3} + C_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho r}{3\varepsilon_0} + \frac{C_1}{r^2} \tag{36}$$

Impondo regularidade em $r = 0$, temos $C_1 = 0$. Integrando novamente:

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_2 \tag{37}$$

**Para $r > a$ (região sem carga)**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \Rightarrow r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = C_3 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = \frac{C_3}{r^2} \Rightarrow V(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4 \tag{38}$$

## 3. Condições de Contorno

- Continuidade do potencial em $r = a$:

$$V_{\text{int}}(a) = V_{\text{ext}}(a) \tag{39}$$

- Continuidade da derivada do potencial (campo elétrico) em $r = a$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^-} = \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^+} \tag{40}$$

- Condição no infinito: $V(r) \to 0 \Rightarrow C_4 = 0$

Derivadas:

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^-} = -\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right|_{r=a^+} = \frac{C_3}{a^2} \Rightarrow C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0} \tag{41}$$

Potencial contínuo em $r = a$:

$$-\frac{\rho}{6\varepsilon_0}a^2 + C_2 = \frac{\rho a^2}{3\varepsilon_0} \Rightarrow C_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0} \tag{42}$$

## 4. Resultados Finais

### Campo Elétrico

$$\mathbf{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0}\,\hat{r}, & r < a \\ \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}, & r > a \end{cases} \tag{43}$$

**Potencial Elétrico**

$$V(r) = \begin{cases} -\dfrac{\rho}{6\varepsilon_0} r^2 + \dfrac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, & r < a \\ \\ \dfrac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r}, & r > a \end{cases} \tag{44}$$

# Problema 5

Considere um tubo retangular de dimensões $0 \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq a$, infinito na direção $z$. As fronteiras em $x = 0$, $x = b$ e $y = a$ estão mantidas a potencial nulo ($V = 0$), enquanto a fronteira em $y = 0$ está mantida a um potencial constante $V_0$. Determinar o potencial eletrostático $V(x, y)$ dentro do tubo.

**Solução:**

Consideramos um tubo retangular definido por $0 \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq a$, infinito na direção $z$. O potencial eletrostático $V(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace bidimensional:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{45}$$

com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} V(x, a) &= 0, \\ V(0, y) &= 0, \\ V(b, y) &= 0, \\ V(x, 0) &= V_0. \end{aligned}$$

Utilizando o método de separação de variáveis, assumimos uma solução do tipo:

$$V(x, y) = X(x)Y(y) \tag{46}$$

Substituindo na equação de Laplace e separando variáveis, obtemos:

$$\begin{aligned} X''(x) + \lambda X(x) &= 0, \\ Y''(y) - \lambda Y(y) &= 0, \end{aligned}$$

com as soluções para $X(x)$ que satisfazem $X(0) = X(b) = 0$:

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{47}$$

A solução correspondente para $Y(y)$, que satisfaz $Y(a) = 0$, é:

$$Y_n(y) = \sinh\left(\frac{n\pi(a-y)}{b}\right) \tag{48}$$

Assim, a solução geral do potencial é:

$$V(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-y)}{b}\right) \tag{49}$$

Impondo a condição $V(x,0) = V_0$, obtemos a série de Fourier da função constante $V_0$:

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) \tag{50}$$

Multiplicando ambos os lados por $\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)$ e integrando de 0 a $b$, obtemos:

$$C_n = \frac{2}{b \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \int_0^b V_0 \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) dx = \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \quad \text{para } n \text{ ímpar} \tag{51}$$

Portanto, a solução final para o potencial dentro do tubo é:

$$\boxed{V(x,y) = \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ímpar}}}^{\infty} \frac{4V_0}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)} \sin\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \sinh\left(\frac{n\pi(a-y)}{b}\right)} \tag{52}$$

# Problema 6

Em um dispositivo unidimensional, a densidade volumétrica de carga é dada por

$$\rho_v(x) = \rho_0 \frac{x}{a} \tag{53}$$

Sabendo que o campo elétrico $E = 0$ em $x = 0$ e o potencial $V = 0$ em $x = a$, determinar as expressões para $V(x)$ e $\mathbf{E}(x)$.

**Solução:**

Dada a densidade volumétrica de carga:

$$\rho_v(x) = \rho_0 \frac{x}{a} \tag{54}$$

com as condições de contorno:

- $E(0) = 0$
- $V(a) = 0$

Utilizaremos a equação de Poisson unidimensional:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho_v(x)}{\varepsilon_0} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}x \tag{55}$$

Integrando a equação:

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 a}\int x\,dx = -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2 + C_1 \tag{56}$$

$$E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2 - C_1 \tag{57}$$

Usando a condição $E(0) = 0$, obtemos:

$$C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad E(x) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2 \tag{58}$$

Agora integramos para obter $V(x)$:

$$V(x) = -\int E(x)\,dx = -\int \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2\,dx \tag{59}$$

$$= -\frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}\cdot\frac{x^3}{3} + C_2 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}x^3 + C_2 \tag{60}$$

Aplicando a condição $V(a) = 0$:

$$V(a) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}a^3 + C_2 \Rightarrow C_2 = \frac{\rho_0 a^2}{6\varepsilon_0} \tag{61}$$

Portanto, a expressão para o potencial é:

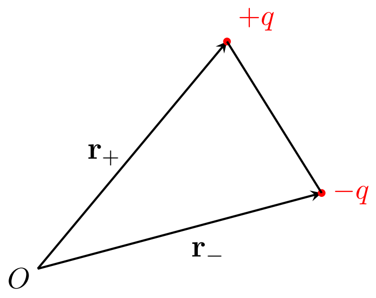
$$V(x) = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}\left(a^3 - x^3\right) \tag{62}$$

**Resultados finais:**

$$\boxed{\begin{aligned} V(x) &= \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0 a}\left(a^3 - x^3\right) \\ E(x) &= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 a}x^2 \end{aligned}} \tag{63}$$

# Problema 7

Considere duas cargas pontuais iguais e opostas, $+q$ e $-q$, localizadas nos vetores de posição $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$, conforme mostra a figura. Mostre que, em geral, o termo de quadrupolo é diferente de zero. Mostre que, para um dipolo "puro" na origem, o termo de quadrupolo se anula.




**Solução:**

Considere um sistema formado por duas cargas pontuais, uma de carga $+q$ e outra de carga $-q$, localizadas nos vetores de posição $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$, respectivamente. Nosso objetivo é:

- Demonstrar que, em geral, o termo de quadrupolo é diferente de zero.
- Mostrar que, para um dipolo ideal simétrico na origem, o termo de quadrupolo se anula.

Em seguida apresentaremos a análise matemática desses dois casos.

## 1. Tensor de Quadrupolo Elétrico

O tensor de quadrupolo $Q_{ij}$ para um sistema discreto de cargas é dado por:

$$\boxed{Q_{ij} = \sum_k q_k \left(3x_{k,i}x_{k,j} - r_k^2\delta_{ij}\right)} \tag{64}$$

Para um sistema com duas cargas $+q$ e $-q$ localizadas em $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$, respectivamente, temos:

$$Q_{ij} = q\left(3x_{+,i}x_{+,j} - r_+^2\delta_{ij}\right) + (-q)\left(3x_{-,i}x_{-,j} - r_-^2\delta_{ij}\right) \tag{65}$$

Ou seja,

$$\boxed{Q_{ij} = q\left[3(x_{+,i}x_{+,j} - x_{-,i}x_{-,j}) - (r_+^2 - r_-^2)\delta_{ij}\right]} \tag{66}$$

Esse tensor não é nulo em geral porque:

- $x_{+,i}x_{+,j} \neq x_{-,i}x_{-,j}$ se $\mathbf{r}_+ \neq \mathbf{r}_-$,
- $r_+^2 \neq r_-^2$ se as posições $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$ forem diferentes em módulo.

Portanto, concluímos que, em geral, o termo de quadrupolo é diferente de zero.

## 2. Caso Especial: Dipolo Ideal na Origem

Agora, vamos analisar o caso de um dipolo ideal simétrico, com as cargas localizadas na origem e separadas por uma distância $\mathbf{d}$. As posições das cargas são:

$$\mathbf{r}_+ = \frac{\mathbf{d}}{2}, \quad \mathbf{r}_- = -\frac{\mathbf{d}}{2} \tag{67}$$

Substituindo essas posições na expressão do tensor de quadrupolo:

$$Q_{ij} = q\left[3\left(\frac{d_i}{2}\frac{d_j}{2} - \left(-\frac{d_i}{2}\right)\left(-\frac{d_j}{2}\right)\right) - \left(\left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\right) - \left(\frac{|\mathbf{d}|^2}{4}\right)\right)\delta_{ij}\right] \tag{68}$$

$$Q_{ij} = q\left[3\left(\frac{d_i d_j}{4} - \frac{d_i d_j}{4}\right) - 0\delta_{ij}\right] = 0 \tag{69}$$

Logo, o momento de quadrupolo se anula para um dipolo ideal simétrico centrado na origem.

## Conclusão

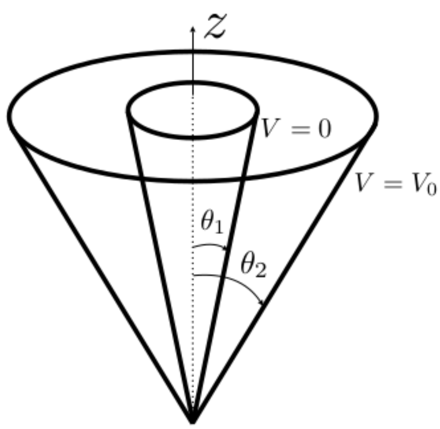
Em resumo:

- Para cargas localizadas em posições arbitrárias $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$, o momento de quadrupolo $Q_{ij}$ não é nulo.

- Para um dipolo ideal simétrico centrado na origem, o momento de quadrupolo $Q_{ij}$ se anula.

# Problema 8

Dois cones condutores infinitos formam um sistema coaxial, separados por um isolante infinitesimal em $r = 0$. Um cone está na direção $\theta = \theta_1$ e o outro em $\theta = \theta_2$, com $\theta_1 < \theta_2$. Os cones são mantidos a potenciais constantes: $V = 0$ para $\theta = \theta_1$ e $V = V_0$ para $\theta = \theta_2$. Encontrar o potencial $V(\theta)$ e o campo elétrico $\mathbf{E}(\theta)$ entre os cones.




**Solução:**

### 1. Equação de Laplace

Em coordenadas esféricas, supondo simetria axial e sem dependência radial (isto é, $V = V(\theta)$), a equação de Laplace se reduz a:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \tag{70}$$

### 2. Solução Geral

Integrando a equação acima:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\right) = 0 \Rightarrow \sin\theta\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = C_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} = \frac{C_1}{\sin\theta}$$
$$V(\theta) = C_1\int\frac{1}{\sin\theta}\,d\theta + C_2 = C_1\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right) + C_2$$

**3. Condições de Contorno**

Aplicando as condições de contorno:

$$
\begin{aligned}
V(\theta_1) = 0 &\Rightarrow 0 = C_1 \ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right) + C_2 \Rightarrow C_2 = -C_1 \ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right) \\
V(\theta_2) = V_0 &\Rightarrow V_0 = C_1 \left[\ln\left(\tan\frac{\theta_2}{2}\right) - \ln\left(\tan\frac{\theta_1}{2}\right)\right] \\
&\Rightarrow C_1 = \frac{V_0}{\ln\left(\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)}
\end{aligned}
$$

**4. Potencial Elétrico**

Substituindo os coeficientes, obtemos o potencial elétrico:

$$
\boxed{V(\theta) = V_0 \cdot \frac{\ln\left(\dfrac{\tan(\theta/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)}{\ln\left(\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)}} \tag{71}
$$

**5. Campo Elétrico**

O campo elétrico é dado por:

$$
\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} V = -\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{72}
$$

Calculando a derivada:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta} &= V_0 \cdot \frac{1}{\ln\left(\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left[\ln\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)\right] \\
&= V_0 \cdot \frac{1}{\ln\left(\dfrac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)} \cdot \frac{1}{\sin\theta}
\end{aligned}
$$

Portanto:

$$\boxed{\mathbf{E}(\theta) = -\frac{V_0}{r \ln\left(\frac{\tan(\theta_2/2)}{\tan(\theta_1/2)}\right)} \cdot \frac{1}{\sin\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}} \tag{73}$$

# Problema 9

Duas placas condutoras planas e infinitas são paralelas ao plano $xy$. Uma está localizada em $z = 0$ e mantida a potencial constante $V_0$. A outra, mantida a potencial constante $V_d$, está em $z = d$. A região entre elas contém uma densidade volumétrica de carga dada por:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{d}\right)^2 \tag{74}$$

Resolver a equação de Poisson para obter o potencial $V(z)$ no intervalo $0 \leq z \leq d$, e determinar a densidade superficial de carga em cada uma das placas.

**Solução:**

## 1. Equação de Poisson

Em uma região com simetria unidimensional no eixo $z$, a equação de Poisson é:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho(z)}{\varepsilon_0} \tag{75}$$

Com a densidade dada por:

$$\rho(z) = \rho_0 \left(\frac{z}{d}\right)^2 \tag{76}$$

Temos:

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \left(\frac{z}{d}\right)^2 \tag{77}$$

## 2. Integração da Equação

Integrando uma vez:

$$\frac{dV}{dz} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d^2} \int z^2\, dz = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d^2} \cdot \frac{z^3}{3} + C_1 \tag{78}$$

Integrando novamente:

$$V(z) = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d^2} \cdot \frac{z^4}{12} + C_1 z + C_2 \tag{79}$$

## 3. Condições de Contorno

As condições de contorno são:

$$V(0) = V_0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = V_0 \tag{80}$$

$$V(d) = V_d \quad \Rightarrow \quad V_d = -\frac{\rho_0}{\varepsilon_0 d^2} \cdot \frac{d^4}{12} + C_1 d + V_0 \Rightarrow C_1 = \frac{V_d - V_0}{d} + \frac{\rho_0 d^2}{12\varepsilon_0} \tag{81}$$

## 4. Solução Final para o Potencial

$$\boxed{V(z) = -\frac{\rho_0 z^4}{12\varepsilon_0 d^2} + \left(\frac{V_d - V_0}{d} + \frac{\rho_0 d^2}{12\varepsilon_0}\right) z + V_0} \tag{82}$$

## 5. Campo Elétrico

$$\mathbf{E}(z) = -\frac{dV}{dz}\,\hat{\mathbf{z}} = \left(\frac{\rho_0 z^3}{3\varepsilon_0 d^2} - C_1\right)\hat{\mathbf{z}} \tag{83}$$

## 6. Densidade Superficial de Carga nas Placas

Usamos:

$$\sigma = \varepsilon_0 E \quad \text{na interface com o condutor} \tag{84}$$

- Para $z = 0$:

$$E(0) = -\left(-C_1\right) = C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_0 = \varepsilon_0 C_1} \tag{85}$$

- Para $z = d$:

$$E(d) = \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0} - C_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_d = -\varepsilon_0 E(d) = \varepsilon_0\left(C_1 - \frac{\rho_0 d}{3\varepsilon_0}\right)} \tag{86}$$