
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

Abril de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletrromagnetismo I

André V. Silva

Saturday 3rd May, 2025

Problema 1

Uma esfera inicialmente carregada com uma carga total Q e colocada em contato momentâneo com uma esfera idêntica inicialmente descarregada.

- a) Qual é a carga em cada esfera após o contato?
- b) Esse processo é repetido com N esferas idênticas inicialmente descarregadas. Qual é a carga em cada uma das $N + 1$ esferas, incluindo a esfera que originalmente possuía a carga?
- c) Qual é a carga total no sistema após N contatos?

Solução:

a) Quando duas esferas idênticas entram em contato, a carga total se redistribui igualmente entre elas. Assim, a carga em cada esfera será:

$$q = \frac{Q}{2} \quad (1)$$

b) O processo se repete: a esfera originalmente carregada (agora com carga $\frac{Q}{2}$) entra em contato com uma nova esfera descarregada, dividindo novamente sua carga por dois.

Após cada contato, a carga da esfera carregada será dividida pela metade. Assim, após N contatos, a carga da esfera original será:

$$q_N = \frac{Q}{2^N}$$

(2)

Cada nova esfera tocada recebe metade da carga da esfera carregada no momento do contato. Portanto:

- 1ª esfera tocada: $\frac{Q}{2}$
- 2ª esfera tocada: $\frac{Q}{4}$
- 3ª esfera tocada: $\frac{Q}{8}$
- \vdots
- N -ésima esfera tocada: $\frac{Q}{2^N}$
- original: $\frac{Q}{2^N}$

c) A carga total do sistema após os N contatos será a soma das cargas de todas as esferas:

$$Q_{\text{total}} = \left(\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N} \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (3)$$

O somatório $\frac{Q}{2} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{8} + \cdots + \frac{Q}{2^N}$ é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$.

A soma dos N primeiros termos é:

$$S = \frac{\frac{Q}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right)}{1 - \frac{1}{2}} = Q \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right) \quad (4)$$

Somando com a carga restante na esfera original:

$$Q_{\text{total}} = Q \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^N \right) + \frac{Q}{2^N} \quad (5)$$

$$Q_{\text{total}} = Q$$

(6)

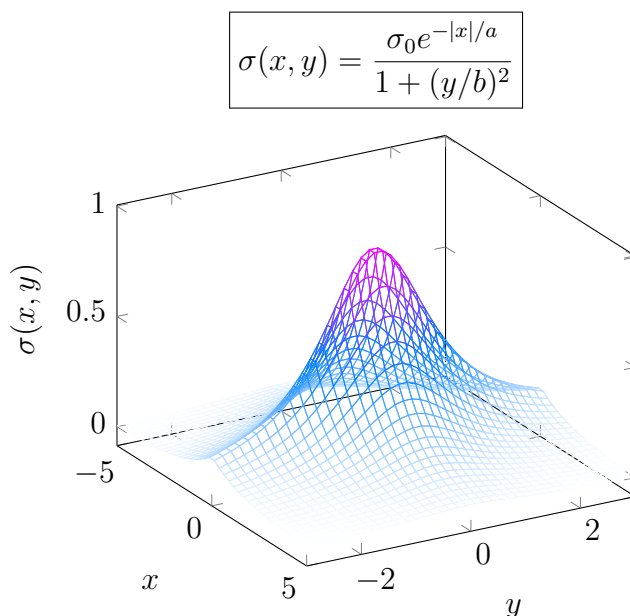
Portanto, a carga total do sistema permanece constante e igual a Q , respeitando a conservação da carga elétrica.

Problema 2

Uma placa infinita nos eixos x e y possui a seguinte distribuição superficial de carga:

$$\sigma(x, y) = \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \quad (7)$$

onde a e b são constantes.



Solução:

A carga total Q na placa é dada pela integral da densidade superficial de carga $\sigma(x, y)$ sobre toda a área da placa:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x, y) \, dx \, dy \quad (8)$$

Substituindo a expressão de $\sigma(x, y)$, temos:

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_0 e^{-|x|/a}}{1 + (y/b)^2} \, dx \, dy \quad (9)$$

Passo 1: Integral sobre x

Calculamos a integral sobre x :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} \, dx \quad (10)$$

Dividindo a integral em duas partes (por causa da função $|x|$), temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x/a} dx \quad (11)$$

A integral da exponencial é dada por:

$$\int_0^{\infty} e^{-x/a} dx = a \quad (12)$$

Portanto, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|/a} dx = 2a \quad (13)$$

Passo 2: Integral sobre y

Agora, calculamos a integral sobre y :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy \quad (14)$$

Essa é uma integral padrão, conhecida como a integral de Cauchy, que resulta em:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (y/b)^2} dy = \pi b \quad (15)$$

Passo 3: Cálculo da carga total

Agora que temos as integrais sobre x e y , podemos calcular a carga total:

$$Q = \sigma_0 \cdot 2a \cdot \pi b \quad (16)$$

Portanto, a carga total na placa é:

$$Q = \sigma_0 2\pi ab \quad (17)$$

Problema 3

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z . Calcule o potencial elétrico em um ponto de campo localizado a

uma distância r do eixo z (por exemplo, no plano xy) e a uma altura z . Calcule o campo elétrico no mesmo ponto a partir do potencial. Calcule os limites quando $L \gg r$ e calcule também o limite quando $r \gg L$.

Solução:

Considere uma linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z .

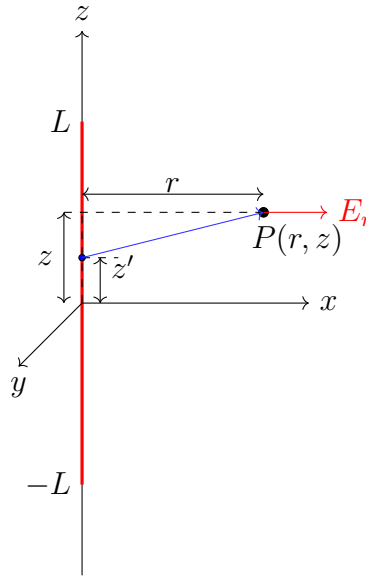


Figure 1: Linha de carga com densidade linear uniforme λ_0 , de comprimento total $2L$, centrada no eixo z .

Potencial Elétrico

Um elemento infinitesimal de carga é dado por:

$$dq = \lambda_0 dz' \quad (18)$$

O potencial devido a esse elemento no ponto (r, z) é:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (19)$$

Substituindo dq :

$$dV = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (20)$$

O potencial total é a integral de dV de $z' = -L$ até $z' = L$:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{dz'}{\sqrt{r^2 + (z - z')^2}} \quad (21)$$

Fazendo a substituição $u = z - z'$, com $du = -dz'$, temos:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z+L}^{z-L} \frac{-du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{z-L}^{z+L} \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} \quad (22)$$

Integrando:

$$\int \frac{du}{\sqrt{r^2 + u^2}} = \ln(u + \sqrt{r^2 + u^2}) + C \quad (23)$$

Aplicando os limites:

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}) - \ln(z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}) \right] \quad (24)$$

$$\boxed{V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right)} \quad (25)$$

Campo Elétrico

O campo elétrico é dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (26)$$

Em coordenadas cilíndricas (r, θ, z) e considerando a simetria do problema:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad E_\theta = 0 \quad (27)$$

Limites

1. Quando $L \gg r$

Neste caso, a linha de carga se comporta como um fio infinito. Aproximadamente:

Considere o potencial elétrico gerado por uma linha de carga de densidade linear constante λ_0 , com comprimento total $2L$, centrada na origem ao longo do eixo z :

$$V(r, z) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{z + L + \sqrt{r^2 + (z + L)^2}}{z - L + \sqrt{r^2 + (z - L)^2}} \right) \quad (28)$$

Para obter uma aproximação no caso em que o ponto de observação está no plano médio da linha de carga (*i.e.*, $z = 0$), temos:

$$V(r) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{-L + \sqrt{r^2 + L^2}} \right) \quad (29)$$

Note que:

$$\frac{L + \sqrt{r^2 + L^2}}{-L + \sqrt{r^2 + L^2}} = \frac{\sqrt{r^2 + L^2} + L}{\sqrt{r^2 + L^2} - L} \quad (30)$$

Logo, temos:

$$\boxed{V(r) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{\sqrt{r^2 + L^2} + L}{\sqrt{r^2 + L^2} - L} \right)} \quad (31)$$

$$V(r) = \frac{\lambda_0}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{1 + \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}}{1 - \frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}}} \right) \quad (32)$$

Utilizando a identidade:

$$\ln \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right) = 2 \tanh^{-1}(x) \quad (33)$$

obtemos:

$$V(r) = \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \tanh^{-1} \left(\frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \quad (34)$$

Agora, assumimos que $L \gg r$. Expandimos a raiz utilizando binômio de Newton:

$$\sqrt{r^2 + L^2} = L \sqrt{1 + \frac{r^2}{L^2}} \approx L \left(1 + \frac{r^2}{2L^2} \right) \quad (35)$$

Então:

$$\frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{r^2}{2L^2}} \approx 1 - \frac{r^2}{2L^2} \quad (36)$$

E, portanto:

$$\tanh^{-1} \left(\frac{L}{\sqrt{r^2 + L^2}} \right) \approx \tanh^{-1} \left(1 - \frac{r^2}{2L^2} \right) \quad (37)$$

Sabemos que para $x \approx 1$, vale:

$$\tanh^{-1}(x) \approx \ln \left(\frac{2}{1 - x} \right) \quad (38)$$

Logo:

$$\tanh^{-1} \left(1 - \frac{r^2}{2L^2} \right) \approx \ln \left(\frac{4L^2}{r^2} \right) = 2 \ln \left(\frac{2L}{r} \right) \quad (39)$$

Substituindo no potencial:

$$V(r) \approx \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2L}{r} \right) \quad (40)$$

ou seja, quando $L \gg r$, o potencial elétrico no plano médio da linha de carga se aproxima de um fio carregado com densidade linear λ_0 e comprimento muito grande, o que nos leva ao caso idealizado de um **fio infinito**.

$$V(r) \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{2L}{r} \right) \quad (41)$$

$$E_r \sim \frac{\lambda_0}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad E_z \sim 0 \quad (42)$$

2. Quando $r \gg L$

Aqui, o sistema se comporta como uma carga pontual de carga total $Q = 2L\lambda_0$. Portanto:

$$V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{2L\lambda_0}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (43)$$

$$\vec{E} \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (44)$$

Problema 4

Considere um elétron em um átomo de hidrogênio a uma distância de $0,53 \times 10^{-10} \text{ m}$ do próton. Sabendo que o próton tem carga $+e$ e o elétron $-e$, resolva:

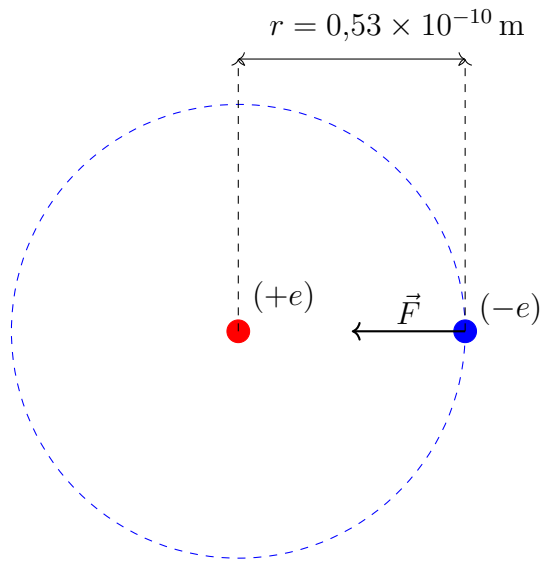


Figure 2: Esquema do elétron orbitando o próton em um átomo de hidrogênio.

- Calcule a energia potencial eletrostática do elétron em eV.
- Sabendo que a velocidade do elétron é $v = 2,189 \times 10^6$ m/s, calcule a energia total do elétron no átomo de hidrogênio em eV.

Solução:

Letra (a): Energia Potencial Eletrostática

A fórmula da energia potencial eletrostática U entre duas cargas q_1 e q_2 separadas por uma distância r é dada por:

$$U = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r} \quad (45)$$

onde:

$$k = 8,99 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2 \quad (\text{constante eletrostática}), \quad (46)$$

$$q_1 = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do próton}), \quad (47)$$

$$q_2 = -e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (\text{carga do elétron}), \quad (48)$$

$$r = 0,53 \times 10^{-10} \text{ m} \quad (\text{distância entre as cargas}). \quad (49)$$

Substituindo os valores na fórmula:

$$U = \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (1,6 \times 10^{-19}) \cdot (-1,6 \times 10^{-19})}{0,53 \times 10^{-10}} \quad (50)$$

Calculando:

$$U \approx \frac{(8,99 \times 10^9) \cdot (-2,56 \times 10^{-38})}{0,53 \times 10^{-10}} \approx -4,32 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (51)$$

Convertendo para eV, usando $1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$:

$$U \approx \frac{-4,32 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx -27 \text{ eV} \quad (52)$$

Portanto, a energia energia potencial eletrostática é :

$$\boxed{U \approx -27 \text{ eV}} \quad (53)$$

Letra (b): Energia Total do Elétron

A energia total E do elétron é a soma da energia cinética E_{cinet} e da energia potencial U .

A energia cinética é dada por:

$$\boxed{E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2}mv^2} \quad (54)$$

onde:

$$m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \quad (\text{massa do elétron}), \quad (55)$$

$$v = 2,189 \times 10^6 \text{ m/s} \quad (\text{velocidade do elétron}). \quad (56)$$

Substituindo os valores:

$$E_{\text{cinet}} = \frac{1}{2} \cdot (9,11 \times 10^{-31}) \cdot (2,189 \times 10^6)^2 \quad (57)$$

Calculando:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{1}{2} \cdot 9,11 \times 10^{-31} \cdot 4,79 \times 10^{12} \approx 2,18 \times 10^{-18} \text{ J} \quad (58)$$

Convertendo para eV:

$$E_{\text{cinet}} \approx \frac{2,18 \times 10^{-18}}{1,602 \times 10^{-19}} \approx 13,6 \text{ eV} \quad (59)$$

Agora, a energia total do elétron é a soma da energia cinética e da energia potencial:

$$E = E_{\text{cinet}} + U \quad (60)$$

$$E = 13,6 \text{ eV} + (-27 \text{ eV}) \approx -13,6 \text{ eV} \quad (61)$$

Portanto, a energia total do elétron no átomo de hidrogênio é:

$$E \approx -13,6 \text{ eV} \quad (62)$$

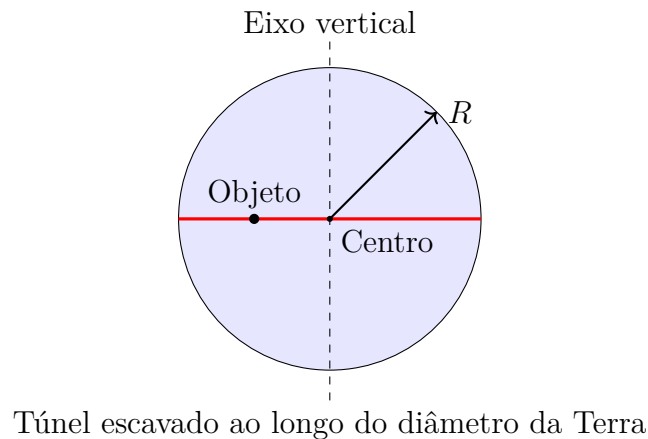
Interpretação física

- O valor de $-13,6 \text{ eV}$ para a energia total do elétron no estado fundamental do átomo de hidrogênio vem do modelo atômico de Bohr.
- O sinal negativo indica que o elétron está ligado ao núcleo — é necessária energia positiva para removê-lo (ionização).

Problema 5

Imagine que a Terra tenha densidade uniforme e que um túnel seja escavado ao longo de um diâmetro.

- Se um objeto for solto no túnel, mostre que ele oscilaria com um período P igual ao período de um satélite em órbita na superfície da Terra.
- Calcule P .



Solução:

(a) Movimento do objeto no túnel

A força gravitacional sentida a uma distância r do centro é devida apenas à massa dentro da esfera de raio r , e é dada por:

$$M_{\text{interna}} = M \left(\frac{r^3}{R^3} \right) \quad (63)$$

Assim, a força gravitacional é:

$$F = -G \frac{M_{\text{interna}} m}{r^2} = -G \frac{M \left(\frac{r^3}{R^3} \right) m}{r^2} \quad (64)$$

Simplificando:

$$F = -G \frac{Mm}{R^3} r \quad (65)$$

Esta força é proporcional a r e dirigida para o centro, característica típica de um *movimento harmônico simples* (MHS).

A equação do movimento é:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -G \frac{Mm}{R^3} r \quad (66)$$

Dividindo por m :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = - \left(G \frac{M}{R^3} \right) r \quad (67)$$

Portanto, a frequência angular ω do movimento é:

$$\omega^2 = G \frac{M}{R^3} \quad (68)$$

e o período P é:

$$P = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (69)$$

Para um satélite em órbita na superfície da Terra, o período também é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{GM}} \quad (70)$$

com $r = R$, portanto:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (71)$$

Assim, o período do objeto no túnel é **igual** ao período do satélite em órbita rasante.

(b) Cálculo do período

Sabemos que:

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad GM = gR^2 \quad (72)$$

Substituindo:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{gR^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad (73)$$

Substituindo os valores:

$$R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}, \quad g = 9,8 \text{ m/s}^2 \quad (74)$$

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{6,37 \times 10^6}{9,8}} \quad (75)$$

$$P = 2\pi \sqrt{650000} \quad (76)$$

$$P = 2\pi \times 806,2 \quad (77)$$

$$P \approx 5065 \text{ segundos} \quad (78)$$

Convertendo para minutos:

$$P \approx \frac{5065}{60} \approx 84,4 \text{ minutos} \quad (79)$$

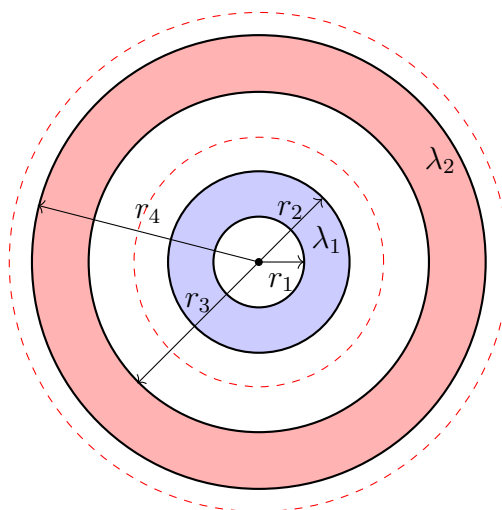
Resposta final:

$$P \approx 84,4 \text{ minutos} = 1,406 \text{ horas} \quad (80)$$

Problema 6

Dois cilindros condutores longos e concêntricos são isolados entre si e carregados. Longe das extremidades, o cilindro interno possui densidade de carga linear $+\lambda_1$, e o cilindro externo possui densidade de carga linear $+\lambda_2$.

O cilindro interno apresenta raios interno r_1 e externo r_2 , enquanto o cilindro externo apresenta raios interno r_3 e externo r_4 .



(a) Encontre o campo elétrico $E(r)$:

- (1) Em um ponto próximo ao meio dos cilindros (desprezando efeitos de borda).
- (2) Logo fora do cilindro externo.

- (b) Encontre a diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os dois cilindros.
- (c) Descreva qualitativamente as mudanças nos campos elétricos e nos potenciais se:
- (1) O raio interno r_1 do cilindro interno for diminuído.
 - (2) O raio externo r_2 do cilindro interno for aumentado.
 - (3) A seção transversal externa do cilindro interno for transformada em quadrado de lado $2r_2$ (assumindo $2r_2 < r_3$).

Solução:

Dois cilindros condutores longos e concêntricos possuem densidades lineares de carga λ_1 (interno) e λ_2 (externo). Vamos resolver as questões:

- (a) Encontrar $E(r)$:

- (1) **Em um ponto próximo ao meio (entre $r_2 < r < r_3$):**

Aplicando a Lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0} \quad (81)$$

Como o sistema é cilíndrico:

$$E(2\pi r L) = \frac{\lambda_{\text{enc}} L}{\varepsilon_0} \quad (82)$$

Logo:

$$E(r) = \frac{\lambda_{\text{enc}}}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (83)$$

Onde λ_{enc} é a carga linear total até o raio r .

Para $r_2 < r < r_3$, somente o cilindro interno contribui, logo:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1 \quad (84)$$

Assim:

$$E(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r} \quad (85)$$

(2) **Logo fora do cilindro externo ($r > r_4$):**

Agora, as cargas dos dois cilindros contribuem:

$$\lambda_{\text{enc}} = \lambda_1 + \lambda_2 \quad (86)$$

Portanto:

$$E(r) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r} \quad (87)$$

(b) Encontrar a diferença de potencial $\Delta\phi$ entre os dois cilindros:

O potencial $\phi(r)$ é dado por:

$$\phi(r) = - \int E(r) dr \quad (88)$$

Logo, a diferença de potencial entre r_2 e r_3 é:

$$\Delta\phi = \phi(r_3) - \phi(r_2) \quad (89)$$

Integrando:

$$\Delta\phi = - \int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r} dr \quad (90)$$

$$\Delta\phi = - \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_3}{r_2} \right) \quad (91)$$

(c) Descrever qualitativamente:

(1) Se r_1 for diminuído:

A distribuição de carga no cilindro interno se concentra mais, mas, fora dele ($r > r_2$), o campo não muda, pois depende apenas da carga linear total λ_1 .

(2) Se r_2 for aumentado:

O cilindro interno se torna mais largo. A distância até o cilindro externo diminui, o que pode alterar a diferença de potencial $\Delta\phi$ (diminuindo a magnitude do potencial).

- (3) Se a seção transversal externa do cilindro interno for transformada em um quadrado de lado $2r_2$:

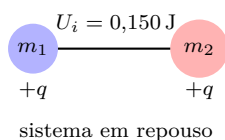
A simetria cilíndrica se perde. Assim, o campo elétrico deixa de ser puramente radial e passa a variar conforme a direção, especialmente próximo às bordas do quadrado. No entanto, se $\sqrt{2}r_2 < r_3$, ainda há uma região entre o quadrado e o cilindro externo onde o campo pode ser aproximadamente radial.

Problema 7

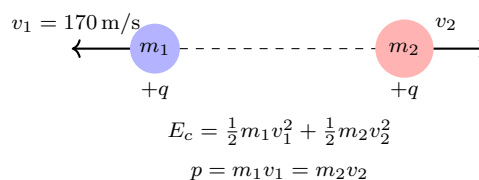
A partícula 1 tem massa $m_1 = 3,6 \times 10^{-6}$ kg, enquanto a partícula 2 tem massa $m_2 = 6,2 \times 10^{-6}$ kg. Ambas possuem a mesma carga elétrica. As partículas estão inicialmente em repouso, e o sistema de duas partículas possui uma energia potencial elétrica inicial de 0,150 J.

As partículas são então liberadas e se repelem devido à força elétrica. Efeitos gravitacionais são desprezados, e nenhuma outra força atua sobre as partículas. Em um instante após a liberação, a velocidade da partícula 1 é medida como $v_1 = 170$ m/s.

Antes da liberação



Após a liberação



- Qual é a energia potencial elétrica do sistema de duas partículas nesse instante?
- Que tipos de energia o sistema tinha inicialmente?
- Que tipos de energia o sistema tem no instante posterior?
- O princípio da conservação de energia se aplica? Justifique.
- O princípio da conservação do momento linear se aplica? Justifique.

Solução:

Dados do problema

- Massa da partícula 1: $m_1 = 3,6 \times 10^{-6} \text{ kg}$
- Massa da partícula 2: $m_2 = 6,2 \times 10^{-6} \text{ kg}$
- Velocidade da partícula 1: $v_1 = 170 \text{ m/s}$
- Energia potencial inicial: $U_i = 0,150 \text{ J}$

Efeitos gravitacionais são desprezados, e apenas forças elétricas atuam.

(a) Energia potencial elétrica do sistema nesse instante

Pela conservação da energia:

$$E_{\text{inicial}} = E_{\text{final}} \quad (92)$$

$$U_i = U_f + K \quad (93)$$

Onde K é a energia cinética total:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (94)$$

Utilizando a conservação do momento linear:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2 = -\frac{m_1}{m_2}v_1 \quad (95)$$

Substituindo os valores:

$$v_2 = -\frac{3,6 \times 10^{-6}}{6,2 \times 10^{-6}} \times 170 \quad \Rightarrow \quad v_2 \approx -98,7 \text{ m/s} \quad (96)$$

Calculando a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}(3,6 \times 10^{-6})(170)^2 + \frac{1}{2}(6,2 \times 10^{-6})(98,7)^2 \quad (97)$$

$$K = (1,8 \times 10^{-6})(28900) + (3,1 \times 10^{-6})(9746,69) \quad (98)$$

$$K = 0,05202 + 0,03031 = 0,08233 \text{ J} \quad (99)$$

Agora, determinamos U_f :

$$U_f = U_i - K \quad (100)$$

$$U_f = 0,150 - 0,08233 \quad (101)$$

$$\boxed{U_f = 0,0677 \text{ J}} \quad (102)$$

(b) Tipos de energia inicialmente

Inicialmente, as partículas estavam em repouso, logo:

$$\text{Energia inicial} = \text{energia potencial elétrica} \quad (103)$$

Resposta: Apenas energia potencial elétrica.

(c) Tipos de energia no instante posterior

Após serem liberadas, as partículas possuem:

$$\text{Energia posterior} = \text{energia cinética} + \text{energia potencial elétrica} \quad (104)$$

Resposta: Energia cinética e energia potencial elétrica.

(d) Conservação da energia

Sim, a conservação da energia se aplica, pois:

- O sistema é isolado (sem forças externas realizando trabalho).
- Apenas forças internas (elétricas) atuam.

Resposta: O princípio da conservação da energia se aplica.

(e) Conservação do momento linear

Sim, a conservação do momento linear se aplica, pois:

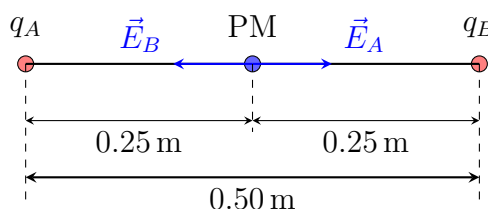
- O sistema está isolado (sem forças externas).

Resposta: O princípio da conservação do momento linear se aplica.

Problema 8

Duas cargas puntiformes idênticas $q_A = q_B = +2,4 \times 10^{-9} \text{ C}$ estão fixas no espaço e separadas por 0,50 m. Determine o campo elétrico e o potencial elétrico no ponto médio da linha entre as cargas q_A e q_B .

- Quais são as direções das contribuições individuais do campo elétrico de q_A e q_B no ponto médio (PM)?
- O campo elétrico líquido no ponto médio tem módulo maior, menor ou igual a zero?
- O potencial elétrico total no ponto médio é positivo, negativo ou zero?
- O potencial elétrico total tem direção associada?
- Calcule o valor do campo e do potencial elétrico no ponto médio.



Solução:

- Quais são as direções das contribuições individuais do campo elétrico de q_A e q_B no ponto médio?**

Como as duas cargas são positivas, o campo elétrico gerado por cada uma delas no ponto médio aponta para fora da carga, ou seja:

- O campo de q_A aponta para a direita.
- O campo de q_B aponta para a esquerda.

2. O campo elétrico líquido no ponto médio tem módulo maior, menor ou igual a zero?

Como os campos têm mesma intensidade e direções opostas, eles se anulam.

$$\boxed{E_{\text{total}} = 0} \quad (105)$$

3. O potencial elétrico total no ponto médio é positivo, negativo ou zero?

O potencial elétrico é escalar e soma-se algébrica e positivamente no ponto médio, já que ambas as cargas são positivas.

$$\boxed{V_{\text{total}} > 0} \quad (106)$$

4. O potencial elétrico total tem direção associada?

Não. O potencial elétrico é uma grandeza escalar, portanto:

$$\boxed{\text{O potencial não possui direção associada.}} \quad (107)$$

5. Calcule o valor do campo e do potencial elétrico no ponto médio.

Distância de cada carga ao ponto médio: $r = \frac{0,50}{2} = 0,25 \text{ m}$

- Campo elétrico (contribuição de uma carga):

$$E = k \frac{q}{r^2} = 9,0 \times 10^9 \cdot \frac{2,4 \times 10^{-9}}{(0,25)^2} = \frac{21,6}{0,0625} = 345,6 \text{ N/C} \quad (108)$$

Como os campos se anulam:

$$\boxed{E_{\text{total}} = 0 \text{ N/C}} \quad (109)$$

- Potencial elétrico total:

$$V = 2 \cdot k \frac{q}{r} = 2 \cdot 9,0 \times 10^9 \cdot \frac{2,4 \times 10^{-9}}{0,25} = 2 \cdot \frac{21,6}{0,25} = 172,8 \text{ V} \quad (110)$$

$$\boxed{V_{\text{total}} = 172,8 \text{ V}} \quad (111)$$

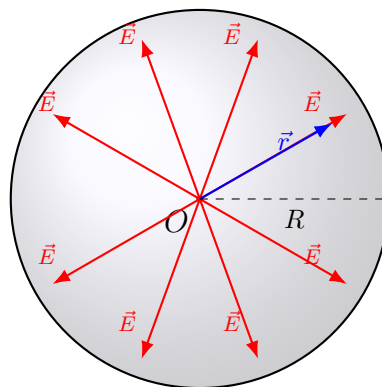
Problema 9

Uma região esférica de raio R está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (112)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição a partir do centro da esfera, e E_0 é uma constante.

Determine a densidade de carga na região.



Região esférica com $\vec{E} = \frac{E_0}{R^2} \vec{r}$

Solução:

Uma região esférica de raio R está preenchida com carga de tal forma que o campo elétrico no interior da região é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (113)$$

onde \mathbf{r} é o vetor posição a partir do centro da esfera, e E_0 é uma constante. Determine a densidade de carga na região.

Solução

Para determinar a densidade de carga, usamos a Lei de Gauss na forma diferencial:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (114)$$

onde ρ é a densidade de carga e ε_0 é a permissividade do vácuo.

O campo elétrico no interior da esfera é dado por:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} \mathbf{r} \quad (115)$$

Agora, vamos calcular o divergente do campo elétrico.

Cálculo do Divergente de \mathbf{E}

O campo elétrico tem a forma:

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{R^2} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \quad (116)$$

Onde $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é o vetor posição.

O divergente em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad (117)$$

Com:

$$E_x = \frac{E_0}{R^2}x, \quad E_y = \frac{E_0}{R^2}y, \quad E_z = \frac{E_0}{R^2}z \quad (118)$$

Calculando as derivadas parciais:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{E_0}{R^2}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{E_0}{R^2} \quad (119)$$

Somando as derivadas:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 3 \times \frac{E_0}{R^2} = \frac{3E_0}{R^2} \quad (120)$$

Aplicando a Lei de Gauss

De acordo com a Lei de Gauss, temos:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (121)$$

Substituindo o valor do divergente:

$$\frac{3E_0}{R^2} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (122)$$

Isolando ρ :

$$\rho = \varepsilon_0 \frac{3E_0}{R^2} \quad (123)$$

Resultado Final

A densidade de carga na região é:

$$\boxed{\rho = \frac{3\varepsilon_0 E_0}{R^2}} \quad (124)$$

Problema 10

Determine o campo elétrico \vec{E} e a densidade volumétrica de carga ρ para as seguintes distribuições de potencial elétrico:

(a) $V = Ax^2$

(b) $V = Axyz$

Solução:

(a) $V = Ax^2$

1. Calcular o campo elétrico \vec{E}

O campo elétrico é dado por:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad (125)$$

Para $V = Ax^2$, calculamos o gradiente em coordenadas cartesianas. Como V depende apenas de x , temos:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{k} \quad (126)$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Ax, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad (127)$$

Portanto, o gradiente de V é:

$$\nabla V = 2Ax\hat{i} \quad (128)$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -2Ax\hat{i} \quad (129)$$

2. Calcular a densidade de carga ρ

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (130)$$

Primeiro, calculamos o divergente do campo elétrico \vec{E} :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-2Ax) + 0 + 0 = -2A \quad (131)$$

Portanto:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = -2A \quad (132)$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\boxed{\rho = -2A\varepsilon_0} \quad (133)$$

(b) $V = Axyz$

1. Calcular o campo elétrico \vec{E}

O campo elétrico é dado por:

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \quad (134)$$

Para $V = Axyz$, calculamos o gradiente:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} \quad (135)$$

Logo:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Ayz, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Axz, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Axy \quad (136)$$

Portanto, o gradiente de V é:

$$\nabla V = Ayz\hat{i} + Axz\hat{j} + Axy\hat{k} \quad (137)$$

O campo elétrico será:

$$\vec{E} = -\nabla V = -Ayz\hat{i} - Axz\hat{j} - Axy\hat{k} \quad (138)$$

2. Calcular a densidade de carga ρ

Agora, aplicamos a Lei de Gauss:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad (139)$$

Calculando o divergente de \vec{E} :

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(-Ayz) + \frac{\partial}{\partial y}(-Axz) + \frac{\partial}{\partial z}(-Axy) \quad (140)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 + 0 + 0 = 0 \quad (141)$$

Logo, a densidade de carga é:

$$\boxed{\rho = 0} \quad (142)$$

Resultado Final

Para o potencial $V = Ax^2$:

- Campo elétrico: $\vec{E} = -2Ax\hat{i}$
- Densidade de carga: $\rho = -2A\varepsilon_0$

Para o potencial $V = Axyz$:

- Campo elétrico: $\vec{E} = -Ayz\hat{i} - Axz\hat{j} - Axy\hat{k}$

- Densidade de carga: $\rho = 0$

Problema 11

Quais dos seguintes vetores podem ser um campo elétrico? Se forem, qual é a densidade volumétrica de carga associada?

(a) $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$

(b) $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$

Solução:

(a) $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$

Para verificar se o vetor $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$ pode ser um campo elétrico, devemos calcular seu divergente.

Em coordenadas cartesianas, o divergente de \vec{E} é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(0) \quad (143)$$

Como \vec{E} não depende de y nem de z , temos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(ax^2y^2) = 2axy^2 \quad (144)$$

Portanto, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \varepsilon_0(2axy^2) \quad (145)$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga não uniforme, logo, $\vec{E} = ax^2y^2 \hat{x}$ pode representar um campo elétrico.

(b) $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$

Agora, temos o campo elétrico $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ em coordenadas cilíndricas. Para verificar se esse vetor pode ser um campo elétrico, devemos calcular o seu divergente.

Em coordenadas cilíndricas, o divergente de um vetor $\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}$ é dado por:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(E_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(E_z) \quad (146)$$

Para o campo $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$, temos:

$$E_r = a \cos \theta, \quad E_\theta = -a \sin \theta, \quad E_z = 0 \quad (147)$$

Logo, o divergente de \vec{E} em coordenadas cilíndricas é:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ra \cos \theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(-a \sin \theta) \quad (148)$$

A primeira derivada em r é zero, pois E_r não depende de r . A segunda derivada em θ é:

$$\frac{\partial}{\partial \theta}(-a \sin \theta) = -a \cos \theta \quad (149)$$

Portanto:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a \cos \theta}{r} \quad (150)$$

Então, a densidade de carga associada é:

$$\rho = \varepsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{a\varepsilon_0 \cos \theta}{r} \quad (151)$$

Este resultado indica que o campo elétrico pode ser gerado por uma distribuição de carga que depende de θ e r . Logo, $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$ também pode representar um campo elétrico.

Resultado Final

- Para o campo $\vec{E} = ax^2y^2\hat{x}$, o divergente é $\nabla \cdot \vec{E} = 2axy^2$, e a densidade de carga associada é $\boxed{\rho = \varepsilon_0(2axy^2)}$.
- Para o campo $\vec{E} = a(\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$, o divergente é

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{-a \cos \theta}{r},$$

e a densidade de carga associada é

$$\boxed{\rho = -\frac{a\varepsilon_0 \cos \theta}{r}}.$$