
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Segunda lista complementar de Eletromagnetismo 1

Maio de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

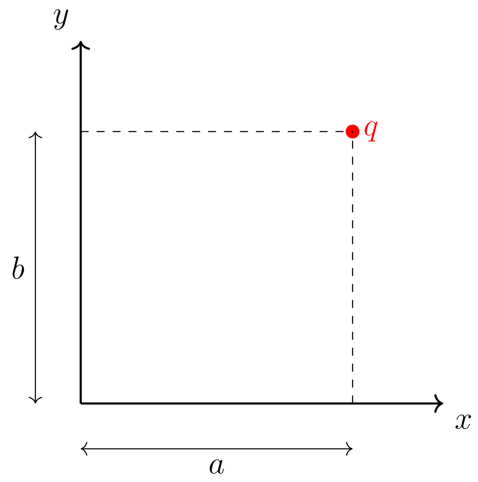
André V. Silva

Sunday 11^{th} May, 2025

Problema 1

Dois planos condutores aterrados ao longo dos eixos x e y se interceptam na origem, conforme mostrado na figura. Uma carga q é colocada a uma distância b acima do eixo x e a uma distância a à direita do eixo y. Determine a força sobre a carga.

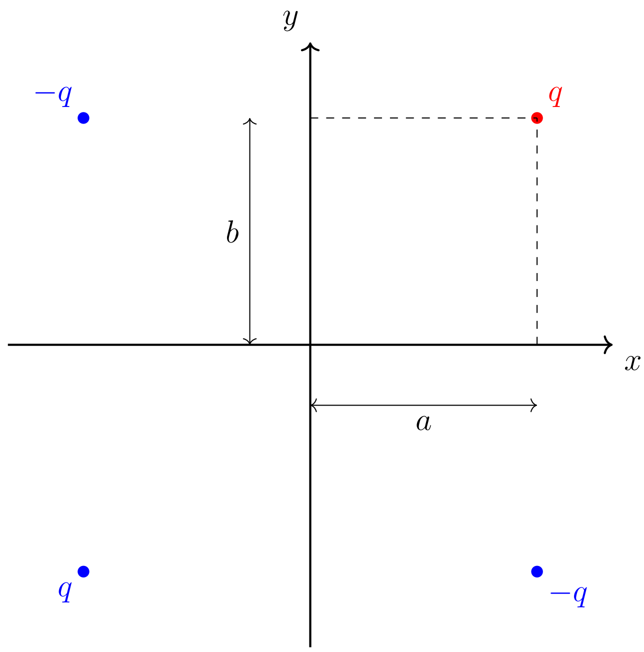
Sugestão: as cargas imagens devem fazer com que as condições de contorno sejam mantidas nos dois planos simultaneamente.



Solução:

Como os planos condutores estão aterrados, o potencial ao longo dos eixos $x = 0$ e $y = 0$ deve ser nulo. Para satisfazer essa condição, usaremos o **método das cargas imagem**. A carga real q está localizada no ponto (a, b), com $a > 0$ e $b > 0$, no primeiro quadrante. Para que o potencial seja nulo nos eixos coordenados, inserimos três cargas imagem:

- Uma carga imagem $-q$ em $(-a, b)$, que anula o potencial no plano $x = 0$,
- Uma carga imagem $-q$ em $(a, -b)$, que anula o potencial no plano $y = 0$,
- Uma carga imagem $+q$ em $(-a, -b)$, que garante simultaneamente que o potencial seja zero nos dois planos.



Cálculo da força

A força total sobre a carga real q é a soma das forças de Coulomb exercidas pelas cargas imagem.

Força devido a $-q$ em $(-a, b)$:

$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(-q)}{(2a)^2}\hat{\imath} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 a^2}\hat{\imath} \tag{1}$$

Força devido a $-q$ em $(a, -b)$:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q(-q)}{(2b)^2}\hat{\jmath} = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 b^2}\hat{\jmath} \tag{2}$$

Força devido a $+q$ em $(-a, -b)$:

A distância até a carga real é $2\sqrt{a^2 + b^2}$. O vetor deslocamento é $(2a, 2b)$, portanto:

$$\vec{F}_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q^2}{(2\sqrt{a^2+b^2})^2} \cdot \frac{(2a, 2b)}{2\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0(a^2+b^2)^{3/2}}(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath}) \tag{3}$$

Resultado final

Somando os três termos:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \tag{4}$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0}\left[\left(-\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{\imath} + \left(-\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}\right]} \tag{5}$$

Problema 2

Uma distribuição de carga elétrica produz o campo elétrico

$$\mathbf{E} = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right)\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \tag{6}$$

onde c e α são constantes. Encontre a carga total dentro do raio $r = \frac{1}{\alpha}$.

Solução:

Utilizaremos o **teorema de Gauss**, que relaciona o fluxo do campo elétrico com a carga total no interior de uma superfície fechada:

$$\oint_{\text{superfície}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

Como o campo é radial e depende apenas de r, escolhemos uma superfície gaussiana esférica de raio $r = \frac{1}{\alpha}$. O campo elétrico sobre essa superfície tem módulo:

$$|\mathbf{E}(r)| = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right)\frac{1}{r^2} \tag{8}$$

O vetor de área é $d\mathbf{A} = \hat{\mathbf{r}}\, r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi$, portanto:

$$\Phi_E = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = |\mathbf{E}(r)| \cdot 4\pi r^2 \tag{9}$$

Substituindo:

$$\Phi_E = c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \cdot \frac{1}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \tag{10}$$
$$= 4\pi c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \tag{11}$$

Aplicando o teorema de Gauss:

$$Q_{\text{int}} = \varepsilon_0 \Phi_E = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - e^{-\alpha r}\right) \tag{12}$$

Finalmente, substituímos $r = \frac{1}{\alpha}$:

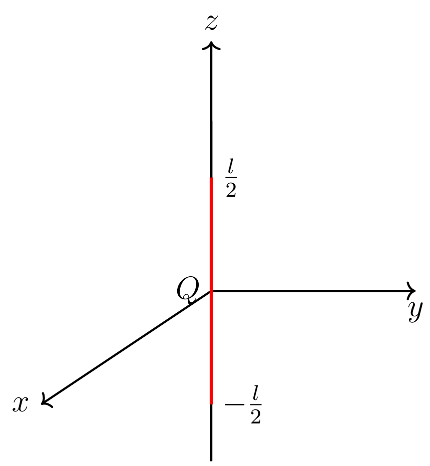
$$Q = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - e^{-1}\right) \tag{13}$$

Resposta final

$$\boxed{Q = 4\pi\varepsilon_0 c\left(1 - \frac{1}{e}\right)} \tag{14}$$

Problema 3

Uma haste fina e não condutora de comprimento l carrega uma carga Q uniformemente distribuída e está orientada conforme mostrado na figura:



(a) Determine o potencial V devido à haste carregada para qualquer ponto sobre o eixo z, com $z > l/2$.

(b) Encontre $V(r, \theta, \varphi)$ para todos os pontos com $|\mathbf{r}| > l/2$, onde r, θ, φ são as coordenadas esféricas usuais.

Sugestão para a parte b: A solução geral da equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal é dada por

$$V(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \qquad \text{Griffiths, 3.65} \tag{15}$$

Solução:

Problema 4

Considere uma esfera de raio a contendo uma densidade de carga uniforme ρ no seu interior, e sem carga no exterior. Deseja-se determinar o potencial eletrostático $V(r)$ e o campo elétrico $\mathbf{E}(r)$ em todo o espaço, assumindo que $V \to 0$ quando $r \to \infty$.
Determine o campo elétrico dentro e fora da esfera. Resolva a equação de Poisson para dentro e fora da esfera.
Obs: esse problema foi resolvido muitas vezes desde Física 3 por meio da lei de Gauss na formulação integral.
Solução:

Problema 5

Considere um tubo retangular de dimensões $0 \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq a$, infinito na direção z. As fronteiras em $x = 0$, $x = b$ e $y = a$ estão mantidas a potencial nulo ($V = 0$), enquanto a fronteira em $y = 0$ está mantida a um potencial constante V_0. Determinar o potencial eletrostático $V(x, y)$ dentro do tubo.
Solução:

Problema 6

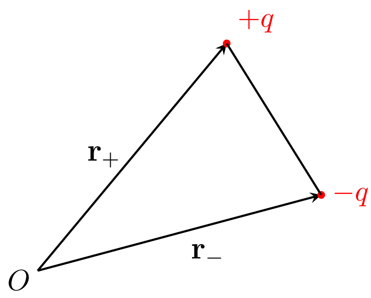
Em um dispositivo unidimensional, a densidade volumétrica de carga é dada por

$$\rho_v(x) = \rho_0 \frac{x}{a} \tag{16}$$

Sabendo que o campo elétrico $E = 0$ em $x = 0$ e o potencial $V = 0$ em $x = a$, determinar as expressões para $V(x)$ e $\mathbf{E}(x)$.
Solução:

Problema 7

Considere duas cargas pontuais iguais e opostas, $+q$ e $-q$, localizadas nos vetores de posição $\mathbf{r}_+$ e $\mathbf{r}_-$, conforme mostra a figura. Mostre que, em geral, o termo de quadrupolo é diferente de zero. Mostre que, para um dipolo "puro" na origem, o termo de quadrupolo se anula.



Solução:

Problema 8

Solução:

Problema 9

Solução: