Notas: Função

André V. Silva

1 de dezembro de 2025

Enunciado

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t},$$

com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 10

Resolução detalhada

O golfinho está fora da água sempre que $h(t) > 0$. Sabemos que $h(0) = 0$, portanto o instante inicial é $t = 0$. Para descobrir quando ele volta a mergulhar, devemos encontrar o próximo instante $T > 0$ tal que

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t} = 0.$$

Primeiro, fatoramos t:

$$h(t) = t\left(4 - 2^{0,2t}\right).$$

Igualando a zero:

$$t\left(4 - 2^{0,2t}\right) = 0.$$

Daí, temos duas possibilidades:

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - 2^{0,2t} = 0.$$

A segunda equação fornece o tempo de mergulho:

$$4 = 2^{0,2t}.$$

Como $4 = 2^2$, obtemos:

$$2^{0,2t} = 2^2.$$

Igualando os expoentes:

$$0,2t = 2.$$

Resolvendo para t:

$$t = \frac{2}{0,2} = 10.$$

Portanto, o golfinho permaneceu fora da água durante:

$$T = 10 \text{ segundos}.$$

Logo, a alternativa correta é **(e) 10**.

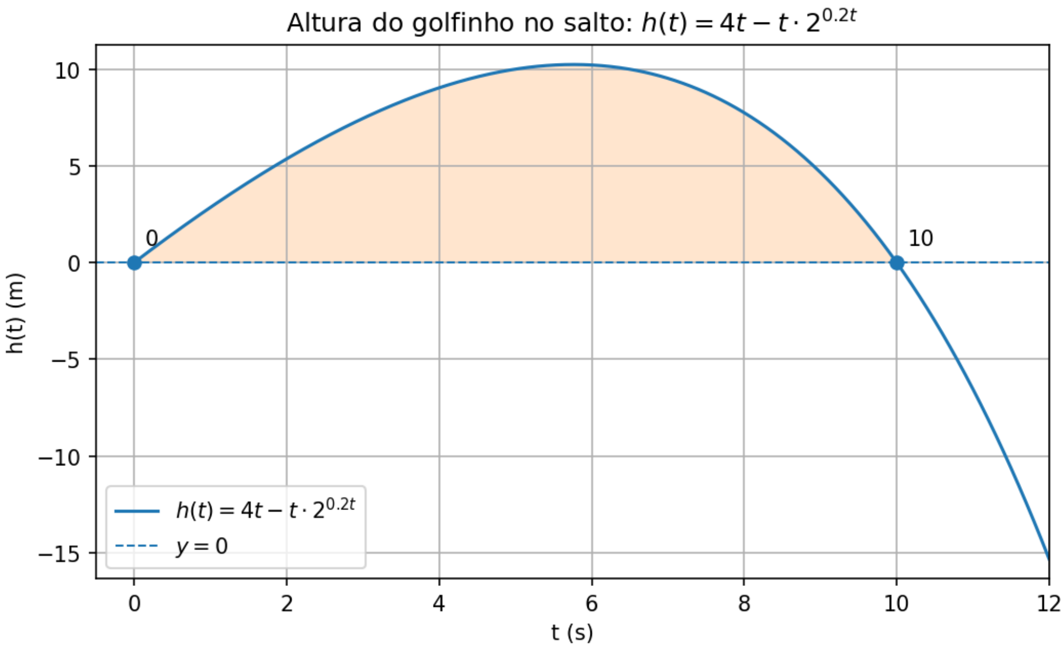


Figura 1: função do 2 Grau para altura do saldo do golfinho

Enunciado

Resolver a inequação:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \leq \frac{1}{3}.$$

Resolução

Escrevemos o número do lado direito como potência da mesma base:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1.$$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, a função a^x é decrescente. Assim,

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^A \leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^B \quad \Longleftrightarrow \quad A \geq B.$$

Aplicando à inequação:

$$x^2 - 3 \geq 1.$$

Logo:

$$x^2 \geq 4.$$

Portanto:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

A solução é:

$$\boxed{x \leq -2 \ \text{ou} \ x \geq 2}.$$

Gráfico da função $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-3}$

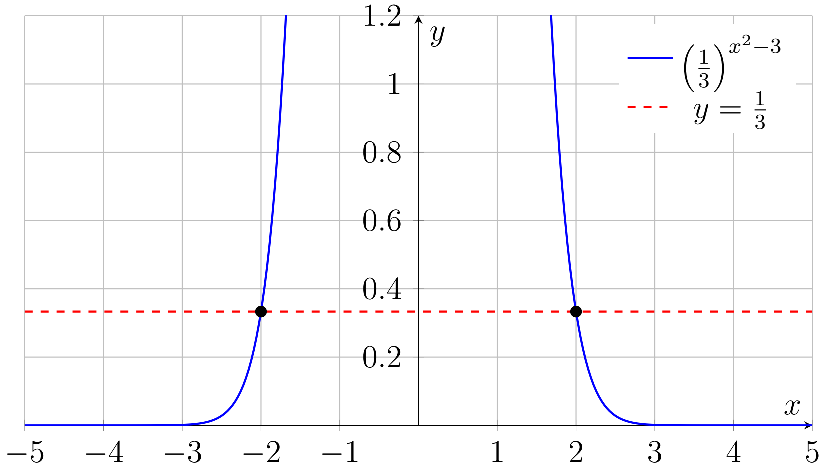
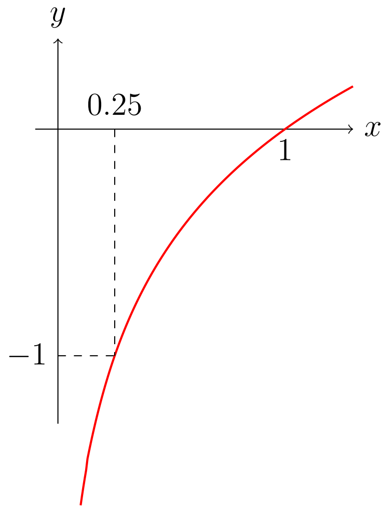


Gráfico da função $y = \log_4(x)$



Sabemos que o gráfico representa a função $y = \log_b(x)$.

Observe que o ponto destacado na figura é

$$(0{,}25,\ -1).$$

Isso significa que

$$\log_b(0{,}25) = -1.$$

Usando a definição de logaritmo:

$$\log_b(0{,}25) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^{-1} = 0{,}25.$$

Mas

$$0{,}25 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$b^{-1} = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 4.$$

$$\boxed{b = 4}$$

Resoluções – Questões de Funções Quadráticas

Questão 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 - 18x + 65.$$

(a) Resolva a inequação $f(x) \leq 0.$

- Primeiro encontramos as raízes da equação quadrática $f(x) = 0$:

$$x^2 - 18x + 65 = 0.$$

Calcule o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64.$$

- Raízes:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2}.$$

Assim

$$x_1 = \frac{18-8}{2} = 5, \qquad x_2 = \frac{18+8}{2} = 13.$$

- Como o coeficiente $a = 1 > 0$, a parábola abre para cima; portanto $f(x) \leq 0$ entre as raízes:

$$\boxed{5 \leq x \leq 13\,.}$$

(b) Determine a ordenada do vértice (y_V) diretamente pela fórmula.

Para um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, a ordenada do vértice pode ser calculada por

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

Aqui $a = 1$ e $b = -18$, então a abscissa do vértice é

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9.$$

Calcule $y_V = f(9)$:

$$y_V = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

Logo,

$$\boxed{y_V = -16\,.}$$

(c) Confirme o resultado determinando primeiro x_V e depois impondo que y_V seja imagem de x_V por f.

- Já calculamos $x_V = 9$.

- Agora avaliamos $f(9)$ (repetindo o cálculo da forma indicada):

$$f(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

- Assim confirma-se que a ordenada do vértice é $y_V = -16$, exatamente como em (b).

Questão 3

Uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem seu gráfico passando pelos pontos $(-3, 0)$, $(11, 0)$ e $(1, -80)$.

(a) Determine essa função, em forma fatorada.

- Como a função anula em $x = -3$ e $x = 11$, a forma fatorada é

$$f(x) = k(x + 3)(x - 11),$$

  em que k é uma constante multiplicativa a determinar.

- Use o ponto $(1, -80)$ para achar k:

$$-80 = f(1) = k(1 + 3)(1 - 11) = k \cdot 4 \cdot (-10) = k \cdot (-40).$$

- Logo $k = \dfrac{-80}{-40} = 2$.

- Portanto a função é

$$\boxed{f(x) = 2(x + 3)(x - 11)}$$

  que, desenvolvida, é

$$f(x) = 2\left(x^2 - 8x - 33\right) = 2x^2 - 16x - 66.$$

(b) Essa função tem valor máximo ou mínimo para seu conjunto imagem? Justifique e determine-o.

- O coeficiente quadrático é $a = 2 > 0$, portanto a parábola abre para cima e a função possui *valor mínimo* (não máximo).
- A abscissa do vértice é

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4.$$

- A ordenada do vértice (valor mínimo) é

$$y_V = f(4) = 2(4+3)(4-11) = 2 \cdot 7 \cdot (-7) = 2 \cdot (-49) = -98.$$

(Ou usando a forma desenvolvida: $f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 - 66 = 32 - 64 - 66 = -98$.)

- Portanto o valor mínimo é $\boxed{y_{\min} = -98}$ atingido em $x = 4$.

Resumo das respostas:

- Questão 2: (a) $5 \leq x \leq 13$. (b) $y_V = -16$. (c) Confirmação mostrando $x_V = 9$ e $f(9) = -16$.
- Questão 3: (a) $f(x) = 2(x+3)(x-11)$. (b) Valor mínimo $y_{\min} = -98$ em $x = 4$.

Questão 1

a) $\sqrt{21 - x} = 9 + x$

Primeiro, observamos o domínio:

$$21 - x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 21.$$

Além disso, o lado direito deve ser não negativo:

$$9 + x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -9.$$

Logo, o domínio é:

$$-9 \leq x \leq 21.$$

Elevamos ambos os lados ao quadrado:

$$21 - x = (9 + x)^2.$$

Desenvolvendo:

$$21 - x = 81 + 18x + x^2.$$

Trazendo tudo para o mesmo lado:

$$0 = x^2 + 19x + 60.$$

Fatorando:

$$x^2 + 19x + 60 = (x + 4)(x + 15).$$

Assim:

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = -15.$$

Agora testamos no domínio:
$x = -4$: $\sqrt{21 - (-4)} = \sqrt{25} = 5$ e $9 + (-4) = 5$
$x = -15$: $\sqrt{21 - (-15)} = \sqrt{36} = 6$ mas $9 + (-15) = -6$ (negativo $\Rightarrow$ impossível)
Portanto, a solução é:

$$\boxed{\{-4\}}.$$

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{4x - 3} + 1$

Domínios:

$$5x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\tfrac{1}{5},$$

$$4x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \tfrac{3}{4}.$$

Portanto, o domínio é:

$$x \geq \frac{3}{4}.$$

Isolamos uma das raízes:

$$\sqrt{5x + 1} - 1 = \sqrt{4x - 3}.$$

Elevamos ao quadrado:

$$(\sqrt{5x+1}-1)^2 = 4x-3.$$

Desenvolvendo:

$$(5x+1) - 2\sqrt{5x+1} + 1 = 4x-3.$$

Simplificando:

$$5x+2-2\sqrt{5x+1} = 4x-3.$$

$$x+5 = 2\sqrt{5x+1}.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$(x+5)^2 = 4(5x+1).$$

Expansão:

$$x^2+10x+25 = 20x+4.$$

Reorganizando:

$$x^2-10x+21 = 0.$$

Fatorando:

$$x^2-10x+21 = (x-3)(x-7).$$

Logo:

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 7.$$

Ambos satisfazem o domínio $x \geq \frac{3}{4}$. Testando:

- $x = 3$: LHS: $\sqrt{5 \cdot 3+1} = \sqrt{16} = 4$ RHS: $\sqrt{12-3}+1 = 3+1 = 4$
- $x = 7$: LHS: $\sqrt{36} = 6$ RHS: $\sqrt{28-3}+1 = 5+1 = 6$

Portanto:

$$\boxed{\{3,7\}}.$$