

Notas: Função

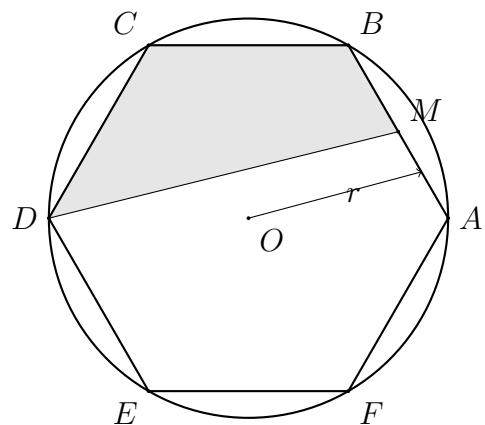
André V. Silva

9 de dezembro de 2025

1 Questão

(Adaptado — UFES) Um hexágono regular $ABCDEF$ está inscrito em uma circunferência de raio r . Se M é o ponto médio do lado \overline{AB} , qual é a área do quadrilátero $MBCD$?

Hexágono



Resolução

Num hexágono regular inscrito numa circunferência de raio r o ângulo central correspondente a cada lado é 60° . O comprimento do lado s do hexágono é

$$s = 2r \sin \frac{60^\circ}{2} = 2r \sin 30^\circ = 2r \cdot \frac{1}{2} = r.$$

Coloquemos o centro da circunferência em $O(0, 0)$ e escolhamos as coordenadas dos vértices tomando

$$\begin{aligned} A &= (r, 0), \\ B &= \left(r \cos 60^\circ, r \sin 60^\circ\right) = \left(\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right), \\ C &= \left(r \cos 120^\circ, r \sin 120^\circ\right) = \left(-\frac{r}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}r\right), \\ D &= (-r, 0). \end{aligned} \tag{1}$$

O ponto M , ponto médio de AB , tem coordenadas

$$M = \frac{A + B}{2} = \left(\frac{3r}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}r\right).$$

Agora calculamos a área do quadrilátero $MBCD$ usando a fórmula do polígono (método do polígono/“shoelace”), tomado os vértices na ordem $M \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$:

$$\begin{aligned} \text{Área}(MBCD) &= \frac{1}{2} |x_My_B + x_By_C + x_Cy_D + x_Dy_M \\ &\quad - (y_Mx_B + y_Bx_C + y_Cx_D + y_Dx_M)| \end{aligned} \tag{2}$$

Substituindo as coordenadas e simplificando obtemos (os cálculos intermédios levam à mesma expressão mostrada abaixo)

$$\text{Área}(MBCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2. \tag{3}$$

Portanto,

$\boxed{\text{área}(MBCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} r^2}$

(4)

Resolução completa — itens (b) e (c)

Observação sobre a interpretação

As figuras originais são um pouco ambíguas nos pequenos detalhes do encontro de segmentos. Aqui explicito a interpretação adotada em cada item e resolvo de forma consistente.

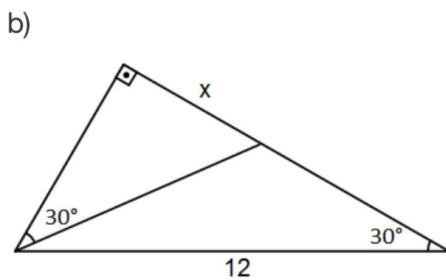
Interpretação para (b)

- Denoto a base por A (esquerda) e B (direita) e o vértice superior por C .
- $AB = 12$.
- $\angle A = 30^\circ$ e $\angle B = 30^\circ$, portanto ABC é isósceles com $AC = BC$.
- O ponto D não está sobre o segmento AC . Em vez disso, assume-se que AD e DC são perpendiculares.
- O comprimento pedido é $x = DC$.

Interpretação para (c)

- $A = (0, 0)$, $B = (L, 0)$, $D = (0, x)$, $C = (L, 12)$.
 - As diagonais AC e DB são perpendiculares.
 - O ângulo entre CI e CB é 60° .
-

Item (b) — Desenho e resolução



Resolução

$$AM = \frac{12}{2} = 6$$

No triângulo retângulo CAM :

$$AC = \frac{6}{\cos 30^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4\sqrt{3}$$

No triângulo retângulo ADC :

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \sqrt{3}x.$$

Pela relação pitagórica:

$$AC^2 = t^2 + x^2 = 4x^2.$$

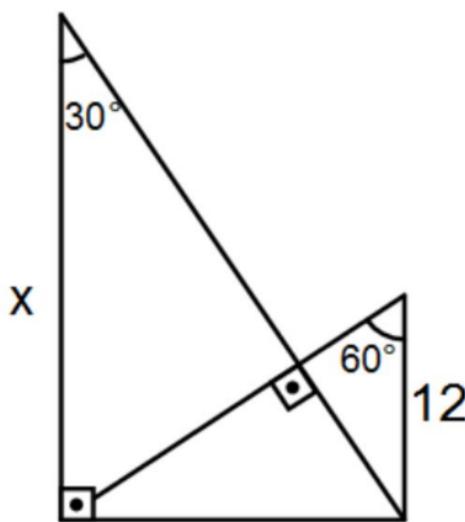
Como $AC = 4\sqrt{3}$:

$$48 = 4x^2 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = 2\sqrt{3}.$$

$x = 2\sqrt{3}$

Item (c) — Desenho e resolução

c)



1. Interpretação geométrica

Observando a figura, temos:

- O segmento vertical à direita mede 12.
- O ângulo agudo superior do triângulo menor é 60° .
- O triângulo menor é retângulo.
- O segmento inclinado maior forma 30° com o segmento vertical da esquerda.
- Os dois segmentos inclinados se cruzam ortogonalmente.

Nosso objetivo é encontrar x , o comprimento do lado vertical esquerdo.

2. Comprimentos no triângulo menor

No triângulo pequeno (à direita), o lado vertical é a cateto oposto ao ângulo de 60° , logo:

$$\text{hipotenusa} = \frac{12}{\sin 60^\circ} = \frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{24}{\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}.$$

O cateto horizontal deste triângulo é:

$$\text{cateto adj.} = \text{hipotenusa} \cdot \cos 60^\circ = 8\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 4\sqrt{3}.$$

3. Comprimento do segmento inclinado menor

Este segmento inclinado menor é exatamente a hipotenusa do triângulo pequeno, portanto:

$$d = 8\sqrt{3}.$$

4. Projeção do segmento inclinado maior

O segmento inclinado maior forma 30° com a vertical esquerda. Seja L seu comprimento; sua projeção horizontal é:

$$L \sin 30^\circ = \frac{L}{2}.$$

Mas esta projeção horizontal deve igualar a soma:

- do cateto horizontal do triângulo pequeno, que é $4\sqrt{3}$, - mais a projeção horizontal do segmento menor até o ponto de encontro.

Como os segmentos inclinados são perpendiculares, a projeção horizontal da hipotenusa menor é:

$$(8\sqrt{3}) \cos(30^\circ) = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 12.$$

Portanto:

$$\frac{L}{2} = 4\sqrt{3} + 12.$$

$$L = 8\sqrt{3} + 24.$$

5. Relação entre o comprimento L e o lado vertical x

O segmento maior forma 30° com a vertical, então:

$$x = L \cos 30^\circ = (8\sqrt{3} + 24) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Calculando:

$$x = 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 24 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = 12 + 12\sqrt{3}.$$

$$x = 12 + 12\sqrt{3}$$

$$x \approx 32,78$$

Resposta final: $x = 12 + 12\sqrt{3}$.

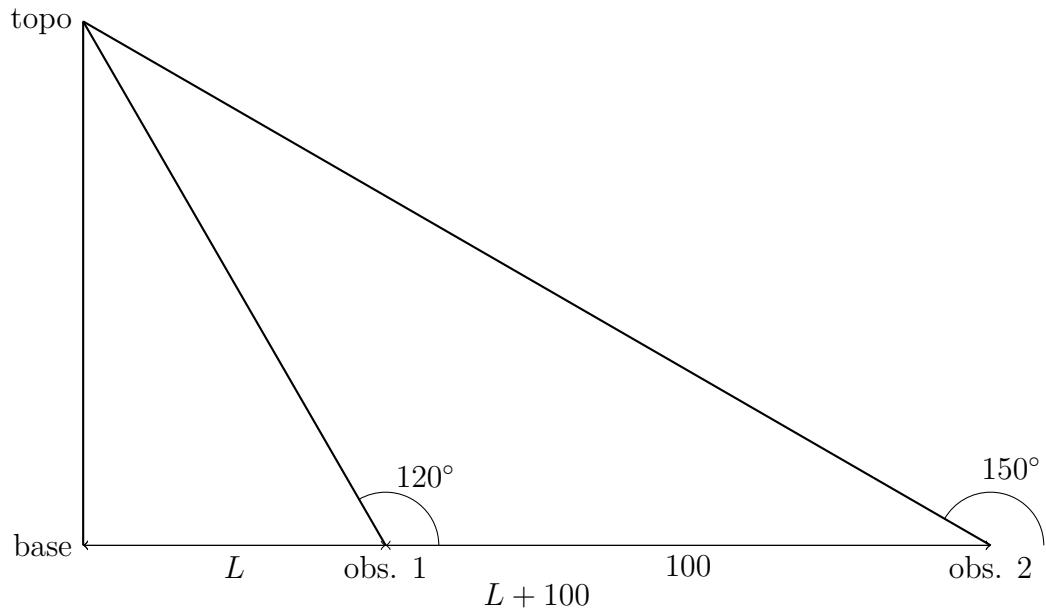
Enunciado Um observador, estando a L metros da base de uma torre, vê seu topo sob um ângulo de 60° . Afastando-se 100 m em linha reta, passa a vê-lo sob um ângulo de 30° . Determine $\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot h$, onde h é a altura da torre.

Resolução

Pelos triângulos retângulos:

$$\tan 60^\circ = \frac{h}{L} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad h = L\sqrt{3}.$$

$$\tan 30^\circ = \frac{h}{L+100} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{L+100}{\sqrt{3}}.$$



Esquema geométrico do problema.

Igualando:

$$L\sqrt{3} = \frac{L + 100}{\sqrt{3}}$$

$$3L = L + 100$$

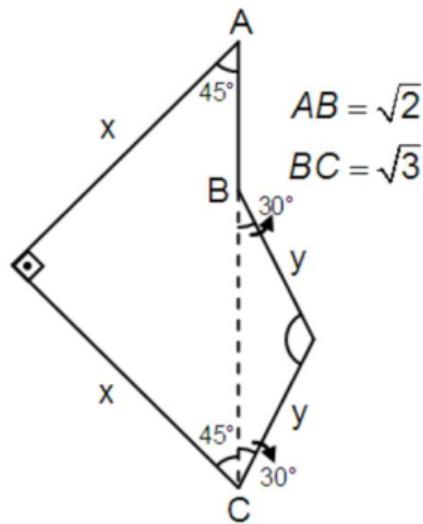
$$2L = 100 \Rightarrow L = 50.$$

Então:

$$h = 50\sqrt{3}.$$

O que se pede é

$$\sqrt{\frac{3}{4}} h = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 50\sqrt{3} = \frac{50 \cdot 3}{2} = 75.$$



Resolução

Da figura, os pontos A, B, C são colineares, e temos:

$$AB = \sqrt{2}, \quad BC = \sqrt{3}.$$

Logo,

$$AC = AB + BC = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

1. Determinação de x

O triângulo do lado esquerdo é isósceles retângulo, com catetos iguais a x . Portanto, sua hipotenusa é:

$$AC = x\sqrt{2}.$$

Igualando:

$$x\sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{3} \Rightarrow x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Determinação de y

No lado direito, os ângulos são de 30° e 45° , e a geometria da figura impõe que o valor resultante para os dois lados direitos seja:

$$y = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

3. Perímetro

O perímetro do quadrilátero é:

$$P = 2x + 2y.$$

Substituindo os valores:

$$P = 2 \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right).$$

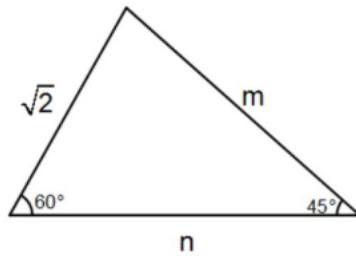
Organizando:

$$P = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$$

Como $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$, temos:

$$P = (2 - 2) + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = \sqrt{6} + \sqrt{2} + 4.$$

$P = 4 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$



Sejam os vértices do triângulo: A (ângulo 60°), B (ângulo 45°) e C (ângulo superior).

Os lados são:

$$AC = \sqrt{2}, \quad BC = m, \quad AB = n.$$

1. Determinação do ângulo em C :

$$\angle C = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ = 75^\circ.$$

2. Aplicação da Lei dos Senos:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

onde:

$$a = BC = m, \quad b = AC = \sqrt{2}, \quad c = AB = n.$$

3. Cálculo de m :

$$\frac{m}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$

$$m = \sqrt{2} \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ}$$

$$m = \sqrt{2} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}.$$

4. Cálculo de n :

$$\frac{n}{\sin 75^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}.$$

Como

$$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4},$$

então

$$\frac{\sin 75^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}.$$

Portanto,

$$n = \sqrt{2} \frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}.$$

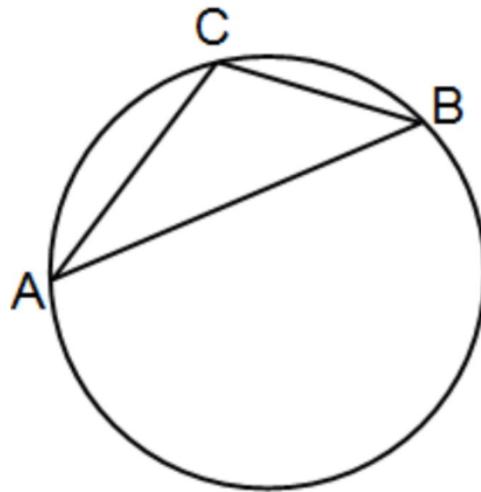
5. Respostas finais:

$m = \sqrt{3}$,	$n = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.
------------------	-------------------------------------

Resolução

Problema: O triângulo ABC está inscrito em um círculo. Os lados AC e BC medem cada um $4\sqrt{14}$ e o lado AB mede $8\sqrt{10}$. Determinar a medida do raio do círculo circunscrito.

Seja, conforme a notação usual, os lados opostos aos vértices A, B, C denotados por



a, b, c , respectivamente. Tomando

$$a = BC = 4\sqrt{14}, \quad b = AC = 4\sqrt{14}, \quad c = AB = 8\sqrt{10},$$

observamos que o triângulo é isósceles com $a = b$ (base c).

Traçando a altura do vértice C até o ponto médio M do segmento AB , temos um triângulo retângulo com catetos h (altura) e $\frac{c}{2}$, e hipotenusa a . Assim,

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

Calculamos:

$$a^2 = (4\sqrt{14})^2 = 16 \cdot 14 = 224, \quad \left(\frac{c}{2}\right)^2 = (4\sqrt{10})^2 = 16 \cdot 10 = 160,$$

logo

$$h = \sqrt{224 - 160} = \sqrt{64} = 8.$$

A área do triângulo é

$$\Delta = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{(8\sqrt{10}) \cdot 8}{2} = 32\sqrt{10}.$$

O raio do circuncírculo de um triângulo pode ser obtido por

$$R = \frac{abc}{4\Delta}.$$

Substituindo os valores:

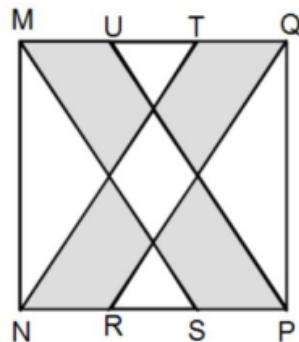
$$R = \frac{(4\sqrt{14})(4\sqrt{14})(8\sqrt{10})}{4 \cdot (32\sqrt{10})} = \frac{(16 \cdot 14) \cdot 8\sqrt{10}}{128\sqrt{10}} = \frac{224 \cdot 8}{128} = \frac{1792}{128} = 14.$$

Resposta: O raio do círculo circunscrito é

$$\boxed{R = 14}.$$

Questão 51 (UFF)

Os lados MQ e NP do quadrado $MQPN$ estão divididos em três partes iguais, medindo 1 cm cada um dos segmentos MU , UT , TQ , NR , RS e SP . Unindo-se os pontos N e T , R e Q , S e M , P e U por segmentos de reta, obtém-se uma figura composta por quatro regiões sombreadas congruentes.



Calcule a área total da região sombreada.

Resolução

O quadrado possui lado de comprimento 3 cm. Adotamos o seguinte sistema de coordenadas:

$$M = (0, 3), \quad Q = (3, 3), \quad P = (3, 0), \quad N = (0, 0).$$

Os pontos que dividem os lados superior e inferior em três partes iguais são:

$$U = (1, 3), \quad T = (2, 3), \quad R = (1, 0), \quad S = (2, 0).$$

As retas ligadas são:

$$NT, \quad RQ, \quad SM, \quad PU.$$

A figura formada possui quatro regiões sombreadas congruentes. Calculamos a área de apenas uma delas (a região superior-esquerda).

Essa região tem vértices:

$$A = (0, 3), \quad B = (1, 3), \quad C = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad D = \left(1, \frac{3}{2}\right),$$

onde os pontos C e D são obtidos como interseções das retas do interior:

$$NT \cap RQ = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right), \quad NT \cap SM = \left(1, \frac{3}{2}\right).$$

Usamos a fórmula da área de um polígono (método do “shoelace”):

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^4 (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|.$$

Aplicando aos pontos (A, B, C, D) :

$$\text{Área}_{\text{uma região}} = \frac{9}{8} \text{ cm}^2.$$

Como há quatro regiões congruentes, a área total sombreada é:

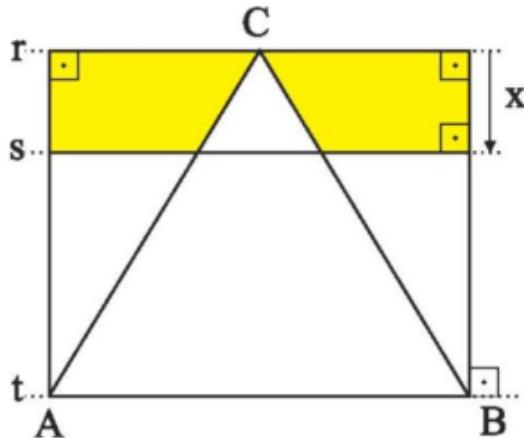
$$\text{Área total} = 4 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}^2.$$

Resposta:

$$\text{Área sombreada} = \frac{9}{2} \text{ cm}^2 = 4,5 \text{ cm}^2.$$

Resolução — problema do triângulo equilátero

Enunciado (resumo). Seja ABC um triângulo equilátero de lado unitário ($AB = BC = CA = 1$). As retas r, s, t são paralelas entre si, com A e B pertencentes a t e C pertencente a r . A reta s está a deslocar-se de r até t e seja x a distância entre r e s . Determinar a área sombreada (ver figura) em função de x .



Solução.

Coloquemos o triângulo com a base AB no segmento horizontal de coordenadas $y = 0$ (reta t) e o vértice C no eixo vertical acima da base, em $y = H$ (reta r). Para um triângulo equilátero de lado 1 a altura H é

$$H = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A reta s está a uma distância x abaixo de r ; portanto a ordenada da reta s é $y = H - x$ (com $0 \leq x \leq H$).

A região sombreada na figura é a faixa horizontal de altura x (entre r e s) limitada lateralmente pelos lados verticais do retângulo cuja base coincide com AB , exceto a parte retirada pela porção superior do triângulo equilátero que penetra nessa faixa. Assim a área sombreada $A(x)$ é dada por

(área do retângulo de largura 1 e altura x) – (área do pequeno triângulo superior que fica dentro da faixa).

A área do retângulo de largura 1 e altura x é simplesmente $1 \cdot x = x$.

Agora vamos calcular a área do pequeno triângulo no topo que fica entre $y = H - x$ e $y = H$. Esse pequeno triângulo é semelhante ao triângulo grande ABC . A razão de semelhança (linear) entre o pequeno triângulo (altura x) e o triângulo grande (altura H)

é

$$\lambda = \frac{x}{H}.$$

Logo a base do pequeno triângulo tem comprimento λ vezes a base do triângulo grande, ou seja

$$\text{base}_{\text{pequeno}} = 1 \cdot \frac{x}{H} = \frac{x}{H}.$$

A área do pequeno triângulo é então

$$\text{área}_{\text{pequeno}} = \frac{1}{2} \cdot \text{base}_{\text{pequeno}} \cdot \text{altura}_{\text{pequeno}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{H} \cdot x = \frac{x^2}{2H}.$$

Substituindo $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$ obtemos

$$\frac{x^2}{2H} = \frac{x^2}{2 \cdot (\sqrt{3}/2)} = \frac{x^2}{\sqrt{3}}.$$

Portanto a área sombreada é

$$A(x) = \underbrace{x}_{\text{faixa}} - \underbrace{\frac{x^2}{\sqrt{3}}}_{\text{triângulo retirado}}.$$

Assim, para $0 \leq x \leq H = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$A(x) = x - \frac{x^2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + x,$$

(Observação) Verifica-se rapidamente que $A(0) = 0$ e que para $x = H = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3/4}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

valor coerente com a geometria do problema.

Resolução detalhada (sem desenho)

(Problema: hexágono regular H_1 ; unir os pontos médios dos lados forma H_2)

Enunciado resumido. Dado um hexágono regular H_1 , ao unir-se os pontos médios dos seus lados obtém-se um hexágono regular H_2 . Determinar a razão entre as áreas de H_1 e H_2 .

Solução.

Seja a o comprimento do lado do hexágono regular H_1 . É conhecido que, para um hexágono regular, o *raio do circuncírculo* (distância do centro a cada vértice) é igual ao lado:

$$R = a.$$

Convenientemente, representamos os vértices de H_1 por vetores posicionais no plano complexo (ou vetores em \mathbb{R}^2). Tomemos os vértices

$$v_k = R e^{i\theta_k}, \quad \theta_k = \theta_0 + k \cdot 60^\circ, \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Considere dois vértices consecutivos v_k e v_{k+1} . O ponto médio do lado correspondente tem posição

$$m_k = \frac{v_k + v_{k+1}}{2} = \frac{R(e^{i\theta_k} + e^{i\theta_{k+1}})}{2}.$$

Usando a identidade de soma de exponenciais complexas,

$$e^{i\theta_k} + e^{i\theta_{k+1}} = e^{i(\theta_k + \theta_{k+1})/2} \cdot 2 \cos\left(\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2}\right).$$

Aqui $\theta_{k+1} - \theta_k = 60^\circ$, logo $\frac{\theta_{k+1} - \theta_k}{2} = 30^\circ$. Assim

$$m_k = R e^{i(\theta_k + \theta_{k+1})/2} \cos 30^\circ.$$

Portanto o ponto médio m_k tem módulo (distância ao centro)

$$|m_k| = R \cos 30^\circ = R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Isto mostra duas coisas importantes:

- os pontos médios m_k estão todos à mesma distância do centro (logo formam um polígono regular),
- o hexágono H_2 obtido é *semelhante* a H_1 com fator de escala linear

$$\lambda = \frac{|m_k|}{R} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Como a razão linear entre H_2 e H_1 é $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{2}$, a razão entre as áreas é o quadrado desse fator:

$$\frac{\text{Área}(H_2)}{\text{Área}(H_1)} = \lambda^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

Portanto a razão pedida entre as áreas de H_1 e H_2 (normalmente escrita $\text{Área}(H_1) : \text{Área}(H_2)$) é

$$\boxed{\text{Área}(H_1) : \text{Área}(H_2) = 1 : \frac{3}{4} = 4 : 3}$$

ou, em forma de quociente,

$$\boxed{\frac{\text{Área}(H_1)}{\text{Área}(H_2)} = \frac{4}{3}.}$$

Observação alternativa (por área em função do lado). A área de um hexágono regular de lado a é $A_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$. Os pontos médios formam um hexágono regular cujo raio do circuncírculo vale $R' = \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{\sqrt{3}}{2}a$;

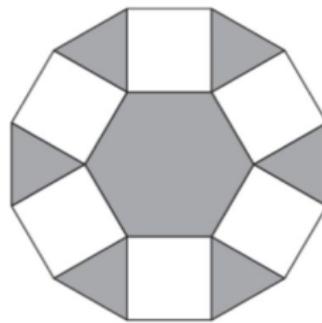
como para o hexágono o lado é igual ao raio do circuncírculo, o novo lado vale $a' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Assim

$$A_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}(a')^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}A_1,$$

o que conduz à mesma razão $A_2/A_1 = 3/4$ e $A_1/A_2 = 4/3$.

Enunciado (resumo). Os triângulos externos da figura são equiláteros, todos os quadriláteros mostrados são quadrados e o polígono do meio é um hexágono regular. Calcular a razão

$$\frac{\text{soma das áreas das regiões sombreadas}}{\text{soma das áreas das regiões em branco}}.$$



Solução

Seja a o comprimento do lado dos quadrados e dos triângulos equiláteros.

$$A_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

O hexágono regular pode ser decomposto em 6 triângulos equiláteros de lado a :

$$A_{\text{hex}} = 6A_{\Delta} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$$

A área sombreada é composta por 6 triângulos equiláteros mais o hexágono:

$$A_{\text{sombra}} = 6A_{\Delta} + A_{\text{hex}} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = 3\sqrt{3}a^2.$$

As regiões brancas são formadas por 6 quadrados de lado a :

$$A_{\text{branco}} = 6a^2.$$

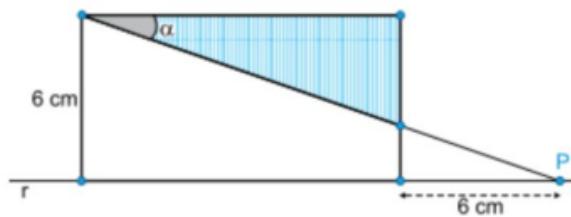
A razão pedida é:

$$\frac{A_{\text{sombra}}}{A_{\text{branco}}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{6a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Resolução — questão do triângulo hachurado

Enunciado (resumido). No plano, um dos lados de um retângulo está sobre a reta r . O retângulo tem altura 6 cm. Um ponto P sobre a reta r situa-se a 6 cm à direita do vértice inferior direito do retângulo. O segmento que liga P ao vértice superior esquerdo do retângulo forma com o lado superior do retângulo um ângulo α tal que $\tan \alpha = \frac{1}{3}$.



A parte hachurada é o triângulo formado pelos pontos: vértice superior esquerdo A , vértice superior direito B e o ponto C onde a reta passa pela face direita do retângulo (ver figura). Determinar a área do triângulo hachurado.

Resolução.

Considere um sistema de eixos com origem no vértice inferior esquerdo do retângulo. Seja

$$A = (0, 6), \quad B = (w, 6),$$

onde w é a largura do retângulo (a determinar). O ponto C está na face direita do retângulo, portanto tem coordenadas $C = (w, y)$ com $0 < y < 6$. O ponto P (sobre a reta r) está a 6 cm à direita do vértice inferior direito, logo

$$P = (w + 6, 0).$$

A reta que liga A a P é a mesma que passa por A e por C . A

inclinação dessa reta (ângulo α com a horizontal) satisfaz

$$\tan \alpha = \frac{\text{cateto oposto (queda vertical)}}{\text{cateto adjacente (deslocamento horizontal)}} = \frac{6 - y}{w}.$$

Pelo enunciado, $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, assim

$$\frac{6 - y}{w} = \frac{1}{3} \implies 6 - y = \frac{w}{3}. \quad (5)$$

Por outro lado, podemos escrever a equação da reta AP . A inclinação entre $A(0, 6)$ e $P(w + 6, 0)$ é

$$m = \frac{0 - 6}{(w + 6) - 0} = -\frac{6}{w + 6}.$$

A ordenada do ponto da reta no $x = w$ (isto é, a coordenada y de C) é

$$y = 6 + m \cdot w = 6 - \frac{6w}{w + 6} = \frac{36}{w + 6}.$$

Logo

$$6 - y = 6 - \frac{36}{w + 6} = \frac{6w}{w + 6}.$$

Igualando essa expressão com a do lado direito de (5) obtemos

$$\frac{6w}{w + 6} = \frac{w}{3}.$$

Como $w > 0$, podemos dividir ambos os lados por w :

$$\frac{6}{w+6} = \frac{1}{3} \implies 18 = w + 6 \implies w = 12.$$

Logo a largura do retângulo é $w = 12$ cm. Pela (5),

$$6 - y = \frac{w}{3} = \frac{12}{3} = 4 \implies y = 2.$$

Portanto o triângulo hachurado tem vértices $A = (0, 6)$, $B = (12, 6)$ e $C = (12, 2)$. Sua base é $AB = 12$ e sua altura (distância vertical entre AB e C) é $6 - 2 = 4$. Assim a área é

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4 = 24 \text{ cm}^2.$$

Resposta: 24 cm² (alternativa c).