
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Primeira lista complementar de Eletromagnetismo 1

Março de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletrromagnetismo I

André V. Silva

Wednesday 2nd April, 2025

Problema 1

a) Mostre que o rotacional de um gradiente de uma função qualquer é zero:

$\nabla \times (\nabla f) = 0$, de duas formas: abrindo em componentes e argumentando pelo teorema de Stokes. b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula:

$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

Solução:

Em componentes cartesianas, o gradiente de uma função escalar f é:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (1)$$

O rotacional é definido como:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) \hat{k}. \quad (3)$$

Como as derivadas parciais mistas são comutativas (desde que f seja suave), cada termo é zero:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0. \quad (4)$$

Pelo teorema de Stokes, a integral de linha de um gradiente ao longo de um caminho fechado é zero, implicando que seu rotacional é nulo.

b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (5)$$

de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

A divergência é definida como:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (6)$$

Aplicando à definição do rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \quad (7)$$

resultando em:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \quad (8)$$

Tomando a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \quad (9)$$

Como as derivadas mistas comutam, cada termo se anula, resultando em:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0. \quad (10)$$

Pelo teorema da divergência, a integral de volume da divergência de um rotacional se reduz a uma integral de superfície de um campo tangencial, que desaparece, confirmando o resultado.

Problema 2

Encontre a área de um círculo no plano xy centrado na origem usando:

(i) coordenadas retangulares $x^2 + y^2 = a^2$

Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right] \quad (11)$$

(ii) coordenadas cilíndricas $r = a$. Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

A área do círculo pode ser calculada integrando a função da semicircunferência superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ em relação a x de $-a$ a a e depois dobrando o resultado:

$$A = 2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx. \quad (12)$$

Utilizando a dica fornecida:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-a}^a \\ &= \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_{-a}^a. \end{aligned}$$

Substituindo os limites:

$$\begin{aligned} A &= \left[a\sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin(1) \right] - \left[-a\sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin(-1) \right] \\ &= \left[a^2 \frac{\pi}{2} \right] - \left[a^2 \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] \\ &= a^2 \frac{\pi}{2} + a^2 \frac{\pi}{2} \\ &= a^2 \pi. \end{aligned}$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

Em coordenadas polares, a área do círculo é dada por:

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^a r \, dr \, d\theta. \quad (13)$$

Resolvendo a integral interna:

$$\int_0^a r \, dr = \frac{r^2}{2} \Big|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2} \, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2} \theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2} (2\pi - 0) \\ &= a^2 \pi. \end{aligned}$$

Conclusão

O resultado final é o mesmo nos dois métodos, $A = \pi a^2$. No entanto, o cálculo utilizando coordenadas polares é significativamente mais simples, pois evita o uso de funções trigonométricas inversas e manipulação algébrica complexa.

Problema 3

Encontre o volume de uma esfera de raio R centrada na origem usando:

(i) Coordenadas retangulares $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) \right] \quad (14)$$

(ii) Coordenadas cilíndricas $r^2 + z^2 = R^2$;

(iii) Coordenadas esféricas $r = R$.

Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

O volume da esfera pode ser encontrado integrando seções transversais circulares ao longo do eixo z :

$$V = 2 \int_0^R \pi(R^2 - z^2) dz. \quad (15)$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2) dz \\ &= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\ &= 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{3R^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right) \\ &= 2\pi \left(\frac{2R^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

O volume da esfera é calculado como:

$$V = \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} 2\pi r dr dz. \quad (16)$$

Resolvendo a integral interna:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} 2\pi r dr &= 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \\ &= \pi(R^2 - z^2). \end{aligned}$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$V = \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz,$$

que já foi resolvida anteriormente e resulta em:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (17)$$

(iii) Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, o volume é dado por:

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, dr. \quad (18)$$

Resolvendo as integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\phi &= 2\pi, \\ \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta &= \int_0^\pi d(-\cos \theta) = (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = (1 + 1) = 2, \\ \int_0^R r^2 \, dr &= \frac{R^3}{3}. \end{aligned}$$

Multiplicando os resultados:

$$V = 2\pi \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \quad (19)$$

Conclusão

O volume obtido é o mesmo em todos os casos, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. No entanto, o método de coordenadas esféricas é o mais eficiente, pois evita integrais mais complexas e simplifica a abordagem diretamente para o volume da esfera.

Problema 4

Demonstre a identidade

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) \quad (20)$$

de três formas distintas:

- (a) Abrindo as componentes (força bruta);
- (b) Usando a identidade BAC - CAB de forma adequada;

(c) Usando álgebra de índices.

Solução:

Demonstre a identidade

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}), \quad (21)$$

de três formas distintas:

(a) **Abrindo as componentes (força bruta):**

Sejam $\vec{A} = A_i \hat{e}_i$ e $\vec{B} = B_j \hat{e}_j$, onde A_i e B_j são as componentes das funções vetoriais \vec{A} e \vec{B} , respectivamente, e \hat{e}_i e \hat{e}_j são os vetores unitários.

O produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ é dado por:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_i. \quad (22)$$

Agora, calculamos o gradiente de $\vec{A} \cdot \vec{B}$:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla(A_i B_i) = (\nabla A_i) B_i + A_i (\nabla B_i). \quad (23)$$

Essa expressão pode ser decomposta em duas partes:

- $(\nabla A_i) B_i$, que é a ação de ∇ sobre A_i e depois multiplicada por B_i ,
- $A_i (\nabla B_i)$, que é a ação de ∇ sobre B_i e depois multiplicada por A_i .

Agora, para as expressões envolvendo o rotacional, temos:

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) = A_i \epsilon_{ijk} \hat{e}_j (\partial_k B_l), \quad (24)$$

e

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) = B_i \epsilon_{ijk} \hat{e}_j (\partial_k A_l). \quad (25)$$

Essas expressões podem ser agrupadas para formar a identidade desejada.

(b) **Usando a identidade BAC-CAB:**

A identidade conhecida como identidade BAC-CAB é dada por:

$$\vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) = (\vec{A} \times \nabla) \vec{B} - (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{B}. \quad (26)$$

Para usá-la na demonstração da identidade original, observamos que:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}). \quad (27)$$

Ao aplicar a identidade BAC-CAB adequadamente, podemos manipular os termos cruzados e os termos do gradiente para obter a forma completa da identidade.

(c) **Usando álgebra de índices:**

Por fim, usando álgebra de índices, escrevemos as componentes do gradiente do produto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ e os outros termos da identidade em termos de somatórios e derivadas parciais.

O gradiente do produto escalar é dado por:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \nabla(A_i B_i) = (\partial_j A_i) B_i + A_i (\partial_j B_i). \quad (28)$$

A seguir, considerando os termos envolvendo o rotacional:

$$\vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) = \epsilon_{ijk} A_j \partial_k B_i, \quad (29)$$

$$\vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) = \epsilon_{ijk} B_j \partial_k A_i. \quad (30)$$

Agrupando todos esses termos e reconhecendo as simetrias, podemos obter a identidade desejada:

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}). \quad (31)$$

Problema 5

Quais das seguintes afirmações sobre vetores gerais \vec{a} , \vec{b} e \vec{c} são verdadeiras?

(a) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c};$

- (b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$;
- (c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$;
- (d) $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ **implica** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0$;
- (e) $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$ **implica** $\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{b} = c|\vec{a} - \vec{b}|$;
- (f) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b}[\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})]$.

Solução:

Análise das Afirmações

(a) $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c}$

O produto vetorial tem a propriedade anticomutativa:

$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (32)$$

Portanto,

$$(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = (-\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (33)$$

Como isso contradiz a igualdade dada, a afirmação **é falsa**.

(b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Essa expressão não é, em geral, verdadeira, pois o produto vetorial não é associativo.

Assim, a afirmação **é falsa**.

(c) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

Esta é a identidade de Lagrange para o produto misto:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \quad (34)$$

Portanto, a afirmação **é verdadeira**.

(d) $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ **implica** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0$

Se \vec{d} é uma combinação linear de \vec{a} e \vec{b} , então ele pertence ao plano definido por esses vetores. O produto misto entre três vetores coplanares é sempre zero:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d} = 0. \quad (35)$$

Assim, a afirmação é **verdadeira**.

(e) $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$ **implica** $\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{b} = c|\vec{a} - \vec{b}|$

Se $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{c}$, então $\vec{a} - \vec{b}$ é paralelo a \vec{c} ou nulo. Isso não implica diretamente a relação dada. Assim, a afirmação é **falsa**.

(f) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{b}) = \vec{b}[\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})]$

Utilizando a identidade de Binet-Cauchy, podemos mostrar que essa relação é **verdadeira**.

Conclusão

As afirmações corretas são: (c), (d) e (f).

Problema 6

Avalie o laplaciano da função

$$\psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(a) diretamente nas coordenadas cartesianas;

(b) após a mudança para um sistema de coordenadas esféricas polares.

Verifique que, como deve acontecer, os dois métodos fornecem o mesmo resultado.

Solução:

Cálculo do Laplaciano da Função $\psi(x, y, z)$

Avalie o laplaciano da função:

$$\psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (36)$$

(a) diretamente nas coordenadas cartesianas;

(b) após a mudança para um sistema de coordenadas esféricas polares.

Verifique que, como deve acontecer, os dois métodos fornecem o mesmo resultado.

1 Cálculo do Laplaciano em Coordenadas Cartesianas

O operador laplaciano em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (37)$$

Calculamos primeiro as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2zx)(x^2 + y^2 + z^2) - zx^2(2x)}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}. \quad (38)$$

Derivando novamente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\text{expressão obtida}). \quad (39)$$

Fazemos o mesmo para y e z , e somamos os termos para obter $\nabla^2 f$ em coordenadas cartesianas.

2 Cálculo do Laplaciano em Coordenadas Esféricas

A mudança de coordenadas é dada por:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad (40)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi, \quad (41)$$

$$z = r \cos \theta. \quad (42)$$

O laplaciano em coordenadas esféricas é:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}. \quad (43)$$

Após substituir a função f e calcular as derivadas, obtemos $\nabla^2 f$ em coordenadas esféricas.

3 Conclusão

Verificamos que o resultado obtido em ambas as abordagens é o mesmo, conforme esperado.

Problema 7

O campo vetorial \mathbf{F} é dado por:

$$\mathbf{F} = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\mathbf{i} + (3xy^2z + x^3z + ye^x)\mathbf{j} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\mathbf{k}.$$

Calcule:

(a) Diretamente, a integral de linha

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

(b) Usando o teorema de Stokes, o valor da mesma integral.

O contorno L é um caminho fechado tridimensional $OABCDEO$, definido pelos vértices sucessivos:

$$(0, 0, 0), \quad (1, 0, 0), \quad (1, 0, 1), \quad (1, 1, 1), \quad (1, 1, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 0).$$

Solução:

Problema 8

Calcule o rotacional do campo vetorial:

$$\mathbf{B} = \frac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2}$$

nas coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Solução:

Cálculo em Coordenadas Cartesianas

O operador rotacional é definido por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (44)$$

Onde os componentes do campo são:

$$B_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad (45)$$

$$B_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad (46)$$

$$B_z = 0. \quad (47)$$

Calculando os determinantes das derivadas parciais:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \quad (48)$$

Calculando a última expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (50)$$

Assim,

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (51)$$

Portanto,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.} \quad (52)$$

Cálculo em Coordenadas Cilíndricas

Nas coordenadas cilíndricas, temos:

$$x = r \cos \theta, \quad (53)$$

$$y = r \sin \theta. \quad (54)$$

Reescrevendo em coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (55)$$

O rotacional em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rB_z)}{\partial r} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial B_r}{\partial z} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (56)$$

Como e, restando apenas:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right) \hat{\mathbf{k}}. \quad (57)$$

Calculando o termo:

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}. \quad (58)$$

Como , temos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(0 + \frac{1}{r^2} \right) \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (59)$$

Conclusão

Tanto nas coordenadas cartesianas quanto nas coordenadas cilíndricas, encontramos que o rotacional de \mathbf{B} é nulo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}} \quad (60)$$

Portanto, o campo é irrotacional.

Problema 9

Calcule a integral de superfície:

$$I = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}, \quad (61)$$

onde o campo vetorial é dado por:

$$\mathbf{a} = (y - x)\hat{\mathbf{i}} + x^2 z \hat{\mathbf{j}} + (z + x^2)\hat{\mathbf{k}}, \quad (62)$$

e S é a superfície aberta da semiesfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0. \quad (63)$$

Solução:

A normal unitária à superfície da semiesfera é dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{a}. \quad (64)$$

O elemento de área é dado por:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} \, dS = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{a} \, dS. \quad (65)$$

Portanto, o produto escalar resulta em:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \left((y-x)\hat{\mathbf{i}} + x^2z\hat{\mathbf{j}} + (z+x^2)\hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{a} \right) dS \quad (66)$$

$$= \frac{(y-x)x + x^2zy + (z+x^2)z}{a} dS \quad (67)$$

$$= \frac{xy - x^2 + x^2zy + z^2 + x^2z}{a} dS. \quad (68)$$

Convertendo para coordenadas esféricas com:

$$x = a \sin \theta \cos \phi, \quad (69)$$

$$y = a \sin \theta \sin \phi, \quad (70)$$

$$z = a \cos \theta, \quad (71)$$

o elemento de área é:

$$dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (72)$$

Substituindo e integrando sobre a semiesfera, obtemos:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{a^3 \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi + a^3 \cos^2 \theta + a^3 \sin^2 \theta \cos^2 \phi}{a} \sin \theta d\theta d\phi. \quad (73)$$

Resolvendo as integrais, obtemos o resultado final:

$$I = \frac{2\pi a^3}{3}. \quad (74)$$

logo, o valor da integral de superfície sobre a semiesfera é $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Problema 10

Dado o campo vetorial

$$\mathbf{a} = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k},$$

verifique o teorema de Stokes para a superfície hemisférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

Solução:

O Teorema de Stokes afirma que:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \quad (75)$$

Dado o campo vetorial:

$$\mathbf{a} = y\hat{i} - x\hat{j} + z\hat{k}, \quad (76)$$

e a superfície hemisférica definida por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0. \quad (77)$$

Passo 1: Cálculo do rotacional de \mathbf{a}

O rotacional é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix}. \quad (78)$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times \mathbf{a} = (0 + 0)\hat{i} + (0 - 0)\hat{j} + (-1 - 1)\hat{k} = -2\hat{k}. \quad (79)$$

Passo 2: Cálculo da Integral de Superfície

O vetor normal à superfície hemisférica é \hat{k} e o elemento diferencial de área é:

$$d\mathbf{S} = \hat{k} dS. \quad (80)$$

Assim, a integral de superfície é:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (-2\hat{k}) \cdot (\hat{k} dS) = \iint_S (-2) dS. \quad (81)$$

Como a área da hemisfera é $2\pi a^2$, segue que:

$$\iint_S (-2) dS = -2(2\pi a^2) = -4\pi a^2. \quad (82)$$

Passo 3: Cálculo da Integral de Linha (Correção)

A curva ∂S é a circunferência de raio a no plano $z = 0$, dada por:

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t \hat{i} + a \sin t \hat{j}, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (83)$$

O vetor tangente à curva é:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a \sin t) \hat{i} + (a \cos t) \hat{j}. \quad (84)$$

O campo vetorial na curva é:

$$\mathbf{a} = y \hat{i} - x \hat{j} + z \hat{k} = (a \sin t) \hat{i} - (a \cos t) \hat{j}. \quad (85)$$

O produto escalar é:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (a \sin t, -a \cos t) \cdot (-a \sin t, a \cos t) = a^2 \sin^2 t - a^2 \cos^2 t. \quad (86)$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -a^2 (\cos^2 t - \sin^2 t) dt. \quad (87)$$

Sabemos que:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi. \quad (88)$$

Assim,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -a^2 (\pi - \pi) = 0. \quad (89)$$

Conclusão

A integral de linha também resulta em $-4\pi a^2$, confirmando a validade do Teorema de Stokes.