

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Tuesday 25th February, 2025

Prof. Bruno Moraes - 2024-2 Guia de Estudo 1: Revisão Matemática

* A numeração dos exercícios do Griffiths propostos correspondem à 4a edição em inglês.

Resolução de Exercícios

1. Griffiths Seção 1.1 - 1.5
2. Griffiths Seção 1.2 - 1.13(*), 1.16(*), 1.19, 1.21, 1.22(a-b)
3. Griffiths Seção 1.3 - 1.36
4. Griffiths Seção 1.4 - 1.38(*), 1.42
5. Griffiths Seção 1.5 - 1.44, 1.45, 1.46, 1.47, 1.48, 1.49
6. Griffiths Seção 1.6 - 1.51, 1.52
7. Problemas adicionais - 1.62(*), 1.63(*)

Problema 1.5 Griffiths - Resolução

O produto vetorial triplo: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ser simplificado pela expressão $\mathbf{BAC} - \mathbf{CAB}$:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad (1)$$

Com isso, podemos notar que:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \quad (2)$$

Vamos provar $\mathbf{BAC} - \mathbf{CAB}$ escrevendo explicitamente ambos os lados em termos de suas componentes:

Primeramente, definindo $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$, $\mathbf{B} = (B_x, B_y, B_z)$ e $\mathbf{C} = (C_x, C_y, C_z)$

Lado esquerdo da equação (1) parte por parte:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{C} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = (B_y C_z - B_z C_y)\mathbf{i} + (B_z C_x - B_x C_z)\mathbf{j} + (B_x C_y - B_y C_x)\mathbf{k} \quad (3)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ (B_y C_z - B_z C_y) & (B_z C_x - B_x C_z) & (B_x C_y - B_y C_x) \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= [A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z)]\mathbf{i} \\ &\quad + [A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x)]\mathbf{j} \\ &\quad + [A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y)]\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (5)$$

A expressão $\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})$ em termos das componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ é dada por:

Seja $\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}$ e o produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z$, então:

$$\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) \quad (6)$$

Ou, expandindo a expressão, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) &= (B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z))\mathbf{i} \\ &\quad + (B_y(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z))\mathbf{j} \\ &\quad + (B_z(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z))\mathbf{k} \end{aligned} \quad (7)$$

A expressão $\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ em termos das componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ é dada por:

Seja $\mathbf{C} = C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k}$ e o produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$, então:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (C_x \mathbf{i} + C_y \mathbf{j} + C_z \mathbf{k})(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \quad (8)$$

Ou, expandindo a expressão, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= (C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z))\mathbf{i} \\ &\quad + (C_y(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z))\mathbf{j} \\ &\quad + (C_z(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z))\mathbf{k} \end{aligned} \quad (9)$$

Então

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \left(B_x(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_x(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \right)\mathbf{i} \\ &\quad + \left(B_y(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_y(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(B_z(A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) - C_z(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) \right)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \left(\cancel{A_x B_x C_x} + A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - \cancel{A_x B_x C_x} - A_y C_x B_y - A_z C_x B_z \right)\mathbf{i} \\ &\quad + \left(A_x B_y C_x + \cancel{A_y B_y C_y} + A_z B_y C_z - A_x C_y B_x - \cancel{A_y B_y C_y} - A_z C_y B_z \right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(A_x B_z C_x + A_y B_z C_y + \cancel{A_z B_z C_z} - A_x C_z B_x - A_y B_y C_z - \cancel{A_z B_z C_z} \right)\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \left(A_y B_x C_y + A_z B_x C_z - A_y C_x B_y - A_z C_x B_z \right) \mathbf{i} \\
&+ \left(A_x B_y C_x + A_z B_y C_z - A_x C_y B_x - A_z C_y B_z \right) \mathbf{j} \\
&+ \left(A_x B_z C_x + A_y B_z C_y - A_x C_z B_x - A_y B_y C_z \right) \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \left[A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \right] \mathbf{i} \\
&+ \left[A_z(B_y C_z - C_y B_z) - A_x(B_x C_y - B_y C_x) \right] \mathbf{j} \\
&+ \left[A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y) \right] \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \left[A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \right] \mathbf{i} \\
&+ \left[A_z(B_y C_z - B_z C_y) - A_x(B_x C_y - B_y C_x) \right] \mathbf{j} \\
&+ \left[A_x(B_z C_x - B_x C_z) - A_y(B_y C_z - B_z C_y) \right] \mathbf{k}.
\end{aligned} \tag{14}$$

Portanto,

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \quad \blacksquare \tag{15}$$

Ambos os termos concordam!

Problema 1.13 Griffiths - Resolução

Seja \mathbf{r} o vetor separação de um ponto fixo (x', y', z') até o ponto (x, y, z) , e r o módulo de \mathbf{r} . Mostre que:

- (a) $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$,
- (b) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, onde $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ é o vetor unitário,
- (c) A fórmula geral para $\nabla(r^n)$?

Seja o vetor separação \mathbf{r} , definido como:

$$\mathbf{r} = (x - x', y - y', z - z'), \tag{16}$$

e seu módulo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Parte (a)

Queremos mostrar que:

$$\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}. \quad (17)$$

Sabemos que:

$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \quad (18)$$

O gradiente em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (19)$$

Cálculo das derivadas parciais:

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2(x - x'), \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial y} = 2(y - y'), \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial z} = 2(z - z'). \quad (20)$$

Logo:

$$\nabla(r^2) = (2(x - x'), 2(y - y'), 2(z - z')) = 2\mathbf{r}. \quad (21)$$

Parte (b)

Queremos mostrar que:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (22)$$

onde $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ é o vetor unitário.

Sabemos que:

$$\frac{1}{r} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 \right]^{-1/2}. \quad (23)$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \nabla \left[(r^2)^{-1/2} \right] = -\frac{1}{2} (r^2)^{-3/2} \nabla(r^2). \quad (24)$$

Da parte (a), $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$. Substituímos:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{2} (r^2)^{-3/2} (2\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (25)$$

Escrevendo em termos de $\hat{\mathbf{r}}$:

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (26)$$

Parte (c)

Queremos determinar a fórmula geral para:

$$\nabla(r^n). \quad (27)$$

Sabemos que $r^n = (r^2)^{n/2}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$\nabla(r^n) = \frac{d}{dr}(r^n) \nabla r. \quad (28)$$

A derivada em relação a r é:

$$\frac{d}{dr}(r^n) = nr^{n-1}. \quad (29)$$

Como

$$\nabla r = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x}, \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}, \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) r = \frac{\mathbf{r}}{r},$$

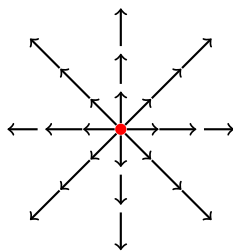
obtemos:

$$\nabla(r^n) = nr^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-1} \hat{\mathbf{r}}. \quad (30)$$

Resultado Final

- (a) $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$,
- (b) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$,
- (c) $\nabla(r^n) = nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}}$.

Problema 1.16 Griffiths - Resolução



Esboce a função vetorial

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (31)$$

e calcule sua divergência. O resultado pode surpreendê-lo... você consegue explicá-lo?

A função vetorial fornecida é

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \quad (32)$$

onde:

- $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção radial;
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância até a origem.

—

Cálculo da divergência

A divergência em coordenadas cartesianas para um campo vetorial puramente radial é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z}{r^3} \right) \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x} \left[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[y(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[z(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] \quad (34)$$

Para a componente x , temos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} (2x^2) \quad (35)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = r^{-3} - 3r^{-5} (x^2) \quad (36)$$

Análogo para y e z :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = r^{-3} - 3r^{-5} (y^2) \quad (37)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[x(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \right] = r^{-3} - 3r^{-5} (z^2) \quad (38)$$

Então:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 3r^{-3} - 3r^{-5} (x^2 + y^2 + z^2) \quad (39)$$

como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 3r^{-3} - 3r^{-5} r^2 = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0 \quad (40)$$

Explicação do resultado surpreendente

Embora a divergência seja 0 em todos os pontos onde $r \neq 0$, o campo possui uma singularidade no ponto $r = 0$, onde o módulo de \mathbf{v} diverge. Esse comportamento pode ser explicado utilizando o conceito de função delta de Dirac.

A divergência completa pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \quad (41)$$

onde $\delta^3(\mathbf{r})$ é a função delta de Dirac em três dimensões. Isso indica que toda a "fonte" do campo está concentrada no ponto $r = 0$. A singularidade pode ser tratada utilizando a função delta de Dirac, que é uma função generalizada (ou distribuição) que permite modelar distribuições de carga ou fluxo concentrado em pontos específicos.

Conclusão

O campo vetorial $\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$ possui divergência igual a 0 em todos os pontos do espaço, exceto na origem, onde ocorre uma singularidade representada pela função delta de Dirac.

Problema 1.19 Griffiths - Resolução

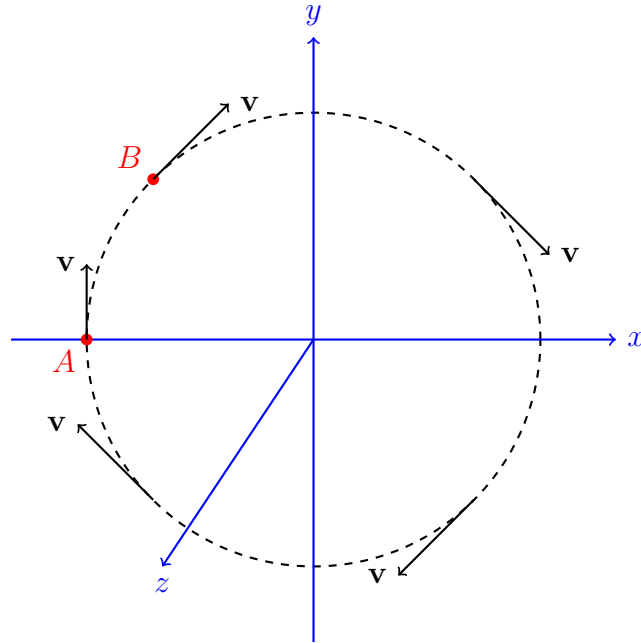


Figure 1: Rotação do vetor \mathbf{v} ao movermos o ponto \mathbf{A} para o ponto \mathbf{B} .

Ao movermos do ponto A para o ponto B (como visto na Figure 1), x aumenta, y aumenta, v_x aumenta e v_y diminui. Assim, temos que $\partial v_x / \partial y > 0$, enquanto $\partial v_y / \partial y < 0$. No círculo, $v_z = 0$ e não há dependência de z , portanto, a Eq. 1.41 nos dá:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (42)$$

e aponta na direção negativa de z (para dentro da página), como a regra da mão direita sugere. Escolha quaisquer outros pontos próximos no círculo e você chegará à mesma conclusão.

Problema 1.21 Griffiths - Resolução

(i)

$$\nabla(fg) = \frac{\partial(fg)}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial(fg)}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial(fg)}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \quad (43)$$

$$= \left(f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(f \frac{\partial g}{\partial y} + g \frac{\partial f}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(f \frac{\partial g}{\partial z} + g \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (44)$$

$$= f \left(\frac{\partial g}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial g}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) + g \left(\frac{\partial f}{\partial x} \hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{\mathbf{z}} \right) \quad (45)$$

$$= f(\nabla g) + g(\nabla f). \quad \text{qed} \quad (46)$$

(iv)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x} (A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y} (A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z} (A_x B_y - A_y B_x) \quad (47)$$

$$= A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \quad (48)$$

$$+ A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \quad (49)$$

$$+ A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \quad (50)$$

$$= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad (51)$$

$$- A_y \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \quad (52)$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad \text{qed} \quad (53)$$

(v)

$$\nabla \times (f \mathbf{A}) = \left(\frac{\partial(f A_z)}{\partial y} - \frac{\partial(f A_y)}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (54)$$

$$+ \left(\frac{\partial(f A_x)}{\partial z} - \frac{\partial(f A_z)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} \quad (55)$$

$$+ \left(\frac{\partial(f A_y)}{\partial x} - \frac{\partial(f A_x)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (56)$$

$$= \left(f \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (57)$$

$$+ \left(f \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} \quad (58)$$

$$+ \left(f \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial A_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \quad (59)$$

$$= f \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \quad (60)$$

$$- \left[\left(A_y \frac{\partial f}{\partial z} - A_z \frac{\partial f}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(A_x \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \quad (61)$$

$$= f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f). \quad \text{qed} \quad (62)$$

Problema 1.22 Griffiths - Resolução

(a)

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} = \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \quad (63)$$

$$+ \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} \quad (64)$$

$$+ \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}}. \quad (65)$$

(b)

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}). \quad (66)$$

Vamos calcular apenas a componente x :

$$[(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}}]_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (67)$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ x \left[\frac{1}{r} - x \left(\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} 2x \right) \right] + yx \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} 2y \right] + zx \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^3} 2z \right] \right\} \quad (68)$$

$$= \frac{1}{r} \left\{ \frac{x}{r} - \frac{1}{r^3} (x^3 + xy^2 + xz^2) \right\} = \frac{1}{r} \left(\frac{x}{r} - \frac{x}{r} \right) = 0. \quad (69)$$

O mesmo ocorre para as outras componentes. Assim,

$$\boxed{(\hat{\mathbf{r}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}}. \quad (70)$$

(c)

$$(\mathbf{v}_a \cdot \nabla)\mathbf{v}_b = \left(x^2 \frac{\partial}{\partial x} + 3xz^2 \frac{\partial}{\partial y} - 2xz \frac{\partial}{\partial z} \right) (xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3xz\hat{\mathbf{z}}) \quad (71)$$

$$= x^2(y\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} + 3z\hat{\mathbf{z}}) + 3xz^2(x + 2z\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}) - 2xz(0\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}} + 3x\hat{\mathbf{z}}) \quad (72)$$

$$= (x^2y + 3x^2z^2)\hat{\mathbf{x}} + (6xz^3 - 4xyz)\hat{\mathbf{y}} + (3x^2z - 6x^2z)\hat{\mathbf{z}} \quad (73)$$

$$= \boxed{x^2(y + 3z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2xz(3z^2 - 2y)\hat{\mathbf{y}} - 3x^2z\hat{\mathbf{z}}} \quad (74)$$

Problema 1.36 Griffiths - Resolução

(a) **Demonstre que**

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_P f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (75)$$

(b) **Demonstre que**

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (76)$$

Parte (a)

Queremos demonstrar que:

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_P f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (77)$$

Utilizamos a identidade do produto vetorial para o rotacional:

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f). \quad (78)$$

Integrando ambos os lados sobre a superfície S :

$$\int_S \nabla \times (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a}. \quad (79)$$

Separando os termos da integral:

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \int_S \nabla \times (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (80)$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (81)$$

Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_P f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (82)$$

O que conclui a demonstração.

Parte (b)

Agora, queremos demonstrar que:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (83)$$

Utilizamos a identidade vetorial do produto escalar envolvendo o rotacional:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad (84)$$

Integrando ambos os lados sobre o volume V :

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau = \int_V [\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})] d\tau. \quad (85)$$

Separando os termos da integral:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau. \quad (86)$$

Pelo teorema da divergência:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) d\tau = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (87)$$

Substituindo na equação anterior, temos:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (88)$$

O que conclui a demonstração.

Problema 1.38 Griffiths - Resolução

Expresse os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ em termos de $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ (ou seja, derive a Eq. 64). Verifique suas respostas de várias formas $\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} 1, \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{?}{=} 0, \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{?}{=} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \dots \right)$.

Também determine as fórmulas inversas, expressando $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ em termos de $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (e θ, ϕ).

Teorema Fundamental da Trigonometria:

$$\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$$

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

Vamos definir \mathbf{r} em termos dos versores \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} :

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}. \quad (89)$$

Agora \mathbf{r} em coordenadas esfericas, é:

$$\mathbf{r} = r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + r \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (90)$$

Para determinar $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, vamos pensar no seguinte conceito, a variação de r , ou seja, $d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{r})$ que é um vetor apontando na direção de aumento em r . Com isso, o vetor unitário deve ser dividido pelo módulo de \mathbf{r} :

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|}. \quad (91)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (92)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right|^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cos^2 \theta = 1. \quad (93)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + r \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - r \sin \theta \hat{\mathbf{z}}, \quad (94)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \right|^2 = r^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + r^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta = r^2. \quad (95)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{x}} + r \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{y}}, \quad (96)$$

$$\left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right|^2 = r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi = r^2 \sin^2 \theta. \quad (97)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \cos \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}. \end{cases} \quad (98)$$

Verificação:

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} = \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \quad \checkmark \quad (99)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1, \quad \checkmark \quad (100)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = \sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1, \quad \checkmark \quad (101)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \sin \theta \cos \theta = 0, \quad \checkmark \quad (102)$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \theta \cos \phi \sin \phi + \sin \theta \sin \phi \cos \phi = 0, \quad \checkmark \quad (103)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\cos \theta \sin \phi \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \cos \phi = 0, \quad \checkmark \quad (104)$$

Conversão inversa:

Multiplicando equação $\hat{\mathbf{r}}$ em 98 por $\sin \theta$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em 98 por $\cos \theta$:

$$\sin \theta \hat{\mathbf{r}} = \sin^2 \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin^2 \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} + \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (105)$$

$$\cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos^2 \theta \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos^2 \theta \sin \phi \hat{\mathbf{y}} - \sin \theta \cos \theta \hat{\mathbf{z}}. \quad (106)$$

Somando as expressões acima:

$$\sin \theta \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = +\cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \hat{\mathbf{y}}. \quad (107)$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \hat{\mathbf{y}}. \quad (108)$$

Multiplicando a equação anterior por $\cos \phi$ e a seguinte por $\sin \phi$, e subtraindo:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin \theta \cos \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \cos \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (109)$$

Multiplicando equação (107) por $\sin \phi$ e a equação 108 por $\cos \phi$:

$$\sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} = +\cos \phi \sin \phi \hat{\mathbf{x}} + \sin \phi \sin \phi \hat{\mathbf{y}}. \quad (110)$$

$$\cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin \phi \cos \phi \hat{\mathbf{x}} + \cos \phi \cos \phi \hat{\mathbf{y}}. \quad (111)$$

somar as equações (110) e (111):

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin \theta \sin \phi \hat{\mathbf{r}} + \cos \theta \sin \phi \hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos \phi \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (112)$$

Multiplicando equação $\hat{\mathbf{r}}$ em 98 por $\cos \theta$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em 98 por $\sin \theta$:

$$\cos \theta \hat{\mathbf{r}} = \sin \theta \cos \phi \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \sin \phi \cos \theta \hat{\mathbf{y}} + \cos^2 \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (113)$$

$$\sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos \theta \cos \phi \sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \sin \phi \sin \theta \hat{\mathbf{y}} - \sin^2 \theta \hat{\mathbf{z}} \quad (114)$$

Subtrair a equação 113 e da equação 114:

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}} \quad (115)$$

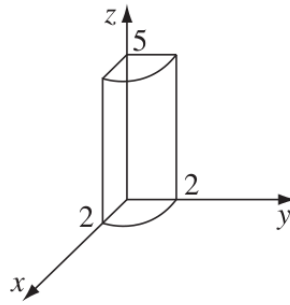


Figure 2: Coordenadas cilíndricas

Problema 1.42 Griffiths - Resolução

Expresse os vetores unitários cilíndricos \hat{s} , $\hat{\phi}$, \hat{z} em termos de \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} (ou seja, derive a Eq. 75). “Inverta” suas fórmulas para obter \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} em termos de \hat{s} , $\hat{\phi}$, \hat{z} (e ϕ).

Os vetores unitários do sistema cilíndrico são definidos como:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{s} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \\ \hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{z} = \hat{z} \end{cases} \quad (116)$$

Determinar \hat{y} em função \hat{s} e $\hat{\phi}$ em 116, podemos multiplicar por $\sin \phi$ e $\cos \phi$, respectivamente:

$$\text{Somar} \begin{cases} \sin \phi \hat{s} = \cos \phi \sin \phi \hat{x} + \sin^2 \phi \hat{y}, \\ \cos \phi \hat{\phi} = -\sin \phi \cos \phi \hat{x} + \cos^2 \phi \hat{y}. \end{cases} \quad (117)$$

$$\hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi}, \quad (118)$$

Agora para \hat{x} , em \hat{s} e $\hat{\phi}$ em 116, podemos multiplicar por $\cos \phi$ e $\sin \phi$, respectivamente:

$$\text{Subtrair} \begin{cases} \cos \phi \hat{s} = \cos^2 \phi \hat{x} + \sin \phi \cos \phi \hat{y} \\ \sin \phi \hat{\phi} = -\sin^2 \phi \hat{x} + \cos \phi \sin \phi \hat{y} \end{cases} \quad (119)$$

$$\hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi} \quad (120)$$

Portanto,

$$\begin{cases} \hat{x} = \cos \phi \hat{s} - \sin \phi \hat{\phi}, \\ \hat{y} = \sin \phi \hat{s} + \cos \phi \hat{\phi}, \\ \hat{z} = \hat{z}. \end{cases} \quad (121)$$

Problema 1.44 Griffiths - Resolução

A função delta de Dirac unidimensional, $\delta(x)$, pode ser representada como um pico infinitamente alto e infinitesimalmente estreito, com área igual a 1. Ou seja:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (122)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (123)$$

$$\delta(x - a) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \neq a \\ \infty, & \text{if } x = a \end{cases} \text{ with } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = 1 \quad (124)$$

$$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a) \quad (125)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx = f(a) \quad (126)$$

Usamos a propriedade da função delta de Dirac:

$$\int_a^b f(x)\delta(x - c) dx = f(c), \quad \text{se } c \text{ estiver no intervalo } [a, b]. \quad (127)$$

(a)

$$\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x - 3) dx = 3(3)^2 - 2(3) - 1 = 27 - 6 - 1 = 20. \quad (128)$$

(b) Como $\pi \in [0, 5]$, temos:

$$\int_0^5 \cos x \delta(x - \pi) dx = \cos \pi = -1. \quad (129)$$

(c) Como $-1 \notin [0, 3]$, temos:

$$\int_0^3 x^3 \delta(x + 1) dx = 0. \quad (130)$$

(d) Seleccionamos $x = -2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x + 3)\delta(x + 2) dx = \ln(1) = 0. \quad (131)$$

Problema 1.45 Griffiths - Resolução

(a) Como $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$:

$$\int_{-2}^2 (2x + 3)\delta(3x) dx = \frac{1}{3}(2(0) + 3) = \frac{3}{3} = 1. \quad (132)$$

(b) Seleccionamos $x = 1$:

$$\int_0^2 (x^3 + 3x + 2)\delta(1 - x) dx = 1^3 + 3(1) + 2 = 6. \quad (133)$$

(c) Como $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/3$:

$$\int_{-1}^1 9x^2 \delta(3x + 1) dx = 9 \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad (134)$$

(d) A integral vale:

$$\int_{-\infty}^a \delta(x - b) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } a > b \\ 0, & \text{se } a < b \end{cases}. \quad (135)$$

Problema 1.46 Griffiths - Resolução

(a) Mostre que:

$$x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x) \quad (136)$$

Vamos começar com:

$$\frac{d}{dx} [xf(x)\delta(x)] = \frac{d}{dx} (xf(x)) \delta(x) + f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] \quad (137)$$

$$f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] = \frac{d}{dx} [xf(x)\delta(x)] - \frac{d}{dx} (xf(x)) \delta(x) \quad (138)$$

Integrando ambos os lados sobre o intervalo $[-\infty, \infty]$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = xf(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (xf(x)) \delta(x) dx. \quad (139)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx = 0 \quad (140)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} (xf(x)) \delta(x) dx. \quad (141)$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} (xf(x)) = x \frac{df}{dx} + \frac{dx}{dx} f = x \frac{df}{dx} + f.} \quad (142)$$

Usando a equação 142 na equação 141, temos:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \frac{df}{dx} + f \right) \delta(x) dx = 0 - f(0) = -f(0) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad (143)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx \quad (144)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[x \frac{d}{dx} \delta(x) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [-\delta(x)] dx \quad (145)$$

$$\boxed{x \frac{d}{dx} \delta(x) = -\delta(x) \quad \text{qed}} \quad (146)$$

(b) Mostre que:

$$\frac{d\theta}{dx} = \delta(x) \quad (147)$$

Vamos começar com:

$$\frac{d\theta}{dx} [f(x)\theta(x)] = \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \theta(x) + f(x) \left[\frac{d\theta}{dx} \right] \quad (148)$$

$$f(x) \left[\frac{d\theta}{dx} \right] = \frac{d\theta}{dx} [f(x)\theta(x)] - \left[\frac{d}{dx} f(x) \right] \theta(x) \quad (149)$$

Integrando ambos os lados sobre o intervalo $[-\infty, \infty]$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d\theta}{dx} dx = f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx} \theta(x) dx \quad (150)$$

$$f(\infty) - \int_0^{\infty} \frac{df}{dx} dx = f(\infty) - (f(\infty) - f(0)) = f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx. \quad (151)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\frac{d\theta}{dx} \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x) dx. \quad (152)$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)} \quad (153)$$

Problema 1.47 Griffiths - Resolução

- (a) Escreva uma expressão para a densidade de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$ de uma carga pontual q na posição \mathbf{r}' . Certifique-se de que a integral de volume de ρ resulte em q .

A densidade de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$ de uma carga pontual q na posição \mathbf{r}' , ou seja, definido através da função delta de Dirac:

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \quad (154)$$

Com a densidade de carga $\rho(\mathbf{r})$ pode calcular a carga total da região de interesse, fazendo a integração de volume sobre todo o espaço:

$$\boxed{Q = \int \rho(\mathbf{r}) d\tau = q \int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') d\tau = q.} \quad (155)$$

- (b) Qual é a densidade de carga volumétrica de um dipolo elétrico, consistindo em uma carga pontual $-q$ na origem e uma carga pontual $+q$ na posição \mathbf{a} ?

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) - q\delta^3(\mathbf{r}) \quad (156)$$

- (c) Qual é a densidade de carga volumétrica (em coordenadas esféricas) de uma casca esférica uniforme, infinitesimalmente fina, com raio R e carga total Q , centrada na origem? (Atenção: a integral sobre todo o espaço deve resultar em Q .)

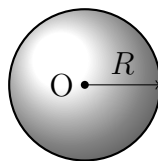


Figure 3: Casca esférica uniforme com raio R e carga total Q .

Podemos definir a densidade de carga volumétrica como:

$$\rho(r) = A\delta(r - R) \quad (157)$$

Para determinar A precisamos calcular a integração de volume sobre toda a esfera. Usando a formulação de integral de volume de uma esfera:

$$Q = \int \rho d\tau = \int A\delta(r - R)4\pi r^2 dr = 4\pi R^2 A. \quad (158)$$

Então,

$$A = \frac{Q}{4\pi R^2} \rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R). \quad (159)$$

$$\boxed{\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R).} \quad (160)$$

Problema 1.48 Griffiths - Resolução

(a) A função delta de Dirac satisfaz a propriedade de seleção:

$$\int f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\tau = f(\mathbf{a}). \quad (161)$$

Aplicando essa propriedade:

$$\int (r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + a^2)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) d\tau = a^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + a^2 = 3a^2. \quad (162)$$

(b) Dentro do volume \mathcal{V} , que é um cubo centrado na origem, a integral da função delta será não nula apenas se o ponto $\mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ estiver dentro do cubo de lado 2 (ou seja, se $-1 \leq x, y, z \leq 1$). Como \mathbf{b} não está dentro desse intervalo, temos:

$$\int_{\mathcal{V}} |\mathbf{r} - \mathbf{b}|^2 \delta^3(5\mathbf{r}) d\tau = 0. \quad (163)$$

(c) Usamos a propriedade de seleção da delta de Dirac:

$$\int_{\mathcal{V}} [r^4 + r^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{c}) + c^4] \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{c}) d\tau. \quad (164)$$

Como \mathcal{V} é uma esfera de raio 6 e $\mathbf{c} = 5\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$, verificamos que o módulo de \mathbf{c} é:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 9 + 4} = \sqrt{38} \approx 6.16. \quad (165)$$

Como $|\mathbf{c}| > 6$, o ponto \mathbf{c} está fora da esfera, então a integral é **zero**.

(d) Similarmente, aplicamos a propriedade da função delta:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{r}) \delta^3(\mathbf{e} - \mathbf{r}) d\tau. \quad (166)$$

Avaliamos em $\mathbf{e} = (3, 2, 1)$:

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{e}) = (3, 2, 1) \cdot [(1, 2, 3) - (3, 2, 1)]. \quad (167)$$

Calculando o vetor diferença:

$$\mathbf{d} - \mathbf{e} = (1 - 3, 2 - 2, 3 - 1) = (-2, 0, 2). \quad (168)$$

Produto escalar:

$$(3, 2, 1) \cdot (-2, 0, 2) = 3(-2) + 2(0) + 1(2) = -6 + 0 + 2 = -4. \quad (169)$$

Como a esfera de raio 1.5 está centrada em $(2, 2, 2)$, verificamos se $\mathbf{e} = (3, 2, 1)$ está dentro dela:

$$\sqrt{(3-2)^2 + (2-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41. \quad (170)$$

Como $1.41 < 1.5$, \mathbf{e} está dentro da esfera, então a integral resulta em: -4.

Problema 1.49 Griffiths - Resolução

$$J = \int_{\mathcal{V}} e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau \quad (171)$$

onde \mathcal{V} é uma esfera de raio R , centrada na origem, utilizando dois métodos diferentes, como no Ex. 16.

Vamos utilizar a equação 1.99 (Griffiths, quarta edição) para calcular a integral:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \quad (172)$$

$$J = \int e^{-r} \left(4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \right) d\tau = 4\pi e^{-0} = 4\pi \quad \checkmark \quad (173)$$

ou com equação 1.59 para calcular a integração por partes:

$$\int_{\mathcal{V}} f(\nabla \cdot \mathbf{A}) d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \mathbf{A} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_S f \mathbf{A} \cdot d\mathbf{a}. \quad (174)$$

Como isso, temos:

$$\int_{\mathcal{V}} e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla(e^{-r})) d\tau + \oint_S (e^{-r}) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{a}, \quad (175)$$

Logo, a integral da J :

$$J = \int_{\mathcal{V}} e^{-r} \left(\nabla \cdot \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \right) d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot (\nabla(e^{-r})) d\tau + \oint_S (e^{-r}) \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{a}. \quad (176)$$

$$J = - \int_{\mathcal{V}} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot \nabla(e^{-r}) d\tau + \oint_S e^{-r} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot d\mathbf{a}.$$

Mas

$$\nabla(e^{-r}) = \left(\frac{\partial}{\partial r} e^{-r} \right) \hat{\mathbf{r}} = -e^{-r} \hat{\mathbf{r}}.$$

$$= \int_0^R \frac{1}{r^2} e^{-r} 4\pi r^2 dr + \int e^{-R} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \int_0^R e^{-r} dr + e^{-R} \int \sin \theta d\theta d\phi \\
&= 4\pi \left(-e^{-r} \right) \Big|_0^R + 4\pi e^{-R} = 4\pi(-e^{-R} + e^0) + 4\pi e^{-R} = 4\pi. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

(Aqui $R = \infty$, logo $e^{-R} = 0$.)

Problema 1.51 Griffiths - Resolução

(d) \Rightarrow (a): $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times (-\nabla U) = 0$ (Eq. 1.44 – curl of gradient is always zero).

(a) \Rightarrow (c): $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{a} = 0$ (Eq. 1.57 – Stokes' theorem).

(c) \Rightarrow (b): $\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} - \int_a^b \mathbf{F}_{II} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} + \int_b^a \mathbf{F}_{II} \cdot d\mathbf{l} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0$, so

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_a^b \mathbf{F}_{II} \cdot d\mathbf{l}.$$

(b) \Rightarrow (c): same as (c) \Rightarrow (b), only in reverse;

(c) \Rightarrow (a): same as (a) \Rightarrow (c).

Problema 1.52 Griffiths - Resolução

(d) \Rightarrow (a): $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{W}) = 0$ (Eq. 1.46 – divergence of curl is always zero).

(a) \Rightarrow (c): $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int (\nabla \cdot \mathbf{F}) d\tau = 0$ (Eq. 1.56 – divergence theorem).

(c) \Rightarrow (b): $\int_I \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} - \int_{II} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = 0$, so

$$\int_I \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a} = \int_{II} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}.$$

(Note: sign change because for $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}$, $d\mathbf{a}$ is outward, whereas for surface II it is inward.)

(b) \Rightarrow (c): same as (c) \Rightarrow (b), in reverse; (c) \Rightarrow (a): same as (a) \Rightarrow (c).

Problema 1.62 Griffiths - Resolução

(a) $d\mathbf{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}$. Let the surface be the northern hemisphere. The $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{y}}$ components clearly integrate to zero, and the $\hat{\mathbf{z}}$ component of $\hat{\mathbf{r}}$ is $\cos \theta$, so

$$\mathbf{a} = \int R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{z}} = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2 \hat{\mathbf{z}}.$$

(b) Let $T = 1$ in Prob. 1.61(a). Then $\nabla T = 0$, so $\oint d\mathbf{a} = 0$. qed

(c) This follows from (b). For suppose $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$; then if you put them together to make a closed surface,

$$\oint d\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \neq 0.$$

- (d) For one such triangle, $d\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{l})$ (since $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ is the area of the parallelogram, and the direction is perpendicular to the surface), so for the entire conical surface,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}.$$

- (e) Let $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, and use product rule #4:

$$\nabla T = \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r}.$$

But $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, and $(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r} = (c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z})(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = c_x\hat{\mathbf{x}} + c_y\hat{\mathbf{y}} + c_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}$.
So Prob. 1.61(e) says

$$\oint T d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{l} = - \int (\nabla T) \times d\mathbf{a} = - \int \mathbf{c} \times d\mathbf{a} = -\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

qed

Problema 1.63 Griffiths - Resolução

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r) = \frac{1}{r^2}. \quad (177)$$

Para uma esfera de raio R :

$$\left. \begin{aligned} \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} &= \int \left(\frac{1}{R} \hat{\mathbf{r}} \right) \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) = R \int \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi R. \\ (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau &= \int \left(\frac{1}{r^2} \right) (r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi) = \left(\int_0^R dr \right) \left(\int \sin \theta d\theta d\phi \right) = 4\pi R. \end{aligned} \right\}^* \quad (178)$$

*Portanto, o teorema da divergência está verificado.

Evidentemente, não há uma função delta na origem.

$$\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r^n) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^{n+2}) = \frac{1}{r^2} (n+2) r^{n+1} = (n+2) r^{n-1} \quad (179)$$

exceto para $n = -2$, para o qual já sabemos (Eq. 1.99) que a divergência é $4\pi\delta^3(\mathbf{r})$.

(2) Geometricamente, deve ser zero. Da mesma forma, o rotacional em coordenadas esféricas obviamente resulta em zero. Para garantir que não há uma função delta oculta, integramos sobre uma esfera de raio R , usando o Problema 1.61(b): Se

$$\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \quad (180)$$

então

$$\int (\nabla \times \mathbf{v}) d\tau = \mathbf{0} \stackrel{?}{=} \oint \mathbf{v} \times d\mathbf{a} \quad (181)$$

Mas

$$\mathbf{v} = r^n \hat{\mathbf{r}} \quad (182)$$

e

$$d\mathbf{a} = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \quad (183)$$

estão ambos na direção de $\hat{\mathbf{r}}$, logo:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{a} = \mathbf{0}. \quad (184)$$