Eletromagnetismo I

André V. Silva

Friday 7th March, 2025

Prof. Bruno Moraes - 2024-2 Guia de Estudo 1: Revisão Matemática

* A numeração dos exercícios do Griffiths propostos correspondem à 4a edição em inglês.

Resolução de Exercícios

1. Griffiths **Seção 1.1** - 1.5
2. Griffiths **Seção 1.2** - 1.13(*), 1.16(*), 1.19, 1.21, 1.22(a-b)
3. Griffiths **Seção 1.3** - 1.36
4. Griffiths **Seção 1.4** - 1.38(*), 1.42
5. Griffiths **Seção 1.5** - 1.44, 1.45, 1.46, 1.47. 1.48, 1.49
6. Griffiths **Seção 1.6** - 1.51, 1.52
7. Problemas adicionais - 1.62(*), 1.63(*)

Problema 1.5 Griffiths - Resolução

O produto vetorial triplo: $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ ser simplificado pela expressão **BAC - CAB**:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \tag{1}$$

Com isso, podemos notar que:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = -\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = -\mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) + \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \tag{2}$$

Vamos provar **BAC - CAB** escrevendo explicitamente ambos os lados em termos de suas componentes:

Primeramente, definindo $\mathbf{A} = (\mathrm{A}_x, \mathrm{A}_y, \mathrm{A}_z)$, $\mathbf{B} = (\mathrm{B}_x, \mathrm{B}_y, \mathrm{B}_z)$ e $\mathbf{C} = (\mathrm{C}_x, \mathrm{C}_y, \mathrm{C}_z)$

Lado esquerdo da equação (1) parte por parte:

$$\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=(B_yC_z-B_zC_y)\mathbf{i}+(B_zC_x-B_xC_z)\mathbf{j}+(B_xC_y-B_yC_x)\mathbf{k} \tag{3}$$

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ (B_yC_z-B_zC_y) & (B_zC_x-B_xC_z) & (B_xC_y-B_yC_x)\end{vmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=&\left[A_y(B_xC_y-B_yC_x)-A_z(B_zC_x-B_xC_z)\right]\mathbf{i}\\ &+\left[A_z(B_yC_z-B_zC_y)-A_x(B_xC_y-B_yC_x)\right]\mathbf{j}\\ &+\left[A_x(B_zC_x-B_xC_z)-A_y(B_yC_z-B_zC_y)\right]\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{5}$$

A expressão $\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})$ em termos das componentes $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ é dada por:
Seja $\mathbf{B}=B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k}$ e o produto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}=A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z$, então:

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=(B_x\mathbf{i}+B_y\mathbf{j}+B_z\mathbf{k})(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z) \tag{6}$$

Ou, expandindo a expressão, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})=&\left(B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)\right)\mathbf{i}\\ &+\left(B_y(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)\right)\mathbf{j}\\ &+\left(B_z(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{7}$$

A expressão $\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$ em termos das componentes $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ é dada por:
Seja $\mathbf{C}=C_x\mathbf{i}+C_y\mathbf{j}+C_z\mathbf{k}$ e o produto escalar $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$, então:

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=(C_x\mathbf{i}+C_y\mathbf{j}+C_z\mathbf{k})(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z) \tag{8}$$

Ou, expandindo a expressão, temos:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=&\left(C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right)\mathbf{i}\\ &+\left(C_y(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right)\mathbf{j}\\ &+\left(C_z(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\right)\mathbf{k}\end{aligned} \tag{9}$$

Então

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=&\Big(B_x(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_x(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\Big)\mathbf{i}\\ &+\Big(B_y(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_y(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\Big)\mathbf{j}\\ &+\Big(B_z(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z)-C_z(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z)\Big)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})=&\Big(\cancel{A_xB_xC_x}+A_yB_xC_y+A_zB_xC_z-\cancel{A_xB_xC_x}-A_yC_xB_y-A_zC_xB_z\Big)\mathbf{i}\\ &+\Big(A_xB_yC_x+\cancel{A_yB_yC_y}+A_zB_yC_z-A_xC_yB_x-\cancel{A_yB_yC_y}-A_zC_yB_z\Big)\mathbf{j}\\ &+\Big(A_xB_zC_x+A_yB_zC_y+\cancel{A_zB_zC_z}-A_xC_zB_x-A_yB_yC_z-\cancel{A_zB_zC_z}\Big)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = &\Big(A_yB_xC_y + A_zB_xC_z - A_yC_xB_y - A_zC_xB_z\Big)\mathbf{i}\\ &+\Big(A_xB_yC_x + A_zB_yC_z - A_xC_yB_x - A_zC_yB_z\Big)\mathbf{j}\\ &+\Big(A_xB_zC_x + A_yB_zC_y - A_xC_zB_x - A_yB_yC_z\Big)\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{12}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})-\mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = &\Big[A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)\Big]\mathbf{i}\\ &+\Big[A_z(B_yC_z - C_yB_z) - A_x(B_xC_y - B_yC_x)\Big]\mathbf{j}\\ &+\Big[A_x(B_zC_x - B_xC_z) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)\Big]\mathbf{k}.\end{aligned}} \tag{13}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = &\Big[A_y(B_xC_y - B_yC_x) - A_z(B_zC_x - B_xC_z)\Big]\mathbf{i}\\ &+\Big[A_z(B_yC_z - B_zC_y) - A_x(B_xC_y - B_yC_x)\Big]\mathbf{j}\\ &+\Big[A_x(B_zC_x - B_xC_z) - A_y(B_yC_z - B_zC_y)\Big]\mathbf{k}.\end{aligned}} \tag{14}$$

Portanto,

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \qquad \blacksquare \tag{15}$$

Ambos os termos concordam!

Problema 1.13 Griffiths - Resolução

Seja $\mathbf{r}$ o vetor separação de um ponto fixo (x', y', z') até o ponto (x, y, z), e r o módulo de $\mathbf{r}$. Mostre que:

(a) $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$,

(b) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$, onde $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ é o vetor unitário,

(c) A fórmula geral para $\nabla(r^n)$?

Seja o vetor separação $\mathbf{r}$, definido como:

$$\mathbf{r} = (x - x', y - y', z - z'), \tag{16}$$

e seu módulo $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$.

Parte (a)

Queremos mostrar que:
$$\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}. \tag{17}$$

Sabemos que:
$$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2. \tag{18}$$

O gradiente em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \tag{19}$$

Cálculo das derivadas parciais:

$$\frac{\partial(r^2)}{\partial x} = 2(x - x'), \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial y} = 2(y - y'), \quad \frac{\partial(r^2)}{\partial z} = 2(z - z'). \tag{20}$$

Logo:
$$\nabla(r^2) = (2(x - x'), 2(y - y'), 2(z - z')) = 2\mathbf{r}. \tag{21}$$

Parte (b)

Queremos mostrar que:
$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{22}$$

onde $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ é o vetor unitário.

Sabemos que:
$$\frac{1}{r} = \left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right]^{-1/2}. \tag{23}$$

Aplicando a regra da cadeia:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \nabla\left[(r^2)^{-1/2}\right] = -\frac{1}{2}(r^2)^{-3/2}\nabla(r^2). \tag{24}$$

Da parte (a), $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$. Substituímos:

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{2}(r^2)^{-3/2}(2\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{25}$$

Escrevendo em termos de $\hat{\mathbf{r}}$:
$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{26}$$

Parte (c)

Queremos determinar a fórmula geral para:

$$\nabla(r^n). \tag{27}$$

Sabemos que $r^n = (r^2)^{n/2}$. Aplicando a regra da cadeia:

$$\nabla(r^n) = \frac{d}{dr}(r^n)\nabla r. \tag{28}$$

A derivada em relação a r é:

$$\frac{d}{dr}(r^n) = nr^{n-1}. \tag{29}$$

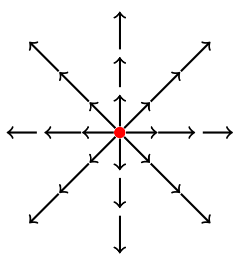
Como
$\nabla r = \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x}, \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y}, \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right) r = \frac{\mathbf{r}}{r}$,
obtemos:

$$\nabla(r^n) = nr^{n-1}\frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}}. \tag{30}$$

Resultado Final

(a) $\nabla(r^2) = 2\mathbf{r}$,
(b) $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$,
(c) $\nabla(r^n) = nr^{n-1}\hat{\mathbf{r}}$.

Problema 1.16 Griffiths - Resolução



Esboce a função vetorial

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{31}$$

e calcule sua divergência. O resultado pode surpreendê-lo... você consegue explicá-lo?

A função vetorial fornecida é

$$\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}, \tag{32}$$

onde:

- $\hat{\mathbf{r}}$ é o vetor unitário na direção radial;
- $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância até a origem.

—

Cálculo da divergência

A divergência em coordenadas cartesianas para um campo vetorial puramente radial é dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) \tag{33}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] \tag{34}$$

Para a componente x, temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3}{2}\right)(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{5}{2}}\left(2x^2\right) \tag{35}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = r^{-3} - 3r^{-5}\left(x^2\right) \tag{36}$$

Analogo para y e z:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = r^{-3} - 3r^{-5}\left(y^2\right) \tag{37}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right] = r^{-3} - 3r^{-5}\left(z^2\right) \tag{38}$$

Então:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 3r^{-3} - 3r^{-5}\left(x^2+y^2+z^2\right) \tag{39}$$

como $r^2 = x^2+y^2+z^2$:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 3r^{-3} - 3r^{-5}r^2 = 3r^{-3} - 3r^{-3} = 0 \tag{40}$$

Explicação do resultado surpreendente

Embora a divergência seja 0 em todos os pontos onde $r \neq 0$, o campo possui uma singularidade no ponto $r = 0$, onde o módulo de $\mathbf{v}$ diverge. Esse comportamento pode ser explicado utilizando o conceito de função delta de Dirac.

A divergência completa pode ser escrita como:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}), \tag{41}$$

onde $\delta^3(\mathbf{r})$ é a função delta de Dirac em três dimensões. Isso indica que toda a "fonte" do campo está concentrada no ponto $r = 0$. A singularidade pode ser tratada utilizando a função delta de Dirac, que é uma função generalizada (ou distribuição) que permite modelar distribuições de carga ou fluxo concentrado em pontos específicos.

—

Conclusão

O campo vetorial $\mathbf{v} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$ possui divergência igual a 0 em todos os pontos do espaço, exceto na origem, onde ocorre uma singularidade representada pela função delta de Dirac.

Problema 1.19 Griffiths - Resolução

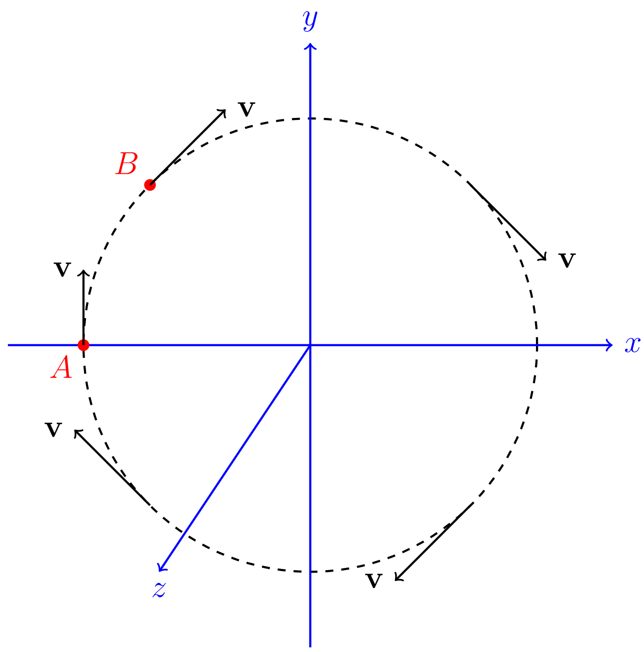


Figure 1: Rotação do vetor **v** ao movermos o ponto **A** para o ponto **B**.

Ao movermos do ponto A para o ponto B (como visto na Figure 1), x aumenta, y aumenta, v_x aumenta e v_y diminui. Assim, temos que $\partial v_x/\partial y > 0$, enquanto $\partial v_y/\partial y < 0$. No círculo, $v_z = 0$ e não há dependência de z, portanto, a Eq. 1.41 nos dá:

$$\nabla \times \mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \tag{42}$$

e aponta na $\boxed{\text{direção negativa de } z}$ (para dentro da página), como a regra da mão direita sugere. Escolha quaisquer outros pontos próximos no círculo e você chegará à mesma conclusão.

Problema 1.21 Griffiths - Resolução

(i)

$$\nabla(fg) = \frac{\partial(fg)}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial(fg)}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial(fg)}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{43}$$

$$= \left(f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x} \right)\hat{\mathbf{x}} + \left(f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y} \right)\hat{\mathbf{y}} + \left(f\frac{\partial g}{\partial z} + g\frac{\partial f}{\partial z} \right)\hat{\mathbf{z}} \tag{44}$$

$$= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial g}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial g}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \right) \tag{45}$$

$$= f(\nabla g) + g(\nabla f). \quad \text{qed} \tag{46}$$

(iv)

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x) \tag{47}$$

$$= A_y \frac{\partial B_z}{\partial x} + B_z \frac{\partial A_y}{\partial x} - A_z \frac{\partial B_y}{\partial x} - B_y \frac{\partial A_z}{\partial x} \tag{48}$$

$$+A_z \frac{\partial B_x}{\partial y} + B_x \frac{\partial A_z}{\partial y} - A_x \frac{\partial B_z}{\partial y} - B_z \frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{49}$$

$$+A_x \frac{\partial B_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial A_x}{\partial z} - A_y \frac{\partial B_x}{\partial z} - B_x \frac{\partial A_y}{\partial z} \tag{50}$$

$$= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \tag{51}$$

$$-A_y \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) - A_z \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \tag{52}$$

$$= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \quad \text{qed} \tag{53}$$

(v)

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = \left(\frac{\partial (f A_z)}{\partial y} - \frac{\partial (f A_y)}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \tag{54}$$

$$+ \left(\frac{\partial (f A_x)}{\partial z} - \frac{\partial (f A_z)}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} \tag{55}$$

$$+ \left(\frac{\partial (f A_y)}{\partial x} - \frac{\partial (f A_x)}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \tag{56}$$

$$= \left(f \frac{\partial A_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial f}{\partial y} - f \frac{\partial A_y}{\partial z} - A_y \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \tag{57}$$

$$+ \left(f \frac{\partial A_x}{\partial z} + A_x \frac{\partial f}{\partial z} - f \frac{\partial A_z}{\partial x} - A_z \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} \tag{58}$$

$$+ \left(f \frac{\partial A_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial f}{\partial x} - f \frac{\partial A_x}{\partial y} - A_x \frac{\partial f}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \tag{59}$$

$$= f \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \tag{60}$$

$$- \left[\left(A_y \frac{\partial f}{\partial z} - A_z \frac{\partial f}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{x}} + \left(A_z \frac{\partial f}{\partial x} - A_x \frac{\partial f}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} + \left(A_x \frac{\partial f}{\partial y} - A_y \frac{\partial f}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{z}} \right] \tag{61}$$

$$= f(\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla f). \quad \text{qed} \tag{62}$$

Problema 1.22 Griffiths - Resolução

(a)

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{x}} \tag{63}$$

$$+ \left(A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{y}} \tag{64}$$

$$+ \left(A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{z}}. \tag{65}$$

(b)
$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\Big). \tag{66}$$

Vamos calcular apenas a componente x:

$$[(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{r}}]_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \tag{67}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{x\left[\frac{1}{r} - x\left(\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}2x\right)\right] + yx\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}2y\right] + zx\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{r^3}2z\right]\right\} \tag{68}$$

$$= \frac{1}{r}\left\{\frac{x}{r} - \frac{1}{r^3}(x^3 + xy^2 + xz^2)\right\} = \frac{1}{r}\left(\frac{x}{r} - \frac{x}{r}\right) = 0. \tag{69}$$

O mesmo ocorre para as outras componentes. Assim,

$$\boxed{(\hat{\mathbf{r}}\cdot\nabla)\hat{\mathbf{r}} = 0}. \tag{70}$$

(c)

$$(\mathbf{v_a}\cdot\nabla)\mathbf{v_b} = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x} + 3xz^2\frac{\partial}{\partial y} - 2xz\frac{\partial}{\partial z}\right)(xy\hat{\mathbf{x}} + 2yz\hat{\mathbf{y}} + 3xz\hat{\mathbf{z}}) \tag{71}$$

$$= x^2(y\hat{\mathbf{x}} + 0\hat{\mathbf{y}} + 3z\hat{\mathbf{z}}) + 3xz^2(x + 2z\hat{\mathbf{y}} + 0\hat{\mathbf{z}}) - 2xz(0\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}} + 3x\hat{\mathbf{z}}) \tag{72}$$

$$= (x^2y + 3x^2z^2)\hat{\mathbf{x}} + (6xz^3 - 4xyz)\hat{\mathbf{y}} + (3x^2z - 6x^2z)\hat{\mathbf{z}} \tag{73}$$

$$= \boxed{x^2(y + 3z^2)\hat{\mathbf{x}} + 2xz(3z^2 - 2y)\hat{\mathbf{y}} - 3x^2z\hat{\mathbf{z}}} \tag{74}$$

Problema 1.36 Griffiths - Resolução

(a) **Demonstre que**

$$\int_S f(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_S[\mathbf{A}\times(\nabla f)]\cdot d\mathbf{a} + \oint_P f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{75}$$

(b) **Demonstre que**

$$\int_V \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})\,d\tau = \int_V \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\,d\tau + \oint_S(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{a}. \tag{76}$$

Parte (a)

Queremos demonstrar que:

$$\int_S f(\nabla\times\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_S[\mathbf{A}\times(\nabla f)]\cdot d\mathbf{a} + \oint_P f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{l}. \tag{77}$$

Utilizamos a identidade do produto vetorial para o rotacional:

$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f). \tag{78}$$

Integrando ambos os lados sobre a superfície S:

$$\int_S \nabla\times(f\mathbf{A})\cdot d\mathbf{a} = \int_S [f(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\times(\nabla f)]\cdot d\mathbf{a}. \tag{79}$$

Separando os termos da integral:

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \int_S \nabla \times (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{80}$$

Pelo teorema de Stokes:

$$\int_S \nabla \times (f\mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \oint_P f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \tag{81}$$

Substituindo na equação anterior, obtemos:

$$\int_S f(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{a} = \int_S [\mathbf{A} \times (\nabla f)] \cdot d\mathbf{a} + \oint_P f\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \tag{82}$$

O que conclui a demonstração.

Parte (b)

Agora, queremos demonstrar que:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\, d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{83}$$

Utilizamos a identidade vetorial do produto escalar envolvendo o rotacional:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{84}$$

Integrando ambos os lados sobre o volume V:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d\tau = \int_V [\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})]\, d\tau. \tag{85}$$

Separando os termos da integral:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\, d\tau + \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d\tau. \tag{86}$$

Pelo teorema da divergência:

$$\int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})\, d\tau = \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{87}$$

Substituindo na equação anterior, temos:

$$\int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, d\tau = \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})\, d\tau + \oint_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a}. \tag{88}$$

O que conclui a demonstração.

Problema 1.38 Griffiths - Resolução

Expresse os vetores unitários $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ em termos de $\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}$ (ou seja, derive a Eq. 64). Verifique suas respostas de várias formas $\left(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \stackrel{?}{=} 1, \hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} \stackrel{?}{=} 0, \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} \stackrel{?}{=} \hat{\boldsymbol{\phi}}, \dots\right)$.

Também determine as fórmulas inversas, expressando $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ em termos de $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\theta}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$ (e θ, ϕ).

Teorema Fundamental da Trigometria:

$$\boxed{\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1}$$

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

Vamos definir **r** em termos dos versores x, y e z:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}. \tag{89}$$

Agora **r** em coordernadas esfericas, é:

$$\mathbf{r} = r\sin\theta\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{y}} + r\cos\theta\hat{\mathbf{z}}. \tag{90}$$

Para determinar $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}}$, vamos pensar no seguinte conceito, a variação de r, ou seja, $d\mathbf{r} = \frac{\partial}{\partial r}(\mathbf{r})$ que é um vetor apontando na direção de aumento em r. Com isso, o vetor unitário deve ser dividido pelo módulo de **r**:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|}, \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|}, \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|}. \tag{91}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{92}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r}\right|^2 = \sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi + \cos^2\theta = 1. \tag{93}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + r\cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - r\sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}, \tag{94}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right|^2 = r^2\cos^2\theta\cos^2\phi + r^2\cos^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta = r^2. \tag{95}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -r\sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + r\sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}, \tag{96}$$

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}\right|^2 = r^2\sin^2\theta\sin^2\phi + r^2\sin^2\theta\cos^2\phi = r^2\sin^2\theta. \tag{97}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\,\hat{\mathbf{z}}, \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}. \end{cases} \tag{98}$$

Verificação:

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = \sin^2\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) + \cos^2\theta = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \checkmark \tag{99}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \quad \checkmark \tag{100}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\phi}} = \sin^2\phi + \cos^2\phi = 1, \quad \checkmark \tag{101}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = \sin\theta\cos\theta(\cos^2\phi + \sin^2\phi) - \sin\theta\cos\theta = 0, \quad \checkmark \tag{102}$$

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\theta\cos\phi\sin\phi + \sin\theta\sin\phi\cos\phi = 0, \quad \checkmark \tag{103}$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} \cdot \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\cos\theta\sin\phi\cos\phi + \cos\theta\sin\phi\cos\phi = 0, \quad \checkmark \tag{104}$$

Conversão inversa:
Multiplicando equação $\hat{\mathbf{r}}$ em 98 por $\sin\theta$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em 98 por $\cos\theta$:

$$\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} = \sin^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin^2\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} + \sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{105}$$

$$\cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos^2\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos^2\theta\sin\phi\,\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\cos\theta\,\hat{\mathbf{z}}. \tag{106}$$

Somando as expressões acima:

$$\sin\theta\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = +\cos\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{107}$$

$$\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\,\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{y}}. \tag{108}$$

Multiplicando a equação anterior por $\cos\phi$ e a seguinte por $\sin\phi$, e subtraindo:

$$\hat{\mathbf{x}} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\cos\phi\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - \sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{109}$$

Multiplicando equação (107) por $\sin\phi$ e a equação 108 por $\cos\phi$:

$$\sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} = +\cos\phi\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\sin\phi\hat{\mathbf{y}}. \tag{110}$$

$$\cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\cos\phi\hat{\mathbf{y}}. \tag{111}$$

somar as equações (110) e (111):

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin\theta\sin\phi\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\sin\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}. \tag{112}$$

Multiplicando equação $\hat{\mathbf{r}}$ em 98 por $\cos\theta$ e $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ em 98 por $\sin\theta$:

$$\cos\theta\,\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta\cos\phi\cos\theta\hat{\mathbf{x}} + \sin\theta\sin\phi\cos\theta\hat{\mathbf{y}} + \cos^2\theta\hat{\mathbf{z}} \tag{113}$$

$$\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta\cos\phi\sin\theta\hat{\mathbf{x}} + \cos\theta\sin\phi\sin\theta\hat{\mathbf{y}} - \sin^2\theta\hat{\mathbf{z}} \tag{114}$$

Subtrair a equação 113 e da equação 114:

$$\hat{\mathbf{z}} = \cos\theta\hat{\mathbf{r}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} \tag{115}$$

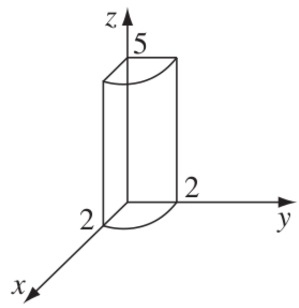


Figure 2: Coordenadas cilíndricas

Problema 1.42 Griffiths - Resolução

Expresse os vetores unitários cilíndricos $\hat{s}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ em termos de $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ (ou seja, derive a Eq. 75). "Inverta" suas fórmulas para obter $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ em termos de $\hat{s}$, $\hat{\phi}$, $\hat{z}$ (e ϕ).

Os vetores unitários do sistema cilíndrico são definidos como:

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}} \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \tag{116}$$

Determinar $\hat{\mathbf{y}}$ em função $\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ em 116, podemos multiplicar por $\sin\phi$ e $\cos\phi$, respectivamente:

$$\textbf{Somar} \begin{cases} \sin\phi\hat{\mathbf{s}} = \cos\phi\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin^2\phi\hat{\mathbf{y}}, \\ \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin\phi\cos\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos^2\phi\hat{\mathbf{y}}. \end{cases} \tag{117}$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}, \tag{118}$$

Agora para $\hat{\mathbf{x}}$, em $\hat{\mathbf{s}}$ e $\hat{\boldsymbol{\phi}}$ em 116, podemos multiplicar por $\cos\phi$ e $\sin\phi$, respectivamente:

$$\textbf{Subtrair} \begin{cases} \cos\phi\hat{\mathbf{s}} = \cos^2\phi\hat{\mathbf{x}} + \sin\phi\cos\phi\hat{\mathbf{y}} \\ \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} = -\sin^2\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\sin\phi\hat{\mathbf{y}} \end{cases} \tag{119}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} \tag{120}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \cos\phi\hat{\mathbf{s}} - \sin\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}, \\ \hat{\mathbf{y}} = \sin\phi\hat{\mathbf{s}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}, \\ \hat{\boldsymbol{z}} = \hat{\boldsymbol{z}}. \end{cases} \tag{121}$$

Problema 1.44 Griffiths - Resolução

A função delta de Dirac unidimensional, $\delta(x)$, pode ser representada como um pico infinitamente alto e infinitesimalmente estreito, com área igual a 1. Ou seja:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \tag{122}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1. \tag{123}$$

$$\delta(x-a) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{if } x \neq a \\ \infty, & \text{if } x = a \end{array} \right\} \text{ with } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)dx = 1 \tag{124}$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \tag{125}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a) \tag{126}$$

Usamos a propriedade da função delta de Dirac:

$$\int_a^b f(x)\delta(x-c)dx = f(c), \quad \text{se } c \text{ estiver no intervalo } [a,b]. \tag{127}$$

(a)

$$\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)dx = 3(3)^2 - 2(3) - 1 = 27 - 6 - 1 = 20. \tag{128}$$

(b) Como $\pi \in [0,5]$, temos:

$$\int_0^5 \cos x \delta(x-\pi)dx = \cos\pi = -1. \tag{129}$$

(c) Como $-1 \notin [0,3]$, temos:

$$\int_0^3 x^3\delta(x+1)dx = 0. \tag{130}$$

(d) Selecionamos $x = -2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)dx = \ln(1) = 0. \tag{131}$$

Problema 1.45 Griffiths - Resolução

(a) Como $\delta(3x) = \frac{1}{3}\delta(x)$:

$$\int_{-2}^{2} (2x+3)\delta(3x)dx = \frac{1}{3}(2(0)+3) = \frac{3}{3} = 1. \tag{132}$$

(b) Selecionamos $x = 1$:

$$\int_0^2 (x^3 + 3x + 2)\delta(1-x)dx = 1^3 + 3(1) + 2 = 6. \tag{133}$$

(c) Como $3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1/3$:

$$\int_{-1}^{1} 9x^2\delta(3x+1)dx = 9\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \tag{134}$$

(d) A integral vale:

$$\int_{-\infty}^{a} \delta(x-b)dx = \begin{cases} 1, & \text{se } a > b \\ 0, & \text{se } a < b \end{cases}. \tag{135}$$

Problema 1.46 Griffiths - Resolução

(a) Mostre que:

$$\boxed{x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x)} \tag{136}$$

Vamos começar com:

$$\frac{d}{dx}\left[xf(x)\delta(x)\right] = \frac{d}{dx}\left(xf(x)\right)\delta(x) + f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right] \tag{137}$$

$$f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[xf(x)\delta(x)\right] - f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right] \tag{138}$$

Integrando ambos os lados sobre o intervalo $[-\infty, \infty]$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right]dx = xf(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(xf(x))\delta(x)dx. \tag{139}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\delta(x)dx = xf(x)\delta(x)|_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{140}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right]dx = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dx}(xf(x))\delta(x)dx. \tag{141}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(xf(x)) = x\frac{df}{dx} + \frac{dx}{dx}f = x\frac{df}{dx} + f.} \tag{142}$$

Usando a equação 142 na equação 141, temos:

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{df}{dx} + f\right)\delta(x)dx = \cancelto{0}{\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{df(x)}{dx}\delta(x)dx} + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \tag{143}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty}\left(x\frac{df}{dx} + f\right)\delta(x)dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \tag{144}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right]dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx \tag{145}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[x\frac{d}{dx}\delta(x)\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[-\delta(x)]dx \tag{146}$$

$$\boxed{x\frac{d}{dx}\delta(x) = -\delta(x) \quad \textbf{qed}} \tag{147}$$

(b) Mostre que:

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)} \tag{148}$$

Vamos começar com:

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)\theta(x)\right] = \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]\theta(x) + f(x)\left[\frac{d\theta}{dx}\right] \tag{149}$$

$$f(x)\left[\frac{d\theta}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[f(x)\theta(x)\right] - \left[\frac{d}{dx}f(x)\right]\theta(x) \tag{150}$$

Integrando ambos os lados sobre o intervalo $[-\infty, \infty]$, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{d\theta}{dx}\right]dx = f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\theta(x)dx \tag{151}$$

A função $\theta(x)$ é a **função degrau de Heaviside**, definida como:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{152}$$

$$f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{\infty} = f(\infty) \tag{153}$$

Como a função $\theta(x)$ é zero para $x < 0$, temos que a integral de $f(x)\theta(x)$ sobre o intervalo $[-\infty, 0]$ resulta em zero. Agora, devido a $\theta(x)$ ser zero para $x < 0$, temos que integrar sobre o intervalo $[0, \infty]$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\theta(x)dx = \int_{0}^{\infty} \frac{df(x)}{dx}dx = f(\infty) - f(0) \tag{154}$$

$$f(x)\theta(x)|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df}{dx}\theta(x)dx = f(\infty) - (f(\infty) - f(0)) = f(0) \tag{155}$$

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx. \tag{156}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left[\frac{d\theta}{dx}\right]dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx. \tag{157}$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dx} = \delta(x)} \tag{158}$$

Problema 1.47 Griffiths - Resolução

(a) Escreva uma expressão para a densidade de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$ de uma carga pontual q na posição $\mathbf{r}'$. Certifique-se de que a integral de volume de ρ resulte em q.

A densidade de carga volumétrica $\rho(\mathbf{r})$ de uma carga pontual q na posição $\mathbf{r}'$, ou seja, definido atráves da função delta de Dirac:

$$\boxed{\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right).} \tag{159}$$

Com a densidade de carga $\rho(\mathbf{r})$ pode calcular a carga total da região de interesse, fazendo a integração de volume sobre todo o espaço:

$$\boxed{Q = \int \rho(\mathbf{r})d\tau = q\int \delta^3\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}'\right)d\tau = q.} \tag{160}$$

(b) Qual é a densidade de carga volumétrica de um dipolo elétrico, consistindo em uma carga pontual $-q$ na origem e uma carga pontual $+q$ na posição $\mathbf{a}$?

$$\rho(\mathbf{r}) = q\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a}) - q\delta^3(\mathbf{r}) \tag{161}$$

(c) Qual é a densidade de carga volumétrica (em coordenadas esféricas) de uma casca esférica uniforme, infinitesimalmente fina, com raio R e carga total Q, centrada na origem? *(Atenção: a integral sobre todo o espaço deve resultar em Q.)*

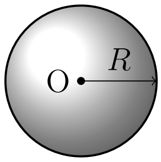


Figure 3: Casca esférica uniforme com raio R e carga total Q.

Podemos definir a densidade de carga volumétrica como:

$$\rho(r) = A\delta(r - R) \tag{162}$$

Para determinar A precisamos calcular a integração de volume sobre toda a esfera. Usando a formulação de integral de volume de uma esfera:

$$Q = \int \rho d\tau = \int A\delta(r - R)4\pi r^2 dr = A4\pi R^2. \tag{163}$$

Então,

$$A = \frac{Q}{4\pi R^2}\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r - R). \tag{164}$$

$$\boxed{\rho(r) = \frac{Q}{4\pi R^2}\delta(r - R).} \tag{165}$$

Problema 1.48 Griffiths - Resolução

(a) A função delta de Dirac satisfaz a propriedade de seleção:

$$\int f(\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a})\, d\tau = f(\mathbf{a}). \tag{166}$$

Aplicando essa propriedade:

$$\int (r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + a^2)\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a})\, d\tau = a^2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + a^2 = 3a^2. \tag{167}$$

(b) Dentro do volume $\mathcal{V}$, que é um cubo centrado na origem, a integral da função delta será não nula apenas se o ponto $\mathbf{b} = 4\hat{\mathbf{y}} + 3\hat{\mathbf{z}}$ estiver dentro do cubo de lado 2 (ou seja, se $-1 \leq x, y, z \leq 1$). Como $\mathbf{b}$ não está dentro desse intervalo, temos:

$$\int_{\mathcal{V}} |\mathbf{r} - \mathbf{b}|^2 \delta^3(5\mathbf{r})\, d\tau = 0. \tag{168}$$

(c) Usamos a propriedade de seleção da delta de Dirac:

$$\int_{\mathcal{V}} \left[r^4 + r^2(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c}) + c^4\right] \delta^3(\mathbf{r}-\mathbf{c})\, d\tau. \tag{169}$$

Como $\mathcal{V}$ é uma esfera de raio 6 e $\mathbf{c} = 5\hat{\mathbf{x}} + 3\hat{\mathbf{y}} + 2\hat{\mathbf{z}}$, verificamos que o módulo de $\mathbf{c}$ é:

$$|\mathbf{c}| = \sqrt{5^2+3^2+2^2} = \sqrt{25+9+4} = \sqrt{38} \approx 6.16. \tag{170}$$

Como $|\mathbf{c}| > 6$, o ponto $\mathbf{c}$ está fora da esfera, então a integral é **zero**.

(d) Similarmente, aplicamos a propriedade da função delta:

$$\int_{\mathcal{V}} \mathbf{r}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{r})\delta^3(\mathbf{e}-\mathbf{r})\, d\tau. \tag{171}$$

Avaliamos em $\mathbf{e} = (3,2,1)$:

$$\mathbf{e}\cdot(\mathbf{d}-\mathbf{e}) = (3,2,1)\cdot[(1,2,3)-(3,2,1)]. \tag{172}$$

Calculando o vetor diferença:

$$\mathbf{d}-\mathbf{e} = (1-3, 2-2, 3-1) = (-2,0,2). \tag{173}$$

Produto escalar:

$$(3,2,1)\cdot(-2,0,2) = 3(-2)+2(0)+1(2) = -6+0+2 = -4. \tag{174}$$

Como a esfera de raio 1.5 está centrada em $(2,2,2)$, verificamos se $\mathbf{e} = (3,2,1)$ está dentro dela:

$$\sqrt{(3-2)^2+(2-2)^2+(1-2)^2} = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41. \tag{175}$$

Como $1.41 < 1.5$, $\mathbf{e}$ está dentro da esfera, então a integral resulta em: -4.

Problema 1.49 Griffiths - Resolução

$$J = \int_{\mathcal{V}} e^{-r}\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) d\tau \tag{176}$$

onde $\mathcal{V}$ é uma esfera de raio R, centrada na origem, utilizando dois métodos diferentes, como no Ex. 16.

Vamos utilizar a equação 1.99 (Griffiths, quarta edição) para calcular a integral:

$$\nabla\cdot\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(\mathbf{r}) \tag{177}$$

$$J = \int e^{-r}\left(4\pi\boldsymbol{\delta}^3(\mathbf{r})\right) d\tau = 4\pi e^{-0} = 4\pi \quad \checkmark \tag{178}$$

ou com equação 1.59 para calcular a integração por partes:

$$\int_{\mathcal{V}} f\,(\nabla\cdot\mathbf{A})\, d\tau = -\int_{\mathcal{V}} \mathbf{A}\cdot(\nabla f)\, d\tau + \oint_{S} f\mathbf{A}\cdot d\mathbf{a}. \tag{179}$$

Como isso, temos:

$$\int_{\mathcal{V}} e^{-r}\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)d\tau = -\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot(\nabla(e^{-r}))\,d\tau + \oint_S (e^{-r})\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot d\mathbf{a}, \tag{180}$$

Logo, a integral da J:

$$J = \int_{\mathcal{V}} e^{-r}\left(\nabla\cdot\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\right)d\tau = -\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot(\nabla(e^{-r}))\,d\tau + \oint_S (e^{-r})\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot d\mathbf{a}. \tag{181}$$

$$J = -\int_{\mathcal{V}}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot\nabla(e^{-r})\,d\tau + \oint_{\mathcal{S}} e^{-r}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot d\mathbf{a}.$$

Mas

$$\nabla(e^{-r}) = \left(\frac{\partial}{\partial r}e^{-r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -e^{-r}\hat{\mathbf{r}}.$$

$$= \int_0^R \frac{1}{r^2}e^{-r}4\pi r^2\,dr + \int e^{-R}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\cdot r^2\sin\theta\,d\theta\,d\phi\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$= 4\pi\int_0^R e^{-r}\,dr + e^{-R}\int\sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= 4\pi\left(-e^{-r}\right)\Big|_0^R + 4\pi e^{-R} = 4\pi(-e^{-R}+e^0) + 4\pi e^{-R} = 4\pi. \quad \checkmark$$

$$(\text{Aqui } R=\infty,\ \text{logo } e^{-R}=0.)$$

Problema 1.51 Griffiths - Resolução

(d) $\Rightarrow$ (a): $\nabla\times\mathbf{F} = \nabla\times(-\nabla U) = 0$ (Eq. 1.44 – curl of gradient is always zero).

(a) $\Rightarrow$ (c): $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{a} = 0$ (Eq. 1.57 – Stokes' theorem).

(c) $\Rightarrow$ (b): $\int_a^b\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} - \int_a^b\mathbf{F}_{II}\cdot d\mathbf{l} = \int_a^b\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} + \int_b^a\mathbf{F}_{II}\cdot d\mathbf{l} = \oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = 0$, so

$$\int_a^b\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l} = \int_a^b\mathbf{F}_{II}\cdot d\mathbf{l}.$$

(b) $\Rightarrow$ (c): same as (c) $\Rightarrow$ (b), only in reverse;

(c) $\Rightarrow$ (a): same as (a) $\Rightarrow$ (c).

Problema 1.52 Griffiths - Resolução

(d) $\Rightarrow$ (a): $\nabla\cdot\mathbf{F} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{W}) = 0$ (Eq. 1.46 – divergence of curl is always zero).

(a) $\Rightarrow$ (c): $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int(\nabla\cdot\mathbf{F})\,d\tau = 0$ (Eq. 1.56 – divergence theorem).

(c) $\Rightarrow$ (b): $\int_I\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} - \int_{II}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = 0$, so

$$\int_I\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a} = \int_{II}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}.$$

(Note: sign change because for $\oint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{a}$, da is outward, whereas for surface II it is inward.)

(b) $\Rightarrow$ (c): same as (c) $\Rightarrow$ (b), in reverse; (c) $\Rightarrow$ (a): same as (a) $\Rightarrow$ (c).

Problema 1.62 Griffiths - Resolução

(a) $d\mathbf{a} = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{r}}$. Let the surface be the northern hemisphere. The $\hat{\mathbf{x}}$ and $\hat{\mathbf{y}}$ components clearly integrate to zero, and the $\hat{\mathbf{z}}$ component of $\hat{\mathbf{r}}$ is $\cos\theta$, so

$$\mathbf{a} = \int R^2 \sin\theta\cos\theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{\mathbf{z}} = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos\theta \, d\theta = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} \, d\theta$$

$$\mathbf{a} = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} \, d\theta = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \left[-\frac{\cos 2\theta}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2}$$

$$\mathbf{a} = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \left[-\frac{\cos\pi}{4} + \frac{\cos 0}{4} \right] = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right] = 2\pi R^2 \hat{\mathbf{z}} \left[\frac{1}{2} \right] = \pi R^2 \hat{\mathbf{z}}.$$

(b) Let $T = 1$ in Prob. 1.61(a). Then $\nabla T = 0$, so $\oint d\mathbf{a} = 0$. qed

(c) This follows from (b). For suppose $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$; then if you put them together to make a closed surface,

$$\oint d\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 \neq 0.$$

(d) For one such triangle, $d\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{l})$ (since $\mathbf{r} \times d\mathbf{l}$ is the area of the parallelogram, and the direction is perpendicular to the surface), so for the entire conical surface,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} \oint \mathbf{r} \times d\mathbf{l}.$$

(e) Show that

$$\oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{l} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Let $T = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$, and use product rule #4:

$$\nabla T = \nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \times (\nabla \times \mathbf{r}) + (\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r}.$$

But $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, and $(\mathbf{c} \cdot \nabla)\mathbf{r} = (c_x \frac{\partial}{\partial x} + c_y \frac{\partial}{\partial y} + c_z \frac{\partial}{\partial z})(x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) = c_x\hat{\mathbf{x}} + c_y\hat{\mathbf{y}} + c_z\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{c}$. So Prob. 1.61(e) says

$$\oint T \, d\mathbf{l} = \oint (\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) \, d\mathbf{l} = -\int (\nabla T) \times d\mathbf{a} = -\int \mathbf{c} \times d\mathbf{a} = -\mathbf{c} \times \mathbf{a} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}.$$

qed

Problema 1.63 Griffiths - Resolução

Encontrar o divergente de um campo vetorial $\mathbf{v}$ em coordenadas esfericas. Com $\mathbf{v}$ dado por:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{182}$$

O divergente em coordenadas esféricas:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\, v_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\phi}{\partial\phi} \tag{183}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r) = \frac{1}{r^2}.\checkmark \tag{184}$$

Para uma esfera de raio R :

$$\left.\begin{array}{ll} \int \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a} & = \int \left(\frac{1}{R}\hat{\mathbf{r}}\right) \cdot (R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}}) = R \int \sin\theta d\theta d\phi = 4\pi R. \\ (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\tau & = \int \left(\frac{1}{r^2}\right)(r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi) = \left(\int_0^R dr\right)\left(\int \sin\theta d\theta d\phi\right) = 4\pi R. \end{array}\right\} * \tag{185}$$

*Portanto, o teorema da divergência está verificado.
Evidentemente, não há uma função delta na origem.

$$\nabla \cdot (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 r^n\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+2}\right) = \frac{1}{r^2}(n+2) r^{n+1} = (n+2) r^{n-1} \tag{186}$$

exceto para $n = -2$, para o qual já sabemos (Eq. 1.99) que a divergência é $4\pi\delta^3(\mathbf{r})$.
(2) Geometricamente, deve ser zero. Da mesma forma, o rotacional em coordenadas esféricas obviamente resulta em zero. Para garantir que não há uma função delta oculta, integramos sobre uma esfera de raio R, usando o Problema 1.61(b): Se

$$\nabla \times (r^n \hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0} \tag{187}$$

então

$$\int (\nabla \times \mathbf{v}) d\tau = \mathbf{0} \stackrel{?}{=} -\oint \mathbf{v} \times d\mathbf{a} \tag{188}$$

Mas

$$\mathbf{v} = r^n \hat{\mathbf{r}} \tag{189}$$

e

$$d\mathbf{a} = R^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{\mathbf{r}} \tag{190}$$

estão ambos na direção de $\hat{\mathbf{r}}$, logo:

$$\mathbf{v} \times d\mathbf{a} = \mathbf{0}.\checkmark \tag{191}$$