Notas: Função

André V. Silva

2 de dezembro de 2025

Enunciado

A trajetória de um salto de um golfinho nas proximidades de uma praia, do instante em que ele saiu da água ($t = 0$) até o instante em que mergulhou ($t = T$), foi descrita por um observador através do seguinte modelo matemático:

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t},$$

com t em segundos, $h(t)$ em metros e $0 \leq t \leq T$. O tempo, em segundos, em que o golfinho esteve fora da água durante este salto foi:

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 10

Resolução detalhada

O golfinho está fora da água sempre que $h(t) > 0$. Sabemos que $h(0) = 0$, portanto o instante inicial é $t = 0$. Para descobrir quando ele volta a mergulhar, devemos encontrar o próximo instante $T > 0$ tal que

$$h(t) = 4t - t \cdot 2^{0,2t} = 0.$$

Primeiro, fatoramos t:

$$h(t) = t\left(4 - 2^{0,2t}\right).$$

Igualando a zero:

$$t\left(4 - 2^{0,2t}\right) = 0.$$

Daí, temos duas possibilidades:

$$t = 0 \quad \text{ou} \quad 4 - 2^{0,2t} = 0.$$

A segunda equação fornece o tempo de mergulho:

$$4 = 2^{0,2t}.$$

Como $4 = 2^2$, obtemos:

$$2^{0,2t} = 2^2.$$

Igualando os expoentes:

$$0,2t = 2.$$

Resolvendo para t:

$$t = \frac{2}{0,2} = 10.$$

Portanto, o golfinho permaneceu fora da água durante:

$$T = 10 \text{ segundos}.$$

Logo, a alternativa correta é **(e) 10**.

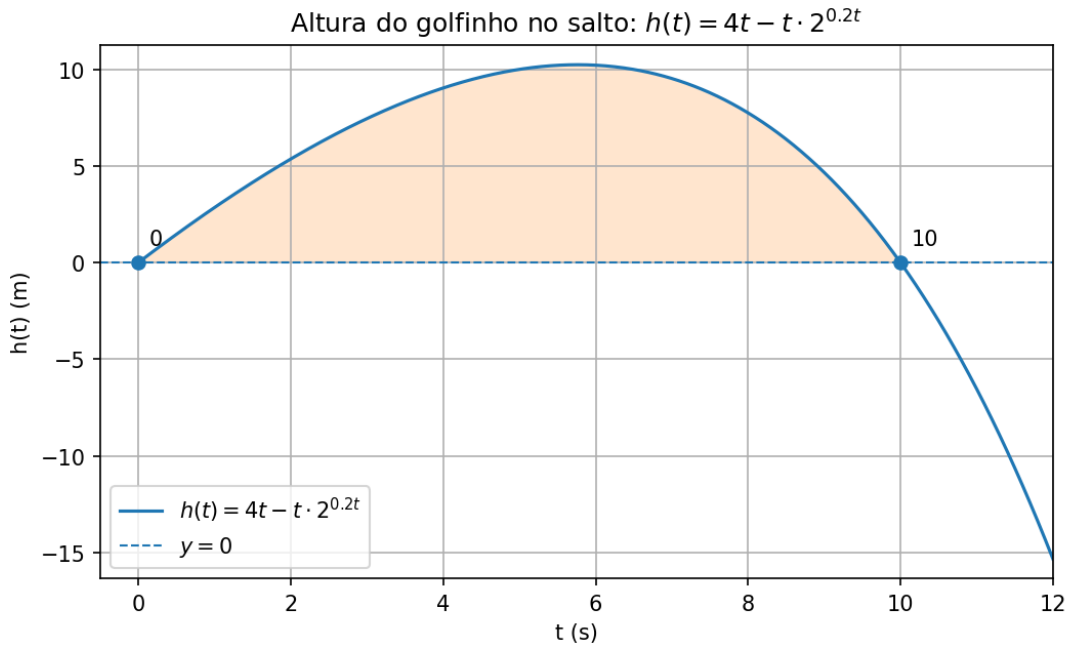


Figura 1: função do 2 Grau para altura do saldo do golfinho

Enunciado

Resolver a inequação:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3} \leq \frac{1}{3}.$$

Resolução

Escrevemos o número do lado direito como potência da mesma base:

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1.$$

Como $0 < \frac{1}{3} < 1$, a função a^x é decrescente. Assim,

$$\left(\tfrac{1}{3}\right)^A \leq \left(\tfrac{1}{3}\right)^B \iff A \geq B.$$

Aplicando à inequação:

$$x^2 - 3 \geq 1.$$

Logo:

$$x^2 \geq 4.$$

Portanto:

$$x \leq -2 \quad \text{ou} \quad x \geq 2.$$

A solução é:

$$\boxed{x \leq -2 \text{ ou } x \geq 2}.$$

Gráfico da função $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3}$

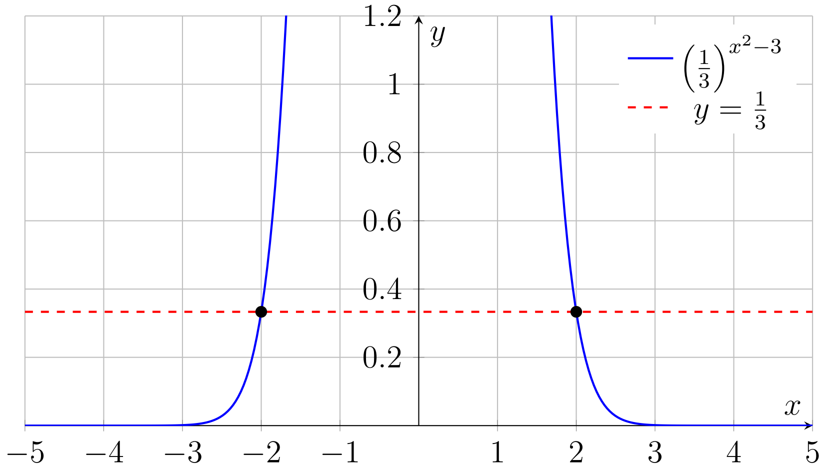
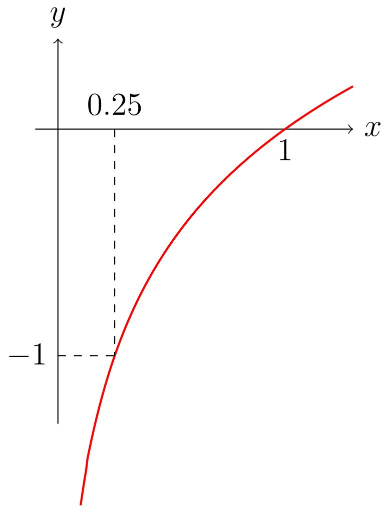


Gráfico da função $y = \log_4(x)$



Sabemos que o gráfico representa a função $y = \log_b(x)$.

Observe que o ponto destacado na figura é

$$(0{,}25,\ -1).$$

Isso significa que

$$\log_b(0{,}25) = -1.$$

Usando a definição de logaritmo:

$$\log_b(0{,}25) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad b^{-1} = 0{,}25.$$

Mas

$$0{,}25 = \frac{1}{4}.$$

Logo,

$$b^{-1} = \frac{1}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad b = 4.$$

$$\boxed{b = 4}$$

Resoluções – Questões de Funções Quadráticas

Questão 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = x^2 - 18x + 65.$$

(a) Resolva a inequação $f(x) \leq 0$.

- Primeiro encontramos as raízes da equação quadrática $f(x) = 0$:

$$x^2 - 18x + 65 = 0.$$

Calcule o discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 65 = 324 - 260 = 64.$$

- Raízes:

$$x = \frac{18 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{18 \pm 8}{2}.$$

Assim

$$x_1 = \frac{18-8}{2} = 5, \qquad x_2 = \frac{18+8}{2} = 13.$$

- Como o coeficiente $a = 1 > 0$, a parábola abre para cima; portanto $f(x) \leq 0$ entre as raízes:

$$\boxed{5 \leq x \leq 13\,.}$$

(b) Determine a ordenada do vértice (y_V) diretamente pela fórmula.

Para um polinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, a ordenada do vértice pode ser calculada por

$$y_V = f\left(-\frac{b}{2a}\right).$$

Aqui $a = 1$ e $b = -18$, então a abscissa do vértice é

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-18}{2 \cdot 1} = \frac{18}{2} = 9.$$

Calcule $y_V = f(9)$:

$$y_V = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

Logo,

$$\boxed{y_V = -16\,.}$$

(c) Confirme o resultado determinando primeiro x_V e depois impondo que y_V seja imagem de x_V por f.

- Já calculamos $x_V = 9$.

- Agora avaliamos $f(9)$ (repetindo o cálculo da forma indicada):

$$f(9) = 9^2 - 18 \cdot 9 + 65 = 81 - 162 + 65 = -16.$$

- Assim confirma-se que a ordenada do vértice é $y_V = -16$, exatamente como em (b).

Questão 3

Uma função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem seu gráfico passando pelos pontos $(-3, 0)$, $(11, 0)$ e $(1, -80)$.

(a) Determine essa função, em forma fatorada.

- Como a função anula em $x = -3$ e $x = 11$, a forma fatorada é

$$f(x) = k(x + 3)(x - 11),$$

em que k é uma constante multiplicativa a determinar.

- Use o ponto $(1, -80)$ para achar k:

$$-80 = f(1) = k(1 + 3)(1 - 11) = k \cdot 4 \cdot (-10) = k \cdot (-40).$$

- Logo $k = \dfrac{-80}{-40} = 2$.
- Portanto a função é

$$\boxed{f(x) = 2(x + 3)(x - 11)}$$

que, desenvolvida, é

$$f(x) = 2\left(x^2 - 8x - 33\right) = 2x^2 - 16x - 66.$$

(b) Essa função tem valor máximo ou mínimo para seu conjunto imagem? Justifique e determine-o.

- O coeficiente quadrático é $a = 2 > 0$, portanto a parábola abre para cima e a função possui *valor mínimo* (não máximo).
- A abscissa do vértice é

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{-16}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4.$$

- A ordenada do vértice (valor mínimo) é

$$y_V = f(4) = 2(4+3)(4-11) = 2 \cdot 7 \cdot (-7) = 2 \cdot (-49) = -98.$$

(Ou usando a forma desenvolvida: $f(4) = 2 \cdot 16 - 16 \cdot 4 - 66 = 32 - 64 - 66 = -98$.)

- Portanto o valor mínimo é $\boxed{y_{\min} = -98}$ atingido em $x = 4$.

Resumo das respostas:

- Questão 2: (a) $5 \leq x \leq 13$. (b) $y_V = -16$. (c) Confirmação mostrando $x_V = 9$ e $f(9) = -16$.
- Questão 3: (a) $f(x) = 2(x+3)(x-11)$. (b) Valor mínimo $y_{\min} = -98$ em $x = 4$.

Questão 1

a) $\sqrt{21 - x} = 9 + x$

Primeiro, observamos o domínio:

$$21 - x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq 21.$$

Além disso, o lado direito deve ser não negativo:

$$9 + x \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \geq -9.$$

Logo, o domínio é:

$$-9 \leq x \leq 21.$$

Elevamos ambos os lados ao quadrado:

$$21 - x = (9 + x)^2.$$

Desenvolvendo:

$$21 - x = 81 + 18x + x^2.$$

Trazendo tudo para o mesmo lado:

$$0 = x^2 + 19x + 60.$$

Fatorando:

$$x^2 + 19x + 60 = (x + 4)(x + 15).$$

Assim:

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = -15.$$

Agora testamos no domínio:
$x = -4$: $\sqrt{21 - (-4)} = \sqrt{25} = 5$ e $9 + (-4) = 5$
$x = -15$: $\sqrt{21 - (-15)} = \sqrt{36} = 6$ mas $9 + (-15) = -6$ (negativo $\Rightarrow$ impossível)
Portanto, a solução é:

$$\boxed{\{-4\}}.$$

b) $\sqrt{5x + 1} = \sqrt{4x - 3} + 1$

Domínios:

$$5x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\tfrac{1}{5},$$

$$4x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \tfrac{3}{4}.$$

Portanto, o domínio é:

$$x \geq \frac{3}{4}.$$

Isolamos uma das raízes:

$$\sqrt{5x + 1} - 1 = \sqrt{4x - 3}.$$

Elevamos ao quadrado:

$$(\sqrt{5x+1}-1)^2 = 4x-3.$$

Desenvolvendo:

$$(5x+1) - 2\sqrt{5x+1} + 1 = 4x-3.$$

Simplificando:

$$5x + 2 - 2\sqrt{5x+1} = 4x - 3.$$

$$x + 5 = 2\sqrt{5x+1}.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$(x+5)^2 = 4(5x+1).$$

Expansão:

$$x^2 + 10x + 25 = 20x + 4.$$

Reorganizando:

$$x^2 - 10x + 21 = 0.$$

Fatorando:

$$x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7).$$

Logo:

$$x = 3 \quad \text{ou} \quad x = 7.$$

Ambos satisfazem o domínio $x \geq \frac{3}{4}$. Testando:

- $x = 3$: LHS: $\sqrt{5 \cdot 3 + 1} = \sqrt{16} = 4$ RHS: $\sqrt{12-3} + 1 = 3 + 1 = 4$

- $x = 7$: LHS: $\sqrt{36} = 6$ RHS: $\sqrt{28-3} + 1 = 5 + 1 = 6$

Portanto:

$$\boxed{\{3, 7\}}.$$

Enunciado:

Sejam as funções f e g de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definidas por

$$f(x) = x^2 - 4x + 10 \qquad \text{e} \qquad g(x) = -5x + 20.$$

Calcule o valor de

$$\frac{(f(4))^2 - g\big(f(4)\big)}{f(0) - g\big(f(0)\big)}.$$

Resolução:

Primeiro calculamos $f(4)$ e $f(0)$.

$$f(4) = 4^2 - 4 \cdot 4 + 10 = 16 - 16 + 10 = 10.$$

$$f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 10 = 10.$$

Agora calculamos $g\big(f(4)\big)$ e $g\big(f(0)\big)$. Note que $f(4) = f(0) = 10$, então ambos os valores de g serão iguais:

$$g\big(f(4)\big) = g(10) = -5 \cdot 10 + 20 = -50 + 20 = -30,$$

$$g\big(f(0)\big) = g(10) = -30.$$

Substituímos estes resultados na expressão pedida:

$$\frac{(f(4))^2 - g\big(f(4)\big)}{f(0) - g\big(f(0)\big)} = \frac{10^2 - (-30)}{10 - (-30)} = \frac{100 + 30}{10 + 30} = \frac{130}{40}.$$

Simplificando a fração:

$$\frac{130}{40} = \frac{13}{4} = 3{,}25.$$

Solução:

O valor da expressão é $\boxed{\frac{13}{4}}$ (ou 3,25).

Questão 53

Sejam $f(x) = 4^x$ e $g(x) = 1{,}5x$. Então a função composta $f \circ g$ tem lei:

$$(f \circ g)(x) = f\Big(g(x)\Big).$$

Calculamos:

$$g(x) = 1{,}5x = \frac{3}{2}x.$$

Logo

$$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{3}{2}x\right) = 4^{\frac{3}{2}x}.$$

Reescrevendo a potência:

$$4^{\frac{3}{2}x} = \left(4^{\frac{3}{2}}\right)^x.$$

Agora calculamos $4^{3/2}$:

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{1/2}\right)^3 = (\sqrt{4})^3 = 2^3 = 8.$$

Portanto

$$(f \circ g)(x) = 8^x.$$

Resposta: alternativa (**e**), $f \circ g(x) = 8^x$.

Questão 54

Considere as funções $g(x) = 4x + 5$ e $h(x) = 3x - 2$, definidas em $\mathbb{R}$. Um estudante que resolve corretamente a equação

$$g\Big(h(x)\Big) + h\Big(g(x)\Big) = g\Big(h(2)\Big) - h\Big(g(0)\Big)$$

encontra para x o valor:

Primeiro calculemos $g(h(x))$ e $h(g(x))$.

$$h(x) = 3x - 2 \quad \Rightarrow \quad g\Big(h(x)\Big) = g(3x - 2) = 4(3x - 2) + 5 = 12x - 8 + 5 = 12x - 3.$$

$$g(x) = 4x + 5 \quad \Rightarrow \quad h\big(g(x)\big) = h(4x+5) = 3(4x+5) - 2 = 12x + 15 - 2 = 12x + 13.$$

Somando:

$$g\big(h(x)\big) + h\big(g(x)\big) = (12x - 3) + (12x + 13) = 24x + 10.$$

Agora o lado direito da equação:

$$h(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 6 - 2 = 4 \quad \Rightarrow \quad g(h(2)) = g(4) = 4 \cdot 4 + 5 = 16 + 5 = 21.$$

$$g(0) = 4 \cdot 0 + 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad h(g(0)) = h(5) = 3 \cdot 5 - 2 = 15 - 2 = 13.$$

Logo

$$g(h(2)) - h(g(0)) = 21 - 13 = 8.$$

Igualando os dois lados:

$$24x + 10 = 8 \quad \Rightarrow \quad 24x = 8 - 10 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2}{24} = -\frac{1}{12}.$$

Resposta: alternativa (**c**), $x = -\dfrac{1}{12}$.

Questão - 55

Enunciado

Seja a função f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 7, & \text{se } x \le 5, \\ 18 - 3x, & \text{se } x > 5. \end{cases}$$

O valor de

$$f\big(f(6)\big) - f\big(f(0)\big)$$

é igual a:

(A) 26

(B) 39

(C) -13

(D) -28

(E) 14

Solução:

Calculamos passo a passo.

1. Primeiro $f(6)$. Como $6 > 5$, usamos a segunda regra:

$$f(6) = 18 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0.$$

2. Então $f\big(f(6)\big) = f(0)$. Para 0 aplicamos a primeira regra ($0 \leq 5$):

$$f(0) = 2 \cdot 0 - 7 = -7.$$

Logo $f\big(f(6)\big) = -7$.

3. Agora $f(0)$ já calculado é -7. Precisamos de $f\big(f(0)\big) = f(-7)$. Como $-7 \leq 5$, usamos a primeira regra:

$$f(-7) = 2 \cdot (-7) - 7 = -14 - 7 = -21.$$

4. Finalmente:

$$f\big(f(6)\big) - f\big(f(0)\big) = (-7) - (-21) = -7 + 21 = 14.$$

A resposta correta é alternativa **(E) 14**.

Questão - 56

Enunciado

Seja $f(x) = 2x - 3$ e $g\big(f(x)\big) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$. Então $g(5)$ é igual a:

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

Solução:

Queremos determinar a função g (pelo menos em termos gerais) e avaliar $g(5)$.

1. Escrevemos a igualdade dada:

$$g\big(f(x)\big) = f\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

2. Como $f(x) = 2x - 3$, temos $f(x)$ representando o argumento de g. Seja $u = f(x) = 2x - 3$. Podemos expressar x em função de u:

$$u = 2x - 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{u+3}{2}.$$

3. Agora escrevemos o membro direito usando $x = \frac{u+3}{2}$:

$$f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 3 = x + 2 - 3 = x - 1.$$

Substituindo $x = \frac{u+3}{2}$:

$$x - 1 = \frac{u+3}{2} - 1 = \frac{u+3-2}{2} = \frac{u+1}{2}.$$

4. Portanto, para todo u da forma $u = f(x)$ vale

$$g(u) = \frac{u+1}{2}.$$

Isso define g como a função afim $g(t) = \dfrac{t+1}{2}$ (válida para os valores atingidos por f, e que é a extensão natural para todo t).

5. Assim

$$g(5) = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

A resposta correta é alternativa **(B) 3**.

Enunciado

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que

$$g(x) = \pi \cdot f(2x).$$

Então o gráfico de $g(x)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $f(x)$ através de:

(a) uma dilatação horizontal e uma dilatação vertical.

(b) uma dilatação horizontal e uma compressão vertical.

(c) uma compressão horizontal e uma dilatação vertical.

(d) uma compressão horizontal e uma compressão vertical.

(e) uma dilatação horizontal e uma translação vertical.

Solução:

Analisemos separadamente as transformações aplicadas à função $f(x)$.

1. Transformação horizontal

A expressão

$$f(2x)$$

é da forma $f(kx)$ com $k = 2$. Para $k > 1$, ocorre uma **compressão horizontal** pelo fator k, pois a função passa a variar mais rapidamente.

Logo,

$$f(2x) \quad \Rightarrow \quad \text{compressão horizontal por fator 2.}$$

2. Transformação vertical

A expressão

$$\pi \cdot f(2x)$$

multiplica a função por um fator π, e como $\pi > 1$, ocorre uma **dilatação vertical**.

$$\pi \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad \text{dilatação vertical.}$$

Conclusão

O gráfico de $g(x)$ é obtido do gráfico de $f(x)$ aplicando:

$$\text{compressão horizontal} \quad \text{e} \quad \text{dilatação vertical.}$$

A resposta correta é a alternativa **(c)**.

Enunciado

O gráfico da função $f(x)$, definida para todo número real, está representado abaixo:

(gráfico em V, com vértice na origem)

O gráfico que melhor representa a função

$$g(x) = f(x-1) + 2$$

é:

(a) figura a)

(b) figura b)

Solução:

A função original $f(x)$ possui um formato em "V" com vértice em $(0,0)$.

Queremos determinar o efeito das transformações presentes em:

$$g(x) = f(x-1) + 2.$$

1. Translação horizontal

A expressão $f(x-1)$ desloca o gráfico de f para a **direita** de 1 unidade.

Assim, o vértice do "V", que antes estava em $(0,0)$, passa para:

$$(1,0).$$

2. Translação vertical

A soma de 2 unidades:

$$f(x-1)+2$$

desloca o gráfico **para cima** de 2 unidades.

Logo, o vértice, que estava em $(1,0)$, passa para:

$$(1,2).$$

Conclusão

O gráfico de $g(x)$ é o mesmo "V" original, mas agora com vértice no ponto $(1,2)$. A figura que mostra exatamente esse deslocamento é a **alternativa (b)**.

A resposta correta é a alternativa **(b)**.

$$\text{Dada } f(x) = \frac{2x+1}{x-2}, \quad \text{calcule } g(x) = f(f(x))$$

$$g(x) = f\left(\frac{2x+1}{x-2}\right)$$

Substituindo na função:

$$g(x) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) + 1}{\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) - 2}$$

Agora simplificando o numerador:

$$2\left(\frac{2x+1}{x-2}\right) + 1 = \frac{4x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x-2} = \frac{4x+2+x-2}{x-2} = \frac{5x}{x-2}$$

Simplificando o denominador:

$$\frac{2x+1}{x-2} - 2 = \frac{2x+1}{x-2} - \frac{2(x-2)}{x-2} = \frac{2x+1-2x+4}{x-2} = \frac{5}{x-2}$$

Dividindo as frações:

$$g(x) = \frac{\frac{5x}{x-2}}{\frac{5}{x-2}}$$

$$g(x) = \frac{5x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{5}$$

$$g(x) = x$$

$$\boxed{g(x) = x}$$

$$p(x) = \frac{1}{x-2}$$

Domínio:

$$D(p) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

Assíntota vertical:

O denominador se anula em $x = 2$, logo:

$$x = 2 \quad \text{é uma assíntota vertical.}$$

Assíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

Portanto:

$$y = 0 \quad \text{é uma assíntota horizontal.}$$

Comportamento da função:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

Para valores grandes de x:

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = 0^+, \quad \lim_{x \to -\infty} p(x) = 0^-.$$

Interseção com os eixos:

Eixo x:

$$\frac{1}{x-2} = 0 \Rightarrow \text{não existe solução.}$$

Eixo y:

$$p(0) = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusão:

O gráfico é uma hipérbole obtida por uma translação da função

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

2 unidades para a direita, possuindo:

- Assíntota vertical em $x = 2$;
- Assíntota horizontal em $y = 0$;
- Ponto notável em $(0, -\frac{1}{2})$.

$$g(x) = \frac{3x - 1}{x}$$

Separando os termos:

$$g(x) = \frac{3x}{x} - \frac{1}{x}$$

$$g(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

Domínio:

$$D(g) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Assíntota vertical:

$$x = 0$$

Assíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} g(x) = 3 \Rightarrow y = 3$$

Interceptos:

Eixo x:

$$3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

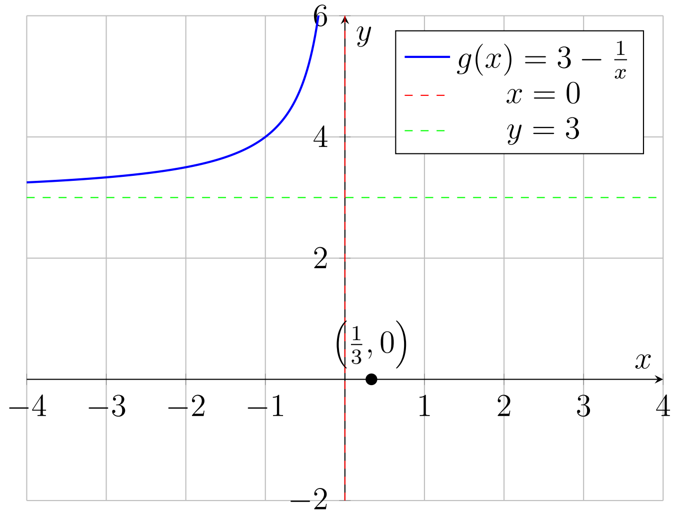
Eixo y: não existe (pois $x = 0$ não pertence ao domínio).

Conclusão:

O gráfico de $g(x)$ é uma hipérbole obtida por transformação da função:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Refletida no eixo x e transladada 3 unidades para cima.



$$h(x) = \frac{x}{x+1}$$

Escrevendo como soma:

$$h(x) = \frac{x+1-1}{x+1}$$

$$h(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Domínio:

$$D(h) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

Assíntota vertical:

$$x = -1$$

Assíntota horizontal:

$$\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 1 \Rightarrow y = 1$$

Interceptos:

Eixo x:

$$h(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

Logo, o ponto é:

$$(0, 0)$$

Eixo y:

$$h(0) = 0$$

Conclusão:

O gráfico de $h(x)$ é uma hipérbole obtida por translação da função:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

1 unidade para a esquerda e reflexão no eixo x.