UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE FÍSICA

Primeira lista complementar de Eletromagnetismo 1

Março de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto
Monitor: Pedro Khan

Problema 1

a) Mostre que o rotacional de um gradiente de uma função qualquer é zero $[\nabla \times (\nabla f) = 0]$ de duas formas: abrindo em componentes e argumentando pelo teorema de Stokes.
b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula $[\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0]$ de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

Problema 2

Encontre a área de um círculo no plano xy centrado na origem usando:
(i) coordenadas retangulares $x^2 + y^2 = a^2$
Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a)\right]$$

(ii) coordenadas cilíndricas $r = a$.
Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Problema 3

Encontre o volume de uma esfera de raio R centrada na origem usando:
(i) coordenadas retangulares $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \operatorname{sen}^{-1}(x/a)\right]$$

(ii) coordenadas cilíndricas $r^2 + z^2 = R^2$;
(iii) coordenadas esféricas $r = R$.
Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Problema 4 Demonstre a identidade

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$$

de três formas distintas:
a) Abrindo as componentes (força bruta);
b) Usando a identidade BAC - CAB de forma adequada;
c) Usando álgebra de índices;

Problema 5

Quais das seguintes afirmações sobre vetores gerais $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$ são verdadeiras?

(a) $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$;

(b) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$;

(c) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$;

(d) $\vec{d} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$ implica $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d} = 0$;

(e) $\vec{a}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}$ implica $\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{c}\cdot\vec{b} = c|\vec{a}-\vec{b}|$;

(f) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{b}) = \vec{b}[\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})]$.

Problema 6

Avalie o laplaciano da função

$$\psi(x,y,z) = \frac{zx^2}{x^2+y^2+z^2}$$

(a) diretamente nas coordenadas cartesianas;

(b) após a mudança para um sistema de coordenadas esféricas polares.

Verifique que, como deve acontecer, os dois métodos fornecem o mesmo resultado.

Problema 7

O campo vetorial **F** é dado por:

$$\mathbf{F} = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\,\mathbf{i} + (3xy^2z + x^3z + ye^{x})\,\mathbf{j} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\,\mathbf{k}.$$

Calcule (a) diretamente e (b) usando o teorema de Stokes o valor da integral de linha

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

onde L é o contorno fechado (tridimensional) $OABCDEO$, definido pelos vértices sucessivos:

$$(0,0,0),\ (1,0,0),\ (1,0,1),\ (1,1,1),\ (1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,0,0).$$

Problema 8

Calcule o rotacional de

$$\vec{B} = \frac{-y\hat{\imath} + x\hat{\jmath}}{x^2 + y^2}$$

nas coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Problema 9

Calcule a integral de superfície

$$I = \iint_S \vec{a} \cdot d\vec{S},$$

onde

$$\vec{a} = (y - x)\,\hat{\imath} + x^2 z\,\hat{\jmath} + (z + x^2)\,\hat{k},$$

e S é a superfície aberta da semiesfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

Problema 10 Dado o campo vetorial

$$\vec{a} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + z\hat{k},$$

verifique o teorema de Stokes para a superfície hemisférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$