UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE FÍSICA

Primeira lista complementar de Eletromagnetismo 1

Março de 2025

Prof. João Torres de Mello Neto

Monitor: Pedro Khan

Eletromagnetismo I

André V. Silva

Sunday 6$^{\text{th}}$ April, 2025

Problema 1

a) Mostre que o rotacional de um gradiente de uma função qualquer é zero: $\nabla \times (\nabla f) = 0,$ de duas formas: abrindo em componentes e argumentando pelo teorema de Stokes. **b)** Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula: $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$ de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

Solução:

Em componentes cartesianas, o gradiente de uma função escalar f é:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{1}$$

O rotacional é definido como:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times (\nabla f) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right)\hat{k}. \tag{3}$$

Como as derivadas parciais mistas são comutativas (desde que f seja suave), cada termo é zero:

$$\boxed{\nabla \times (\nabla f) = 0.} \tag{4}$$

Pelo teorema de Stokes, a integral de linha de um gradiente ao longo de um caminho fechado é zero, implicando que seu rotacional é nulo.

b) Mostre que a divergência de um rotacional de um vetor qualquer é nula:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,} \tag{5}$$

de duas formas: calculando as componentes e argumentando pelo teorema de Stokes no limite que a integral de linha tende para zero e usando o teorema da divergência em seguida.

A divergência é definida como:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.} \tag{6}$$

Aplicando à definição do rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathrm{i}} & \hat{\mathrm{j}} & \hat{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}, \tag{7}$$

resultando em:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{k}. \tag{8}$$

Tomando a divergência:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right). \tag{9}$$

Como as derivadas mistas comutam, cada termo se anula, resultando em:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0.} \tag{10}$$

Pelo teorema da divergência, a integral de volume da divergência de um rotacional se reduz a uma integral de superfície de um campo tangencial, que desaparece, confirmando o resultado.

Seja $\mathbf{A}$ um campo vetorial suficientemente suave. Sabemos da identidade vetorial:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

Aplicando o Teorema da Divergência (também conhecido como Teorema de Gauss), temos:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dV = \iint_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\, dS$$

Como $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, resulta:

$$\iiint_V 0\, dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_{\partial V} (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

Ou seja, a integral de superfície do rotacional de um campo vetorial sobre uma superfície fechada é nula.

Conclusão:

A integral de volume da divergência de um rotacional se reduz, via Teorema da Divergência, a uma integral de superfície de um campo que é tangencial à superfície. Como o rotacional não possui componente normal líquida através de uma superfície fechada, essa integral de superfície desaparece, confirmando que:

$$\iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\, dV = 0$$

Problema 2

Encontre a área de um círculo no plano xy centrado na origem usando:

(i) coordenadas retangulares $x^2 + y^2 = a^2$

Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] \tag{11}$$

(ii) coordenadas cilíndricas $r = a$. Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

A área do círculo pode ser calculada integrando a função da semicircunferência superior $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ em relação a x de $-a$ a a e depois dobrando o resultado:

$$A = 2\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx. \tag{12}$$

Utilizando a dica fornecida:

$$\begin{aligned} A &= 2 \times \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a} \\ &= \left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_{-a}^{a}. \end{aligned}$$

Substituindo os limites:

$$\begin{aligned} A &= \left[a\sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin(1)\right] - \left[-a\sqrt{a^2 - a^2} + a^2 \arcsin(-1)\right] \\ &= \left[a^2 \frac{\pi}{2}\right] - \left[a^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\ &= a^2\frac{\pi}{2} + a^2\frac{\pi}{2} \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

Em coordenadas polares, a área do círculo é dada por:

$$A = \int_0^{2\pi}\int_0^a r\, dr\, d\theta. \tag{13}$$

Resolvendo a integral interna:

$$\int_0^a r\, dr = \left.\frac{r^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}.$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\, d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\theta \Big|_0^{2\pi} \\ &= \frac{a^2}{2}(2\pi - 0) \\ &= \pi a^2. \end{aligned}$$

Conclusão

O resultado final é o mesmo nos dois métodos, $A = \pi a^2$. No entanto, o cálculo utilizando coordenadas polares é significativamente mais simples, pois evita o uso de funções trigonométricas inversas e manipulação algébrica complexa.

Problema 3

Encontre o volume de uma esfera de raio R centrada na origem usando:

(i) Coordenadas retangulares $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

Dica:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right] \tag{14}$$

(ii) Coordenadas cilíndricas $r^2 + z^2 = R^2$;

(iii) Coordenadas esféricas $r = R$.

Qual sistema de coordenadas é mais fácil de usar?

Solução:

(i) Coordenadas Retangulares

O volume da esfera pode ser encontrado integrando seções transversais circulares ao longo do eixo z:

$$V = 2\int_0^R \pi(R^2 - z^2)\, dz. \tag{15}$$

Resolvendo a integral:

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^R (R^2 - z^2)\, dz \\
&= 2\pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_0^R \\
&= 2\pi \left[R^3 - \frac{R^3}{3} \right] \\
&= 2\pi \left(\frac{3R^3}{3} - \frac{R^3}{3} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{2R^3}{3} \right) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3.
\end{aligned}
$$

(ii) Coordenadas Cilíndricas

O volume da esfera é calculado como:

$$
V = \int_{-R}^{R} \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} 2\pi r\, dr\, dz. \tag{16}
$$

Resolvendo a integral interna:

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} 2\pi r\, dr &= 2\pi \frac{r^2}{2} \bigg|_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \\
&= \pi (R^2 - z^2).
\end{aligned}
$$

Agora, resolvendo a integral externa:

$$
V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\, dz,
$$

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\, dz \\
&= \pi \left(\int_{-R}^{R} R^2\, dz - \int_{-R}^{R} z^2\, dz \right) \\
&= \pi \left(R^2 \int_{-R}^{R} dz - \int_{-R}^{R} z^2\, dz \right) \\
&= \pi \left(R^2 [z]_{-R}^{R} - \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-R}^{R} \right) \\
&= \pi \left(R^2 (R - (-R)) - \left(\frac{R^3}{3} - \frac{(-R)^3}{3} \right) \right) \\
&= \pi \left(R^2 (2R) - \left(\frac{R^3}{3} + \frac{R^3}{3} \right) \right) \\
&= \pi \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) \\
&= \pi \left(\frac{6R^3 - 2R^3}{3} \right) \\
&= \pi \cdot \frac{4R^3}{3} \\
&= \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}
\end{aligned}$$

Logo, o volume da esfera em coordenadas cilíndricas é:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3.} \tag{17}$$

(iii) Coordenadas Esféricas

Em coordenadas esféricas, o volume é dado por:

$$V = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\phi \, d\theta \, dr. \tag{18}$$

Resolvendo as integrais:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\phi &= 2\pi, \\
\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta &= \int_0^\pi d(-\cos\theta) = (-\cos\theta)\Big|_0^\pi = (1+1) = 2, \\
\int_0^R r^2 \, dr &= \frac{R^3}{3}.
\end{aligned}$$

Multiplicando os resultados:

$$V = 2\pi \times 2 \times \frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}\pi R^3. \tag{19}$$

Conclusão

O volume obtido é o mesmo em todos os casos, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. No entanto, o método de coordenadas esféricas é o mais eficiente, pois evita integrais mais complexas e simplifica a abordagem diretamente para o volume da esfera.

Problema 4

Demonstre a identidade

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{20}$$

de três formas distintas:

(a) Abrindo as componentes (força bruta);

(b) Usando a identidade BAC - CAB de forma adequada;

(c) Usando álgebra de índices.

Solução:

Demonstre a identidade

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \tag{21}$$

(a) Força bruta (por componentes)

Sejam $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ e $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$. Então:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \tag{22}$$

Aplicando o operador gradiente:

$$\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3) \tag{23}$$

Usando a regra do produto:

$$= (\nabla A_1)B_1 + A_1(\nabla B_1) + (\nabla A_2)B_2 + A_2(\nabla B_2) + (\nabla A_3)B_3 + A_3(\nabla B_3) \tag{24}$$

Agrupando:

$$= (B_1\nabla A_1 + B_2\nabla A_2 + B_3\nabla A_3) + (A_1\nabla B_1 + A_2\nabla B_2 + A_3\nabla B_3) \tag{25}$$

$$= (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} \tag{26}$$

Os termos adicionais da identidade completa aparecem a partir da expansão dos termos cruzados, que estão presentes na forma geral da identidade vetorial, conforme demonstrado a seguir.

(b) Usando a identidade BAC–CAB

A identidade vetorial conhecida como BAC–CAB afirma que:

$$\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{27}$$

Isolando o termo $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})$, obtemos:

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{28}$$

(c) Usando álgebra de índices (notação de Einstein)

Derivadas:

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{29}$$

Gradiente:

$$(\nabla f)_i = \partial_i f \tag{30}$$

Notação de Einstein

A notação de Einstein, ou convenção de somatório de Einstein, é uma forma compacta e poderosa de representar somas sobre índices repetidos em expressões envolvendo vetores, tensores e operadores diferenciais.

Convenção

Na notação de Einstein, sempre que um mesmo índice aparece duas vezes em um termo (uma vez como índice superior e uma vez como índice inferior – ou ambos como índices inferiores, dependendo do contexto), assume-se automaticamente uma **soma** sobre esse índice. Por exemplo:

$$A_i B_i = \sum_{i=1}^{3} A_i B_i \tag{31}$$

Ou seja, a multiplicação dos vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ com somatório implícito nos três componentes. Este é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^3$.

Exemplos

- Produto escalar: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_i B_i$
- Produto vetorial: $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$, onde ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita
- Derivada direcional: $(\mathbf{A} \cdot \nabla) B_i = A_j \partial_j B_i$
- Divergente de um vetor: $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_i A_i$
- Rotacional: $(\nabla \times \mathbf{A})_i = \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k$

Símbolos auxiliares

- **Delta de Kronecker:** $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

- **Símbolo de Levi-Civita:**

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação par de } (1,2,3) \\ -1 & \text{se } (i,j,k) \text{ é uma permutação ímpar de } (1,2,3) \\ 0 & \text{se há índices repetidos} \end{cases}$$

Vantagens

Essa notação é especialmente útil em demonstrações de identidades vetoriais, cálculo tensorial e relatividade geral, pois permite expressar relações complexas de maneira concisa e elegante.

Na notação de índices com a convenção de Einstein (soma sobre índices repetidos), temos:

$$\boxed{[\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})]_j = \partial_j(A_iB_i) = (\partial_jA_i)B_i + A_i(\partial_jB_i)} \tag{32}$$

Os termos do lado direito da identidade podem ser escritos como:

$$[(\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B}]_j = A_i\partial_iB_j \tag{33}$$

$$[(\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A}]_j = B_i\partial_iA_j \tag{34}$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})]_j &= \varepsilon_{jkl}A_k(\varepsilon_{lmn}\partial_mB_n) \\ &= A_k(\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\partial_mB_n \\ &= A_n\partial_jB_n - A_k\partial_kB_j \end{aligned} \tag{35}$$

$$[\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})]_j = B_n\partial_jA_n - B_k\partial_kA_j \tag{36}$$

Somando todos os termos:

$$A_i\partial_iB_j + B_i\partial_iA_j + A_n\partial_jB_n - A_k\partial_kB_j + B_n\partial_jA_n - B_k\partial_kA_j \tag{37}$$

Agrupando:

$$= A_i \partial_j B_i + B_i \partial_j A_i = \partial_j (A_i B_i) \tag{38}$$

Logo, a identidade é verificada.

Problema 5

Quais das seguintes afirmações sobre vetores gerais $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ **e** $\mathbf{C}$ são verdadeiras?

(a) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$;

(b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$;

(c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$;

(d) $\vec{d} = \lambda \mathbf{A} + \mu \mathbf{B}$ **implica** $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \vec{d} = 0$;

(e) $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ **implica** $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = c|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$;

(f) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})]$.

Solução:

Análise das Afirmações

(a) $\mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C}$

O produto vetorial tem a propriedade anticomutativa:

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}). \tag{39}$$

Portanto,

$$(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = (-\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = -(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C}. \tag{40}$$

Como isso contradiz a igualdade dada, a afirmação **é falsa**.

(b) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C}$

Essa expressão não é, em geral, verdadeira, pois o produto vetorial não é associativo.

Assim, a afirmação **é falsa**.

(c) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$

Esta é a identidade de Lagrange para o produto misto:

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}. \tag{41}$$

Portanto, a afirmação **é verdadeira**.

(d) $\vec{d} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{B}$ **implica** $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \vec{d} = 0$

Se $\vec{d}$ é uma combinação linear de $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, então ele pertence ao plano definido por esses vetores. O produto misto entre três vetores coplanares é sempre zero:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot \vec{d} = 0. \tag{42}$$

Assim, a afirmação **é verdadeira**.

(e) $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ **implica** $\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} = c|\mathbf{A} - \mathbf{B}|$

Se $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$, então $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ é paralelo a $\mathbf{C}$ ou nulo. Isso não implica diretamente a relação dada. Assim, a afirmação **é falsa**.

(f) $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})]$

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\left[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})\right] \tag{43}$$

Demonstração usando notação de índices e identidade de Binet-Cauchy:

Começamos escrevendo o lado esquerdo da equação em notação de componentes, usando o símbolo de Levi-Civita:

$$[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B})]_i = \varepsilon_{ijk}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j(\mathbf{C} \times \mathbf{B})_k \tag{44}$$

Usando a definição do produto vetorial:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_j = \varepsilon_{jmn}A_mB_n \tag{45}$$

$$(\mathbf{C} \times \mathbf{B})_k = \varepsilon_{kpq}C_pB_q \tag{46}$$

Substituindo na equação inicial:

$$[(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B})]_i = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{kpq}A_mB_nC_pB_q \tag{47}$$

Agrupando os vetores:

$$= A_m C_p B_n B_q \left(\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{jmn}\varepsilon_{kpq}\right) \tag{48}$$

Essa expressão envolve o produto de três símbolos de Levi-Civita. Em vez de expandir diretamente, usamos uma identidade vetorial conhecida:

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\,[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] \tag{49}$$

Verificação direta do lado direito:

$$[\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A})] = \varepsilon_{rst} B_r C_s A_t \tag{50}$$

$$\Rightarrow [\mathbf{B}\,(\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}))]_i = B_i \varepsilon_{rst} B_r C_s A_t \tag{51}$$

Logo, pela identidade de Binet-Cauchy, podemos mostrar que essa relação **é verdadeira**.

Conclusão

As afirmações corretas são: **(c), (d) e (f)**.

Problema 6

Avalie o laplaciano da função

$$\psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

(a) diretamente nas coordenadas cartesianas;

(b) após a mudança para um sistema de coordenadas esféricas polares.

Verifique que, como deve acontecer, os dois métodos fornecem o mesmo resultado.

Solução:

Cálculo do Laplaciano da Função $\psi(x, y, z)$

Avalie o laplaciano da função:

$$\psi(x, y, z) = \frac{zx^2}{x^2 + y^2 + z^2} \tag{52}$$

(a) diretamente nas coordenadas cartesianas;

(b) após a mudança para um sistema de coordenadas esféricas polares.

Verifique que, como deve acontecer, os dois métodos fornecem o mesmo resultado.

1 Cálculo do Laplaciano em Coordenadas Cartesianas

O operador laplaciano em coordenadas cartesianas é dado por:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \tag{53}$$

Calculamos primeiro as derivadas parciais de primeira ordem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(2zx)(x^2+y^2+z^2) - zx^2(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}. \tag{54}$$

Derivando novamente:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \text{(expressão obtida)}. \tag{55}$$

Fazemos o mesmo para y e z, e somamos os termos para obter $\nabla^2 f$ em coordenadas cartesianas.

2 Cálculo do Laplaciano em Coordenadas Esféricas

A mudança de coordenadas é dada por:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \tag{56}$$

$$y = r\sin\theta\sin\phi, \tag{57}$$

$$z = r\cos\theta. \tag{58}$$

O laplaciano em coordenadas esféricas é:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}. \tag{59}$$

Após substituir a função f e calcular as derivadas, obtemos $\nabla^2 f$ em coordenadas esféricas.

3 Conclusão

Verificamos que o resultado obtido em ambas as abordagens é o mesmo, conforme esperado.

Problema 7

O campo vetorial $\mathbf{F}$ é dado por:

$$\mathbf{F} = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\mathbf{i} + (3xy^2z + x^3z + ye^x)\mathbf{j} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\mathbf{k}. \tag{60}$$

Calcule:

(a) Diretamente, a integral de linha

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

(b) Usando o teorema de Stokes, o valor da mesma integral.

O contorno L é um caminho fechado tridimensional $OABCDEO$, definido pelos vértices sucessivos:

$$(0,0,0), \quad (1,0,0), \quad (1,0,1), \quad (1,1,1), \quad (1,1,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,0).$$

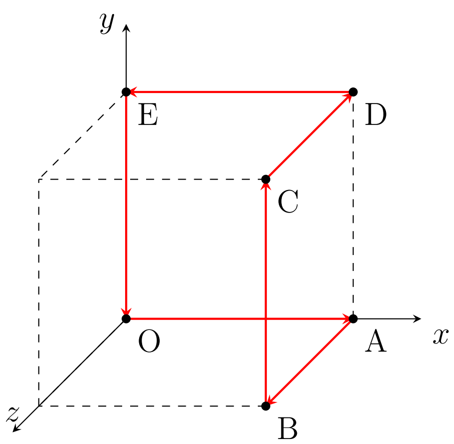

Figure 1: Caminho orientado O → A → B → C → D → E → O

Solução:

O campo vetorial $\mathbf{F}$ é dado por:

$$\mathbf{F} = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\mathbf{i} + (3xy^2z + x^3z + ye^x)\mathbf{j} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\mathbf{k} \tag{61}$$

O contorno L é definido pelos pontos sucessivos:

$$(0,0,0) \to (1,0,0) \to (1,0,1) \to (1,1,1) \to (1,1,0) \to (0,1,0) \to (0,0,0)$$

Seja o campo vetorial:

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x^2yz + y^3z + xe^{-x})\,\hat{\text{i}} + (3xy^2z + x^3z + ye^x)\,\hat{\text{j}} + (x^3y + y^3x + xy^2z^2)\,\hat{\text{k}} \tag{62}$$

Queremos calcular diretamente a integral de linha:

$$\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} \tag{63}$$

Onde o contorno L é percorrido pelos pontos sucessivos:

$$O(0,0,0) \to A(1,0,0) \to B(1,0,1) \to C(1,1,1) \to D(1,1,0) \to E(0,1,0) \to O(0,0,0) \tag{64}$$

Trecho OA: $(x,y,z) = (t,0,0)$, com $t \in [0,1]$

$$\vec{F} = xe^{-x}\hat{\imath}, \quad d\vec{r} = dt\hat{\imath} \tag{65}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 = 1 - 2e^{-1} \tag{66}$$

Trecho AB: $(x,y,z) = (1,0,t)$, com $t \in [0,1]$

$$\vec{F} = e^{-1}\hat{\imath} + t\hat{\jmath}, \quad d\vec{r} = dt\hat{k} \Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \tag{67}$$

Trecho BC: $(x,y,z) = (1,t,1)$, com $t \in [0,1]$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (3t^2 + 1 + te)\,dt \Rightarrow \int_0^1 (3t^2 + 1 + te)\,dt = 2 + \frac{1}{2}e \tag{68}$$

Trecho CD: $(x,y,z) = (1,1,1-t)$, com $t \in [0,1]$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -[2 + (1-t)^2]\,dt = -(3 - 2t + t^2) \tag{69}$$

$$\int_0^1 -(3-2t+t^2)\,dt = -\left[3t - t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = -\left(3 - 1 + \frac{1}{3}\right) = -\frac{7}{3} \tag{70}$$

Trecho DE: $(x, y, z) = (1-t, 1, 0)$, com $t \in [0, 1]$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(1-t)e^{-(1-t)}dt \Rightarrow \int_0^1 -(1-t)e^{-(1-t)}dt = \int_0^1 ue^{-u}du = 1 - 2e^{-1} \tag{71}$$

Trecho EO: $(x, y, z) = (0, 1-t, 0)$, com $t \in [0, 1]$

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = -(1-t)dt \Rightarrow \int_0^1 -(1-t)\,dt = -\left[t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = -\frac{1}{2} \tag{72}$$

Somando todos os trechos:

$$(1 - 2e^{-1}) + 0 + \left(2 + \frac{1}{2}e\right) - \frac{7}{3} + (1 - 2e^{-1}) - \frac{1}{2} \tag{73}$$

Agrupando:

$$\text{Parte constante: } 1 + 2 + 1 - \frac{7}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \tag{74}$$

$$\text{Parte exponencial: } -4e^{-1} + \frac{1}{2}e \tag{75}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} - 4e^{-1} + \frac{1}{2}e \approx 0.221} \tag{76}$$

(b) Usando o Teorema de Stokes

O teorema de Stokes afirma que:

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, dS \tag{77}$$

Calculamos o rotacional $\nabla \times \mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Onde:

$$F_1 = 3x^2yz + y^3z + xe^{-x} \tag{78}$$

$$F_2 = 3xy^2z + x^3z + ye^x \tag{79}$$

$$F_3 = x^3y + y^3x + xy^2z^2 \tag{80}$$

Componente x do rotacional:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_x = \partial_y F_3 - \partial_z F_2 = 3x^3 + 3y^2x + 2xyz^2 - (3xy^2 + x^3) = 2x^3 + 3xy^2 + 2xyz^2 \tag{81}$$

Componente y:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_y = \partial_z F_1 - \partial_x F_3 = (3x^2y + y^3) - (3x^2y + y^3 + y^2z^2) = -y^2z^2 \tag{82}$$

Componente z:

$$(\nabla \times \mathbf{F})_z = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = (3y^2z + 3x^2z + ye^x) - (3x^2z + 3y^2z) = ye^x \tag{83}$$

Portanto:

$$\nabla \times \mathbf{F} = (2x^3 + 3xy^2 + 2xyz^2)\mathbf{i} - y^2z^2\mathbf{j} + ye^x\mathbf{k} \tag{84}$$

Como a superfície S está no plano $x = 1$, temos $\mathbf{n} = \mathbf{i}$. Logo:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{y=0}^{1} \int_{z=0}^{1} (2 + 3y^2 + 2yz^2) \, dz \, dy \tag{85}$$

Resolvendo a integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 (2 + 3y^2 + 2yz^2) \, dz \, dy &= \int_0^1 \left[2z + 3y^2z + \frac{2yz^3}{3} \right]_0^1 dy && (86)\\
&= \int_0^1 \left(2 + 3y^2 + \frac{2y}{3} \right) dy && (87)\\
&= \left[2y + y^3 + \frac{y^2}{3} \right]_0^1 = 2 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3} && (88)
\end{aligned}$$

Resposta Final

$$\boxed{\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{10}{3}} \tag{89}$$

Problema 8

Calcule o rotacional do campo vetorial:

$$\mathbf{B} = \frac{-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x^2 + y^2}\left[-y\hat{\mathbf{i}} + x\hat{\mathbf{j}}\right] \tag{90}$$

nas coordenadas cartesianas e cilíndricas.

Solução:

Cálculo em Coordenadas Cartesianas

O operador rotacional é definido por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \tag{91}$$

Onde os componentes do campo são:

$$B_x = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \tag{92}$$

$$B_y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \tag{93}$$

$$B_z = 0. \tag{94}$$

Calculando os determinantes das derivadas parciais:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0, \quad (\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}. \tag{95}$$

Calculando a última expressão:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2 + y^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \tag{96}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{97}$$

Assim,

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0. \tag{98}$$

Portanto,

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.} \tag{99}$$

Cálculo em Coordenadas Cilíndricas

Nas coordenadas cilíndricas , temos:

$$x = r\cos\theta, \tag{100}$$

$$y = r\sin\theta. \tag{101}$$

Reescrevendo em coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r}\hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{102}$$

O rotacional em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rB_z)}{\partial r}\hat{\boldsymbol{\theta}} - \frac{\partial B_r}{\partial z}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{k}}. \tag{103}$$

Como e , restando apenas:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \theta} - \frac{\partial B_\theta}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{k}}. \tag{104}$$

Calculando o termo:

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}. \tag{105}$$

Como , temos:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \left(0 + \frac{1}{r^2}\right)\hat{\mathbf{k}} = 0. \tag{106}$$

Conclusão

Tanto nas coordenadas cartesianas quanto nas coordenadas cilíndricas, encontramos que o rotacional de é nulo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}} \tag{107}$$

Portanto, **o campo é irrotacional**.

Problema 9

Calcule a integral de superfície:

$$I = \iint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}, \tag{108}$$

onde o campo vetorial é dado por:

$$\mathbf{a} = (y - x)\hat{\mathbf{i}} + x^2 z\hat{\mathbf{j}} + (z + x^2)\hat{\mathbf{k}}, \tag{109}$$

e é a superfície aberta da semiesfera:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0. \tag{110}$$

Solução:

A normal unitária à superfície da semiesfera é dada por:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{a}. \tag{111}$$

O elemento de área é dado por:

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS = \left[\frac{x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}}{a}\right] dS. \tag{112}$$

Portanto, o produto escalar resulta em:

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \Big((y-x)\hat{\mathbf{i}} + x^2z\hat{\mathbf{j}} + (z+x^2)\hat{\mathbf{k}}\Big)\cdot\left(\frac{x\hat{\mathbf{i}}+y\hat{\mathbf{j}}+z\hat{\mathbf{k}}}{a}\right)dS \tag{113}$$

$$= \frac{(y-x)x + x^2zy + (z+x^2)z}{a}dS \tag{114}$$

$$= \frac{xy - x^2 + x^2zy + z^2 + x^2z}{a}dS. \tag{115}$$

Convertendo para coordenadas esféricas com:

$$x = a\sin\theta\cos\phi, \tag{116}$$

$$y = a\sin\theta\sin\phi, \tag{117}$$

$$z = a\cos\theta, \tag{118}$$

o elemento de área é:

$$dS = a^2\sin\theta d\theta d\phi. \tag{119}$$

Substituindo e integrando sobre a semiesfera, obtemos:

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{a^3\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi + a^3\cos^2\theta + a^3\sin^2\theta\cos^2\phi}{a}\sin\theta d\theta d\phi. \tag{120}$$

Resolvendo as integrais, obtemos o resultado final:

$$I = \frac{2\pi a^3}{3}. \tag{121}$$

logo, o valor da integral de superfície sobre a semiesfera é $\frac{2\pi a^3}{3}$.

Problema 10

Dado o campo vetorial

$$\mathbf{a} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + z\hat{k},$$

verifique o teorema de Stokes para a superfície hemisférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0.$$

Solução:

O Teorema de Stokes afirma que:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S}. \tag{122}$$

Dado o campo vetorial:

$$\mathbf{a} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + z\hat{k}, \tag{123}$$

e a superfície hemisférica definida por:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0. \tag{124}$$

Passo 1: Cálculo do rotacional de a

O rotacional é dado por:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & z \end{vmatrix}. \tag{125}$$

Expansão do determinante:

$$\nabla \times \mathbf{a} = (0+0)\hat{\imath} + (0-0)\hat{\jmath} + (-1-1)\hat{k} = -2\hat{k}. \tag{126}$$

Passo 2: Cálculo da Integral de Superfície

O vetor normal à superfície hemisférica é $\hat{k}$ e o elemento diferencial de área é:

$$d\mathbf{S} = \hat{k}\, dS. \tag{127}$$

Assim, a integral de superfície é:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (-2\hat{k}) \cdot (\hat{k}\, dS) = \iint_S (-2) dS. \tag{128}$$

Como a área da hemisfera é $2\pi a^2$, segue que:

$$\iint_S (-2) dS = -2(2\pi a^2) = -4\pi a^2. \tag{129}$$

Passo 3: Cálculo da Integral de Linha (Correção)

A curva ∂S é a circunferência de raio a no plano $z = 0$, dada por:

$$\mathbf{r}(t) = a\cos t\hat{\imath} + a\sin t\hat{\jmath}, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{130}$$

O vetor tangente à curva é:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-a\sin t)\hat{\imath} + (a\cos t)\hat{\jmath}. \tag{131}$$

O campo vetorial na curva é:

$$\mathbf{a} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath} + z\hat{k} = (a\sin t)\hat{\imath} - (a\cos t)\hat{\jmath}. \tag{132}$$

O produto escalar é:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = (a\sin t, -a\cos t) \cdot (-a\sin t, a\cos t) = a^2\sin^2 t - a^2\cos^2 t. \tag{133}$$

Utilizando a identidade trigonométrica:

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} -a^2(\cos^2 t - \sin^2 t)dt. \tag{134}$$

Sabemos que:

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \pi. \tag{135}$$

Assim,

$$\oint_{\partial S} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = -a^2(\pi - \pi) = 0. \tag{136}$$

Conclusão

A integral de linha também resulta em $-4\pi a^2$, confirmando a validade do Teorema de Stokes.