Concurso Público do Instituto Federal de Sertão EBTT **Física.**

André V. Silva

www.andrevsilva.com

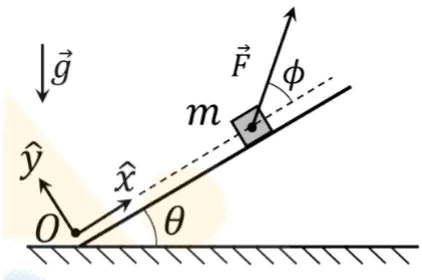
Saturday 30th August, 2025

Contents

1 Mecânica

1.1 Questão 41 — Força mínima para iminência de movimento rampa acima

Um bloco de massa m encontra-se em repouso sobre um plano inclinado de ângulo θ com a horizontal. Uma força $\vec{F}$ é aplicada ao bloco, formando ângulo φ com a direção do plano, como indicado na figura. O coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano é μ. Determine a intensidade mínima da força $\vec{F}$ necessária para colocar o bloco na iminência de subir a rampa.



1) Equilíbrio de forças

Projetando as forças ao longo dos eixos $\hat{x}$ (paralelo à rampa, apontando para cima) e $\hat{y}$ (normal ao plano):

$$F\cos\varphi - mg\sin\theta - \mu N = 0 \tag{1}$$

$$N - mg\cos\theta + F\sin\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg\cos\theta - F\sin\varphi \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$F\cos\varphi = mg\sin\theta + \mu\Big(mg\cos\theta - F\sin\varphi\Big). \tag{3}$$

2) Expressão para a força aplicada

Da equação (3), resulta:

$$F(\varphi) = \frac{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\varphi + \mu\sin\varphi}. \tag{4}$$

3) Maximização do denominador via Cauchy–Schwarz

O denominador pode ser escrito como produto escalar:

$$\cos\varphi + \mu\sin\varphi = (\cos\varphi,\ \sin\varphi)\cdot(1,\ \mu).$$

Pela desigualdade de Cauchy–Schwarz:

$$\boxed{\cos\varphi + \mu\sin\varphi \le \sqrt{1+\mu^2}.} \tag{5}$$

A igualdade em (5) ocorre quando

$$\tan\varphi^\star = \mu, \tag{6}$$

isto é,

$$\cos\varphi^\star = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \qquad \sin\varphi^\star = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

4) Força mínima

Substituindo o valor máximo do denominador (5) em (4), temos:

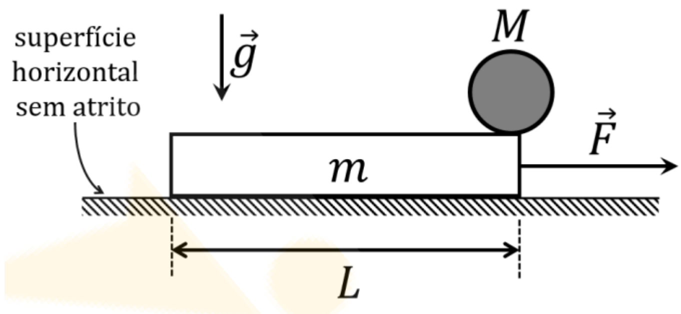
$$F_{\min} = \frac{mg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\sqrt{1+\mu^2}}. \tag{7}$$

Portanto, a força mínima aplicada que coloca o bloco na iminência de subir a rampa é dada por (7), atingida quando (6) vale.

Alternativa correta: D.

1.2 Questão 42 — Cilindro com atrito

Uma prancha de madeira, com comprimento $L = 1{,}0$ m e massa $m = 0{,}4$ kg, possui um cilindro maciço e homogêneo de aço, com massa $M = 0{,}6$ kg, localizado na extremidade direita da prancha. O sistema está em repouso sobre um plano horizontal liso. Uma força constante $\vec{F} = (20\text{ N})\,\hat{x}$ é aplicada à prancha, fazendo com que os objetos comecem a se mover acelerados. O cilindro rola suavemente, sem escorregar, sobre a prancha, devido à presença de atrito entre eles. Desprezando o atrito entre a prancha e a superfície horizontal, bem como qualquer força de resistência do ar, determine o intervalo de tempo, em segundos, que o cilindro levará para cair da prancha, ou seja, para atingir a extremidade oposta e deixar de estar em contato com ela.



(A) 0,1 s

(B) 0,2 s

(C) 0,3 s

(D) 0,4 s

(E) 0,5 s

1) Definição das variáveis e forças

Seja a_p a aceleração da prancha (para a direita) e a_c a aceleração do centro do cilindro (para a direita), ambas medidas no referencial inercial do solo. Seja f a força de atrito horizontal exercida pela prancha sobre o cilindro (no ponto de contato). Pela ação e reação, a prancha sofre $-f$ da parte do cilindro.

Para o cilindro maciço homogêneo, momento de inércia em relação ao centro:

$$\boxed{I = \frac{1}{2} M R^2.} \tag{8}$$

Não precisamos do valor de R explicitamente, apenas das relações de rotação/translação.

2) Equações de movimento

Equilíbrio (segunda lei) para a prancha (força total horizontal):

$$F - f = m a_p. \tag{9}$$

Equação de translação para o cilindro:

$$f = M a_c. \tag{10}$$

Equação de rotação para o cilindro (torque causado por f):

$$f R = I \alpha = \left(\frac{1}{2} M R^2 \right) \alpha. \tag{11}$$

Condição de rolamento sem escorregar entre cilindro e prancha: a velocidade do ponto de contato do cilindro iguala a velocidade da prancha. Em termos das acelerações:

$$a_c - a_p = -R\alpha. \tag{12}$$

(A escolha do sinal garante consistência: se a prancha acelera mais que o cilindro, o contato induz uma rotação que satisfaz (12).)

3) Eliminação das incógnitas

Da (11) e de (12) obtemos:

$$f R = \tfrac{1}{2} M R^2 \alpha \quad \Rightarrow \quad f = \tfrac{1}{2} M R \alpha.$$

Usando (12) $\alpha = -(a_c - a_p)/R$, resulta

$$f = -\tfrac{1}{2}M(a_c - a_p). \tag{13}$$

Por outro lado, pela translação do cilindro (10):

$$f = Ma_c. \tag{14}$$

Igualando (13) e (14):

$$Ma_c = -\tfrac{1}{2}M(a_c - a_p).$$

Dividindo por M e rearranjando:

$$a_c = -\tfrac{1}{2}a_c + \tfrac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad \tfrac{3}{2}a_c = \tfrac{1}{2}a_p \quad \Rightarrow \quad a_c = \tfrac{1}{3}a_p.$$

Substituindo (1.2) em (9) e usando (10) ($f = Ma_c$):

$$F - Ma_c = ma_p.$$

Como $a_c = a_p/3$, obtemos

$$F - M\frac{a_p}{3} = ma_p \quad \Rightarrow \quad F = a_p\Big(m + \frac{M}{3}\Big).$$

Logo a aceleração da prancha:

$$a_p = \frac{F}{m + \dfrac{M}{3}} = \frac{3F}{3m + M}. \tag{15}$$

E, pela (1.2),

$$a_c = \frac{a_p}{3} = \frac{F}{3m + M}. \tag{16}$$

4) Aceleração relativa e tempo até cair

A aceleração relativa entre prancha e cilindro (aceleração com que a prancha “afasta-se” do cilindro) é

$$a_{\text{rel}} = a_p - a_c = a_p - \frac{a_p}{3} = \frac{2}{3}a_p.$$

Usando (15):

$$a_{\text{rel}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3F}{3m+M} = \frac{2F}{3m+M}. \tag{17}$$

Inicialmente a velocidade relativa é zero (sistema parte do repouso). A distância relativa a percorrer para que o cilindro passe da extremidade direita até a esquerda da prancha é L. Para movimento uniformemente acelerado, o tempo t satisfaz $L = \frac{1}{2}a_{\text{rel}}t^2$, portanto

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_{\text{rel}}}} = \sqrt{\frac{2L(3m+M)}{2F}} = \sqrt{\frac{(3m+M)\,L}{F}}. \tag{18}$$

5) Substituição numérica

Dados: $m = 0{,}4$ kg, $M = 0{,}6$ kg, $L = 1{,}0$ m, $F = 20$ N.

Calcule $3m + M$:

$$3m + M = 3(0{,}4) + 0{,}6 = 1{,}2 + 0{,}6 = 1{,}8 \text{ kg}.$$

Substituindo em (18):

$$t = \sqrt{\frac{(3m+M)L}{F}} = \sqrt{\frac{1{,}8 \times 1{,}0}{20}} = \sqrt{\frac{1{,}8}{20}} = \sqrt{0{,}09} = 0{,}30 \text{ s}.$$

Resposta: $t = 0{,}3$ s. (Alternativa **C**.)

1.3 Questão 43 - Trabalho de uma força de resistência

Um projétil de massa m é lançado verticalmente para cima a partir da posição $z = 0$ com velocidade inicial $\vec{v} = v_0\hat{z}$ ($v_0 > 0$) no instante $t = 0$. Além da força gravitacional, atua sobre ele uma força de resistência do ar proporcional à velocidade: $\vec{F} = -\beta m\vec{v}$, onde $\beta > 0$ é o parâmetro de amortecimento. A aceleração da gravidade é $\vec{g} = -g\hat{z}$. Determine o trabalho realizado pela força de resistência desde o lançamento até a altura máxima.

Solução:

A força de resistência é:

$$\vec{F}_r = -\beta m\vec{v} = -\beta m v\hat{z}.$$

O trabalho realizado pela força de resistência até a altura máxima é:

$$W_r = \int_0^{z_{\max}} \vec{F}_r \cdot d\vec{z} = -\beta m \int_0^{z_{\max}} v\, dz.$$

A equação do movimento é:

$$m\frac{dv}{dt} = -mg - \beta m v \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dv}{dt} + \beta v = -g.}$$

Solução da equação diferencial:

$$\frac{dv}{dt} + \beta v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -g - \beta v$$

$$\frac{dv}{g + \beta v} = -dt$$

$$\int \frac{dv}{g + \beta v} = -\int dt$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} = -t + C$$

Usando as condições de contorno do problema (quando $t = 0$ e $v = v_o$):

$$C = \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} = -t + \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta}$$

$$\frac{ln\,(g + \beta v)}{\beta} - \frac{ln\,(g + \beta v_0)}{\beta} = -t$$

$$ln\,(g + \beta v) - ln\,(g + \beta v_0) = -\beta t$$

$$ln\left[\frac{(g + \beta v)}{(g + \beta v_0)}\right] = -\beta t$$

$$\frac{(g+\beta v)}{(g+\beta v_0)} = e^{-\beta t}$$

$$(g+\beta v) = (g+\beta v_0)\, e^{-\beta t}$$

$$\beta v = (g+\beta v_0)\, e^{-\beta t} - g$$

$$\boxed{v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}.}$$

Altura máxima ocorre em $t_{\max}$ tal que $v(t_{\max}) = 0$:

$$0 = \left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t_{\max}} - \frac{g}{\beta} \quad \Rightarrow \quad e^{-\beta t_{\max}} = \frac{g/\beta}{v_0 + g/\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\max} = \frac{1}{\beta} \ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right).}$$

O trabalho da força de resistência:

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} v^2(t)\, dt = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}\right]^2 dt.$$

$$W_r = -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right) e^{-\beta t} - \frac{g}{\beta}\right]^2 dt$$

$$\begin{aligned} W_r &= -\beta m \int_0^{t_{\max}} \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2 e^{-2\beta t} - 2\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)\frac{g}{\beta} e^{-\beta t} + \left(\frac{g}{\beta}\right)^2\right] dt \\ &= -\beta m \left[\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2 \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt - 2\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)\frac{g}{\beta}\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt + \left(\frac{g}{\beta}\right)^2 \int_0^{t_{\max}} dt\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt &= \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta}, \\ \int_0^{t_{\max}} dt &= t_{\max}. \end{aligned}$$

Integrando e substituindo $t_{\max}$ e $e^{-\beta t_{\max}}$:

$$t_{\max} = \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = 1-e^{-2\beta\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)\right)}$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = 1-e^{-\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = 1-\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^{-2}$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = 1-\frac{1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2-1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$1-e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{1+\frac{2\beta v_0}{g}+\frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}-1}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}$$

$$\boxed{1-e^{-2\beta t_{\max}} = \frac{\frac{2\beta v_0}{g}+\frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}}{\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^2}}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t}dt = \frac{1-e^{-2\beta t_{\max}}}{2\beta} = \frac{1}{2\beta}\frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g}+\frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\left(\frac{\beta}{g}\right)^2\left(\frac{g}{\beta}+v_0\right)^2}}$$

$$\boxed{\int_0^{t_{\max}} e^{-2\beta t}dt = \frac{g^2}{2\beta^3}\frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g}+\frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\left(v_0+\frac{g}{\beta}\right)^2}. \quad \checkmark}$$

$$1-e^{-\beta t_{\max}} = 1-e^{-\beta\left(\frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)\right)}$$

$$1-e^{-\beta t_{\max}} = 1-e^{\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)^{-1}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right) - 1}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)}$$

$$1 - e^{-\beta t_{\max}} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{\beta v_0}{g}\right)}{\frac{\beta}{g}\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)} = \frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{1 - e^{-\beta t_{\max}}}{\beta} = \frac{\frac{v_0}{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}}{\beta} = \frac{v_0}{\beta\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}$$

$$\int_0^{t_{\max}} e^{-\beta t} dt = \frac{v_0}{\beta\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}. \quad \checkmark$$

$$W_r = -\beta m\left[\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)^2}\left[\frac{g^2}{2\beta^3}\frac{\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{\cancel{\left(v_0 + \frac{\beta}{g}\right)^2}}\right] - 2\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}\frac{g}{\beta}\frac{v_0}{\beta\cancel{\left(v_0 + \frac{g}{\beta}\right)}} + \left(\frac{g^2}{\beta^3}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\beta m\left[\frac{g^2\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right]}{2\beta^3} - 2g\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{g^2}{\beta^3}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\left[\frac{mg^2}{2\beta^2}\left[\frac{2\beta v_0}{g} + \frac{\beta^2 v_0^2}{g^2}\right] - 2mg\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

$$W_r = -\left[\frac{mgv_0}{\beta} + \frac{mv_0^2}{2} - 2mg\frac{v_0}{\beta} + \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)\right]$$

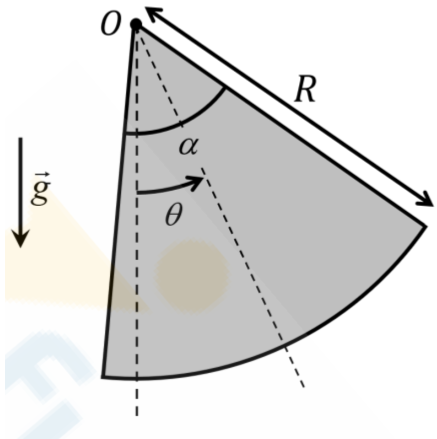
$$W_r = -\frac{mgv_0}{\beta} - \frac{mv_0^2}{2} + \frac{2mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta v_0}{g}\right)$$

$$W_r = \frac{mgv_0}{\beta} - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right)\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right) - \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\boxed{W_r = \frac{mgv_0}{\beta}\left[1 - \left(\frac{mg^2}{\beta^2}\right)\ln\left(1+\frac{\beta v_0}{g}\right)\right] - \frac{mv_0^2}{2}} \quad \blacksquare$$

1.4 Questão 44 - Pêndulo Físico

Um pêndulo físico constituído por uma placa fina e homogênea em forma de um setor circular de raio R e ângulo central α, está suspenso verticalmente no centro O do disco de origem. O pêndulo é deslocado por um ângulo θ em relação à vertical e, em seguida, abandonado a partir do repouso para oscilar. A aceleração local da gravidade é g e possíveis atritos são desprezíveis. Assinale a alternativa que apresenta a expressão correta para a frequência angular ω de pequenas oscilações do pêndulo físico.



(A) $\omega = \sqrt{\dfrac{4g}{3R}}$

(B) $\omega = \sqrt{\dfrac{8g\cos(\alpha)}{3R\,\alpha}}$

(C) $\omega = \sqrt{\dfrac{8g\sin(\alpha/2)}{3R\,\alpha}}$

(D) $\omega = \sqrt{\dfrac{4g\sin(\alpha)}{3R\,\alpha}}$

(E) $\omega = \sqrt{\dfrac{4g\cos(\alpha/2)}{3R\,\alpha}}$

Solução:

Para pequenas oscilações linearizamos $\sin\theta \approx \theta$ e usamos a equação do pêndulo físico:

$$I_O\,\ddot{\theta} + mgh\,\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O}\,\theta = 0,$$

$$\ddot{\theta} + \omega^2\,\theta = 0,$$

onde I_O é o momento de inércia em relação ao ponto de suspensão O (eixo perpendicular ao plano) e h é a distância do centro de massa ao ponto O.

1) Massa e momento de inércia:

Para uma placa homogênea em forma de setor, a densidade superficial σ satisfaz

$$m = \sigma \cdot \text{área} = \sigma\left(\tfrac{1}{2}\alpha R^2\right).$$

O momento de inércia em relação a O (eixo perpendicular ao plano) é

$$I_O = \sigma \int_0^{\alpha}\int_0^{R} r^2\, r\,dr\,d\phi = \sigma\frac{\alpha R^4}{4}.$$

Substituindo $\sigma = \dfrac{2m}{\alpha R^2}$ obtemos

$$I_O = \frac{2m}{\alpha R^2}\cdot\frac{\alpha R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}.$$

2) Centro de massa (distância radial h a partir de O):

O centro de massa de um setor circular encontra-se sobre a bissetriz e sua distância ao centro é

$$\boxed{h = r_{CM} = \frac{4R\sin(\alpha/2)}{3\alpha}.}$$

3) Frequência angular:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}} = \sqrt{\frac{mg\,\dfrac{4R\sin(\alpha/2)}{3\alpha}}{\dfrac{mR^2}{2}}} = \sqrt{\frac{8g\sin(\alpha/2)}{3R\,\alpha}}.$$

Portanto, a alternativa correta é **(C)**.

1.5 Questão 45 - Colisão Unidimensional inelástica

Considere uma partícula de massa m, que se move com velocidade v_0, e realiza uma colisão unidimensional inelástica com outra partícula de massa M, inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição do material constituinte das partículas é denotado por ε. Considerando que a razão das massas das partículas é $M/m = \lambda$, analise as assertivas abaixo:

I. A velocidade da partícula de massa m após a colisão é $v = v_0(1 - \varepsilon\lambda)/(1 + \lambda)$.

II. A velocidade da partícula de massa M após a colisão é $V = v_0(1 + \varepsilon)/(1 + \lambda)$.

III. A razão entre a energia cinética adquirida pela partícula de massa M e a energia cinética inicial da partícula de massa m é $\lambda(\varepsilon + 1)/(\lambda + 1)$.

Quais estão corretas?

(A) Apenas I.

(B) Apenas II.

(C) Apenas III.

(D) Apenas I e II.

(E) I, II e III.

Solução:

Pela conservação do momento e definição do coeficiente de restituição:

$$mv_0 = mv + MV, \qquad V - v = \varepsilon(v_0 - 0) = \varepsilon v_0.$$

Da segunda equação temos $V = v + \varepsilon v_0$. Substituindo na conservação do momento:

$$mv_0 = mv + M(v + \varepsilon v_0) = (m + M)v + M\varepsilon v_0.$$

Isolando v:

$$(m+M)v = v_0(m - M\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad v = v_0\frac{m - M\varepsilon}{m+M} = v_0\frac{1-\lambda\varepsilon}{1+\lambda},$$

o que confirma a assertiva **I**.

Agora $V = v + \varepsilon v_0$:

$$V = v_0\frac{1-\lambda\varepsilon}{1+\lambda} + \varepsilon v_0 = v_0\frac{1-\lambda\varepsilon+\varepsilon(1+\lambda)}{1+\lambda} = v_0\frac{1+\varepsilon}{1+\lambda},$$

confirmando a assertiva **II**.

Para a assertiva **III**, calculemos a razão das energias:

$$\frac{K_M}{K_{m,\,\text{inicial}}} = \frac{\frac{1}{2}MV^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{M}{m}\left(\frac{V}{v_0}\right)^2 = \lambda\left(\frac{1+\varepsilon}{1+\lambda}\right)^2 = \frac{\lambda(1+\varepsilon)^2}{(1+\lambda)^2},$$

que **não** coincide com $\dfrac{\lambda(1+\varepsilon)}{1+\lambda}$ (a dada na III). Portanto a assertiva **III** é falsa.
Assim, estão corretas apenas I e II.

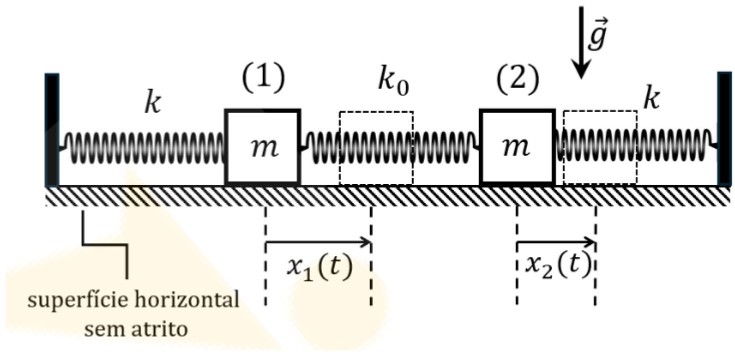
A resposta correta é alternativa **(D)**.

1.6 Questão 47 - Oscilações acopladas

Dois blocos (1 e 2) de massas iguais a $m = 0,5\,\text{kg}$ são conectados a três molas que estão posicionadas entre duas paredes, conforme ilustrado na figura abaixo. A constante elástica das duas molas externas é $k = 2,0\,\text{N/m}$, e a constante elástica da mola do meio $k_0 = 8,0\,\text{N/m}$. As molas têm massa desprezível e satisfazem à lei de Hooke. Sabe-se também que quando os blocos se encontram simultaneamente em suas respectivas posições de equilíbrio, as molas não apresentam qualquer deformação. Considere que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ denotam os deslocamentos dos blocos da esquerda e da direita, respectivamente, em relação às suas posições de equilíbrio. No instante inicial $t = 0$, ambos os blocos 1 e 2 são soltos a partir do repouso nas posições $x_1(0) = 10\,\text{cm}$ e $x_2(0) = 0$, respectivamente. Assinale a alternativa que representa a posição dos blocos como função do tempo medido em unidades do sistema internacional.

(A) $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(6t)]\,\text{m}, \quad x_2(t) = 0,05[\cos(2t) - \cos(6t)]\,\text{m}$

(B) $x_1(t) = 0,05[\cos(2t) + \cos(4t)]\,\text{m}, \quad x_2(t) = 0,05[\cos(4t) - \cos(2t)]\,\text{m}$



(C) $x_1(t) = 0,05\cos(3t)\cos(t)\,\mathrm{m}, \quad x_2(t) = 0,05\sin(3t)\sin(t)\,\mathrm{m}$

(D) $x_1(t) = 0,10\cos(4t)\,\mathrm{m}, \quad x_2(t) = 0,10\sin(2t)\,\mathrm{m}$

(E) $x_1(t) = 0,10\cos(2t)\,\mathrm{m}, \quad x_2(t) = 0,10\sin(4t)\,\mathrm{m}$

Solução:

1) **Equações de movimento:** Para o bloco 1:

$$m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k_0(x_1 - x_2).$$

Para o bloco 2:

$$m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k_0(x_2 - x_1).$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 + \dfrac{k+k_0}{m}x_1 - \dfrac{k_0}{m}x_2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + \dfrac{k+k_0}{m}x_2 - \dfrac{k_0}{m}x_1 = 0. \end{cases}$$

2) **Matriz do sistema:**

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{m}\begin{bmatrix} k+k_0 & -k_0 \\ -k_0 & k+k_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Com $m = 0,5$, $k = 2$ e $k_0 = 8$:

$$A = \frac{1}{0,5}\begin{bmatrix} 10 & -8 \\ -8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & -16 \\ -16 & 20 \end{bmatrix}.$$

3) **Autovalores (modos normais):**

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad \Rightarrow \quad (20-\lambda)^2 - (-16)^2 = 0,$$

$$(20-\lambda)^2 - 256 = 0, \quad \Rightarrow \quad 20 - \lambda = \pm 16.$$

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 36.$$

Logo, as frequências são:

$$\omega_1 = \sqrt{4} = 2, \qquad \omega_2 = \sqrt{36} = 6.$$

4) **Autovetores:** Para $\lambda_1 = 4$:

$$(20-4)x_1 - 16x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2.$$

Para $\lambda_2 = 36$:

$$(20-36)x_1 - 16x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_2.$$

Modos normais:

$$\begin{cases} \text{Modo 1 (freq. 2 rad/s): } x_1 = x_2, \\ \text{Modo 2 (freq. 6 rad/s): } x_1 = -x_2. \end{cases}$$

5) **Combinação linear:** Solução geral:

$$x_1(t) = A\cos(2t) + B\cos(6t), \quad x_2(t) = A\cos(2t) - B\cos(6t).$$

6) **Condições iniciais:** No instante $t = 0$:

$$x_1(0) = A + B = 0{,}10, \quad x_2(0) = A - B = 0.$$

$$A = B = 0{,}05.$$

7) **Solução final:**

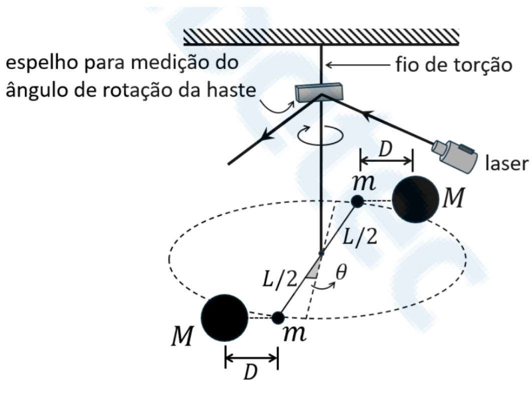
$$x_1(t) = 0{,}05[\cos(2t) + \cos(6t)] \text{ m}, \qquad x_2(t) = 0{,}05[\cos(2t) - \cos(6t)] \text{ m}.$$

A resposta correta é a alternativa **(A)**.

2 Gravitação

2.1 Questão 46 - Balança de torção de Cavendish

No experimento de Henry Cavendish, de 1797, foi utilizada uma balança de torção para determinar o valor da constante gravitacional G da lei da gravitação universal de Newton. Considere uma balança de torção composta por uma barra de massa desprezível e comprimento L, suspensa horizontalmente pelo seu centro por um fio de torção vertical. Duas pequenas esferas de massa igual a m estão presas em cada extremidade da barra. No primeiro passo do experimento, observa-se que, quando a barra é girada com um pequeno ângulo, torcendo o fio, e depois solta, o pêndulo de torção resultante sofre movimento harmônico simples com um período T. Em seguida, após o pêndulo ser parado e estar em sua posição de equilíbrio, um par de esferas grandes de massa igual a M são colocadas em lados opostos da barra, cada uma próxima a uma das massas m. Devido à atração gravitacional apenas entre cada par de massas, a barra é observada girando por um pequeno ângulo θ e depois parar nessa posição, com cada massa M a uma distância D da massa m correspondente. Determine uma expressão para G em termos das variáveis dadas no problema.



(A) $G = \dfrac{\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$

(B) $G = \dfrac{2\pi^2 D^2 L \theta}{MT^2}$

(C) $G = \dfrac{4\pi^2 D^2 L^2 \theta}{MT^2}$

(D) $G = \dfrac{\pi^2 D^2 L\theta}{mT^2}$

(E) $G = \dfrac{\pi^2 D^2 L\theta}{4mT^2}$

Solução:

1) **Constante de torção via o período.** Para pequenas oscilações, o pêndulo de torção satisfaz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\kappa = \frac{4\pi^2 I}{T^2}}.$$

A barra é desprezível e há duas massas m a $L/2$ do eixo, logo

$$I = 2\,m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{4\pi^2}{T^2}\,\frac{mL^2}{2} = \frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}.$$

2) **Equilíbrio com as massas M.** A força gravitacional entre M e m é

$$F = \frac{GmM}{D^2}.$$

Cada força produz um torque de módulo $F \cdot (L/2)$ em torno do centro; são duas forças simétricas, portanto o torque gravitacional total vale

$$\tau_g = 2\,F\left(\frac{L}{2}\right) = F\,L.$$

No novo equilíbrio, o torque elástico do fio $\tau_\kappa = \kappa\,\theta$ (para pequeno θ) equilibra o torque gravitacional:

$$\kappa\,\theta = F\,L = \frac{GmM}{D^2}\,L.$$

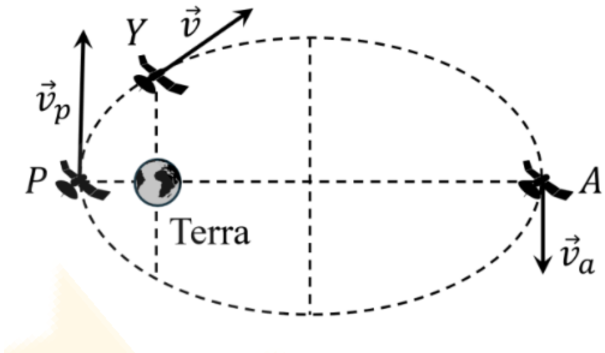
3) **Isolando G.** Substituindo κ:

$$\frac{2\pi^2 mL^2}{T^2}\,\theta = \frac{GmM}{D^2}\,L \quad \Rightarrow \quad \boxed{G = \frac{2\pi^2 D^2 L\,\theta}{MT^2}.}$$

A resposta correta é a alternativa **(B)**.

2.2 Questão 48 - Módulo da velocidade de um satélite orbitando a Terra

Um satélite artificial orbita a Terra em uma trajetória elíptica sob efeito apenas da força gravitacional. O satélite passa pelo perigeu P (ponto mais próximo à Terra) com velocidade $\vec{v}_p$ e pelo apogeu A (ponto mais afastado da Terra) com velocidade $\vec{v}_a$. A velocidade do satélite em um ponto Y, localizado na linha que passa pela Terra e perpendicular ao eixo maior da elipse, é denotada por $\vec{v}$. É correto afirmar que o módulo da velocidade v no ponto Y, em termos de v_p e v_a , é expresso por:



(A) $v = \dfrac{v_a + v_p}{2}$

(B) $v = \dfrac{2v_a v_p}{v_a + v_p}$

(C) $v = \sqrt{v_a v_p}$

(D) $v = \sqrt{\dfrac{v_a^2 + v_p^2}{2}}$

(E) $v = \sqrt{\dfrac{2v_a^2 v_p^2}{v_a^2 + v_p^2}}$

Solução:

Considerando a órbita elíptica com foco na Terra, usemos a equação de *vis-viva* e a conservação do momento angular. Denotando por $\mu = GM$,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),$$

onde r é a distância ao foco (Terra) no ponto considerado e a é o semieixo maior. Para o perigeu (r_p) e apogeu (r_a) temos

$$v_p^2 = \mu\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right), \tag{19}$$

$$v_a^2 = \mu\left(\frac{2}{r_a} - \frac{1}{a}\right). \tag{20}$$

Subtraindo (20) de (19) obtemos

$$v_p^2 - v_a^2 = 2\mu\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right) \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{v_p^2 - v_a^2}{2\left(\frac{1}{r_p} - \frac{1}{r_a}\right)}.$$

O ponto Y corresponde ao ângulo verdadeiro $\theta = \frac{\pi}{2}$, portanto

$$r_Y = \frac{a(1-e^2)}{1+0} = a(1-e^2).$$

Usando a relação entre os raios de perigeu/apogeu e a (isto é, $r_p = a(1-e)$ e $r_a = a(1+e)$) obtemos

$$\frac{1}{r_Y} = \frac{a}{r_p r_a} = \frac{r_p + r_a}{2r_p r_a}.$$

Agora escrevemos a velocidade em Y via vis-viva (usando a expressão em r_p e eliminando $1/a$):

$$v_Y^2 = v_p^2 + 2\mu\left(\frac{1}{r_Y} - \frac{1}{r_p}\right).$$

Substituindo μ e $\dfrac{1}{r_Y} - \dfrac{1}{r_p} = \dfrac{r_p - r_a}{2r_p r_a}$ temos

$$v_Y^2 = v_p^2 + (v_p^2 - v_a^2)\frac{r_p r_a}{r_a - r_p} \cdot \frac{r_p - r_a}{2r_p r_a} = v_p^2 - \frac{1}{2}(v_p^2 - v_a^2).$$

Portanto

$$v_Y^2 = \frac{v_p^2 + v_a^2}{2},$$

e

$$\boxed{v_Y = \sqrt{\frac{v_p^2 + v_a^2}{2}}.}$$

Resposta: alternativa **D**.

Problema. Um pêndulo de massa m_2 e comprimento L é solto do repouso na posição A, que faz um ângulo θ com a vertical. A corda passa por uma roldana ideal e traciona um bloco de massa m_1 sobre uma mesa horizontal. Ao o pêndulo atingir o ponto mais baixo B, qual deve ser o menor coeficiente de atrito estático μ_s entre m_1 e a mesa para que m_1 não deslize?

Solução.

1) Velocidade do pêndulo em B. Pela conservação de energia entre A e B:

$$m_2 g L\,(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m_2 v_B^2 \quad\Rightarrow\quad v_B^2 = 2gL\,(1-\cos\theta).$$

2) Tração na corda em B. No ponto mais baixo, as forças radiais no pêndulo dão

$$T_B - m_2 g = m_2 \frac{v_B^2}{L} \quad\Rightarrow\quad T_B = m_2\left(g + \frac{v_B^2}{L}\right) = m_2 g\Big[1 + 2(1-\cos\theta)\Big] = m_2 g\,(3 - 2\cos\theta).$$

Como a roldana é ideal, a tração que puxa m_1 na horizontal é T_B.

3) Condição de não deslizamento de m_1. Para m_1 permanecer em repouso, a força de atrito estático máxima deve ser ao menos igual à tração:

$$f_{s,\max} = \mu_s N = \mu_s m_1 g \;\geq\; T_B.$$

Logo, o coeficiente mínimo é

$$\boxed{\mu_{s,\min} = \frac{T_B}{m_1 g} = \frac{m_2}{m_1}\Big(3 - 2\cos\theta\Big)}.$$

Observação: O ponto B é o ponto mais baixo da trajetória, onde a tração é máxima; portanto, se m_1 não desliza em B, não deslizará em nenhuma outra posição.