课程名称：数学分析（一）

2019-2020 学年第（1）学期期末　　　　　　　　　　本试卷共 **6** 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）对函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)},\varphi(x)=x,\psi(x)=1+x^3,$：（1）求 $f'(x),f''(x)$；（2）判断其单调性、极值、凸性；（3）该函数有无渐近线？若有，请给出；（4）在区间 $[1,2]$ 上写出柯西中值定理的表达式，并给出取得中值的点 ξ；（5）求 $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。

2. （36 分）求下列各式（若不存在请简要说明理由）：

   1） $\mathrm{d}\left[\ln\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x}\right]$；

   2）对数螺线极坐标表示为 $r=3e^{2\theta}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$；

   3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x}\right]$； 1

   4） $\int\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x$；

   5） $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A\dfrac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}\,x$； 仔细啊！！！

   6） $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1^2}+\dfrac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+(n+1)^2}\right)$. $\frac{\pi}{4}$

3. （8 分）对任取的 $a,b>0$，试证明 $a\ln a+b\ln b\geq(a+b)\left(\ln(a+b)-\ln 2\right)$.

4. （8 分）求解常微分方程 $x'(t)-x(t)=t$.

考试要圈出来

5. （10 分）近似计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 到小数点后二位有效数字（即误差小于 0.005）.

0.493

6. （8 分）若 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、严格单调递增，且 $f(0)=0$。由已学到的知识知道其反函数 $x=g(y)$ 也连续、严格单调递增；对任取的 $a,b>0$，由今后将学到的知识知道 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,\int_0^b g(y)\mathrm{d}y$ 可积。试证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\geq ab.$

1. （30 分）对函数 $f(x)=\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)},\varphi(x)=x,\psi(x)=1+x^3$,：（1）求 $f'(x),f''(x)$；（2）判断其单调性、极值、凸性；（3）该函数有无渐近线？若有，请给出；（4）在区间 $[1,2]$ 上写出柯西中值定理的表达式，并给出取得中值的点 ξ；（5）求 $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$。

解：（1） $f'(x)=\dfrac{1-2x^3}{\left(1+x^3\right)^2},f''(x)=\dfrac{6x^2\left(x^3-2\right)}{\left(1+x^3\right)^3}$;

（2） $x<-1,-1<x<\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 单调增；$x>\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 单调降（不写理由即 f'（x）正负，扣 1 分）；$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{3}$ 极大值（不计算函数值扣 1 分）；$x<-1,x>\sqrt[3]{2}$ 下凸；$-1<x<\sqrt[3]{2}$ 上凸（不写理由即 f"（x）正负，扣 1 分）；

（3）有渐近线 $x=-1,y=0$ （垂直渐近线 2 分，其中不写理由扣 1 分；有同学渐近写成渐进）；

（4） $\dfrac{2-1}{(1+2^3)-(1+1^3)}=\dfrac{1}{3\xi^2},\xi=\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ （表达式 4 分，中值取点 2 分）；

（5）
$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_1^2\frac{-1}{1+x}+\frac{1+x}{1-x+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left[-\ln(1+x)+\frac{1}{2}\ln(1-x+x^2)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]_1^2$$
$$=-\frac{\ln 3}{6}+\frac{\ln 2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{18}\pi$$

（分解 2 分，其余 4 分）

2. （36 分）求下列各式（若不存在请简要说明理由）：

1） $\mathrm{d}\left[\ln\sqrt{\tan^2 x+\cot^2 x}\right]=\dfrac{\tan x\sec^2 x-\cot x\csc^2 x}{\tan^2 x+\cot^2 x}dx=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin x\cos x\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)}dx$

（每缺 1 个 dx 扣 0.5 分，向上取整；可不化简，化简错扣 2 分）；

2）对数螺线极坐标表示为 $r=3e^{2\theta}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{2y+x}{2x-y}=\dfrac{2\sin\theta+\cos\theta}{2\cos\theta-\sin\theta}$；

3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[3]{x^3-3x}-\sqrt{x^2-2x}\right]=1$; （洛必达法则要写清楚确实是未定型；泰勒展开要写对余项）

4） $\int\sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}\left(\ln^2 x-\dfrac{4}{3}\ln x+\dfrac{8}{9}\right)+C$；

5） $\lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{8}$； （直接把极限写到换元后的上限，扣 1 分）

6) $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1^2}+\frac{1}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2+(n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4}$ （写清楚分割和标志点 2 分）.

3. （8 分）对任取的 $a,b>0$，试证明 $a\ln a+b\ln b\ge(a+b)\left(\ln(a+b)-\ln 2\right)$.

证：在 $x>0$ 上考察函数 $f(x)=x\ln x, f''(x)=\frac{1}{x}>0$，下凸；由定义知 $\frac{a\ln a+b\ln b}{2}\ge\frac{a+b}{2}\ln\frac{a+b}{2}$，整理即得所证。（这里是定义，不需要 Jessen 不等式）

4. （8 分）求解常微分方程 $x'(t)-x(t)=t$.

解：$x(t)=Ce^t-t-1$ （只得到特解仅得 2 分，直接特解加齐次方程通解扣 2 分）

5. （10 分）近似计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 到小数点后二位有效数字（即误差小于 0.005）.

解：$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\approx 0.49$ （有限增量公式估算误差 4 分，直接带着ξ作积分估算误差扣 2 分，注意中值点随着 x 的变化而变化，未写出 0.49 扣 1 分）

6. （8 分）若 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、严格单调递增，且 $f(0)=0$。由已学到的知识知道其反函数 $x=g(y)$ 也连续、严格单调递增；对任取的 $a,b>0$，由今后将学到的知识知道 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,\int_0^b g(y)\mathrm{d}y$ 可积。试证明 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y\ge ab.$

简证：先对 $b=f(a)$ 的情况进行讨论。此时，对 $[0,a]$ 作 n 等分 $x_i=\frac{(i-1)a}{n}$，取标志点 $\xi_i=x_{i-1}$；相应地，考虑 $[0,b]$ 的分割 $y_i=f(x_i)$（由严格单调增知道这确实是一个分割）以及标志点 $\eta_i=f(x_i)$，容易证明黎曼和之和 $\sigma(f,P,\xi)+\sigma(g,\tilde{P},\eta)=ab$。由连续必一致连续知 $n\to\infty$ 时 $|P|\to 0,|\tilde{P}|\to 0$，于是上式极限为 $\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b g(y)\mathrm{d}y=ab.$

其它情况利用单调性可以在此基础上证明（略）。

（看图说话的证明无效，得 1 分；分部积分法的证明用到 f 或 g 可微的条件，是不对的，得 2 分）。