

课程名称：数学分析（一）

2021-2022 学年第（1）学期期末

本试卷共 5 道大题，满分 100 分

（考试结束后请将试卷、答题本一起交给监考老师）

1. （30 分）函数  $f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x^2-4)} + 1$ : a) 求  $f'(x), f''(x)$ ; b) 分析其单调性、极值与  $x > 2$  时的凹凸性; c) 求其渐近线; d) 计算  $\int f(x) dx$ .

2. （40 分）求：

1)  $\frac{d}{dx} \left[ \int \frac{xe^x}{(1+x^2)^2} dx \right]$ ;      2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[ \frac{2}{x + \sin x} - \cot x \right]$ ;

3) 螺线  $x = \theta \cos \theta, y = \theta \sin \theta$  在  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  处的切线方程;

4)  $f'(0)$ , 其中  $f(x) = \begin{vmatrix} x & \sin x & e^x & \ln(1+x) \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ;

5)  $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$ ;      6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2}$ ;

7)  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ ;      8)  $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$ .

3. （10 分）求解方程  $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$ .

4. （10 分）证明：实系数三次代数方程  $x^3 + px + q = 0$  有三个不等的实根的充要条件是  $4p^3 + 27q^2 < 0$ . 并由此推导实系数代数方程  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  有三个不等实根的充要条件。

5. （10 分）设单调增函数  $f(x), g(x) \in C[0,1]$ , 由今后将学到的知识知闭区间上连续函数必可积。求证： $\int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$ ; 给出等号成立的充要条件。

$$1. \text{ a) (10 分) } f(x) = \frac{1}{12} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} \right) + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{12} \left( -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x+1)^2} \right)$$

$$f''(x) = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{(x-2)^3} - \frac{1}{(x+2)^3} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3} \right)$$

b) (5 分)  $x = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$  时取极大值,  $x=0$  时取极小值。

凹

c) (5 分) 其中竖直渐近线  $x = \pm 1$ ,  $\pm 2$ , 3 分。另有渐近线  $y = 1$ 。

d) (10 分) 由上述  $f$  表达式可积分得

$$\frac{1}{12} \ln \left( \left| \frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+2)(x-1)^2} \right| \right) + x + C$$

(未写+C 扣 1 分)

2. (每题 5 分)

1)  $\frac{xe^x}{(1+x^2)^2}$ ;

2) 5/12; (正确使用洛必达法则或泰勒展开 3 分, 结果 2 分, 注意: 不能直

接把所有的  $\sin x$  都用  $x$  替换)

3)  $y = -\frac{2}{\pi}x + \frac{\pi}{2}$ ;

4) 0; 可计算行列式  $f(x) = 8(1 - e^x)$  再求导, 也可以直接按行列式第一行求导并在  $x = 0$  处取值后计算行列式;

5)  $\int_{1/e}^e |\ln x| dx = \int_{1/e}^1 -\ln x dx + \int_1^e \ln x dx = 2 - 2/e$ ; (不定积分算对, 最终计算结果错, 扣 1 分)

6)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{i}{n}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx$  (2 分)

$= \frac{1}{2} (x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})) \Big|_0^1$  (2 分)

$= \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$  (1 分)

7) 利用对称性  $\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{\pi \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi^2}{4}$ ;

8)  $\int \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \ln x d \frac{1}{1+x^2} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln x}{1+x^2} - \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \right]$

$= -\frac{1}{2} \left[ \frac{\ln x}{1+x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1+x^2} \right] + C$

3. 特征多项式 $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ 的根为 1 和 3，故方程的解为

$$x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t \quad (9 \text{ 分})$$

其中 $c_1$ 和 $c_2$ 为任意常数。 (1 分)

4. 充分性、必要性各 3 分，一般三次多项式情况 4 分。

“ $\Rightarrow$ ”: (已知三个根)

记  $f$  为原多项式，计算出 $f' = 3x^2 + p$ 。

$p \geq 0$ 时， $f$  单调从而至多一个根，矛盾。 (1 分)

$p < 0$ 时，由  $f'$  的正负可得出， $f$  在区间 $(-\infty, -\sqrt{\frac{-p}{3}})$ 上递增，区间 $(-\sqrt{\frac{-p}{3}}, \sqrt{\frac{-p}{3}})$ 上递减，区间 $(\sqrt{\frac{-p}{3}}, +\infty)$ 上递增。从而每个单调区间恰有一个根。 (1 分)

此时， $f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) > 0 > f(\sqrt{\frac{-p}{3}})$ ，则 $f(-\sqrt{\frac{-p}{3}})f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) < 0$ ，化简后即得 $4p^3 + 27q^2 < 0$ 。 (1 分)

“ $\Leftarrow$ ”: (已知 $4p^3 + 27q^2 < 0$ ) (解答中明确指出充分、必要两点占 1 分)

由 $4p^3 + 27q^2 < 0$ 知 $p < 0$ 。计算出 $f(-\sqrt{\frac{-p}{3}}) > 0$ 以及 $f(\sqrt{\frac{-p}{3}}) < 0$ 。 (1 分)

又有  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ， $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ，则对区间 $(-\infty, -\sqrt{\frac{-p}{3}})$ 、

$(-\sqrt{\frac{-p}{3}}, \sqrt{\frac{-p}{3}})$ 、 $(\sqrt{\frac{-p}{3}}, +\infty)$ 用介值定理知  $f$  有 3 个互异实根。 (1 分)

一般三次多项式 $x^3 + ax^2 + bx + c$ :

作变量代换  $x + \frac{a}{3} = y$ , (1 分)

代入计算后多项式则化为  $y^3 + \left(b - \frac{a^2}{3}\right)y + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right)$ , 此式有三个互异实根等价于原  $x^3 + ax^2 + bx + c$  有三个互异实根。 (2 分, 若无任何文字说明扣 1 分)

由前述,  $4\left(b - \frac{a^2}{3}\right)^3 + 27\left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right)^2 > 0$  为  $x^3 + ax^2 + bx + c$  有三个互异实根的充要条件。 (1 分)

5. 证明不等式成立 6 分, 推导取等条件 1 分, 写出正确的取等条件 3 分。

方法一: 考虑积分  $\int_0^1 h(x)dx$ , 其中  $h(x) = \int_0^1 (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dy$  (4 分)

对任意  $x$  和  $y$ , 由单调性  $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$  非负, 故  $h(x)$  非负, 其积分非负。又

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left( \int_0^1 (f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x)g(x) dy \right) dx - \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x)g(y) dy \right) dx \\ & \quad - \int_0^1 \left( \int_0^1 f(y)g(x) dy \right) dx + \int_0^1 \left( \int_0^1 f(y)g(y) dy \right) dx \\ &= 2 \int_0^1 f(x)g(x) dx - 2 \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx \end{aligned}$$

因此,  $\int_0^1 f(x)g(x) dx \geq \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx$ 。 (2 分)

若需等号成立, 则  $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$  对任意  $x, y$  均为 0。特别地, 有  $(f(1) - f(0))(g(1) - g(0)) = 0$ , 由对称性不妨设  $f(1) = f(0)$ , 则由单调性此时  $f$  恒为常数。 (1 分)

故取等条件为： $f$  或  $g$  为常值函数。代入回原不等式后，可验证不等式两边确实相等。 (3 分) (若答为  $f$  和  $g$  均为常值函数，扣 2 分)

方法二：

原不等式等价于

$$\int_0^1 \left( f(x) - \int_0^1 f(y) dy \right) g(x) dx \geq 0$$

记  $f(x) - \int_0^1 f(y) dy$  为  $F(x)$ ，则需证明

$$\int_0^1 F(x)g(x)dx \geq 0$$

(此处  $F(x)$  也是  $[0,1]$  上的连续单调增函数，且  $\int_0^1 F(x)dx = 0$ ) (4 分)

由  $f$  的单调性知  $F(0) \leq 0 \leq F(1)$ ，由连续介值定理， $F$  在  $[0,1]$  上存在零点，记为  $F(a) = 0$ ，则

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(x)g(x)dx &= -\int_0^a (-F(x))g(x)dx + \int_a^1 F(x)g(x)dx \\ &\geq -\int_0^a (-F(x))g(a)dx + \int_a^1 F(x)g(a)dx = g(a) \int_0^1 F(x)dx = 0 \end{aligned}$$

(2 分)

等号成立时： $\int_0^a (-F(x))(g(x) - g(a))dx = \int_a^1 F(x)(g(x) - g(a))dx = 0$ ，故  $F(x)(g(x) - g(a))$  恒为 0。

1)  $F(x)$  恒为 0，此时  $f$  为常数。

2)  $F(x)$  不恒为 0，此时  $F(0)$ 、 $F(1)$  均不为 0，故  $g(1) = g(a) = g(0)$ ，由  $g$

的单调性知  $g$  为常数。 (1 分)

故取等条件同方法一。 (3 分)

方法三：

利用定积分黎曼和的定义得出

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)g(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right)g\left(\frac{i}{n}\right) \\ \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right)\end{aligned}$$

(4 分)

由于  $f$ 、 $g$  单调性，利用排序不等式可知

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) \geq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right)$$

两边取  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  即得证本题所需不等式。 (2 分)

等号成立时， $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) g\left(\frac{i}{n}\right) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n}\right) \sum_{i=1}^n g\left(\frac{i}{n}\right) \right) = 0$

(这种方法难以证明  $f$  或  $g$  为常值函数)

(指出  $f$  或  $g$  为常值函数但未做任何说明的，此部分记 3 分)