课程名称：数学分析（一）A 卷答案

2023-2024 学年第（1）学期期末（2024 年 1 月 9 日） 本试卷共 **10** 道大题，满分 **100** 分

1. （10 分）求导数 1. $f(x)=x^{\cos x}+(\sin x)^x, x\in(0,\pi/2)$；

2. $f(x)=x\arctan x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$。

答：1. 设 $u=x^{\cos x}, v=(\sin x)^x$，则 $\ln u=\cos x\ln x, \ln v=x\ln(\sin x)$

对 x 求导得：

$$\frac{u'}{u}=\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x, \frac{v'}{v}=\ln(\sin x)+\frac{x}{\sin x}\cos x,$$

$$f'(x)=x^{\cos x}\left(\frac{\cos x}{x}-\sin x\ln x\right)+(\sin x)^x\left(\ln(\sin x)+x\cot x\right)$$

2. $f'(x)=\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2}=\arctan x$

2. （10 分）求二阶导数 1. $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$； 2. $f(x)=x+2x^2\sin\dfrac{1}{x}$。

答：1. $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$， $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$

2. $f'(x)=1+4x\sin\dfrac{1}{x}+2x^2\cos\dfrac{1}{x}(-\dfrac{1}{x^2})=1+4x\sin\dfrac{1}{x}-2\cos\dfrac{1}{x}$

$$f''(x)=4\sin\frac{1}{x}-4\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}-2\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

3. （10 分）计算极限：1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan^2 x)-x^2}{x^4}$； 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-x^{\frac{4}{3}}}$。

答：1.已知 $\tan x=x+\dfrac{1}{3}x^3+o(x^3)$

$$\ln(1+\tan^2 x)=\tan^2 x-\frac{1}{2}\tan^4 x+o(x^4)=x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{1}{2}x^4+o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan^2 x)-x^2}{x^4}=\frac{1}{6}$$。

2.令 $x=1+t, t\to 0$

$$\sqrt{2x-x^4}=\left(2(1+t)-(1+t)^4\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1-2t+o(t^2)\right)^{\frac{1}{2}}=1-t+o(t^2)$$

$$\sqrt[3]{x}=\left(1+t\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}t+o(t^2)$$

$$1-x^{\frac{4}{3}}=1-\left(1+t\right)^{\frac{4}{3}}=-\frac{4}{3}t+o(t^2)$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{2x-x^4}-\sqrt[3]{x}}{1-x^{\frac{4}{3}}}=1$$

4. （10 分）计算不定积分：1. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}$；2. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

答：1. $\int\frac{xdx}{\cos^2 x}=\int xd\tan x=x\tan x-\int\tan xdx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$

2.令 $x=\tan t$，

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{d\tan t}{\tan t\frac{1}{\cos t}}=\int\frac{dt}{\sin t}=\ln\left|\cot t-\frac{1}{\sin t}\right|+c$$

$$=\ln\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right)+c$$

$(\frac{1}{y}+1)dy=\frac{-1}{x}dx$

$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}+dy=0$ $\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-1}{x}}{\frac{1}{y}+1}=\frac{-1}{2}$

5. （10 分）求曲线 $\ln(xy)+y=1$ 在 $(1,1)$ 点处的切线方程和法线方程。

答：对 x 求导得 $\frac{1}{x}+\frac{y'(x)}{y}+y'(x)=0$，求得 $(1,1)$， $y'(1)=-\frac{1}{2}$，切线方程为：

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1)$$

法线方程为：

$$y-1=2(x-1)$$

6. （10 分）1. $a>0, b>0$，且 $a+b=1$；m,n 是正整数，求 $a^m b^n$ 的最大值。

2. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，证明：存在 $\xi\in(a,b)$ 满足：

$f(a)=a^m(1-a)^n$ $\quad f'(a)=m\cdot a^{m-1}(1-a)^n - a^m\cdot n(1-a)^{n-1}$

$=a^{m-1}(1-a)^{n-1}(m-ma-na)$

$(m-(m+n)a)$

$$2\xi\left[f(b)-f(a)\right]=(b^2-a^2)f'(\xi)。$$

答：1. $b=1-a$，$f(a)=a^m b^n=a^m(1-a)^n$。

对 $f(a)$ 求导得到 $f'(a)=ma^{m-1}(1-a)^n-na^m(1-a)^{n-1}$。

令 $f'(a)=0$ 得到 $a=0,a=1,a=\dfrac{m}{m+n}$。

由于 $f(0)=f(1)=0$，$a=\dfrac{m}{m+n}$ 是唯一的临界点，也必是最大值点，因此 $a^m b^n$ 的最大值是 $\dfrac{m^m+n^n}{(m+n)^{m+n}}$

2.证明：设 $g(x)=x^2$，由 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 满足：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ ，即证。

7. （10 分）已知 $f(x)+\int_0^x f(t)dt=\cos x$，求 $f(x)$。

答：令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 则 $F'(x)=f(x),F(0)=0$

因此 $F'(x)+F(x)=\cos x$，即 $F'(x)e^x+F(x)e^x=e^x\cos x=\left(e^xF(x)\right)'$

所以 $F(x)e^x=\int e^x\cos x dx=e^x\dfrac{\cos x+\sin x}{2}+C$

由 $F(0)=0$ 得到 $C=\dfrac{1}{2}$.进而 $F(x)=\dfrac{\cos x+\sin x}{2}-\dfrac{e^{-x}}{2}$

woc

于是 $f(x)=F'(x)=\dfrac{\cos x-\sin x}{2}+\dfrac{e^{-x}}{2}$

8. （10 分）设

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x)h^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n,$$

这里 $\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$，$0<\theta<1$ 为 Lagrange 余项，若 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,求 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$。

答：由带 Peano 余项的 Taylor 展开

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

又因为 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$,因此

$$\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

即 $f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{(n+1)}f^{(n+1)}(x)h+o(h),$

而由微分公式

$f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)=f^{(n+1)}(x)\theta h+o(\theta h),$

以上两式两边除以 h 并令 $h\to 0$，得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$

9. （10 分）设 $f(x)$ 二阶可导，在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，证明： $f''(x)$ 必有零点。

答：证明：

反证。

假设 $f''(x)$ 没有零点，由 Darboux 引理， $f''(x)$ 必然恒大于 0 或恒小于 0。

1. $f''(x)$ 恒大于 0，则 $f(x)$ 为严格凸函数。至少存在一点 x_0，使得 $f'(x_0)\neq 0$

考虑在 x_0 处的切线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，由 $f(x)$ 为严格凸函数，成立

$f(x)>y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), x\neq x_0$

因此若 $f'(x_0)>0, x\to+\infty, y\to+\infty$；

若 $f'(x_0)<0, x\to-\infty, y\to+\infty$；

与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界矛盾。

2.同理证明 $f''(x)$ 恒小于 0，与 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界矛盾。

因此假设不成立， $f''(x)$ 必有零点。

10. （10 分）计算定积分： $\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin x}dx$

答：设 $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)$，则 $y=f^{-1}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin x}$

$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$ 是 $f(x)$ 在[0,1]之间与 x 轴围的面积。

$\int_0^1\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin x}dx=\int_0^1\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin y}dy=\int_0^1 f^{-1}(y)dy$ 是 $f(x)$ 在[0,1]之间与 y 轴围的面

积。两者面积之和为边长为 1 的正方形面积。所以

$$\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)+\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin x}\,dx=1$$