广义相对论入门

原著：Bernard Schutz　　翻译：chzruan

2017 年 7 月 1 日

Contents

1. 狭义相对论

2. 狭义相对论中的向量分析

2.1 向量的定义

2.2 向量代数

2.3 四维速度

世界线的四维速度（four-velocity, 简称四速）是一种十分重要的向量。伽利略的三维几何中，速度是与粒子运动轨迹相切的向量。四维几何的四维速度 $\vec{U}$ 定义为与粒子世界线相切的、在粒子的参考系中长度为单位时间的向量。先考虑最简单的匀速直线运动粒子，在与粒子相对静止的惯性系中，根据定义，四维速度向量的方向与时间轴平行、长度为单位时间，这意味着四维速度就等于该系的基向量 $\vec{e}_0$。于是，匀速直线运动粒子的四维速度定义为该粒子静止惯性系的基向量 $\vec{e}_0$. “四维速度”名字的来历是 $\vec{U}$ 的空间分量与通常所说的粒子的三维速度 $\boldsymbol{p}$ 关系密切，参见下面的例子与(2.3)式。

*变速运动的粒子*不存在始终在其中静止的惯性系。然而，*仍然存在着*与粒子瞬时静止的惯性系——它的速度在一瞬间与粒子速度相同（共动参考系），不过在下一时刻就不再是共动的了。这个参考系称为*瞬时共动参考系 (momentarily comoving reference frame,* **MCRF** *)*，这个概念极其重要。（实际上，一个粒子在某一特定事件点有无数个 MCRF；它们的速度相同，而空间坐标轴相差旋转变换。不过这通常不重要，取哪个空间轴取向的 MCRF 都行）变速运动粒子（在某一事件点）的*四速定义*为在该事件点的 MCRF 的基向量 $\vec{e}_0$. 该向量与（弯曲的）粒子世界线相切。图2.1中，粒子在事件 $\mathscr{A}$ 的 MCRF 是 $\bar{O}$ 系，图中画出了基向量，$\vec{e}_{\bar{0}}$ 就是粒子在 $\mathscr{A}$ 点的四速 $\vec{U}$.

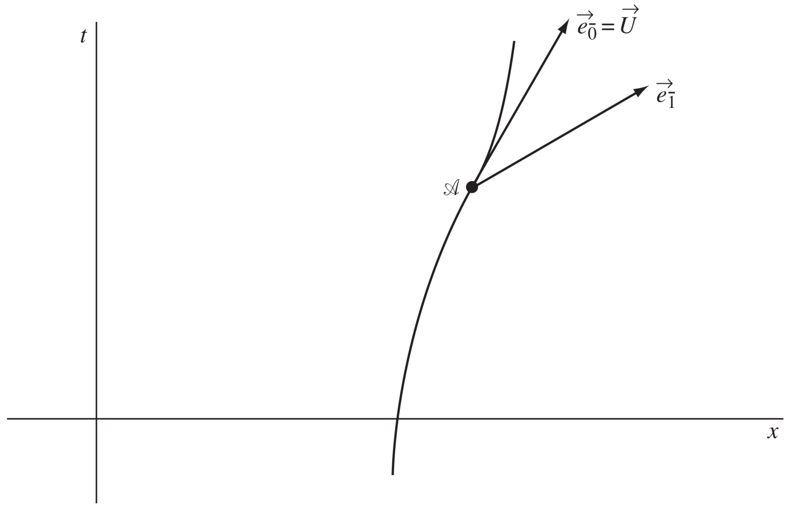

图 2.1: 粒子世界线在 $\mathscr{A}$ 点的四维速度与 $MCRF$ 基向量

2.4 四维动量

四维动量 $\vec{p}$ 定义为

$$\vec{p} = m\vec{U}, \tag{2.1}$$

其中 m 是粒子的静止质量 *(rest mass*，简称静质量*)*，也就是在粒子静止的坐标系中测得的粒子质量。四动量在任一惯性系 $\mathcal{O}$ 中的分量记作

$$\vec{p} \underset{\mathcal{O}}{\to} (E, p^1, p^2, p^3). \tag{2.2}$$

分量 p^0 记作 E，称为粒子在坐标系 $\mathcal{O}$ 中的能量 *(energy)*。其余分量称为四动量的空间分量 p^i.

例子

静质量为 m 的粒子在坐标系 $\mathcal{O}$ 中沿 x 轴方向运动，速度为 $\boldsymbol{v}$，粒子四速、四动量在 $\mathcal{O}$ 系的分量是什么？粒子在其中静止的坐标系记作 $\bar{\mathcal{O}}$，该系的时间基向量为 $\vec{e}_{\bar{0}}$。根据四速与四动量的定义有

$$\begin{aligned} \vec{U} &= \vec{e}_{\bar{0}}, & \vec{p} &= m\vec{U}, \\ U^\alpha &= \Lambda^\alpha{}_{\bar{\beta}}(\vec{e}_{\bar{0}})^{\bar{\beta}} = \Lambda^\alpha{}_{\bar{0}}, & p^\alpha &= m\Lambda^\alpha{}_{\bar{0}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

由此可得

$$
\begin{aligned}
U^0 &= (1-v^2)^{-1/2}, & p^0 &= m(1-v^2)^{-1/2},\\
U^1 &= v(1-v^2)^{-1/2}, & p^1 &= mv(1-v^2)^{-1/2},\\
U^2 &= 0, & p^2 &= 0,\\
U^3 &= 0, & p^3 &= 0.
\end{aligned}
$$

对于很小的 v，$\vec{U}$ 的空间分量近似为 $(v,0,0)$，$\vec{p}$ 的空间分量为 $(mv,0,0)$，从这就能看出它们的名字——四维速度、四维动量——的合理性。还是对于很小的 v，能量近似为：

$$E := p^0 = m(1-v^2)^{-1/2} \approx m + \frac{1}{2}mv^2.$$

它等于静质能 (rest-mass energy) 与（伽利略形式的）动能之和。

四维动量守恒

伽利略力学中，粒子的碰撞过程遵从能量、动量守恒定律。因为 $\vec{p}$ 的分量在非相对论极限下退化为伽利略形式的能量、动量，因此很自然地假设在相对论情形下，四维向量 $\vec{p}$ 也守恒。也就是说，几个粒子发生相互作用，粒子的总动量：

$$\vec{p} := \sum_{\text{所有粒子,编号为}(i)} \vec{p}_{(i)}, \tag{2.4}$$

在碰撞过程的前后不变。（$\vec{p}_{(i)}$ 是第 i 个粒子的动量）

四维动量守恒定律实际上是个额外假设，因为我们只知道它的非相对论极限是正确的。不过就像 SR 的两条基本假设那样，四动量守恒经历了丰富的实验验证。至少它预言了能量守恒定律必须包括静质能：静质量可以消灭、相应的能量可以转化为动能从而化为热能。这个预言每天都在被核电站所验证。

上面四动量守恒的陈述中掩藏了很重要的一点：一次碰撞“之前”与“之后”的含义是什么？假设不同的粒子发生了两次碰撞，这两个事件的间隔是类空的，如下图。要将同一时刻的四动量相加，应该沿着等 t 时刻还是等 $\bar{t}$ 时刻？如图2.2所示，$\mathcal{O}$ 系的测量结果为：时间 $\mathscr{A}$ 发生在 $t=0$ 之前，时间 $\mathscr{B}$ 在之后，因此 $t=0$ 时刻的总动量等于 $\mathscr{A}$ 之后加上 $\mathscr{B}$ 之前的动量。而在 $\bar{\mathcal{O}}$ 系中，事件 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 同时发生于时刻 $\bar{t}=0$ 之前，因此 $\bar{t}=0$ 时刻的总动量等于事件 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 之后的动量之和。甚至还可以找到一个坐标系，在其中事件 $\mathscr{B}$ 比 $\mathscr{A}$ 发生的更早，and the adding-up may be the reverse of $\mathcal{O}$'s.

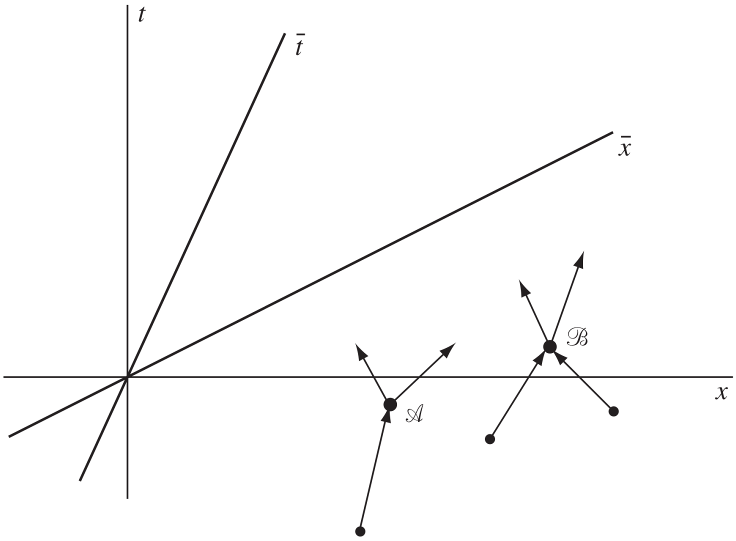

图 2.2: 当考虑几个碰撞过程时，组成某一时刻的总动量的各个四动量取决于坐标系，但总的四维动量是在所有坐标系中相同的四维向量；它的分量在坐标系之间的变换规律服从 Lorentz 变换。

这实际上没问题。既然每个碰撞过程都服从动量守恒，那么事件 $\mathscr{A}$ 之后与之前的动量和相等，事件 $\mathscr{B}$ 也一样。因此每个惯性观者都得到相同的总的四动量 $\vec{p}$。（它的分量随坐标系的不同而不同，但是它是同一个向量。）有一点很重要：任意观者可以定义他自己的等时线（这实际上是等时的三维空间，称之为四维时空中等时的*超平面*），把那个时刻的所有动量相加，得到的向量与其他任何观者的结果都相同。理解这一点十分重要，因此这种守恒律会在之后再次出现。

质心 (CM) 系

质心系 (center of momentum frame, CM) 是总动量的空间分量在其中为零的惯性系：

$$\sum_i \vec{p}_{(i)} \xrightarrow[\text{CM}]{} (E_{\text{TOTAL}}, 0, 0, 0). \tag{2.5}$$

与 MCRF 同理，任意相对于 CM 系静止的坐标系也是 CM 系。

2.5 标量积

2.6 应用

2.7 光子

2.8 扩展阅读

2.9 习题

3. 狭义相对论中的张量分析

4. 狭义相对论中的理想流体

5. 曲率的序言

5.1 引力与曲率的关系

目前我们都是在狭义相对论 (SR) 中讨论问题。力在 SR 当中的地位很重要，但是前面从来没有直接研究引力。SR 的一个重要基础是存在覆盖整个时空的惯性系：全体时空可以由一个坐标系描述，这个系的所有坐标点都相对于原点静止，所有的坐标钟与原点的钟走时率相同。从这个基本假设可以导出时间间隔 Δs^2 的概念，它给物理事件赋予了具有不变性的几何意义。例如，两事件之间的类时间隔是经过这两个时件的钟所走过的时间；类空间隔是在这两个事件同时的坐标系当中的空间距离。

5.2 极坐标系的张量代数

考虑欧几里得平面。直角坐标 $\{x, y\}$，极坐标 $\{r, \theta\}$ 之间的关系为:

$$\left.\begin{aligned} r &= (x^2+y^2)^{1/2}, \quad & x &= r\cos\theta, \\ \theta &= \arctan(y/x), \quad & y &= r\sin\theta. \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

由直角坐标的微小增量 $\Delta x, \Delta y$ 造成的 $\Delta r, \Delta\theta$ 为

$$\left.\begin{aligned} \Delta r &= \frac{x}{r}\Delta x + \frac{y}{r}\Delta y = \cos\theta\Delta x + \sin\theta\Delta y, \\ \Delta\theta &= -\frac{y}{r^2}\Delta x + \frac{x}{r^2}\Delta y = -\frac{1}{r}\sin\theta\Delta x + \frac{1}{r}\cos\theta\Delta y, \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

上式到一阶小量都成立。

也可以使用其它坐标系。记一般的坐标系为 $\{\xi, \eta\}$:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \xi(x,y), \quad \Delta\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\Delta y, \\ \eta &= \eta(x,y), \quad \Delta\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\Delta y. \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

为了保证 (ξ, η) 是个好坐标系，任意两个不同的点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 应该对应不同的 (ξ_1, η_1) 与 (ξ_2, η_2)（通过(5.3)式对应）。例如，按 $\xi = x, \eta = 1$ 定义的坐标系不是好坐标系，因为不同的两点 $(x = 1, y = 2)$ 和 $(x = 1, y = 3)$ 都对应 $(\xi = 1, \eta = 1)$。数学上，这要求如果方程(5.3)中的 $\Delta\xi = \Delta\eta = 0$，则必须对应相同的点，即 $\Delta x = \Delta y = 0$. 这意味着(5.3)式的行列式非零：

$$\det \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \neq 0. \tag{5.4}$$

这个行列式称为坐标系变换(5.3)式的 *Jacobian*（雅可比行列式）。如果 Jacobian 在某一点为零，则称坐标变换在该点具有奇性 *(singular)*。

向量与 1 形式

向量的旧的定义是在任意坐标变换下与位移的变换方式相同的量。也就是说，向量 $\Delta\vec{r}$ 可以表示为[1]位移 $(\Delta x, \Delta y)$，或者在极坐标系表示为 $(\Delta r, \Delta\theta)$，或者在一般坐标系中为 $(\Delta\xi, \Delta\eta)$. 根据(5.3)式，对于微小的 $(\Delta x, \Delta y)$ 有：

$$\begin{pmatrix} \Delta\xi \\ \Delta\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}. \tag{5.5}$$

定义变换矩阵

$$(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta}) = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix}, \tag{5.6}$$

则可以将任意向量 $\vec{V}$ 的分量的变换规律写成与 SR 相同的形式：

$$V^{\alpha'} = \Lambda^{\alpha'}{}_{\beta} V^{\beta}, \tag{5.7}$$

其中不带撇的指标代表 (x, y)，带撇指标表示 (ξ, η)，指标取 $1, 2$. 向量可以定义为分量按照(5.7)式变换的这样的量。不过，存在一种更加复杂而自然的、现代的定义方式，下面进行介绍。

[1]欧几里得空间的向量用箭头标记，其分量指标 (1, 2) 用希腊字母表示，求和对所有指标进行。

考虑平面上的标量场 ϕ。给定坐标系 (ξ,η) 就能计算偏导数 $\partial\phi/\partial\xi$ 和 $\partial\phi/\partial\eta$. 定义 1 形式 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ 为（在坐标系 (ξ,η) 中）具有如下分量的几何对象：

$$\tilde{\mathrm{d}}\phi \to (\partial\phi/\partial\xi, \partial\phi/\partial\eta). \tag{5.8}$$

这是 1 形式的一般定义，每个标量场都定义了一个 1 形式。1 形式分量的变换规律可以通过链式法则 (chain rule) 导出：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial\phi}{\partial y}, \tag{5.9}$$

$\partial\phi/\partial\eta$ 同理。用行向量可以方便地用矩阵形式表示：

$$\begin{pmatrix}\partial\phi/\partial\xi & \partial\phi/\partial\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta \\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

1 形式的变换矩阵可类比(5.6)式定义为一组 (x,y) 坐标关于 (ξ,η) 坐标的偏导数：

$$(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}) = \begin{pmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta \\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{pmatrix} \tag{5.11}$$

这样，(5.10)式就可以写成分量求和的形式：

$$(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\beta'} = \Lambda^{\alpha}{}_{\beta'}(\tilde{\mathrm{d}}\phi)_{\alpha}. \tag{5.12}$$

注意，上式的求和是对变换矩阵的第一个分量进行的，这对应于行向量左乘矩阵。

值得一提的是，SR 从来没考虑过行向量，因为 Lorentz 变换矩阵是个简单的对称矩阵。不过即使是上面的简单情况也要用到行向量。当张量的指标多于两个时，矩阵表示就非常累赘。GR 需要处理四个甚至五个指标的张量，因此后面一般用代数形式（如(5.12)式）表示变换，后面就不再使用矩阵表示了。

本节已经看到，在现代观点之下，张量代数的基础是 1 形式的定义。它比旧定义更加自然，旧定义首先定义了单个向量 $(\Delta x, \Delta y)$，其它向量类比它定义。而现代定义利用偏导数定义了一类 1 形式，1 形式分量的变换规律自然地随之导出。

向量定义为将 1 形式映射为实数的线性函数。这个定义的具体含义在下一小节讲述。先来说明与 SR 形式的相似性，向量的变换规律为 (5.7) 式，有趣的是变

换矩阵 $(\Lambda^{\alpha'}{}_{\beta})$ 和 $(\Lambda^{\alpha}{}_{\beta'})$ 互逆。它们相乘得到：

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y\\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial x/\partial\xi & \partial x/\partial\eta\\ \partial y/\partial\xi & \partial y/\partial\eta\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\xi} & \frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\eta}+\frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\eta}\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{5.13}$$

利用链式法则与偏导数的定义可以算出结果为

$$\begin{pmatrix}\partial\xi/\partial\xi & \partial\xi/\partial\eta\\ \partial\eta/\partial\xi & \partial\eta/\partial\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\tag{5.14}$$

曲线与向量

通常所说的曲线是平面上一系列连续的点，我们把它称作*路径 (path)*，而把曲线专指参数化的路径。这也是现代数学的做法，将*曲线 (curve)* 定义为从实数区间到平面路径的映射。这意味着曲线是每一点都对应一个实数的路径，实数称为参数 (parameter)，记作 s。每一点的坐标表示为参数 s 的函数就定义了平面上的一条曲线：

$$\text{曲线：}\{\xi=f(s),\eta=g(s),\quad a\le s\le b\}\tag{5.15}$$

将参数改变为 $s'=s'(s)$（新参数是旧参数的函数，点不变），则有

$$\text{曲线：}\{\xi=f'(s'),\eta=g'(s'),\quad a'\le s'\le b'\},\tag{5.16}$$

其中 f',g' 是新的函数，而 $a'=s'(a),b'=s'(b)$. 上式在数学上是一条新的曲线，尽管它的*像 (image)*（所经过的平面上的点）与原来相同。因此同一路径对应无数条曲线。

标量场 ϕ 沿曲线的导数是 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$，依赖于 s，因此变换参数，导数也随之变换。可以将导数写为

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}=\langle\tilde{\mathrm{d}}\phi,\vec{V}\rangle,\tag{5.17}$$

其中 $\vec{V}$ 是分量为 $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s,\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)$ 的向量，这个向量只与曲线有关，而 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ 只依赖于 ϕ. 因此 $\vec{V}$ 是与曲线特征有关的向量，称之为*切向量 (tangent vector)*。（见图5.1，

显然它与曲线相切) ~~画外音：哪里显然了……~~

所以，向量可以看作是给定 ϕ 而产生 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ 的东西。这就引出了最现代的观点，曲线的切向量应该称为 $\mathrm{d}/\mathrm{d}s$。有些相对论文献偶尔使用这一符号。不过我们把它记作 $\vec{V}$，知道它的分量是 $(\mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s, \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s)$ 就好了。注意，平面上的一条路径上的任一点都有着无数切向量，它们的方向相同而长度不同，它们可以视为不同曲线（在一点邻域中的参数化不同）的切向量。曲线是给定了参数的路径，因此曲线的切向量唯一。此外，即使两条曲线在某一点的切向量相等，它们在其它点也可以不同，根据 Taylor 展开式 $\xi(s+1) \approx \xi(s) + \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s$ 可见，$\vec{V}(s)$ 近似沿曲线从 s 到 $s+1$ 延展。

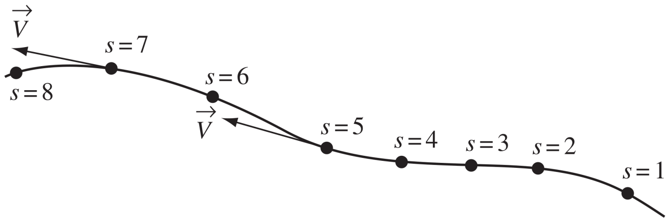

图 5.1: 一条曲线，曲线的参数，以及曲线的切向量

注意 s 在坐标变换下不变（它的定义和坐标系无关），而 $\vec{V}$ 的分量变化，因此根据链式法则可得

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\xi/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\xi/\partial x & \partial\xi/\partial y \\ \partial\eta/\partial x & \partial\eta/\partial y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{d}s \\ \mathrm{d}y/\mathrm{d}s \end{pmatrix}. \tag{5.18}$$

这与前面的向量变换律(5.5)式相同。

总结一下现代观点，向量是与某条曲线相切、将 $\tilde{\mathrm{d}}\phi$ 映射为 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s$ 的线性函数。这样，下面就能更进一步地研究极坐标系。

极坐标系的 1 形式基与向量基

显然，坐标基向量的变换规律为：

$$\vec{e}_{\alpha'} = \Lambda^{\beta}{}_{\alpha'}\vec{e}_{\beta},$$

在极坐标下：

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= \Lambda^{x}{}_{r}\vec{e}_x + \Lambda^{y}{}_{r}\vec{e}_y \qquad (5.19) \\ &= \frac{\partial x}{\partial r}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial r}\vec{e}_y \\ &= \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y, \qquad (5.20) \end{aligned}$$

类似有

$$\begin{aligned}\vec{e}_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta}\vec{e}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta}\vec{e}_y \\ &= -r\sin\theta\vec{e}_x + r\cos\theta\vec{e}_y, \end{aligned} \tag{5.21}$$

注意，上式已经利用了

$$\Lambda^x{}_r = \frac{\partial x}{\partial r}. \tag{5.22}$$

类似地，“反向”变换的矩阵元为

$$\Lambda^r{}_x = \frac{\partial r}{\partial x}. \tag{5.23}$$

这个变换矩阵十分简单：矩阵指标的上下顺序对应到求导的上下关系就好了。

1 形式基的关系可类似求出：

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{d}}\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x}\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{\partial \theta}{\partial y}\tilde{\mathrm{d}}y, \\ &= -\frac{1}{r}\sin\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \frac{1}{r}\cos\theta\tilde{\mathrm{d}}y. \end{aligned} \tag{5.24}$$

（注意上式与普通的微积分运算(5.2)式相似）。同样可得

$$\tilde{\mathrm{d}}r = \cos\theta\tilde{\mathrm{d}}x + \sin\theta\tilde{\mathrm{d}}y. \tag{5.25}$$

根据以上内容可以画出不同点的基（图5.2）。容易画出基向量，1 形式基可以画出 $\tilde{\mathrm{d}}r$ 和 $\tilde{\mathrm{d}}\theta$ 的等 r、等 θ 面辅助进行，不同位置的面的指向不同。

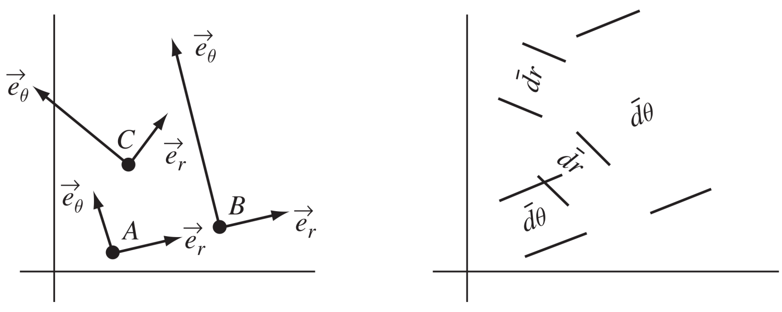

图 5.2: 极坐标系的向量基与 1 形式基图示

上面体现了一个非常重要的事实：各点的基互不相同。例如，图5.2中 A 点与 C 点的向量基不平行。这是由于基向量指向坐标增加的方向，而这个方向随着点

的改变而改变。此外，基的长度也不是恒定不变的。例如，根据(5.21)式可得

$$|\vec{e}_\theta|^2 = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta = r^2, \tag{5.26a}$$

$$|\vec{e}_r| = 1, \quad |\tilde{\mathrm{d}}r| = 1, \quad |\tilde{\mathrm{d}}\theta| = r^{-1}. \tag{5.26b}$$

距离原点越远，$\vec{e}_\theta$ 的模长越大。因为 $\vec{e}_\theta$ 在 (r,θ) 系的分量为 $(0,1)$，意味着它表示 θ 分量的 1 单位的位移，即 1 弧度。在半径更大的地方，移动 1 弧度的长度更大。因此极坐标基并非单位基。其它基的模长容易求出。可以发现，$|\tilde{\mathrm{d}}\theta|$ 在 $r=0$ 附近更大（更紧密），因为一个给定的向量在原点附近覆盖的 θ 范围更大。

度规张量

5.3 极坐标系的张量微积分

6. 弯曲流形

7. 弯曲时空中的物理学