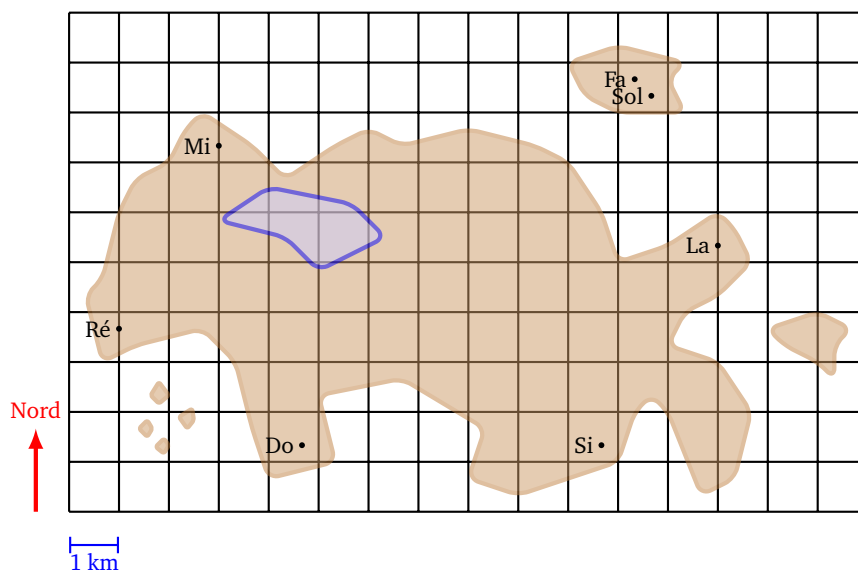


Mathématiques du GPS

1. L'île aux 7 phares

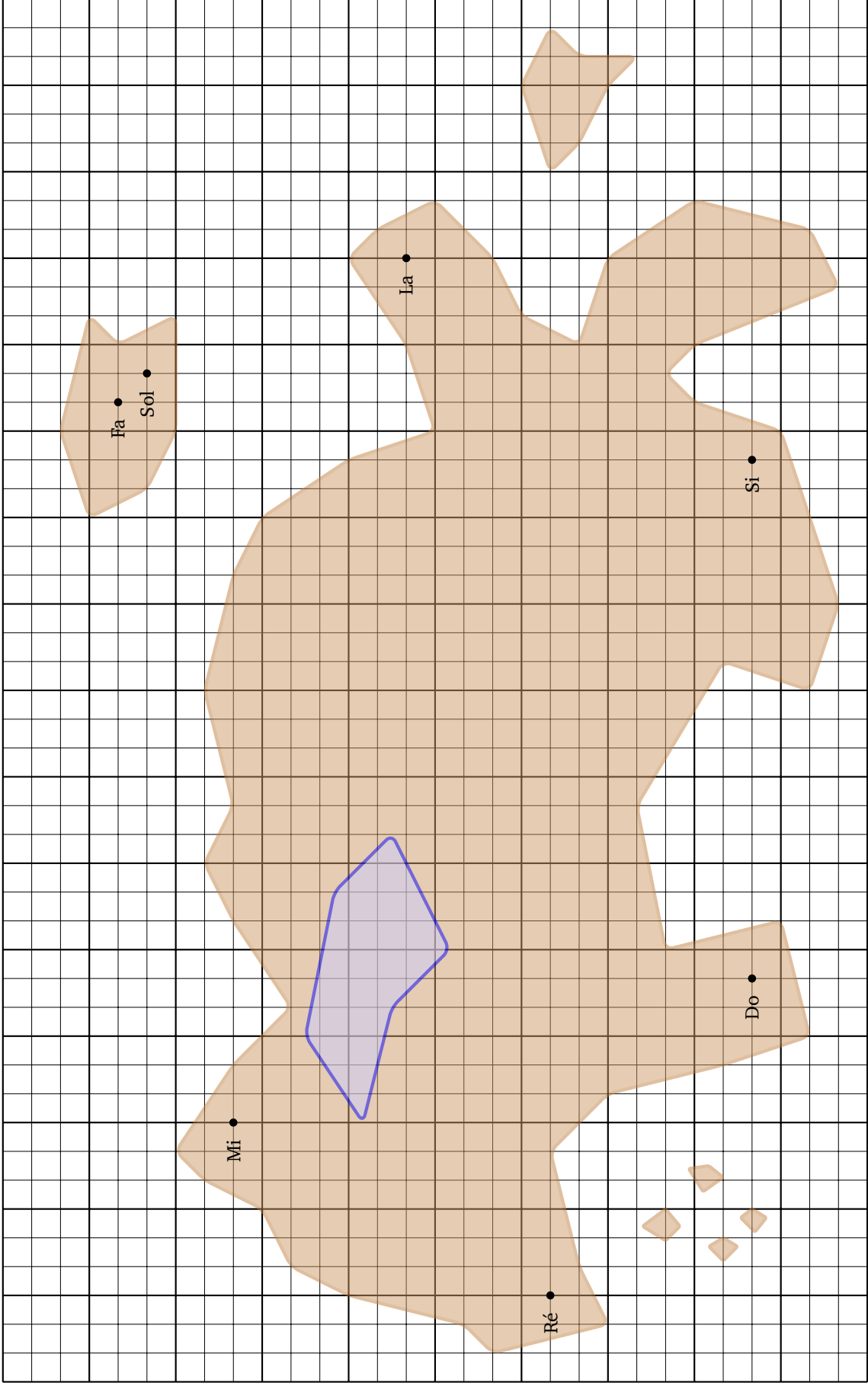
1.1. Perdu !

Au large des côtes bretonnes existe une île ayant la particularité étrange de posséder 7 phares. Cette île, maintenant inhabitée, appartenait à un savant passionné de navigation et de technologie. J'étais venu visiter chacun des 7 phares. Bien sûr la nuit chaque phare s'illumine et émet un signal particulier afin que les marins puissent contourner l'île. Chaque phare porte le nom d'une note de musique. En effet, lorsque le brouillard tombe sur l'île, les cornes de brume résonnent, chacune émettant un son différent, *do, ré, mi, fa,...* En plus le savant avait construit un mécanisme horloger très précis de sorte que toutes les 10 minutes, à la seconde près, les 7 cornes de brume sonnaient un bref coup.



En arrivant sur l'île, j'avais réglé ma montre sur l'horloge du phare *Do* après avoir grimpé tout en haut, puis j'étais parti explorer l'île. Après une belle matinée, le brouillard apparût et, un peu avant midi, je voyais à peine le bout de mes pieds. J'avais bien une carte de l'île et une boussole, mais comme je ne savais pas où je me trouvais, j'étais complètement perdu ! Commenant à m'inquiéter, j'entends tout à coup le son d'une corne de brume, puis quelques instants après une deuxième et bientôt les 7 cornes résonnent chacune à son tour. Rassuré par ces signaux et assis sur un rocher je me fis quand même la remarque que les horloges n'étaient pas si précises qu'on le disait car elles avaient sonné à plusieurs secondes d'écart.

Plongé dans mes réflexions et surtout dans le brouillard, je n'avais rien d'autre à faire que de patienter 10 minutes pour les prochains coups de corne. Je me demandais si les cornes de brume pouvaient m'aider à m'orienter, peut-être qu'en me dirigeant vers le phare émettant le son le plus fort j'arriverais à le rejoindre. Mais malheureusement, le brouillard atténuait les sons et je ne pouvais pas déterminer d'où ils venaient.



Nord

1 s

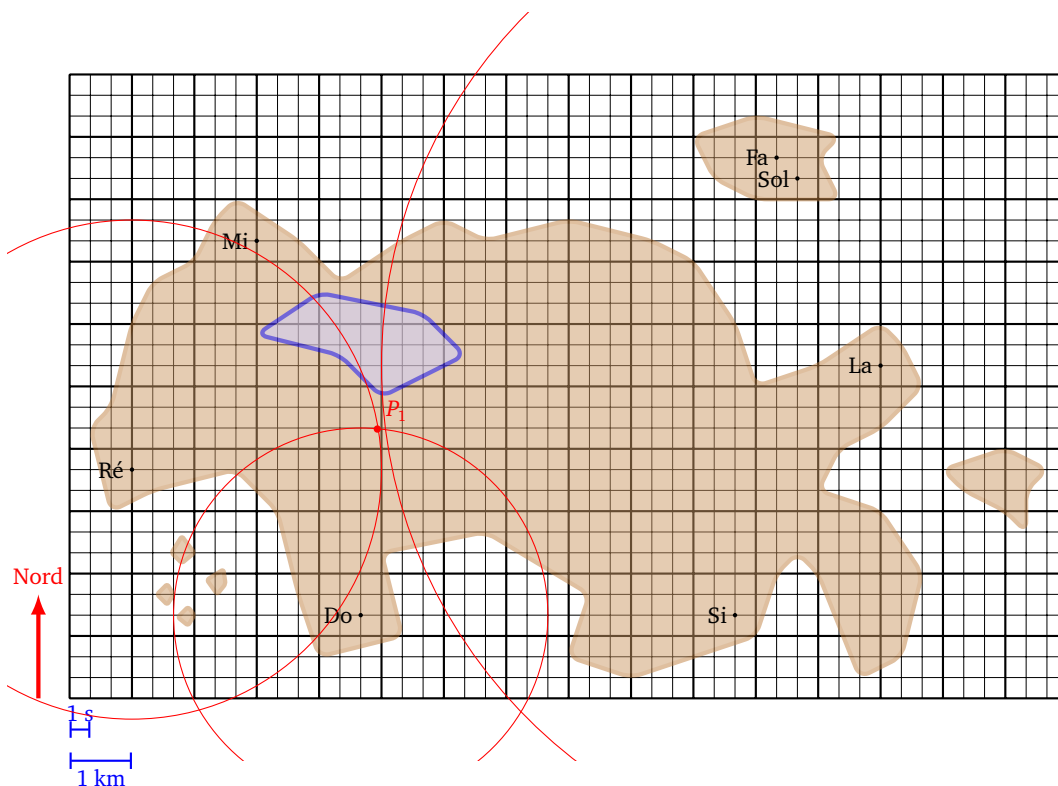
1 km

1.2. À toute vitesse

Soudain une illumination : et si les horloges des phares étaient parfaitement réglées, mais que les sons ne me parvenaient pas tous en même temps. La nuit d'orage, lorsque que j'étais petit, je comptais dans mon lit le temps qui s'écoulait entre l'éclair et le tonnerre, pour savoir si l'orage était loin ou proche. En effet, la lumière de l'éclair arrive quasi-instantanément alors que le son du tonnerre voyage moins vite. On disait qu'un décalage de 3 secondes correspondait à 1 kilomètre. Me souvenant que la vitesse du son dans l'air est de 1200 km/h, soit 333 m/s, il faut bien 3 secondes au son pour parcourir 1 kilomètre.

Aussitôt je sors ma trousse de survie : papier, crayon, règle, compas et je me prépare pour les prochains signaux de 12h00. À 12h00 et 0 seconde rien. J'attends 1 seconde, 2 secondes, toujours rien ! Enfin à 12h00 et 9 secondes j'entends un *do*, suivi à 12h00 et 12 secondes de *ré*, puis les sons s'enchaînent sans que j'ai le temps de les discerner, sauf un *la* feutré qui conclut à 12h00 et 24 secondes.

Je me concentre sur le son *do*. Le son *do* est parti du phare à 12h00 tapante et arrive à mes oreilles 9 secondes plus tard. Il a donc mis 9 secondes pour voyager, et comme en 3 secondes il parcourt 1 kilomètre, il a voyagé sur 3 kilomètres. Je me trouve donc à 3 km du phare *do*. Géométriquement cela signifie que je me trouve sur un cercle de rayon 3 km, centré sur le phare *do*. Sur la carte de l'île, je m'empresse de tracer ce cercle.



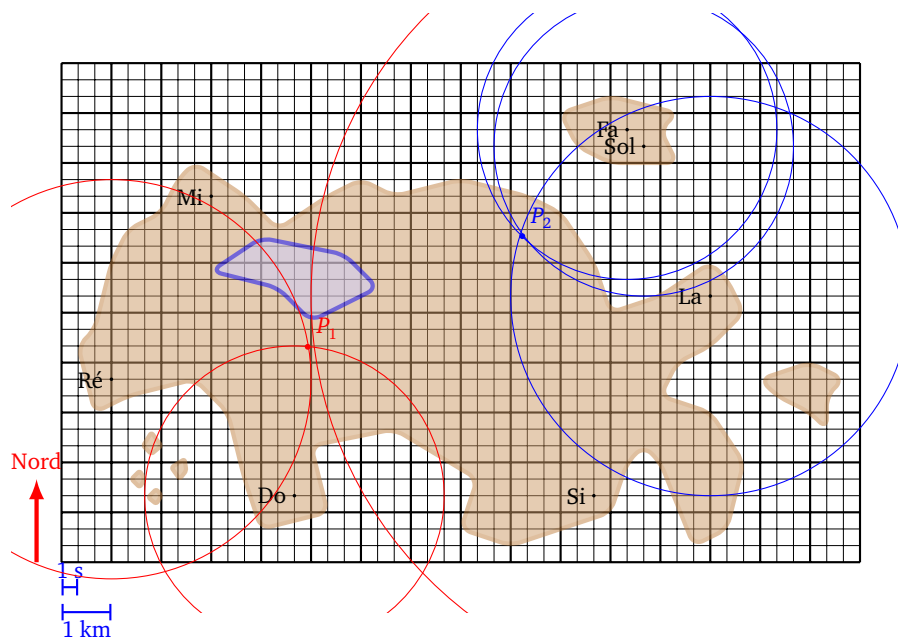
Bien sûr cela ne m'aide qu'à moitié car je ne sais pas où je suis exactement situé sur ce cercle. Voyons ce que m'indique le phare *ré*, le son a mis 12 secondes à parvenir, donc je suis à 4 km du phare *ré*. Je dessine le cercle centré sur ce phare et de rayon 4 km.

Fantastique ! Ces deux cercles se coupent en seulement deux points (normal pour deux cercles). Comme l'un des points est au milieu de l'eau, je sais exactement où je suis. Je ne suis plus perdu !

1.3. Pour aller plus loin...

Avant d'aller plus loin je préfère vérifier mes déductions. Le son *la* du dernier phare est parvenu après 24 secondes, donc je suis à 8 km du phare *la*. Je trace le cercle correspondant et effectivement ce cercle passe presque par le point où je pensais me trouver. Voilà qui est rassurant. Ce qui l'est moins c'est que depuis mon arrivée au phare du *do*, je me suis dirigé plein Nord et que si je continue je vais me diriger droit vers les marais. Je décide donc de m'orienter plutôt vers le Nord-Est afin de rejoindre les phares jumeaux *fa* et *sol*.

Au bout d'une heure de marche plus ou moins laborieuse dans le brouillard, je refais le point avec les cornes de brume de 13h00. Cette fois à 13h00 et 9 secondes j'entends en même temps le phare *fa* et le phare *sol*. Puis à 13h00 et 12 secondes le phare *la*.



Je reprends ma carte, je dessine un cercle de rayon 3 km centré sur le phare *fa*, puis un autre cercle de même rayon mais centré sur le phare *sol*. Malheureusement ces deux cercles sont trop proches l'un de l'autre, ce qui fait qu'avec l'épaisseur du trait, j'ai une grosse zone d'intersection. Pas de problème, je trace le cercle centré sur le phare *la* de rayon 4 km qui lui recoupe correctement les deux premiers cercles en un seul point de l'île (et pas dans l'eau).

Je sais encore une fois précisément où je suis. En plus par rapport à ma position d'il y a une heure, je mesure sur la carte que j'ai parcouru un peu plus de 4 km (environ 4,3 km) donc ma vitesse moyenne (en ligne droite) est de plus de 4 km/h.

Enfin, je vois clairement que ma direction depuis 12h00 n'est pas Nord-Est mais plutôt Est-Nord-Est, en fait avec mon rapporteur, je mesure précisément que mon cap est de 63° par rapport au Nord. Je n'ai même plus besoin de boussole. C'est alors que le soleil revient, et je me trouve non loin des phares jumeaux.

1.4. À vous de jouer

Si vous avez bien compris voici une liste de petits problèmes de difficulté croissante. Armez-vous de votre matériel de géométrie, d'un papier et d'un crayon.

1. À la suite de ma balade je me trouve à un point P_3 où j'entends le phare *si* à 6 secondes et le phare *la* à 15 secondes. Où suis-je ?
2. Deux heures plus tard, je me trouve au point P_4 où j'entends le phare *ré* à 8 secondes et le phare *mi* à 11 secondes. Où suis-je ? Quelle a été ma vitesse moyenne ? Et ma direction par rapport au Nord ?
3. Je me trouve dans une zone située entre 9 et 10 secondes du phare *ré* et entre 11 et 12 secondes du phare *do*. Dessiner cette zone. Mesurer graphiquement l'erreur maximale commise.
4. Partant de la côte ouest, je me promène en prenant bien soin d'entendre la corne de brume des phares *ré* et *mi* en même temps. Vers quel phare je me dirige ?
5. Je me promène maintenant de sorte que le son venant du phare *si* arrive avec le double de temps que le son venant du phare *do*. Où puis-je être ? Si je ne suis pas sur l'île principale, où suis-je ?
6. Ma montre fonctionne toujours, mais elle n'est plus à l'heure ! J'entends le phare *si*, puis 5 secondes plus tard le phare *la* et encore 3 secondes après le phare *ré*. Où suis-je ?

1.5. Bilan

Voici quelques conclusions de notre visite sur l'île.

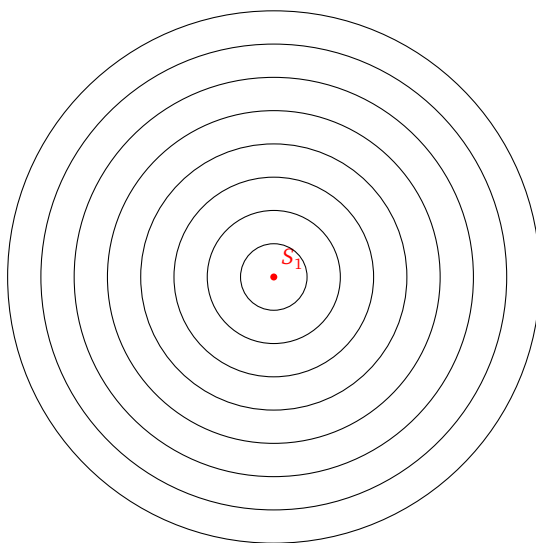
- Avec deux signaux, je détermine deux positions possibles. L'une des deux peut souvent être exclue car aberrante.
- En répétant les mesures des signaux au fil du temps, je peux en déduire mon parcours, mais aussi ma vitesse ainsi que la direction suivie.

- Si mes mesures sont imprécises alors, au lieu d'un point, je me situe dans une zone.
- Deux signaux qui proviennent de points très proches (comme le cas des phares jumeaux) fournissent une information redondante, qui ne permet pas de déterminer sa position avec une précision raisonnable.
- La mesure d'un troisième signal permet de valider le choix d'un point (par exemple s'il reste deux points possibles) ou bien de réduire la taille d'une zone.
- Enfin, avec trois signaux je peux me passer d'une montre parfaitement à l'heure, en utilisant seulement la fonction chronomètre.

2. Se repérer grâce au GPS

2.1. Deux cercles

Chaque satellite du système GPS, ou chaque phare de l'île, émet un signal à un instant précis. Ce signal voyage au cours du temps dans toutes les directions, sous la forme d'un cercle qui s'agrandit (ou d'une sphère dans l'espace) comme lorsque l'on lance un caillou dans l'eau.



On se place pour l'instant dans le plan. Si le signal est émis au point S_1 à l'instant $t_1 = 0$ et que le signal se déplace à une vitesse c , alors à un instant $t > 0$ quelconque, le signal est perçu exactement en tout point du cercle \mathcal{C}_1 centré en S_1 et de rayon $c \cdot t$. Si le centre S_1 a pour coordonnées (x_1, y_1) alors l'équation de ce cercle est

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = c \cdot t.$$

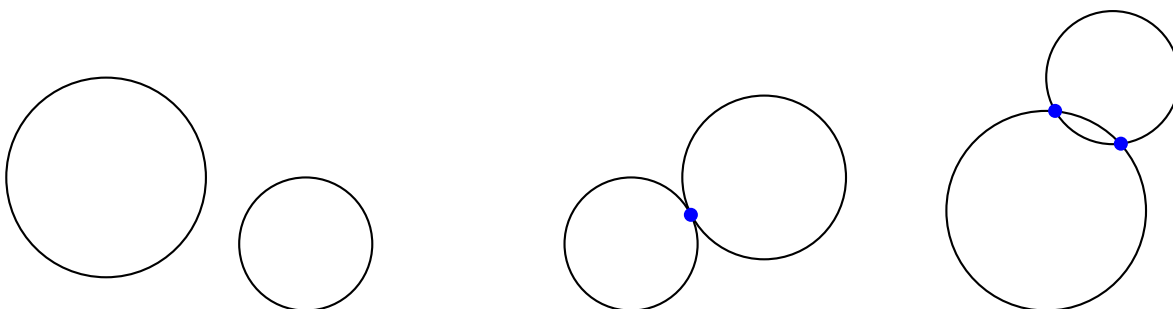
Où encore en élevant au carré :

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = c^2 \cdot t^2.$$

Rappelons que je cherche à déterminer ma position P , et donc si je reçois le signal à l'instant t , j'en déduis que je suis situé sur le cercle \mathcal{C}_1 (de rayon $c \cdot t$). Le fait que deux signaux dans le plan déterminent seulement deux positions possibles est la traduction mathématique du résultat suivant :

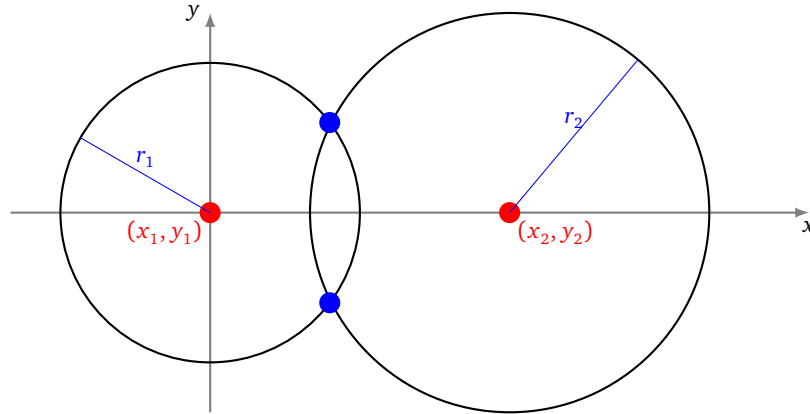
Proposition 1.

Deux cercles du plan, ayant des centres distincts, se coupent en 0, 1, ou 2 points.



Dans notre situation l'intersection n'est pas vide, puisque nous sommes à un point d'intersection des deux cercles. La preuve va même nous fournir les coordonnées des points d'intersection. Lorsque qu'il n'y a qu'un point d'intersection, c'est que les deux cercles sont tangents. C'est une situation exceptionnelle qui ne peut pas nous être utile dans la pratique.

Démonstration. On considère deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . Pour simplifier les calculs, et sans perte de généralité, on choisit le repère de sorte que le centre du premier cercle soit $(x_1, y_1) = (0, 0)$, et on choisit l'axe des abscisses de sorte que le centre du second cercle soit dessus : $(x_2, y_2) = (x_2, 0)$.



Les équations des cercles sont alors

$$x^2 + y^2 = r_1^2 \quad \text{et} \quad (x - x_2)^2 + y^2 = r_2^2$$

Un point $P = (x, y)$ est dans l'intersection si ses coordonnées sont solutions de

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ x^2 - 2xx_2 + x_2^2 + y^2 = r_2^2 \end{cases}$$

Attention, c'est un système à deux équations et deux inconnues, mais les équations ne sont pas linéaires. En retranchant la première ligne à la seconde, ce système équivaut à :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ -2xx_2 + x_2^2 = r_2^2 - r_1^2 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = r_1^2 \\ x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2} \end{cases}$$

On a donc trouvé l'abscisse x de nos solutions. En reportant la valeur de x dans la première équation on trouve :

$$y^2 = r_1^2 - \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2} \right)^2$$

Notons ρ cette quantité, $\rho = r_1^2 - \left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2} \right)^2$. Trois cas sont possibles :

- Si $\rho < 0$ alors l'équation $y^2 = \rho$ n'admet pas de solutions et notre système non plus. Les deux cercles ne se coupent pas.
- Si $\rho = 0$ alors $y = 0$. Le système admet une unique solution donnée par $x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2}$ et $y = 0$. Les deux cercles se coupent en un unique point.
- Si $\rho > 0$ alors $y = +\sqrt{\rho}$ ou $y = -\sqrt{\rho}$. Le système admet deux solutions données par $\left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2}, +\sqrt{\rho} \right)$ et $\left(\frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2}, -\sqrt{\rho} \right)$. Les deux cercles se coupent en deux points.

□

2.2. Trois sphères

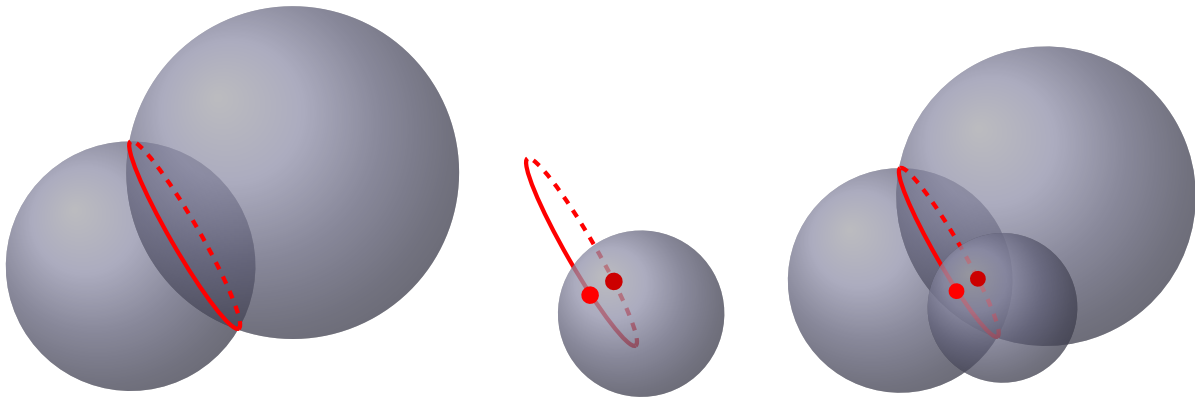
Dans l'espace chaque satellite émet un signal qui se propage en une famille de sphères centrées sur le satellite, dont le rayon grandit avec le temps. Lorsque l'on reçoit un signal d'un satellite, nous savons que nous sommes situés sur une sphère centrée en ce satellite. Avec deux satellites, nous savons que nous sommes sur l'intersection de deux sphères, ce qui laisse une infinité de possibilités. Il faut trois sphères pour n'avoir que deux possibilités pour notre position. C'est exactement ce qui dit le théorème :

Théorème 1.

Trois sphères, dont les centres ne sont pas alignés, ont une intersection commune de 0, 1 ou 2 points.

Encore une fois dans une situation normale, il y aura deux points d'intersections. On exclut un des points, qui correspond souvent à une solution aberrante (par exemple sous terre ou dans l'espace) ou alors on valide une solution par une quatrième signal. Nous allons voir deux méthodes qui permettent de calculer les solutions de façon exacte. Nous verrons une troisième méthode, par calcul approché, lorsque nous aborderons les problèmes d'erreurs.

Mais avant cela commençons par bien comprendre la situation géométrique. Tout d'abord pour deux sphères qui se rencontrent, leur intersection est un cercle de l'espace. Ceci n'est pas si évident à visualiser, mais nous le montrerons par le calcul. Lorsque l'on a trois sphères qui se coupent, alors les deux premières s'intersectent en un cercle (figure de gauche), et ce cercle va recouper la troisième sphère en deux points (figure du milieu). L'intersection des trois sphères est alors formée de deux points (figure de droite).



2.3. Preuve analytique

Pour simplifier les calculs de l'intersection de trois sphères, nous choisissons le repère de sorte que :

- la sphère \mathcal{S}_1 soit centrée à l'origine, c'est-à-dire son centre vérifie $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$;
- la sphère \mathcal{S}_2 soit centrée sur l'axe des abscisses (Ox), c'est-à-dire son centre vérifie $(x_2, y_2, z_2) = (x_2, 0, 0)$;
- la sphère \mathcal{S}_3 soit centrée sur le plan (Oxy), c'est-à-dire son centre vérifie $(x_3, y_3, z_3) = (x_3, y_3, 0)$.

Les équations des sphères sont alors :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 + y^2 + z^2 = r_2^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + z^2 = r_3^2 \end{cases}$$

On soustrait la première ligne aux deux suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 \\ (x - x_2)^2 - x^2 = r_2^2 - r_1^2 \\ (x - x_3)^2 - x^2 + (y - y_3)^2 - y^2 = r_3^2 - r_1^2 \end{cases}$$

En développant les carrés, le système se simplifie, et on trouve x , puis y (en fonction de ce x) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2 \\ x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2} \\ y = \frac{r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_0x_3}{2y_3} \end{cases}$$

Remarquons que si on ne regarde que l'intersection des deux premières sphères (donc les deux premières équations) alors on trouve $x^2 + y^2 + z^2 = r_1^2$ avec $x = x_0$ fixé ($x_0 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2}$). Cette équation $y^2 + z^2 = r_1^2 - x_0^2$ est l'équation d'un cercle dans le plan d'équation ($x = x_0$) orthogonal à la droite joignant les deux centres.

Revenons à nos trois sphères ; x et y sont donc entièrement déterminés par $x = x_0$ et $y = y_0$ avec

$$x_0 = \frac{r_1^2 - r_2^2 + x_2^2}{2x_2} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{r_1^2 - r_3^2 + x_3^2 + y_3^2 - 2x_0x_3}{2y_3}$$

Il nous reste à trouver z , à l'aide de la première équation devenue $x_0^2 + y_0^2 + z^2 = r_1^2$. On pose $\rho = r_1^2 - x_0^2 - y_0^2$, de sorte que $z^2 = \rho$ et ainsi :

- si $\rho < 0$, pas de solutions,
- si $\rho = 0$, une unique solution $(x_0, y_0, 0)$,
- si $\rho > 0$, deux solutions $(x_0, y_0, +\sqrt{\rho})$, $(x_0, y_0, -\sqrt{\rho})$.

Exemple 1.

Quelle est l'intersection des sphères suivantes, dont on donne le centre et le rayon ?

$$\mathcal{S}_1 : (0, 0, 0), \quad r_1 = 4 \quad ; \quad \mathcal{S}_2, \quad (4, 0, 0), \quad r_2 = 3 \quad ; \quad \mathcal{S}_3, \quad (2, 1, 0), \quad r_3 = 2$$

Les équations sont

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ (x-4)^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

On reprend pas à pas la démonstration, ou bien on applique directement les formules obtenues, pour trouver

$$x_0 = \frac{23}{8}, \quad y_0 = \frac{11}{4}.$$

On pose $\rho = r_1^2 - x_0^2 - y_0^2 = 16 - \left(\frac{23}{8}\right)^2 - \left(\frac{11}{4}\right)^2 = \frac{11}{64}$. Comme $\rho > 0$ alors en posant $z_0 = \sqrt{\rho} = \frac{\sqrt{11}}{8}$, les trois sphères se coupent en deux points :

$$(x_0, y_0, +z_0) = \left(\frac{23}{8}, \frac{11}{4}, \frac{\sqrt{11}}{8}\right) \quad \text{et} \quad (x_0, y_0, -z_0) = \left(\frac{23}{8}, \frac{11}{4}, -\frac{\sqrt{11}}{8}\right).$$

2.4. Preuve vectorielle

Les calculs précédents sont tout à fait valides, mais nous aurons besoin d'une autre méthode pour plusieurs raisons : (a) le problème de synchronisation de l'horloge du récepteur GPS ; (b) la gestion de plus de trois satellites.

Pour plus de clarté, nous allons d'abord expliquer cette méthode dans le plan seulement (avec deux cercles, c'est-à-dire avec deux satellites). Nous allons transformer les deux équations non linéaires correspondant aux deux signaux, en deux systèmes linéaires. Chaque système fournira une solution.

Rappelons que dans le plan les deux équations sont

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r_1^2 \quad \text{et} \quad (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 = r_2^2$$

On développe chacune des équations ($i = 1, 2$) :

$$x^2 - 2xx_i + x_i^2 + y^2 - 2yy_i + y_i^2 = r_i^2$$

ce qui donne le système des deux équations :

$$\begin{cases} 2xx_1 + 2yy_1 = x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ 2xx_2 + 2yy_2 = x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \end{cases} \quad (1)$$

Passons à une notation vectorielle et matricielle, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 2x_2 & 2y_2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors

$$AX = \begin{pmatrix} 2xx_1 & 2yy_1 \\ 2xx_2 & 2yy_2 \end{pmatrix}$$

Posons

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B = (x^2 + y^2)U + V = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ x^2 + y^2 + x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix}$$

Les équations (1) s'écrivent simplement

$$AX = B \quad (2)$$

Supposons pour l'instant que la matrice A soit inversible, alors

$$X = A^{-1}B$$

où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la position à déterminer.

Il y a cependant un problème ! Contrairement à ce que je vous laisse croire, l'écriture $AX = B$ ne correspond pas à un système linéaire, car B dépend de x et y (donc de X). Nous allons profiter du fait que B ne dépend que de $x^2 + y^2$ afin de montrer qu'il y a seulement deux choix possibles pour B .

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire :

$$\langle X | X' \rangle = xx' + yy'$$

et la norme

$$\|X\| = \sqrt{\langle X | X \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Posons $d = x^2 + y^2$, alors

$$\begin{aligned} d = x^2 + y^2 &= \|X\|^2 = \langle X | X \rangle \\ &= \langle A^{-1}B | A^{-1}B \rangle \quad \text{car } AX = B \\ &= \langle A^{-1}(dU + V) | A^{-1}(dU + V) \rangle \quad \text{car } B = dU + V \\ &= \langle A^{-1}(dU + V) | dA^{-1}U \rangle + \langle A^{-1}(dU + V) | A^{-1}V \rangle \\ &= \langle dA^{-1}U | dA^{-1}U \rangle + \langle A^{-1}V | dA^{-1}U \rangle \\ &\quad + \langle dA^{-1}U | A^{-1}V \rangle + \langle A^{-1}V | A^{-1}V \rangle \\ &= d^2 \langle A^{-1}U | A^{-1}U \rangle + 2d \langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle + \langle A^{-1}V | A^{-1}V \rangle \\ &= d^2 \|A^{-1}U\|^2 + 2d \langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle + \|A^{-1}V\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi $d = x^2 + y^2$ vérifie une équation du second degré :

$$\|A^{-1}U\|^2 d^2 + (2 \langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle - 1) d + \|A^{-1}V\|^2 = 0 \quad (3)$$

Cette équation admet (au plus) deux solutions positives d_1 et d_2 , donc deux possibilités pour le second membre de (2) :

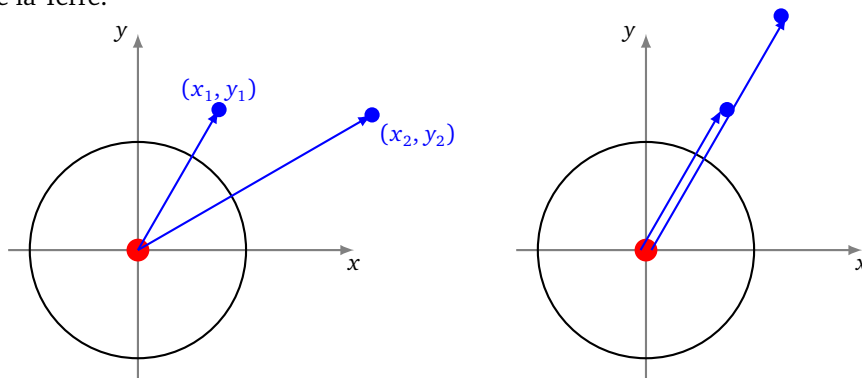
$$B_1 = d_1 U + V \quad \text{ou} \quad B_2 = d_2 U + V.$$

B_1 et B_2 sont maintenant clairement déterminés (ils ne dépendent plus de x et de y). Pour le second membre B_1 , on résout le système linéaire $AX = B_1$ en $X = A^{-1}B_1$, puis on résout le système linéaire $AX = B_2$, en $X = A^{-1}B_2$.

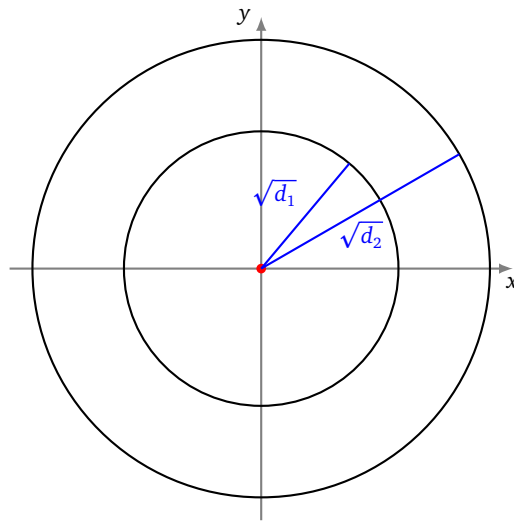
Ce qui donne bien deux solutions possibles pour notre position X .

Terminons par quelques commentaires.

- Imaginons que l'origine du repère soit le centre de la Terre, alors la matrice A est inversible si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire, si et seulement si, les deux satellites ne sont pas alignés avec le centre de la Terre.



- Dans ce repère \sqrt{d} représente le rayon du cercle, centré au centre de la Terre sur lequel on se trouve. Le fait de trouver deux possibilités pour d , correspond à deux rayons possibles. Si l'on se déplace à la surface de la Terre, il est facile de choisir le «bon» rayon.

**Exemple 2.**

On considère un cercle \mathcal{C}_1 de centre $S_1 = (1, 1)$ et de rayon $r_1 = 2$ et un cercle de \mathcal{C}_2 de centre $S_2 = (-2, -1)$ et de rayon $r_2 = 3$. On pose comme ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 2x_2 & 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad B = (x^2 + y^2)U + V$$

On calcule

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1}U = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad A^{-1}V = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

et donc

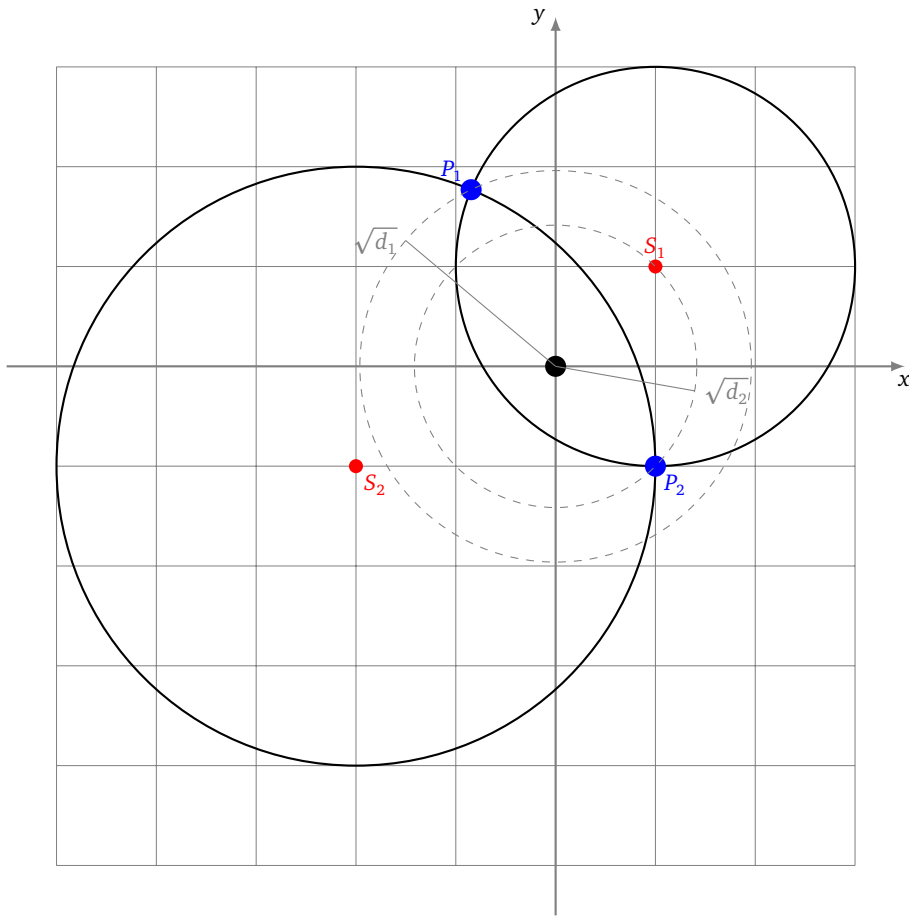
$$\|A^{-1}U\|^2 = \frac{13}{4} \quad \langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle = -9 \quad \|A^{-1}V\|^2 = 25$$

Alors l'équation (3) que vérifie $d = x^2 + y^2$ s'écrit ici :

$$\frac{13}{4}d^2 - 19d + 25 = 0$$

Les deux solutions sont :

$$d_1 = \frac{50}{13} \quad \text{et} \quad d_2 = 2$$



On obtient deux seconds membres possibles :

$$B_1 = d_1 U + V = \begin{pmatrix} 24 \\ 13 \\ -2 \\ 13 \end{pmatrix} \quad B_2 = d_2 U + V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et donc deux points d'intersection dont les coordonnées sont données par $X = A^{-1}B$:

$$P_1 = A^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_2 = A^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.5. Dimension 3

Le cas de la dimension trois est vraiment très similaire, c'est l'avantage de la méthode vectorielle. Traitons-le succinctement, à partir de trois équations ($i = 1, 2, 3$),

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_i^2$$

fournies par le signal de trois satellites, on développe, pour obtenir :

$$2xx_i + 2yy_i + 2zz_i = x^2 + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2$$

On pose alors

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - r_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - r_3^2 \end{pmatrix} \quad B = (x^2 + y^2 + z^2)U + V$$

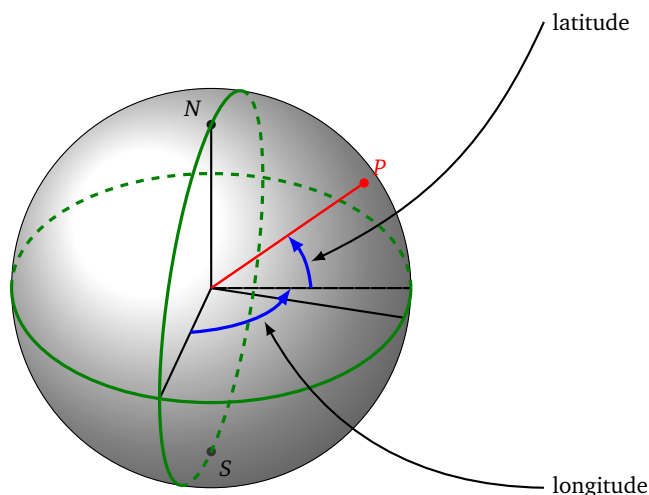
de sorte que l'on se ramène au système $AX = B$. On détermine deux solutions possibles pour $d = x^2 + y^2 + z^2$, qui vérifie exactement la même équation (3). Il reste alors à résoudre deux systèmes linéaires $AX = B_1$ et $AX = B_2$.

3. Temps

Avant d'être un instrument de mesure de position, le GPS est un instrument de mesure du temps !

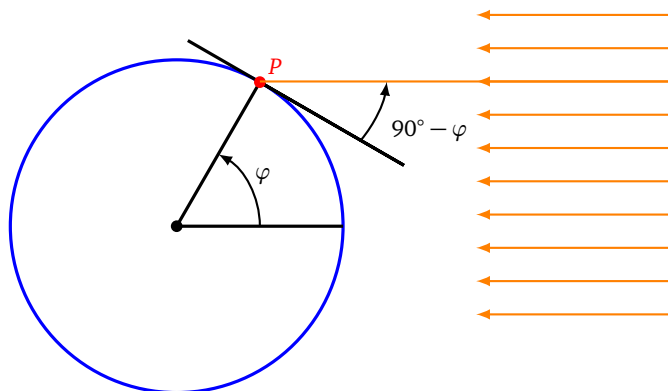
3.1. Le vieux problème de la longitude

La navigation des bateaux s'est longtemps heurtée à un problème crucial : où est le bateau ? Pour se diriger les marins disposent d'une boussole qui permet de suivre un cap, mais le préalable est de savoir où l'on est ! Pour se repérer sur Terre (et sur mer) on utilise les coordonnées latitude et longitude (on y reviendra).



Déterminer la latitude est facile, imaginons que nous sommes le 21 mars, le jour de l'équinoxe. Ce jour là, lorsqu'il est au plus haut, le Soleil est vertical pour les gens situés à l'équateur.

Pour un marin situé n'importe où en mer, il détermine à l'aide d'un sextant (une sorte de rapporteur) l'angle entre l'horizon et le Soleil, lorsque celui-ci est au plus haut dans le ciel. Cet angle est exactement $90^\circ - \varphi$, où φ est la latitude du lieu. Il connaît donc sa latitude.

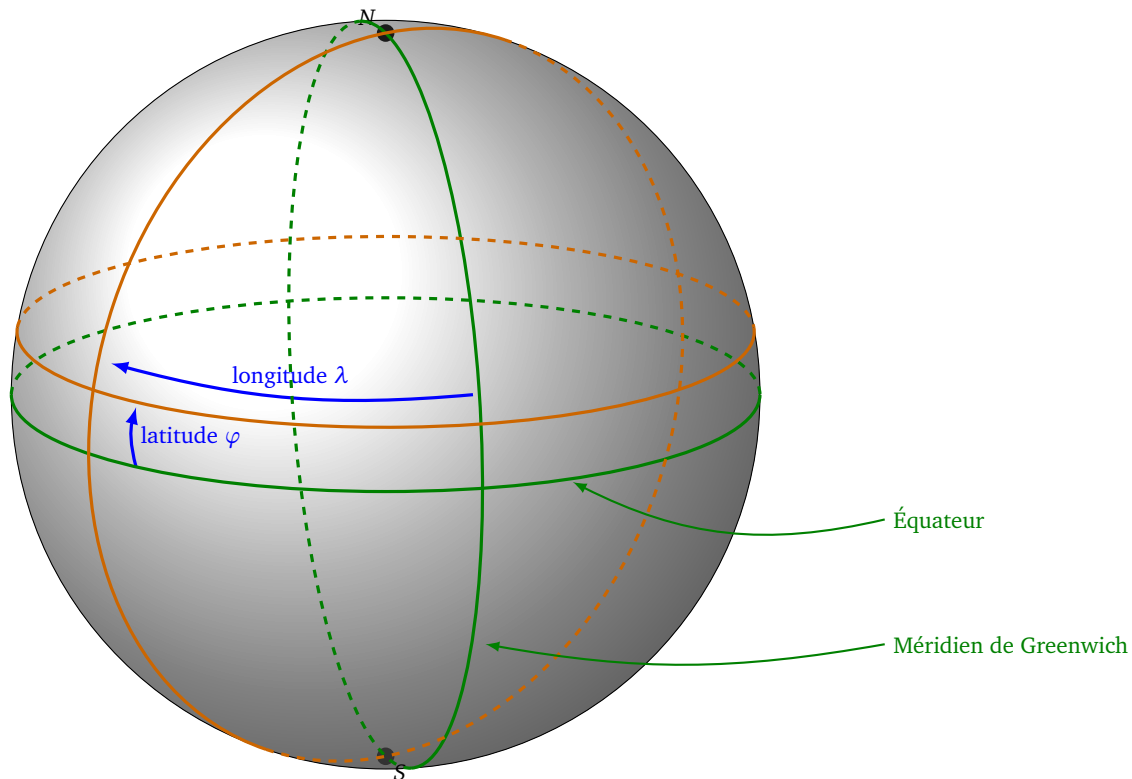


Pour d'autres jours il faut utiliser des tables astronomiques qui donne la hauteur attendue du Soleil. La nuit on peut faire un calcul similaire avec l'étoile polaire, dans l'hémisphère nord.

Le problème de la longitude est beaucoup plus délicat, des tentatives ont été faites avec des cartes de la position des étoiles mais cela restait très imprécis. La solution vient du temps. En 1735, John Harrison horloger en Angleterre invente un chronomètre maritime qui allait révolutionner la navigation. Ce système permet à chaque bateau de disposer d'une horloge qui fournit l'heure avec une bonne précision, chose qui n'était pas possible avant, les précédentes horloges avançaient ou retardaient à cause des mouvements du bateau ou des changements de température et de pression.

Comment l'heure exacte permet de trouver la longitude ? Imaginons un bateau quittant le port de Londres à midi pile, le 1^{er} juillet avec à son bord un horloge précise. Au bout de dix jours en mer à naviguer vers le Sud-Ouest, le capitaine souhaite savoir où il est. Lorsqu'il est midi pour lui, c'est-à-dire lorsque le Soleil est au plus haut dans le ciel, il mesure

la latitude comme on vient de l'expliquer. Puis il retourne à sa cabine pour voir l'heure indiquée par l'horloge, sachant que l'horloge indique toujours l'heure de Londres. Par exemple l'horloge indique 14h30. Ce qui signifie que le Soleil était au plus haut 2h30 plus tôt à Londres. Ce décalage est simplement dû à la rotation de la Terre. La Terre fait un tour complet (360°) sur elle-même en 24h, donc 15° en 1 heure. Donc ici le bateau est à $37,5^\circ (= 2,5 \times 15^\circ)$ à l'ouest du méridien de Greenwich situé dans la banlieue de Londres.



Si l'horloge (et les mesures) sont précises à 30 s près alors l'erreur commise sur la longitude est inférieure à 15 km. Ce qui est tout fait raisonnable après avoir traversé l'océan !

Conversion temps – angle – distance.

Voyons différentes façons de mesurer des déplacements si l'on voyage le long de l'équateur. On note R le rayon de la Terre (on prendra $R = 6300$ km). La Terre fait un tour complet en 24 h et la longueur de l'équateur est $2\pi R$, alors on a la correspondance temps/angle/distance :

$$24 \text{ h} \longleftrightarrow 360^\circ \longleftrightarrow 2\pi R$$

On applique la règle de trois, pour obtenir exemple

$$1 \text{ min} \longleftrightarrow 0,25^\circ \longleftrightarrow 27,5 \text{ km}$$

Ces calculs sont aussi valables si on voyage le long d'un méridien (n'importe lequel).

Par contre si on voyage sur un parallèle autre que l'équateur alors il faut tenir compte de la latitude φ . Le parallèle est un cercle de longueur $2\pi R \cos \varphi$. On a alors la correspondance :

$$24 \text{ h} \longleftrightarrow 360^\circ \longleftrightarrow 2\pi R \cos \varphi$$

Par exemple pour une latitude de $\varphi = 45^\circ$ alors la correspondance devient :

$$1 \text{ min} \longleftrightarrow 0,25^\circ \longleftrightarrow 19,4 \text{ km}$$

3.2. Vision géométrique (une dimension)

Commençons par un modèle spatial en une seule dimension ! Pour se repérer sur une droite, un seul satellite suffit à déterminer deux abscisses possibles, si nous disposons d'une mesure absolue du temps. En effet pour un signal émis au temps t_1 (cette information est fournie dans le signal, de même que la position du satellite) et reçu au temps t , la

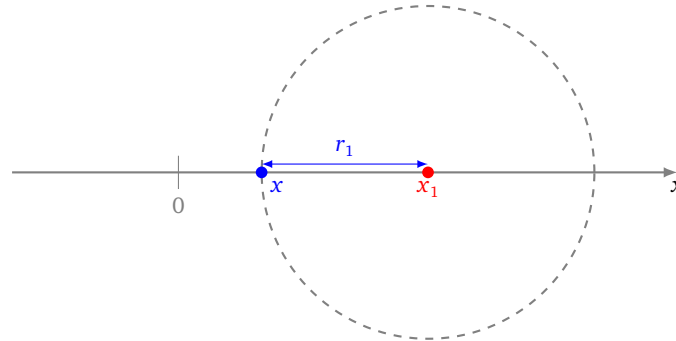
distance parcourue par le signal est $r_1 = c(t - t_1)$: c'est la distance entre notre position x et la position x_1 du satellite. On doit donc résoudre l'équation :

$$|x - x_1| = r_1$$

et on trouve deux solutions $x = x_1 + r_1$ et $x = x_1 - r_1$. On préfère écrire l'équation :

$$(x - x_1)^2 = c^2(t - t_1)^2.$$

Géométriquement on trouve les solutions x en traçant le cercle de rayon r_1 centré en x_1 .

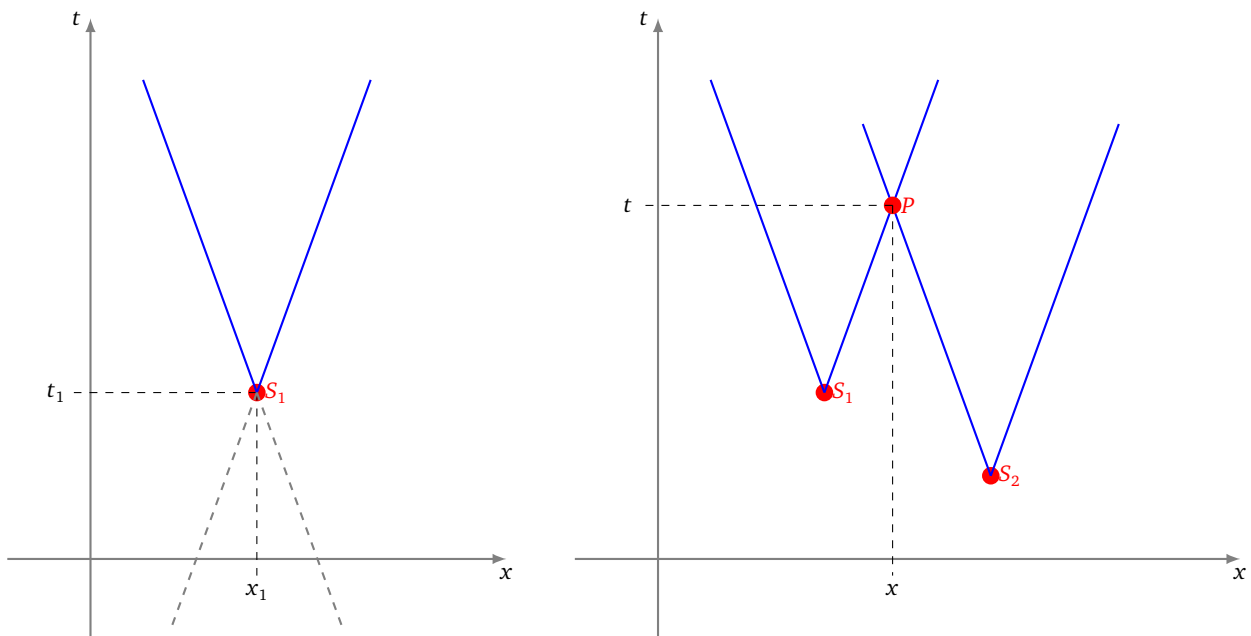


Le problème c'est que l'horloge du satellite et l'horloge du récepteur GPS doivent être parfaitement synchronisées, afin de mesurer le décalage de temps. La satellite dispose d'une horloge atomique de très grande précision mais pas le récepteur GPS. Il faut donc considérer que l'instant t de réception n'est pas connu (du moins pas avec une précision suffisante). Il nous faut un autre satellite et un autre signal.

Avec deux satellites nous avons deux équations :

$$\begin{cases} |x - x_1| = c|t - t_1| \\ |x - x_2| = c|t - t_2| \end{cases}$$

Si on représente le déplacement du signal en fonction de l'abscisse x au cours du temps t et si le signal est émis au point x_1 à l'instant t_1 , alors le signal part du point (x_1, t_1) et «voyage» le long d'un cône. Ce cône correspond à l'équation $|x - x_1| = c|t - t_1|$, dont les solutions sont les points des deux droites d'équations $x - x_1 = +c(t - t_1)$ et $x - x_1 = -c(t - t_1)$. Donc avec le signal d'un satellite, nous savons que notre position (x, t) est sur ce cône.



Avec deux satellites, nous disposons de deux cônes. Ces deux cônes s'intersectent en un seul point. Ce point est notre position (x, t) . On vient de déterminer à la fois notre position x , mais aussi l'instant t auquel on reçoit les deux signaux.

Noter que les deux cônes sont composés de droites parallèles, car pour les deux cônes les pentes de droite sont $+\frac{1}{c}$ et $-\frac{1}{c}$ (et la vitesse c du signal est la même pour tous les satellites).

Remarque : dans l'introduction les signaux (les cornes de brume) étaient émis tous en même temps mais perçus à des instants différents. Ici la situation est différente : on perçoit deux signaux au même instant t , mais l'un des signaux est émis au temps t_1 et l'autre au temps t_2 . Le signal contient comme information l'instant où il a été émis. En fait, chaque satellite émet en continu un signal et le récepteur capte en continu des signaux.

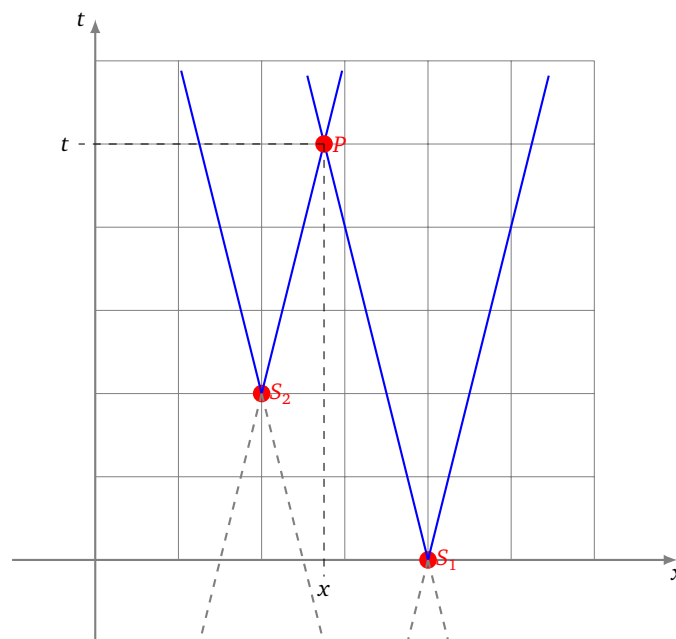
Exemple 3.

Je reçois le signal d'un premier satellite, en position $x_1 = 4$, signal émis au temps $t_1 = 0$. Au même instant je reçois le signal d'un second satellite, en position $x_2 = 2$, signal émis au temps $t_2 = 2$. Les signaux se déplacent à une vitesse $c = \frac{1}{4}$. Où suis-je ?

Le problème algébrique est de trouver un couple (x, t) qui vérifie les deux équations,

$$|x - x_1| = c|t - t_1| \quad \text{et} \quad |x - x_2| = c|t - t_2|$$

Cherchons graphiquement la solution. On trace le cône de sommet (x_1, t_1) et de pente $\frac{1}{c} = 4$ et le cône de sommet (x_2, t_2) et de même pente. Ces deux cônes s'intersectent en deux points, l'un est exclu car il correspond à une solution «dans le passé». Par lecture graphique on trouve notre position $x \simeq 2,7$ et l'heure de réception des messages $t \simeq 5$



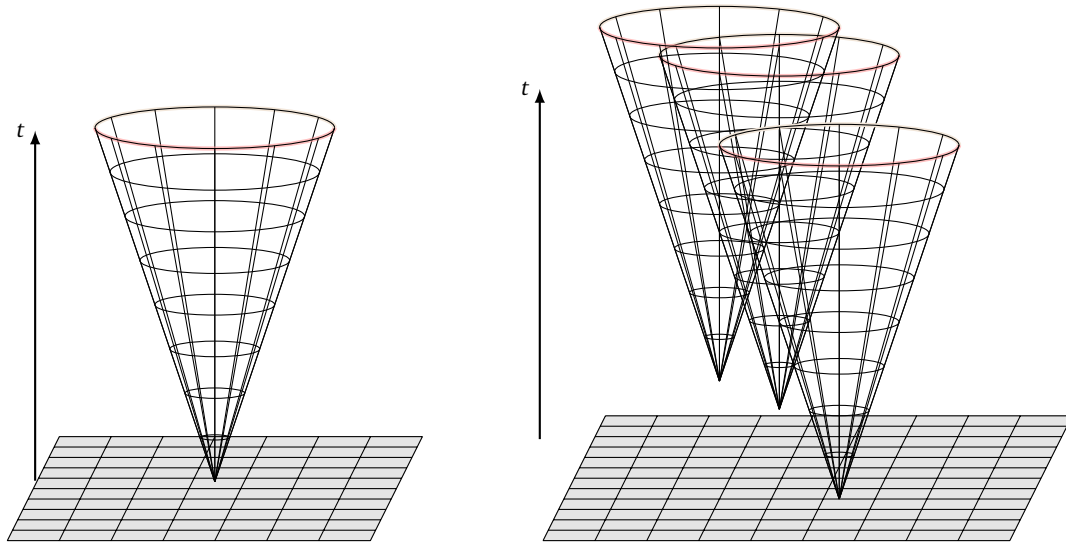
Par calcul algébrique on cherche l'intersection des droites d'équations $+(x - 2) = \frac{1}{4}(t - 2)$ et $-(x - 4) = \frac{1}{4}t$. On trouve $(x, t) = (\frac{11}{4}, 5)$, donc $x = 2,75$ et $t = 5$.

3.3. Vision géométrique (dimension 2 et 3)

Si maintenant on passe en dimension 2, alors le signal reçu par un satellite correspond à l'équation

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = c^2(t - t_i)^2$$

où (x_i, y_i) est la position du signal, et t_i l'instant où le signal est émis ; (x, y) est notre position et t l'instant où le signal est reçu. Géométriquement le signal voyage le long d'un cône (en dimension 3 cette fois : 2 dimension pour x et y , 1 dimension pour t). Ce cône correspond à un cercle qui s'agrandit au fil du temps.



Deux cônes ne suffisent pas à déterminer notre position. Il faut 3 satellites, et donc 3 cônes, pour déterminer à la fois (x, y) et t .

Il est difficile de se représenter la situation en dimension 3, qui est la dimension d'usage : il faudrait « voir » avec 4 dimensions (pour x, y, z et t). Le signal part du satellite, et à chaque instant atteint tous les points d'une sphère, dont le rayon grandit au cours du temps. Les inconnues sont (x, y, z) et t . Il faut 4 satellites pour déterminer à la fois (x, y, z) et t .

3.4. Solution vectorielle

Nous venons de voir qu'une solution géométrique n'a rien d'évident ! C'est là où le calcul vectoriel entre en jeu. Nous allons reprendre la solution vectorielle détaillée auparavant en dimension 2 (les inconnues étaient x et y) et voir que la démarche fonctionne avec 4 inconnues (x, y, z, t) .

Nous voulons déterminer notre position dans l'espace et le temps à partir de 4 signaux reçus :

- notre position est (x, y, z, t) ,
- les satellites sont situés en (x_i, y_i, z_i) ,
- chaque signal que nous recevons a été émis à l'instant t_i ,
- $i = 1, 2, 3, 4$.

Chaque signal correspond à l'équation :

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = c^2(t - t_i)^2$$

que l'on développe :

$$2xx_i + 2yy_i + 2zz_i - 2c^2tt_i = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - c^2t_i^2$$

On pose alors

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & -2c^2t_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & -2c^2t_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & -2c^2t_3 \\ 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & -2c^2t_4 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2t_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2t_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - c^2t_3^2 \\ x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - c^2t_4^2 \end{pmatrix} \quad B = (x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2)U + V$$

Nos équations s'écrivent simplement

$$AX = B \quad (4)$$

Si A est inversible et si on connaît B , alors $X = A^{-1}B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ est la position à déterminer dans l'espace-temps. Le problème est toujours le même, B dépend de (x, y, z, t) , où plus précisément de $d = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$. On calcule comme auparavant que :

$$d = \langle X | X \rangle_\ell = \langle A^{-1}B | A^{-1}B \rangle_\ell = d^2 \|A^{-1}U\|_\ell^2 + 2d \langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle_\ell + \|A^{-1}V\|_\ell^2$$

Ainsi, d vérifie l'équation du second degré :

$$\|A^{-1}U\|_\ell^2 d^2 + (2\langle A^{-1}U | A^{-1}V \rangle_\ell - 1)d + \|A^{-1}V\|_\ell^2 = 0 \quad (5)$$

Attention ! Ici le produit scalaire est « tordu » : $\langle X | X' \rangle_\ell = xx' + yy' + zz' - c^2 tt'$ et la norme au carré $\|X\|_\ell^2 = \langle X | X \rangle_\ell = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$ n'est plus nécessairement positive.

Il y a au plus deux solutions, notées d_1 et d_2 , donc deux seconds membres possibles pour le second membre de (4) :

$$B_1 = d_1 U + V \quad \text{ou} \quad B_2 = d_2 U + V.$$

Ainsi on résout deux systèmes linéaires $AX = B_1$ et $AX = B_2$, ce qui donne deux solutions $X = A^{-1}B_1$ et $X = A^{-1}B_2$.

On obtient deux solutions possibles pour notre position $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. Pour choisir quelle solution est la bonne, on peut exclure une solution qui serait non réaliste, ou refaire les calculs avec un cinquième satellite, ou recommencer les mesures plus tard.

4. Vitesse

4.1. Formule par dérivation

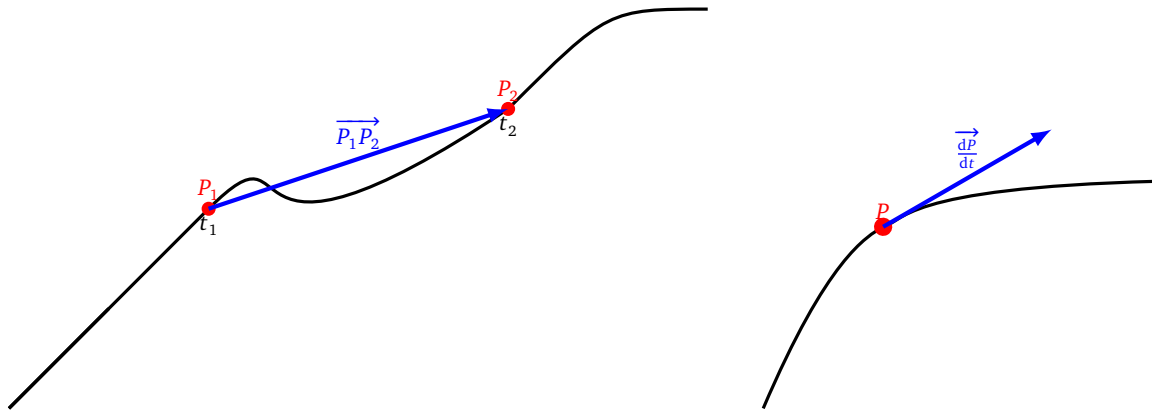
L'idée naturelle est de déterminer la vitesse par un calcul à partir des positions. On note P le point où l'on se trouve, on a vu comment déterminer les coordonnées (x, y, z) de P à l'aide des satellites. La position P varie, on note $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ les coordonnées de P en fonction du temps. Comment calculer la vitesse ? Si P décrit un trajet rectiligne de longueur, disons 5 km, en un temps d'une heure alors la vitesse moyenne est de

$$v = \frac{\text{distance}}{\text{durée}} = 5 \text{ km/h.}$$

Plus généralement si on va du point P_1 au point P_2 entre les instants t_1 et t_2 alors la vitesse moyenne et le vecteur vitesse moyenne sont :

$$v = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P_1 P_2}{t_2 - t_1} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{P_1 P_2}}{t_2 - t_1}$$

En fait v est la norme $\|\vec{v}\|$ (si $t_2 > t_1$).



Pour obtenir la vitesse instantanée il faut réduire l'intervalle de temps : passer d'un grand intervalle de temps Δt , à un petit intervalle dt . Physiquement, la vitesse (instantanée) se calcule par

$$\vec{v} = \frac{d\vec{P}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

Mathématiquement, le dt est infinitésimal, et diviser par dt correspond à la dérivation :

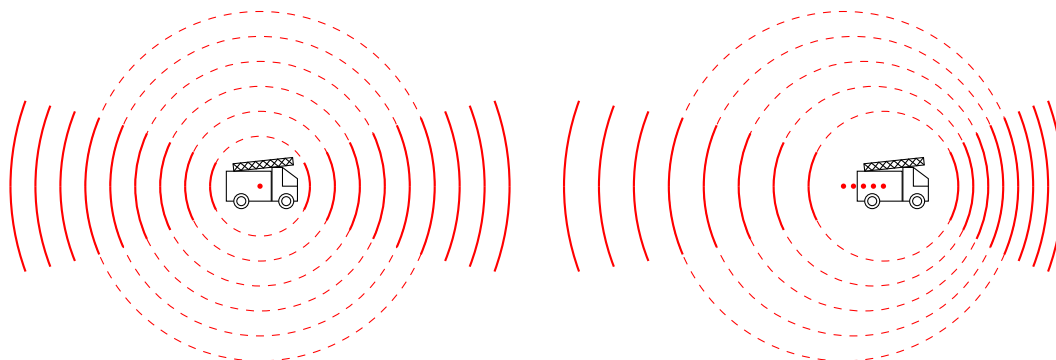
$$\vec{v} = P'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

On calcule comme auparavant $v = \|\vec{v}\|$.

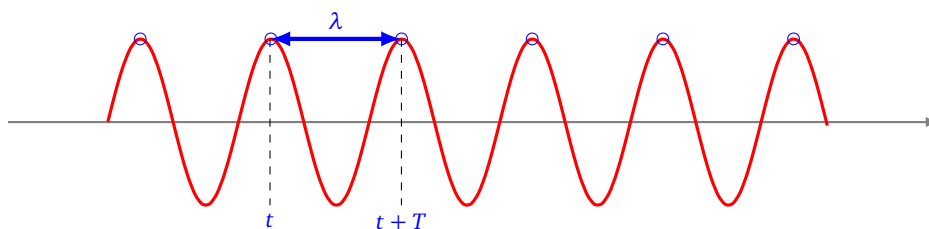
Dans la pratique que l'on soit à pied, en bateau ou en voiture on avance quasiment en ligne droite au moins sur des périodes de quelques secondes. Ce qui est largement suffisant pour approcher la vitesse instantanée par la vitesse moyenne sur ce court laps de temps. Cependant nous allons voir une méthode beaucoup plus précise.

4.2. Effet Doppler

L'effet Doppler est le fameux effet de la sirène des pompiers : lorsque la sirène des pompiers s'approche droit sur vous, le son est plus aigu, puis lorsque la sirène s'éloigne le son est plus grave. Ce phénomène n'est pas lié à la distance de la sirène, mais bien à la vitesse de déplacement de cette sirène. (Si le camion s'arrête vous entendrez le même son que vous soyez à 10 ou 100 mètres.)



On rappelle que la **période** T d'une onde est le temps qui s'écoule entre deux crêtes du signal. Pour simplifier l'exposé on suppose que les signaux sont des «bips» émis à chaque crête, avec un intervalle de temps T entre deux signaux. La **longueur d'onde** λ est la distance entre deux crêtes, si le signal se déplace à une vitesse c alors : $\lambda = cT$. Enfin, la **fréquence** f d'une onde est l'inverse de la période T : $f = \frac{1}{T}$. La fréquence est donc le nombre de bips par seconde.



La formule de Doppler relie la fréquence émise par le satellite (qui remplace la sirène des pompiers), et celle reçue en notre position P . On note f_S la fréquence d'émission du satellite (qui est une constante connue), on note f_P la fréquence du signal mesurée au point P .

Théorème 2 (Effet Doppler).

Dans le cas où P est fixe, l'effet Doppler se traduit par la formule suivante :

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

On a noté :

- c la vitesse de déplacement du signal (la vitesse de la lumière dans le cas du signal émis par le satellite, la vitesse du son pour la sirène des pompiers) ;
- v_S la vitesse d'éloignement de S dans la direction de P (vitesse positive si le satellite s'éloigne, vitesse négative s'il se rapproche).

Exemple 4.

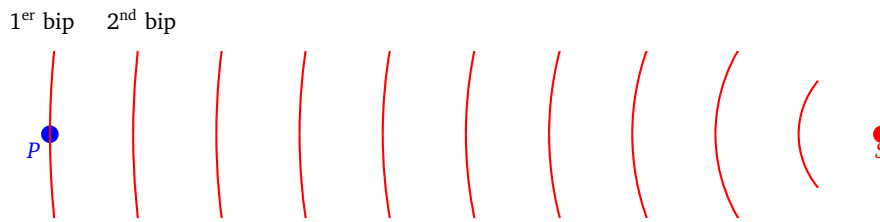
Un camion de pompier se rapproche à une vitesse de 33 m/s (environ 120 km/h), sa sirène émet à la fréquence $f_S = 440$ Hz. Sachant que la vitesse de déplacement du son dans l'air est $c = 333$ m/s, quelle est la fréquence perçue par un piéton ?

Réponse. Il s'agit juste d'appliquer la formule de l'effet Doppler, en prenant garde que puisque le camion se rapproche la vitesse d'éloignement est négative : $v_S = -33$ m/s

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S = \frac{1}{1 - \frac{33}{333}} 440 = 488,4 \text{ hertz}$$

Le son perçu est plus aigu que le son émis.

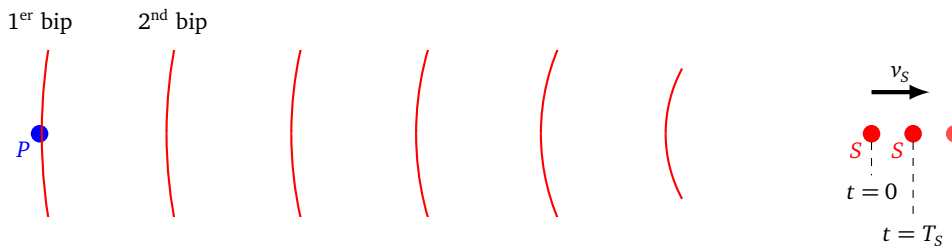
Démonstration. Commençons par bien comprendre la situation dans le cas où rien ne bouge. S émet un signal de fréquence f_s . Notons $T_s = \frac{1}{f_s}$ la période du signal



Au repos la situation est simple, au temps $t = 0$, S émet son premier bip, ce signal voyage à la vitesse c jusqu'à P . Si d est la distance entre P et S alors le signal arrivera au temps $T_0 = \frac{d}{c}$. Mais entre temps, S a émis un deuxième bip à l'instant T_s (un bip est émis en $t = 0$, en $t = T_s$, $t = 2T_s$...). Ce deuxième bip a la même distance à parcourir, donc il met le même temps pour arriver en P . Il arrive donc au temps $T_1 = T_s + T_0$ (n'oubliez pas qu'il est parti plus tard). Le décalage entre deux bips au départ est de T_s et à l'arrivée c'est $T_p = T_1 - T_0 = T_s$. C'est bien le même décalage. Autrement dit, la fréquence reçue est égale à la fréquence émise.

	S	P
1 ^{er} bip	0	T_0
2 nd bip	T_s	$T_1 = T_0 + T_s$
Décalage	T_s	$T_1 - T_0 = T_s$

Passons au cas intéressant : S s'éloigne avec une vitesse v_s . Le premier bip est émis par S au temps $t = 0$, le second au temps $t = T_s$. Le premier bip est reçu en P à un certain instant T_0 après avoir parcouru une distance d (et alors $T_0 = \frac{d}{c}$).



Le second bip n'a pas la même distance à parcourir, en effet entre $t = 0$ et $t = T_s$, la source s'est éloignée. La distance à parcourir par le second bip est donc de $d' = d + v_s T_s$. Il arrive en P au temps $T_1 = T_s + \frac{d'}{c}$:

$$T_1 = T_s + \frac{d'}{c} = T_s + \frac{d + v_s T_s}{c} = T_s + T_0 + \frac{v_s}{c} T_s = T_0 + T_s \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)$$

L'écart à la réception des bips est donc $T_p = T_1 - T_0 = T_s \left(1 + \frac{v_s}{c}\right)$.

	S	P
1 ^{er} bip	0	T_0
2 nd bip	T_s	$T_1 = T_0 + \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) T_s$
Décalage	T_s	$T_1 - T_0 = \left(1 + \frac{v_s}{c}\right) T_s$

Pour les fréquences $f_P = \frac{1}{T_P}$ et $f_S = \frac{1}{T_S}$ on trouve la relation de Doppler :

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

□

Proposition 2.

Dans le cas où P se déplace avec une vitesse v_P et S avec une vitesse v_S , la formule de Doppler est :

$$f_P = \frac{1 + \frac{v_P}{c}}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

Les deux vitesses sont comptées positivement selon le sens \overrightarrow{PS} .



La preuve est similaire mais un peu plus subtile. Entre le premier et le second bip *émis*, la source S s'est éloignée de $v_S T_S$. Entre le premier et le second bip *reçu*, le récepteur P s'est approché de $v_P T_P$ (donc compte pour $-v_P T_P$). On trouve donc $d' = d + v_S T_S - v_P T_P$ et $T_1 = T_S + \frac{d'}{c}$. On veut calculer $T_P = T_1 - T_0$. On trouve ainsi la relation :

$$T_P = T_S + \frac{v_S}{c} T_S - \frac{v_P}{c} T_P$$

Donc

$$\left(1 + \frac{v_P}{c}\right) T_P = \left(1 + \frac{v_S}{c}\right) T_S.$$

Ce qui donne le lien entre f_P et f_S .

4.3. Approximation de l'effet Doppler

La constante c est la vitesse de déplacement du signal, ce sera pour nous la vitesse du son (dans le cas de la sirène) ou la vitesse de la lumière (dans le cas du signal d'un satellite). Dans tous les cas les vitesses de déplacement v_P et v_S sont négligeables devant c , ainsi $\frac{v_S}{c}$ et $\frac{v_P}{c}$ sont très petits. On utilise le développement limité à l'ordre 1, autour de $x = 0$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$$

Ce qui donne

$$f_P = f_S \frac{1 + \frac{v_P}{c}}{1 + \frac{v_S}{c}} \simeq f_S \left(1 + \frac{v_P}{c}\right) \left(1 - \frac{v_S}{c}\right) \simeq f_S \left(1 + \frac{v_P}{c} - \frac{v_S}{c}\right)$$

Donc si on note $v = v_S - v_P$, la vitesse relative de P par rapport à S , alors l'effet Doppler approché se traduit en :

$$f_P \simeq f_S \left(1 - \frac{v}{c}\right)$$

Exemple 5.

Reprenons l'exemple 4 du camion de pompier émettant un son $f_S = 440$ Hz en approche à une vitesse $v_S = -33$ m/s. Alors la formule d'approximation de l'effet Doppler est :

$$f_P \simeq f_S \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 440 \left(1 - \frac{-33}{333}\right) \simeq 483,6 \text{ hertz}$$

Avec la formule exacte on avait trouvé 488,4 hertz. L'approximation est assez moyenne, car la vitesse v_S n'est pas assez petite par rapport à la vitesse du son c . Lorsque c sera la vitesse de la lumière, toutes les vitesses de déplacement des objets seront négligeables.

4.4. Le décalage Doppler

Voyons comment récupérer la vitesse par la mesure des fréquences. Le signal émis et sa fréquence f_S sont connus. La fréquence mesurée f_P , nous permet de déduire la vitesse. On note $D = f_S - f_P$ le **décalage Doppler**. Dans le cas où P est fixe et S se déplace à une vitesse v_S , alors la formule de Doppler $f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$ implique

$$v_S = \frac{cD}{f_P}$$

Dans le cas plus général où P et S sont en mouvement et que $v = v_S - v_P$ est la vitesse de S par rapport à P , alors l'approximation $f_P \simeq f_S \left(1 - \frac{v}{c}\right)$ conduit à :

$$v \simeq \frac{cD}{f_s}$$

C'est donc une approximation raisonnable de dire que la vitesse est proportionnelle au décalage Doppler.

4.5. Vitesse d'éloignement

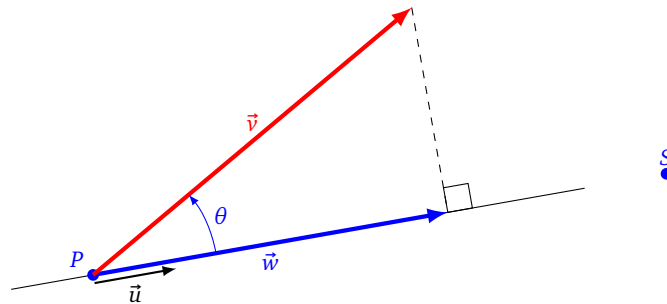
Il faut faire bien attention que l'effet Doppler ne prend en compte que la vitesse d'éloignement (ou de rapprochement). Rappelons que P est le point où l'on est et S la position du satellite. On note \vec{u} un vecteur unitaire de P vers S : $\vec{u} = \frac{\vec{PS}}{\|\vec{PS}\|}$. Supposons pour l'instant que P soit fixe et S se déplace dans n'importe quelle direction, son vecteur vitesse étant noté \vec{v} .

Définition 1.

La **vitesse d'éloignement** est la composante de la vitesse le long de droite (PS) reliant notre position au satellite. Mathématiquement \vec{w} est la projection de \vec{v} sur la droite $\mathbb{R}\vec{u}$, c'est-à-dire :

$$\vec{w} = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle \vec{u} = \|\vec{v}\| \cos \theta \cdot \vec{u}$$

où θ est l'angle formé par \vec{u} et \vec{v} .



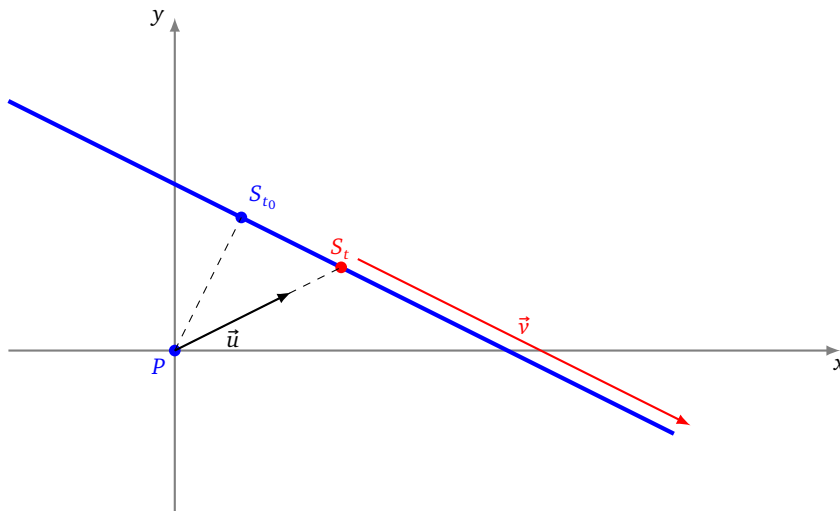
On aura besoin de la mesure de la vitesse :

$$w = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle = \|\vec{v}\| \cos \theta$$

Attention ! w a un signe : positif si le satellite s'éloigne, négatif s'il se rapproche. Si P et S se déplacent tous les deux, ayant des vecteurs vitesses \vec{v}_P et \vec{v}_S quelconques. Notons $\vec{v} = \vec{v}_S - \vec{v}_P$ le vecteur vitesse relative de S par rapport à P . Dans ce cas, la vitesse d'éloignement est définie par rapport à ce vecteur \vec{v} : $\vec{w} = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle \vec{u}$. L'effet Doppler ne permet pas de déterminer \vec{v} , mais seulement \vec{w} .

Exemple 6.

Nous sommes immobiles au point $P = (0, 0)$. Le point S se déplace sur la droite d'équation $x + 2y - 2 = 0$ à une vitesse constante $\vec{v} = (2, -1)$. On commence par déterminer une équation paramétrique de la droite : $S_t = (2t + 2, -t)$.



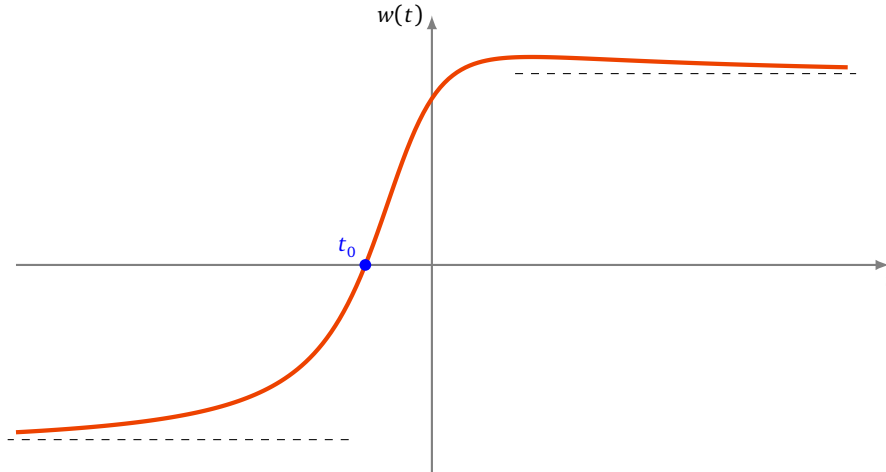
Le vecteur unité pointant vers S_t est :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PS_t}}{\|\overrightarrow{PS_t}\|} = \frac{(2t+2, -t)}{\|(2t+2, -t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5t^2+4t+4}}(2t+2, -t)$$

Calculons la vitesse d'éloignement :

$$\vec{w} = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle \vec{u} = \left\langle (2, -1) \middle| \frac{1}{\sqrt{5t^2+4t+4}}(2t+2, -t) \right\rangle \vec{u} = \frac{5t+4}{\sqrt{5t^2+4t+4}} \vec{u}$$

Voici le graphe de la fonction $w = w(t) = \frac{5t+4}{\sqrt{5t^2+4t+4}}$.



Lorsque t varie de $-\infty$ à t_0 , la vitesse est négative donc S_t se rapproche ; puis de t_0 à $+\infty$, la vitesse d'éloignement devient positive, S_t s'éloigne. Le satellite est au plus proche de nous en $t_0 = -\frac{4}{5}$. Le décalage Doppler D , qui est proportionnel à w , permet bien de calculer w , mais pas v . C'est clair sur cet exemple où la vitesse de S est constante, mais pas sa vitesse d'éloignement.

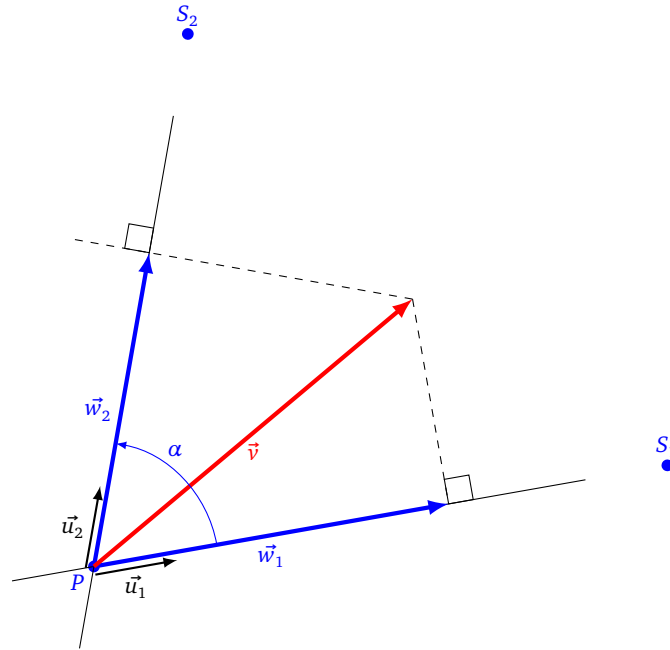
4.6. Vitesse par l'effet Doppler (2D)

On a vu que l'effet Doppler avec un seul satellite ne permet de calculer que la composante de la vitesse dans une seule direction. Pour obtenir complètement la vitesse on utilise plusieurs satellites. Commençons par le cas d'un modèle en deux dimensions. On note toujours P notre position et S_1, S_2 les positions des 2 satellites. Cette fois on considère que ce sont les satellites qui sont fixes, alors que le point P se déplace selon une vitesse \vec{v} à déterminer.

Les vecteurs unités pointant vers chaque satellite sont \vec{u}_1, \vec{u}_2 . On suppose que les points P, S_1, S_2 ne sont pas alignés. On connaît chacune des vitesses d'éloignement $w_i = \langle \vec{v} | \vec{u}_i \rangle$. Mais attention le vecteur \vec{v} n'est pas égal à $w_1 \vec{u}_1 + w_2 \vec{u}_2$, car il n'y a aucune raison que les vecteurs \vec{u}_1, \vec{u}_2 soient orthogonaux. Notons α l'angle entre les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 .

Proposition 3.

$$\vec{v} = \frac{w_1 - w_2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_1 + \frac{w_2 - w_1 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_2$$



Rappelons que les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont connus par la positions de P et des satellites, donc $\cos \alpha = \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle$ est aussi connu. Par contre w_1 et w_2 sont déterminés par les décalages Doppler par rapport à chacun des satellites : $w_1 \simeq c \frac{D_1}{f_{s_1}}$ et $w_2 \simeq c \frac{D_2}{f_{s_2}}$.

Démonstration. On cherche donc x_1, x_2 tels que $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$. On a les équations :

$$\begin{cases} \langle \vec{v} | \vec{u}_1 \rangle = \langle x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 | \vec{u}_1 \rangle \\ \langle \vec{v} | \vec{u}_2 \rangle = \langle x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 | \vec{u}_2 \rangle \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} w_1 = x_1 + x_2 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle \\ w_2 = x_1 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle + x_2 \end{cases}$$

Où l'on s'est souvenu que $\langle \vec{u}_i | \vec{u}_i \rangle = \|\vec{u}_i\|^2 = 1$. C'est un système linéaire où les données sont $w_1, w_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2$, les inconnues sont x_1, x_2 . On le réécrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En notant

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a donc} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Et si on note α l'angle entre les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 alors $\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle = \cos \alpha$, d'où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cos \alpha \\ \cos \alpha & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A^{-1} = \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\cos \alpha \\ -\cos \alpha & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} w_1 - w_2 \cos \alpha \\ w_2 - w_1 \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\vec{v} = \frac{w_1 - w_2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_1 + \frac{w_2 - w_1 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \vec{u}_2$$

□

Si on souhaite calculer la norme de $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$, il faut encore faire attention que l'on n'est pas dans une base orthonormée :

$$\|\vec{v}\|^2 = \langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = \langle x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 | x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 \rangle = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle$$

Ce qui donne pour nous après développement et simplifications :

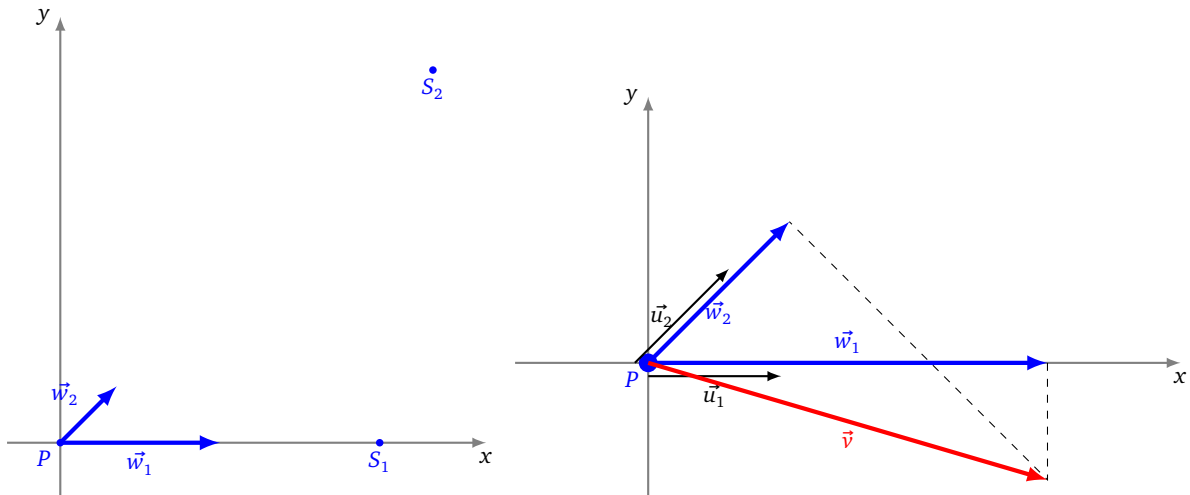
$$v = \|\vec{v}\| = \frac{1}{|\sin \alpha|} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 - 2w_1 w_2 \cos \alpha}$$

Exemple 7.

Voici des données :

$$P(0,0) \quad S_1(6,0) \quad S_2(7,7) \quad w_1 = 3 \quad w_2 = \frac{3}{2}$$

À quelle vitesse se déplace P et dans quelle direction ?



Les vecteurs unités pointant vers les satellites sont $\vec{u}_1 = (1,0)$ et $\vec{u}_2 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Ce qui donne $\langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Si la vitesse cherchée s'écrit $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2$, alors

$$\begin{cases} w_1 = \langle \vec{v} | \vec{u}_1 \rangle &= \langle x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 | \vec{u}_1 \rangle \\ w_2 = \langle \vec{v} | \vec{u}_2 \rangle &= \langle x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 | \vec{u}_2 \rangle \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 - \frac{3}{2}\sqrt{2} \\ 3 - 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Mais attention, on vient de calculer les coordonnées de \vec{v} dans la base (\vec{u}_1, \vec{u}_2) . Dans la base canonique $((1,0), (0,1))$, on trouve

$$\vec{v} = (6 - \frac{3}{2}\sqrt{2})\vec{u}_1 + (3 - 3\sqrt{2})\vec{u}_2 = (6 - \frac{3}{2}\sqrt{2})(1,0) + (3 - 3\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 3(1,0) + (-3 + \frac{3}{2}\sqrt{2})(0,1)$$

Les coordonnées de \vec{v} dans la base canonique sont donc $(3, -3 + 2\sqrt{2})$.

4.7. Vitesse par l'effet Doppler (3D)

Revenons en dimension 3, l'idée est exactement la même avec une coordonnée de plus, ce qui va juste compliquer un peu les expressions. Par contre, on se place dans une situation plus réaliste : tout le monde bouge ! On note toujours P notre position et \vec{v} notre vitesse et on considère 3 satellites de position S_1, S_2, S_3 et de vitesse respective $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Les vecteurs unités pointant de P vers chaque satellite sont $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$. Supposons que les 4 points P, S_1, S_2, S_3 ne soient pas dans un même plan, alors les vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ forment une base de \mathbb{R}^3 . On cherche l'expression de \vec{v} dans cette base :

$$\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3.$$

Cette fois le décalage Doppler avec chaque satellite calcule la vitesse relative :

$$w_i = \langle \vec{v} - \vec{v}_i | \vec{u}_i \rangle$$

Ce qui donne :

$$\langle \vec{v} | \vec{u}_i \rangle = w_i + \langle \vec{v}_i | \vec{u}_i \rangle$$

On remplace \vec{v} par son expression $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$ et en écrivant $y_i = w_i + \langle \vec{v}_i | \vec{u}_i \rangle$, on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle + x_3 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_3 \rangle &= y_1 \\ x_1 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle + x_2 + x_3 \langle \vec{u}_2 | \vec{u}_3 \rangle &= y_2 \\ x_1 \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_3 \rangle + x_2 \langle \vec{u}_2 | \vec{u}_3 \rangle + x_3 &= y_3 \end{cases}$$

Qui s'écrit

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle & \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_3 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_2 \rangle & 1 & \langle \vec{u}_2 | \vec{u}_3 \rangle \\ \langle \vec{u}_1 | \vec{u}_3 \rangle & \langle \vec{u}_2 | \vec{u}_3 \rangle & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A s'inverse sans problème (son expression n'a rien de spéciale mais est un peu longue à écrire), on en déduirait donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Revenons à notre but calculer notre vitesse. Les signaux des satellites permettent de :

- calculer notre position P ,
- savoir la position de chaque satellite et sa vitesse (elle est transmise dans le signal) donc on connaît les \vec{u}_i et les \vec{v}_i ,
- mesurer le décalage des fréquences, ce qui nous donne les vitesses relatives w_i .

Ainsi on connaît la matrice A et les $y_i = w_i + \langle \vec{v}_i | \vec{u}_i \rangle$. Ce qui permet d'en déduire les x_i et $\vec{v} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3$. On peut aussi en déduire la norme de la vitesse comme précédemment $v = \|\vec{v}\|$ (en faisant toujours attention que la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ n'est pas orthogonale).

4.8. Pratique et précision

Voici des données utiles pour avoir un ordre de grandeur des calculs et de la précision.

- Les satellites sont sur des orbites quasi-circulaire d'un rayon de 26 500 km (donc à 20 000 km d'altitude). La période de rotation est d'environ 12 h. En calculant la circonférence on trouve que la vitesse du satellite est d'environ 13 868 km/h, soit environ 3850 m/s. En fait cette vitesse varie au cours du temps, mais est connue avec une grande précision car l'éphéméride du satellite est transmise dans le signal. Cela permet de calculer précisément la position et la vitesse du satellite.
- Pour nous c sera la vitesse de la lumière : $c = 300\,000\,000$ m/s.
- Notre vitesse v_p est située entre 0 et 1000 km/h (donc de 0 à 280 m/s).
- Chaque satellite émet en fait deux signaux simultanément. On considère celui d'une fréquence de $f_s = 1575,42$ MHz.

Exemple 8.

Le récepteur GPS d'un avion enregistre un signal de fréquence $f_p = 1575,40$ MHz pour un satellite dont la vitesse d'éloignement est $v_s = 4000,00$ m/s. À quelle vitesse se déplace l'avion ?

Le décalage Doppler est $D = f_s - f_p = 1575,4200 - 1575,4000 = 0,0200$ MHz = 20 000 Hz.

Par la formule reliant le décalage Doppler à la vitesse relative v entre P et S on a :

$$v \simeq \frac{cD}{f_s} = \frac{300\,000\,000 \cdot 20\,000}{1\,575\,420\,000} \simeq 3808,51 \text{ m/s}$$

On sait que le satellite s'éloigne de nous avec la vitesse v_s , donc notre vitesse v_p est

$$v_p = v_s - v = 4000,00 - 3808,51 = 191,49 \text{ m/s} \simeq 690 \text{ km/h}$$

Bien sûr, nous avons seulement calculer notre vitesse de déplacement le long de l'axe (PS) . Pour calculer le vecteur vitesse il nous faudrait 3 satellites.

4.9. Boussole

Comment votre GPS peut-il savoir où est le Nord, alors qu'il ne contient pas de boussole ? Tout simplement en connaissant votre vecteur vitesse !

Pour bien comprendre les explications, il vaut mieux d'abord avoir lu la section suivante sur les différentes façons de se repérer dans l'espace. Le GPS nous fournit notre position P et, on vient de le voir, notre vitesse \vec{v} . Ce point et ce vecteur s'expriment dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont l'origine est O le centre de la Terre ; \vec{k} est porté par l'axe de rotation.

Proposition 4.

Le vecteur

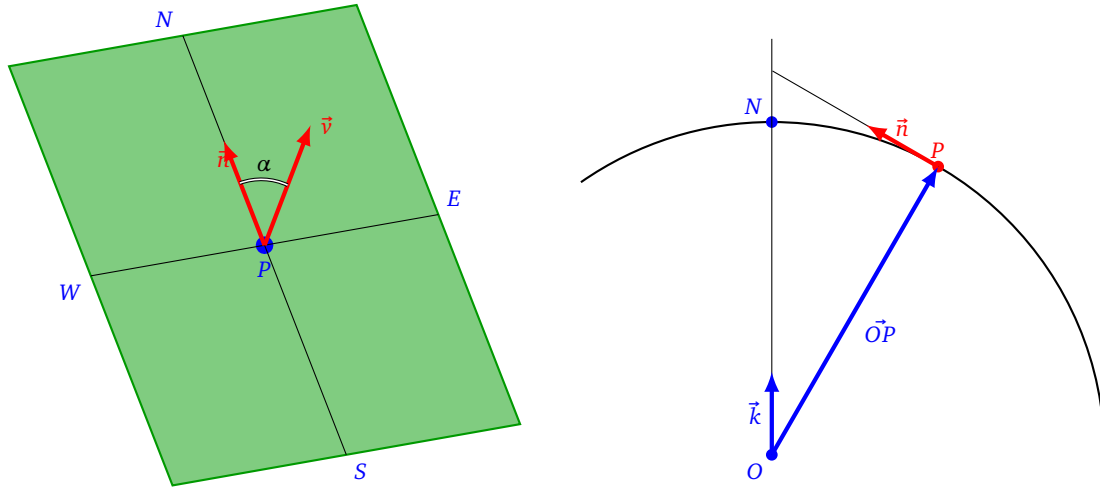
$$\vec{n} = R^2 \vec{k} - z_0 \vec{OP}$$

est un vecteur pointant vers le Nord depuis notre position $P = (x_0, y_0, z_0)$, où R est le rayon de la Terre.
Le cap suivi, c'est-à-dire l'angle entre le Nord et notre direction, est l'angle entre \vec{n} et notre vecteur vitesse \vec{v} .

On retrouve alors le cap α (ou plus exactement $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$) à l'aide du produit scalaire et du produit vectoriel :

$$\cos \alpha = \frac{\langle \vec{n} | \vec{v} \rangle}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin \alpha \cdot \frac{\|\vec{OP}\|}{\|\vec{OP}\|} = \frac{\|\vec{n} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{n}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Comme on connaît le vecteur \vec{v} (c'est notre direction) on en déduit la direction du Nord. Remarquez que si nous restons immobile, alors notre vitesse est nulle et il n'est pas possible d'en déduire la direction du Nord, contrairement à une boussole !



Démonstration. Au point P , situé à la surface de la Terre, on se place dans le plan tangent à la sphère. On suppose que l'on se déplace sans changer d'altitude, c'est-à-dire que le vecteur \vec{v} est dans ce plan. Et c'est aussi dans ce plan que l'on cherche à s'orienter.

Un vecteur \vec{n} porté par l'axe Nord-Sud vérifie les conditions suivantes :

1. Ce vecteur \vec{n} est dans le plan tangent, c'est-à-dire orthogonal au vecteur \vec{OP} .
2. Ce vecteur est dans le plan défini par O , P et \vec{k} . C'est-à-dire le plan méridien correspondant à la longitude de P .

Mathématiquement cela donne :

1. $\langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle = 0$
2. $\vec{n} = \alpha \vec{k} + \beta \vec{OP}$ pour des $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En substituant l'expression pour \vec{n} dans l'égalité $\langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle &= 0 \\ \iff \langle \alpha \vec{k} + \beta \vec{OP} | \vec{OP} \rangle &= 0 \\ \iff \alpha \langle \vec{k} | \vec{OP} \rangle + \beta \langle \vec{OP} | \vec{OP} \rangle &= 0 \\ \iff \alpha \langle (0, 0, 1) | (x_0, y_0, z_0) \rangle + \beta \|\vec{OP}\|^2 &= 0 \quad \text{où } \vec{k} = (0, 0, 1) \text{ et } \vec{OP} = (x_0, y_0, z_0) \\ \iff \alpha z_0 + \beta R^2 &= 0 \quad \text{où } R \text{ est le rayon de la Terre} \end{aligned}$$

Une solution est donnée par $\alpha = R^2$ et $\beta = -z_0$, ce qui correspond au vecteur

$$\vec{n} = R^2 \vec{k} - z_0 \vec{OP}$$

Nous avons tout fait pour que ce vecteur soit dans le plan tangent et soit sur l'axe Nord-Sud. En plus il pointe vraiment vers le Nord (et pas le Sud) car $\langle \vec{n} | \vec{k} \rangle = R^2 > 0$. □

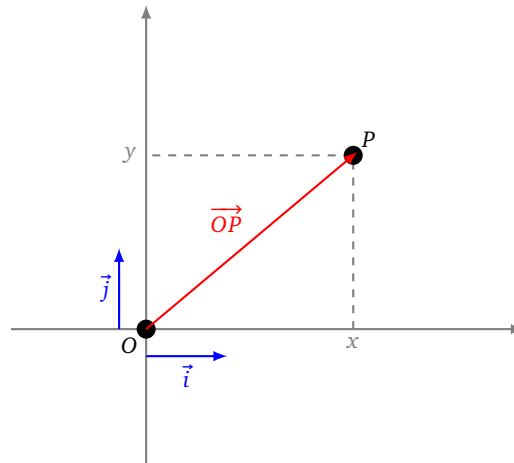
5. Systèmes de coordonnées

5.1. Coordonnées cartésiennes et polaires du plan

Dans le plan, soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère cartésien. Pour un point P quelconque du plan on peut décomposer le vecteur \vec{OP} dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , c'est-à-dire qu'il existe des réels x et y tels que :

$$\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

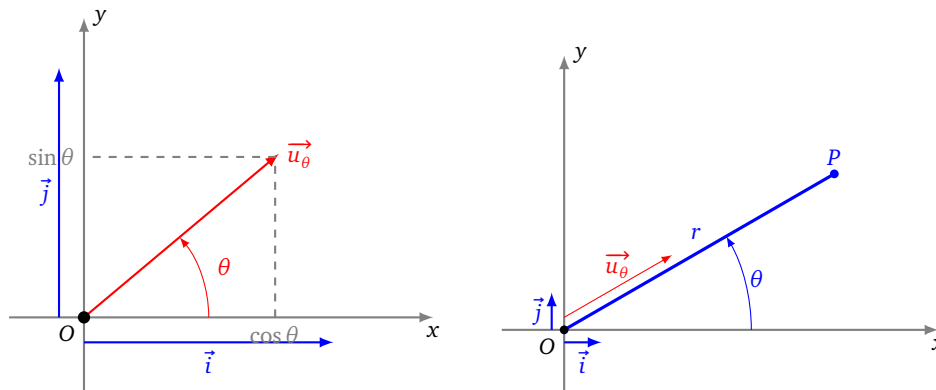
De plus de tels x et y sont uniques. Les **coordonnées** de P par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est le couple $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, noté aussi (x, y) .



Passons aux coordonnées polaires. Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé direct. Pour θ réel, on pose

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}.$$

Le point P étant un point du plan, on dit que $[r : \theta]$ est un couple de **coordonnées polaires** si $\vec{OP} = r\vec{u}_\theta$.



On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les formules suivantes :

$$\begin{cases} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{cases}$$

Ces formules s'obtiennent simplement en identifiant les coordonnées du vecteur $\vec{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\vec{u}_\theta$. Dans l'autre sens, on retrouve les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes par

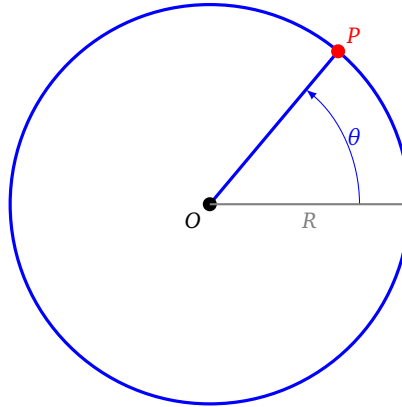
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui représente la distance du point P à l'origine O , et si $r \neq 0$ alors on détermine θ (modulo 2π) par les identités :

$$\cos \theta = \frac{x}{r} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{r}.$$

Modélisation de la Terre.

Si on souhaite modéliser la Terre alors on fixe le rayon r à $R = 6300$ km. Sur ce modèle du plan, un point P à la surface de la Terre est alors déterminé par un seul paramètre, l'angle θ .

**5.2. Coordonnées cartésiennes et sphériques de l'espace**

On fait le même travail dans l'espace. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. Pour un point P de l'espace, on décompose le vecteur \vec{OP} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\vec{OP} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

et on appelle les **coordonnées** de P , par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ou encore (x, y, z) .

Les coordonnées sphériques sont définies par 3 paramètres $[r : \varphi : \lambda]$. On note

$$\vec{u}_{\varphi, \lambda} = \cos \varphi \cos \lambda \vec{i} + \cos \varphi \sin \lambda \vec{j} + \sin \varphi \vec{k}$$

le vecteur qui forme un angle λ avec l'axe (O, \vec{i}) et un angle φ avec le plan horizontal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Le point P de l'espace a pour **coordonnées sphériques** $[r : \varphi : \lambda]$ si $\vec{OP} = r \vec{u}_{\varphi, \lambda}$.

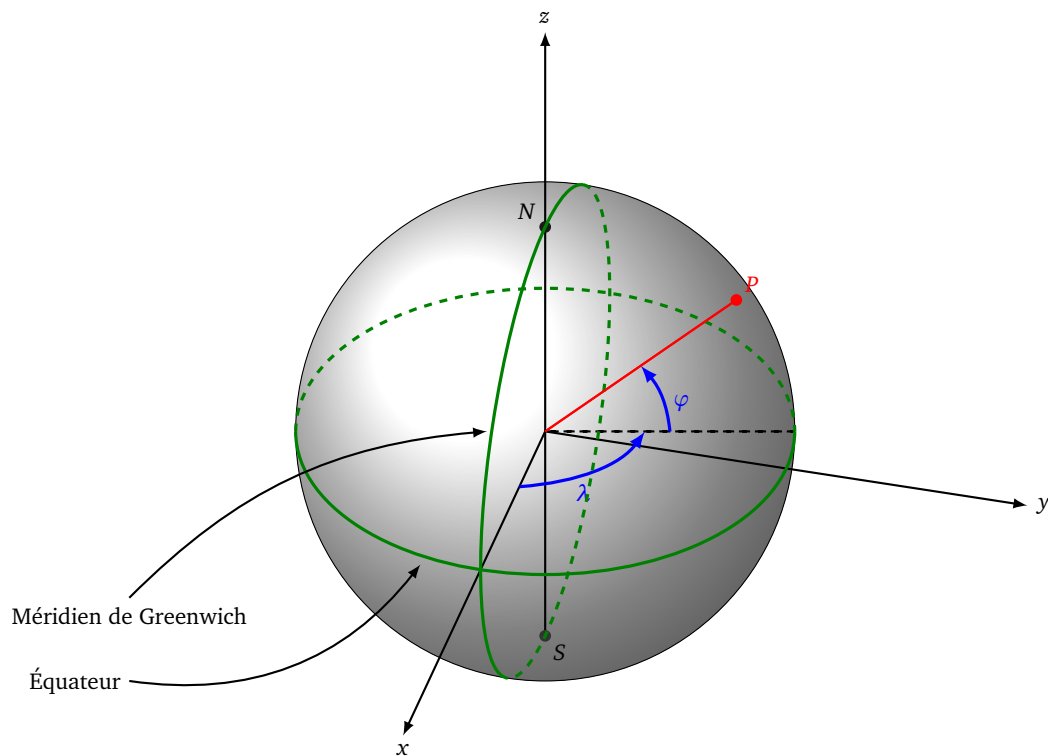
Le passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes s'exprime par

$$\begin{cases} x &= r \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= r \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= r \sin \varphi \end{cases}$$

Dans l'autre sens on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Modélisation de la Terre. On modélise la Terre par une sphère (ou plutôt une boule) de rayon $R = 6300$ km. Un point à la surface de la Terre (donc avec $r = R$) est déterminé par :

- l'angle φ , qui est la **latitude**, c'est un angle entre -90° et 90° . Un point de l'équateur vérifie $\varphi = 0^\circ$;
- l'angle λ , qui est la **longitude**, c'est un angle entre -180° et 180° . Le méridien de Greenwich correspond à $\lambda = 0^\circ$.

**Exemple 9.**

Le sommet de la montagne du Chimborazo en Équateur est le point sur Terre le plus loin du centre de la Terre. Ces coordonnées (x, y, z) en kilomètres sont :

$$x = 1238,0 \quad y = -6261,0 \quad z = -163,1$$

Calculer la distance r du sommet à l'origine ainsi que la latitude φ et la longitude λ .

Il s'agit d'inverser les relations :

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \lambda \\ y = r \cos \varphi \sin \lambda \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

On commence par trouver r :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \simeq 6384,4 \text{ km}$$

Puis comme $\frac{z}{r} = \sin \varphi$, alors

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \simeq -1,464^\circ$$

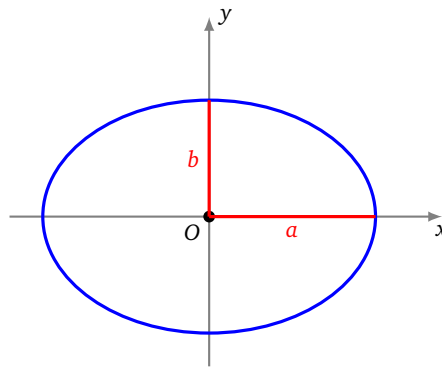
On en déduit $\cos \varphi$, et de l'égalité $\frac{y}{r} = \cos \varphi \sin \lambda$, on obtient :

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{1}{\cos \varphi} \frac{y}{r}\right) \simeq -78,815^\circ$$

Note : ce n'est pas le mont Everest qui est le point le plus éloigné du centre de la Terre, ceci à cause du phénomène d'aplatissement aux pôles que l'on verra juste après. Le sommet de l'Everest est à distance $r = 6382,3 \text{ km}$ du centre de la Terre.

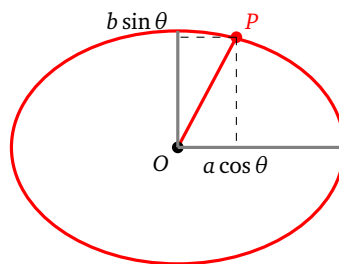
5.3. La Terre n'est pas ronde

La Terre n'est pas ronde ! Bien sûr il y a des montagnes et des vallées, mais ce sont des variations assez minimes. Par contre la Terre est aplatie aux pôles. Pour la modélisation dans le plan, on remplace le cercle de rayon R par une ellipse ayant un demi-grand axe a et un demi-petit axe b .



On adapte nos coordonnées polaires à cette ellipse. Un point sur l'ellipse est déterminé par un paramètre θ :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases}$$



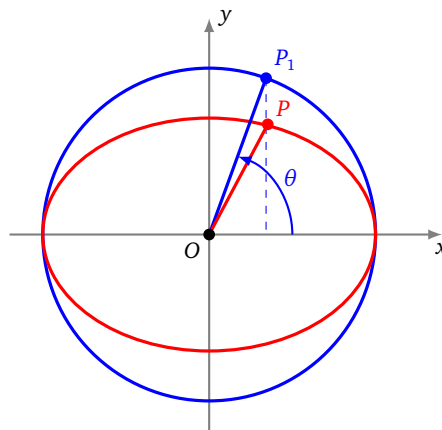
Bien sûr cette ellipse n'est pas très aplatie, les valeurs sont :

$$a = 6378,137 \text{ km} \quad b = 6356,752 \text{ km}$$

On définit l'**aplatissement** par

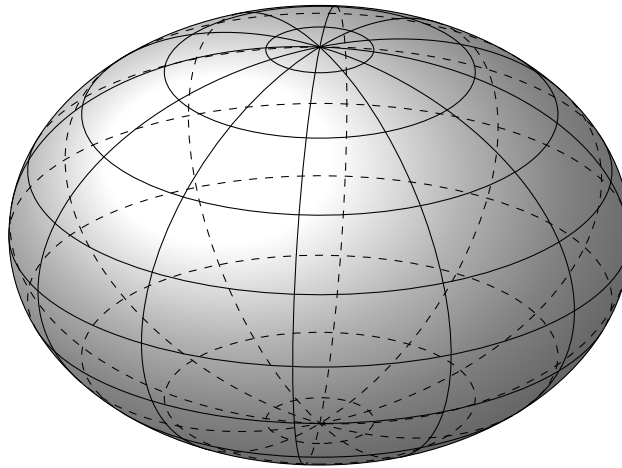
$$f = \frac{a - b}{a}$$

L'aplatissement est nul pour un cercle et vaut $f \simeq 0,00335$ pour la Terre. Par comparaison Saturne a un aplatissement de 0,1 ($a = 60\,268 \text{ km}$ $b = 54\,364 \text{ km}$) ; le Soleil lui a un aplatissement quasiment nul.



Attention θ n'est pas l'angle que l'on croit. Ce n'est pas l'angle entre l'horizontale et le vecteur \overrightarrow{OP} , mais l'angle entre l'horizontale et le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$, où le point P_1 est le point du cercle principal, de même abscisse que P (et avec l'ordonnée de même signe que celle de P).

La Terre en 3 dimensions se modélise en un ellipsoïde obtenu par la rotation d'une ellipse autour de l'axe reliant le pôle Nord au pôle Sud. L'équateur est donc un cercle de rayon a alors que le méridien de Greenwich est une ellipse de demi-axes a et b .



5.4. Changement de repère

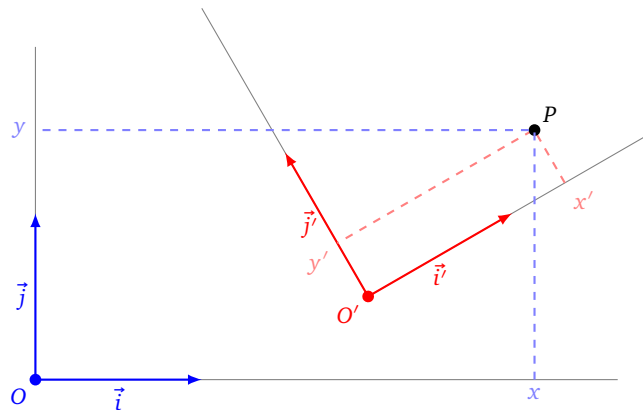
Si l'on a deux repères cartésiens du plan ou de l'espace, alors on peut passer de l'un à l'autre par un changement de repère. Fixons deux repères $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ du plan. Fixons aussi un point P du plan qui a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère \mathcal{R} , et a pour coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère \mathcal{R}' .

Alors il existe une matrice inversible A telle que :

$$X = AX' + \overrightarrow{OO'}$$

où $\overrightarrow{OO'}$ est le vecteur joignant les deux origines des repères (dans cette formule $\overrightarrow{OO'}$ est considéré comme un vecteur colonne).

Sur la figure suivante les deux repères sont orthonormés directs.



Par exemple A peut être :

- la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) : $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (c'est le cas si les deux repères sont orthonormés directs) ;
- la matrice d'une homothétie de rapport k (et de centre O) : $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses ($O\vec{i}$) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ou à l'axe des ordonnées ($O\vec{j}$) : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ou le produit de plusieurs de ces matrices ;
- ou plus généralement une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Pour un point P de l'espace dont les coordonnées sont $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de coordonnées

$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathcal{R}' = (O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$. Alors il existe une matrice inversible A telle que :

$$X = AX' + \vec{OO'}.$$

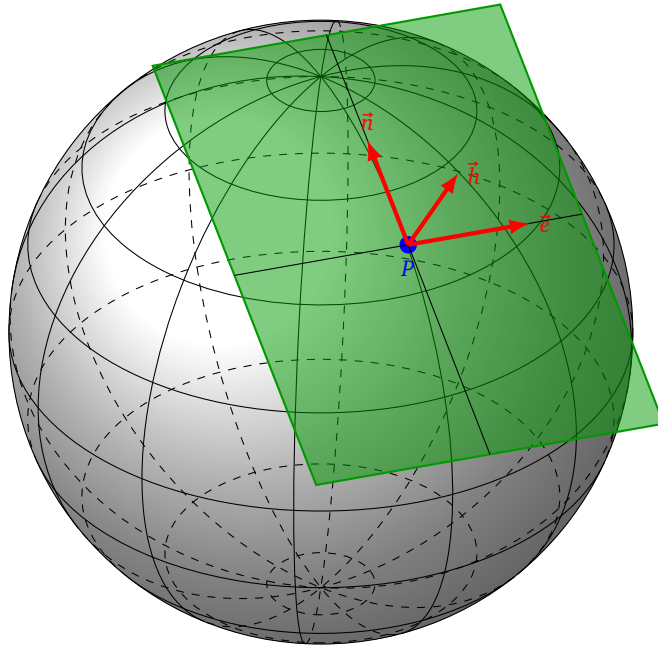
La matrice A peut être :

- la matrice d'une rotation d'angle λ d'axe $(O \vec{k})$: $\begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une rotation d'angle φ d'axe $(O \vec{j})$: $\begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une homothétie de rapport k (et de centre O) : $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une symétrie par rapport au plan (O, \vec{i}, \vec{j}) : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ...
- ou le produit de plusieurs de ces matrices ;
- ou plus généralement une matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de déterminant non nul.

Attention, ces formules de changement de repères ne concernent que le passage entre deux repères cartésiens, et pas le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

5.5. Coordonnées locales

Pour quelqu'un situé à un point P de la surface de la Terre, il est utile de définir un repère dont l'origine est le point P . On choisit un repère $\mathcal{R}_{\text{loc}} = (P, \vec{h}, \vec{e}, \vec{n})$ (pour *haut, est, nord*). Le premier vecteur est perpendiculaire (et sortant) à la sphère. Les deux autres vecteurs sont tangents à la sphère, le second vecteur pointe vers l'Est, le troisième vers le Nord.



Soit le point P de coordonnées sphériques $[r : \varphi : \lambda]$. On passe du repère $\mathcal{R}_O = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ au repère $\mathcal{R}_{\text{loc}} = (P, \vec{h}, \vec{e}, \vec{n})$ par la séquence de transformations suivantes (dans cet ordre) :

- la rotation d'axe (Oy) et d'angle φ ;
- la rotation d'axe (Oz) et d'angle λ ;

- la translation de vecteur \overrightarrow{OP} .

Voir la figure du paragraphe 5.2.

Les matrices des rotations sont respectivement :

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la translation a pour vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \cos \lambda \\ r \cos \varphi \sin \lambda \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Pour un point M de l'espace, on note X_O les coordonnées de M dans le repère \mathcal{R}_O et X_{loc} les coordonnées de ce même point M mais cette fois dans le repère \mathcal{R}_{loc} . Alors on passe de l'un à l'autre des systèmes de coordonnées par :

$$X_O = (R_\lambda R_\varphi) X_{\text{loc}} + \overrightarrow{OP}$$

où $R_\lambda R_\varphi$ est le produit des deux matrices.

Exemple 10.

Nous sommes au point P de latitude $\varphi = 45^\circ$, de longitude $\lambda = 60^\circ$ à la surface de la Terre (on prend $r = 6300$ km). Vous apercevez un avion M situé à 20 km au Sud-Est et à 5 km d'altitude. Calculer les coordonnées (x_M, y_M, z_M) du point M .

- Nous aurons besoin des coordonnées (x_P, y_P, z_P) du point P données par les formules :
$$\begin{cases} x_P = r \cos \varphi \cos \lambda \simeq 2227,4 \\ y_P = r \cos \varphi \sin \lambda \simeq 3857,9 \\ z_P = r \sin \varphi \simeq 4454,8 \end{cases}$$

Ce qui donne bien sûr les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$.

- Nous devons trouver les coordonnées locales X_{loc} de M dans le repère \mathcal{R}_{loc} : 20 km au Sud-Est et 5 km de hauteur correspond à $5\vec{h} + \frac{\sqrt{2}}{2}20\vec{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}20\vec{n}$, donc les coordonnées de M sont

$$X_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Les matrices de rotations sont ici :

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \quad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos \lambda & -\sin \lambda & 0 \\ \sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On applique la formule de changement de base pour obtenir les coordonnées $X_O = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ de M dans \mathcal{R}_O :

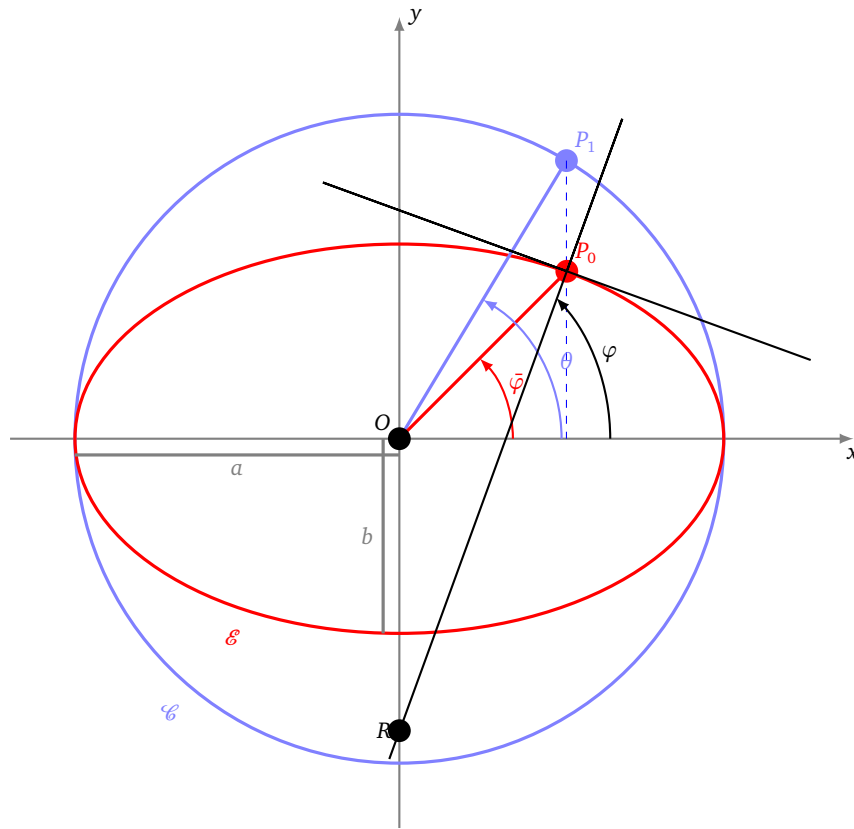
$$X_O = (R_\lambda R_\varphi) X_{\text{loc}} + \overrightarrow{OP} \simeq \begin{pmatrix} 2211,4 \\ 3859,4 \\ 4441,2 \end{pmatrix}$$

5.6. Différentes latitudes

Comme la Terre n'est pas ronde, les choses se compliquent. Nous allons devoir définir trois latitudes ! On modélise la Terre par un ellipsoïde. Nous ferons les calculs dans le plan pour une ellipse, les formules pour l'ellipsoïde s'en déduiront par rotation. On modélise donc la surface de la Terre par une ellipse \mathcal{E} , d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le demi-grand axe est de longueur a , le demi-petit axe est de longueur b . On trace aussi son cercle principal \mathcal{C} de rayon a . Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point de l'ellipse \mathcal{E} . Soit $P_1 = (x_1, y_1)$ le point de même abscisse que P_0 mais situé sur le cercle \mathcal{C} .



- La **latitude géocentrique** $\bar{\varphi}$ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OP_0) .
- La **latitude géographique** φ est l'angle entre l'axe des abscisses et la verticale en P_0 . La verticale est la droite verticale du lieu : c'est la droite orthogonale à l'ellipse en P_0 (c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente en P_0 à l'ellipse). La verticale en P_0 ne passe (en général) pas par l'origine O .
- La **latitude réduite** θ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OP_1) .

Ce que l'observateur mesure en P_0 c'est la latitude géographique. C'est donc φ l'angle le plus important avec lequel on souhaite se repérer. Pour l'instant nous allons trouver la relation entre ces trois angles.

Proposition 5.

$$\tan \bar{\varphi} = \frac{y_0}{x_0} \quad \tan \theta = \frac{a}{b} \tan \bar{\varphi} \quad \tan \varphi = \frac{a^2}{b^2} \tan \bar{\varphi}$$

Démonstration. 1. Tout d'abord l'ellipse est l'image du cercle par la transformation affine $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$. Ainsi $(x_0, y_0) = (x_1, \frac{b}{a}y_1)$. En particulier $\frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b} \frac{y_0}{x_0}$.

2. Ensuite si on note r la distance OP_0 alors $x_0 = r \cos \bar{\varphi}$ et $y_0 = r \sin \bar{\varphi}$ et ainsi :

$$\tan \bar{\varphi} = \frac{\sin \bar{\varphi}}{\cos \bar{\varphi}} = \frac{y_0}{x_0}.$$

3. Comme $x_1 = a \cos \theta$, $y_1 = a \sin \theta$ alors

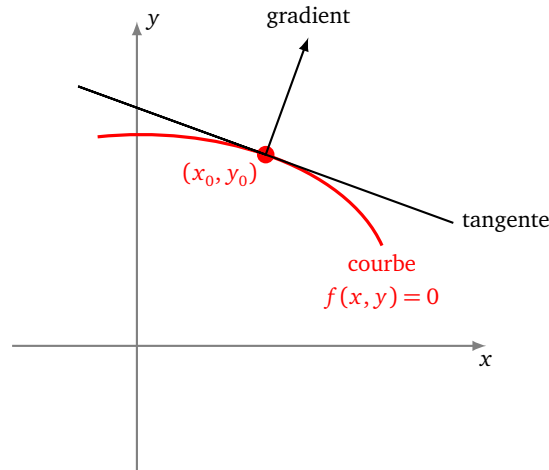
$$\tan \theta = \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b} \frac{y_0}{x_0} = \frac{a}{b} \tan \bar{\varphi}.$$

4. Obtenir une relation avec la latitude géographique φ demande de connaître la verticale du lieu. Par définition de l'angle φ , un vecteur (unitaire) vertical en P_0 est

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Nous avons besoin d'une autre façon de calculer la direction verticale. Pour cela on utilise le fait que si une courbe a pour équation $f(x, y) = 0$ et passe par le point (x_0, y_0) alors une équation de la tangente au point (x_0, y_0) est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$



Autrement dit le gradient

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

est orthogonal à la tangente à la courbe en ce point.

On applique ceci à l'ellipse définie par l'équation $f(x, y) = 0$ où $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Comme

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{b^2}.$$

Alors le vecteur gradient est

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ et le vecteur gradient \vec{v} sont deux vecteurs colinéaires, ce qui implique que

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \frac{2x_0}{a^2} \\ \frac{2y_0}{b^2} \end{pmatrix}$$

pour un certain $k \in \mathbb{R}$. En particulier

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{2y_0}{b^2}}{\frac{2x_0}{a^2}} = \frac{a^2}{b^2} \frac{y_0}{x_0} = \frac{a^2}{b^2} \tan \bar{\varphi}.$$

□

5.7. Coordonnées géographiques

Théorème 3.

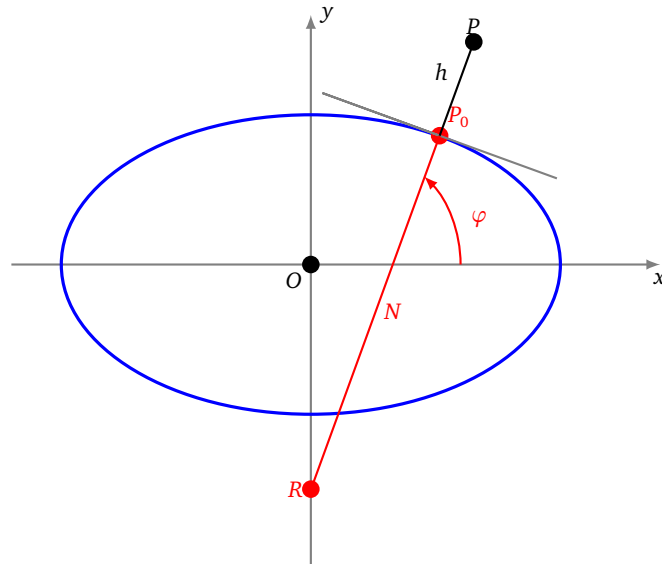
Pour un point $P = (x, y, z)$ ayant une latitude géographique φ et une altitude h alors

$$\begin{cases} x &= (N + h) \cos \varphi \\ y &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h \right) \sin \varphi \end{cases}$$

où

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi}}.$$

Si on note P_0 le point de (OP) situé à la surface de la Terre, alors la valeur N (qui dépend de la latitude φ) est la distance P_0 , c'est-à-dire la distance entre P_0 et l'axe (Oy) , mesurée le long de la verticale en P_0 .



Si e est l'excentricité de l'ellipse alors $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$, donc $N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$. Cette valeur N est aussi le rayon de courbure de l'ellipse au point P_0 . En effet l'ellipse étant symétrique par rapport à l'axe (Oy) , le centre de courbure doit appartenir à l'axe (Oy) . Ainsi le rayon de courbure est bien cette longueur N .

Les formules en dimension 3 pour un ellipsoïde sont similaires, elles découlent du théorème en prenant une section de la Terre passant les pôles et le point P :

Corollaire 1.

Pour un point $P = (x, y, z)$ de latitude géographique φ , de longitude λ et d'altitude h alors

$$\begin{cases} x &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2} N + h\right) \sin \varphi \end{cases}$$

où $N = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi}}$.

Exemple 11.

Les satellites GPS sont lancés depuis la base de Cap Canaveral en Floride. Sa latitude est $\varphi = 28,475\,630^\circ$, sa longitude $\lambda = -80,565\,834^\circ$ et se situe au niveau de la mer. Calculer les coordonnées (x, y, z) de la base, tout d'abord pour le modèle sphérique, en prenant $R = 6371,0$ km comme rayon moyen de la Terre. Faire le même calcul pour le modèle ellipsoïdal avec $a = 6378,137$ km, $b = 6356,752$ km.

1. Il s'agit d'appliquer les formules sphériques :

$$\begin{cases} x_1 &= R \cos \varphi \cos \lambda \simeq 918,0 \\ y_1 &= R \cos \varphi \sin \lambda \simeq -5524,5 \\ z_1 &= R \sin \varphi \simeq 3037,6 \end{cases}$$

2. Pour le modèle ellipsoïdal on commence par calculer le rayon de courbure N (qui dépend de la latitude φ) :

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi}} \simeq 6383,0$$

Puis on applique les formules ellipsoïdales (avec ici $h = 0$) :

$$\begin{cases} x_2 &= N \cos \varphi \cos \lambda \simeq 919,7 \\ y_2 &= N \cos \varphi \sin \lambda \simeq -5534,9 \\ z_2 &= \frac{b^2}{a^2} N \sin \varphi \simeq 3022,9 \end{cases}$$

On constate des écarts de plusieurs kilomètres entre les deux modèles.

Preuve du théorème.

Coordonnées de P_0 .

Notons N la longueur P_0R . Alors dans le triangle rectangle d'hypoténuse P_0R on a

$$x_0 = N \cos \varphi.$$

D'après la proposition 5 on a

$$y_0 = x_0 \tan \bar{\varphi} = x_0 \frac{b^2}{a^2} \tan \varphi = N \cos \varphi \frac{b^2 \sin \varphi}{a^2 \cos \varphi} = N \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi.$$

Calcul de N .

Le point $P_0 = (x_0, y_0)$ est sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En substituant les valeurs de x_0 et y_0 obtenues juste au-dessus on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \Rightarrow & \frac{N^2 \cos^2 \varphi}{a^2} + \frac{b^4 N^2 \sin^2 \varphi}{a^4 b^2} = 1 \\ \Rightarrow & N^2 \left((1 - \sin^2 \varphi) + \frac{b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right) = a^2 \\ \Rightarrow & N = \frac{a}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \sin^2 \varphi}} \end{aligned}$$

Coordonnées de P .

Rappelons que \vec{u} est un vecteur unitaire dirigé suivant la verticale du lieu :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

De l'identité vectorielle

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + h \vec{u}$$

on déduit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Ce qui donne

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \\ \left(\frac{b^2}{a^2} N + h\right) \sin \varphi \end{pmatrix}$$

□

6. Position approchée

6.1. Les erreurs

Einstein disait : « En théorie, la théorie et la pratique sont identiques. En pratique, elles sont différentes ! » En théorie, 4 satellites permettent de déterminer la position exacte (parmi deux possibles). En pratique, il est illusoire d'espérer une précision absolue, car il existe une multitude de sources possibles d'erreurs, les principales sont :

- des perturbations du signal lorsqu'il traverse l'atmosphère (l'ionosphère et la troposphère) ;
- des erreurs de mesures des instruments, principalement des erreurs de mesure du temps ;
- des erreurs dues aux effets de la physique relativiste (effets qu'il est possible de modéliser) ;
- des erreurs sur la position des satellites ;
- des erreurs dues à une mauvaise configuration des satellites.

Il existe d'autres sources d'erreurs :

- des erreurs dans les calculs numériques ;
- une dégradation volontaire possible du signal, car le GPS reste avant tout un service de l'armée des États-Unis.

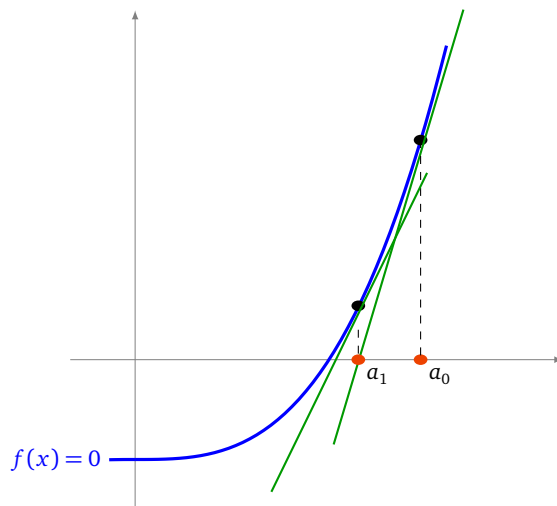
Une première conséquence de toutes ces erreurs, c'est qu'il est illusoire de chercher une solution exacte pour notre position. Aussi dans la pratique, on se contente de chercher une solution approchée, et d'appliquer des méthodes d'approximation qui sont beaucoup plus rapides : nous étudierons la méthode de linéarisation. La deuxième conséquence est qu'il faut pallier à toutes ces erreurs pour obtenir une position assez précise. La façon la plus efficace est d'utiliser plus que les 4 satellites indispensables. Nous verrons comment déterminer une position optimale à partir d'un nombre quelconque de satellites.

6.2. Calcul par linéarisation (dimension 1)

On commence par un modèle simple, en une dimension. L'équation à résoudre en dimension 1, avec un seul satellite est

$$(x - x_1)^2 = r_1^2.$$

On note $f(x) = (x - x_1)^2 - r_1^2$. Il s'agit donc de trouver x tel que $f(x) = 0$ (on oublie qu'ici on pourrait trouver une solution exacte). Une méthode classique et efficace est la méthode de Newton. Expliquons-la d'abord géométriquement, on part d'une valeur a_0 et on construit une suite (a_n) qui va tendre (très vite) vers un zéro de f . On construit d'abord la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a_0 , cette tangente recoupe l'axe des abscisses en une abscisse que l'on note a_1 . On recommence le processus : on construit la tangente au point d'abscisse a_1 ... On remplace localement la courbe par une droite, d'où le nom du processus : la linéarisation.



Passons à la partie calculs. Pour un point a , la tangente en a admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Trouver l'intersection avec l'axe des abscisses d'équation ($y = 0$) revient à résoudre l'équation $0 = f(a) + f'(a)(x - a)$. Ce qui conduit à $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Ainsi on définit par récurrence, la suite

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \quad (6)$$

Comme $f'(x) = 2(x - x_1)$, on trouve explicitement :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \left((a_n - x_1) - \frac{r_1^2}{a_n - x_1} \right).$$

Une étude de fonction et de suite récurrente prouve le résultat suivant pour notre fonction $f(x) = (x - x_1)^2 - r_1^2$.

Proposition 6.

Fixons $a_0 \in \mathbb{R}$. La suite définie par la relation de récurrence

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

converge vers une solution de $f(x) = 0$.

Une remarque importante : une équation de la tangente est $g(x) = 0$ où $g(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$ ce qui correspond au développement limité à l'ordre 1 de f . On remplace donc la recherche d'un zéro de f par celle, beaucoup plus facile, d'un zéro de g . Le zéro de g obtenu ne répond qu'approximativement au problème, mais on peut recommencer le processus jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

6.3. Calcul par linéarisation (dimension 2)

En dimension 2, chacun des deux satellites correspond à une fonction :

$$f_1(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2 \quad f_2(x, y) = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2$$

qui donne deux équations ($f_1(x, y) = 0$) et ($f_2(x, y) = 0$). Il s'agit donc de linéariser la fonction f_1 (et la fonction f_2) en prenant leur développement limité à l'ordre 1 en un point (a, b) :

$$g_1(x, y) = f_1(a, b) + (x - a) \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b)$$

$$g_2(x, y) = f_2(a, b) + (x - a) \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) + (y - b) \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b)$$

Au lieu de chercher l'intersection $(f_1(x, y) = 0) \cap (f_2(x, y) = 0)$ on cherche l'intersection $(g_1(x, y) = 0) \cap (g_2(x, y) = 0)$, ce qui en notation vectorielle conduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Notons $J(a, b)$ la matrice jacobienne :

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix}$$

alors, on doit résoudre

$$J(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

Si $J(a, b)$ est inversible alors on trouve

$$\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} = -J(a, b)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - J(a, b)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a, b) \\ f_2(a, b) \end{pmatrix}$$

Proposition 7.

Partant d'un point quelconque $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ on définit par récurrence la suite de points

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - J(a_n, b_n)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a_n, b_n) \\ f_2(a_n, b_n) \end{pmatrix}}$$

Cette suite converge vers une solution (x, y) vérifiant $f_1(x, y) = 0$ et $f_2(x, y) = 0$.

Nous admettons cette proposition.

La formule de récurrence

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} - J(a_n, b_n)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a_n, b_n) \\ f_2(a_n, b_n) \end{pmatrix} \quad (7)$$

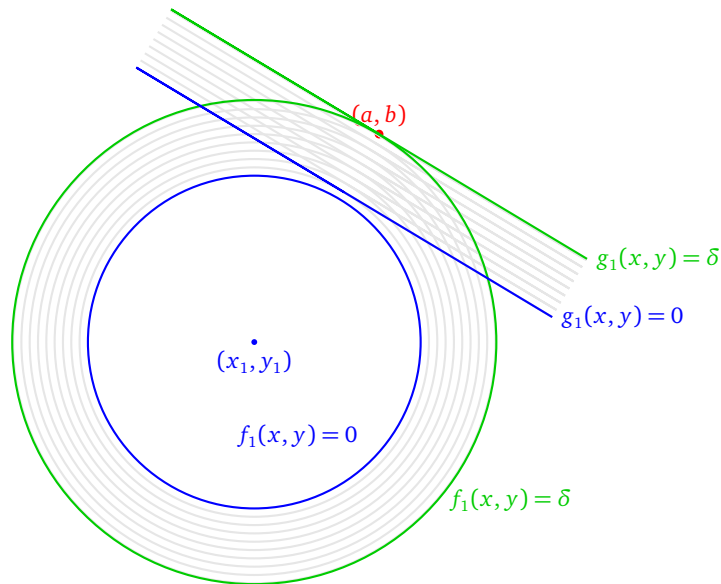
est comparable à la formule (6) si l'on considère que $J(a, b)$ joue le rôle de la dérivée. Connaissant $f_1(x, y) = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 - r_1^2$ et $f_2(x, y) = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 - r_2^2$, on calcule

$$J(a, b) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a - x_1 & b - y_1 \\ a - x_2 & b - y_2 \end{pmatrix}$$

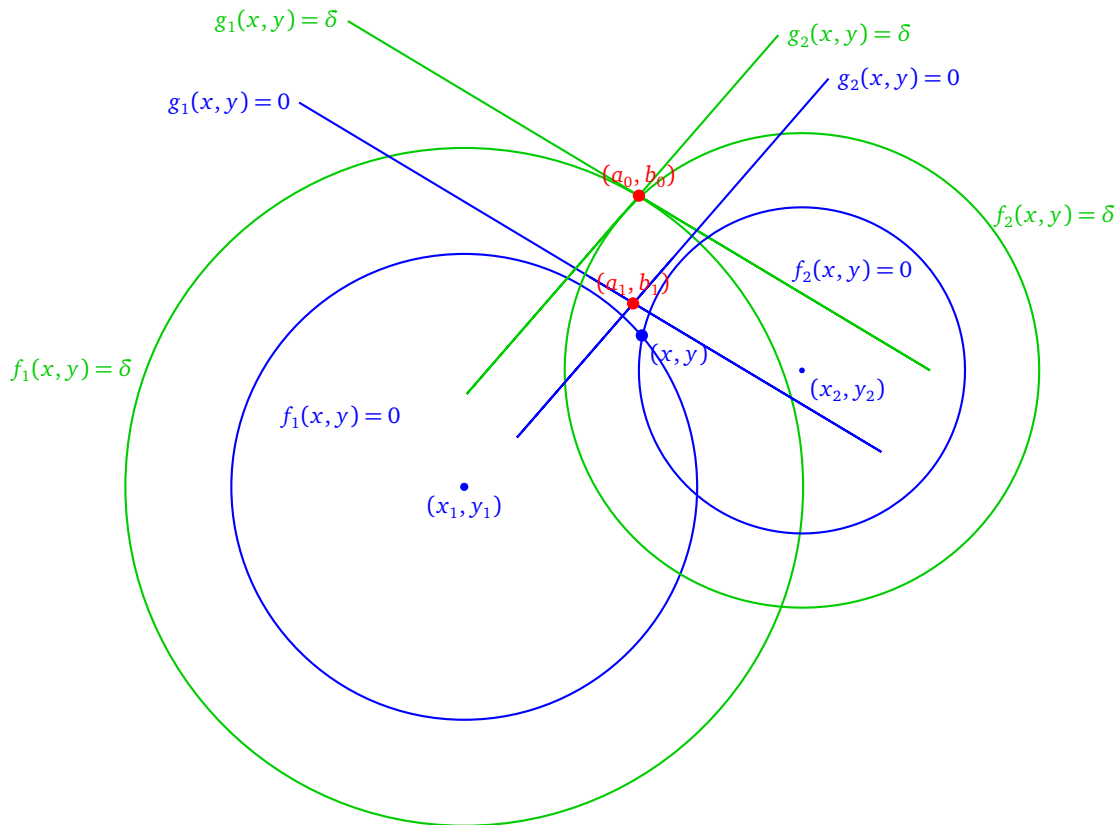
La matrice $J(a, b)$ est donc inversible si les vecteurs $(a - x_1, b - y_1)$ et $(a - x_2, b - y_2)$ ne sont pas colinéaires. Autrement dit, si les points (a, b) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) ne sont pas alignés.

Voici une interprétation géométrique de la linéarisation : on cherche une solution qui doit appartenir au cercle d'équation $(f_1(x, y) = 0)$. Pour cela on part d'un point (a, b) hors du cercle, on note $\delta = f_1(a, b) \neq 0$ qui mesure l'écart entre le point (a, b) et le cercle. Par définition de g_1 on a aussi $g_1(a, b) = \delta$. Les courbes d'équation $g_1(x, y) = \text{cst}$ sont des droites perpendiculaires à la droite passant par (x_1, y_1) et (a, b) .

Nous ce qui nous intéresse ce sont les points du cercle ($f_1(x, y) = 0$), la méthode de linéarisation consiste à remplacer ce cercle par les points de la droite ($g_1(x, y) = 0$). Cette droite est une droite proche (mais pas égale) à la tangente au cercle.



Dans la situation de deux satellites, on souhaite trouver une des intersections de deux cercles ($f_1(x, y) = 0$) et ($f_2(x, y) = 0$). Partant d'un (a_0, b_0) quelconque, on calcule les fonctions g_1 et g_2 associées à ce point (a_0, b_0) . On trace les deux droites d'équation ($g_1(x, y) = 0$) et ($g_2(x, y) = 0$). Elles se coupent en un point (a_1, b_1) assez proche de l'intersection des cercles. On recommence en partant du point (a_1, b_1) pour lequel on calcule de nouvelles fonctions g_1, g_2 , qui fournissent deux nouvelles droites, dont l'intersection est encore plus proche de notre solution.



Exemple 12.

On reçoit le signal d'un satellite avec $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $r_1 = 4$ et d'un second avec $(x_2, y_2) = (5, 2)$, $r_2 = 3$. La dernière position connue est $(a_0, b_0) = (1, 6)$. Où sommes nous ?

Nous allons chercher notre position approchée par la méthode de linéarisation. On pose

$$f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 4^2 \quad f_2(x, y) = (x - 5)^2 + (y - 2)^2 - 3^2$$

Donc

$$J(a, b) = 2 \begin{pmatrix} a & b \\ a-5 & b-2 \end{pmatrix}$$

- **Étape 0.** $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **Étape 1.** Nous avons :

$$J(a_0, b_0) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1(a_0, b_0) \\ f_2(a_0, b_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} - J(a_0, b_0)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a_0, b_0) \\ f_2(a_0, b_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55/28 \\ 229/56 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1,9643 \\ 4,0893 \end{pmatrix}$$

- **Étape 2.**

$$J(a_1, b_1) = \begin{pmatrix} 55/14 & 229/28 \\ -85/14 & 117/28 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} f_1(a_1, b_1) \\ f_2(a_1, b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14365/3136 \\ 14365/3136 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - J(a_1, b_1)^{-1} \begin{pmatrix} f_1(a_1, b_1) \\ f_2(a_1, b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23223/10360 \\ 14073/4144 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2,2416 \\ 3,3960 \end{pmatrix}$$

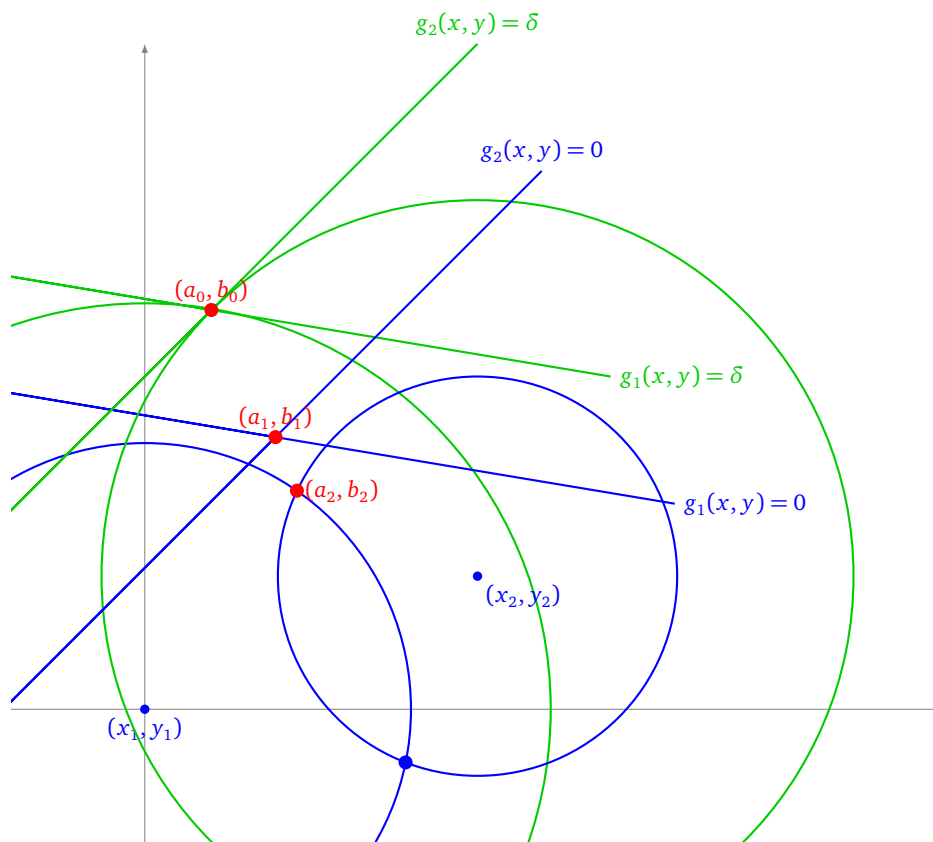
- **Étape 2.** Après calculs

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2,2862 \\ 3,2845 \end{pmatrix}$$

Les solutions exactes s'obtiennent par calculs algébriques :

$$\begin{pmatrix} \frac{90}{29} - \frac{4}{29}\sqrt{35} \\ \frac{29}{36} + \frac{10}{29}\sqrt{35} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2,2874 \\ 3,2814 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{90}{29} + \frac{4}{29}\sqrt{35} \\ \frac{29}{36} - \frac{10}{29}\sqrt{35} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3,9194 \\ -0,7986 \end{pmatrix}$$

À la fin de l'étape 2, sur le dessin, on ne distingue plus la solution approchée (a_2, b_2) de la solution exacte. Sur le dessin, seule la construction de (a_0, b_0) vers (a_1, b_1) est dessinée.

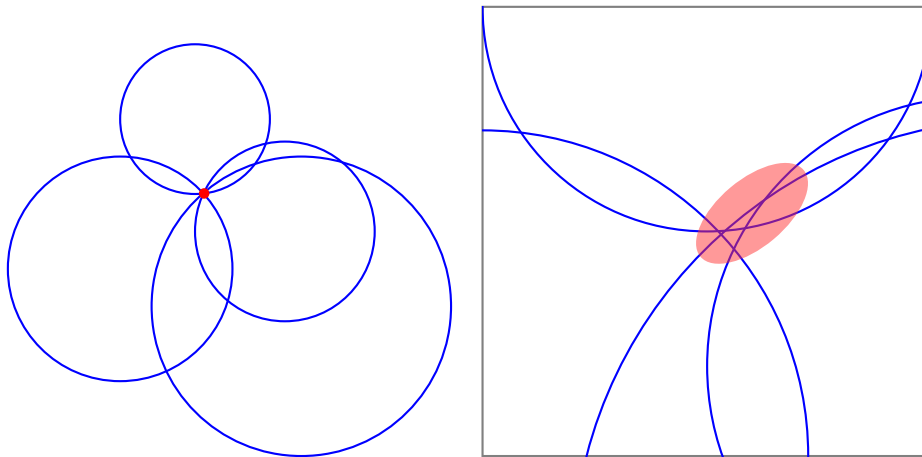


6.4. Passage à un système surdimensionné

Quelque soit la méthode de résolution, par linéarisation ou par calcul exact, on est amené à résoudre un (ou plusieurs) système linéaire de type $AX = B$. Jusqu'ici nous avons toujours supposé qu'il y a avait autant d'inconnues (dans le cas le plus général (x, y, z, t)) que d'équations (une équation par satellite). Ce qui fait que la matrice A est une matrice carrée, et le plus souvent inversible, ce qui permet de résoudre le système linéaire en : $X = A^{-1}B$.

Comment profiter de la réception de plus de signaux ? Parmi les 30 satellites du système GPS, tous ne sont pas « visibles » par l'utilisateur. Cependant il y a bien souvent entre 7 et 10 signaux reçus. Nous allons voir comment en profiter.

Il faut tout d'abord bien comprendre qu'en théorie rajouter plus d'équations ne change rien : les solutions restent les mêmes. En pratique c'est différent, du fait des erreurs inévitables il n'y a aucun point qui satisfasse toutes les équations ; cependant on souhaite trouver un point qui répond au mieux au problème. En théorie (figure de gauche) un point est solution de toutes les équations, en pratique même si aucun point n'est solution, une zone de points est à privilégier (zoom de la figure de droite).



Dans le cadre plus général nous avons $p = 4$ inconnues (x, y, z, t) (mais souvent pour les exemples on se contentait de (x, y)). On note X le vecteur colonne des inconnues, c'est un vecteur de taille p . Chaque satellite fournit une équation linéaire, donc avec n satellites on aboutit à un système linéaire

$$AX = B$$

où $A \in M_{n,p}$ est une matrice avec n lignes et p colonnes, le second membre B est un vecteur colonne de taille n .

Dans le cas qui nous intéresse ici, $n \geq p$, $A \in M_{n,p}$ n'est plus une matrice carrée, parler de son inverse n'a plus de sens.

6.5. Méthode des moindres carrés

Soit $A \in M_{n,p}$ une matrice, X un vecteur inconnu de taille p et B un vecteur de taille n . Comme il n'y a en général pas de solution X , au système $AX = B$, il faut se mettre d'accord sur le X qui convient, comme il faut que $AX - B$ soit le plus proche du vecteur nul, on définit :

Définition 2.

Une **solution des moindres carrés** X est un vecteur tel que $\|AX - B\|$ soit le plus petit possible.

Si on note le vecteur $C = AX - B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ alors

$$\|C\|^2 = \langle C | C \rangle = C^T \cdot C = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$$

Il s'agit donc de minimiser cette somme des carrés, d'où le nom « moindres carrés ».

Proposition 8.

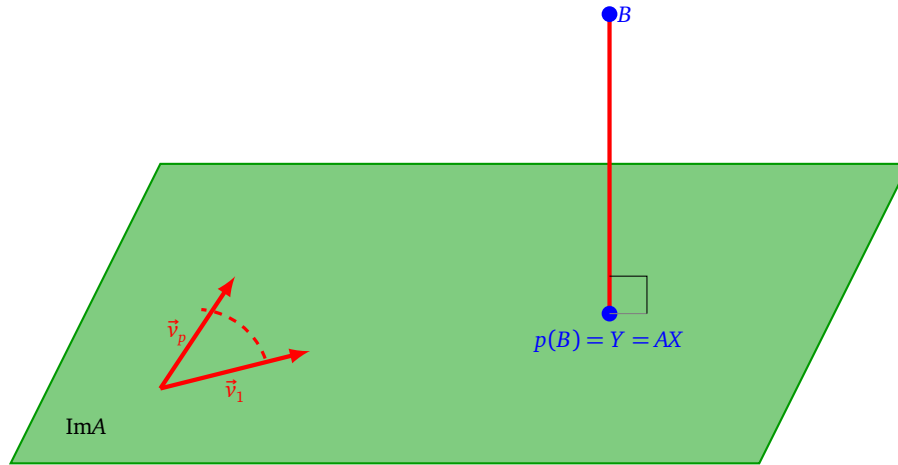
1. Une solution au problème des moindres carrés $AX = B$ existe et est unique.
2. La solution des moindres carrés est donnée par la formule

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

3. Géométriquement, si Y est le projeté orthogonal de B sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes

de la matrice A , alors X est la solution du système $AX = Y$.

Remarque : nous admettons (et nous supposons) que la matrice $A^T A$ est inversible lorsque A est de rang maximal (donc de rang p , car pour nous $n \geq p$). Expliquons la caractérisation géométrique.



Pour une matrice $A \in M_{n,p}$, voici des définitions équivalentes de l'**image** de A : Notons v_1, v_2, \dots, v_p les p colonnes de la matrice A .

- $\text{Im}A = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p)$ est le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n engendré par les p vecteurs colonnes v_1, v_2, \dots, v_p de la matrice A . Autrement dit :

$$\text{Im}A = \text{Vect}(v_1, v_2, \dots, v_p) = \{x_1 v_1 + \dots + x_p v_p \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \dots, x_p \in \mathbb{R}\}$$

- $\text{Im}A$ est l'ensemble des vecteurs images par A :

$$\text{Im}A = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^p\}$$

Dire que le problème $AX = B$ n'a pas de solution exacte, c'est dire que le vecteur B n'appartient pas à $\text{Im}A$. Soit $Y = p(B)$ le projeté orthogonal de B sur $\text{Im}A$.

- D'une part $Y \in \text{Im}A$ et Y minimise la distance entre B et les points de $\text{Im}A$, autrement dit $\|Y - B\| \leq \|Y' - B\|$ quelque soit $Y' \in \text{Im}A$. C'est une des caractérisations géométriques de la projection orthogonale.
- D'autre part comme $Y \in \text{Im}A$ alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $AX = Y$.

Exemple 13.

On reçoit 4 signaux sous la forme de 4 droites du plan. On cherche quel est le point du plan « le plus proche » de toutes les droites. Les équations sont les suivantes :

$$D_1 : (x = 4) \quad D_2 : (y = 3) \quad D_3 : (x - 2y = 0) \quad D_4 : (x + y = 4)$$

Bien sûr dans le cas de deux droites le point « le plus proche » serait le point d'intersection. Dans l'idéal on aimerait donc trouver un point commun à toutes les droites, c'est-à-dire que l'on aimerait résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x & = & 4 \\ y & = & 3 \\ x - 2y & = & 0 \\ x + y & = & 4 \end{cases}$$

Autrement dit on voudrait X avec :

$$AX = B \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il n'y a aucune solution X à ce problème, les droites n'étant pas concourantes. On décide d'appeler point « le plus proche » la solution X du problème des moindres carrés. Ainsi

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

On calcul

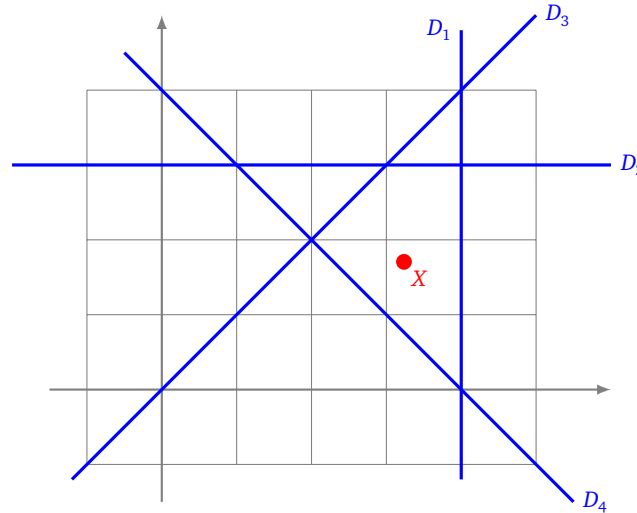
$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{donc } (A^T A)^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$(A^T A)^{-1} A^T B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B = \begin{pmatrix} 55/17 \\ 29/18 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3,235 \\ 1,706 \end{pmatrix}$$



Démonstration.

1. L'existence découle du troisième point, l'unicité du deuxième.
2. On a déjà dit que l'on aimerait résoudre l'équation $AX - B = 0$, mais il n'y a pas de solution en général. On cherche donc $AX - B$ le plus petit possible. Il s'agit donc de minimiser $\|AX - B\|$, où ce qui revient au même $\|AX - B\|^2$. Comme dans le cas d'une variable, lorsqu'il y a un minimum la dérivée s'annule. On cherche donc un point où la dérivée s'annule (d dénote l'application de dérivation) :

$$\begin{aligned} & d(c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2) = 0 \\ \iff & d\|AX - B\|^2 = 0 \\ \iff & d((AX - B)^T (AX - B)) = 0 \\ \iff & (d(AX - B)^T)(AX - B) + (AX - B)^T (d(AX - B)) = 0 \quad \text{par la formule } (uv)' = u'v + uv' \\ \iff & (AdX)^T (AX - B) + (AX - B)^T (AdX) = 0 \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont des constantes et } X \text{ est la variable} \\ \iff & (2AdX)^T (AX - B) = 0 \quad \text{car pour des vecteurs } u^T \cdot v = \langle u | v \rangle = v^T \cdot u \\ \iff & dX^T A^T (AX - B) = 0 \\ \iff & dX^T (A^T AX - A^T B) = 0 \quad (\text{quel que soit } dX) \\ \iff & A^T AX - A^T B = 0 \\ \iff & A^T AX = A^T B \quad (\text{attention } A^T \text{ n'est pas inversible, mais } A^T A \text{ oui}) \\ \iff & X = (A^T A)^{-1} A^T B \end{aligned}$$

Conclusion : si un X existe alors il est unique et c'est $X = (A^T A)^{-1} A^T B$.

3. C'est l'une des caractérisation du projeté orthogonal : $p(B)$ est le point de $\text{Im} A$ qui minimise la distance entre B et un point de $\text{Im} A$. Cette propriété entraîne en particulier l'existence de X . Vérifions que le calcul précédent coïncide avec le calcul de la projection orthogonale.

Soit $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur $\text{Im} A$.

Notons $Y = p(B)$. Que Y soit la projection orthogonale de B sur $\text{Im}A$ signifie que le vecteur $B - Y$ est orthogonal à tous vecteurs de $\text{Im}A$:

$$\begin{aligned}
 & \langle AV \mid B - Y \rangle = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \\
 \iff & \langle AV \mid B - AX \rangle = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \quad \text{pour } Y = AX \\
 \iff & (AV)^T \cdot (B - AX) = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \quad \text{car } \langle u \mid v \rangle = u^T \cdot v \\
 \iff & V^T A^T (B - AX) = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \\
 \iff & A^T (B - AX) = 0 \\
 \iff & A^T AX = A^T B \\
 \iff & X = (A^T A)^{-1} A^T B
 \end{aligned}$$

□

Bibliographie

- Stephen Bancroft, *An algebraic solution of the GPS equations*. IEEE Transactions, 1985.
- Pierre-André Chevalier, *Comment le GPS calcule-t-il sa position ?* [Une introduction didactique à la géométrie du GPS](#). 2002.
- Wolfgang Torge, *Geodesy*. de Gruyter, 2001.