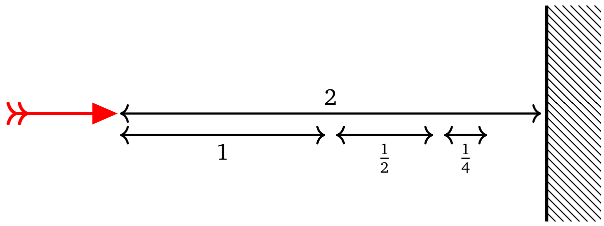
Séries

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à des sommes ayant une infinité de termes. Par exemple que peut bien valoir la somme infinie suivante :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \quad = \quad ?$$



Cette question a été popularisée sous le nom du ***paradoxe de Zénon***. On tire une flèche à 2 mètres d'une cible. Elle met un certain laps de temps pour parcourir la moitié de la distance, à savoir un mètre. Puis il lui faut encore du temps pour parcourir la moitié de la distance restante, et de nouveau un certain temps pour la moitié de la distance encore restante. On ajoute ainsi une infinité de durées non nulles, et Zénon en conclut que la flèche n'atteint jamais sa cible ! Zénon ne concevait pas qu'une infinité de distances finies puisse être parcourue en un temps fini. Et pourtant nous allons voir dans ce chapitre que la somme d'une infinité de termes peut être une valeur finie.

1. Définitions – Série géométrique

1.1. Définitions

Définition 1.
Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres réels (ou de nombres complexes). On pose

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ s'appelle la ***série*** de terme général u_k.
Cette série est notée par la somme infinie $\sum_{k\geqslant 0} u_k$. La suite (S_n) s'appelle aussi la ***suite des sommes partielles***.

Exemple 1.
Fixons $q \in \mathbb{C}$. Définissons la suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ par $u_k = q^k$; c'est une suite géométrique. La ***série géométrique*** $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ est la suite des sommes partielles :

$$S_0 = 1 \qquad S_1 = 1+q \qquad S_2 = 1+q+q^2 \qquad \ldots \qquad S_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n \quad \ldots$$

Définition 2.

Si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ admet une limite finie dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\mathbb{C}$), on note

$$S=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$

On appelle alors $S=\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ la *somme* de la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$, et on dit que la série est *convergente*. Sinon, on dit qu'elle est *divergente*.

Notations. On peut noter une série de différentes façons, et bien sûr avec différents symboles pour l'indice :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} u_i \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n \qquad \textstyle\sum_{k\geqslant 0} u_k \qquad \sum u_k.$$

Pour notre part, on fera la distinction entre une série quelconque $\sum_{k\geqslant 0} u_k$, et on réservera la notation $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ à une série convergente ou à sa somme.

1.2. Série géométrique

Proposition 1.
Soit $q\in\mathbb{C}$. La série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ est convergente si et seulement si $|q|<1$. On a alors

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = 1+q+q^2+q^3+\cdots = \frac{1}{1-q}}$$

Démonstration. Considérons

$$S_n = 1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n.$$

- Écartons tout de suite le cas $q=1$, pour lequel $S_n=n+1$. Dans ce cas $S_n\to+\infty$, et la série diverge.
- Soit $q\neq 1$ et multiplions S_n par $1-q$:

$$(1-q)S_n = (1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n)-(q+q^2+q^3+\cdots+q^{n+1}) = 1-q^{n+1}$$

  Donc

$$\boxed{S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

  Si $|q|<1$, alors $q^n\to 0$, donc $q^{n+1}\to 0$ et ainsi $S_n\to\frac{1}{1-q}$. Dans ce cas la série $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge.
  Si $|q|\geqslant 1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite finie (elle peut tendre vers $+\infty$, par exemple si $q=2$; ou bien être divergente, par exemple si $q=-1$). Donc si $|q|\geqslant 1$, (S_n) n'a pas de limite finie, donc la série $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ diverge.

□

Exemple 2. 1. Série géométrique de raison $q=\frac{1}{2}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$. Cela résout le paradoxe de Zénon : la flèche arrive bien jusqu'au mur !

2. Série géométrique de raison $q=\frac{1}{3}$, avec premier terme $\frac{1}{3^3}$. On se ramène à la série géométrique commençant à $k=0$ en ajoutant et retranchant les premiers termes : $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - \frac{13}{9} = \frac{3}{2}-\frac{13}{9} = \frac{1}{18}$.

3. Le fait de calculer la somme d'une série à partir de $k=0$ est purement conventionnel. On peut toujours effectuer un changement d'indice pour se ramener à une somme à partir de 0. Une autre façon pour calculer la même série $\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^k}$ que précédemment est de faire le changement d'indice $n=k-3$ (et donc $k=n+3$) :

$$\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{n+3}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^3}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3^n} = \frac{1}{27}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{-1}{4}} = \frac{4}{5}$.

1.3. Séries convergentes

La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes : changer un nombre fini de termes d'une série ne change pas sa nature, convergente ou divergente. Par contre, si elle est convergente, sa somme est évidemment modifiée.
Une façon pratique d'étudier la convergence d'une série est d'étudier son reste : le ***reste d'ordre** n* d'une série convergente $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ est :

$$R_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 2.
Si une série est convergente, alors $S = S_n + R_n$ (pour tout $n \geqslant 0$) et $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.

Démonstration.
- $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.
- Donc $R_n = S - S_n \to S - S = 0$ lorsque $n \to +\infty$.

□

1.4. Suites et séries

Il n'y a pas de différence entre l'étude des suites et des séries. On passe de l'une à l'autre très facilement.
Tout d'abord rappelons qu'à une série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$, on associe la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et que par définition la série est convergente si la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge.
Réciproquement si on veut étudier une suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ on peut utiliser le résultat suivant :

Proposition 3.
*Une **somme télescopique** est une série de la forme*

$$\sum_{k\geqslant 0}(a_{k+1} - a_k).$$

Cette série est convergente si et seulement si $\ell := \lim_{k\to+\infty} a_k$ existe et dans ce cas on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_{k+1} - a_k) = \ell - a_0.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n) \\ &= -a_0 + a_1 - a_1 + a_2 - a_2 + \cdots + a_n - a_n + a_{n+1} \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

□

Voici un exemple très important pour la suite.

Exemple 3.
La série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots$$

est convergente et a la valeur 1. En effet, elle peut être écrite comme somme télescopique, et plus précisément la somme partielle vérifie :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = 1 - \frac{1}{n+2} \to 1 \quad \text{lorsque } n \to +\infty$$

Par changement d'indice, on a aussi que les séries $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(k-1)}$ sont convergentes et de même somme 1.

1.5. Le terme d'une série convergente tend vers 0

Théorème 1.
Si la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, alors la suite des termes généraux $(u_k)_{k\geqslant 0}$ tend vers 0.

Le point clé est que l'on retrouve le terme général à partir des sommes partielles par la formule

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

Démonstration. Pour tout $n \geqslant 0$, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = S_n - S_{n-1}$. Si $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge, la suite $(S_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers la somme S de la série. Il en est de même de la suite $(S_{n-1})_{n\geqslant 1}$. Par linéarité de la limite, la suite (u_n) tend vers $S - S = 0$. □

La contraposée de ce résultat est souvent utilisée :

$$\boxed{\text{Une série dont le terme général ne tend pas vers 0 ne peut pas converger.}}$$

Par exemple les séries $\sum_{k\geqslant 1}(1+\frac{1}{k})$ et $\sum_{k\geqslant 1} k^2$ sont divergentes.
Plus intéressant, la série $\sum u_k$ de terme général

$$u_k = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2^\ell \quad \text{pour un certain } \ell \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

diverge. En effet, même si les termes valant 1 sont très rares, il y en a quand même une infinité !

1.6. Linéarité

Proposition 4.
Soient $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ deux séries convergentes de sommes respectives A et B, et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ est convergente et de somme $\lambda A + \mu B$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{+\infty} b_k.$$

Démonstration. $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \to A \in \mathbb{C}, B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k \to B \in \mathbb{C}$. Donc $\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k = \lambda A_n + \mu B_n \to \lambda A + \mu B$. □

Par exemple :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^k} + \frac{5}{3^k}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^k} + 5\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} + 5\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = 2 + 5\frac{3}{2} = \frac{19}{2}\ .$$

Comme application pour les séries à termes complexes, la convergence équivaut à celle des parties réelle et imaginaire :

Proposition 5.
Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. Pour tout k, notons $u_k = a_k + \mathrm{i}\, b_k$, avec a_k la partie réelle de u_k et b_k la partie imaginaire. La série $\sum u_k$ converge si et seulement si les deux séries $\sum a_k$ et $\sum b_k$ convergent. Si c'est le cas, on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{+\infty} b_k\ .$$

Exemple 4.
Considérons par exemple la série géométrique $\sum_{k\geqslant 0} r^k$, où $r = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$ est un complexe de module $\rho < 1$ et d'argument θ.
Comme le module de r est strictement inférieur à 1, alors la série converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r}.$$

D'autre part, $r^k = \rho^k e^{\mathrm{i}k\theta}$ par la formule de Moivre. Les parties réelle et imaginaire de r^k sont

$$a_k = \rho^k \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad b_k = \rho^k \sin(k\theta)\,.$$

On déduit de la proposition précédente que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-r}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} r^k\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-r}\right).$$

Le calcul donne :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \cos(k\theta) = \frac{1-\rho\cos\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \sin(k\theta) = \frac{\rho\sin\theta}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta}\,.$$

1.7. Sommes de séries

Pour l'instant, il n'y a pas beaucoup de séries dont vous connaissez la somme, à part les séries géométriques. Il faudra attendre d'autres chapitres et d'autres techniques pour calculer des sommes de séries. Dans ce chapitre on s'intéressera essentiellement à savoir si une série converge ou diverge.

Voici cependant une exception !

Exemple 5.
Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $|q| < 1$. Que vaut la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \quad ?$$

Admettons un moment que cette série converge et notons $S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k$.
Écrivons :

$$\begin{aligned}
S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k &= \sum_{k=1}^{+\infty} kq^k = q\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} \\
&= q\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q\sum_{k=1}^{+\infty} (k-1)q^{k-1} \\
&= q\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q\sum_{k'=0}^{+\infty} k'q^{k'} \qquad \text{en posant } k' = k-1 \\
&= q\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} + q\cdot S
\end{aligned}$$

En résolvant cette équation en S, on trouve que

$$(1-q)S = q\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}\,.$$

Cette dernière série est une série géométrique de raison q avec $|q| < 1$ donc converge. Cela justifie la convergence de S.
Ainsi

$$(1-q)S = q\cdot\frac{1}{1-q}\,.$$

Conclusion :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}\,.$$

1.8. Critère de Cauchy

Attention ! Il existe des séries $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ telles que $\lim_{k\to+\infty} u_k = 0$, mais $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ diverge. L'exemple le plus classique est la ***série harmonique*** :

$$\boxed{\text{La série} \quad \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{diverge}}$$

Plus précisément, on a $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Cependant on a $u_k = \frac{1}{k} \to 0$ (lorsque $k \to +\infty$).

Pour montrer que la série diverge nous allons utiliser le critère de Cauchy.
Rappel. Une suite (s_n) de nombres réels (ou complexes) converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy, c'est-à-dire :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geqslant n_0 \qquad |s_n - s_m| < \epsilon$$

Pour les séries cela nous donne :

Théorème 2 (Critère de Cauchy)**.**
Une série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ *converge si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geqslant n_0 \qquad \left|u_n + \cdots + u_m\right| < \epsilon\ .$$

On le formule aussi de la façon suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \geqslant n_0 \qquad \left|\sum_{k=n}^{m} u_k\right| < \epsilon$$

ou encore

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \quad \forall p \in \mathbb{N} \qquad \left|u_n + \cdots + u_{n+p}\right| < \epsilon$$

Démonstration. La preuve est simplement de dire que la suite (S_n) des sommes partielles converge si et seulement si c'est une suite de Cauchy. Ensuite il suffit de remarquer que

$$\left|S_m - S_{n-1}\right| = \left|u_n + \cdots + u_m\right|.$$

□

Revenons à la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$. La somme partielle est $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Calculons la différence de deux sommes partielles, afin de conserver les termes entre $n+1$ (qui joue le rôle de n) et $2n$ (qui joue le rôle de m) :

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

La suite des sommes partielles n'est pas de Cauchy (car $\frac{1}{2}$ n'est pas inférieur à $\epsilon = \frac{1}{4}$ par exemple), donc la série ne converge pas.
Si on souhaite terminer la démonstration sans utiliser directement le critère de Cauchy alors on raisonne par l'absurde. Supposons que $S_n \to \ell \in \mathbb{R}$ (lorsque $n \to +\infty$). Alors on a aussi $S_{2n} \to \ell$ (lorsque $n \to +\infty$) et donc $S_{2n} - S_n \to \ell - \ell = 0$. Ce qui entre en contradiction avec l'inégalité $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$.

On termine par une étude plus poussée de la série harmonique.

Proposition 6.
Pour la série harmonique $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ *et sa somme partielle* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$*, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Démonstration. Soit $M > 0$. On choisit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geqslant 2M$. Alors pour $n \geqslant 2^m$ on a :

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^m} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\right) \\
&\geqslant 1 + \frac{1}{2} + 2\frac{1}{4} + 4\,\frac{1}{8} + 8\frac{1}{16} + \cdots + 2^{m-1}\frac{1}{2^m} \\
&= 1 + m\frac{1}{2} \geqslant M
\end{aligned}$$

L'astuce consiste à regrouper les termes. Entre chaque parenthèses il y a successivement $2, 4, 8, \ldots$ termes jusqu'à

$$2^m - (2^{m-1} + 1) + 1 = 2^m - 2^{m-1} = 2^{m-1} \quad \text{termes.}$$

Ainsi pour tout $M > 0$ il existe $n_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $S_n \geqslant M$; ainsi (S_n) tend vers $+\infty$. Cela reprouve bien sûr que la série harmonique diverge. □

Mini-exercices. 1. Calculer les sommes partielles S_n de la série dont le terme général est $\frac{1}{4^k}$, commençant à $k = 1$. Cette série est-elle convergente ? Si c'est possible, calculer la somme S et les restes R_n.

2. Mêmes questions avec $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k$, $\sum_{k\geqslant 0} 3^k$, $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{10^k}$, $\sum_{k\geqslant 2} \exp(-k)$.
3. Pourquoi les séries suivantes sont-elles divergentes ? $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k}+(-1)^k\right)$; $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k}{k+1}$; $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{2k}$; $\sum_{k\geqslant 1} k\cos(k)$; $\sum_{k\geqslant 1} \exp(\frac{1}{k})$.
4. Calculer les sommes partielles de la série $\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1-\frac{1}{k+1}\right)$. Cette série est-elle convergente ?
5. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k = \frac{q^2+q}{(1-q)^3}$.

2. Séries à termes positifs

Les séries à termes positifs ou nuls se comportent comme les suites croissantes et sont donc plus faciles à étudier.

2.1. Convergence par les sommes partielles

Rappels. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ une suite croissante de nombres réels.

- Si la suite est majorée, alors la suite (s_n) converge, c'est-à-dire qu'elle admet une limite finie.
- Sinon la suite (s_n) tend vers $+\infty$.

Appliquons ceci aux séries $\sum u_k$ à *termes positifs*, c'est-à-dire $u_k \geqslant 0$ pour tout k. Dans ce cas la suite (S_n) des sommes partielles, définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, est une suite croissante. En effet

$$S_n - S_{n-1} = u_n \geqslant 0.$$

Par les rappels sur les suites, nous avons donc :

Proposition 7.
Une série à termes positifs est une série convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée. Autrement dit, si et seulement s'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n \leqslant M$.

De plus, dans le cas de convergence, la somme de la série S vérifie bien sûr $\lim S_n = S$, mais aussi $S_n \leqslant S$, pour tout n. Les deux situations convergence/divergence sont possibles : $\sum_{k\geqslant 0} q^k$ converge si $0 < q < 1$, et diverge si $q \geqslant 1$.

2.2. Théorème de comparaison

Quelle est la méthode générale pour trouver la nature d'une série à termes positifs ? On la compare avec des séries classiques simples au moyen du théorème de comparaison suivant.

Théorème 3 (Théorème de comparaison)**.**
Soient $\sum u_k$ et $\sum v_k$ deux séries à termes positifs ou nuls. On suppose qu'il existe $k_0 \geqslant 0$ tel que, pour tout $k \geqslant k_0$, $u_k \leqslant v_k$.

- *Si $\sum v_k$ converge alors $\sum u_k$ converge.*
- *Si $\sum u_k$ diverge alors $\sum v_k$ diverge.*

Démonstration. Comme nous l'avons observé, la convergence ne dépend pas des premiers termes. Sans perte de généralité on peut donc supposer $k_0 = 0$. Notons $S_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $S'_n = v_0 + \cdots + v_n$. Les suites (S_n) et (S'_n) sont croissantes, et de plus, pour tout $n \geqslant 0$, $S_n \leqslant S'_n$. Si la série $\sum v_k$ converge, alors la suite (S'_n) converge. Soit S' sa limite. La suite (S_n) est croissante et majorée par S', donc elle converge, et ainsi la série $\sum u_k$ converge aussi. Inversement, si la série $\sum u_k$ diverge, alors la suite (S_n) tend vers $+\infty$, et il en est de même pour la suite (S'_n) et ainsi la série $\sum v_k$ diverge. □

2.3. Exemples

Exemple 6.
Nous avons déjà vu dans l'exemple 3 que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad \text{converge.}$$

Nous allons en déduire que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{converge.}$$

En effet, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{2k^2}}{\frac{1}{(k+1)(k+2)}} = \frac{1}{2}.$$

En particulier, il existe k_0 tel que pour $k \geqslant k_0$:

$$\frac{1}{2k^2} \leqslant \frac{1}{(k+1)(k+2)}$$

En fait c'est vrai pour $k \geqslant 4$, mais il est inutile de calculer une valeur précise de k_0. On en déduit que la série de terme général $\frac{1}{2k^2}$ converge, d'où le résultat par linéarité.

Exemple 7.
Voici un exemple fondamental, la *série exponentielle*.

$$\boxed{\text{La série} \quad \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!} \quad \text{converge.}}$$

Notons que $0! = 1$ et que pour $k \geqslant 1$, $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$.
En effet $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$ pour $k \geqslant 2$, mais $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ (par changement d'indice) est une série convergente. Donc la série exponentielle $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ converge.
En fait, par définition, la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ vaut le nombre d'Euler $e = \exp(1)$.

Exemple 8.
Inversement, nous avons vu que la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ diverge. On en déduit facilement que les séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ divergent également.

Terminons avec une application intéressante : le développement décimal d'un réel.

Exemple 9.
Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'entiers tous compris entre 0 et 9. La série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k} \quad \text{converge.}$$

En effet, son terme général $u_k = \frac{a_k}{10^k}$ est majoré par $\frac{9}{10^k}$. Mais la série géométrique $\sum \frac{1}{10^k}$ converge, car $\frac{1}{10} < 1$. La série $\sum \frac{9}{10^k}$ converge aussi par linéarité, d'où le résultat.
Une telle somme $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{10^k}$ est une écriture décimale d'un réel x, avec ici $0 \leqslant x \leqslant 1$.
Par exemple, si $a_k = 3$ pour tout k :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots = 0,3 + 0,03 + 0,003 + \cdots = 0,333\ldots = \frac{1}{3}$$

On retrouve bien sûr le même résultat à l'aide de la série géométrique :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{10^k} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$$

2.4. Théorème des équivalents

Nous allons améliorer le théorème de comparaison avec la notion de suites équivalentes.

Soient (u_k) et (v_k) deux suites ***strictement positives***. Alors les suites (u_k) et (v_k) sont ***équivalentes*** si

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{u_k}{v_k} = 1.$$

On note alors

$$u_k \sim v_k.$$

> **Théorème 4** (Théorème des équivalents).
> *Soient (u_k) et (v_k) deux suites à termes strictement positifs. Si $u_k \sim v_k$ alors les séries $\sum u_k$ et $\sum v_k$ sont de même nature.*

Autrement dit, si les suites sont équivalentes alors elles sont soit toutes les deux convergentes, soit toutes les deux divergentes. Bien sûr, en cas de convergence, il n'y a aucune raison que les sommes soient égales. Enfin, si les suites sont toutes les deux strictement négatives, la conclusion reste valable.
Revenons sur un exemple qui montre que ce théorème est très pratique : les suites $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k^2+3k+2}$ sont équivalentes. Comme la série $\sum \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ converge (exemple 3), alors cela implique que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\left|\frac{u_k}{v_k} - 1\right| < \epsilon,$$

ou autrement dit

$$(1-\epsilon)v_k < u_k < (1+\epsilon)v_k.$$

Fixons un $\epsilon < 1$. Si $\sum u_k$ converge, alors par le théorème 3 de comparaison, $\sum(1-\epsilon)v_k$ converge, donc $\sum v_k$ également. Réciproquement, si $\sum u_k$ diverge, alors $\sum(1+\epsilon)v_k$ diverge, et $\sum v_k$ aussi. □

2.5. Exemples

Exemple 10.
Les deux séries

$$\sum \frac{k^2+3k+1}{k^4+2k^3+4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k+\ln(k)}{k^3} \quad \text{convergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k^2}$, et nous savons que la série $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Exemple 11.
Par contre

$$\sum \frac{k^2+3k+1}{k^3+2k^2+4} \quad \text{et} \quad \sum \frac{k+\ln(k)}{k^2} \quad \text{divergent.}$$

Dans les deux cas, le terme général est équivalent à $\frac{1}{k}$, et nous avons vu que la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge.

Voyons un exemple plus sophistiqué.

Exemple 12.
Est-ce que la série

$$\sum_{k\geqslant 1} \ln\big(\operatorname{th} k\big) \quad \text{converge ?}$$

La méthode est de chercher un équivalent simple du terme général.

- Remarquons tout d'abord que, pour $k > 0$, $0 < \operatorname{th} k < 1$.
- Puis évaluons $\operatorname{th} k$:
$$\operatorname{th} k = \frac{\operatorname{sh} k}{\operatorname{ch} k} = \frac{e^k - e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-k}}{e^k + e^{-k}} = 1 + \frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}}$$
- Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, alors, si $u_k \to 0$, $\ln(1+u_k) \sim u_k$. Ainsi
$$\ln(\operatorname{th} k) = \ln\left(1 + \frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}}\right) \sim \frac{-2e^{-2k}}{1+e^{-2k}} \sim -2e^{-2k}$$
- La série $\sum e^{-2k} = \sum (e^{-2})^k$ converge car c'est une série géométrique de raison $\frac{1}{e^2} < 1$.
- Les suites $\ln(\operatorname{th} k)$ et $-2e^{-2k}$ sont deux suites strictement négatives et on a vu que $\ln(\operatorname{th} k) \sim -2e^{-2k}$. Par le théorème 4 des équivalents, comme la série $\sum -2e^{-2k}$ converge, alors la série $\sum \ln(\operatorname{th} k)$ converge également. (Si vous préférez, vous pouvez appliquer le théorème aux suites strictement positives $-\ln(\operatorname{th} k)$ et $2e^{-2k}$.)

Mini-exercices. 1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(\ln k)^{\alpha}}{k^3}$ converge, quel que soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

2. Montrer que, si la série à termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ converge, alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty}u_k^2$ converge aussi.
3. Soient $\sum_{k\geqslant 0}u_k$ et $\sum_{k\geqslant 0}v_k$ deux séries vérifiant $u_k>0$, $v_k>0$ et pour tout $k\geqslant 0$: $0<m\leqslant\frac{u_k}{v_k}\leqslant M$. Montrer que les deux séries sont de même nature.
4. Par comparaison ou recherche d'équivalent, déterminer la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\ln k}{k}$. Même question avec les séries de terme général $\sin\left(\frac{1}{(k-1)(k+1)}\right)$; $\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}$; $\ln\left(\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{k^2}}}\right)$.
5. Écrire la série associée au développement décimal $0,99999\ldots$ Notons S la somme de cette série. Calculer la série correspondant à $10\cdot S$. Simplifier $10\cdot S-S$. En déduire S. Retrouver cette valeur S à l'aide d'une série géométrique.
6. Justifier que la série $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}$ est convergente. Décomposer $\frac{1}{k^2-1}$ en éléments simples. Déterminer une expression des sommes partielles S_n. En déduire que $\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^2-1}=\frac{3}{4}$.
7. Nous admettons ici que $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$. Sans calculs, déterminer les sommes :
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k}{k!}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)}{k!}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2}{k!}$$

3. Séries alternées

Il existe un autre type de série facile à étudier : les séries alternées. Ce sont celles où le signe du terme général change à chaque rang.

3.1. Critère de Leibniz

Soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ une suite qui vérifie $u_k\geqslant 0$. La série $\sum_{k\geqslant 0}(-1)^k u_k$ s'appelle une ***série alternée***.
On a le critère de convergence suivant, extrêmement facile à vérifier :

Théorème 5 (Critère de Leibniz).
Supposons que $(u_k)_{k\geqslant 0}$ soit une suite qui vérifie :

1. *$u_k\geqslant 0$ pour tout $k\geqslant 0$,*
2. *la suite (u_k) est une suite décroissante,*
3. *et $\lim_{k\to+\infty}u_k=0$.*

Alors la série alternée $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ converge.

Démonstration. Nous allons nous ramener à deux suites adjacentes.
- La suite (S_{2n+1}) est croissante car $S_{2n+1}-S_{2n-1}=u_{2n}-u_{2n+1}\geqslant 0$.
- La suite (S_{2n}) est décroissante car $S_{2n}-S_{2n-2}=u_{2n}-u_{2n-1}\leqslant 0$.
- $S_{2n}\geqslant S_{2n+1}$ car $S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}\leqslant 0$.
- Enfin $S_{2n+1}-S_{2n}$ tend vers 0 car $S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}\to 0$ (lorsque $n\to+\infty$).

En conséquence (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergent et en plus convergent vers la même limite S. On conclut que (S_n) converge vers S.
En plus on a montré que $S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ pour tout n.
Enfin on a aussi
$$0\geqslant R_{2n}=S-S_{2n}\geqslant S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}$$
et
$$0\leqslant R_{2n+1}=S-S_{2n+1}\leqslant S_{2n+2}-S_{2n+1}=u_{2n+2}.$$
Ainsi, quelle que soit la parité de n, on a $|R_n|=|S-S_n|\leqslant u_{n+1}$. □

Exemple 13.
La ***série harmonique alternée***
$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$
converge. En effet, en posant $u_k = \frac{1}{k+1}$, alors

1. $u_k \geqslant 0$,
2. (u_k) est une suite décroissante,
3. la suite (u_k) tend vers 0.

Par le critère de Leibniz (théorème 5), la série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\frac{1}{k+1}$ converge.

3.2. Reste

Non seulement le critère de Leibniz prouve la convergence de la série $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$, mais la preuve nous fournit deux résultats importants supplémentaires : un encadrement de la somme et une majoration du reste.

Corollaire 1.
Soit une série alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k$ *vérifiant les hypothèses du théorème 5. Soit S la somme de cette série et soit (S_n) la suite des sommes partielles.*

1. *La somme S vérifie les encadrements :*
$$S_1 \leqslant S_3 \leqslant S_5 \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant S \leqslant \cdots \leqslant S_{2n} \leqslant \cdots \leqslant S_4 \leqslant S_2 \leqslant S_0.$$
2. *En plus, si* $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k$ *est le reste d'ordre n, alors on a*
$$\left|R_n\right| \leqslant u_{n+1}.$$

Pour une série alternée, la vitesse de convergence est donc dictée par la décroissance vers 0 de la suite (u_k). Celle-ci peut être assez lente.

Exemple 14.
Par exemple, on a vu que la série harmonique alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge ; notons S sa somme. Les sommes partielles sont $S_0 = 1$, $S_1 = 1-\frac{1}{2}$, $S_2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$, $S_3 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$, $S_4 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$,... L'encadrement du corollaire s'écrit
$$1-\frac{1}{2} \leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} \leqslant \cdots \leqslant S_{2n+1} \leqslant \cdots \leqslant S \leqslant \cdots \leqslant S_{2n} \leqslant \cdots \leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5} \leqslant 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \leqslant 1$$
On en déduit
$$S_3 = \frac{35}{60} \simeq 0,58333\ldots \leqslant S \leqslant S_4 = \frac{47}{60} \simeq 0,78333\ldots$$
Si on pousse les calculs plus loin, alors pour $n = 200$ on obtient
$$S_{201} \simeq 0,69067\ldots \leqslant S \leqslant S_{200} \simeq 0,69562\ldots$$
Ce qui nous donne les deux premières décimales de $S \simeq 0,69\ldots$
En plus nous avons une majoration de l'erreur commise, en utilisant l'inégalité $|R_n| \leqslant u_{n+1}$. On trouve que l'erreur commise en approchant S par S_{200} est : $|S - S_{200}| = |R_{200}| \leqslant u_{201} = \frac{1}{202} < 5\cdot 10^{-3}$.
En fait, vous verrez plus tard que $S = \ln 2 \simeq 0,69314\ldots$

3.3. Contre-exemple

Terminons par deux mises en garde :

1. On ne peut pas laisser tomber la condition de décroissance de la suite (u_k) dans le critère de Leibniz.
2. Il n'est pas possible de remplacer u_k par un équivalent à l'infini dans le théorème 5, car la décroissance n'est pas conservée par équivalence.

Exemple 15.
Voici deux séries alternées :

$$\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\quad\text{converge,}\qquad\qquad \sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}\quad\text{diverge.}$$

Le critère de Leibniz (théorème 5) s'applique à la première : la suite $u_k=\frac{1}{\sqrt{k}}$ est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0. Conséquence, la série alternée $\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ converge.
Par contre le critère de Leibniz ne s'applique pas à la seconde, car si la suite $v_k=\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ est bien positive (pour $k\geqslant 2$) et tend vers 0, elle n'est pas décroissante.
Cependant, on a bien :

$$v_k=\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k}\sim\frac{1}{\sqrt{k}}=u_k$$

Pour montrer que $\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ diverge, calculons la différence :

$$(-1)^k u_k-(-1)^k v_k=\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}-\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}=(-1)^k\frac{\sqrt{k}+(-1)^k-\sqrt{k}}{k+(-1)^k\sqrt{k}}=\frac{1}{k+(-1)^k\sqrt{k}}\sim\frac{1}{k}$$

Ainsi la série de terme général $w_k=(-1)^k u_k-(-1)^k v_k$ diverge, car son terme général est équivalent à celui de la série harmonique $\sum\frac{1}{k}$ qui diverge.
Supposons maintenant par l'absurde que la série $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k v_k$ soit convergente. On sait aussi que la série $\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k u_k$ est convergente. Donc par linéarité la série $\sum_{k\geqslant 2}w_k=\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k u_k-\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k v_k$ serait convergente. Ce qui est une contradiction.
Conclusion : la série $\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+(-1)^k}$ diverge.

Mini-exercices. 1. Est-ce que le critère de Leibniz s'applique aux séries suivantes ?

$$\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}+\ln k}\qquad\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{\frac{k+1}{k}}\qquad\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{(-1)^{k+1}(\sqrt{k}-\ln k)}$$

$$\sum_{k\geqslant 2}(-1)^k\big(\ln(k+1)-\ln(k)\big)\qquad\sum_{k\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{k}+(-1)^k\ln k}\qquad\sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{3k+(-1)^k}$$

2. À partir de quel rang la somme partielle S_n de la série $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$ est-elle une approximation à $0,1$ près de sa somme S ? Et à $0,001$ près ? À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, déterminer deux décimales exactes après la virgule de S. Mêmes questions avec $\frac{(-1)^k}{2^k}$; $\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$; $\frac{(-1)^k}{k!}$.

4. Séries absolument convergentes – Règle de d'Alembert

4.1. Séries absolument convergentes

Définition 3.
On dit qu'une série $\sum_{k\geqslant 0}u_k$ de nombres réels (ou complexes) est ***absolument convergente*** si la série $\sum_{k\geqslant 0}|u_k|$ est convergente.

Exemple 16. 1. Par exemple la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{\cos k}{k^2}$ est absolument convergente. Car pour $u_k=\frac{\cos k}{k^2}$ on a $|u_k|\leqslant\frac{1}{k^2}$. Comme la série $\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}$ converge alors $\sum_{k\geqslant 1}|u_k|$ converge aussi.

2. La série harmonique alternée $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$ n'est pas absolument convergente. Car pour $v_k=\frac{(-1)^k}{k+1}$, la série $\sum_{k\geqslant 0}|v_k|=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k+1}$ diverge.

Une série, telle que la série harmonique alternée, qui est convergente, mais pas absolument convergente, s'appelle une série ***semi-convergente***.

Être absolument convergent est plus fort qu'être convergent :

Théorème 6.
Toute série absolument convergente est convergente.

Démonstration. Utilisons le critère de Cauchy. Soit $\sum u_k$ une série absolument convergente. La série $\sum |u_k|$ est convergente, donc la suite des restes (R'_n) avec $R'_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$ est une suite qui tend vers 0, donc en particulier c'est une suite de Cauchy. Soit $\epsilon > 0$ fixé. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant n_0$ et pour tout $p \geqslant 0$:

$$|u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \epsilon.$$

Par suite, pour $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant 0$ on a :

$$\left|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\right| \leqslant |u_n| + |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \epsilon.$$

Donc, d'après le critère de Cauchy (théorème 2), $\sum u_k$ est convergente. □

4.2. Règle du quotient de d'Alembert

La règle du quotient de d'Alembert est un moyen efficace de montrer si une série de nombres réels ou complexes converge ou pas.

Théorème 7 (Règle du quotient de d'Alembert).
Soit $\sum u_k$ une série dont les termes généraux sont des nombres réels (ou complexes) non nuls.

1. *S'il existe une constante $0 < q < 1$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geqslant k_0$,*
$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$
La série est même absolument convergente.
2. *S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,*
$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geqslant 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent, la situation que l'on étudie est lorsque la suite $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge ; la position de la limite par rapport à 1 détermine alors la nature de la série.
Voici une application directe et la plus utilisée, pour les séries de nombres réels, strictement positifs :

Corollaire 2 (Règle du quotient de d'Alembert).
Soit $\sum u_k$ une série à termes strictement positifs, telle que $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ converge vers ℓ.

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.*

Démonstration. Rappelons tout d'abord que la série géométrique $\sum q^k$ converge si $|q| < 1$, diverge sinon.
Dans le premier cas du théorème, l'hypothèse $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant q$ implique $|u_{k_0+1}| \leqslant |u_{k_0}| q$, puis $|u_{k_0+2}| \leqslant |u_{k_0}| q^2$. On vérifie par récurrence que, pour tout $k \geqslant k_0$:

$$|u_k| \leqslant |u_{k_0}| q^{-k_0} \cdot q^k = c \cdot q^k,$$

où c est une constante. Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, d'où le résultat par le théorème 3 de comparaison : la série $\sum |u_k|$ converge.

Si $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geqslant 1$, la suite $(|u_k|)$ est croissante : elle ne peut donc pas tendre vers 0 et la série diverge. □

Exemple 17. 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la ***série exponentielle***

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \text{converge.}$$

En effet pour $u_k = \frac{x^k}{k!}$ on a

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \frac{\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\right|}{\left|\frac{x^k}{k!}\right|} = \frac{|x|}{k+1} \to 0 \quad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

La limite étant $\ell = 0 < 1$ alors par la règle du quotient de d'Alembert, la série est absolument convergente, donc convergente. Par définition la somme est $\exp(x)$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{k!}{1\cdot 3\cdots(2k-1)}$ converge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k+1}{2k+1}$ tend vers $\frac{1}{2} < 1$.
3. $\sum_{k\geqslant 0} \frac{(2k)!}{(k!)^2}$ diverge, car $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{(2k+1)(2k+2)}{(k+1)^2}$ tend vers $4 > 1$.

Remarque. • Le théorème ne peut s'appliquer si certains u_k sont nuls, contrairement à la règle des racines de Cauchy que l'on verra après.

- Notez bien que le théorème ne permet pas toujours de conclure. Faites aussi bien attention que l'hypothèse est $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant q < 1$, ce qui est plus fort que $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| < 1$.
- De même le corollaire ne permet pas de conclure lorsque $\frac{u_{k+1}}{u_k} \to 1$. Par exemple pour les séries $\sum u_k = \sum \frac{1}{k}$ et $\sum v_k = \sum \frac{1}{k^2}$ nous avons $\frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{k}{k+1} \to 1$, de même que $\frac{v_{k+1}}{v_k} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$. Cependant la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge alors que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge.

Terminons par un exemple plus compliqué.

Exemple 18.
Trouver tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k\geqslant 0} \binom{k}{3} z^k$ soit absolument convergente.

Soit $u_k = \binom{k}{3} z^k$. Alors, pour $z \neq 0$,

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{\binom{k+1}{3}|z|^{k+1}}{\binom{k}{3}|z|^k} = \frac{\frac{(k+1)k(k-1)}{3!}}{\frac{k(k-1)(k-2)}{3!}}|z| = \frac{k+1}{k-2}|z| \to |z| \qquad \text{lorsque } k \to +\infty.$$

Si $|z| < 1$ alors pour k assez grand $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} < q < 1$ donc la série $\sum u_k$ est absolument convergente.
Si $|z| \geqslant 1$ alors $\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k+1}{k-2}|z| \geqslant \frac{k+1}{k-2} > 1$ pour tout k. Donc la série $\sum u_k$ diverge.

4.3. Règle des racines de Cauchy

Théorème 8 (Règle des racines de Cauchy).
Soit $\sum u_k$ une série de nombres réels ou complexes.

1. *S'il existe une constante $0 < q < 1$ et un entier k_0 tels que, pour tout $k \geqslant k_0$,*
$$\sqrt[k]{|u_k|} \leqslant q < 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{converge.}$$
La série est même absolument convergente.
2. *S'il existe un entier k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,*
$$\sqrt[k]{|u_k|} \geqslant 1, \quad \text{alors} \quad \sum u_k \quad \text{diverge.}$$

Le plus souvent vous l'appliquerez avec un terme général strictement positif.

Corollaire 3 (Règle des racines de Cauchy).
Soit $\sum u_k$ une série à termes positifs, telle que $\sqrt[k]{u_k}$ converge vers ℓ.

1. *Si $\ell < 1$ alors $\sum u_k$ converge.*
2. *Si $\ell > 1$ alors $\sum u_k$ diverge.*
3. *Si $\ell = 1$ on ne peut pas conclure en général.*

Dans la pratique, il faut savoir bien manipuler les racines k-ème :

$$\sqrt[k]{u_k} = (u_k)^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\tfrac{1}{k}\ln u_k\right)$$

.

Démonstration. Rappelons que la nature de la série ne dépend pas de ses premiers termes. Dans le premier cas du théorème, $\sqrt[k]{|u_k|} \leqslant q$ implique $|u_k| \leqslant q^k$. Comme $0 < q < 1$, alors la série $\sum q^k$ converge, d'où le résultat par le théorème 3 de comparaison.
Dans le second cas, $\sqrt[k]{|u_k|} \geqslant 1$, donc $|u_k| \geqslant 1$. Le terme général ne tend pas vers 0, donc la série diverge.

Enfin pour le dernier point du corollaire, on pose $u_k = \frac{1}{k}$, $v_k = \frac{1}{k^2}$. On a $\sqrt[k]{u_k} \to 1$ de même que $\sqrt[k]{v_k} \to 1$. Mais $\sum u_k$ diverge alors que $\sum v_k$ converge. □

Exemple 19. 1. Par exemple,

$$\sum \left(\frac{2k+1}{3k+4}\right)^k \qquad \text{converge,}$$

car $\sqrt[k]{u_k} = \frac{2k+1}{3k+4}$ tend vers $\frac{2}{3} < 1$.

2. Par contre

$$\sum \frac{2^k}{k^\alpha} \qquad \text{diverge,}$$

quel que soit $\alpha > 0$. En effet,

$$\sqrt[k]{u_k} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(k^{\frac{1}{k}}\right)^\alpha} = \frac{2}{\left(\exp(\frac{1}{k}\ln k)\right)^\alpha} \to 2 > 1.$$

Exemple 20.
Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que la série $\sum_{k\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$ soit absolument convergente.

Notons $u_k = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} z^k$. On a

$$\sqrt[k]{|u_k|} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^k |z| \to e|z|.$$

Cette limite vérifie $e|z| < 1$ si et seulement si $|z| < \frac{1}{e}$.

- Si $|z| < \frac{1}{e}$ alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente.
- Si $|z| > \frac{1}{e}$, on a pour k assez grand $\sqrt[k]{|u_k|} > 1$, donc la série $\sum u_k$ diverge.
- Si $|z| = \frac{1}{e}$ la règle des racines de Cauchy ne permet pas de conclure. On étudie le terme général à la main. On obtient :

$$|u_k| = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \left(\frac{1}{e}\right)^k$$

Donc

$$\begin{aligned} \ln|u_k| &= k^2 \ln\left(1+\tfrac{1}{k}\right) + k\ln\tfrac{1}{e} \\ &= k\left[k\ln(1+\tfrac{1}{k}) - 1\right] \\ &= k\left[k\left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{k}\right)^2 + o\left(\tfrac{1}{k^2}\right)\right) - 1\right] \\ &= k\left[1 - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{k} + o\left(\tfrac{1}{k}\right) - 1\right] \\ &= -\tfrac{1}{2} + o(1) \\ &\to -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $|u_k| \to e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Ainsi $\sum |u_k|$ diverge.

4.4. D'Alembert vs Cauchy

Cette section peut être passée lors d'une première lecture.

Nous allons comparer la règle du quotient de d'Alembert avec la règle des racines de Cauchy. Nous allons voir que la règle des racines de Cauchy est plus puissante que la règle du quotient de d'Alembert. Cependant dans la pratique la règle du quotient de d'Alembert reste la plus utilisée.

Proposition 8.
Soit (u_k) une suite à termes strictement positifs.

$$\text{Si} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \ell \qquad \text{alors} \qquad \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_k} = \ell\ .$$

Autrement dit, si on peut appliquer la règle du quotient de d'Alembert, alors on peut aussi appliquer la règle des racines de Cauchy.

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe k_0 tel que, pour tout $k \geqslant k_0$,

$$\ell - \epsilon < \frac{u_{k+1}}{u_k} < \ell + \epsilon\,.$$

Par récurrence, on en déduit :

$$u_{k_0}(\ell - \epsilon)^{k-k_0} \leqslant u_k \leqslant u_{k_0}(\ell + \epsilon)^{k-k_0}\,.$$

Or :

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_{k_0}(\ell-\epsilon)^{k-k_0}} = \ell - \epsilon \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u_{k_0}(\ell+\epsilon)^{k-k_0}} = \ell + \epsilon\,.$$

Donc il existe $k_1 > k_0$ tel que, pour $k > k_1$,

$$\ell - 2\epsilon < \sqrt[k]{u_k} < \ell + 2\epsilon\,,$$

d'où le résultat. □

Terminons par un exemple où la règle des racines de Cauchy permet de conclure, mais pas la règle du quotient de d'Alembert.

Exemple 21.
Définissons la suite u_k par :

$$u_k = \begin{cases} \frac{2^n}{3^n} & \text{si } k = 2n \\[2ex] \frac{2^n}{3^{n+1}} & \text{si } k = 2n+1 \end{cases}$$

Le rapport $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ vaut $\frac{1}{3}$ si k est pair, 2 si k est impair. La règle du quotient de d'Alembert ne s'applique donc pas. Pourtant, $\sqrt[k]{u_k}$ converge vers $\sqrt{\frac{2}{3}} < 1$, donc la règle des racines de Cauchy s'applique et la série $\sum u_k$ converge.

4.5. Règle de Raabe-Duhamel

Cette section peut être passée lors d'une première lecture.

La règle du quotient de d'Alembert et la règle des racines de Cauchy ne s'appliquent pas aux séries de Riemann

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$$

car $\frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} \to 1$ et $\sqrt[k]{u_k} \to 1$.
Il nous faut raffiner la règle de d'Alembert pour pouvoir conclure. Cependant nous reviendrons sur la convergence des séries de Riemann par d'autres techniques.

Théorème 9 (Règle de Raabe-Duhamel).
Soit (u_k) une suite de nombres réels (ou complexes) non nuls.

1. *Si $\forall k \geqslant k_0$ on a $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \leqslant 1 - \frac{\beta}{k}$, avec $\beta > 1$, alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente.*
2. *Si $\forall k \geqslant k_0$ on a $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$, alors la série $\sum u_k$ n'est pas absolument convergente.*

Attention ! Il existe des séries convergentes, quoique $\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| \geqslant 1 - \frac{1}{k}$. Par le deuxième point une telle série ne peut pas être absolument convergente.
En effet, prenons $u_k = (-1)^k \frac{1}{k}$. Alors :

$$\frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} = \frac{k}{k+1} = 1 - \frac{1}{k+1} \geqslant 1 - \frac{1}{k}.$$

Démonstration. 1. L'hypothèse implique $k|u_{k+1}| \leqslant k|u_k| - \beta|u_k|$ (pour tout $k \geqslant k_0$).
Ainsi

$$(\beta - 1)|u_k| \leqslant (k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|.$$

Comme $\beta > 1$ alors l'inégalité ci-dessus implique $(k-1)|u_k| - k|u_{k+1}| > 0$ et ainsi $(k-1)|u_k| > k|u_{k+1}|$. La suite $(k|u_{k+1}|)_{k\geqslant k_0}$ est décroissante et minorée par 0 ; cette suite admet donc une limite. Ainsi la série télescopique $\sum\big[(k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|\big]$ converge. Comme

$$(\beta - 1)|u_k| \leqslant (k-1)|u_k| - k|u_{k+1}|,$$

la série $\sum(\beta-1)|u_k|$ converge et donc aussi $\sum |u_k|$.

2. L'hypothèse implique $k|u_{k+1}| \geqslant (k-1)|u_k| > 0$ (pour tout $k \geqslant k_0$). Donc la suite $(k|u_{k+1}|)_{k \geqslant k_0}$ est croissante, ainsi $k|u_{k+1}| \geqslant \epsilon > 0$. Donc pour tout $k \geqslant k_0$, on a $|u_{k+1}| \geqslant \frac{\epsilon}{k}$. Donc $\sum |u_k|$ diverge, car $\sum \frac{1}{k}$ diverge. □

Nous pouvons maintenant savoir quelles sont les séries de Riemann qui convergent.

Proposition 9 (Séries de Riemann).
Soit $\alpha > 0$. Alors la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration. Supposons $\alpha > 1$. Définissons $\Delta(k) = \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha}$. Montrons qu'il existe $\beta > 1$ et k_0 tels que

$$\Delta(k) \leqslant 1 - \frac{\beta}{k} \qquad \forall k \geqslant k_0.$$

Choisissons β quelconque vérifiant $1 < \beta < \alpha$. Considérons la fonction $f(x) = \frac{1}{(1+x)^\alpha} + \beta x$.
La fonction f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0, \infty[$ et $f(0) = 1$. Comme $f'(0) = \beta - \alpha < 0$, on voit que f est décroissante sur $[0, x_0]$ pour un certain x_0 avec $0 < x_0 < 1$. Ainsi $f(x) \leqslant 1$ sur $[0, x_0]$ ce qui entraîne que $\Delta(k) + \frac{\beta}{k} = f(\frac{1}{k}) \leqslant 1$ pour $k \geqslant k_0$ avec k_0 entier tel que $\frac{1}{k_0} \leqslant x_0$. Donc $\Delta(k) \leqslant 1 - \frac{\beta}{k}$ et on peut appliquer la règle de Raabe-Duhamel pour déduire que $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
Si $0 < \alpha \leqslant 1$, alors $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$. Or la série $\sum \frac{1}{k}$ diverge donc la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ diverge aussi. □

Mini-exercices. 1. Est-ce que les séries suivantes sont convergentes ? Absolument convergentes ?

$$\sum_{k \geqslant 2} \frac{(-1)^{k^3} e^{\mathrm{i}k}}{k^2 + k} \qquad \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k(k+1)}} \qquad \sum_{k \geqslant 1} \frac{\sqrt{k}}{(-1)^k \ln k}$$

2. Étudier les séries dont voici le terme général, par la règle du quotient de d'Alembert ou des racines de Cauchy :

$$\frac{k^{100}}{k!} \qquad \frac{k!}{(2k)!} \qquad \frac{\ln k}{2^k + 1} \qquad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{k^k}$$

$$\left(\sin \tfrac{1}{k}\right)^k \qquad \left(\frac{7k-2}{3k+1}\right)^k \qquad \frac{2^k}{e^k - 1}$$

3. Appliquer la règle du quotient de d'Alembert pour $u_k = \frac{k!}{k^k}$. En déduire la limite de $\sqrt[k]{u_k}$ lorsque k tend vers $+\infty$.
4. Étudier les séries dont voici le terme général en fonction du paramètre $\alpha > 0$:

$$\frac{k}{k^\alpha + 1} \qquad \frac{\ln k}{k^\alpha} \qquad \sqrt{k\alpha^k} \qquad \frac{\alpha^k}{k^2} \qquad \ln(1 + k^\alpha) \qquad \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k+1)}$$

5. Comparaison série/intégrale

Cette section fait la jonction entre les séries et les intégrales impropres. C'est un lien essentiel entre deux objets mathématiques qui sont au final assez proches. Pour cette partie il faut connaître les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

5.1. Théorème de comparaison série/intégrale

Théorème 10.
Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction décroissante. Alors la série $\sum_{k \geqslant 0} f(k)$ (dont le terme général est $u_k = f(k)$) et l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

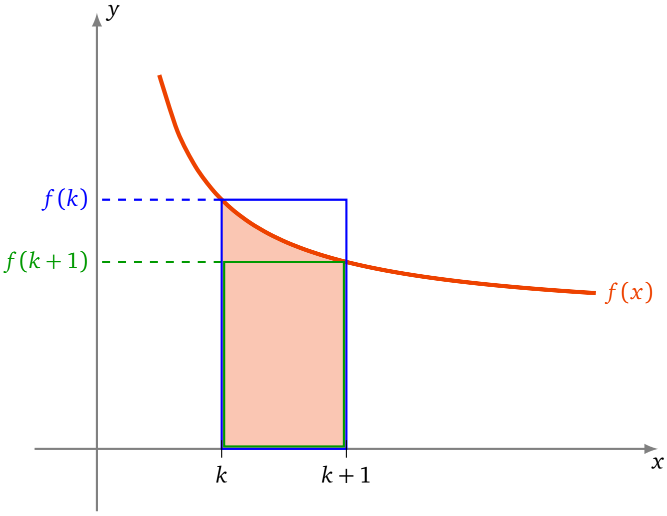
« De même nature » signifie que la série et l'intégrale du théorème sont soit convergentes en même temps, soit divergentes en même temps.
Attention ! Il est important que f soit positive et décroissante.

5.2. Preuve

Le plus simple est de bien comprendre le dessin et de refaire la démonstration chaque fois que l'on en a besoin.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme f est décroissante, pour $k \leqslant t \leqslant k+1$, on a $f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$ (attention à l'ordre). En intégrant sur l'intervalle $[k, k+1]$ de longueur 1, on obtient :

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$$



Sur le dessin cette inégalité signifie que l'aire sous la courbe, entre les abscisses k et $k+1$, est comprise entre l'aire du rectangle vert de hauteur $f(k+1)$ et de base 1 et l'aire du rectangle bleu de hauteur $f(k)$ et de même base 1.
On somme ces inégalités pour k variant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} f(k).$$

Soit :

$$u_1 + \cdots + u_n \leqslant \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_0 + \cdots + u_{n-1}.$$

La série $\sum u_k$ converge et a pour somme S si et seulement si la suite des sommes partielles converge vers S. Si c'est le cas $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée par S, et comme $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x (par positivité de f), l'intégrale converge. Réciproquement, si l'intégrale converge, alors $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée, la suite des sommes partielles aussi, et la série converge. □

5.3. Séries de Riemann

Le théorème de comparaison (théorème 3) et le théorème des équivalents (théorème 4) permettent de ramener l'étude des séries à termes positifs à un catalogue de séries dont la convergence est connue. Dans ce catalogue, on trouve les séries de Riemann et les séries de Bertrand.
Commençons par les ***séries de Riemann*** $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$, pour $\alpha > 0$ un réel.

Proposition 10. *Si* $\alpha > 1$ *alors* $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ *converge*

Si $0 < \alpha \leqslant 1$ *alors* $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ *diverge*

Démonstration. Dans le théorème 10, rien n'oblige à démarrer de 0 : pour $m \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geqslant m} f(k)$ et l'intégrale impropre $\int_m^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.
Nous l'appliquons à $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$. Pour $\alpha > 0$, c'est une fonction décroissante et positive. On peut appliquer le théorème 10.

On sait que :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(x^{1-\alpha}-1) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Pour $\alpha > 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge.
Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est divergente, donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^\alpha}$ diverge. □

5.4. Séries de Bertrand

Une famille de séries plus sophistiquées sont les *séries de Bertrand* : $\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^\alpha(\ln k)^\beta}$ où $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Proposition 11.
Soit la série de Bertrand

$$\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{k^\alpha(\ln k)^\beta}.$$

Si $\alpha > 1$ *alors elle converge.* *Si* $0 < \alpha < 1$ *alors elle diverge.*

$$\text{Si} \quad \alpha = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta > 1 & \text{alors elle converge.} \\ \beta \leqslant 1 & \text{alors elle diverge.} \end{cases}$$

Démonstration. La démonstration est la même que pour les séries de Riemann. Par exemple pour le cas $\alpha = 1$:

$$\int_2^x \frac{1}{t(\ln t)^\beta}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{1-\beta}\left((\ln x)^{1-\beta} - (\ln 2)^{1-\beta}\right) & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln(\ln x) - \ln(\ln 2) & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

□

5.5. Applications

Nous retrouvons en particulier le fait que :
1. $\sum \frac{1}{k^2}$ converge (prendre $\alpha = 2$),
2. alors que $\sum \frac{1}{k}$ diverge (prendre $\alpha = 1$).

Terminons avec deux exemples d'utilisation des équivalents avec les séries de Riemann et de Bertrand.

Exemple 22. 1. La série

$$\sum_{k\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)$$

est-elle convergente ?
Comme

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{k^3}}$$

et que la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{k^3}} = \sum \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$ converge (car $\frac{3}{2} > 1$) alors par le théorème des équivalents la série $\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{k^3}}\right)$ converge également.

2. La série

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{1 - \cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)}$$

est-elle convergente ?
On cherche un équivalent du terme général (qui est positif) :

$$\frac{1 - \cos\left(\frac{1}{k\sqrt{\ln k}}\right)}{\sin\left(\frac{1}{k}\right)} \sim \frac{1}{2k\ln k}$$

Or la série de Bertrand $\sum \frac{1}{k\ln k}$ diverge, donc notre série diverge aussi.

Mini-exercices. 1. Notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la somme partielle de la série harmonique. Et soit $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $f(t) = \frac{1}{t}$.

(a) Donner un encadrement simple de $\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(b) Faire la somme de ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, puis k variant de 1 à n, pour obtenir :
$$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln n$$

(c) En déduire $H_n \sim \ln n$.

(d) La série harmonique converge-t-elle ?

2. Reprendre le schéma d'étude précédent pour montrer que, pour la série de Riemann et $0 \leqslant \alpha < 1$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

3. Reprendre le schéma d'étude précédent, mais cette fois pour le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, afin de montrer que
$$R_n \sim \frac{1}{n}.$$
Calculer R_{100}. Quelle approximation cela fournit-il de la somme de la série ?

4. Étudier la convergence des séries suivantes en fonction des paramètres $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$:
$$\sum \sqrt{k^\alpha + 1} - \sqrt{k^\alpha} \qquad \sum \sin\left(\frac{k^\alpha}{\ln k}\right) \qquad \sum \ln\left(1 + \frac{1}{k(\ln k)^\beta}\right)$$

6. Produits de deux séries

Cette section consacrée au produit de deux séries peut être passée lors d'une première lecture.

6.1. Motivation

Pour un produit de sommes, il y a plusieurs façons d'ordonner les termes une fois le produit développé. Dans le cas d'une somme finie l'ordre des termes n'a pas d'importance, mais dans le cas d'une série c'est essentiel. On choisit de regrouper les termes en fonction des indices, de la façon suivante :

$$(a_0 + a_1)(b_0 + b_1) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices}=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices}=1} + \underbrace{a_1 b_1}_{\text{somme des indices}=2}$$
$$(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = \underbrace{a_0 b_0}_{\text{somme des indices}=0} + \underbrace{a_0 b_1 + a_1 b_0}_{\text{somme des indices}=1}$$
$$+ \underbrace{a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0}_{\text{somme des indices}=2} + \underbrace{a_1 b_2 + a_2 b_1}_{\text{somme des indices}=3} + \underbrace{a_2 b_2}_{\text{somme des indices}=4}$$

Plus généralement, voici différentes façons d'écrire un produit de deux sommes :
$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_i b_j = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n}\ \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{0 \leqslant k \leqslant 2n}\ \sum_{0 \leqslant i \leqslant k} a_i b_{k-i}.$$

Les deux dernières formes correspondent à notre décomposition en fonction de la somme des indices.

6.2. Le produit de Cauchy

Définition 4.
Soient $\sum_{i \geqslant 0} a_i$ et $\sum_{j \geqslant 0} b_j$ deux séries. On appelle ***série produit*** ou ***produit de Cauchy*** la série $\sum_{k \geqslant 0} c_k$ où
$$\boxed{c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}}$$

Une autre façon d'écrire le coefficient c_k est :

$$\boxed{c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j}$$

Théorème 11.
Si les séries $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ de nombres réels (ou complexes) sont absolument convergentes, alors la série produit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right)$$

est absolument convergente et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i \right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j \right).$$

Démonstration. **Notations.**
- $S_n = a_0 + \cdots + a_n$, $S_n \to S$,
- $T_n = b_0 + \cdots + b_n$, $T_n \to T$,
- $P_n = c_0 + \cdots + c_n$.

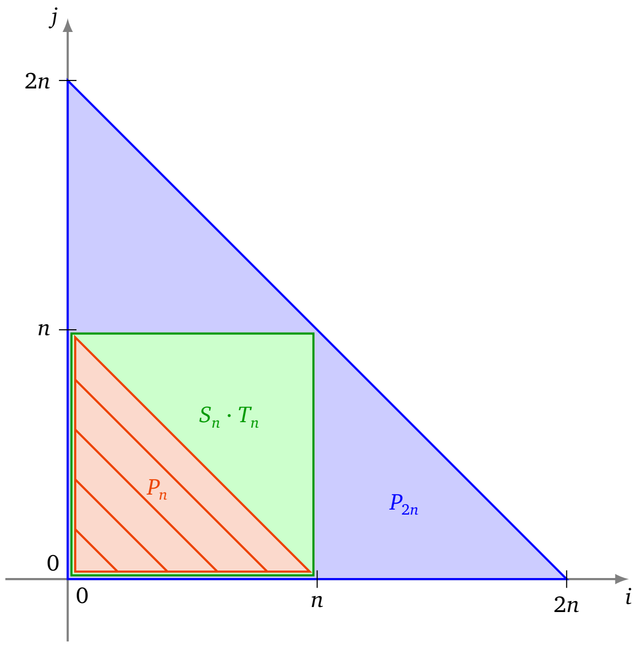
On doit montrer que $P_n \to S \cdot T$.

Premier cas. $a_k \geqslant 0, b_k \geqslant 0$ $(\forall k)$.
Dans ce cas $c_k \geqslant 0$ et on a

$$P_n \leqslant S_n \cdot T_n \leqslant S \cdot T.$$

La suite (P_n) est croissante et majorée, donc convergente : $P_n \to P$.
Or on a aussi

$$P_n \leqslant S_n \cdot T_n \leqslant P_{2n}.$$



Le dessin représente le point correspondant aux indices (i,j). Le triangle rouge représente P_n (avec le regroupement des termes correspondant aux diagonales), le carré vert correspond au produit $S_n \cdot T_n$, le triangle bleu représente P_{2n}. Le fait que le carré soit compris entre les deux triangles traduit la double inégalité $P_n \leqslant S_n \cdot T_n \leqslant P_{2n}$.

Donc en faisant $n \to +\infty$, on a : $P \leqslant S \cdot T \leqslant P$. Donc $P_n \to S \cdot T$.

Second cas. $a_k \in \mathbb{C}, b_k \in \mathbb{C}$ $(\forall k)$.
On pose :
- $S'_n = |a_0| + \cdots + |a_n|$, $S'_n \to S'$,
- $T'_n = |b_0| + \cdots + |b_n|$, $T'_n \to T'$,

- $P'_n = c'_0 + \cdots + c'_n$ où $c'_k = \sum_{i=0}^{k} |a_i b_{k-i}|$.

D'après le premier cas, $P'_n \to P'$ avec $P' = S' \cdot T'$. Ainsi

$$|S_n \cdot T_n - P_n| = \Big| \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n \\ i+j>n}} a_i b_j \Big| \leqslant \sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n \\ i+j>n}} |a_i b_j| = S'_n \cdot T'_n - P'_n \to S' \cdot T' - P' = 0.$$

Ainsi $P_n = S_n \cdot T_n - (S_n \cdot T_n - P_n) \to S \cdot T - 0 = S \cdot T$.
Donc la série $\sum c_k$ est convergente et sa somme est $S \cdot T$. De plus, $|c_k| \leqslant c'_k$. La convergence de $\sum c'_k$ implique donc la convergence absolue de $\sum c_k$. □

6.3. Exemple

Exemple 23.
Soit $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ une série absolument convergente et soit $\sum_{j=0}^{+\infty} b_j$ la série définie par $b_j = \frac{1}{2^j}$. La série $\sum b_j$ est absolument convergente.
Notons

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} a_i \times \frac{1}{2^{k-i}}.$$

Alors la série $\sum c_k$ converge absolument et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = 2\sum_{i=0}^{+\infty} a_i.$$

6.4. Contre-exemple

Si les séries $\sum a_i$ et $\sum b_j$ ne sont pas absolument convergentes, mais seulement convergentes, alors la série de Cauchy peut être divergente.

Exemple 24.
Soient $a_i = b_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}}$, $i \geqslant 0$. Alors $\sum a_i$ et $\sum b_j$ sont convergentes par le critère de Leibniz, mais ne sont pas absolument convergentes. On a

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \frac{(-1)^{k-i}}{\sqrt{k-i+1}} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}}$$

Or, pour $x \in \mathbb{R}$, $(x+1)(k-x+1) = -x^2 + kx + (k+1) \leqslant \frac{(k+2)^2}{4}$ (valeur au sommet de la parabole). D'où $\sqrt{(i+1)(k-i+1)} \leqslant \frac{(k+2)}{2}$. Ainsi

$$|c_k| = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{\sqrt{(i+1)(k-i+1)}} \geqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{2}{k+2} = \frac{2(k+1)}{k+2} \to 2.$$

Donc le terme général c_k ne peut pas tendre 0, donc la série $\sum c_k$ diverge.

Mini-exercices. 1. Trouver une expression simple du terme général de la série produit

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{3^i} \times \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3^j}.$$

Calculer la somme de cette série produit.

2. On admet ici que, pour $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ converge et vaut $\exp(x)$. Que vaut la série produit associée à $\exp(a) \times \exp(b)$? (Vous utiliserez la formule du binôme de Newton.)

7. Permutation des termes

Cette section consacrée à la permutation de termes peut être passée lors d'une première lecture.

Théorème 12.
Soit $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ une série absolument convergente et soit S sa somme. Soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection de l'ensemble des indices. Alors la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)}$ converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{\sigma(k)} = S.$$

Remarque : la condition de convergence absolue est indispensable. Il se trouve que, pour une série convergente, mais pas absolument convergente, on peut permuter les termes pour obtenir n'importe quelle valeur !
Comme exemple de permutation, on peut réordonner les termes $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ en prenant deux termes de rang pair puis un terme de rang impair, ce qui donne :

$$u_0, u_2, u_1, u_4, u_6, u_3, u_8, u_{10}, u_5, \ldots$$

Par contre il *n'est pas autorisé* de regrouper tous les termes pairs d'abord et les termes impairs ensuite :

$$u_0, u_2, u_4, \ldots, u_{2k}, \ldots, u_1, u_3, \ldots, u_{2k+1}, \ldots$$

Démonstration. Par hypothèse $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|$ converge. D'après le critère de Cauchy,

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_k| < \epsilon.$$

Soit $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Fixons $\epsilon > 0$. Choisissons $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\{0, 1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{\sigma(0), \sigma(1), \ldots, \sigma(k_0)\}$. Pour $n \geqslant k_0$ on a :

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \right| \leqslant \left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \right|$$

Pour le premier terme on a

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| = \left| \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} u_k \right| \leqslant \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \epsilon.$$

Pour le second terme :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} - \sum_{k=0}^{n_0} u_k \right| = \left| \sum_{k \in \{\sigma(0),\ldots,\sigma(n)\} \setminus \{0,\ldots,n_0\}} u_k \right| \leqslant \sum_{k \in \{\sigma(0),\ldots,\sigma(n)\} \setminus \{0,\ldots,n_0\}} |u_k| \leqslant \sum_{k > n_0} |u_k| = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leqslant \epsilon.$$

Ce qui prouve $\left| S - \sum_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \right| \leqslant 2\epsilon$ et donne le résultat. □

Mini-exercices.
Le but de cet exercice est de comprendre que si la série n'est pas absolument convergente, des phénomènes étranges apparaissent. Souvenez-vous que la série harmonique alternée converge :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Notons S sa somme. (En fait $S = \ln 2$.)
Si on regroupe les termes de cette série par paquets de 3, et si l'on simplifie, alors on trouve la moitié de la somme !

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots \\
=& \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots \\
=& \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) \\
=& \frac{1}{2} S
\end{aligned}$$

Surprenant, non ?

8. Sommation d'Abel

Cette section consacrée à la sommation d'Abel peut être passée lors d'une première lecture.

8.1. Théorème de sommation d'Abel

Le théorème de sommation d'Abel s'applique à certaines séries convergentes mais qui ne sont pas absolument convergentes. C'est un théorème qui s'applique aux séries de la forme $\sum a_k b_k$ et est plus fort que le critère de Leibniz pour les séries alternées, mais il est aussi plus difficile à mettre en œuvre.

Théorème 13 (Théorème de sommation d'Abel)**.**
Soient $(a_k)_{k\geqslant 0}$ et $(b_k)_{k\geqslant 0}$ deux suites telles que :

1. *La suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est une suite décroissante de réels positifs qui tend vers* 0.
2. *Les sommes partielles de la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ sont bornées :*

$$\exists M \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|b_0 + \cdots + b_n\right| \leqslant M.$$

Alors la série $\sum_{k\geqslant 0} a_k b_k$ converge.

Le critère de Leibniz concernant les séries alternées est un cas spécial : en effet, si $b_k = (-1)^k$ alors $\left|\sum_{k=0}^n b_k\right| \leqslant 1$. Donc si (a_k) est une suite positive, décroissante, qui tend vers 0, alors $\sum a_k b_k$ converge.

Démonstration. L'idée de la démonstration est d'effectuer un changement dans la sommation, qui s'apparente à une intégration par parties. Pour tout $n \geqslant 0$, posons $B_n = b_0 + \cdots + b_n$. Par hypothèse, la suite (B_n) est bornée. Nous écrivons les sommes partielles de la série $\sum a_k b_k$ sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} S_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \cdots + a_{n-1} b_{n-1} + a_n b_n \\ &= a_0 B_0 + a_1(B_1 - B_0) + \cdots + a_{n-1}(B_{n-1} - B_{n-2}) + a_n(B_n - B_{n-1}) \\ &= B_0(a_0 - a_1) + B_1(a_1 - a_2) + \cdots + B_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + B_n a_n\,. \end{aligned}$$

Comme (B_n) est bornée, et a_n tend vers 0, le dernier terme $B_n a_n$ tend vers 0. Nous allons montrer que la série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ est absolument convergente. En effet,

$$\left|B_k(a_k - a_{k+1})\right| = \left|B_k\right|(a_k - a_{k+1}) \leqslant M(a_k - a_{k+1})\,,$$

car la suite (a_k) est une suite de réels positifs, décroissante, et $|B_k|$ est borné par M. Or

$$M(a_0 - a_1) + \cdots + M(a_n - a_{n+1}) = M(a_0 - a_{n+1})\,,$$

qui tend vers $M a_0$ puisque (a_k) tend vers 0. La série $\sum M(a_k - a_{k+1})$ converge, donc la série $\sum \left|B_k(a_k - a_{k+1})\right|$ aussi, par le théorème 3 de comparaison. Donc la série $\sum B_k(a_k - a_{k+1})$ est convergente, donc la suite (S_n) est convergente, ce qui prouve que la série $\sum a_k b_k$ converge. □

8.2. Séries de Fourier

Le cas d'application le plus fréquent est celui où $b_k = e^{\mathrm{i}k\theta}$.

Corollaire 4.
Soit θ un réel, tel que $\theta \neq 2n\pi$ (pour tout $n \in \mathbb{Z}$). Soit (a_k) une suite de réels positifs, décroissante, tendant vers 0*. Alors les séries de Fourier :*

$$\boxed{\sum a_k e^{\mathrm{i}k\theta} \qquad \sum a_k \cos(k\theta) \qquad \sum a_k \sin(k\theta) \quad \textit{convergent}}$$

Démonstration. Pour appliquer le théorème de sommation d'Abel (théorème 13) avec $b_k = e^{\mathrm{i}k\theta}$, nous devons vérifier que les sommes partielles de la suite $(e^{\mathrm{i}k\theta})$ sont bornées. Or $e^{\mathrm{i}k\theta} = (e^{\mathrm{i}\theta})^k$, et par hypothèse $e^{\mathrm{i}\theta}$ est différent de 1. On a donc la somme d'une suite géométrique :

$$\left|1 + e^{\mathrm{i}\theta} + \cdots + e^{\mathrm{i}k\theta}\right| = \left|\frac{1 - e^{\mathrm{i}(k+1)\theta}}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}}\right| \leqslant \left|\frac{2}{1 - e^{\mathrm{i}\theta}}\right|\,.$$

D'où le résultat.

Comme $\sum a_k e^{\mathrm{i}k\theta} = \sum a_k \cos(k\theta) + \mathrm{i} \sum a_k \sin(k\theta)$, la convergence des séries $\sum a_k \cos(k\theta)$ et $\sum a_k \sin(k\theta)$ est une conséquence directe de la proposition 5. □

Mini-exercices. 1. Justifier que les sommes $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$, $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$ sont bornées, pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

2. Montrer que les séries suivantes convergent par le critère de sommation d'Abel :
$$\sum \frac{(-1)^k \cos k}{k} \qquad \sum \frac{\sqrt{k+1}}{k} \sin(k\theta) \qquad \frac{1}{e^{\mathrm{i}k\theta} \ln k}$$
pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Auteurs du chapitre

- D'après un cours de Raymond Mortini, de l'université de Lorraine,
- et un cours de Luc Rozoy et Bernard Ycart de l'université de Grenoble pour le site M@ths en Ligne.
- mixé, révisé par Arnaud Bodin. Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.