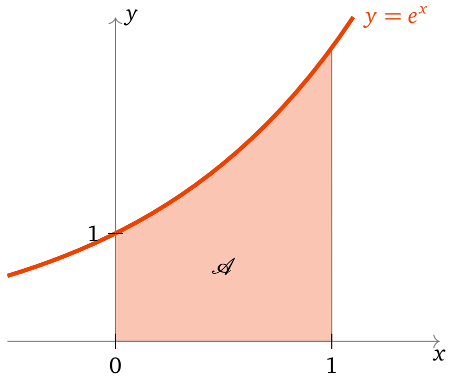
Intégrales

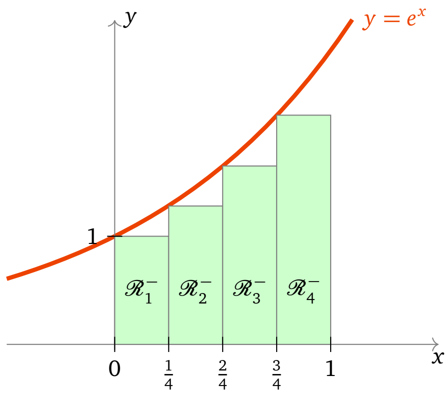
Vidéo ■ partie 1. L'intégrale de Riemann
Vidéo ■ partie 2. Propriétés
Vidéo ■ partie 3. Primitive
Vidéo ■ partie 4. Intégration par parties - Changement de variable
Vidéo ■ partie 5. Intégration des fractions rationnelles
Fiche d'exercices ♦ Calculs d'intégrales

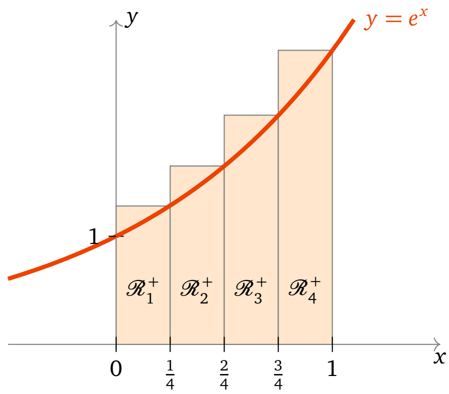
Motivation

Nous allons introduire l'intégrale à l'aide d'un exemple. Considérons la fonction exponentielle $f(x) = e^x$. On souhaite calculer l'aire $\mathscr{A}$ en-dessous du graphe de f et entre les droites d'équation $(x = 0)$, $(x = 1)$ et l'axe (Ox).



Nous approchons cette aire par des sommes d'aires des rectangles situés sous la courbe. Plus précisément, soit $n \geqslant 1$ un entier ; découpons notre intervalle $[0,1]$ à l'aide de la subdivision $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}, 1)$.
On considère les « rectangles inférieurs » $\mathscr{R}_i^-$, chacun ayant pour base l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ et pour hauteur $f\left(\frac{i-1}{n}\right) = e^{(i-1)/n}$. L'entier i varie de 1 à n. L'aire de $\mathscr{R}_i^-$ est « base × hauteur » : $\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) \times e^{(i-1)/n} = \frac{1}{n} e^{\frac{i-1}{n}}$.

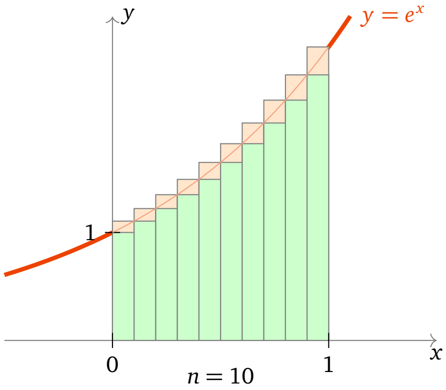




La somme des aires des $\mathscr{R}_i^-$ se calcule alors comme somme d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i-1}{n}}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{i-1} = \frac{1}{n}\frac{1-\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{e^{\frac{1}{n}}-1}\left(e-1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e-1.$$

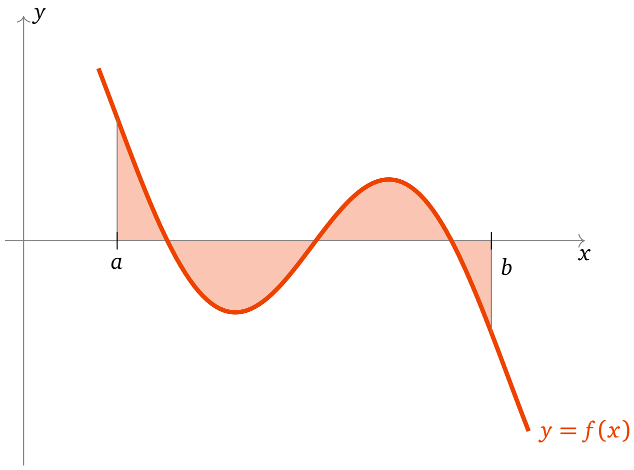
Pour la limite on a reconnu l'expression du type $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ (avec ici $x=\frac{1}{n}$).
Soit maintenant les « rectangles supérieurs » $\mathscr{R}_i^+$, ayant la même base $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ mais la hauteur $f\left(\frac{i}{n}\right) = e^{i/n}$. Un calcul similaire montre que $\sum_{i=1}^{n} \frac{e^{\frac{i}{n}}}{n} \to e-1$ lorsque $n\to+\infty$.
L'aire $\mathscr{A}$ de notre région est supérieure à la somme des aires des rectangles inférieurs ; et elle est inférieure à la somme des aires des rectangles supérieurs. Lorsque l'on considère des subdivisions de plus en plus petites (c'est-à-dire lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$) alors on obtient à la limite que l'aire $\mathscr{A}$ de notre région est encadrée par deux aires qui tendent vers $e-1$. Donc l'aire de notre région est $\mathscr{A} = e-1$.



Voici le plan de lecture conseillé pour ce chapitre : il est tout d'abord nécessaire de bien comprendre comment est définie l'intégrale et quelles sont ses principales propriétés (parties 1 et 2). Mais il est important d'arriver rapidement à savoir calculer des intégrales : à l'aide de primitives ou par les deux outils efficaces que sont l'intégration par parties et le changement de variable.
Dans un premier temps on peut lire les sections 1.1, 1.2 puis 2.1, 2.2, 2.3, avant de s'attarder longuement sur les parties 3, 4. Lors d'une seconde lecture, revenez sur la construction de l'intégrale et les preuves.
Dans ce chapitre on s'autorisera (abusivement) une confusion entre une fonction f et son expression $f(x)$. Par exemple on écrira « *une primitive de la fonction* $\sin x$ *est* $-\cos x$ » au lieu « *une primitive de la fonction* $x \mapsto \sin x$ *est* $x \mapsto -\cos x$ ».

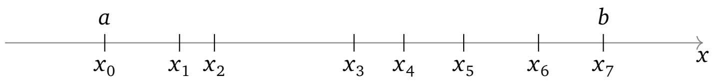
1. L'intégrale de Riemann

Nous allons reprendre la construction faite dans l'introduction pour une fonction f quelconque. Ce qui va remplacer les rectangles seront des ***fonctions en escalier***. Si la limite des aires en-dessous égale la limite des aires au-dessus on appelle cette limite commune ***l'intégrale*** de f que l'on note $\int_a^b f(x)\,dx$. Cependant il n'est pas toujours vrai que ces limites soient égales, l'intégrale n'est donc définie que pour les fonctions ***intégrables***. Heureusement nous verrons que si la fonction f est continue alors elle est intégrable.



1.1. Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1.
Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ ($-\infty < a < b < +\infty$). On appelle une ***subdivision*** de $[a,b]$ une suite finie, strictement croissante, de nombres $\mathscr{S} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$. Autrement dit $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

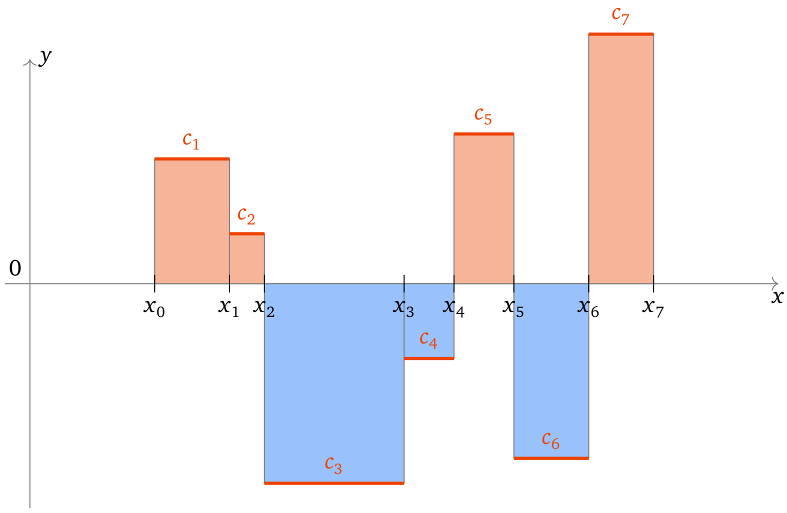


Définition 2.
Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une ***fonction en escalier*** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on ait

$$\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$$

Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.

Remarque.
La valeur de f aux points x_i de la subdivision n'est pas imposée. Elle peut être égale à celle de l'intervalle qui précède ou de celui qui suit, ou encore une autre valeur arbitraire. Cela n'a pas d'importance car l'aire ne changera pas.



Définition 3.
Pour une fonction en escalier comme ci-dessus, son ***intégrale*** est le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ défini par

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})}$$

Remarque.
Notez que chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i. Il faut juste prendre garde que l'on compte l'aire avec un signe « $+$ » si $c_i > 0$ et un signe « $-$ » si $c_i < 0$.
L'intégrale d'une fonction en escalier est l'aire de la partie située au-dessus de l'axe des abscisses (ici en rouge) moins l'aire de la partie située en-dessous (en bleu). L'intégrale d'une fonction en escalier est bien un nombre réel qui mesure l'aire algébrique (c'est-à-dire avec signe) entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

1.2. Fonction intégrable

Rappelons qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *bornée* s'il existe $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,b] \quad -M \leqslant f(x) \leqslant M.$$

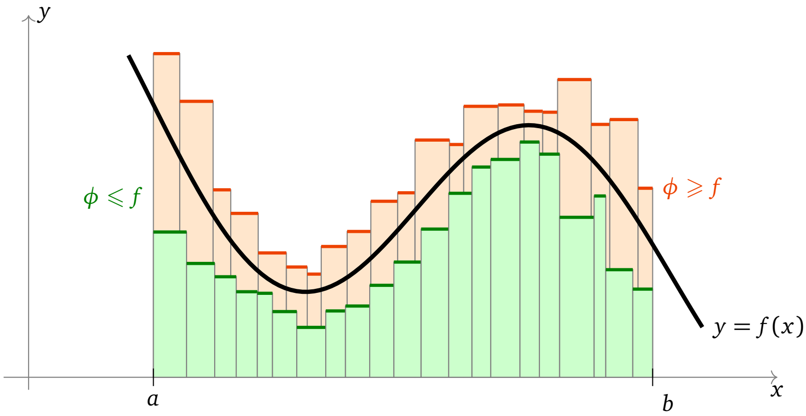
Rappelons aussi que si l'on a deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, alors on note

$$f \leqslant g \qquad \iff \qquad \forall x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant g(x).$$

On suppose à présent que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée quelconque. On définit deux nombres réels :

$$I^-(f) = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f\right\}$$

$$I^+(f) = \inf\left\{\int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \geqslant f\right\}$$



Pour $I^-(f)$ on prend toutes les fonctions en escalier (avec toutes les subdivisions possibles) qui restent inférieures à f. On prend l'aire la plus grande parmi toutes ces fonctions en escalier, comme on n'est pas sûr que ce maximum existe on prend la borne supérieure. Pour $I^+(f)$ c'est le même principe mais les fonctions en escalier sont supérieures à f et on cherche l'aire la plus petite possible.
Il est intuitif que l'on a :

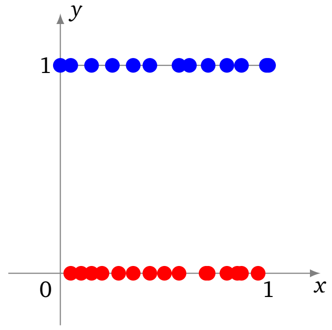
Proposition 1.
$I^-(f) \leqslant I^+(f)$.

Les preuves sont reportées en fin de section.

Définition 4.
Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite ***intégrable*** (***au sens de Riemann***) si $I^-(f) = I^+(f)$. On appelle alors ce nombre ***l'intégrale de Riemann*** de f sur $[a,b]$ et on le note $\int_a^b f(x)\,dx$.

Exemple 1.

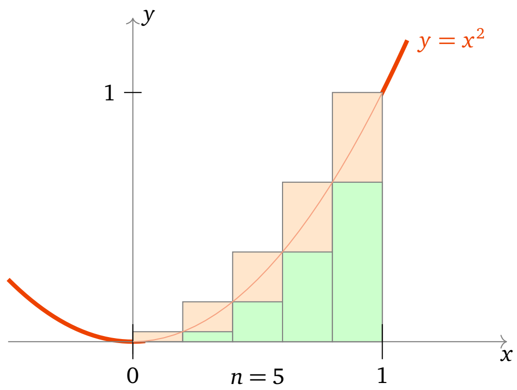
- Les fonctions en escalier sont intégrables ! En effet si f est une fonction en escalier alors la borne inférieure $I^-(f)$ et supérieure $I^+(f)$ sont atteintes avec la fonction $\phi = f$. Bien sûr l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ coïncide avec l'intégrale de la fonction en escalier définie lors du paragraphe 1.1.
- Nous verrons dans la section suivante que les fonctions continues et les fonctions monotones sont intégrables.
- Cependant toutes les fonctions ne sont pas intégrables. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si x est rationnel et $f(x) = 0$ sinon, n'est pas intégrable sur $[0,1]$. Convainquez-vous que si ϕ est une fonction en escalier avec $\phi \leqslant f$ alors $\phi \leqslant 0$ et que si $\phi \geqslant f$ alors $\phi \geqslant 1$. On en déduit que $I^-(f) = 0$ et $I^+(f) = 1$. Les bornes inférieure et supérieure ne coïncident pas, donc f n'est pas intégrable.



Il n'est pas si facile de calculer des exemples avec la définition. Nous avons vu l'exemple de la fonction exponentielle dans l'introduction où nous avions en fait montré que $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1$. Nous allons voir maintenant l'exemple de la fonction $f(x) = x^2$. Plus tard nous verrons que les primitives permettent de calculer simplement beaucoup d'intégrales.

Exemple 2.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrons qu'elle est intégrable et calculons $\int_0^1 f(x)\,dx$.



Soit $n \geqslant 1$ et considérons la subdivision régulière de $[0,1]$ suivante $\mathscr{S} = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{i}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right)$.
Sur l'intervalle $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$ nous avons

$$\forall x \in \left[\tfrac{i-1}{n}, \tfrac{i}{n}\right] \quad \left(\tfrac{i-1}{n}\right)^2 \leqslant x^2 \leqslant \left(\tfrac{i}{n}\right)^2.$$

Nous construisons une fonction en escalier ϕ^- en-dessous de f par $\phi^-(x) = \frac{(i-1)^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \ldots, n$) et $\phi^-(1) = 1$. De même nous construisons une fonction en escalier ϕ^+ au-dessus de f définie par $\phi^+(x) = \frac{i^2}{n^2}$ si $x \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right[$ (pour chaque $i = 1, \ldots, n$) et $\phi^+(1) = 1$. ϕ^- et ϕ^+ sont des fonctions en escalier et l'on a $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$.
L'intégrale de la fonction en escalier ϕ^+ est par définition

$$\int_0^1 \phi^+(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\left(\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right) = \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2.$$

On se souvient de la formule $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et donc

$$\int_0^1 \phi^+(x)\,dx = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

De même pour la fonction ϕ^- :

$$\int_0^1 \phi^-(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^2}\frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\,.$$

Maintenant $I^-(f)$ est la borne supérieure sur toutes les fonctions en escalier inférieures à f donc en particulier $I^-(f) \geqslant \int_0^1 \phi^-(x)\,dx$. De même $I^+(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)\,dx$. En résumé :

$$\tfrac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \int_0^1 \phi^-(x)\,dx \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant \int_0^1 \phi^+(x)\,dx = \tfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Lorsque l'on fait tendre n vers $+\infty$ alors les deux extrémités tendent vers $\frac{1}{3}$. On en déduit que $I^-(f) = I^+(f) = \frac{1}{3}$. Ainsi f est intégrable et $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$.

1.3. Premières propriétés

Proposition 2.

1. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et si l'on change les valeurs de f en un nombre fini de points de $[a,b]$ alors la fonction f est toujours intégrable et la valeur de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ ne change pas.*
2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable alors la restriction de f à tout intervalle $[a',b'] \subset [a,b]$ est encore intégrable.*

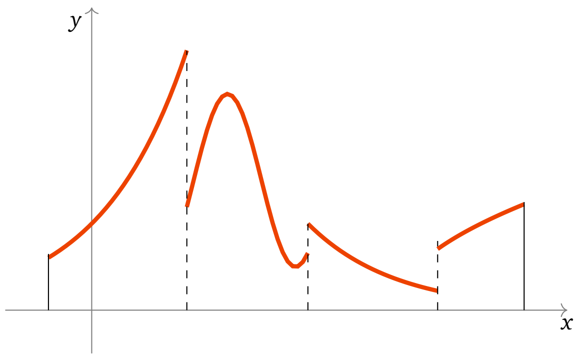
1.4. Les fonctions continues sont intégrables

Voici le résultat théorique le plus important de ce chapitre.

Théorème 1.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.

La preuve sera vue plus loin mais l'idée est que les fonctions continues peuvent être approchées d'aussi près que l'on veut par des fonctions en escalier, tout en gardant un contrôle d'erreur uniforme sur l'intervalle.

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite ***continue par morceaux*** s'il existe un entier n et une subdivision $(x_0,\ldots,x_n)$ telle que $f_{|]x_{i-1},x_i[}$ soit continue, admette une limite finie à droite en x_{i-1} et une limite à gauche en x_i pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$.



Corollaire 1.
Les fonctions continues par morceaux sont intégrables.

Voici un résultat qui prouve que l'on peut aussi intégrer des fonctions qui ne sont pas continues à condition que la fonction soit croissante (ou décroissante).

Théorème 2.
Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.

1.5. Les preuves

Les preuves peuvent être sautées lors d'une première lecture. Les démonstrations demandent une bonne maîtrise des bornes sup et inf et donc des « epsilons ». La proposition 1 se prouve en manipulant les « epsilons ». Pour la preuve de la proposition 2 : on prouve d'abord les propriétés pour les fonctions en escalier et on en déduit qu'elles restent vraies pour les fonctions intégrables (cette technique sera développée en détails dans la partie suivante).
Le théorème 1 établit que les fonctions continues sont intégrables. Nous allons démontrer une version affaiblie de ce résultat. Rappelons que f est dite de ***classe*** $\mathscr{C}^1$ si f est continue, dérivable et f' est aussi continue.

> **Théorème 3** (Théorème 1 faible)**.**
> *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ alors f est intégrable.*

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ alors f' est une fonction continue sur l'intervalle fermé et borné $[a,b]$; f' est donc une fonction bornée : il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$ on ait $|f'(x)| \leqslant M$.
Nous allons utiliser l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall x,y \in [a,b] \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|. \tag{$\star$}$$

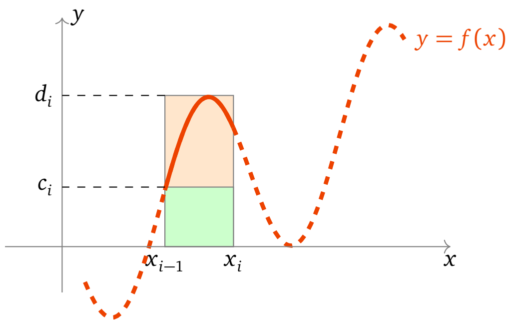
Soit $\epsilon > 0$ et soit $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ vérifiant pour tout $i = 1,\ldots,n$:

$$0 < x_i - x_{i-1} \leqslant \epsilon. \tag{$\star\star$}$$

Nous allons construire deux fonctions en escalier $\phi^-, \phi^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ définies de la façon suivante : pour chaque $i = 1,\ldots,n$ et chaque $x \in [x_{i-1}, x_i[$ on pose

$$c_i = \phi^-(x) = \inf_{t\in[x_{i-1},x_i[} f(t) \quad \text{et} \quad d_i = \phi^+(x) = \sup_{t\in[x_{i-1},x_i[} f(t)$$

et aussi $\phi^-(b) = \phi^+(b) = f(b)$. ϕ^- et ϕ^+ sont bien deux fonctions en escalier (elles sont constantes sur chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i[$).



De plus par construction on a bien $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$ et donc

$$\int_a^b \phi^-(x)\,dx \leqslant I^-(f) \leqslant I^+(f) \leqslant \int_a^b \phi^+(x)\,dx\,.$$

En utilisant la continuité de f sur l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, on déduit l'existence de $a_i, b_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tels que $f(a_i) = c_i$ et $f(b_i) = d_i$. Avec ($\star$) et ($\star\star$) on sait que $d_i - c_i = f(b_i) - f(a_i) \leqslant M|b_i - a_i| \leqslant M(x_i - x_{i-1}) \leqslant M\epsilon$ (pour tout $i = 1,\ldots,n$). Alors

$$\int_a^b \phi^+(x)\,dx - \int_a^b \phi^-(x)\,dx \leqslant \sum_{i=1}^n M\epsilon(x_i - x_{i-1}) = M\epsilon(b-a)$$

Ainsi $0 \leqslant I^+(f) - I^-(f) \leqslant M\epsilon(b-a)$ et lorsque l'on fait tendre $\epsilon \to 0$ on trouve $I^+(f) = I^-(f)$, ce qui prouve que f est intégrable. □

La preuve du théorème 2 est du même style et nous l'omettons.

Mini-exercices.

1. Soit $f : [1,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si $x \in [1,2[$, $f(x) = 3$ si $x \in [2,3[$ et $f(x) = -1$ si $x \in [3,4]$. Calculer $\int_1^2 f(x)\,dx$, $\int_1^3 f(x)\,dx$, $\int_1^4 f(x)\,dx$, $\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$, $\int_{\frac{3}{2}}^{\frac{7}{2}} f(x)\,dx$.
2. Montrer que $\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ (prendre une subdivision régulière et utiliser $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$).
3. Montrer que si f est une fonction intégrable et *paire* sur l'intervalle $[-a,a]$ alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(on prendra une subdivision symétrique par rapport à l'origine).

4. Montrer que si f est une fonction intégrable et *impaire* sur l'intervalle $[-a, a]$ alors $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
5. Montrer que toute fonction monotone est intégrable en s'inspirant de la preuve du théorème 3.

2. Propriétés de l'intégrale

Les trois principales propriétés de l'intégrale sont la relation de Chasles, la positivité et la linéarité.

2.1. Relation de Chasles

Proposition 3 (Relation de Chasles).
Soient $a < c < b$. Si f est intégrable sur $[a, c]$ et $[c, b]$, alors f est intégrable sur $[a, b]$. Et on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Pour s'autoriser des bornes sans se préoccuper de l'ordre on définit :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Pour a, b, c quelconques la ***relation de Chasles*** devient alors

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

2.2. Positivité de l'intégrale

Proposition 4 (Positivité de l'intégrale).
Soit $a \leqslant b$ deux réels et f et g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx}$$

En particulier l'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

2.3. Linéarité de l'intégrale

Proposition 5.
Soient f, g deux fonctions intégrables sur $[a, b]$.

1. *$f + g$ est une fonction intégrable et $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.*
2. *Pour tout réel λ, λf est intégrable et on a $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.*
   Par ces deux premiers points nous avons la **linéarité de l'intégrale** *: pour tous réels λ, μ*

$$\boxed{\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx}$$

3. *$f \times g$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ mais en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \big(\int_a^b f(x)\,dx\big)\big(\int_a^b g(x)\,dx\big)$.*

4. $|f|$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right|\,dx}$$

Exemple 3.

$$\int_0^1 \left(7x^2 - e^x\right)dx = 7\int_0^1 x^2\,dx \;-\; \int_0^1 e^x\,dx = 7\frac{1}{3} \;-\; (e-1) = \frac{10}{3} - e$$

Nous avons utilisé les calculs déjà vus : $\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ et $\int_0^1 e^x\,dx = e-1$.

Exemple 4.
Soit $I_n = \int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx$. Montrons que $I_n \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

$$|I_n| = \left|\int_1^n \frac{\sin(nx)}{1+x^n}\,dx\right| \leqslant \int_1^n \frac{|\sin(nx)|}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{1+x^n}\,dx \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx$$

Il ne reste plus qu'à calculer cette dernière intégrale (en anticipant un peu sur la suite du chapitre) :

$$\int_1^n \frac{1}{x^n}\,dx = \int_1^n x^{-n}\,dx = \left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^n = \frac{n^{-n+1}}{-n+1} - \frac{1}{-n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

(car $n^{-n+1} \to 0$ et $\frac{1}{-n+1} \to 0$).

Remarque.
Notez que même si $f \times g$ est intégrable on a en général $\int_a^b (fg)(x)\,dx \neq \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$. Par exemple, soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 0$ sinon. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors $f(x) \times g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et donc $\int_0^1 f(x)g(x)\,dx = 0$ alors que $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}$ et $\int_0^1 g(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

2.4. Une preuve

Nous allons prouver la linéarité de l'intégrale : $\int \lambda f = \lambda \int f$ et $\int f + g = \int f + \int g$. L'idée est la suivante : il est facile de voir que pour des fonctions en escalier l'intégrale (qui est alors une somme finie) est linéaire. Comme les fonctions en escalier approchent autant qu'on le souhaite les fonctions intégrables alors cela implique la linéarité de l'intégrale.

Preuve de $\int \lambda f = \lambda \int f$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. Il existe ϕ^- et ϕ^+ deux fonctions en escalier approchant suffisamment f, avec $\phi^- \leqslant f \leqslant \phi^+$:

$$\int_a^b f(x)\,dx \;-\epsilon \;\leqslant \int_a^b \phi^-(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \phi^+(x)\,dx \;\leqslant \int_a^b f(x)\,dx \;+\epsilon \tag{†}$$

Quitte à rajouter des points, on peut supposer que la subdivision $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a,b]$ est suffisamment fine pour que ϕ^- et ϕ^+ soient toutes les deux constantes sur les intervalles $]x_{i-1}, x_i[$; on note c_i^- et c_i^+ leurs valeurs respectives.
Dans un premier temps on suppose $\lambda \geqslant 0$. Alors $\lambda\phi^-$ et $\lambda\phi^+$ sont encore des fonctions en escalier vérifiant $\lambda\phi^- \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\phi^+$. De plus

$$\int_a^b \lambda\phi^-(x)\,dx = \sum_{i=1}^n \lambda c_i^-(x_i - x_{i-1}) = \lambda \sum_{i=1}^n c_i^-(x_i - x_{i-1}) = \lambda \int_a^b \phi^-(x)\,dx$$

De même pour ϕ^+. Ainsi

$$\lambda \int_a^b \phi^-(x)\,dx \leqslant I^-(\lambda f) \leqslant I^+(\lambda f) \leqslant \lambda \int_a^b \phi^+(x)\,dx$$

En utilisant les deux inégalités (†) on obtient

$$\lambda \int_a^b f(x)\,dx \;-\lambda\epsilon \;\leqslant I^-(\lambda f) \leqslant I^+(\lambda f) \leqslant \lambda \int_a^b f(x)\,dx \;+\lambda\epsilon$$

Lorsque l'on fait tendre $\epsilon \to 0$ cela prouve que $I^-(\lambda f) = I^+(\lambda f)$, donc λf est intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$. Si $\lambda \leqslant 0$ on a $\lambda\phi^+ \leqslant \lambda f \leqslant \lambda\phi^-$ et le raisonnement est similaire. □

Preuve de $\int f+g=\int f+\int g$. Soit $\epsilon>0$. Soient $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ deux fonctions intégrables. On définit deux fonctions en escalier ϕ^+,ϕ^- pour f et deux fonctions en escalier ψ^+,ψ^- pour g vérifiant des inégalités similaires à (†) de la preuve au-dessus. On fixe une subdivision suffisamment fine pour toutes les fonctions $\phi^\pm,\psi^\pm$. On note $c_i^\pm,d_i^\pm$ les constantes respectives sur l'intervalle $]x_{i-1},x_i[$. Les fonctions $\phi^-+\psi^-$ et $\phi^++\psi^+$ sont en escalier et vérifient $\phi^-+\psi^-\leqslant f+g\leqslant\phi^++\psi^+$. Nous avons aussi que

$$\int_a^b(\phi^-+\psi^-)(x)\,dx=\sum_{i=1}^n(c_i^-+d_i^-)(x_i-x_{i-1})=\int_a^b\phi^-(x)\,dx+\int_a^b\psi^-(x)\,dx$$

De même pour $\phi^++\psi^+$. Ainsi

$$\int_a^b\phi^-(x)\,dx+\int_a^b\psi^-(x)\,dx\leqslant I^-(f+g)\leqslant I^+(f+g)\leqslant\int_a^b\phi^+(x)\,dx+\int_a^b\psi^+(x)\,dx$$

Les conditions du type (†) impliquent alors

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\;-2\epsilon\;\leqslant I^-(f+g)\leqslant I^+(f+g)\leqslant\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx\;+2\epsilon$$

Lorsque $\epsilon\to0$ on déduit $I^-(f+g)=I^+(f+g)$, donc $f+g$ est intégrable et $\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$. □

Mini-exercices.

1. En admettant que $\int_0^1 x^n\,dx=\frac{1}{n+1}$. Calculer l'intégrale $\int_0^1 P(x)\,dx$ où $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$. Trouver un polynôme $P(x)$ non nul de degré 2 dont l'intégrale est nulle : $\int_0^1 P(x)\,dx=0$.
2. A-t-on $\int_a^b f(x)^2\,dx=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)^2$; $\int_a^b\sqrt{f(x)}\,dx=\sqrt{\int_a^b f(x)\,dx}$; $\int_a^b|f(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$; $\int|f(x)+g(x)|\,dx=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|+\left|\int_a^b g(x)\,dx\right|$?
3. Peut-on trouver $a<b$ tels que $\int_a^b x\,dx=-1$; $\int_a^b x\,dx=0$; $\int_a^b x\,dx=+1$? Mêmes questions avec $\int_a^b x^2\,dx$.
4. Montrer que $0\leqslant\int_1^2\sin^2x\,dx\leqslant1$ et $\left|\int_a^b\cos^3x\,dx\right|\leqslant|b-a|$.

3. Primitive d'une fonction

3.1. Définition

Définition 5.
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I quelconque. On dit que $F:I\to\mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f sur I si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x)=f(x)$ pour tout $x\in I$.

Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée.

Exemple 5.

1. Soit $I=\mathbb{R}$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$. Alors $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}$ est une primitive de f. La fonction définie par $F(x)=\frac{x^3}{3}+1$ est aussi une primitive de f.
2. Soit $I=[0,+\infty[$ et $g:I\to\mathbb{R}$ définie par $g(x)=\sqrt{x}$. Alors $G:I\to\mathbb{R}$ définie par $G(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ est une primitive de g sur I. Pour tout $c\in\mathbb{R}$, la fonction $G+c$ est aussi une primitive de g.

Nous allons voir que trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition 6.
Soit $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction et soit $F:I\to\mathbb{R}$ une primitive de f. Toute primitive de f s'écrit $G=F+c$ où $c\in\mathbb{R}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que si l'on note G la fonction définie par $G(x)=F(x)+c$ alors $G'(x)=F'(x)$ mais comme $F'(x)=f(x)$ alors $G'(x)=f(x)$ et G est bien une primitive de f.

Pour la réciproque supposons que G soit une primitive quelconque de f. Alors $(G-F)'(x) = G'(x)-F'(x) = f(x)-f(x) = 0$, ainsi la fonction $G-F$ a une dérivée nulle sur un intervalle, c'est donc une fonction constante ! Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $(G-F)(x) = c$. Autrement dit $G(x) = F(x)+c$ (pour tout $x \in I$). □

Notations. On notera une primitive de f par $\int f(t)\,dt$ ou $\int f(x)\,dx$ ou $\int f(u)\,du$ (les lettres $t, x, u, \ldots$ sont des lettres dites *muettes*, c'est-à-dire interchangeables). On peut même noter une primitive simplement par $\int f$.
La proposition 6 nous dit que si F est une primitive de f alors il existe un réel c, tel que $F = \int f(t)\,dt + c$.
Attention : $\int f(t)\,dt$ désigne une fonction de I dans $\mathbb{R}$ alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ désigne un nombre réel. Plus précisément nous verrons que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$.

Par dérivation on prouve facilement le résultat suivant :

Proposition 7.
Soient F une primitive de f et G une primitive de g. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$. Et si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λF est une primitive de λf.

Une autre formulation est de dire que pour tous réels λ, μ on a

$$\boxed{\int \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt = \lambda \int f(t)\,dt + \mu \int g(t)\,dt}$$

3.2. Primitives des fonctions usuelles

$\int e^x\,dx = e^x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$ sur $\mathbb{R}$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\})$ sur $]0,+\infty[$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c$ sur $]0,+\infty[$ ou $]-\infty,0[$

$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c$, $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases}$ sur $]-1,1[$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln\big(x+\sqrt{x^2+1}\big) + c \end{cases}$ sur $\mathbb{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln\big(x+\sqrt{x^2-1}\big) + c \end{cases}$ sur $x \in]1,+\infty[$

Remarque.
Ces primitives sont à connaître par cœur.

1. Voici comment lire ce tableau. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$ alors la fonction : $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Les primitives de f sont les fonctions définies par $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ (pour c une constante réelle quelconque). Et on écrit $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, où $c \in \mathbb{R}$.
2. Souvenez vous que la variable sous le symbole intégrale est une variable muette. On peut aussi bien écrire $\int t^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.
3. La constante est définie pour un intervalle. Si l'on a deux intervalles, il y a deux constantes qui peuvent être différentes. Par exemple pour $\int \frac{1}{x}\,dx$ nous avons deux domaines de validité : $I_1 =]0,+\infty[$ et $I_2 =]-\infty,0[$. Donc $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln x + c_1$ si $x > 0$ et $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + c_2 = \ln(-x) + c_2$ si $x < 0$.
4. On peut trouver des primitives aux allures très différentes par exemple $x \mapsto \arcsin x$ et $x \mapsto \frac{\pi}{2} - \arccos x$ sont deux primitives de la même fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Mais bien sûr on sait que $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$, donc les primitives diffèrent bien d'une constante !

3.3. Relation primitive-intégrale

Théorème 4.
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est une primitive de f, c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.
Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Notation. On note $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

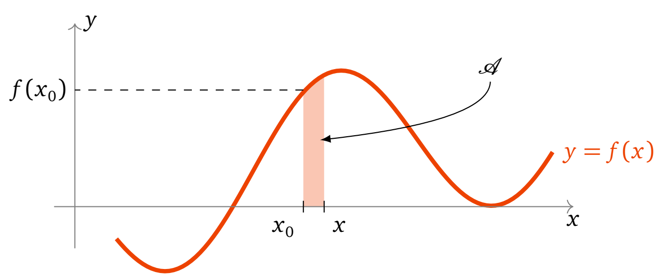
Exemple 6.
Nous allons pouvoir calculer plein d'intégrales. Recalculons d'abord les intégrales déjà rencontrées.

1. Pour $f(x) = e^x$ une primitive est $F(x) = e^x$ donc
$$\int_0^1 e^x\,dx = \big[e^x\big]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$$
2. Pour $g(x) = x^2$ une primitive est $G(x) = \frac{x^3}{3}$ donc
$$\int_0^1 x^2\,dx = \Big[\tfrac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$
3. $\int_a^x \cos t\,dt = \big[\sin t\big]_{t=a}^{t=x} = \sin x - \sin a$ est une primitive de $\cos x$.
4. Si f est impaire alors ses primitives sont paires (le montrer). En déduire que $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.

Remarque.

1. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est même ***l'unique primitive de f qui s'annule en a***.
2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\boxed{\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)}$.
3. On évitera la notation $\int_a^x f(x)\,dx$ où la variable x est présente à la fois aux bornes et à l'intérieur de l'intégrale. Mieux vaut utiliser la notation $\int_a^x f(t)\,dt$ ou $\int_a^x f(u)\,du$ pour éviter toute confusion.
4. Une fonction intégrable n'admet pas forcément une primitive. Considérer par exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $f(x) = 1$ si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. f est intégrable sur $[0,1]$ mais elle n'admet pas de primitive sur $[0,1]$. En effet par l'absurde si F était une primitive de f, par exemple la primitive qui vérifie $F(0) = 0$. Alors $F(x) = 0$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}[$ et $F(x) = x - \frac{1}{2}$ pour $x \in [\frac{1}{2}, 1]$. Mais alors nous obtenons une contradiction car F n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$ alors que par définition une primitive doit être dérivable.

Démonstration. Essayons de visualiser tout d'abord pourquoi la fonction F est dérivable et $F'(x) = f(x)$.



Fixons $x_0 \in [a,b]$. Par la relation de Chasles nous savons :

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt = \int_{x_0}^a f(t)\,dt + \int_a^x f(t)\,dt = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Donc le taux d'accroissement
$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \frac{\mathscr{A}}{x-x_0}$$
où $\mathscr{A}$ est l'aire hachurée (en rouge). Mais cette aire est presque un rectangle, si x est suffisamment proche de x_0, donc l'aire $\mathscr{A}$ vaut environ $(x-x_0)\times f(x_0)$; lorsque $x \to x_0$ le taux d'accroissement tend donc vers $f(x_0)$. Autrement dit $F'(x_0) = f(x_0)$.

Passons à la preuve rigoureuse. Comme $f(x_0)$ est une constante alors $\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt = (x-x_0)f(x_0)$, donc
$$\begin{aligned}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(x_0)\,dt \\ &= \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\end{aligned}$$
Fixons $\epsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $(|t-x_0| < \delta \implies |f(t)-f(x_0)| < \epsilon)$. Donc :
$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} \big(f(t)-f(x_0)\big)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \big|f(t)-f(x_0)\big|\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{|x-x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \epsilon\,dt\right| = \epsilon\end{aligned}$$
Ce qui prouve que F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$.

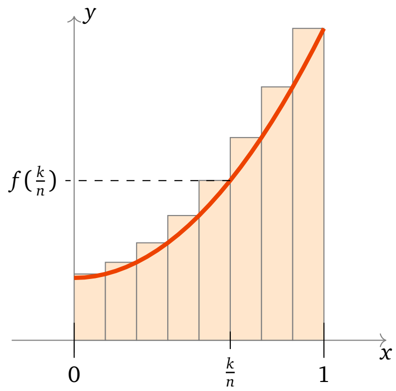
Maintenant on sait que F est une primitive de f, F est même la primitive qui s'annule en a car $F(a) = \int_a^a f(t)\,dt = 0$. Si G est une autre primitive on sait $F = G + c$. Ainsi
$$G(b) - G(a) = F(b) + c - \big(F(a)+c\big) = F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$
□

3.4. Sommes de Riemann

L'intégrale est définie à partir de limites de sommes. Mais maintenant que nous savons calculer des intégrales sans utiliser ces sommes on peut faire le cheminement inverse : calculer des limites de sommes à partir d'intégrales.

> **Théorème 5.**
> *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors*
> $$\boxed{S_n = \tfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_a^b f(x)\,dx}$$

La somme S_n s'appelle la *somme de Riemann* associée à l'intégrale et correspond à une subdivision régulière de l'intervalle $[a,b]$ en n petits intervalles. La hauteur de chaque rectangle étant évaluée à son extrémité droite.
Le cas le plus utile est le cas où $a = 0$, $b = 1$ alors $\frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}$ et $f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = f\left(\frac{k}{n}\right)$ et ainsi
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 f(x)\,dx$$



Exemple 7.
Calculer la limite de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
On a $S_1 = \frac{1}{2}$, $S_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$, $S_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $S_4 = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}, \ldots$
La somme S_n s'écrit aussi $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. En posant $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $a = 0$ et $b = 1$, on reconnaît que S_n est une somme de Riemann. Donc

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\tfrac{k}{n}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \big[\ln|1+x|\big]_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

Ainsi $S_n \to \ln 2$ (lorsque $n \to +\infty$).

Mini-exercices.

1. Trouver les primitives des fonctions : $x^3 - x^7$, $\cos x + \exp x$, $\sin(2x)$, $1 + \sqrt{x} + x$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x+1}$.
2. Trouver les primitives des fonctions : $\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(\frac{x}{2})$, $\frac{1}{1+4x^2}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Trouver une primitive de $x^2 e^x$ sous la forme $(ax^2 + bx + c)e^x$.
4. Trouver toutes les primitives de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (préciser les intervalles et les constantes).
5. Calculer les intégrales $\int_0^1 x^n\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1+x^2}$, $\int_1^e \frac{1-x}{x^2}\,dx$, $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1}$.
6. Calculer la limite (lorsque $n \to +\infty$) de la somme $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{k/n}}{n}$. Idem avec $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{(n+k)^2}$.

4. Intégration par parties – Changement de variable

Pour trouver une primitive d'une fonction f on peut avoir la chance de reconnaître que f est la dérivée d'une fonction bien connue. C'est malheureusement très rarement le cas, et on ne connaît pas les primitives de la plupart des fonctions. Cependant nous allons voir deux techniques qui permettent des calculer des intégrales et des primitives : l'intégration par parties et le changement de variable.

4.1. Intégration par parties

Théorème 6.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a, b]$.

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

Notation. Le crochet $\big[F\big]_a^b$ est par définition $\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\big[uv\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.

La formule d'intégration par parties pour les primitives est la même mais sans les bornes :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx.$$

La preuve est très simple :

Démonstration. On a $(uv)' = u'v + uv'$. Donc $\int_a^b (u'v + uv') = \int_a^b (uv)' = \big[uv\big]_a^b$. D'où $\int_a^b uv' = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'v$. □

L'utilisation de l'intégration par parties repose sur l'idée suivante : on ne sait pas calculer directement l'intégrale d'une fonction f s'écrivant comme un produit $f(x) = u(x)v'(x)$ mais si l'on sait calculer l'intégrale de $g(x) = u'(x)v(x)$ (que l'on espère plus simple) alors par la formule d'intégration par parties on aura l'intégrale de f.

Exemple 8.

1. Calcul de $\int_0^1 xe^x\,dx$. On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Nous aurons besoin de savoir que $u'(x) = 1$ et qu'une primitive de v' est simplement $v(x) = e^x$. La formule d'intégration par parties donne :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xe^x\,dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx \\
&= \big[u(x)v(x)\big]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx \\
&= \big[xe^x\big]_0^1 \;-\; \int_0^1 1\cdot e^x\,dx \\
&= \big(1\cdot e^1 - 0\cdot e^0\big) - \big[e^x\big]_0^1 \\
&= e - (e^1 - e^0) \\
&= 1
\end{aligned}$$

2. Calcul de $\int_1^e x\ln x\,dx$.

   On pose cette fois $u = \ln x$ et $v' = x$. Ainsi $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^2}{2}$. Alors

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\cdot x\,dx &= \int_1^e uv' = \big[uv\big]_1^e - \int_1^e u'v = \Big[\ln x\cdot\tfrac{x^2}{2}\Big]_1^e - \int_1^e \tfrac{1}{x}\tfrac{x^2}{2}\,dx \\
&= \Big(\ln e\tfrac{e^2}{2} - \ln 1\tfrac{1^2}{2}\Big) - \tfrac{1}{2}\int_1^e x\,dx = \tfrac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\Big[\tfrac{x^2}{2}\Big]_1^e = \tfrac{e^2}{2} - \tfrac{e^2}{4} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

3. Calcul de $\int \arcsin x\,dx$.

   Pour déterminer une primitive de $\arcsin x$, nous faisons artificiellement apparaître un produit en écrivant $\arcsin x = 1\cdot\arcsin x$ pour appliquer la formule d'intégration par parties. On pose $u = \arcsin x$, $v' = 1$ (et donc $u' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $v = x$) alors

$$\begin{aligned}
\int 1\cdot\arcsin x\,dx &= \big[x\arcsin x\big] - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \\
&= \big[x\arcsin x\big] - \big[-\sqrt{1-x^2}\big] \\
&= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c
\end{aligned}$$

4. Calcul de $\int x^2e^x\,dx$. On pose $u = x^2$ et $v' = e^x$ pour obtenir :

$$\int x^2e^x\,dx = \big[x^2e^x\big] - 2\int xe^x\,dx$$

   On refait une deuxième intégration par parties pour calculer

$$\int xe^x\,dx = \big[xe^x\big] - \int e^x\,dx = (x-1)e^x + c$$

   D'où

$$\int x^2e^x\,dx = (x^2 - 2x + 2)e^x + c.$$

Exemple 9.

Nous allons étudier les intégrales définies par $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{x+n}\,dx$, pour tout entier $n > 0$.

1. Montrer que $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

   Pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, on a $0 < x + n \leqslant x + n + 1$ et $\sin(\pi x) \geqslant 0$, donc $0 \leqslant \frac{\sin(\pi x)}{x+n+1} \leqslant \frac{\sin(\pi x)}{x+n}$. D'où $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ par la positivité de l'intégrale.

2. Montrer que $I_n \leqslant \ln \frac{n+1}{n}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   De $0 \leqslant \sin(\pi x) \leqslant 1$, on a $\frac{\sin(\pi x)}{x+n} \leqslant \frac{1}{x+n}$. D'où $0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \frac{1}{x+n}\,dx = \left[\ln(x+n)\right]_0^1 = \ln\frac{n+1}{n} \to 0$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
   Nous allons faire une intégration par parties avec $u = \frac{1}{x+n}$ et $v' = \sin(\pi x)$ (et donc $u' = -\frac{1}{(x+n)^2}$ et $v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)$) :

$$\begin{aligned} nI_n &= n\int_0^1 \frac{1}{x+n}\sin(\pi x)\,dx \\ &= -\frac{n}{\pi}\left[\frac{1}{x+n}\cos(\pi x)\right]_0^1 - \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\cos(\pi x)\,dx \\ &= \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n \end{aligned}$$

   Il nous reste à évaluer $J_n = \int_0^1 \frac{\cos(\pi x)}{(x+n)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned} \left|\frac{n}{\pi}J_n\right| &\leqslant \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{|\cos(\pi x)|}{(x+n)^2}\,dx \leqslant \frac{n}{\pi}\int_0^1 \frac{1}{(x+n)^2}\,dx \\ &= \frac{n}{\pi}\left[-\frac{1}{x+n}\right]_0^1 = \frac{n}{\pi}\left(-\frac{1}{1+n}+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{n+1} \to 0. \end{aligned}$$

   Donc $\lim_{n\to+\infty} nI_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\pi(n+1)} + \frac{1}{\pi} - \frac{n}{\pi}J_n = \frac{2}{\pi}$.

4.2. Changement de variable

Théorème 7.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a, b \in J$

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Si F est une primitive de f alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $\big(f\circ\varphi\big)\cdot\varphi'$.

Voici un moyen simple de s'en souvenir. En effet si l'on note $x = \varphi(t)$ alors par dérivation on obtient $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ donc $dx = \varphi'(t)\,dt$. D'où la substitution $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$.

Démonstration. Comme F est une primitive de f alors $F'(x) = f(x)$ et par la formule de la dérivation de la composition $F\circ\varphi$ on a

$$(F\circ\varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Donc $F\circ\varphi$ est une primitive de $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Pour les intégrales : $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \big[F\circ\varphi\big]_a^b = F\big(\varphi(b)\big) - F\big(\varphi(a)\big) = \big[F\big]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx.$ □

Remarque.
Comme φ est une bijection de J sur $\varphi(J)$, sa réciproque φ^{-1} existe et est dérivable sauf quand φ s'annule. Si φ ne s'annule pas, on peut écrire $t = \varphi^{-1}(x)$ et faire un changement de variable en sens inverse.

Exemple 10.
Calculons la primitive $F = \int \tan t\,dt$.

$$F = \int \tan t\,dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}\,dt\ .$$

On reconnaît ici une forme $\frac{u'}{u}$ (avec $u = \cos t$ et $u' = -\sin t$) dont une primitive est $\ln|u|$. Donc $F = \int -\frac{u'}{u} = -\big[\ln|u|\big] = -\ln|u| + c = -\ln|\cos t| + c$.

Nous allons reformuler tout cela en terme de changement de variable. Notons $\varphi(t) = \cos t$ alors $\varphi'(t) = -\sin t$, donc

$$F = \int -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\,dt$$

Si f désigne la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, qui est bijective tant que $x \neq 0$; alors $F = -\int \varphi'(t) f(\varphi(t))\, dt$. En posant $x = \varphi(t)$ et donc $dx = \varphi'(t) dt$, on reconnaît la formule du changement de variable, par conséquent

$$F \circ \varphi^{-1} = -\int f(x)\, dx = -\int \frac{1}{x}\, dx = -\ln|x| + c\,.$$

Comme $x = \varphi(t) = \cos t$, on retrouve bien $F(t) = -\ln|\cos t| + c$.
Remarque : pour que l'intégrale soit bien définie il faut que $\tan t$ soit définie, donc $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \mod \pi$. La restriction d'une primitive à un intervalle $]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$ est donc de la forme $-\ln|\cos t| + c$. Mais la constante c peut être différente sur un intervalle différent.

Exemple 11.
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.
Soit le changement de variable $u = \varphi(x) = 1 - x^2$. Alors $du = \varphi'(x)\, dx = -2x\, dx$. Pour $x = 0$ on a $u = \varphi(0) = 1$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $u = \varphi(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x) = -2x$, φ est une bijection de $[0, \frac{1}{2}]$ sur $[1, \frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x\, dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\, du \\ &= -\frac{1}{2}\Big[-2u^{-1/2}\Big]_1^{3/4} = \Big[\frac{1}{\sqrt{u}}\Big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}} - 1 = \frac{2}{\sqrt{3}} - 1.\end{aligned}$$

Exemple 12.
Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\, dx$.
On effectue le changement de variable $x = \varphi(t) = \sin t$ et $dx = \cos t\, dt$. De plus $t = \arcsin x$ donc pour $x = 0$ on a $t = \arcsin(0) = 0$ et pour $x = \frac{1}{2}$ on a $t = \arcsin(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{6}$. Comme φ est une bijection de $[0, \frac{\pi}{6}]$ sur $[0, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(1-\sin^2 t)^{3/2}} = \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t\, dt}{(\cos^2 t)^{3/2}} \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos t}{\cos^3 t}\, dt = \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \Big[\tan t\Big]_0^{\pi/6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,.\end{aligned}$$

Exemple 13.
Calcul de $\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx$.
Soit le changement de variable $x = \tan t$ donc $t = \arctan x$ et $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$ (la fonction tangente établit une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$). Donc

$$\begin{aligned}F = \int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx &= \int \frac{1}{(1+\tan^2 t)^{3/2}}\, \frac{dt}{\cos^2 t} \\ &= \int (\cos^2 t)^{3/2}\, \frac{dt}{\cos^2 t} \qquad \text{car } 1+\tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \\ &= \int \cos t\, dt = \Big[\sin t\Big] = \sin t + c = \sin(\arctan x) + c\end{aligned}$$

Donc

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}\, dx = \sin(\arctan x) + c.$$

En manipulant un peu les fonctions on trouverait que la primitive s'écrit aussi $F(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$.

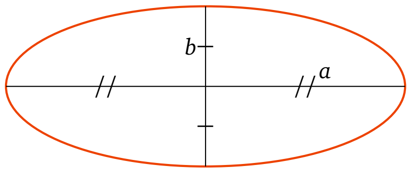
Mini-exercices.

1. Calculer les intégrales à l'aide d'intégrations par parties : $\int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt$, $\int_0^{\pi/2} t^2 \sin t\, dt$, puis par récurrence $\int_0^{\pi/2} t^n \sin t\, dt$.
2. Déterminer les primitives à l'aide d'intégrations par parties : $\int t \operatorname{sh} t\, dt$, $\int t^2 \operatorname{sh} t\, dt$, puis par récurrence $\int t^n \operatorname{sh} t\, dt$.
3. Calculer les intégrales à l'aide de changements de variable : $\int_0^a \sqrt{a^2 - t^2}\, dt$; $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 + \cos t}\, dt$ (pour ce dernier poser deux changements de variables : $u = \cos t$, puis $v = 1 - u$).
4. Déterminer les primitives suivantes à l'aide de changements de variable : $\int \operatorname{th} t\, dt$ où $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, $\int e^{\sqrt{t}}\, dt$.

5. Intégration des fractions rationnelles

Nous savons intégrer beaucoup de fonctions simples. Par exemple toutes les fonctions polynomiales : si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ alors $\int f(x)\,dx = a_0x + a_1\frac{x^2}{2} + a_2\frac{x^3}{3} + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$.

Il faut être conscient cependant que beaucoup de fonctions ne s'intègrent pas à l'aide de fonctions simples. Par exemple si $f(t) = \sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}$ alors l'intégrale $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt$ ne peut pas s'exprimer comme somme, produit, inverse ou composition de fonctions que vous connaissez. En fait cette intégrale vaut la longueur d'une ellipse d'équation paramétrique $(a\cos t, b\sin t)$; il n'y a donc pas de formule pour le périmètre d'une ellipse (sauf si $a = b$ auquel cas l'ellipse est un cercle !).



Mais de façon remarquable, il y a toute une famille de fonctions que l'on saura intégrer : les fractions rationnelles.

5.1. Trois situations de base

On souhaite d'abord intégrer les fractions rationnelles $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ avec $\alpha, \beta, a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$.
Premier cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.
Alors $f(x)$ s'écrit aussi $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$. On a donc

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x - x_1| + B\ln|x - x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_1[$, $]x_1, x_2[$, $]x_2, +\infty[$ (si $x_1 < x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ possède une racine double $x_0 \in \mathbb{R}$.
Alors $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}$ et il existe des nombres $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$. On a alors

$$\int f(x)\,dx = -\frac{A}{x - x_0} + B\ln|x - x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty, x_0[$, $]x_0, +\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $ax^2 + bx + c$ ne possède pas de racine réelle. Voyons comment faire sur un exemple.

Exemple 14.
Soit $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+x+1}$. Dans un premier temps on fait apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).

$$f(x) = \frac{(4x+1)\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1}{2x^2 + x + 1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{4x+1}{2x^2+x+1} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x^2+x+1}$$

On peut intégrer la fraction $\frac{4x+1}{2x^2+x+1}$:

$$\int \frac{4x+1}{2x^2+x+1}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln\left|2x^2 + x + 1\right| + c$$

Occupons nous de l'autre partie $\frac{1}{2x^2+x+1}$, nous allons l'écrire sous la forme $\frac{1}{u^2+1}$ (dont une primitive est $\arctan u$).

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2x^2+x+1} &= \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} + 1} = \frac{1}{2(x+\frac{1}{4})^2 + \frac{7}{8}} \\
&= \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\frac{8}{7}2(x+\frac{1}{4})^2 + 1} = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2 + 1}
\end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = \frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})$ (et donc $du = \frac{4}{\sqrt{7}}dx$) pour trouver

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{2x^2+x+1} &= \int \frac{8}{7}\frac{dx}{\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)^2+1} = \frac{8}{7}\int \frac{du}{u^2+1}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} \\ &= \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan u + c = \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c\,.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4}\ln\left(2x^2+x+1\right)+\frac{3}{2\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{4}{\sqrt{7}}(x+\frac{1}{4})\right)+c$$

5.2. Intégration des éléments simples

Soit $\frac{P(x)}{Q(x)}$ une fraction rationnelle, où $P(x), Q(x)$ sont des polynômes à coefficients réels. Alors la fraction $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x) \in \mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ avec } b^2-4ac<0$$

où $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a) Si $k=1$ alors $\int \frac{\gamma\,dx}{x-x_0} = \gamma\ln|x-x_0|+c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0,+\infty[$).
   (b) Si $k \geqslant 2$ alors $\int \frac{\gamma\,dx}{(x-x_0)^k} = \gamma\int (x-x_0)^{-k}\,dx = \frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}+c_0$ (sur $]-\infty, x_0[$ ou $]x_0,+\infty[$).
3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme
$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$
   (a) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)|+c_0 = \ln|ax^2+bx+c|+c_0$.
   (b) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx = \int \frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx = \frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1}+c_0 = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1}+c_0$.
   (c) Si $k=1$, calcul de $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Par un changement de variable $u = px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + c_0$.
   (d) Si $k \geqslant 2$, calcul de $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. On effectue le changement de variable $u = px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k = \int \frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.
   Par exemple calculons I_2. Partant de $I_1 = \int \frac{du}{u^2+1}$ on pose $f = \frac{1}{u^2+1}$ et $g'=1$. La formule d'intégration par parties $\int f g' = [f g] - \int f' g$ donne (avec $f' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$ et $g=u$)
$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{du}{u^2+1} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right]+\int\frac{2u^2\,du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right]+2\int\frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \left[\frac{u}{u^2+1}\right]+2\int\frac{du}{u^2+1}-2\int\frac{du}{(u^2+1)^2} = \left[\frac{u}{u^2+1}\right]+2I_1-2I_2\end{aligned}$$
   On en déduit $I_2 = \frac{1}{2}I_1+\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1}+c_0$. Mais comme $I_1 = \arctan u$ alors
$$I_2 = \int\frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}\arctan u+\frac{1}{2}\frac{u}{u^2+1}+c_0.$$

5.3. Intégration des fonctions trigonométriques

On peut aussi calculer les primitives de la forme $\int P(\cos x, \sin x)\,dx$ ou de la forme $\int \frac{P(\cos x,\sin x)}{Q(\cos x,\sin x)}\,dx$ quand P et Q sont des polynômes, en se ramenant à intégrer une fraction rationnelle.
Il existe deux méthodes :

- les règles de Bioche sont assez efficaces mais ne fonctionnent pas toujours ;
- le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ fonctionne tout le temps mais conduit à davantage de calculs.

Les règles de Bioche. On note $\omega(x) = f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x) = f(-x)\,d(-x) = -f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi - x) = f(\pi - x)\,d(\pi - x) = -f(\pi - x)\,dx$.

- Si $\omega(-x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \cos x$.
- Si $\omega(\pi - x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \sin x$.
- Si $\omega(\pi + x) = \omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u = \tan x$.

Exemple 15.

Calcul de la primitive $\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$

On note $\omega(x) = \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x}$. Comme $\omega(\pi - x) = \frac{\cos(\pi-x)\,d(\pi-x)}{2-\cos^2(\pi-x)} = \frac{(-\cos x)\,(-dx)}{2-\cos^2 x} = \omega(x)$ alors le changement de variable qui convient est $u = \sin x$ pour lequel $du = \cos x\,dx$. Ainsi :

$$\int \frac{\cos x\,dx}{2-\cos^2 x} = \int \frac{\cos x\,dx}{2-(1-\sin^2 x)} = \int \frac{du}{1+u^2} = \big[\arctan u\big] = \arctan(\sin x) + c\ .$$

Le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Avec} \quad t = \tan\frac{x}{2} \quad \text{on a} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}. \end{array}}$$

Exemple 16.

Calcul de l'intégrale $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{dx}{1-\sin x}$.

Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ définit une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ vers $[-1, 0]$ (pour $x = -\frac{\pi}{2}$, $t = -1$ et pour $x = 0$, $t = 0$). De plus on a $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$.

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{dx}{1-\sin x} &= \int_{-1}^{0} \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{1-\frac{2t}{1+t^2}} = 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+t^2-2t} \\ &= 2\int_{-1}^{0} \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\left[\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{0} = 2\big(1-\frac{1}{2}\big) = 1 \end{aligned}$$

Mini-exercices.

1. Calculer les primitives $\int \frac{4x+5}{x^2+x-2}\,dx$, $\int \frac{6-x}{x^2-4x+4}\,dx$, $\int \frac{2x-4}{(x-2)^2+1}\,dx$, $\int \frac{1}{(x-2)^2+1}\,dx$.
2. Calculer les primitives $I_k = \int \frac{dx}{(x-1)^k}$ pour tout $k \geqslant 1$. Idem avec $J_k = \int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^k}$.
3. Calculer les intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$, $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+x+1}$, $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+x+1)^2}$, $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
4. Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^3 x\,dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\,dx$, $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2+\sin x}$.

Auteurs du chapitre

Rédaction : Arnaud Bodin

Basé sur des cours de Guoting Chen et Marc Bourdon

Relecture : Pascal Romon

Dessins : Benjamin Boutin