

# Valeurs propres, vecteurs propres

Dans ce chapitre nous allons définir et étudier les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice. Ce chapitre peut être vu comme un cours minimal pour comprendre la diagonalisation ou comme une introduction à la théorie de la réduction des endomorphismes.

## Notations.

$\mathbb{K}$  est un corps. Dans les exemples de ce chapitre,  $\mathbb{K}$  sera  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Les matrices seront des éléments de  $M_n(\mathbb{K})$ , c'est-à-dire des matrices carrées, de taille  $n \times n$ , à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .

## 1. Valeurs propres et vecteurs propres

### 1.1. Motivation

Voici deux transformations simples définies par une matrice :

1.

$$h : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

L'application  $h$  est une homothétie de  $\mathbb{R}^2$  (centrée à l'origine). Si  $D$  est une droite passant par l'origine, alors elle est globalement invariante par cette transformation, c'est-à-dire si  $P \in D$  alors  $h(P) \in D$  (mais on n'a pas  $h(P) = P$ ). On retient ici que n'importe quel vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  est envoyé sur son double,  $2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

2.

$$k : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 3y \end{pmatrix}$$

L'application  $k$  n'est plus une homothétie. Cependant l'axe  $(Ox)$  est globalement invariant par  $k$  ; de même, l'axe  $(Oy)$  est globalement invariant. On retient qu'un vecteur du type  $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$  est envoyé sur son double  $2\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ , alors qu'un vecteur du type  $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$  est envoyé sur son triple  $3\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$ .

Pour une matrice quelconque, il s'agit de voir comment on se ramène à ces situations géométriques simples. C'est ce qui nous amène à la notion de vecteurs propres et valeurs propres.

### 1.2. Définitions

#### Définition 1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

- $\lambda$  est dite **valeur propre** de la matrice  $A$ , s'il existe un vecteur non nul  $X \in \mathbb{K}^n$  tel que

$$AX = \lambda X$$

- Le vecteur  $X$  est alors appelé **vecteur propre** de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

### 1.3. Exemples

#### Exemple 1.

Soit  $A \in M_3(\mathbb{R})$  la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

- Vérifions que  $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $A$ .

En effet

$$AX_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2X_1$$

Donc  $X_1$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_1 = -2$ .

- Vérifions que  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  est vecteur propre de  $A$ .

On calcule  $AX_2$  et on vérifie que :

$$AX_2 = 13X_2$$

Donc  $X_2$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 13$ .

- Vérifions que  $\lambda_3 = 7$  est valeur propre de  $A$ .

Il s'agit donc de trouver un vecteur  $X_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  tel que  $AX_3 = 7X_3$ .

$$\begin{aligned} AX_3 = 7X_3 &\iff \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 3x_3 \\ -2x_1 + 11x_2 - 2x_3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7x_1 \\ 7x_2 \\ 7x_3 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 8x_1 - 7x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On résout ce système linéaire et on trouve comme ensemble de solutions :  $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ . Autrement dit,

les solutions sont engendrées par le vecteur  $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On vient de calculer que  $AX_3 = 7X_3$ . Ainsi  $X_3$  est un vecteur propre de  $A$  associé à la valeur propre  $\lambda_3 = 7$ .

#### Exemple 2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le réel  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est une valeur propre de  $A$ . En effet :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

**Exemple 3.**

Soit

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la matrice de la rotation de l'espace, d'angle  $\theta$  et d'axe  $(Oz)$ . Soit  $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Alors  $A_\theta X_3 = X_3$ . Donc  $X_3$  est un vecteur propre de  $A_\theta$  et la valeur propre associée est 1.

**Exemple 4.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Le complexe  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$  est une valeur propre de  $A$ . En effet :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} = j \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

**1.4. Cas d'une matrice diagonale**

Le cas idéal est celui d'une matrice diagonale. Il n'y a rien à faire pour trouver les valeurs propres et les vecteurs propres. C'est le but de la « diagonalisation » de se ramener à ce cas !

**Exemple 5** (Cas d'une matrice diagonale).

Soit  $A$  la matrice diagonale

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors les valeurs propres sont  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et les vecteurs propres associés sont respectivement

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad X_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

La preuve est immédiate. Le vecteur  $X_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$  (où toutes les coordonnées sont nulles, sauf 1 en position  $i$ )

vérifie

$$AX_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda_i X_i$$

Conclusion : les valeurs propres sont les éléments diagonaux !

## 1.5. Les vecteurs propres forment une famille libre

### Théorème 1.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  des valeurs propres distinctes de  $A$ , et soit  $X_i$  un vecteur propre associé à  $\lambda_i$  (pour  $1 \leq i \leq r$ ). Alors les  $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  sont linéairement indépendants.

*Démonstration.* Raisonnons par récurrence sur  $r$ , le nombre de valeurs propres.

- **Initialisation.**

Pour  $r = 1$ , la famille constituée du seul vecteur  $\{X_1\}$  est toujours une famille libre.

- **Hérédité.**

Supposons que  $\{X_1, X_2, \dots, X_{r-1}\}$  soient des vecteurs propres linéairement indépendants (où  $r \geq 2$  est fixé). Soit  $\lambda_r$  une autre valeur propre, et soit  $X_r$  un vecteur propre associé. Soient  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r-1}, \alpha_r \in \mathbb{K}$  tels que

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{r-1} X_{r-1} + \alpha_r X_r = 0 \quad (1)$$

Ainsi :

$$A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_{r-1} X_{r-1} + \alpha_r X_r) = 0$$

donc

$$\alpha_1 A X_1 + \alpha_2 A X_2 + \dots + \alpha_{r-1} A X_{r-1} + \alpha_r A X_r = 0$$

Comme les  $X_i$  sont des vecteurs propres, alors

$$\alpha_1 \lambda_1 X_1 + \alpha_2 \lambda_2 X_2 + \dots + \alpha_{r-1} \lambda_{r-1} X_{r-1} + \alpha_r \lambda_r X_r = 0 \quad (2)$$

À partir des équations (1) et (2), on calcule l'expression (2) -  $\lambda_r$ (1) :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) X_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_r) X_2 + \dots + \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) X_{r-1} = 0 \quad (3)$$

(le vecteur  $X_r$  n'apparaît plus dans cette forme). Comme la famille  $\{X_1, X_2, \dots, X_{r-1}\}$  est une famille libre alors la combinaison linéaire nulle (3) implique que tous ses coefficients sont nuls :

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_r) = 0 \quad \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_r) = 0 \quad \dots \quad \alpha_{r-1} (\lambda_{r-1} - \lambda_r) = 0$$

Mais comme les valeurs propres sont distinctes alors  $\lambda_i - \lambda_r \neq 0$  (pour  $i = 1, \dots, r-1$ ). Ainsi

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = 0 \quad \dots \quad \alpha_{r-1} = 0$$

En se souvenant qu'un vecteur propre n'est pas le vecteur nul, alors l'équation (1) implique en plus

$$\alpha_r = 0.$$

Bilan : on vient de prouver que la famille  $\{X_1, X_2, \dots, X_r\}$  est une famille libre.

- **Conclusion.** Par le principe de récurrence, des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes, sont linéairement indépendants.

□

### Mini-exercices.

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$  sont des vecteurs propres. Quelles sont les valeurs propres associées ? Même question avec  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , et  $X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$ .
2. Soit  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3 = 0$  sont valeurs propres de  $A$ . Pour chaque valeur propre, trouver un vecteur propre.
3. Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice identité  $I_n$  ? Et de la matrice nulle  $0_n$  ?
4. Montrer qu'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  a au plus  $n$  valeurs propres distinctes (utiliser un résultat du cours).

5. Pour la matrice  $A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$ . Montrer que les vecteurs  $X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  sont vecteurs propres de  $A$ . Montrer que  $\{X_1, X_2, X_3\}$  ne forme pas une famille libre. Est-ce que cela contredit un résultat du cours ?

## 2. Polynôme caractéristique

Comment trouver les valeurs propres d'une matrice parmi tous les éléments de  $\mathbb{K}$  ?

### 2.1. Caractérisation des valeurs propres

Voici le résultat fondamental pour déterminer les valeurs propres.

**Proposition 1.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } A \iff \det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Rappel :  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n \times n$  ; quel que soit le vecteur  $X \in \mathbb{K}^n$ ,  $I_n \cdot X = X$ .

Démonstration.

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } A &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X \\ &\iff \exists X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\} \quad (A - \lambda I_n)X = 0 \\ &\iff \text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas injective} \\ &\iff A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\iff \det(A - \lambda I_n) = 0. \end{aligned}$$

□

### 2.2. Polynôme caractéristique

Nous transformons la caractérisation précédente en un outil pratique :

**Définition 2.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Le **polynôme caractéristique** de  $A$  est :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n).$$

La proposition 1 devient alors :

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff \chi_A(\lambda) = 0$$

**Remarque.**

- La matrice  $A - XI_n$  est à coefficients dans  $\mathbb{K}[X]$ , donc son déterminant  $\chi_A(X)$  appartient à  $\mathbb{K}[X]$ .
- On notera aussi souvent  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$  comme un polynôme en  $\lambda$ , plutôt que  $\chi_A(X)$ .
- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda I_n - A) = (-1)^n \chi_A(\lambda)$ .

La matrice  $A$  étant de taille  $n \times n$ , alors le polynôme caractéristique de  $A$  est un polynôme de degré  $n$ . Cela conduit aux propriétés suivantes :

**Corollaire 1.**

- Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Alors  $A$  admet au plus  $n$  valeurs propres.
- Si le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , alors toute matrice  $A \in M_n(\mathbb{C})$  admet au moins une valeur propre.

En effet, nous savons qu'un polynôme de degré  $n$  a au plus  $n$  racines. Et sur  $\mathbb{C}$  un polynôme non constant admet toujours au moins une racine.

**Proposition 2.**

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. Autrement dit, si  $B = P^{-1}AP$  alors  $\chi_A(X) = \chi_B(X)$ .

*Démonstration.* On écrit

$$B - XI_n = P^{-1}AP - X(P^{-1}I_nP) = P^{-1}(A - XI_n)P,$$

Mais on sait que le déterminant vérifie  $\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$  pour toutes matrices  $M$  et  $N$  et  $\det(M^{-1}) = \frac{1}{\det(M)}$  pour une matrice  $M$  inversible. Donc

$$\chi_B(X) = \det(B - XI_n) = \frac{1}{\det(P)} \cdot \det(A - XI_n) \cdot \det(P) = \det(A - XI_n) = \chi_A(X).$$

□

**2.3. Exemple**

Reprenons les exemples du début de ce chapitre et traitons les en utilisant le polynôme caractéristique.

**Exemple 6.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \det \left( \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 11 & -2 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{vmatrix} 1-X & 3 & 3 \\ -2 & 11-X & -2 \\ 8 & -7 & 6-X \end{vmatrix} \\ &= \dots \\ &= -X^3 + 18X^2 - 51X - 182 \\ &= -(X+2)(X-7)(X-13) \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont :

$$-2, 7 \text{ et } 13.$$

**Exemple 7.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0-X & 1 \\ 1 & 1-X \end{vmatrix} = X^2 - X - 1 = \left(X - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left(X - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc les valeurs propres sont :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

**Exemple 8.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0-X & 1 \\ -1 & -1-X \end{vmatrix} = X^2 + X + 1 = (X - j)(X - \bar{j})$$

où  $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Bilan :

- sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la matrice  $A$  n'a aucune valeur propre,
- sur  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , la matrice  $A$  a deux valeurs propres  $\{j, \bar{j}\}$ .

**Exemple 9.**

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} \cos \theta - X & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta - X \end{vmatrix} = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1 = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$$

Sur  $\mathbb{C}$  les valeurs propres sont

$$\{e^{-i\theta}, e^{i\theta}\}.$$

**Cas des matrices triangulaires.**

**Exemple 10.**

Soit  $A$  une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11}-X & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-X & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn}-X \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^n (a_{ii} - X) = (-1)^n \prod_{i=1}^n (X - a_{ii})$$

Le calcul de ce déterminant se fait d'abord en développant la première colonne, puis par récurrence. L'ensemble des valeurs propres est donc  $\{a_{ii} \mid 1 \leq i \leq n\}$ . On retient :

Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont les éléments diagonaux.

## 2.4. Coefficients du polynôme caractéristique

La somme et le produit des valeurs propres peuvent se calculer facilement à partir de la matrice.

### Proposition 3.

Si une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  admet  $n$  valeurs propres alors :

La somme des valeurs propres vaut  $\text{tr} A$ .

Le produit des valeurs propres vaut  $\det A$ .

Rappel : la **trace** de  $A$ ,  $\text{tr} A$ , est la somme des coefficients diagonaux de  $A$ .

Cette proposition est évidente pour une matrice diagonale. Elle se démontre aussi facilement si la matrice est diagonalisable. Nous allons ici déduire cette proposition d'un résultat plus général sur les coefficients du polynôme caractéristique.

### Proposition 4.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Soit  $\chi_A(X)$  son polynôme caractéristique. C'est un polynôme de degré  $n$  qui vérifie :

$$\chi_A(X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr} A) X^{n-1} + \dots + \det A.$$

### Exemple 11.

Voici le cas  $n = 2$ . Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . On a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - bc = X^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{tr} A} X + \underbrace{ad-bc}_{\det A}.$$

### Exemple 12.

Si  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  sont les valeurs propres de  $A$ , alors le polynôme caractéristique s'écrit aussi

$$\chi_A(X) = (-1)^n (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \cdots (X - \lambda_n).$$

En développant cette expression on trouve :

$$\chi_A(X) = (-1)^n \left( X^n - (\lambda_1 + \dots + \lambda_n) X^{n-1} + \dots + (-1)^n (\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n) \right).$$

En identifiant ce polynôme avec l'expression de la proposition 4, on obtient la proposition 3.

Voici les grandes lignes de la preuve de la proposition 4.

*Démonstration.* Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , on a

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} a_{11} - X & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - X & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - X \end{vmatrix}.$$

On a alors :

- Le polynôme  $\chi_A(X)$  est de degré  $n$ .
- Les termes de degré  $n$  et  $n-1$  proviennent du produit

$$(a_{11} - X) \cdots (a_{nn} - X) = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1} (\text{tr} A) X^{n-1} + \dots$$

- Le terme constant, quant à lui, est donné par  $\chi_A(0) = \det A$ .

□



## 2.5. Matrice compagnon

Est-ce que n'importe quel polynôme peut être réalisé comme polynôme caractéristique ? La réponse est oui !

### Proposition 5.

Soit  $P(X) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_1X + c_0 \in \mathbb{K}[X]$ . Soit  $A$  la **matrice compagnon** du polynôme  $P$  :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

Alors

$$\chi_A(X) = (-1)^n P(X).$$

*Démonstration.* La preuve est par récurrence sur  $n \geq 1$ .

**Initialisation.** Si  $n = 1$  alors la matrice compagnon est la matrice de taille  $1 \times 1$ ,  $A = (-c_0)$ . Ainsi  $\det(A - XI_1) = \det(-c_0 - X) = -X - c_0 = -P(X)$ .

**Hérédité.** Fixons  $n \geq 2$  et supposons la formule vraie pour des matrices compagnons de taille  $(n-1) \times (n-1)$ .

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \det(A - XI_n) \\ &= \begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - c_{n-1} \end{vmatrix} && \text{on développe par rapport à la première ligne :} \\ &= (-X) \underbrace{\begin{vmatrix} -X & 0 & \cdots & 0 & -c_1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -X & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -X - c_{n-1} \end{vmatrix}}_{\text{polynôme caractéristique associé à une matrice compagnon de taille } (n-1) \times (n-1)} + (-1)^n c_0 \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -X & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -X \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{=1} \\ &= (-X) \left( (-1)^{n-1} (X^{n-1} + c_{n-1}X^{n-2} + \dots + c_1) \right) + (-1)^n c_0 \times 1 && \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^n (X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \dots + c_0) \\ &= (-1)^n P(X) \end{aligned}$$

**Conclusion.** Par le principe de récurrence, la proposition est vérifiée pour tout  $n \geq 1$ . □

**Exemple 13.**

Soit  $A$  la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

alors  $\chi_A(X) = (-1)^n(X^n - 1)$ . Les valeurs propres de  $A$  sont donc les racines  $n$ -ème de l'unité.

### Mini-exercices.

1. Calculer le polynôme caractéristique des matrices suivantes. En déduire les valeurs propres.  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -7 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ .
2. Calculer, à la main, les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice  $A$  de taille  $3 \times 3$  :  
 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ .
3. Trouver plusieurs matrices de taille  $2 \times 2$ , dont la somme des valeurs propres fait 6 et le produit des valeurs propres fait 2.
4. Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont le polynôme caractéristique est  $(X - 1)^2(X^2 + X + 1)$ . Trouver une matrice, ni diagonale ni triangulaire, dont les valeurs propres sont  $\{0, 1, -1, i, -i\}$ .

## 3. Diagonaliser à la main

Nous avons vu que la matrice  $A$ , et une matrice semblable  $P^{-1}AP$ , ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres. Nous allons voir un critère simple (mais pas le plus général) pour obtenir une matrice  $P^{-1}AP$  qui est diagonale, les coefficients diagonaux étant les valeurs propres.

### 3.1. Matrice diagonalisable

#### Définition 3.

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est **diagonalisable** sur  $\mathbb{K}$ , s'il existe une matrice  $P \in M_n(\mathbb{K})$  inversible, telle que  $P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale.

Il y a beaucoup d'intérêt à se ramener à une matrice diagonale. Voici juste une application.

#### Exemple 14.

Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

Alors

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad D^k = \begin{pmatrix} (-5)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

La matrice  $D$  étant diagonale, la matrice  $A$  est diagonalisable. Calculons maintenant  $A^k$ .

Comme  $D = P^{-1}AP$  alors  $A = PDP^{-1}$ , donc

$$A^k = (PDP^{-1})^k = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1})}_{k \text{ occurrences}} = PD^kP^{-1}$$

D'où

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} \times 2^k + \frac{1}{7} \times (-5)^k & \frac{2}{7} \times 2^k - \frac{2}{7} \times (-5)^k \\ \frac{3}{7} \times 2^k - \frac{3}{7} \times (-5)^k & \frac{1}{7} \times 2^k + \frac{6}{7} \times (-5)^k \end{pmatrix}$$

### 3.2. Un critère pour diagonaliser

Comment trouver cette matrice  $P$  qui permet de diagonaliser ?

Nous allons donner un critère sous l'hypothèse que la matrice admette  $n$  valeurs propres distinctes. Nous verrons des critères plus puissants dans les chapitres suivants.

**Proposition 6.**

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice. Supposons qu'il existe  $n$  valeurs propres distinctes  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Soit  $X_1, \dots, X_n$  les vecteurs propres associés. Alors :

- La matrice  $A$  est diagonalisable.
- Si on note  $P$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les  $(X_1, \dots, X_n)$ . Alors  $D = P^{-1}AP$  est la matrice diagonale formée des valeurs propres.

*Démonstration.*

- Par le théorème 1, la famille  $(X_1, \dots, X_n)$  est une famille libre, car les valeurs propres sont distinctes. Comme cette famille possède  $n$  éléments, c'est une base de  $\mathbb{K}^n$ .
- La matrice  $P$  est inversible car ses vecteurs colonnes forment une base de  $\mathbb{K}^n$ . On pose  $D = P^{-1}AP$ .

- Notons  $(Y_1, \dots, Y_n)$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$  :  $Y_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ . Noter que la multiplication  $MY_i$  renvoie la  $i$ -ème colonne de la matrice  $M$ . En particulier  $PY_i = X_i$  et donc  $Y_i = P^{-1}X_i$ .

Calculons  $DY_i$  pour chaque  $1 \leq i \leq n$  :

$$\begin{aligned} DY_i &= (P^{-1}AP)Y_i = (P^{-1}A)PY_i \\ &= (P^{-1}A)X_i = P^{-1}(AX_i) \\ &= P^{-1}(\lambda_i X_i) = \lambda_i P^{-1}X_i \\ &= \lambda_i Y_i \end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que  $X_i$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_i$ . Ainsi on vient de

prouver que la  $i$ -ème colonne de  $D$ , qui est  $DY_i$ , est aussi  $\lambda_i Y_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ .

La matrice  $D$  est donc bien la matrice diagonale dont les coefficients sont les  $\lambda_i$  :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

### 3.3. Méthode pour diagonaliser

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$  une matrice carrée  $n \times n$ . Pour essayer de la diagonaliser :

1. On calcule d'abord son polynôme caractéristique  $\chi_A(X)$ .
2. On cherche les racines de  $\chi_A(X)$ , ce sont les valeurs propres de  $A$ .

On suppose ici que l'on a trouvé  $n$  valeurs propres distinctes :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

3. Pour chaque valeur propre  $\lambda_i$  de  $A$ , on cherche un vecteur propre  $X_i$ .

4. Soit  $P$  la matrice dont les vecteurs colonnes sont les  $(X_1, \dots, X_n)$ . Alors  $D = P^{-1}AP$  est la matrice diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### 3.4. Exemples

#### Exemple 15.

Diagonalisons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Pour cela, on détermine ses valeurs propres :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(1 - \lambda) + 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

2. Ainsi, la matrice  $A$  admet deux valeurs propres distinctes, qui sont  $\lambda_1 = 2$  et  $\lambda_2 = 3$ . Par la proposition 6, elle est diagonalisable.
3. Déterminons une base de vecteurs propres. Tout d'abord pour  $\lambda_1 = 2$  :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \iff x = y,$$

d'où le vecteur propre  $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  associé à la valeur propre  $\lambda_1 = 2$ . Pour la valeur propre  $\lambda_2 = 3$  :

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff x = 2y,$$

d'où le vecteur propre  $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = 3$ .

4. Dans la base  $(X_1, X_2)$ , la matrice s'écrit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Plus précisément  $D = P^{-1}AP$ , où

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

#### Exemple 16.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Démontrons que  $A$  est diagonalisable et trouvons une matrice  $P$  telle que  $P^{-1}AP$  soit diagonale.

1. Commençons par calculer le polynôme caractéristique de  $A$  :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 5 & -4-X & 0 \\ 6 & -6 & 2-X \end{vmatrix} = -(X-1)(X+4)(X-2)$$

2. Les racines du polynôme caractéristique, et donc les valeurs propres de  $A$  sont les réels  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -4$  et  $\lambda_3 = 2$ . Il y a trois valeurs propres distinctes, par la proposition 6, la matrice est donc diagonalisable.

3. Déterminons les vecteurs propres associés. Par exemple pour  $\lambda_2 = -4$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 0 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ -4y \\ -4z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x = 0 \\ 5x = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc  $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$ . D'où le vecteur propre  $X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  associé à la valeur propre  $\lambda_2 = -4$ .

De même on trouverait  $X_1$  (associé à  $\lambda_1 = 1$ ) et  $X_3$  (associé à  $\lambda_3 = 2$ ) :

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. La base  $(X_1, X_2, X_3)$  diagonalise la matrice  $A$ , c'est-à-dire  $D = P^{-1}AP$  avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Mini-exercices.

1. Soit  $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -7 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ . Calculer les valeurs propres de  $A$ . Trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre. Trouver une matrice  $P$  tel que  $D = P^{-1}AP$  soit une matrice diagonale. Calculer  $P^{-1}$ . Calculer  $D^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). En déduire  $A^k$ .
2. Même exercice avec  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ .
3. Dans le cas d'une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  ayant  $n$  valeurs propres distinctes, donner une nouvelle preuve des assertions : « La somme des valeurs propres vaut  $\text{tr}A$ . » et « Le produit des valeurs propres vaut  $\det A$ . »
4. Soit  $T$  une matrice triangulaire, non diagonale, dont les coefficients sur la diagonale sont tous 1. Montrer qu'elle n'est pas diagonalisable. Indications : (a) Quelles sont les valeurs propres de  $T$  ? (b) Si  $T$  était diagonalisable en une matrice  $D$ , que vaudrait  $D$  ? (c) À quoi pourrait être semblable ce  $D$  ?

### Auteurs du chapitre

D'après un cours de Sandra Delaunay et un cours d'Alexis Tchoudjem.

Revu et augmenté par Arnaud Bodin.

Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.