L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Vidéo ■ partie 1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$
Vidéo ■ partie 2. Exemples d'applications linéaires
Vidéo ■ partie 3. Propriétés des applications linéaires

Ce chapitre est consacré à l'ensemble $\mathbb{R}^n$ vu comme espace vectoriel. Il peut être vu de plusieurs façons :

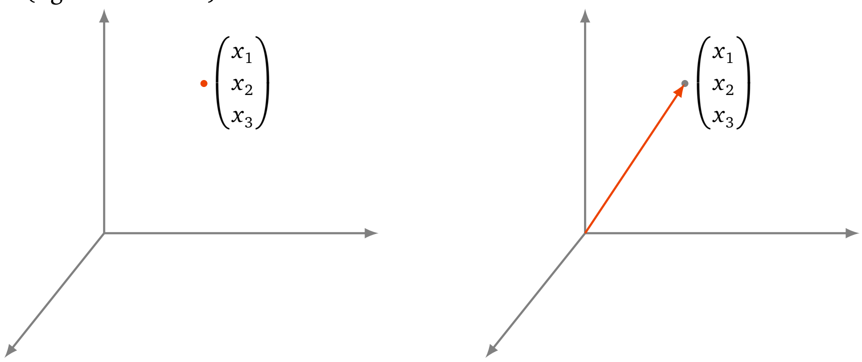
- un cours minimal sur les espaces vectoriels pour ceux qui n'auraient besoin que de $\mathbb{R}^n$,
- une introduction avant d'attaquer le cours détaillé sur les espaces vectoriels,
- une source d'exemples à lire en parallèle du cours sur les espaces vectoriels.

1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1.1. Opérations sur les vecteurs

- L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est souvent représenté par une droite. C'est un espace de dimension 1.
- Le plan est formé des couples $\binom{x_1}{x_2}$ de nombres réels. Il est noté $\mathbb{R}^2$. C'est un espace à deux dimensions.
- L'espace de dimension 3 est constitué des triplets de nombres réels $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Il est noté $\mathbb{R}^3$.

  Le symbole $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ a deux interprétations géométriques : soit comme un point de l'espace (figure de gauche), soit comme un vecteur (figure de droite) :



On généralise ces notions en considérant des espaces de dimension n pour tout entier positif $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ Les éléments de l'espace de dimension n sont les n-uples $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de nombres réels. L'espace de dimension n est noté $\mathbb{R}^n$.

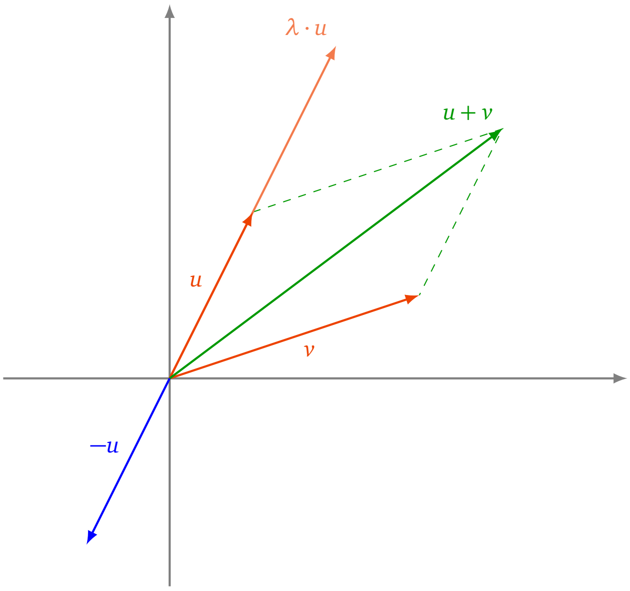
Comme en dimensions 2 et 3, le n-uple $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dénote aussi bien un point qu'un vecteur de l'espace de dimension n.

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.

- ***Somme de deux vecteurs.*** Leur somme est par définition le vecteur $u+v=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\ \vdots\\ u_n+v_n\end{pmatrix}$.
- ***Produit d'un vecteur par un scalaire.*** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ (appelé un *scalaire*) : $\lambda \cdot u=\begin{pmatrix}\lambda u_1\\ \vdots\\ \lambda u_n\end{pmatrix}$.
- Le ***vecteur nul*** de $\mathbb{R}^n$ est le vecteur $0=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.
- L'***opposé*** du vecteur $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$ est le vecteur $-u=\begin{pmatrix}-u_1\\ \vdots\\ -u_n\end{pmatrix}$.

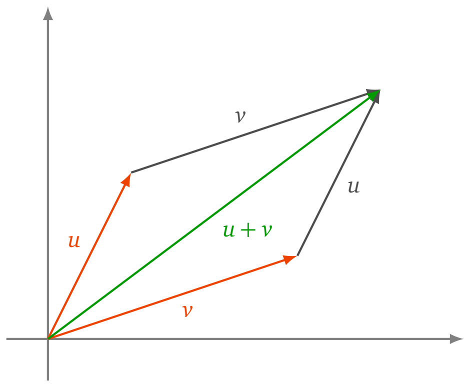
Voici des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ (ici $\lambda = 2$) :



Dans un premier temps, vous pouvez noter $\vec{u},\vec{v},\vec{0}$ au lieu de u, v, 0. Mais il faudra s'habituer rapidement à la notation sans flèche. De même, si λ est un scalaire et u un vecteur, on notera souvent λu au lieu de $\lambda \cdot u$.

Théorème 1.
Soient $u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}$, $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}$ *et* $w=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$ *des vecteurs de* $\mathbb{R}^n$ *et* $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$. *Alors :*

1. $u+v=v+u$
2. $u+(v+w)=(u+v)+w$
3. $u+0=0+u=u$
4. $u+(-u)=0$
5. $1\cdot u=u$
6. $\lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u$
7. $\lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$
8. $(\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$



Chacune de ces propriétés découle directement de la définition de la somme et de la multiplication par un scalaire. Ces huit propriétés font de $\mathbb{R}^n$ un *espace vectoriel*. Dans le cadre général, ce sont ces huit propriétés qui définissent ce qu'est un espace vectoriel.

1.2. Représentation des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Soit $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$. On l'appelle *vecteur colonne* et on considère naturellement u comme une matrice de taille $n \times 1$. Parfois, on rencontre aussi des *vecteurs lignes* : on peut voir le vecteur u comme une matrice $1 \times n$, de la forme $(u_1, \dots, u_n)$. En fait, le vecteur ligne correspondant à u est le transposé u^T du vecteur colonne u.
Les opérations de somme et de produit par un scalaire définies ci-dessus pour les vecteurs coïncident parfaitement avec les opérations définies sur les matrices :

$$u+v = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \lambda u = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix}.$$

1.3. Produit scalaire

Soient $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On définit leur *produit scalaire* par

$$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

C'est un scalaire (un nombre réel). Remarquons que cette définition généralise la notion de produit scalaire dans le plan $\mathbb{R}^2$ et dans l'espace $\mathbb{R}^3$.
Une autre écriture :

$$\langle u \mid v \rangle = u^T \times v = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de taille $n \times p$, et $B = (b_{ij})$ une matrice de taille $p \times q$. Nous savons que l'on peut former le produit matriciel AB. On obtient une matrice de taille $n \times q$. L'élément d'indice ij de la matrice AB est

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}.$$

Remarquons que ceci est aussi le produit matriciel :

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{pj} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, c'est le produit scalaire du i-ème vecteur ligne de A avec le j-ème vecteur colonne de B. Notons $\ell_1, \ldots, \ell_n$ les vecteurs lignes formant la matrice A, et $c_1, \ldots, c_q$ les vecteurs colonnes formant la matrice B. On a alors

$$AB = \begin{pmatrix} \langle \ell_1 \mid c_1 \rangle & \langle \ell_1 \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_1 \mid c_q \rangle \\ \langle \ell_2 \mid c_1 \rangle & \langle \ell_2 \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_2 \mid c_q \rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \langle \ell_n \mid c_1 \rangle & \langle \ell_n \mid c_2 \rangle & \cdots & \langle \ell_n \mid c_q \rangle \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Faire un dessin pour chacune des 8 propriétés qui font de $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel.
2. Faire la même chose pour $\mathbb{R}^3$.
3. Montrer que le produit scalaire vérifie $\langle u \mid v \rangle = \langle v \mid u \rangle$, $\langle u+v \mid w \rangle = \langle u \mid w \rangle + \langle v \mid w \rangle$, $\langle \lambda u \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle$ pour tout $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Soit $u \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $\langle u \mid u \rangle \geqslant 0$. Montrer $\langle u \mid u \rangle = 0$ si et seulement si u est le vecteur nul.

2. Exemples d'applications linéaires

Soient

$$f_1 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_2 : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \ldots \qquad f_n : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$$

n fonctions de p variables réelles à valeurs réelles ; chaque f_i est une fonction :

$$f_i : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto f_i(x_1, \ldots, x_p)$$

On construit une application

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

définie par

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \big(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p)\big).$$

2.1. Applications linéaires

Définition 2.
Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(x_1, \ldots, x_p) = (y_1, \ldots, y_n)$ est dite une ***application linéaire*** si

$$\begin{cases} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ y_n & = & a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p\,. \end{cases}$$

En notation matricielle, on a

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix},$$

ou encore, si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice (a_{ij}),

$$\boxed{f(X) = AX.}$$

Autrement dit, une application linéaire $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ peut s'écrire $X \mapsto AX$. La matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est appelée la ***matrice de l'application linéaire*** f.

Remarque.

- On a toujours $f(0,\ldots,0) = (0,\ldots,0)$. Si on note 0 pour le vecteur nul dans $\mathbb{R}^p$ et aussi dans $\mathbb{R}^n$, alors une application linéaire vérifie toujours $f(0) = 0$.
- Le nom complet de la matrice A est : la matrice de l'application linéaire f de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ vers la base canonique de $\mathbb{R}^n$!

Exemple 1.
La fonction $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$\begin{cases} y_1 &= -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 7x_4 \\ y_2 &= 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 \\ y_3 &= 7x_1 - 3x_2 + 9x_3 \end{cases}$$

s'exprime sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 3 \\ 7 & -3 & 9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Exemple 2.

- Pour l'application linéaire identité $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto (x_1,\ldots,x_n)$, sa matrice associée est l'identité I_n (car $I_n X = X$).
- Pour l'application linéaire nulle $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, $(x_1,\ldots,x_p) \mapsto (0,\ldots,0)$, sa matrice associée est la matrice nulle $0_{n,p}$ (car $0_{n,p} X = 0$).

2.2. Exemples d'applications linéaires

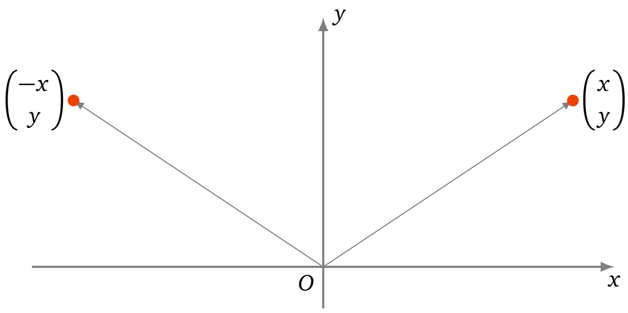
Réflexion par rapport à l'axe (Oy)

La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées (Oy), et sa matrice est

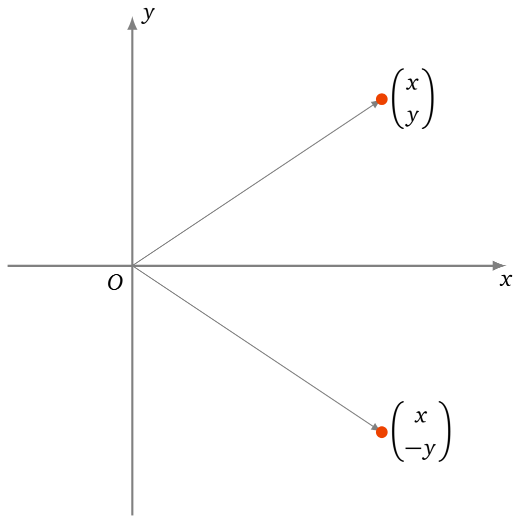
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{car} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}.$$



Réflexion par rapport à l'axe (Ox)

La réflexion par rapport à l'axe des abscisses (Ox) est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



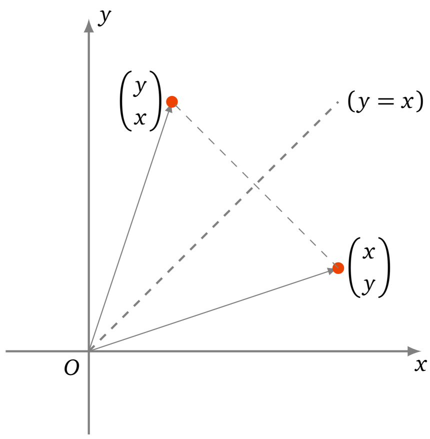
Réflexion par rapport à la droite $(y = x)$

La réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ est donnée par

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



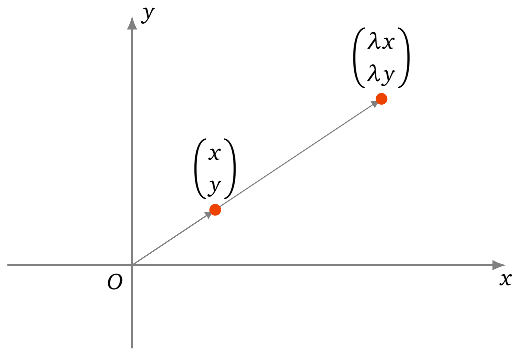
Homothéties

L'homothétie de rapport λ centrée à l'origine est :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

On peut donc écrire $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Alors la matrice de l'homothétie est :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$



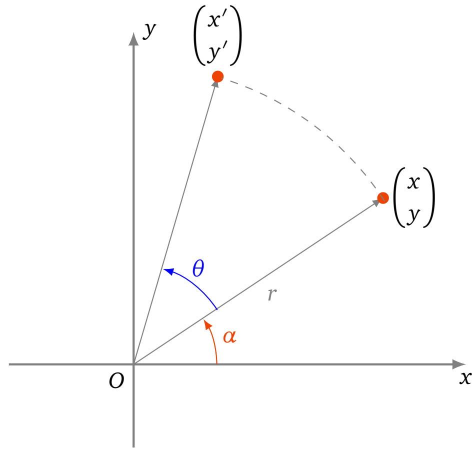
Remarque.
La translation de vecteur $\binom{u_0}{v_0}$ est l'application

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}u_0\\ v_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+u_0\\ y+v_0\end{pmatrix}.$$

Si c'est une translation de vecteur non nul, c'est-à-dire $\binom{u_0}{v_0} \neq \binom{0}{0}$, alors ***ce n'est pas*** une application linéaire, car $f\binom{0}{0} \neq \binom{0}{0}$.

Rotations

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine.



Si le vecteur $\binom{x}{y}$ fait un angle α avec l'horizontale et que le point $\binom{x}{y}$ est à une distance r de l'origine, alors

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\sin\alpha \end{cases}.$$

Si $\binom{x'}{y'}$ dénote l'image de $\binom{x}{y}$ par la rotation d'angle θ, on obtient :

$$\begin{cases} x' = r\cos(\alpha+\theta) \\ y' = r\sin(\alpha+\theta) \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x' = r\cos\alpha\cos\theta - r\sin\alpha\sin\theta \\ y' = r\cos\alpha\sin\theta + r\sin\alpha\cos\theta \end{cases}$$

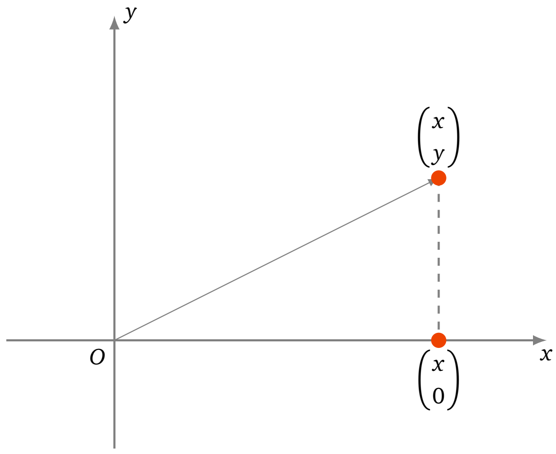
(où l'on a appliqué les formules de trigonométrie pour $\cos(\alpha+\theta)$ et $\sin(\alpha+\theta)$).
On aboutit à

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

Autrement dit, la rotation d'angle θ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

Projections orthogonales



L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur l'axe (Ox). C'est une application linéaire donnée par la matrice

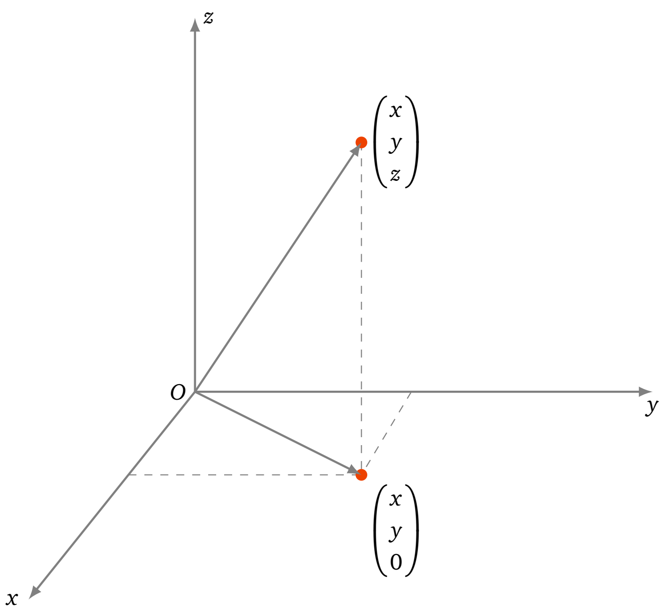
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

est la projection orthogonale sur le plan (Oxy) et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



De même, la projection orthogonale sur le plan (Oxz) est donnée par la matrice de gauche ; la projection orthogonale sur le plan (Oyz) par la matrice de droite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Réflexions dans l'espace

L'application

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$$

est la réflexion par rapport au plan (Oxy). C'est une application linéaire et sa matrice est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De même, les réflexions par rapport aux plans (Oxz) (à gauche) et (Oyz) (à droite) sont données par les matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mini-exercices.

1. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer et dessiner l'image par f de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, puis $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et plus généralement de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. Dessiner l'image par f du carré de sommets $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$. Dessiner l'image par f du cercle inscrit dans ce carré.
2. Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et soit f l'application linéaire associée. Calculer l'image par f de $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et plus généralement de $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right)$.
3. Écrire la matrice de la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{4}$ centrée à l'origine. Idem dans l'espace avec la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ d'axe (Ox).
4. Écrire la matrice de la réflexion du plan par rapport à la droite $(y = -x)$. Idem dans l'espace avec la réflexion par rapport au plan d'équation $(y = -x)$.
5. Écrire la matrice de la projection orthogonale de l'espace sur l'axe (Oy).

3. Propriétés des applications linéaires

3.1. Composition d'applications linéaires et produit de matrices

Soient

$$f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$

deux applications linéaires. Considérons leur composition :

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \qquad f \circ g : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

L'application $f \circ g$ est une application linéaire. Notons :

- $A = \mathrm{Mat}(f) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ la matrice associée à f,
- $B = \mathrm{Mat}(g) \in M_{p,q}(\mathbb{R})$ la matrice associée à g,
- $C = \mathrm{Mat}(f \circ g) \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ la matrice associée à $f \circ g$.

On a pour un vecteur $X \in \mathbb{R}^q$:

$$(f \circ g)(X) = f\big(g(X)\big) = f\big(BX\big) = A(BX) = (AB)X.$$

Donc la matrice associée à $f \circ g$ est $C = AB$.
Autrement dit, la matrice associée à la composition de deux applications linéaires est égale au produit de leurs matrices :

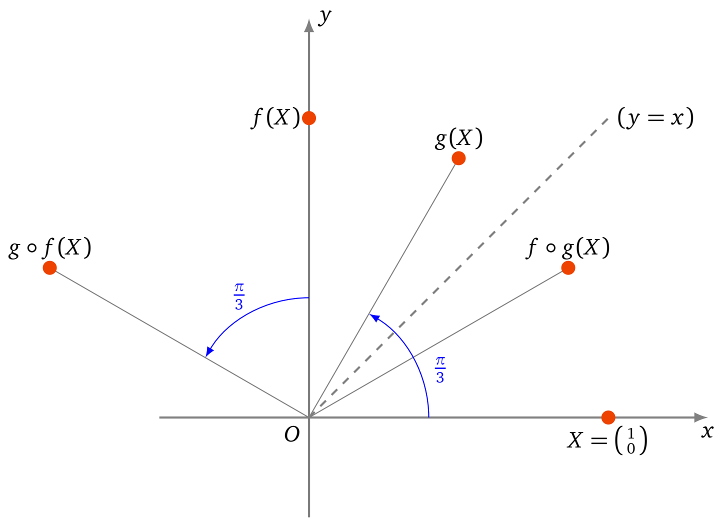
$$\boxed{\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)}$$

En fait le produit de matrices, qui au premier abord peut sembler bizarre et artificiel, est défini exactement pour vérifier cette relation.

Exemple 3.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$ (centrée à l'origine). Les matrices sont

$$A = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Voici pour $X = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ les images $f(X)$, $g(X)$, $f \circ g(X)$, $g \circ f(X)$:



Alors

$$C = \mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Notons que si l'on considère la composition $g \circ f$ alors

$$D = \mathrm{Mat}(g \circ f) = \mathrm{Mat}(g) \times \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Les matrices $C = AB$ et $D = BA$ sont distinctes, ce qui montre que la composition d'applications linéaires, comme la multiplication des matrices, n'est pas commutative en général.

3.2. Application linéaire bijective et matrice inversible

Théorème 2.
Une application linéaire $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective si et seulement si sa matrice associée $A = \mathrm{Mat}(f) \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible.

L'application f est définie par $f(X) = AX$. Donc si f est bijective, alors d'une part $f(X) = Y \iff X = f^{-1}(Y)$, mais d'autre part $AX = Y \iff X = A^{-1}Y$. Conséquence : la matrice de f^{-1} est A^{-1}.

Corollaire 1.
Si f est bijective, alors

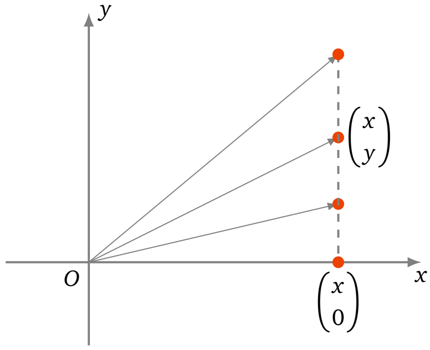
$$\boxed{\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}(f)\big)^{-1}.}$$

Exemple 4.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ. Alors $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ est la rotation d'angle $-\theta$.
On a

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \big(\mathrm{Mat}(f)\big)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la projection sur l'axe (Ox). Alors f n'est pas injective. En effet, pour x fixé et tout $y \in \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. L'application f n'est pas non plus surjective : ceci se vérifie aisément car aucun point en-dehors de l'axe (Ox) n'est dans l'image de f.



La matrice de f est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; elle n'est pas inversible.

La preuve du théorème 2 est une conséquence directe du théorème suivant, vu dans le chapitre sur les matrices :

Théorème 3.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
(i) La matrice A est inversible.
(ii) Le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ a une unique solution $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.
(iii) Pour tout second membre Y, le système linéaire $AX = Y$ a une unique solution X.

Voici donc la preuve du théorème 2.

Démonstration.
- Si A est inversible, alors pour tout vecteur Y le système $AX = Y$ a une unique solution X, autrement dit pour tout Y, il existe un unique X tel que $f(X) = AX = Y$. f est donc bijective.
- Si A n'est pas inversible, alors il existe un vecteur X non nul tel que $AX = 0$. En conséquence on a $X \neq 0$ mais $f(X) = f(0) = 0$. f n'est pas injective donc pas bijective.

□

3.3. Caractérisation des applications linéaires

Théorème 4.
Une application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire si et seulement si pour tous les vecteurs u, v de $\mathbb{R}^p$ et pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
(i) $f(u+v) = f(u) + f(v)$,
(ii) $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

Dans le cadre général des espaces vectoriels, ce sont ces deux propriétés (i) et (ii) qui définissent une application linéaire.

Définition 3.
Les vecteurs

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad e_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont appelés les *vecteurs de la base canonique* de $\mathbb{R}^p$.

La démonstration du théorème impliquera :

Corollaire 2.
Soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire, et soient $e_1, \dots, e_p$ les vecteurs de base canonique de $\mathbb{R}^p$. Alors la matrice de f (dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}^n$) est donnée par

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_p) \end{pmatrix} ;$$

autrement dit les vecteurs colonnes de $\mathrm{Mat}(f)$ *sont les images par f des vecteurs de la base canonique $(e_1, \dots, e_p)$.*

Exemple 6.
Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$\begin{cases} y_1 = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ y_2 = -x_1 - 4x_2 \\ y_3 = 5x_1 + x_2 + x_3 \\ y_4 = 3x_2 + 2x_3 . \end{cases}$$

Calculons les images des vecteurs de la base canonique $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)$:

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\\5\\0\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-4\\1\\3\end{pmatrix} \qquad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix}.$$

Donc la matrice de f est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemple 7.
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la réflexion par rapport à la droite $(y = x)$ et soit g la rotation du plan d'angle $\frac{\pi}{6}$ centrée à l'origine. Calculons la matrice de l'application $f \circ g$. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est formée des vecteurs $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.

$$f \circ g\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} \qquad f \circ g\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Donc la matrice de $f \circ g$ est :

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Voici la preuve du théorème 4.

Démonstration. Supposons $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linéaire, et soit A sa matrice. On a $f(u+v) = A(u+v) = Au + Av = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = A(\lambda u) = \lambda Au = \lambda f(u)$.
Réciproquement, soit $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application qui vérifie (i) et (ii). Nous devons construire une matrice A telle que $f(u) = Au$. Notons d'abord que (i) implique que $f(v_1 + v_2 + \cdots + v_r) = f(v_1) + f(v_2) + \cdots + f(v_r)$. Notons $(e_1, \dots, e_p)$ les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Soit A la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont

$$f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_p).$$

$$\text{Pour} \quad X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots \\x_p\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p, \qquad \text{alors} \qquad X = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p$$

et donc

$$\begin{aligned}
AX &= A(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p) \\
&= Ax_1e_1 + Ax_2e_2 + \cdots + Ax_pe_p \\
&= x_1Ae_1 + x_2Ae_2 + \cdots + x_pAe_p \\
&= x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + \cdots + x_pf(e_p) \\
&= f(x_1e_1) + f(x_2e_2) + \cdots + f(x_pe_p) \\
&= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_pe_p) = f(X).
\end{aligned}$$

On a alors $f(X) = AX$, et f est bien une application linéaire (de matrice A). □

Mini-exercices.

1. Soit f la réflexion du plan par rapport à l'axe (Ox) et soit g la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ centrée à l'origine. Calculer la matrice de $f \circ g$ de deux façons différentes (produit de matrices et image de la base canonique). Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse. Interprétation géométrique. Même question avec $g \circ f$.
2. Soit f la projection orthogonale de l'espace sur le plan (Oxz) et soit g la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'axe (Oy). Calculer la matrice de $f \circ g$ de deux façons différentes (produit de matrices et image de la base canonique). Cette matrice est-elle inversible ? Si oui, calculer l'inverse. Interprétation géométrique. Même question avec $g \circ f$.

Auteurs du chapitre

- D'après un cours de Eva Bayer-Fluckiger, Philippe Chabloz, Lara Thomas de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne,
- révisé et reformaté par Arnaud Bodin, relu par Vianney Combet.