Intégrales impropres

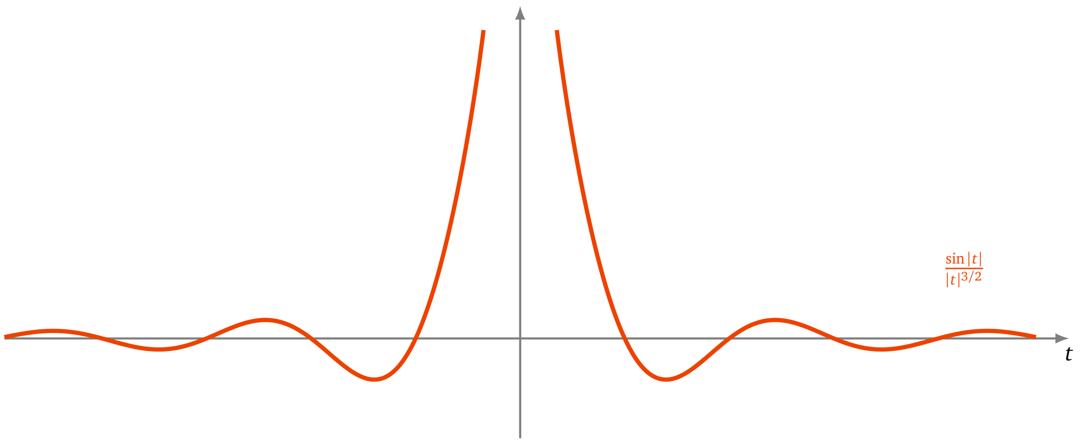
Vidéo ■ partie 1. Définitions et premières propriétés
Vidéo ■ partie 2. Fonctions positives
Vidéo ■ partie 3. Fonctions oscillantes
Vidéo ■ partie 4. Intégrales impropres sur un intervalle borné
Vidéo ■ partie 5. Intégration par parties - Changement de variable

1. Définitions et premières propriétés

La plupart des intégrales que vous rencontrerez ne sont pas des aires de domaines bornés du plan. Nous allons apprendre ici à calculer les intégrales de domaines non bornés, soit parce que l'intervalle d'intégration est infini (allant jusqu'à $+\infty$ ou $-\infty$), soit parce que la fonction à intégrer tend vers l'infini aux bornes de l'intervalle. Pour assimiler ce chapitre, vous avez juste besoin d'une petite révision des techniques de calcul des primitives, et d'une bonne compréhension de la notion de limite.

1.1. Points incertains

Considérons par exemple la fonction f qui à $t \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ associe $f(t) = \frac{\sin|t|}{|t|^{\frac{3}{2}}}$. Comment donner un sens à l'intégrale de f sur $\mathbb{R}$?



- On commence d'abord par identifier les *points incertains*, soit $+\infty$, soit $-\infty$ d'une part, et d'autre part le ou les points au voisinage desquels la fonction n'est pas bornée ($t = 0$ dans notre exemple).
- On découpe ensuite chaque intervalle d'intégration en autant d'intervalles qu'il faut pour que chacun d'eux ne contienne qu'*un seul point incertain*, placé à l'une des deux bornes.
- Nous souhaitons une définition qui respecte la relation de Chasles. Ainsi l'intégrale sur l'intervalle complet est la somme des intégrales sur les intervalles du découpage.
- Dans l'exemple de la fonction $f(t) = \frac{\sin|t|}{|t|^{\frac{3}{2}}}$ ci-dessus, il faut découper les deux intervalles de définition $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ en 4 sous-intervalles : 2 pour isoler $-\infty$ et $+\infty$, et 2 autres pour le point incertain 0.

- On pourra écrire pour cet exemple :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{-1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
- Le seul but est d'isoler les difficultés : les choix de -1 et 1 comme points de découpage sont arbitraires (par exemple -3 et 10 auraient convenu tout aussi bien).

1.2. Convergence/divergence

Par ce découpage, et par changement de variable $t \mapsto -t$, on se ramène à des intégrales de deux types.

1. Intégrale sur $[a,+\infty[$.
2. Intégrale sur $]a,b]$, avec la fonction non bornée en a.

Nous devons donc définir une intégrale, appelée ***intégrale impropre***, dans ces deux cas.

Définition 1. 1. Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite, lorsque x tend vers $+\infty$, de la primitive $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :
$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{1}$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale ***diverge***.

2. Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** si la limite à droite, lorsque x tend vers a, de $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Si c'est le cas, on pose :
$$\int_a^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{2}$$
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale ***diverge***.

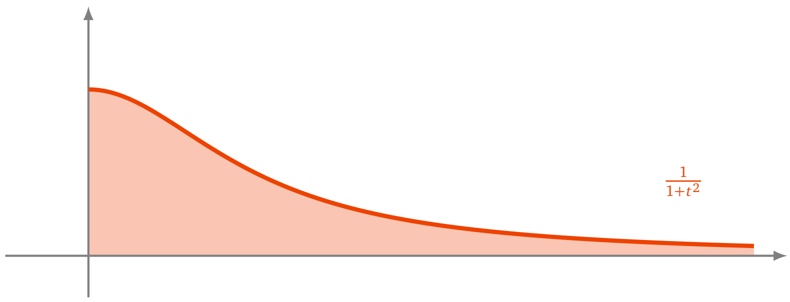
Remarque. • Convergence équivaut donc à limite finie. Divergence signifie soit qu'il n'y a pas de limite, soit que la limite est infinie.

- Observons que la deuxième définition est cohérente avec l'intégrale d'une fonction qui serait continue sur $[a,b]$ tout entier (au lieu de $]a,b]$). On sait que la primitive $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction continue. Par conséquent, l'intégrale usuelle $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est aussi la limite de $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ (lorsque $x \to a^+$). Dans ce cas, les deux intégrales coïncident.

1.3. Exemples

Quand on peut calculer une primitive $F(x)$ de la fonction à intégrer (par exemple $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$), l'étude de la convergence se ramène à un calcul de limite de $F(x)$. Voici plusieurs exemples.

Exemple 1.
L'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge.}$$
En effet,
$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^x = \arctan x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}\,.$$
On pourra écrire :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}\,,$$
à condition de se souvenir que $\Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty}$ désigne une limite en $+\infty$.



Cela prouve que le domaine sous la courbe n'est pas borné, mais cependant son aire est finie !

Exemple 2.
Par contre, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{diverge.}$$

En effet,

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(1+t)\Big]_0^x = \ln(1+x) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty\,.$$

Exemple 3.
L'intégrale

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge.}$$

En effet,

$$\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = x - x\ln x - 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} (x - x\ln x - 1) = -1\,.$$

On pourra écrire :

$$\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_0^1 = -1\,.$$

Exemple 4.
Par contre, l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{diverge.}$$

En effet,

$$\int_x^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln t\Big]_x^1 = -\ln x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} -\ln x = +\infty\,.$$

1.4. Relation de Chasles

Lorsqu'elle converge, cette nouvelle intégrale vérifie les mêmes propriétés que l'intégrale de Riemann usuelle, à commencer par la relation de Chasles :

> **Proposition 1** (Relation de Chasles).
> *Soit* $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue et soit* $a' \in [a,+\infty[$. *Alors les intégrales impropres* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_{a'}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *sont de même nature. Si elles convergent, alors*
>
> $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a'}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.}$$

« Être de même nature » signifie que les deux intégrales sont convergentes en même temps ou bien divergentes en même temps.
Le relation de Chasles implique donc que la convergence ne dépend pas du comportement de la fonction sur des intervalles bornés, mais seulement de son comportement au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. La preuve découle de la relation de Chasles pour les intégrales usuelles, avec $a \leqslant a' \leqslant x$:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{a'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{a'}^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Puis on passe à la limite (lorsque $x \to +\infty$). □

Bien sûr, si on est dans le cas d'une fonction continue $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ avec $b' \in]a,b]$, alors on a un résultat similaire, et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{b'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{b'}^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas la convergence de l'intégrale ne dépend pas de b, mais seulement du comportement de f au voisinage de a.

1.5. Linéarité

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la linéarité des intégrales usuelles et des limites.

Proposition 2 (Linéarité de l'intégrale)**.**
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$, et λ,μ deux réels. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^{+\infty} \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Les mêmes relations sont valables pour les fonctions d'un intervalle $]a,b]$, non bornées en a.
Remarque : la réciprocité dans la linéarité est fausse, il est possible de trouver deux fonctions f,g telles que $\int_a^{+\infty} f+g$ converge, sans que $\int_a^{+\infty} f$, ni $\int_a^{+\infty} g$ convergent. Trouvez un tel exemple !

1.6. Positivité

Proposition 3 (Positivité de l'intégrale)**.**
Soient $f,g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ des fonctions continues, ayant une intégrale convergente.

$$\boxed{\text{Si} \quad f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t.}$$

En particulier, l'intégrale (convergente) d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0}$$

Une nouvelle fois, les mêmes relations sont valables pour les fonctions définies sur un intervalle $]a,b]$, non bornées en a, en prenant bien soin d'avoir $a < b$.

Remarque.
Si l'on ne souhaite pas distinguer les deux types d'intégrales impropres sur un intervalle $[a,+\infty[$ (ou $]-\infty,b]$) d'une part et $]a,b]$ (ou $[a,b[$) d'autre part, alors il est pratique de rajouter les deux extrémités à la droite numérique :

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty,+\infty\}$$

Ainsi l'intervalle $I = [a,b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$ désigne l'intervalle infini $[a,+\infty[$ (si $b = +\infty$) ou l'intervalle fini $[a,b[$ (si $b < +\infty$). De même pour un intervalle $I' =]a,b]$ avec $a = -\infty$ ou $a \in \mathbb{R}$.

1.7. Critère de Cauchy

On termine par une caractérisation de la convergence un peu plus délicate (qui peut être passée lors d'une première lecture).
Rappelons d'abord le critère de Cauchy pour les limites.
Rappel : Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe et est finie si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geqslant a \qquad \left(u, v \geqslant M \implies \left|f(u) - f(v)\right| < \epsilon\right).$$

Théorème 1 (Critère de Cauchy).
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ *une fonction continue. L'intégrale impropre* $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \geqslant a \qquad \left(u, v \geqslant M \implies \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \epsilon\right).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le rappel ci-dessus à la fonction $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et en notant que $\left|F(u) - F(v)\right| = \left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right|$. □

1.8. Cas de deux points incertains

On peut considérer les intégrales doublement impropres, c'est-à-dire lorsque les deux extrémités de l'intervalle de définition sont des points incertains. Il s'agit juste de se ramener à deux intégrales ayant chacune un seul point incertain.

Définition 2.
Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ***converge*** s'il existe $c \in]a, b[$ tel que les ***deux*** intégrales impropres $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. La valeur de cette intégrale doublement impropre est alors

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Les relations de Chasles impliquent que la nature et la valeur de cette intégrale doublement impropre ne dépendent pas du choix de c, avec $a < c < b$.

Attention ! Si une des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ ou bien $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Prenons l'exemple de $\int_{-x}^{+x} t\,\mathrm{d}t$ qui vaut toujours 0, pourtant $\int_{-\infty}^{+\infty} t\,\mathrm{d}t$ diverge ! En effet, quel que soit $c \in \mathbb{R}$, $\int_c^{+x} t\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2} - \frac{c^2}{2}$ tend vers $+\infty$ (lorsque $x \to +\infty$).

Exemple 5.
Est-ce que l'intégrale suivante converge ?

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

On choisit (au hasard) $c = 2$. Il s'agit de savoir si les deux intégrales

$$\int_{-\infty}^{2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} \quad \text{et} \quad \int_{2}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$$

convergent.
En notant qu'une primitive de $\frac{t}{(1+t^2)^2}$ est $-\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2}$, on obtient :

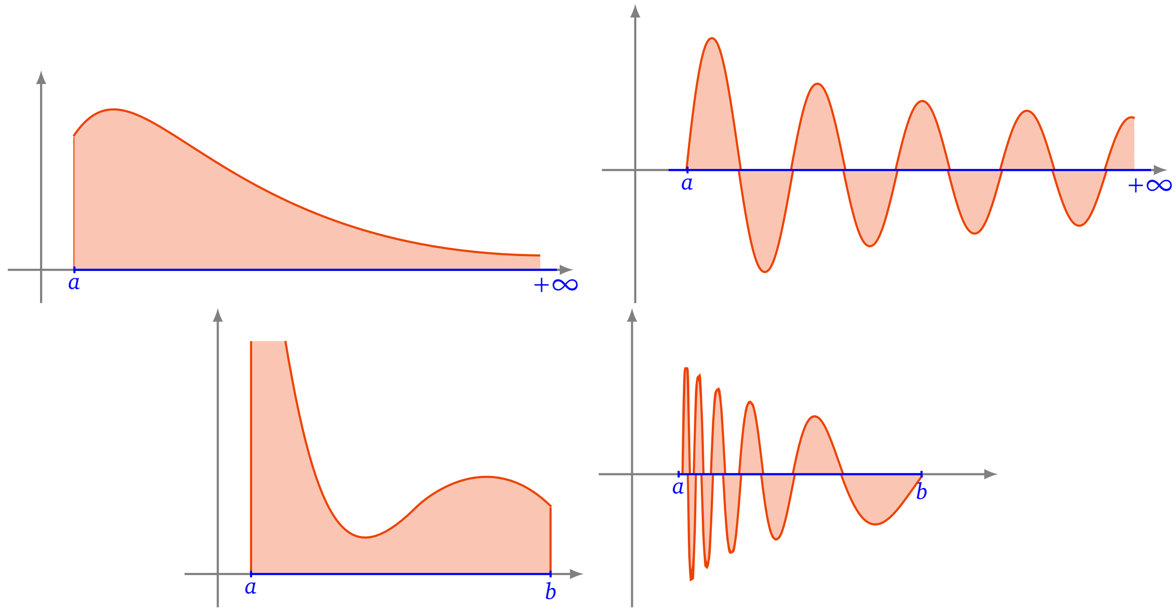
$$\int_x^2 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_x^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1+x^2}\right) \to -\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \to -\infty.$$

Donc $\int_{-\infty}^{2} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10}$.
De même

$$\int_2^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2} = -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+t^2}\right]_2^x = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{5}\right) \to +\frac{1}{10} \quad \text{lorsque } x \to +\infty.$$

Donc $\int_{2}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $+\frac{1}{10}$.
Ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}$ converge et vaut $-\frac{1}{10} + \frac{1}{10} = 0$. Ce n'est pas surprenant car la fonction est une fonction impaire.
Refaites les calculs pour une autre valeur de c et vérifiez que l'on obtient le même résultat.

On termine en expliquant le plan du reste du chapitre. Lorsque l'on ne sait pas calculer une primitive, on a recours à deux types de méthode : soit la fonction est de signe constant au voisinage du point incertain, soit elle change de signe une infinité de fois dans ce voisinage (on dit alors qu'elle « oscille »). Nous distinguerons aussi le cas où le point incertain est $\pm\infty$ ou bien une valeur finie. Il y a donc quatre cas distincts, selon le type du point incertain, et le signe, constant ou non, de la fonction à intégrer. Ces quatre types sont schématisés dans la figure suivante et leur étude fait l'objet des sections suivantes.



Différents types d'intégrales : intervalle non borné, fonction de signe constant ; intervalle non borné, fonction oscillante ; intervalle borné, fonction de signe constant ; intervalle borné, fonction oscillante.

Mini-exercices. 1. Pour chacune des intégrales suivantes, déterminer le point incertain, dire si l'intégrale converge, et si c'est le cas, calculer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \cos t\,dt \qquad \int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt \qquad \int_{-\infty}^{\ln 2} e^t\,dt$$

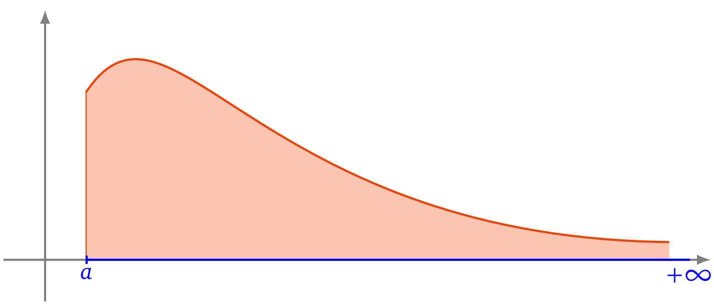
2. Même exercice pour ces intégrales ayant deux points incertains :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \qquad \int_{-\infty}^{1} \frac{dt}{(t-1)^2} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$$

3. Écrire la preuve de la linéarité des intégrales impropres. Même chose pour la positivité.

2. Fonctions positives

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$, où f est de signe constant au voisinage de $+\infty$. Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f s'il est négatif, nous supposerons que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $[a,+\infty[$.



Rappelons que, par définition,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Observons que si la fonction f est positive, alors la primitive $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante de x (car sa dérivée est $f(x)$). Quand x tend vers l'infini, ou bien $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, ou bien $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$.

2.1. Théorème de comparaison

Si on ne peut pas (ou si on ne veut pas) calculer une primitive de f, on étudie la convergence en comparant avec des intégrales dont la convergence est connue, grâce au théorème suivant.

Théorème 2.
Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $[a,+\infty[$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de $+\infty$:

$$\exists A \geqslant a \quad \forall t > A \qquad f(t) \leqslant g(t)\,.$$

1. *Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Démonstration. Comme nous l'avons observé, la convergence des intégrales ne dépend pas de la borne de gauche de l'intervalle, et nous pouvons nous contenter d'étudier $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Or en utilisant la positivité de l'intégrale, on obtient que, pour tout $x \geqslant A$,

$$\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Si $\int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une fonction croissante et majorée par $\int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$, donc convergente. Inversement, si $\int_A^x f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$, alors $\int_A^x g(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$ également. □

Voici une application typique du théorème 2 de comparaison.

Exemple 6.
Montrons que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge,}$$

quel que soit le réel α.

- Pour cela nous écrivons d'abord : $t^\alpha e^{-t} = t^\alpha e^{-t/2}\,e^{-t/2}$.
- On sait que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha e^{-t/2} = 0$, pour tout α, car l'exponentielle l'emporte sur les puissances de t.
- En particulier, il existe un réel $A > 0$ tel que :

$$\forall t > A \qquad t^\alpha e^{-t/2} \leqslant 1\,.$$

- En multipliant les deux membres de l'inégalité par $e^{-t/2}$ on obtient :

$$\forall t > A \qquad t^\alpha e^{-t} \leqslant e^{-t/2}\,.$$

- Or l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet :

$$\int_1^x e^{-t/2}\,\mathrm{d}t = \left[-2e^{-t/2}\right]_1^x = 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} 2e^{-1/2} - 2e^{-x/2} = 2e^{-1/2}\,.$$

- On peut donc appliquer le théorème 2 de comparaison : puisque $\int_1^{+\infty} e^{-t/2}\,\mathrm{d}t$ converge, on en déduit que $\int_1^{+\infty} t^\alpha e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge aussi.

2.2. Théorème des équivalents

Grâce au théorème 2 de comparaison, on peut remplacer la fonction à intégrer par un équivalent au voisinage de $+\infty$ pour étudier la convergence d'une intégrale.

Théorème 3 (Théorème des équivalents)**.**
Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $[a,+\infty[$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{g(t)}=1\,.$$

Alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Attention : il est important que f et g soient positives !
On notera le fait que f et g sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ par : $f(t) \underset{+\infty}{\sim} g(t)$.

Démonstration. Dire que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de $+\infty$, c'est dire que leur rapport tend vers 1, ou encore :

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists A>a \quad \forall t>A \qquad \left|\frac{f(t)}{g(t)}-1\right|<\epsilon\,,$$

soit encore :

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists A>a \quad \forall t>A \qquad (1-\epsilon)g(t)<f(t)<(1+\epsilon)g(t)\,.$$

Fixons $\epsilon<1$, et appliquons le théorème 2 de comparaison sur l'intervalle $[A,+\infty[$. Si l'intégrale $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_A^{+\infty}(1-\epsilon)g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, donc l'intégrale $\int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ aussi par linéarité.
Inversement, si $\int_A^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_A^{+\infty}(1+\epsilon)g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, donc $\int_A^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi. □

Exemple 7.
Est-ce que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty}\frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge ?}$$

Comme

$$\frac{t^5+3t+1}{t^3+4}e^{-t} \quad \underset{+\infty}{\sim} \quad t^2e^{-t}\,,$$

et que nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} t^2e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, alors notre intégrale converge.

2.3. Intégrales de Riemann

Pour l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive, l'utilisation des équivalents permet de se ramener à un catalogue d'intégrales dont la nature est connue. Les plus classiques sont les intégrales de Riemann et de Bertrand.
Une ***intégrale de Riemann*** est :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

où $\alpha>0$.
Dans ce cas, la primitive est explicite :

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{-\alpha+1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x & \text{si} \quad \alpha\neq 1\\[2mm] \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln t\right]_1^x & \text{si} \quad \alpha=1\end{cases}$$

On en déduit immédiatement la nature (convergente ou divergente) des intégrales de Riemann.

$$\boxed{\begin{array}{llll}\text{Si} \quad \alpha>1 & \text{alors} & \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t & \text{converge.}\\[4mm] \text{Si} \quad \alpha\leqslant 1 & \text{alors} & \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t & \text{diverge.}\end{array}}$$

2.4. Intégrales de Bertrand

Une *intégrale de Bertrand* est

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta}\,dt$$

où $\beta \in \mathbb{R}$.
La primitive est explicite :

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta}\,dt = \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{-\beta+1}(\ln t)^{-\beta+1}\right]_2^x & \text{si} \quad \beta \neq 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left[\ln(\ln t)\right]_2^x & \text{si} \quad \beta = 1 \end{cases}$$

On en déduit la nature des intégrales de Bertrand.

$$\text{Si } \beta > 1 \quad \text{alors} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta}\,dt \quad \text{converge.}$$

$$\text{Si } \beta \leqslant 1 \quad \text{alors} \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^\beta}\,dt \quad \text{diverge.}$$

2.5. Application

Voici un exemple d'application :

Exemple 8.
Est-ce que l'intégrale

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt \qquad \text{converge ?}$$

Le point incertain est $+\infty$. Pour répondre à la question, calculons un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$. On a :

$$\sqrt{t^2+3t} = t\sqrt{1+\frac{3}{t}} \underset{+\infty}{\sim} t$$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(1-\frac{1}{2t^2}+o\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t^2}$$

$$\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{1}{\ln t}\right)^2$$

D'où un équivalent de la fonction au voisinage de $+\infty$:

$$\sqrt{t^2+3t}\,\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)\sin^2\left(\frac{1}{\ln t}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2t\,(\ln t)^2}$$

Remarquons que dans cette équivalence les deux fonctions sont négatives au voisinage de $+\infty$. D'après le théorème 3, les deux intégrales associées sont de même nature. Mais comme l'intégrale de Bertrand $\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\,(\ln t)^2}\,dt$ converge, alors notre intégrale initiale est aussi convergente.

Mini-exercices. 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right)dt \qquad \int_{\frac{3}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right)dt \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} te^{-|t|}\,dt \qquad \int_{-\infty}^{\ln 2} \frac{e^{-t}}{t^2+1}\,dt$$

2. Montrer que $\int_1^{+\infty}(\ln t)^\alpha e^{-t}\,dt$ converge, quel que soit le réel α.
3. Étudier la convergence des intégrales suivantes, en fonction du paramètre $\alpha > 0$:

$$\int_1^{+\infty}\left(1-\sqrt[3]{1+\frac{1}{t^\alpha}}\right)dt \qquad \int_{\frac{1}{\pi}}^{+\infty}\left(\frac{1}{t^\alpha}-\sin\frac{1}{t^\alpha}\right)dt \qquad \int_{-\infty}^{\pi} \alpha^t\,dt$$

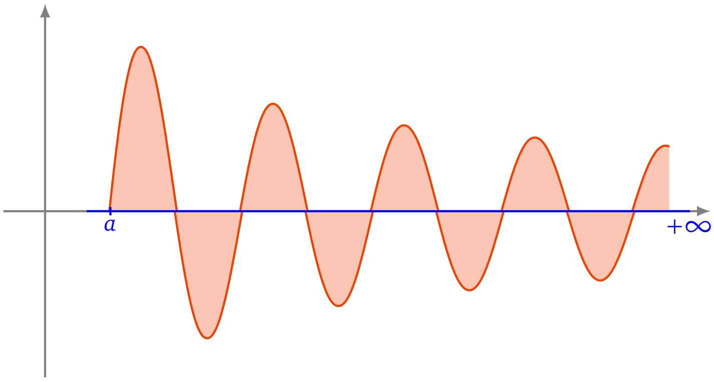
4. Discuter selon $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$ la nature de l'intégrale de Bertrand généralisée

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha(\ln t)^\beta}\,dt.$$

5. Si $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction continue et positive telle que $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = 0$, montrer alors que f est identiquement nulle. above

3. Fonctions oscillantes

Nous considérons ici $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, où $f(t)$ oscille jusqu'à l'infini entre des valeurs positives et négatives.



La définition de l'intégrale impropre reste la même :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Contrairement au cas des fonctions positives, où la limite était soit finie, soit égale à $+\infty$, tous les comportements sont possibles ici : les valeurs de $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ peuvent tendre vers une limite finie, vers $+\infty$ ou $-\infty$, ou bien encore osciller entre deux valeurs finies (comme $\int_a^x \sin t\;\mathrm{d}t$), ou s'approcher alternativement de $+\infty$ et $-\infty$ (comme $\int_a^x t\sin t\;\mathrm{d}t$).

3.1. Intégrale absolument convergente

Le cas le plus favorable est celui où la *valeur absolue* de f converge.

Définition 3.
Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$. On dit que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est ***absolument convergente*** si $\int_a^{+\infty} \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ converge.

Le théorème suivant est souvent utilisé pour démontrer la convergence d'une intégrale. Malheureusement, il ne permet pas de calculer la valeur de cette intégrale.

Théorème 4.
Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Autrement dit, être absolument convergent est plus fort qu'être convergent.

Démonstration. C'est une conséquence du critère de Cauchy (théorème 1) appliqué à $|f|$, puis à f.
Comme $\int_a^{+\infty} \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ converge alors par le critère de Cauchy (sens direct) :

$$\forall \epsilon>0 \quad \exists M\geqslant a \qquad \left(u,v\geqslant M \implies \int_u^v \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t<\epsilon\right).$$

Mais comme

$$\left|\int_u^v f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_u^v \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t<\epsilon$$

alors par le critère de Cauchy (sens réciproque), $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. □

Exemple 9.
Par exemple,

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{est absolument convergente,}$$

donc convergente. En effet, pour tout t,

$$\frac{|\sin t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}\,.$$

Or l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. D'où le résultat par le théorème 2 de comparaison.

3.2. Intégrale semi-convergente

Définition 4.
Une intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 10.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{est semi-convergente.}$$

Nous allons prouver qu'elle est convergente, mais pas absolument convergente.

1. **L'intégrale est convergente.**
   Pour le montrer, effectuons une intégration par parties (avec $u' = \sin t$, $v = \frac{1}{t}$) :
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x - \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t\,.$$
   Examinons les deux termes :
   - $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x = -\frac{\cos x}{x} + \cos 1$. Or la fonction $\frac{\cos x}{x}$ tend vers 0 (lorsque $x \to +\infty$), car $\cos x$ est bornée et $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Donc $\left[\frac{-\cos t}{t}\right]_1^x$ admet une limite finie (qui est $\cos 1$).
   - Pour l'autre terme, notons d'abord que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale absolument convergente. En effet $\frac{|\cos t|}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$ et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
     Par conséquent, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui signifie exactement que $\int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie.

   Conclusion : $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie (lorsque $x \to +\infty$), et donc par définition $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. **L'intégrale n'est pas absolument convergente.**
   Voici un moyen de le vérifier. Comme $\left|\sin t\right| \leqslant 1$ pour tout t, on a :
$$\frac{|\sin t|}{t} \geqslant \frac{\sin^2 t}{t} = \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,.$$
   En appliquant une intégration par parties à $\frac{\cos(2t)}{t}$ (avec $u' = \cos(2t)$ et $v = \frac{1}{t}$), on obtient :
$$\int_1^x \frac{1-\cos(2t)}{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Big[\ln t\Big]_1^x - \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(2t)}{t}\right]_1^x - \frac{1}{4}\int_1^x \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$
   Or $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge absolument. Des trois termes de la somme ci-dessus, les deux derniers convergent, et le premier tend vers $+\infty$. Donc l'intégrale diverge, et par le théorème 2 de comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge également.

3.3. Théorème d'Abel

Pour montrer qu'une intégrale converge, quand elle n'est pas absolument convergente, on dispose du théorème suivant.

Théorème 5 (Théorème d'Abel)**.**
Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$, positive, décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$. Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$, telle que la primitive $\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ soit bornée. Alors l'intégrale

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t \quad \textit{converge.}$$

Avec $f(t) = \frac{1}{t}$ et $g(t) = \sin t$, on retrouve que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Démonstration. C'est une généralisation de l'exemple 10 précédent. Pour tout $x \geqslant a$, posons $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$. Par hypothèse, G est bornée, donc il existe M tel que, pour tout x, $|G(x)| \leqslant M$. Effectuons maintenant une intégration par parties :

$$\int_a^x f(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\,G(t)\Big]_a^x - \int_a^x f'(t)\,G(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme G est bornée et f tend vers 0, le terme entre crochets converge. Montrons maintenant que le second terme converge aussi, en vérifiant que

$$\int_a^{+\infty} f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est absolument convergente.}$$

On a :

$$\left|f'(t)G(t)\right| = \left|f'(t)\right|\left|G(t)\right| \leqslant \left(-f'(t)\right)M\,,$$

car f est décroissante (donc $f'(t) \leqslant 0$) et $|G|$ est bornée par M. Par le théorème 2 de comparaison, il suffit donc de montrer que $\int_a^{+\infty} -f'(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente. Or :

$$\int_a^x -f'(t)\,\mathrm{d}t = f(a)-f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}(f(a)-f(x)) = f(a)\,.$$

□

Exemple 11.
Comme exemple d'application, si α est un réel strictement positif, et k un entier positif *impair*, alors l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^k(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$

Remarquons que cette intégrale n'est absolument convergente que pour $\alpha > 1$. On vérifie que les hypothèses du théorème 5 sont satisfaites pour $f(t) = \frac{1}{t^\alpha}$ et $g(t) = \sin^k(t)$. Pour s'assurer que la primitive de $\sin^k$ est bornée, il suffit de penser à une linéarisation, qui transformera $\sin^k(t)$ en une combinaison linéaire des $\sin(\ell t)$, $\ell = 1,\dots,k$, dont la primitive sera toujours bornée.

Mini-exercices. 1. Soient $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\alpha > \frac{1}{2}$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t) = 0$. Montrer que l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. En déduire que si $P(t)$ est un polynôme alors $\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. En admettant que le théorème d'Abel est vrai pour une fonction g à valeurs complexes, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\mathrm{i}t}}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ est convergente pour tout $\alpha > 0$. Est-elle toujours absolument convergente ?

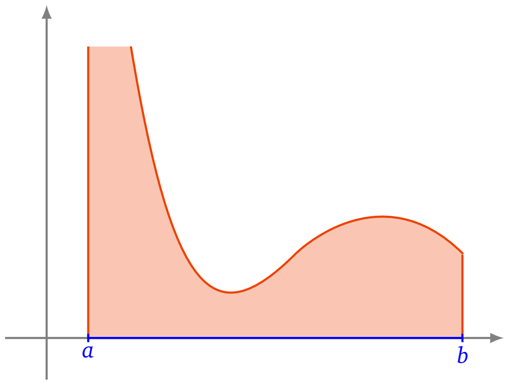
3. Montrer $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$. (Indication : garder le sinus dans une première minoration.) En utilisant un résultat sur les séries, en déduire une nouvelle démonstration du fait que l'intégrale $\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

4. Intégrales impropres sur un intervalle borné

4.1. Fonctions positives

Nous traitons ici le cas où la fonction à intégrer tend vers l'infini en l'une des bornes de l'intervalle d'intégration. Le traitement est tout à fait analogue au cas d'une fonction positive sur un intervalle non borné et l'on omettra les démonstrations.

Quitte à réduire l'intervalle d'intégration, et à changer éventuellement le signe de f, nous pouvons supposer que la fonction est positive ou nulle sur l'intervalle d'intégration $]a,b]$, et tend vers $+\infty$ en a.



Rappelons que, par définition,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Observons que si la fonction f est positive, alors $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ croît quand x décroît vers a : soit $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bornée, et l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, soit $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $+\infty$.

4.2. Théorème de comparaison

Théorème 6.
Soient f et g deux fonctions positives et continues sur $]a,b]$. Supposons que f soit majorée par g au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists \epsilon > 0 \quad \forall t \in]a, a+\epsilon] \qquad f(t) \leqslant g(t)\,.$$

1. *Si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.*
2. *Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge.*

Exemple 12.
Fixons un réel α. Est-ce que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge ?}$$

- Pour le savoir nous écrivons :
$$\frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} = \left((-\ln t)^\alpha t^{1/4}\right) t^{-3/4}\,.$$
- On sait que $\lim_{t\to 0^+} (-\ln t)^\alpha t^{1/4} = 0$, pour tout α (les puissances de t l'emportent sur le logarithme).
- En particulier, il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que :
$$\forall t \in]0,\epsilon] \quad (-\ln t)^\alpha t^{1/4} \leqslant 1\,.$$
- En multipliant les deux membres de l'inégalité par $t^{-3/4}$ on obtient :
$$\forall t \in]0,\epsilon] \quad \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}} \leqslant t^{-3/4}\,.$$
- Or l'intégrale $\int_0^1 t^{-3/4}\,\mathrm{d}t$ converge. En effet :
$$\int_x^1 t^{-3/4}\,\mathrm{d}t = \left[4t^{1/4}\right]_x^1 = 4 - 4x^{1/4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+}(4 - 4x^{1/4}) = 4\,.$$
- On peut donc appliquer le théorème 6 de comparaison : puisque $\int_0^1 t^{-3/4}\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_0^1 \frac{(-\ln t)^\alpha}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge aussi, quel que soit α.

4.3. Théorème des équivalents

Grâce au théorème 6 de comparaison, on peut remplacer la fonction à intégrer par un équivalent au voisinage de a pour étudier la convergence d'une intégrale.

Théorème 7.
Soient f et g deux fonctions continues et strictement positives sur $]a,b]$. Supposons qu'elles soient équivalentes au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\lim_{t\to a^+} \frac{f(t)}{g(t)} = 1\,.$$

Alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Attention : il est important que f et g soient positives.
L'équivalence de f et g au voisinage de a sera notée par : $f(t) \underset{a}{\sim} g(t)$ (ou bien $f(t) \underset{a^+}{\sim} g(t)$ pour préciser que la limite en a est la limite à droite).

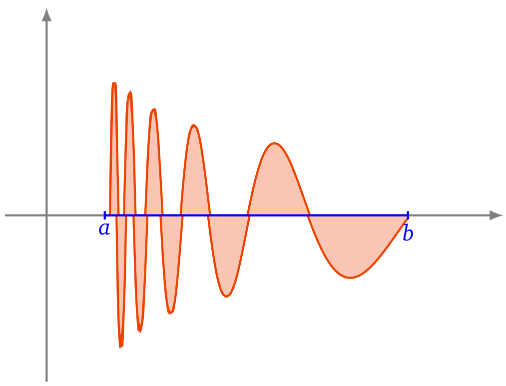
Exemple 13.
L'intégrale
$$\int_0^1 \sqrt{\frac{-\ln t+1}{\sin t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{converge.}$$
En effet,
$$\sqrt{\frac{-\ln t+1}{\sin t}} \underset{0^+}{\sim} \frac{(-\ln t)^{1/2}}{\sqrt{t}}\,,$$
et nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_0^1 \frac{(-\ln t)^{1/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge.

L'utilisation des équivalents permet ainsi de ramener l'étude de la convergence d'une intégrale pour laquelle on n'a pas de primitive à un catalogue d'intégrales dont la convergence est connue. Les plus classiques sont du type $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, mais attention, la convergence en fonction du paramètre α est inversée par rapport aux intégrales de Riemann.

Exemple 14.
$$\text{Si } \alpha<1 \quad \text{alors} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$
$$\text{Si } \alpha\geqslant 1 \quad \text{alors} \quad \int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \quad \text{diverge.}$$

4.4. Fonctions oscillantes

Le dernier cas à traiter est celui où la fonction à intégrer oscille au voisinage d'une des bornes, prenant des valeurs arbitrairement proches de $+\infty$ ou $-\infty$.



Le changement de variable $u=\frac{1}{t-a}$ permet de se ramener au cas précédent d'une fonction oscillante sur un intervalle non borné, ce qui nous dispensera de donner autant de détails.
Rappelons que, par définition,
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
La notion importante est toujours la convergence absolue.

Définition 5.
Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. On dit que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est ***absolument convergente*** si $\int_a^b \left|f(t)\right|\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.

Le théorème suivant se démontre de la même façon que le théorème 4.

Théorème 8.
Si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Exemple 15. 1. L'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \quad \text{est absolument convergente,}$$

donc convergente. En effet, pour tout t,

$$\frac{\left|\sin\frac{1}{t}\right|}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}\,.$$

Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, d'où le résultat par le théorème 6 de comparaison.

2. Par contre,

$$\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{n'est pas absolument convergente,}$$

mais elle est convergente. Pour le voir, effectuons le changement de variable $t \mapsto \frac{1}{u}$:

$$\int_x^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{1/x}^1 u\sin u \frac{-1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \int_1^{1/x} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u\,.$$

Lorsque $x \to 0^+$ alors $\frac{1}{x} \to +\infty$. Nous avons déjà montré que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$ est convergente, sans être absolument convergente.

On pourrait énoncer un théorème d'Abel analogue au théorème 5, mais cela n'est pas vraiment utile. D'une part les fonctions auxquelles il s'appliquerait se rencontrent rarement, et d'autre part, il est en général facile de se ramener à un problème sur $[c,+\infty[$, par le changement de variable $t \mapsto u = \frac{1}{t-a}$: nous l'avons déjà fait pour $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Mini-exercices. 1. Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} \qquad \int_0^1 \ln\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 t\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

2. Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$ l'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t(-\ln t)^\beta}$ converge ?
3. Prouver le théorème de comparaison et le théorème des équivalents de cette section, en vous inspirant des démonstrations des sections précédentes.
4. Même travail pour montrer qu'une intégrale absolument convergente est convergente.

5. Intégration par parties – Changement de variable

5.1. Intégration par parties

Théorème 9.
Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Supposons que $\lim_{t\to+\infty} u(t)v(t)$ existe et soit finie. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence on a :

$$\int_a^{+\infty} u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[uv\big]_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

On rappelle que $\big[uv\big]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty}(uv)(t) - (uv)(a)$.
Le mieux n'est pas d'appliquer le théorème, mais d'effectuer la preuve à chaque fois, c'est-à-dire en faisant une intégration par parties sur l'intervalle $[a,x]$ et en vérifiant bien que les objets ont une limite lorsque $x \to +\infty$.

Démonstration. C'est la formule usuelle d'intégration par parties

$$\int_a^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t = \big[uv\big]_a^x - \int_a^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

en notant que par hypothèse le crochet a une limite finie lorsque $x \to +\infty$. □

Exemple 16.
Soit $\lambda > 0$. Que vaut l'espérance de la loi exponentielle :

$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \quad ?$$

On effectue l'intégration par parties avec $u = \lambda t$, $v' = e^{-\lambda t}$. On a donc $u' = \lambda$ et $v = \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t &= \int_0^x u(t) v'(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \big[uv\big]_0^x - \int_0^x u'(t) v(t) \, \mathrm{d}t \\
&= \Big[\lambda t \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big]_0^x - \int_0^x \lambda \cdot \frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\
&= -x e^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t \\
&= -x e^{-\lambda x} + \Big[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t}\Big]_0^x \\
&= -x e^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}\big(e^{-\lambda x} - 1\big) \\
&\longrightarrow \frac{1}{\lambda} \qquad \text{lorsque } x \to +\infty
\end{aligned}$$

Ainsi l'intégrale converge et

$$\int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}.$$

5.2. Changement de variable

Théorème 10.
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a, +\infty[$. Soit $J = [\alpha, \beta[$ un intervalle avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ ou $\beta = +\infty$. Soit $\varphi : J \to I$ un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

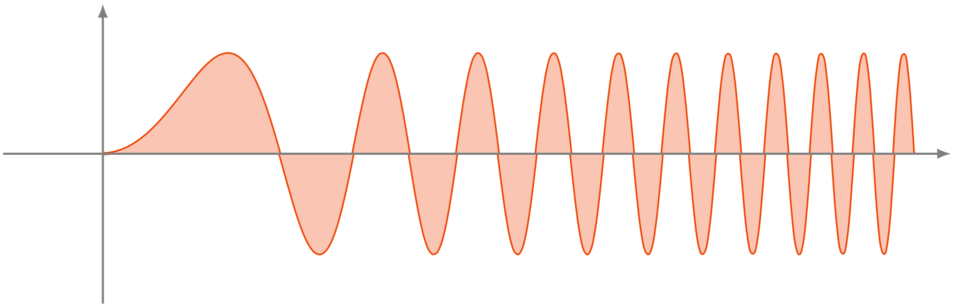
$$\int_a^{+\infty} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t$$

La démonstration est la même que le changement de variable usuel. Encore une fois, le mieux n'est pas d'appliquer le théorème mais d'effectuer un changement de variable classique sur l'intervalle $[a, x]$, puis d'étudier les limites lorsque $x \to +\infty$.
On rappelle que $\varphi : J \to I$ un ***difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$*** si φ est une application $\mathscr{C}^1$, bijective, dont la bijection réciproque est aussi $\mathscr{C}^1$.

L'exemple suivant est particulièrement intéressant : la fonction $f(t) = \sin(t^2)$ a une intégrale convergente, mais ne tend pas vers 0 (lorsque $t \to +\infty$). C'est à mettre en opposition avec le cas des séries : pour une série convergente le terme général tend toujours vers 0.

Exemple 17.
L'intégrale de Fresnel

$$\int_1^{+\infty} \sin(t^2) \, \mathrm{d}t \quad \text{converge.}$$



On effectue le changement de variable $u = t^2$, qui induit $t = \sqrt{u}$, $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$. $\varphi : u \mapsto t = \sqrt{u}$ est un difféomorphisme entre $u \in [1, x^2]$ et $t \in [1, x]$. D'où

$$\int_1^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t = \int_1^{x^2} \sin(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}.$$

Or par le théorème d'Abel $\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$ converge, donc $\int_1^{x^2} \sin(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}$ admet une limite finie (lorsque $x \to +\infty$), ce qui prouve que $\int_1^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ admet aussi une limite finie. Conclusion : $\int_1^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exemple 18.
Calculons la valeur des deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$

1. **L'intégrale I converge.**
   Le point incertain est en $t = 0$. Comme $\sin t \underset{0^+}{\sim} t$, $\ln t \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}}$ (pour t assez petit), et l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ converge, alors l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln t\,\mathrm{d}t$ converge, ce qui implique que I converge.
2. **Vérifions $I = J$.**
   Effectuons le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - u$. On a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}u$ et un difféomorphisme entre $t \in [x, \frac{\pi}{2}]$ et $u \in [\frac{\pi}{2} - x, 0]$. Ainsi
   $$\int_x^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}-x}^{0} \ln\Big(\sin\Big(\frac{\pi}{2} - u\Big)\Big)\big(-\mathrm{d}u\big) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \ln(\cos u)\,\mathrm{d}u.$$
   Ainsi, lorsque $x \to 0$, cela prouve $I = J$ (et en particulier J converge).
3. **Calcul de $I + J$.**
   $$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\ln(\sin t) + \ln(\cos t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t \cdot \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\tfrac{1}{2}\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$
   Et comme $I = J$, on a
   $$2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + K.$$

Il nous reste à évaluer $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t$:

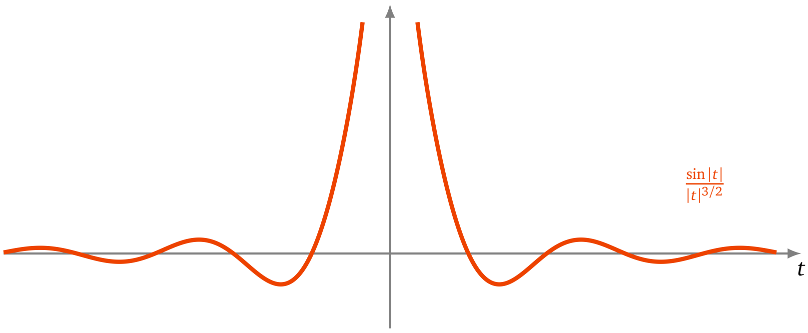
$$\begin{aligned}
K &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(\sin(2t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{(changement de variable } u = 2t\text{)} \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\big(\sin(\pi - v)\big)\,(-\mathrm{d}v) \qquad \text{(changement de variable } v = \pi - u\text{)} \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin v)\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}I + \frac{1}{2}I \\
&= I
\end{aligned}$$

4. **Conclusion.**
   Ainsi comme $2I = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + K$ et $K = I$ on trouve :
   $$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln 2$$
   et $J = I$.

5.3. Plan d'étude

Nous résumons ici l'ensemble des techniques vues dans ce chapitre pour l'étude de l'intégrale d'une fonction f sur un intervalle non borné de $\mathbb{R}$, la fonction étant éventuellement non bornée au voisinage d'un ou plusieurs points de l'intervalle. Pour illustrer le plan d'étude, nous détaillerons l'exemple introductif :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin|t|}{|t|^{3/2}}\,\mathrm{d}t$$



1. **Identifier le ou les points incertains.**
   La fonction $|t|^{-3/2}\sin|t|$ est définie sur deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. La fonction est paire, elle tend vers 0 en oscillant quand t tend vers $-\infty$ et $+\infty$, elle n'est pas définie en 0 et tend vers $+\infty$ en 0^- et en 0^+ (voir la figure). Il y a donc 4 points incertains à étudier.
2. **Isoler les points incertains.**
   Pour cela, il faut découper chaque intervalle d'étude en autant de sous-intervalles qu'il y a de points incertains, de manière à ce que les problèmes soient tous situés sur une borne de chaque intervalle. Dans notre exemple, on divisera en 4 intervalles :
   $$I_1 = \int_{-\infty}^{-1} |t|^{-3/2}\sin|t|\,\mathrm{d}t\ , \quad I_2 = \int_{-1}^{0} |t|^{-3/2}\sin|t|\,\mathrm{d}t\ ,$$
   $$I_3 = \int_{0}^{1} |t|^{-3/2}\sin|t|\,\mathrm{d}t\ , \quad I_4 = \int_{1}^{+\infty} |t|^{-3/2}\sin|t|\,\mathrm{d}t.$$

Rappelons que le choix des points de découpe, ici -1 ici $+1$, n'a pas d'importance pour la convergence. Chacune des intégrales obtenues doit être étudiée séparément. L'intégrale I n'est définie que si chacun des morceaux converge.

3. **Se ramener à une intégrale sur $[a,+\infty[$ ou sur $]a,b]$.**
Pour cela, il suffit d'effectuer le changement de variable $t \mapsto -t$. Dans notre cas, puisque la fonction est paire, $I_1 = I_4$ et $I_2 = I_3$.
4. **Calculer une primitive si c'est possible.**
Ayant une primitive, le problème est ramené à un calcul de limite. Si on n'a pas de primitive explicite, alors :
5. **Si la fonction est de signe constant.**
Changer éventuellement le signe pour se ramener à une fonction positive. Calculer un équivalent au voisinage du point incertain et utiliser le théorème 3 ou 7 des équivalents. Si l'équivalent ne donne pas la réponse directement, utiliser le théorème 2 ou 6 de comparaison. Dans notre exemple, l'intégrale I_3 est celle d'une fonction positive, tendant vers $+\infty$ en 0^+ :
$$t^{-3/2}\sin|t| \underset{0^+}{\sim} t^{-1/2}\,.$$
Or l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t^{1/2}}\,\mathrm{d}t$ converge, donc I_3 converge.
6. **Si la fonction n'est pas de signe constant.**
Commencer par étudier l'intégrale de $|f|$, comme dans le cas précédent (équivalent ou comparaison). Si elle converge, l'intégrale étudiée est absolument convergente, donc convergente. Si l'intégrale n'est pas absolument convergente, il faut essayer de mettre la fonction sous forme d'un produit pour appliquer le théorème d'Abel (théorème 5). Dans notre exemple, l'intégrale I_4 est absolument convergente : on le déduit du théorème de comparaison, car
$$t^{-3/2}\big|\sin|t|\big| \leqslant t^{-3/2}\,,$$
et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente. On pourrait aussi appliquer le théorème d'Abel avec $f(t) = t^{-3/2}$ et $g(t) = \sin t$.

Mini-exercices. 1. Soit $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$. Calculer I_0. Par intégration par parties, trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire que $I_n = n!$.

2. Par intégration par parties, montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et vaut $-\ln 2$.
3. Soit $I = \int_0^{+\infty} \ln(1+\frac{1}{t^2})\,\mathrm{d}t$. Identifier les points incertains. Faire une intégration par parties en écrivant $1 \cdot \ln(1+\frac{1}{t^2})$. Montrer que I converge et que $I = \pi$.
4. Soit $I = \int_0^1 (-\ln t)^\beta\,\mathrm{d}t$. Identifier les points incertains. À l'aide du changement de variable $t = \frac{1}{u}$, montrer que cette intégrale converge quel que soit $\beta \in \mathbb{R}$.
5. Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}}$. Identifier les points incertains. À l'aide du changement de variable $t = u^2$, montrer que l'intégrale converge et que $I = \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}$.

Auteurs du chapitre

- D'après un cours de Luc Rozoy et Bernard Ycart de l'université de Grenoble pour le site M@ths en Ligne.
- et un cours de Raymond Mortini, de l'université de Lorraine,
- mixé, révisé par Arnaud Bodin. Relu par Stéphanie Bodin et Vianney Combet.