

论文的题目

作者

2021 年 12 月 5 日

摘要

[illegible]

关键词：关键词 1，关键词 2，关键词 3

1 引言

1.1 研究背景

这是小四号的正文字体, 行间距 1.35 倍.

通过空一行实现段落换行,仅仅是回车并不会产生新的段落。

自定义了一个命令 `\red{文字}` 可以加红文字, 可以在论文修改阶段方便标记.

这是一个引用的示例 [1] 和 [2, 3, 4].

这是一大段文字这是一大段文字中英文混排 Numerical Methods. 这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字这是一大段文字.

1.2 列表的使用

这是一个计数的列表.

1. 第一项

- (a) 第一项中的第一项
(b) 第一项中的第二项

2. 第二项

3. 第三项

这是一个不计数的列表.

- 第一项
 - 第一项中的第一项
 - 第一项中的第二项
- 第二项
- 第三项

1.3 数学公式

数学公式的使用请参考公式手册 `symbols-a4`, 或者《一份 (不太) 简短的 L^AT_EX 2 ϵ 介绍》(`lshort-zh-cn`).

自定义命令表示的几个数学符号 \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathcal{A} , i , d , \mathbf{A} .

在文中行内公式可以这么写: $a^2 + b^2 = c^2$, 这是勾股定理, 它还可以表示为 $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, 还可以让公式单独一段并且加上编号

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \tag{1.1}$$

还可以通过添加标签在正文中引用公式, 如等式 (1.1) 或者 1.1.

多行公式常用 `align` 环境, 公式通过 `&` 对齐. 分隔符通常放在等号左边:

$$a = b + c \tag{1.2}$$

$$= d + e. \tag{1.3}$$

`align` 环境会给每行公式都编号. 我们仍然可以用 `\notag` 或 `\nonumber` 去掉某行的编号. 在以下的例子, 为了对齐等号, 我们将分隔符放在右侧, 并且此时需要在等号后添加一对括号 `{}` 以产生正常的间距:

$$a = b + c \tag{1.4}$$

$$\begin{aligned} &= d + e + f + g + h + i + j \\ &\quad + m + n + o \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$= p + q + r + s. \tag{1.6}$$

如果两列都要左对齐, 然后整体居中

$$a = b + 1 \qquad e = c + f + g + 3 \tag{1.7}$$

$$c = d + e + 2 \qquad c = d + e + 2 \tag{1.8}$$

$$e = c + f + g + 3 \qquad a = b + 1 \tag{1.9}$$

如果我们不需要按等号对齐, 只需罗列数个公式, `gather` 将是一个很好用的环境:

$$a = b + c \tag{1.10}$$

$$d = e + f + g \tag{1.11}$$

$$h + i = j + k$$

$$l + m = n \tag{1.12}$$

`align` 和 `gather` 有对应的不带编号的版本 `align*` 和 `gather*`. 对于 `align`、`gather`、`align*` 与 `gather*` 等环境, 若添加命令 `\allowdisplaybreaks` 后 (已添加), 公式可以跨页显示.

多个公式组在一起公用一个编号, 编号位于公式的居中位置, `amsmath` 宏包提供了诸如 `aligned`、`gathered` 等环境, 与 `equation` 环境套用.

这个公式使用 `aligned` 环境 (推荐使用)

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = \pi^2 \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

这个公式使用 `array` 环境

$$\begin{cases} -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = \pi^2 \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, & u(1) = 0. \end{cases} \tag{1.14}$$

`aligned` 与 `equation` 环境套用, 公式间距是自动调节的, 如果有分式, 分式也是行间显示. 如果用 `array` 与 `equation` 环境套用, 有时候需要手动调整公式行间距和行间显示.

1.4 定理环境

定义 1.1. 这是一个定义.

命题 1.1. 这是一个命题.

引理 1.1 (Lemma). 这是一个引理.

定理 1.1 (Theorem). 这是一个定理.

证明: 这是证明环境. □

命题 1.2 (Proposition). 这是一个命题.

引理 1.2. (参考文献 [5]) 假设单步法具有 p 阶精度, 且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|\varphi(x, u, h) - \varphi(x, \bar{u}, h)| \leq L_\varphi |u - \bar{u}|. \tag{1.15}$$

定理 1.2. 假设单步法具有 p 阶精度, 且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|\varphi(x, u, h) - \varphi(x, \bar{u}, h)| \leq L_\varphi |u - \bar{u}|. \quad (1.16)$$

证明: 由定理 1.1 和 (1.13) 式可以推出以上结论. \square

推论 1.1. 假设单步法具有 p 阶精度, 且增量函数 $\varphi(x_n, u_n, h)$ 关于 u 满足 Lipschitz 条件

$$|\varphi(x, u, h) - \varphi(x, \bar{u}, h)| \leq L_\varphi |u - \bar{u}|. \quad (1.17)$$

注 1.1. 这是一个 *remark*.

例 1. 这是一个例子.

1.5 算法环境

如下是算法 1.

算法 1 Euclid's algorithm

1: procedure EUCLID(a, b)	▷ The g.c.d. of a and b
2: $r \leftarrow a \bmod b$	
3: while $r \neq 0$ do	▷ We have the answer if r is 0
4: $a \leftarrow b$	
5: $b \leftarrow r$	
6: $r \leftarrow a \bmod b$	
7: end while	
8: return b	▷ The gcd is b
9: end procedure	

2 微分方程的数值方法

本章我们考虑具有以下微分方程:

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} + qu = f, & a < x < b, \\ u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta. \end{cases} \quad (2.1)$$

其中 q, f 为 $[a, b]$ 上的连续函数, $q \geq 0$; α, β 为给定常数. 这是最简单的椭圆方程第一边值问题.

问题 (2.1) 存在唯一解 (引用示例参考文献 [5]).

2.1 有限差分方法

在偏微分方程的数值解法中, 有限差分法数学概念直观, 推导自然, 是发展较早且比较成熟的数值方法. 由于计算机只能存储有限个数据和做有限次运算, 所以任何一种用计算机解题的方法, 都必须把连续问题 (微分方程的边值问题、初值问题等) 离散化, 最终化成有限形式的线性代数方程组.

2.1.1 数值格式

将区间 $[a, b]$ 分成 N 等分, 分点为

$$x_i = a + ih \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

其中 $h = (b - a)/N$. 于是我们得到区间 $I = [a, b]$ 的一个网格剖分. x_i 称为网格的节点, h 称为步长.

数值格式:

$$L_h u_i = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{h} + q_i u_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1.$$

其中 $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$.

以上差分方程对于 $i = 1, 2, \dots, N-1$ 都成立, 加上边值条件 $u_0 = \alpha$, $u_N = \beta$, 就得到关于 u_i 的差分格式:

$$\begin{cases} L_h u_i = -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} + q_i u_i = f_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ u_0 = \alpha, \quad u_N = \beta. \end{cases} \quad (2.2)$$

它的解 u_i 是 $u(x)$ 在 $x = x_i$ 处的差分解.

2.2 矩阵形式

先定义向量 \mathbf{u} :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T.$$

差分格式可以写为矩阵形式:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

其中矩阵 \mathbf{A} 、向量 \mathbf{f} 的定义如下, 注意向量 \mathbf{f} 的首尾元素已包含了 $x = a$ 和 $x = b$

处的边界条件.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + q_1 & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-2} & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} \\ & & & -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

上一个矩阵用了 `bmatrix` 环境, 也可以使用 `array` 环境.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{h^2} + q_1 & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & & & \\ -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_2 & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-2} & \frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} \\ & & & -\frac{1}{2h} - \frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

3 插图环境

3.1 图的使用

XeLaTeX 环境下可以使用 EPS、PDF、PNG、JPEG、BMP 格式的图片, 当然也可以用绘图包直接在 `LaTeX` 中绘制图形, 推荐使用宏包 `tikz`. 值得注意的是 `figure` 环境一个浮动体环境, `LaTeX` 不总是浮动体放在你想要的地方, 但是 `LaTeX` 总是保证浮动体的相对顺序, 所以对图片 `\label` 和 `\ref` 的交叉引用就显得尤为重要。

3.2 插图示例

插入一个图形并居中放置, 如图 3.1.

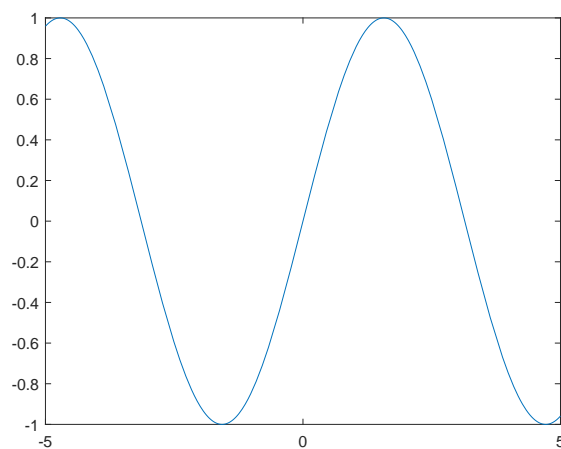


图 3.1: 函数 $y = \sin(x)$ 的图像

两个图左右并排放置, 共用一个标题. 引用图片: 图 3.3.

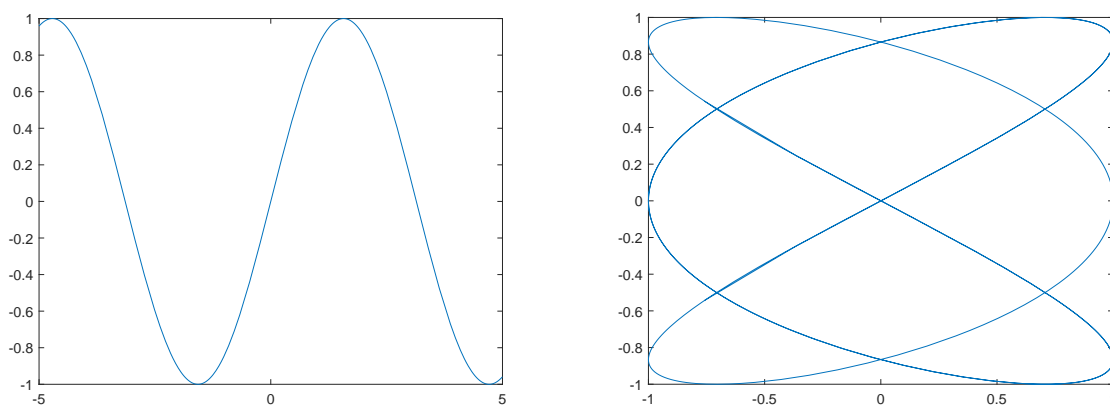


图 3.2: 左: 图一的描述; 右: 图二的描述.

使用 minipage 排版并排插图, 每个图都有单独的标题.

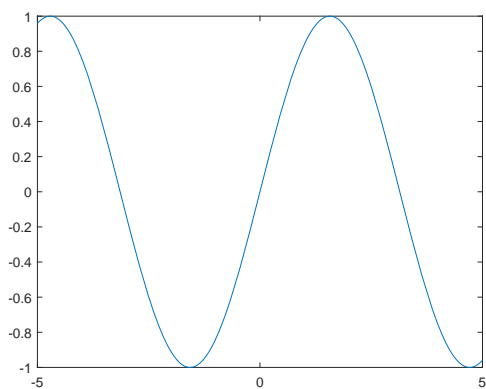


图 3.3: 图一的描述.

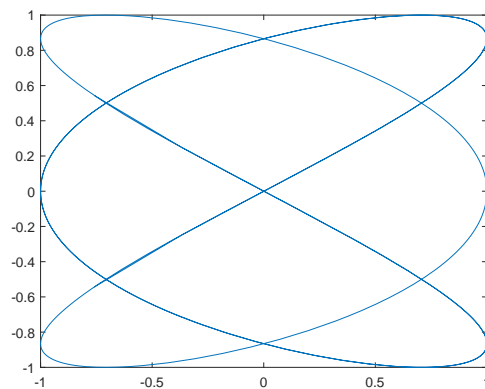


图 3.4: 图二的描述.

4 表格环境

4.1 表的使用

LaTeX 的 Table 环境一个浮动体环境, 浮动体排版与 Figure 环境类似. 作为论文, 推荐使用三线表进行排版. 所谓三线表, 即在标题前有横线, 标题后有横线, 表格最后还有横线, 其他地方无线. 当然这不是死规定, 也可以根据需要在合适的地方加线.

本文基于 tabularx 宏包定义了新的左中右 (LCR) 格式, LCR 三个格式会根据表格宽度的设定自行控制宽度, 且其宽度相等, 方便设置和页面相同宽度的表格. 本文还定义了命令 $P\{}$, 它可以设定某一列宽度 (如 $P\{1\text{cm}\}$ 控制某一列的宽度为 1cm), 实际上 $P\{}$ 命令是在 $p\{}$ 命令的基础上增加了居中功能.

4.2 表格示例

如下表格: 表 4.1.

表 4.1: 某校学生升高体重样本.

序号	年龄	身高	体重
001	14	156	42
002	16	158	45
003	14	162	48
004	15	163	50
平均	15	159.75	46.25

基于 tabular 环境设置一些格式: 上下表格线加粗.

表 4.2: 数值误差与收敛速率示例.

degree	step-size h	L^2 -errors	order	H^1 -errors	order	L^∞ -errors	order
1	1/128	9.18E-06	2.02	7.70E-03	1.01	6.46E-07	2.02
	1/256	2.29E-06	2.01	1.92E-03	1.00	1.61E-07	2.01
	1/512	5.70E-07	2.00	9.56E-04	1.00	4.01E-08	2.00
2	1/128	1.39E-08	3.01	1.15E-05	2.01	3.48E-12	4.02
	1/256	1.73E-09	3.01	2.88E-06	2.01	3.27E-13	3.94
	1/512	2.17E-10	3.00	7.24E-06	2.00	6.66E-13	1.55
3	1/32	2.28E-09	4.05	6.92E-07	3.04	1.45E-15	8.21
	1/64	1.42E-10	4.03	8.65E-08	3.02	2.06E-14	3.85
	1/128	8.91E-12	4.01	1.08E-08	3.01	3.86E-14	0.91

基于 tabularx 环境设置一些格式: 左右表格双线.

表 4.3: 数值误差示例.

N	A	B	C	D	E
2	9.20E-05	9.90E-05	1.00E-06	8.00E-06	1.50E-05
4	9.80E-05	8.00E-05	7.00E-06	1.40E-05	1.60E-05
6	4.00E-06	8.10E-05	8.80E-05	2.00E-05	2.20E-05
8	8.50E-05	8.70E-05	1.90E-05	2.10E-05	3.00E-06
10	8.60E-05	9.30E-05	2.50E-05	2.00E-06	9.00E-06
12	1.70E-05	2.40E-05	7.60E-05	8.30E-05	9.00E-05
14	2.30E-05	5.00E-06	8.20E-05	8.90E-05	9.10E-05
16	7.90E-05	6.00E-06	1.30E-05	9.50E-05	9.70E-05
18	1.00E-05	1.20E-05	9.40E-05	9.60E-05	7.80E-05
20	1.10E-05	1.80E-05	1.10E-04	7.70E-05	8.40E-05

参考文献

- [1] Adams R A, Fournier J J F. Sobolev spaces[M]. Elsevier, 2003.
- [2] Shen J. Efficient spectral-Galerkin method I. Direct solvers of second- and fourth-order equations using Legendre polynomials[J]. SIAM J. Sci. Comput., 1994, 15(6): 1489-1505.
- [3] Tadmor E. A review of numerical methods for nonlinear partial differential equations[J]. Bull. Amer. Math. Soc., 2012, 49(4): 507-554.
- [4] Trefethen L N, Weideman J A C. The exponentially convergent trapezoidal rule[J]. SIAM Rev., 2014, 56(3): 385-458.
- [5] 李荣华, 刘播. 微分方程数值解法[M]. 东南大学出版社, 1997.

A MATLAB 源程序

```
clc;clear;  
row = size(A)  
row = size(A,1)  
column = size(A,2)  
[row,column] = size(A)
```