Homework

姓名: 学生名字　专业: 计算数学　学号: 123002584

日期: 2021 年 X 月 X 日

问题 1. 证明: 范数 $\|\cdot\|$ 的对偶范数满足范数的定义

$$\|z\|_* = \sup\{z^T x : \|x\| \leq 1\} = \sup\{z^T x : \|x\| = 1\}$$

证明.

$$\|z\|_* = \max_{\|x\|\leq 1} \sum z_i x_i$$

1. 正定性：如果 $z=0$, 显然 $\|0\|_* = 0$.
2. 非负性：如果 $z \neq 0$, 则 $\|x\| \neq 0$. 由于 $x = \frac{z}{\|z\|}$, 有 $\|z\|_* \leq \frac{\|z\|_2^2}{\|z\|} > 0$.
   特别的，如果 $\|z\|_* = 0$，则必有 $z = 0$.
3. 齐次性：
   由范数定义，有:

$$\|tz\|_* = \max_{\|x\|\leq 1} |z^T tx| = \max_{\|x\|\leq 1} |t||z^T x| = |t| \max_{\|x\|\leq 1} |z^T x| = |t| \, \|z\|_*$$

□

问题 2. 这里是一个问题。

解. 这里是问题的解答。

表格

表 1　表格名字

A	N=3	N=5	N=7	N=9	N=11	N=13
B	1.5789	1.3478	1.0645	0.8780	0.7222	0.5942
C	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
D	7.2632	14.3913	21.0323	27.3171	30.9630	34.0870

图片

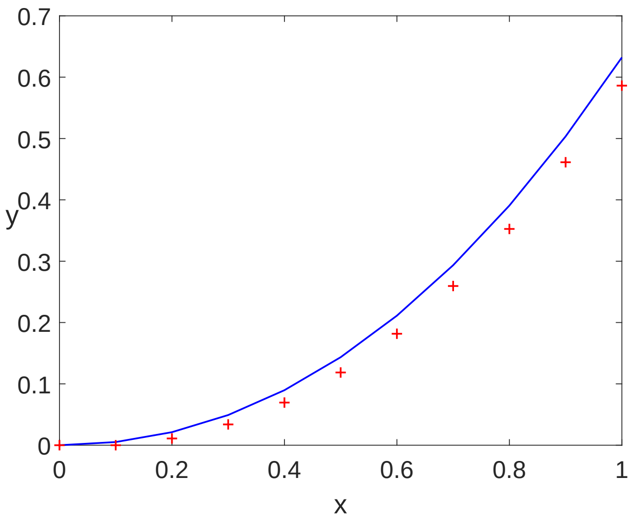

图 1　Euler 方法的误差

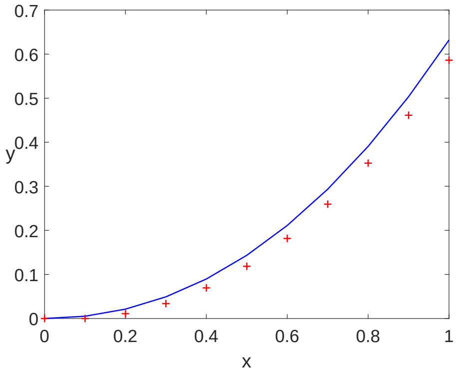

图 2　Euler method

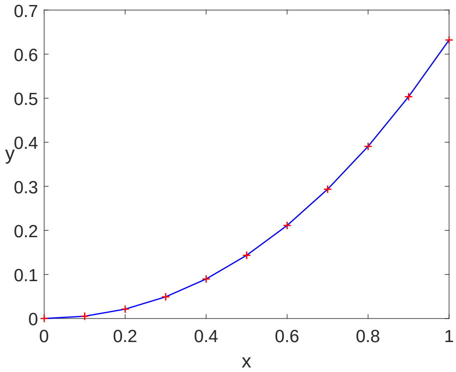

图 3　Runge-Kutta method

MATLAB 代码

Euler method

```
% Euler method for the ODE model
% u'(t)=t^2+t-u, t in [0,1]
% Initial condition: u(0)=0 ;
% Exact solution: u(t)=-exp(-t)+t^2-t+1.
clear all;  clf
h=0.1;
x=0:h:1;                       % function interval
n=length(x)-1;
u(1)=0;                        % initial value
fun=@(t,u) t.^2+t-u;           % RHS
for i=1:n
    u(i+1)=u(i)+h.*fun(x(i),u(i));
end
ue=-exp(-x)+x.^2-x+1;          % exact solution
plot(x,ue,'b-',x,u,'r+','LineWidth',1)
xlabel('x','fontsize', 16), ylabel('y','fontsize',16,'Rotation',0)
set(gca,'fontsize',14)
```

Runge-Kutta method

```
% Runge-Kutta method for the ODE model
% u'=t^2+t-u,  t \in [0,1]
% Initial condition : u(0)=0
% Exact : u(t)=-exp(-t)+t^2-t+1.
clear all;  clf
h=0.1;
x=0:h:1;                     % function interval
n=length(x)-1;
u(1)=0;                      % initial value
fun=@(t,u) t.^2+t-u;         % RHS
for i=1:n
    k1=fun(x(i),u(i));
    k2=fun(x(i)+h./2,u(i)+h.*k1/2);
    k3=fun(x(i)+h./2,u(i)+h.*k2/2);
    k4=fun(x(i)+h,u(i)+h.*k3);
    u(i+1)=u(i)+h.*(k1+2.*k2+2.*k3+k4)./6;
end
ue=-exp(-x)+x.^2-x+1;        % exact solution
plot(x,ue,'b-',x,u,'r+','LineWidth',1)
xlabel('x','fontsize', 16), ylabel('y','fontsize',16)
set(gca,'fontsize',14)
```