1325E - Ehab's REAL Number Theory Problem

github.com/andy489

Аналитично решение на задачата:

От условието на задачата разбираме, че всеки елемент на пододения масив ще има най-много 7 делителя. Какво всъщност означава това и какво искат да ни кажат с него?

Всеки елемент може да има от минимум 1 до максимум 7 делителя. Ще разгледаме всеки възможен слуай за броя на делителите, за да определим какъв може да бъде вида на елемента/числото.

Брой делители:	**Формат:**
7	p^6
6	p^2q
5	p^4
4	pq
3	p^2
2	p
1	1

Където с p и q сме означили произволни прости числа. Забележете, че ако някой точен квадрат дели елемент на масива, то ще може да го разделим на този точен квадрат без да променим условието на задачата по никакъв начин. Така ще „*нормализираме*“ всеки един елемент като това ще означава да го делим на точни квадрати, докато накрая не съдържа такива. След нормализирането елементите ше имат следния вид: $1, p, pq$. Тоест всеки един елемент ще има най-много два делителя. В действителност, ако даден елемент има 3 различни прости делителя, то той ще има поне 8 делителя, което е в разрез с нашето условие.

Нека създадем граф G, в който върховете са простите делители на всички елементи от масива и 1-цата, а ребро между връх p и q ще има тогава когато pq е елемент на масива. Тоест, за всеки елемент ще свържем p и q (или p и 1, ако е просто число след нормализирането, или 1 и 1, ако е 1 след нормаличирането - в последния случай може директно да заявим, че отговора е 1 и да прекратим програмата, тъй като ще имаме примка, която по дефиниция е цикъл). По този начин може да кажем, че простите делители на елементите са върховете, а ребрата са елементите му. Каква ще е ползата от този граф? За всеки път от връх p до връх q, ако умножим ребрата, които съдържа и нормализираме, то произведението което ще получим ще е pq. Това ще е така, защото всеки връх по пътя ще бъде посетен четен брой пъти с изключение на стартовия p и последния q. Следователно най краткия подмасив, чието произведение на елементите му е тоен квадрат ще е най-краткия цикъл в графа!

За намиране на най-кратък цикъл в произволен граф ще отнеме $O(n^2)$ времева сложност: разглеждаме всеки връх като корен и калкулираме bfs дърво, след което гледаме за върхове, който се връщат обратно към корена (или към посетен вече връх) за да затворим цикъл. Това ще намери най-кратък цикъл само ако корена на bfs дървото се съдържа в такъв.

Графът G, който създадохме е мултиграф и освен това има специално условие, което е значително важно да се отбележи за бързината на алгоритъма. Няма да има свързани два върха, които са с по-голяма стойност от $\sqrt{maxA_i}$, където $max\ A_i$ е максималния елемент в дадения масив. Тъй като произведението им ще надвиши $max\ A_i$, а такъв елемент няма да има в масива и следователно не би трябвало да има и такова ребро. От тук може да заключим, че *ВСЕКИ* път в този граф има връх със стойност $\leq \sqrt{max\ A_i}$, за това ще използваме само тези върхове за корен/начало на bfs дърветата.