Пораждащи функции. Рекурентни уравнения. Инволюция.

Лектор: д-р Д. Кралчев (2021-02-25)

$a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ е един обект, който представлява безкрайна редица от естествени числа ($\mathbb{N}_0$). Може да кодираме тази редица чрез следната функция: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ Ако редицата е крайна, то функцията е полином. Ако редицата **не** е крайна, то изразът в дясно е просто формална сума – безкрайномерен вектор. В този случай, степените носят информация само за позицията на елементите на вектора. В повечето случаи, редът ще бъде сходящ само за някакви стойности на x. Ако редът е сходящ, то неговият интервал на сходимост ще е симетричен спрямо нулата.

$f(x)$ е степенен ред (сходящ или разходящ) и е в интервала от $-R$ до R, като единствените опции за асиметрия са $(-R, R]$ или $[-R, R)$, $R \in \mathbb{R}^+$. Най-хубавият случай е да е сходящ в целия интервал $(-\infty, +\infty)$, но ако $R \neq 0$, то това би било достатъчно добро за нас.

ОПФ обикновена пор. ф-я $: f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i$

ЕПФ експоненциална пор. ф-я $: f(x) = \frac{a_0}{0!} + \frac{a_1}{1!}x + \ldots + \frac{a_n}{n!}x^n + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i!}x^i$

Нека имаме редицата $1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$

ОПФ $: f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$, тъй като $\sum_{i=0}^{\infty} x_i = \frac{1-x^n}{1-x} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$.

ЕПФ $: f(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots = e^x$, $x \in (-\infty, \infty)$, развитие в ред на Маклорен за функцията $f(x) = e^x$.

Нека ЕПФ на $f(x)$ е $\frac{0!}{0!} + \frac{1!}{1!}x + \frac{2!}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n!}{n!}x^n + \ldots$

Следователно ОПФ $f(x) = 0!x^0 + 1!x^1 + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots \Rightarrow a_n = n!$

Развиване на някои основни функции в степенен ред:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\cos x = \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, x \in (-1, 1]$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \ |x| \le 1$$

$$(1+x)^\mu = 1 + \binom{\mu}{1} x + \binom{\mu}{2} x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\mu}{k}, \ |x| < 1$$

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \ldots + \frac{2^n x^n}{n!} + \ldots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\text{ОПФ}}{a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} x^k \text{ и } \underset{\text{ЕПФ}}{a_n} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$

Нека имаме ОПФ на $f_1(x)$ и $f_2(x)$, съответно в някакъв общ интервал (сечение) $(-R, R)$:

$f_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_k$ и $f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_k$. Тогава ще можем да пресметнем лесно следните операции:

$$f_1(rx) = a_0 + a_1 rx + \ldots + a_n r^n x^n + \ldots$$

$$f_1'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f_1(x) = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$f_1(x) \pm f_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) x_k$$

$$f_1(x)f_2(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ldots + \underbrace{\big(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \ldots + a_nb_0\big)}_{\sum_{k=0}^{n} a_i b_{n-i}}x^n + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

ЕПФ : $f_1(x) = a_0 + \dfrac{a_1}{1!}x + \dfrac{a_2}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n!}x^n + \ldots$

ЕПФ : $f_2(x) = b_0 + \dfrac{b_1}{1!}x + \dfrac{b_2}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{b_n}{n!}x^n + \ldots$

$f_1(x) \pm f_2(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(a_k \pm b_k)x^k$, но за $f_1(x)f_2(x)$ става сложно, тъй като ще трябва да се намешат биномни коефициенти.

Нека имаме някаква много бързо растяща редица, например $a_n = n!$

ЕПФ : $f(x) = \dfrac{a_0}{0!}x^0 + \dfrac{a_1}{1!}x^1 + \dfrac{a_2}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{a_n}{n!}x^n + \ldots =$

$$= 1 + x + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},\ |x| < 1$$

ОПФ : $f(x) = 0!x^0 + 1!x^1 + 2!x^2 + \ldots + n!x^n + \ldots =$ не схожда

<u>Даламбер</u>: $\mathscr{D} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, $R = \dfrac{1}{\mathscr{D}}$ е радиуса на сходимост. Може да използваме и Коши, ако не съществува и взимаме няй-дясната точка на сгъстяване и т.н.

Задачи

Задача 1.
Твърдение: Всяко цяло неотрицателно число има един единствен запис в десетична бройна система.

Доказателство:

Нека $a_n =$ броя на представянията на n в десетична бройна система (важи за всяка k-бройна система)

ОПФ : $A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

$$\begin{aligned} A(x) &= (1 + x + x^2 + \ldots + x^{10}) \times \\ &\quad (1 + x^{10} + x^{20} + \ldots + x^{90}) \times \\ &\quad (1 + x^{100} + x^{200} + \ldots + x^{900}) \times \\ &\quad \times \ldots \times \end{aligned}$$

$$= \frac{\cancel{1 - x^{10}}}{1 - x} \times \frac{\cancel{1 - x^{100}}}{\cancel{1 - x^{10}}} \times \frac{1 - x^{1000}}{\cancel{1 - x^{100}}} \times \ldots = \frac{1 - x^{\infty}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x},$$ тъй като степенния

ред е сходящ за $|x| < 1$.

$$A(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$ за $|x| < 1$.

a_n е коефициента пред x^n в степенния ред $A(x)$. Следователно $a_n = 1$.

Задача 2. Имаме две зарчета – стандартно номерирани с числата (точките) от 1 до 6. Хвърляме зарчетата и гледаме само сбора. При това положение може да получим следното разпределение:

Брой точки	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Брой начини за получаване	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Може ли да преномерираме (по различен начин) стените на зарчетата с **цели положителни числа (брой точки)**, така че сборът на точките от двете нови зарчета, при хвърляне, да има същото разпределение като на старите? Ако не може – обосновете отговора си. Ако може – намерете броя на всички начини, по които може да се осъществи тази преномерация.

Решение: Нека $f_1(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ е обикновената пораждаща функция за случайната величина X_1 – падналите се точки на първото зарче. Аналогично за броя на падналите се точки на второто зарче X_2 ще имаме същата обикновена пораждаща функция: $f_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Начините, по които може да получим сума k при хвърлянето на двете зарчета ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ независими експерименти) е коефициента пред x^k в полинома $f_1(x)f_2(x)$.

$f_1(x)f_2(x) = x^2 + 2x^3 + \ldots + 6x^7 + 5x^8 + \ldots + x^{12}$, което е обикновената пораждаща функция на случайната величина $X_1 + X_2$ – сумата от точките при хвърлянето на две стандартни зарчета.
Търсим $g_1(x)$ и $g_2(x)$ да са такива функции, за които е изпълнено:
1. $g_1(x)g_2(x) = f_1(x)f_2(x)$
2. $g_1(x) \neq f_1(x)$ (т.е. g_1 и g_2 са различни функции от f_1 и f_2)

$$f_1(x)f_2(x) = \left[x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^2 = \left[x\left(1 + x + x^2\right)(1 + x^3)\right]^2 =$$

$$= x^2(1 + x + x^2)^2(1 + x)^2(1 - x + x^2)^2$$

Знаем, че функциите g_1 и g_2 ще наследят някои свойства от функциите f_1 и f_2, като например $g_1(0) = g_2(0) = 0$ (т.к. няма страни без точки по тях – по условие) и $g_1(1) = g_2(1) = 6$ (от условието, че заровете са шестстенни).

За да е изпълнено първото условие е необходимо и в двете функции да имаме множител x, а за да бъде изпълнено и второто е необходимо и в двете функции да имаме точно една двойка и една тройка ако заместим x с единица.

Следователно,

$$\begin{cases} g_1(x) = x(1 + x + x^2)(1 + x)A(x) \\ g_2(x) = x(1 + x + x^2)(1 + x)B(x) \end{cases}$$

Ако $A(x) = B(x) = (1 - x + x^2)$ ще получим същите зарчета като оригиналните. За да получим различи зарчета е необходимо останалите множители да разпределим по начин, по който да получим различни пораждащи функции. Това е възможно само по един начин:
$A(x) = 1$ и $B(x) = (1 - x + x^2)^2$. Тогава:

$$g_1(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \longrightarrow \{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$$
$$g_2(x) = (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4) =$$
$$= x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \longrightarrow \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

Новите зарчета са съответно $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ и $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$ и това са единствените две нови зарчета, които ще имат същото разпределение като оригиналното при стандартните зарчета. Други две зарчета отговарящи на условието не съществуват.

Задача 3. (Предварителен кръг на румънската олимпиада по математика през 1989 г.) Дадена е редицата: $a_0 = a_1 = 1,\ \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 2^n a_n$ за всяко цяло число $n \geq 0$. Намерете затворена форма на общия член.

<u>Решение</u>: $a_0 = a_1 = \mathbf{1}$

$$4a_2 = a_0a_2 + a_1a_2 + a_2a_0 = 2a_2 + 1 \Rightarrow a_2 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$8a_3 = a_0a_3 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_3a_0 = 2a_3 + 1 \Rightarrow a_3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}$$

Хипотеза: $a_n = \dfrac{1}{n!}$. Нека допуснем че хипотезата е вярна за всчки числа от 0 до n, като очевидно за база може да изпилзваме $n = 0,1,2,3$ и да разгледаме a_{n+1}. Имаме, че

$$a_{n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\right) = \frac{1}{n! \times 2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \frac{\cancel{2^{n+1}}}{n! \times \cancel{2^{n+1}}} = \frac{1}{n!}$$

Редицата е еднозначно определена, тъй като всеки следващ елемент се определя еднозначно от всички елементи на редицата преди него.

Втори подход (в случай че не успеем да открием редицата):

Нека ОПФ е $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$

Следователно $f^2(x) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + \ldots + 2^na_n + \ldots = f(2x)$. Следователно $f^2(x) = f(2x)$.

- $f(0) = a_0 = 1$
- $f'(0) = a_1 = 1$

Следователно искаме да решим функционалното уравнение $f^2(x) = f(2x)$, с двете начални условия по-горе.

Функиите, за които удвояването на аргумента е еквивалентно на повдигането на квадрат имат вида $f(x) = c^x$ (показателните функции заменят умножението със събиране).

$f'(x) = c^x \times \ln c \Rightarrow f'(0) = \ln c$, но $f'(0) = 1 \Rightarrow \ln c = 1 \Rightarrow c = e$.

Следователно $f(x) = e^x$.

Сега, след като намерихме функцията, трябва да се върнем обратно към редицата. Развиваме функцията в степенен ред:

$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, следователно коефициента пред x^n е $\frac{1}{n!}$ и от обикновената пораждаща функция, следва, че $a_n = \frac{1}{n!}$, което е решение на задачата.

Единствения логически проблем тук е, че не знаем дали функцията ще има единствено решение $f(x) = c^x$, но тъй като всеки член на редицата се определя еднозначно от предходните членове, то и пораждащата функция ще е определена еднозначно, а между пораждащата функция и развиването на функцията в степенен ред има еднозначност (всяка редица a_n си има съответна пораждаща функция f, т.е. колкото решения има рекурентното уравнение, толкова решения ще има и за функцията), което означава, че решението на функционалното уравнение ще е само едно.

С тази обосновка, това е законно решение на тази задача.

Трети подход: Да допуснем, че сме стигнали до функционалната зависимост $f^2(x) = f(2x)$ с началните условия $f(0) = a_0 = 1 = f'(0) = a_1$ и не можем (не е толкова лесно) да познаем (дори и частично) каква е функцията.

За да решим задачата без налучкване е необходимо да сме доста напреднали в математическия анализ. Ето го и следното по-общо решение:

Заместваме x с $\frac{x}{2}$: $f(x) = f^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

Заради повдигането на квадрат е сигурно, че f приема само неотрицателни стойности. Затова

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = f^{\frac{1}{2}}(x).$$

По индукция следва, че $f\left(\frac{x}{2^k}\right) = f^{\frac{1}{2^k}}(x),\ \forall k \in \mathbb{N}$.

В това равенство нека допустимото число x е произволно, но фиксирано, а k да бъде променливо, като оставяме $k \longrightarrow \infty$. За удобство полагаме $y = f(x)$, като y също е фиксирано. Следователно равенството приема вида:

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) = y^{\frac{1}{2^k}},\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Логаритмуваме и изразяваме $\ln y$, така че y Да остане само в едната страна на равенството:

$$\frac{\ln f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{1}{2^k}} = \ln y,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

За удобство полагаме $z = \frac{x}{2^k}$; величината z ще бъде променлива и ще клони към 0.

$$\frac{\ln f(z)}{z} = \frac{\ln y}{x}.$$

Извършваме граничен преход:

$$\lim_{z \to +0} \frac{\ln f(z)}{z} = \frac{\ln y}{x}.$$

Понеже $f(0) = 1$, то $\ln f(0) = \ln 1 = 0$ и последното равенство може да се преработи по следния начин:

$$\lim_{z \to 0} \frac{\ln f(z) - \ln f(0)}{z - 0} = \frac{\ln y}{z}.$$

От определението за производна:

$$\left. \frac{\partial}{\partial z} \ln f(z) \right|_{z=0} = \frac{\ln y}{x}.$$

Диференцираме:

$$\frac{f'(0)}{f(0)} = \frac{\ln y}{x}.$$

Като решим това уравнение относно $y = f(x)$, намираме търсената функция:

$$y = f(x) = e^x.$$

<u>Инволюция</u>. Инволюцията е функция, която като се приложи два пъти ни връща в изходното положение. $f : A \to A,\ f\big(f(x)\big) = x,\ \forall x \in A.$

Нека A е крайно множество. Ако f е инволюция и $f(a) = b$, то $f(b) = a$. Аналогично, ако имаме $f(c) = d$, то $f(d) = c$ и т.н. Тоест инволюцията разбива множеството на ненаредени двойки. Но има и още един случай: $f(x) = x$ или аналогично $f(y) = y$ и т.н. Тези елементи се наричат неподвижни точки (не само за инволюцията). Неподвижниточки има друго значение от понятието фиксирани точки. Кое ще фиксираме и кое ще се мени го решаваме ние, а това дали една точка е неподвижда не зависи от нас – това зависи от функцията. Например, неподвижните точки на $f(x) = x^2$ са решенията на уравнението $x^2 = x$, т.е. 0 и 1.

Следователно множеството A има общо $\underset{\text{чифт}}{2k} + \underset{\text{неподвижни}}{n}$ елемента. Т.е. $|A| = 2k + n$.

Тоест броя на елементите на множеството A ще има същата четност като тази на броя на неподвижните точки на f.

Ако f_1 и f_2 са **две различни инволюции** върху едно и също крайно множество A. Тогава броя на неподвижните точки n_1 на f_1 и n_2 на f_2 може да не е един и същ, но със сигурност ще е с една и съща *четност*, тъй като и двата броя ще имат четността на $|A|$.

<u>Пример</u>:

Докажете, че $g(x) = x^6 + 3x^4 - x^2 + 5 = 0$ има четен брой реални корени.

Очевидно ако x_0 е корен на уравнението, то и x_0 ще е корен на уравнението, но $f(x) = -x$ е инволюция с единствена неподвижна точка $x = 0$, която не е решение на нашето уравнение. Но множеството A, в което е дефинирана f е множеството от решения на уравнението и следователно всички останали елементи от това множество, който са четен брой са решение на уравнението.

Задача 3 (въведение).

Нека p е просто число. Тогава p има е от вида $4k + 1$ или $4k + 3$.
Точните квадрати могат да са от вида $(2k)^2$ или $(2k + 1)^2$, т.е. дават остатък 0 или 1 по модул от 4.

Тогава $a^2 + b^2 \equiv 0,1,2 \mod 4$, за $a, b \in \mathbb{N}$.
Тъй каго просто число не може да бъде точен квадрат, следващия естествен въпрос е може ли да бъде сбор от два квадрата? Очевидно, тъй като сбор от два квадрата не може да дава остатък 3 при целочислено деление на 4, то простото число не може да бъде от вида $4k + 3$ и остава да бъде от вида $4k + 1$.

Можат ли простите числа от вида $4k + 1$ да се представят като сбор от два квадрата?

$$\begin{aligned}
4 \times 1 + 1 &= 5 = 1^2 + 2^2 \\
4 \times 3 + 1 &= 13 = 2^2 + 3^2 \\
4 \times 4 + 1 &= 17 = 1^2 + 4^2 \\
4 \times 7 + 1 &= 29 = 2^2 + 5^2 \\
&\qquad\qquad\quad \cdots
\end{aligned}$$

Да се докаже, че всяко просто число от вида $\mathbf{4k + 1}$ може да се представи като сбор от два квадрата.

Нека $p = 4k + 1$ е просто число. Да разгледаме множеството
$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 : x^2 + 4yz = p\}$

Дефинираме функцията в S:

$$(x, y, z) \mapsto \begin{cases} (x + 2z, z, y - x - z), & \text{ако } x < y - z \\ (2y - x, y, x - y + z), & \text{ако } y - z < x < 2y \\ (x - 2y, x - y + z, y), & \text{ако } x > 2y \end{cases}$$

Очевидно, който и от трите образа на (x, y, z) спрямо дефинираната по-горе функция да вземем, той ще бъде от естествени (неотрицателни цели) числа.

На пръв поглед може да кажем, че има изпуснат случай, например $x = 2y$, но тази наредена тройка трябва да е от S, а тя не е тъй като простото число p ще се дели на 4, което е невъзможно и следователно $x \neq 2y$. Аналогично и $x \neq y - z$, тъй като простото число p ще стане точен квадрат, което отново е невъзможно.

Функцията е коректно дефинирана, но дали нейният образ също е в S. Дали функционалното множество съвпада с дефиниционното?

Нека проверим за първия елемент:

$(x + 2z)^2 + 4z(y - x - z) = x^2 + \cancel{4xz} + \cancel{4z^2} + 4yz \cancel{- 4xz} - \cancel{4z^2} = x^2 + 4yz$ и т.н. за останалите елементи. Т.е. на тази функция ако и подадем елемент от S ще отиде отново в S.

Инволюция ли е тази функция?

Да предположим че при първото прилагане на функцията сме отишли на третия ред:
$(x, y, z) \mapsto (x - 2y, x - y + z, y)$, но при второто прилагане ще отиде отново в първото и т.н.

Очевидно точката $(x, y, z) \rightarrow (1,1,z)$ е единствената неподвижна точка на тази инволюция.

Дефинираме друга функция $S \rightarrow S: \ (x, y, z) \rightarrow (x, z, y)$, която очевидно е инволюция. Тя обаче със сигурност ще има нечетен брой точки, т.е. поне една (еднаква четност с другата инволюция). Тогава нека (x_0, y_0, y_0) е тази неподвижна точка.

$x_0^2 + 4y_0^2 = p \Rightarrow$ сбор от два квадрата. (Zagier's "one-sentence proof")

Допълнителни задачи:

Задача 1. Намерете пораждащата функция на редицата с общ член $a_n = n^3$, $n = 0,1,2,...$

Решение: $f(x) = 0^3x^0 + 1^3x^1 + 2^3x^2 + \ldots + n^3x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} k^3x^k =$

$$= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} k^2x^k\right] = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} kx^k\right]\right] = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right]\right]\right] =$$

$$= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{1-x}\right]\right]\right] = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]\right] =$$

$$= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot \frac{1 \cdot (1-x)^2 - x \cdot 2 \cdot (1-x) \cdot (-1)}{(1-x)^4}\right] = x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x(1-x) + 2x^2}{(1-x)^3}\right] =$$

$$= x \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x + x^2}{(1-x)^3}\right] = x \cdot \frac{(1+2x)(1-x)^3 - x(1+x) \cdot 3 \cdot (1-x)^2 \cdot (-1)}{(1-x)^6} =$$

$$= x \cdot \frac{(1+2x)(1-x) + 3x(1+x)}{(1-x)^4} = x \cdot \frac{1 + 4x + x^2}{(1-x)^4} = \frac{x + 4x^2 + x^3}{(1-x)^4}.$$

□

Задача 2. Намерете точната стойност на $\sum_{k=1}^{\infty} \binom{2k}{k} \frac{1}{5^k}$.

Решение: От обобщената формула на Нютон имаме, че $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, за $|x| < 1$, където $\alpha \in \mathbb{R}$ и коефициентите се пресмятат по следния начин: $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$. За $\alpha = -\frac{1}{2}$ имаме, че $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^k$, където

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!} = \frac{1.3.5...(2k-1).(-1)^k}{2^k k!}$$, но
(1)

$$2^k k! = 2^k.1.2.3...k = 2.4.6...2k \qquad (2)$$

Следователно умножавайки (1) по $\frac{2^k k!}{2^k k!}$ получаваме, че

$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k . \frac{2^k k!}{2^k k!} . \frac{1.3.5...(2k-1)}{2^k k!}$, което благодарение на (2) се опростява до

$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k . \frac{1}{2^{2k}} . \frac{(2k)!}{k!k!} = (-1)^k . \frac{1}{2^{2k}} . \binom{2k}{k} = \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k}$. Следователно

$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^k}\binom{2k}{k} x^k$. Нека заменим x с $-4x$ (като стесним интервала $|x| < \frac{1}{4}$).

Тогава $(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} x^k$, което е вярно за всяко $|x| < \frac{1}{4}$, но $\frac{1}{5} < \frac{1}{4}$ и следователно може да вземем $x = \frac{1}{5} \Rightarrow \left(1 - \frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{1}{5^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{2k}{k}\frac{1}{5^k}$,

като по този начин от дясната страна получихме търсената сума плюс единица, а от лявата страна получаваме $\sqrt{5}$. Следователно търсеният отговор е $\sqrt{5} - 1$.

$\square$

Задача 3. (Задача 1 от изпит ИГКТГ 2017/2018 г. летен семестър)

Намерете формула за общия член на редицата $a_0 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 3a_{n-3} + \ldots + na_0$ за всяко цяло число $n \geq 1$.

Решение:

I н/н: (пораждащи функции) Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е ОПФ на търсената редица и нека разгледаме редицата $b_n = n$, за $n \in \mathbb{N}_0$. Пораждащата функция на b_n ще е $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} n x^n$.

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = x^0 a_0 b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = 0 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sum_{k=0}^{\infty} (n-k) a_n \overset{\text{по усл.}}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) - a_0 x^0 = f(x) - 1.$$

Следователно получихме функционалното уравнение: $f(x)g(x) = f(x) - 1 \Rightarrow$

$f(x)\big(g(x) - 1\big) = -1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{1}{1 - g(x)}$. Функцията $g(x)$ обаче, може да я намерим в явен вид от своята дефиниция.

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = x \,.\, \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right] = x \,.\, \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{1-x} \right] = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Заместваме с получения израз за $g(x)$ във $f(x)$ и получаваме, че:

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 - x} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 3x + 1} = 1 + \frac{x}{x^2 - 3x + 1}.$$

Знаменателя на $f(x)$ има две нули - числата $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Следователно може да го разложим на множители и да представим функцията като сбор от елементарни дроби по следния начин:

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right).$$

$$\frac{x}{x^2-3x+1}=\frac{A}{x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{B}{x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$ Привеждаме под общ знаменател и получаваме:

$$\frac{1.x+0}{x^2-3x+1}=\frac{(A+B)x-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}A+\frac{3+\sqrt{5}}{2}B\right)}{x^2-3x+1}.$$ Това равенство е тъждество по отношение на променливата x и следователно и коефициентите пред съответните степени на x трябва да са равни:

$$\begin{cases}A+B=1\\ \frac{3-\sqrt{5}}{2}A+\frac{3+\sqrt{5}}{2}B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\ (3-\sqrt{5})A+(3+\sqrt{5})B=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=1\\ 3(A+B)=\sqrt{5}(A-B)\end{cases}\Rightarrow$$

$A-B=\frac{3}{\sqrt{5}}\Rightarrow A=\frac{1+\frac{3}{\sqrt{5}}}{2}=\frac{5+3\sqrt{5}}{10}$ и следователно $B=\frac{5-3\sqrt{5}}{10}$ са единствените

решения на системата. Оттук получаваме:

$$f(x)=1+\frac{x}{x^2-3x+1}=1+\frac{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}{x-\frac{3+\sqrt{5}}{2}}+\frac{\frac{5-3\sqrt{5}}{10}}{x-\frac{3-\sqrt{5}}{2}}=$$

$$=1-\frac{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}-x}+\frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}-x}=1-\frac{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{\frac{3\sqrt{5}-5}{10}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}=$$

$$=1-\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}x}+\frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}x}=1-\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n+\frac{\sqrt{5}}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n x^n$$

От тук намираме явна формула за общия член на търсената редица:

$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$, за всяко цяло число $n>0$. Тази формула не е валидна при $n=0$, тъй като $a_0=1$ по условие.

□