Специални числа.
Числа на Стирлинг. Числа на Бел. Числа на Ойлер.

(2021-03-18(21))

Числа на Стирлинг (от първи род).

Означение: $\underset{\text{без знак}}{c(n,k)}$, $\underset{\text{със знак}}{s(n,k)}$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n,k)$.

Имаме, че $s(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ и следователно $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = c(n,k) = |\,s(n,k)\,|$.

$s(n,k)$ се дефинира чрез пораждаща функция:

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1) = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$$

$s(n,k)$ е коефициента пред x^k в $(x)_n$. Следователно може да дефинираме допустимите стойности за параметрите на $s(n,k)$: $0 \le k \le n$.

Твърдение: $s(n+1,k) = -\,n\,.\,s(n,k) + s(n,k-1)$

Доказателство:

$$s(n+1,k) = [x^k]\big[\underbrace{x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)}_{n}(x-n)\big] = [x^k]\prod_{k=0}^{n}(x-k) =$$

$$= [x^k]\left(x\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) - n\prod_{k=0}^{n-1}(x-k)\right) = [x^k]x\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) - [x^k]n\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) =$$

$$= [x^{k-1}]\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) - n[x^k]\prod_{k=0}^{n-1}(x-k) = s(n,k-1) - n\,.\,s(n,k),$$ което искахме да докажем. $\square$

Получихме рекурентна зависимост, но нека видим и кои са началните условия.

$$(x)_3 = \underbrace{x(x-1)(x-2)}_{\text{3 множителя}} = 1\cdot x^3 - 3\cdot x^2 + 2\cdot x \Rightarrow s(3,3) = 1,\ s(3,2) = -3,\ s(3,1) = 2$$

$$s(0,0) = [x^0](\underbrace{\ 1\ }_{\substack{\text{дъното} \\ \text{на празно} \\ \text{произведение}}}) = 1;$$

$$\underset{n>0}{s(n,0)} = [x^0]\big(x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)\big) = 0;$$

$\underset{0<k\le n}{s(0,k)} = [x^k](1) = 0$. По-общо, може да дефинираме, като $\underset{k>n}{s(n,k)} = 0$ (тъй като нямаме толкова голям степенен показател на x);

$s(n,n) = [x^n]\big(x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\big) = 1.$

Пример. $s(4,3) = -3.s(3,3) + s(3,2) = -3.1 + \big(-2.s(2,2) + s(2,1)\big) =$
$= -3 - 2.1 + \big(-1.s(1,1) + s(1,0)\big) = -3 - 2 - 1 + 0 = -6.$

Проверка: $[x^3]\big(x(x-1)(x-2)(x-3)\big) = [x^3]\big(-3x^3 - 2x^3 - 1x^3\big) = -6.$

s(n, k)										
n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	−1	1							
3	0	2	−3	1						
4	0	−6	11	−6	1					
5	0	24	−50	35	−10	1				
6	0	−120	274	−225	85	−15	1			
7	0	720	−1764	1624	−735	175	−21	1		
8	0	−5040	13068	−13132	6769	−1960	322	−28	1	
9	0	40320	−109584	118124	−67284	22449	−4536	546	−36	1

Числата на Стирлинг без знак се дефинират по следния начин:
$c(n,k) = |s(n,k)| = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$.
$\Rightarrow c(0,0) = c(n,n) = 1$ и $\underset{n>0}{c(n,0)} = \underset{k>n}{c(n,k)} = 0$, т.е. началните условия се запазват.

$\mathbf{c(n,k)}$										
$\mathbf{n}/k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Знака на $s(n,k)$ зависи от четността на $n + k$. Следователно $s(n,k)$ и $s(n,k-1)$ са от различни четности. От друга страна, $s(n+1,k)$ има същата четност като $s(n,k-1)$.

От рекорентната формула, която изведохме знаем, че
$s(n+1,k) = s(n,k-1) - n \,.\, s(n,k)$.
Сега, ако решим да сменим знаците ще имаме един от двата случая:

$c(n+1,k) = c(n,k-1) + n \,.\, c(n,k)$ или $-c(n+1,k) = -\,c(n,k-1) - n \,.\, c(n,k)$, което е същото като горното.

Окончателно, числата на Стирлинг без знак удовлетворяват следното рекурентно уравнение: $c(n+1,k) = c(n,k-1) + n \,.\, c(n,k)$.

Твърдение: Числото на Стирлинг от първи род без знак $c(n, k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ е броят на пермутациите на n елемента без повторения с k цикъла.

Например: $3! = 6$ са пермутациите на 3 елемента.

$123, 132, 213, 231, 312, 321$

- С 3 цикъла: $123 = (1)(2)(3)$
- С 2 цикъла: $132 = (1)(23);\ 213 = (2)(31);\ 312 = (3)(21)$
- С 1 цикъл: $312 = (132);\ 231 = (123)$

Доказателство: Нека $f(n, k)$ е броя на пермутациите на n елемента с k цикъла. Проверяваме началните условия: $f(0,0) = 1,\ f(n,0) = 0$ (всяка пермутация съдържа поне един цикъл), $f(n, k) = 0$ (при $k > n$, тъй като всеки цикъл съдържа поне един елемент, то не може циклите да са повече от елементите), $f(n, n) = 1$ (идентитет - всеки елемент е сам в цикъл със себе си, т.е. е неподвижен)

Следователно началните условия са удовлетворени. Нека сега пресметнем $f(n + 1,k)$ или по-точно да намерим рекурентна формула за нея.

Новият елемент $n + 1$ или е самичък в цикъл или не е. Ако е самичък в цикъл, то след премахването му елементите и циклите ще намалеят с по един, т.е. $n + 1 \mapsto n$ и $k \mapsto k - 1$.

Ако е в някой от вече наличните k цикли, тогава премахването му няма да промени броя на циклите $k \mapsto k$, но ще трябва да се включи в друг цикъл. Включването може да стане след елемент 1, след елемент 2 и т.н., т.е. по n начина. Следователно $f(n + 1,k) = f(n, k - 1) + n\,.\,f(n, k)$.

f удовлетворява началните условия на числата на Стирлинг от първи род, както и рекурентната им зависимост и тъй като тези две условия определят редицата еднозначно, то $f \equiv c$. Т.е. $c(n, k)$ числата, броят пермутациите на n елемента с k цикъла.

$\square$

Числа на Стирлинг (от втори род). Бележим с $S(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Този път дефинираме $S(n, k)$ комбинаторно, а не чрез пораждаща функция. $S(n, k)$ или $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ е броя на начините, по които може да разделим множеството от n номерирани елемента в k непразни неномерирани подмножества (купчинки от елементи - нямат ред (разпознават се само по елементите си) и не съществува празна купчинка). Тези числа също нямат представяне с елементарни функции.

Начални условия: $\left\{ {n \atop n} \right\} = 1$ (всеки от n-те елемента е в отделна купчинка), $\left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$, за $n \geq 1$ (всички n елемента са в една купчинка) и може да додефинираме, че $\left\{ {n \atop k} \right\} = 0$, за $n \geq k$.

Рекурентна зависимост:

Търсим рекурентна зависимост за $\left\{ {n+1 \atop k} \right\}$.

$n+1$-вия елемент може да бъде отделен в собствена купчинка, т.е. $\left\{ {n \atop k-1} \right\}$ или да е в някоя от останалите купчинки, т.е. $\left\{ {n \atop k} \right\}$, като това може да стане по k начина (колкото са купчинките). Следователно $\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k \left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\}$.

$\mathbf{S}(\mathbf{n}, \mathbf{k})$											
$\mathbf{n}/k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Числа на Бел.

Числата на Бел означаваме с B_n и дефинираме по следния начин: B_n е броя на разбиванията на n елементно множество. Разликата с числата на Стирлинг от втори род е, че тук не се казва на колко подмножества се разбива множеството, докато при числата на Стирлинг от втори род имаме параметър k, който конкретизира броя на тези подмножества.

Връзката между числата на Стирлинг от втори ред и числата на Бел може да запишем по следния начин: $B_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$. Оказва се, че B_n няма явен вид.

Началните условия са $B_0 = B_1 = 1$. Първите няколко числа на Бел са :

$\underset{0}{1}, \underset{1}{1}, \underset{2}{2}, \underset{3}{5}, \underset{\dots}{15}, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975$ и т.н. $(0 \leq n)$

Пример: Разбиванията на три елементно множество $\{a, b, c\}$ са:
$\{\{a\},\{b\},\{c\}\};\ \{\{a,b\},\{c\}\};\ \{\{a,c\},\{b\}\};\ \{\{a\},\{b,c\}\};\ \{\{a,b,c\}\}.\ B_3 = 5.$

<u>Твърдение</u>: Рекурентна формула: $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

<u>Доказателство</u>:

Питаме се, по колко начина може да разбием множество от $n+1$ на подмножества, всяко от които не е празно.

$n+1$-вия елемент трябва да попада в някое от множествата. Въпросът е заедно с колко други елемента участва в едно и също подмножество. Нека $n+1$ е в множеството A на цялото множество T, което разбирваме - $|T| = n+1$. Нека елементите извън A са k на брой. Тогава тези k елемента може да изберем по $\binom{n}{k}$ начина и освен това може да ги разбием по B_k начина. Следователно, $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$, което искахме да докажем.

$\square$

Лесен начин за ръчно пресмятане на числата на Бел:

B_n				
1				
1	2			
2	3	5		
5	7	10	15	
15	20	27	37	52
52	…			

Задача: Намерете експоненциалната пораждаща функция на числата на Бел в явен вид.

Решение:

ЕПФ: $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \overset{n \mapsto n+1}{=} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} =$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k} B_k x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k} B_k x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! B_k x^{n+1}}{(n+1)! k! (n-k)!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-k)!(n+1)} =$$

$$= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k+1}}{(n + \cancel{k} - \cancel{k})!(n+k+1)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k+1}}{n!(n+k+1)}$$

$$\Rightarrow B'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} e^x = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} = e^x B(x)$$

Получихме следното диференциално уравнение с разделящи се променливи: $B'(x) = e^x B(x) \Rightarrow \frac{\partial B(x)}{\partial x} = e^x B(x) \Rightarrow \frac{\partial B(x)}{B(x)} = e^x \partial x$, като пропускаме да разгледаме $B(x) = 0$, тъй като ще го разгледаме по-късно.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{B(x)} \, \mathrm{d}\, B(x) = \int e^x \, \mathrm{d}\, x \Rightarrow \ln |B(x)| = e^x + c, \text{ където } c = const.$$

$B(x) = \pm\, e^{e^x + c} = \pm\, e^{e^x} . e^c = \tilde{c} \,.\, e^{e^x}$, където $\tilde{c}$ е някаква нова константа (включително 0, която пропуснахме да разгледаме)

$\Rightarrow B(x) = \tilde{c} e^{e^x}$ е решението на функционалното диференциално уравнение.

Но от началните условия имаме, че $1 = B(0) = \tilde{c} \,.\, e \Rightarrow \tilde{c} = \frac{1}{e} \Rightarrow B(x) = e^{e^x - 1}$.

Така изведохме експоненциалната пораждаща функция на числата на Бел:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

□

<u>Формула на Добински за числата на Бел</u>:

От тази функкия може да получим формулата на Добински: $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$, която е явна, но не е затворена, т.е. не е проста. Този ред е сходящ, но за големи n схожда бавно.

$k!$ ще надхвърли $k!$ от даден момент натам, но за големи n, този момент може да се забави доста.

<u>Доказателство</u>: Ние вече намерихме ЕПФ: $B(x) = e^{e^x - 1}$; B_n ще е коефицента пред x^n в ЕПФ умножен по $n!$ (тъй като в ЕПФ го делим на $n!$). Нека развием тази функкия в степенен ред:

$$e^{e^x-1} = \frac{1}{e}e^{e^x} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(e^x)^n}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{n!k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k x^k}{n!k!e} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^k}{k!e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}\right)$$. Следователно $B_k = \frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}$ или аналогично (след

преименуване на променливите), $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$, което искахме да докажем.

$\square$

<u>Задача</u> (сортиране):

Имаме купчинка от n карти и разглеждаме следното разбъркване: избираме случайна карта от купчинката, изтегляме я и я слагаме на върха на купчинката (може дори тази карта да е най-горната - в такъв случай няма да преместим нищо). Тази операция я правим точно толкова пъти, колкото са картите - n на брой. „Добро“ ли е полученото случайно разбъркване след n-те операции? (Упътване: За да може да определим едно разбъркване като „добро“ е необходимо да докажем, че след него - всяка пермутация се появява равно вероятно.)

<u>Решение</u>:

Тъй като ние не знаем какво ще е първоначалното нареждане на картите, от което стартираме, то може да считаме че разбъркването за всяка една от възможните $n!$ разбърквания. Тази стартова наредба може един вид да играе ролята на равномерна случайна величина. За да проверим дали едно разбъркване е „добро“ е достатъчно да проверим каква е вероятността след операциите от условието да получим идентитета (т.е. отново същото нареждане на картите като стартовото).

<u>Всички възможни начини</u> за протичане на играта са общо:

$$\underset{\text{за 1-ви ход}}{n} \times \underset{\text{за 2-ри ход}}{n} \times \ldots \times \underset{\text{за n-ти ход}}{n} = n^n.$$

Благоприятните възможни начини (т.е. тези, при които в края на разбъркването ще се получи идентитета) са:

Нека номерираме операциите с $1,2,\ldots,n$. При всяко теглене на карта ние разбиваме множеството от n карти спрямо картата която сме изтеглили от съответното теглене, по следния начин: в едно множество слагаме номерата на ходовете, при които е изтеглена една и съща карта.

Например: Нека картите са $n = 7$ и нека множествата са $\underbrace{\{1,4,6\}}_{k_1}$; $\underbrace{\{2,7\}}_{k_2}$; $\underbrace{\{3,5\}}_{k_3}$.

Тези множества описват до някаква степен как е протекло самото разбъркване. Това означава, че в първото множество на 1-вия, 4-тия и 6-тия ход сме изтеглили една и съща карта.

На 2-рия и 7-мия ход сме изтеглили отново една и съща карта, но различна от тази в първото множество. На 3-тия и 5-тия ход отново сме изтеглили една и съща карта, но различна от тези на първото и второто множество. Така получените множества може да породят въпроса: „Кога сме изтеглили картите с номера k_4, k_5, k_6, k_7?" Отговорът е, че тях не сме ги избирали измежду всички n операции. През цялото време сме теглили само карти с номера k_1, k_2, k_3, където $k_i \in 1,2,\ldots,7$, за $i = 1,7$ и $k_i \neq k_j$, т.е. това е преномериране на числата от 1 до 7.

Това което направихме до тук все още не е биекция между разбъркванията и всички разбърквания. За да стане биекция е необходимо да определим и кои карти сме изтеглили на всеки ход. Но ако се ограничим само до благоприятните случай и определим изтеглените карти, то тогава ще имаме биекция.

Нека номерираме картите от стартовата купчинка съответно с номерата от 1 до n. Очевидно последната изтеглена карта трябва да е 1, за да може след като я поставим най-отгоре - отново да дойде на мястото си (търсим идентитета). Но карта номер 1 от стартовата купчинка вече е в множество с мощност поне 1 (в нейното множество от разбиването, което описахме по-горе има поне един елемент и той е номера на ход-а, в който сме я изтеглили тази карта, а именно n. Въпроса е, че може да има и други ходове, в които сме я теглили.) На предходния ход трябва да сме изтеглили карта с номер 2, тъй като тя ще се похлупи от карта с номер 1 на следващия ход и ще застане на мястото си (т.е. в множеството, което съдържа елемента $n - 1$ ще са ходовете, в които сме теглили карта 2) и т.н.

За нашия пример това ще изглежда по следния начин:

$$\underbrace{\{1,4,6\}}_{\substack{\text{ходовете, на} \\ \text{които теглим} \\ \text{карта } 2}} \quad ; \quad \underbrace{\{2,7\}}_{\substack{\text{ходовете, на} \\ \text{които теглим} \\ \text{карта } 1}} \quad ; \quad \underbrace{\{3,5\}}_{\substack{\text{ходовете, на} \\ \text{които теглим} \\ \text{карта } 3}}$$

$$1234567 \overset{\text{карта 2}}{\underset{\text{ход 1}}{\mapsto}} 2134567 \overset{\text{карта 1}}{\underset{\text{ход 2}}{\mapsto}} 2134567 \overset{\text{карта 3}}{\underset{\text{ход 3}}{\mapsto}} 3214567 \overset{\text{карта 2}}{\underset{\text{ход 4}}{\mapsto}} 2314567 \mapsto$$

$$\overset{\text{карта 3}}{\underset{\text{ход 5}}{\mapsto}} 1234567 \overset{\text{карта 2}}{\underset{\text{ход 6}}{\mapsto}} 2134567 \overset{\text{карта 1}}{\underset{\text{ход 7}}{\mapsto}} 1234567 \equiv id.$$

Това вече е биекция между благоприятните протичания на разбъркването и разбиванията на n елементно множество.

Следователно търсената вероятност е n-тото число на Бел, разделено на n^n, т.е. $\mathbb{P}(\text{„добро“ разбъркване}) = \dfrac{B_n}{n^n}$ или казано по алтернативен начин, това е вероятността да получим идентитета (стартовата купчинка) след изпълнението на n -те операции от условието. Тази вероятност обаче е много по-голяма, ако случайно изберем някаква пермутация на картите. Тоест ние твърдим, че $\dfrac{B_n}{n^n} \gg \dfrac{1}{n!}$ или аналог. $B_n \gg \dfrac{n^n}{n!}$, от където ще следва, че разбъркването не е добро. С това очначение, което използвахме по-горе искаме да кажем, че израза от лявата страна е асимптотизно по-бързо нарастващ от този от дясната.

Нека го докажем. От формулата на Добинкси знаем, че $B_n = \dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}$ и от нея ще изведем долна граница за B_n.

Да изследваме функцията $f(k) = \dfrac{k^n}{k!}$.

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{k+1} = \frac{\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\right)^{\frac{n}{k}}}{} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{e^{\frac{n}{k}}}{k+1} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{n}{k}} \overset{?}{\odot} k+1 \,\Big|\, \ln$$

$$\frac{n}{k} \odot \ln(k+1) \sim \ln(k) \Rightarrow n \sim \underbrace{k \ln k}_{\text{растяща}}.$$

Следователно ще имаме, че за малки стойности на $k : n > k \ln k$, след което в дадено момент ще имаме $n = k \ln k$ и от този момент натам ще имаме $n < k \ln k$, което ще е в сила за големи стойности на k.

Следователно, $\dfrac{f(k+1)}{f(k)} > 1$, което искахме да докажем.

$\square$

Числа на Ойлер.

Числата на Ойлер от първи и втори тод се срещат като Eulerian Numbers, докато другите два вида се срещат като Euler Numbers.

Числа на Ойлер (от първи род):

Означаваме с $A(n, m)$, където буквата A идва от алтернативни (макар и тук да няма алтерниране - по-натам ще има) или още $E(n, m)$ и $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 1$.

Дефинираме ги комбинаторно като броя на пермутациите (без повторения) на числата $1,2,...,n$, в които точно m числа са по-големи от непосредствените си предшественици.

Пример: $n = 5$ и имаме следната пермутация:
$45312 \mapsto 4 < 5 > 3 > 1 < 2 \Rightarrow n = 5,\ m = 2$ (две числа са по-големи от непосредствените си предшественици).

Числото на Ойлер от първи род казва колко са всички такива пермутации с $m = 2$ има. То не може да се изрази като функция на елементарни функции.

<u>**Тъждество**</u>: $A(n, m) = A(n, n - m - 1)$
<u>**Доказателство**</u>: На всяка пермутация $a_1 \bigtriangleup_1 a_2 \bigtriangleup_2 \dots \bigtriangleup_{n-1} a_n$ ще съпоставим пермутацията $a_n \overline{\bigtriangleup}_{n-1} \dots \overline{\bigtriangleup}_2 a_2 \overline{\bigtriangleup}_1 a_1$, която се явява обърнатата пермутация, а $\bigtriangleup$ е знак или за по-малко или за по-голямо, докато $\overline{\bigtriangleup}$ е съответния му обърнат знак.

В първоначалната пемрутация, ако сме имали m знака $<$, то в получената пермутация след обръщането ще имаме $n - m - 1$ знака $<$ (броя на всички знаци е $n - 1$ и тези които сега ще са $<$, в изходната са били $>$, т.е. m).

n	m	**Пермутации**	$\mathbf{A(n, m)}$
1	0	(1)	$A(1,0) = 1$
2	0	$(2,1)$	$A(2,0) = 1$
	1	$(1,\mathbf{2})$	$A(2,1) = 1$
3	0	$(3,2,1)$	$A(3,0) = 1$
	1	$(1,\mathbf{3},2)$ $(2,1,\mathbf{3})$ $(2,\mathbf{3},1)$ $(3,1,\mathbf{2})$	$A(3,1) = 4$
	2	$(1,\mathbf{2},\mathbf{3})$	$A(3,2) = 1$

Рекурентно уравнение: $A(n,m) = (n-m)A(n-1,m-1) + (m+1)A(n-1,m)$
Доказателство: n-тото число може да го сложим в пермутация на $1,2,\ldots,n-1$ по два начина: на място където знака е бил $<$ и в началото и на място където знака е бил $>$ и в края.

I сл. $a_i < a_j \mapsto a_i < a_n > a_j$, т.е. появява се един знак $>$, но броя на знаците $<$ се запазва. Това ще се случи и когато добавим числото n в началото.

II сл. $a_i > a_j \mapsto a_i < a_n > a_j$, т.е. появява се един нов знак $<$. Това ще се случи и ако добавим числото n в края.

Тоест може да вмъкнем n-то число в пермутация от $n-1$ числа и точно m знака $<$ по $m+1$ начина, така че да си останат m знака $<$ и по
$n-2-(m-1)+1 = n-m$ начина, така че да нарастнат знаците $<$ с един.
Следотателно:

$A(n,m) = (m+1)A(n-1,m) + (n-m)A(m-1,m+1)$, което искахме да докажем.

$\square$

Дефиниционно множество: $n = 1,2,\ldots \in \mathbb{N}$, $0 \le m \le n-1$.

Гранични условия:
$A(n,0) = 1$ (наредба в низходящ ред)
$A(n,n-1) = 1$ (наредба във възходящ ред)

A(n, m)									
n/m	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	11	502	1

Всеки ред е симетричен, което го видяхме и от тъждеството. Освен това, сумата от елементите на всеки ред е равна на съответния факториел на номера на реда. Това е така, тъй като всички пермутации се разбиват от числата на Ойлер от първи род по m, за m от Д.О.

$$\sum_{m=0}^{n-1} A(n, m) = n!, \text{ за } n \geq 1.$$

Числа на Ойлер (от втори род):

Означение: $\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle$. Отново ги дефинираме комбинаторно. Пермутациите на мултимножеството $\{1,1,2,2,...,n,n\}$, които имат свойството, че за всяко k, всички елементи, които се появяват между две срещания на k в пермутацията са по-големи от k са $(2n-1)!!$ Числото на Ойлер от втори род $\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle$ е броя на всички такива пермутации, които имат точно m знака $<$. Например, за $n = 3$ имаме 15 такива пермутации: една без знак за по-малко, 8 с единствен знак за по-малко и 6 с два знака за по-малко.

332211,
221133, 221331, 223311, 233211, 113322, 133221, 331122, 331221,
112233, 122133, 112332, 123321, 133122, 122331

Рекурентна зависимост за $\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle$:

Новата двойка числа (n, n) може да поставим в пермутацията на числата с точно две повторения за всяко от 1 до $n-1$ само ако са заедно, тъй като между n и n няма как да има по-големи числа.

Т.е. може да ги добавим (на място със знак $<$ или в началото) или (на място със знак $>$ или на място без знак или в края). Следователно

$$\left\langle\!\left\langle {n \atop m} \right\rangle\!\right\rangle = (m+1)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop m} \right\rangle\!\right\rangle + (2n-m-1)\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop m-1} \right\rangle\!\right\rangle.$$

Начални условия:

$$\left\langle\!\left\langle {n \atop 0} \right\rangle\!\right\rangle = 1 \ (n, n, n-1, n-1, ..., 1, 1)$$

$$\left\langle\!\left\langle {n \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle = n\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop n-1} \right\rangle\!\right\rangle + n\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop n-2} \right\rangle\!\right\rangle = 0 + n\left\langle\!\left\langle {n-1 \atop n-2} \right\rangle\!\right\rangle = \ldots = n!$$