Задача. Дадени са две естествени числа. Каква е вероятността те да са взаимнопрости?

Решение: Нека p е произволно просто число. Вероятността едно естествено число да се дели на p е $\frac{1}{p}$, защото измежду всеки p последователни естествени числа има точно едно, делящо се на p. Следователно вероятността и двете дадени числа да се делят на p е равна на $\frac{1}{p^2}$. Тогава вероятността най-големия общ делител на двете числа да не се дели на p е $1-\frac{1}{p^2}$. Следователно търсената вероятност е равна на безкрайното произведение $\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)$.

Да означим $K=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$. Ще докажем, че $K=\frac{1}{\zeta(s)}$, където $\zeta(s)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^s}$ е Римановата дзета-функция. Като използваме факта, че за всяко x с $|x|<1$ е в сила равенството $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$, получаваме

$$\left[x=\frac{1}{p^s}<1:\ \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}=1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^{js}}\right]$$

$$\frac{1}{K}=\prod_p\frac{p^s-1}{p^s}=\prod_p\left(1+\frac{1}{p^s}+\frac{1}{p^{2s}}+\frac{1}{p^{3s}}+\ldots\right)=\prod_p\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{p^{js}}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^s}=\zeta(s)$$

(Накрая използвахме, че в сумата се появяват, и то по веднъж, всички естествени числа поради основната теорема на аритметиката – всяко естествено число $n>1$ се представя еднозначно като произведение от прости числа с точност до реда на множителите $n=p_1^{\gamma_1}p_2^{\gamma_2}\ldots p_k^{\gamma_k}$. Твърдението от теоремата се нарича още факторизация.)

От горното следва, че вероятността, която търсим, е $\frac{1}{\zeta(2)}$. Добре известно е, че $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}$. (*Ойлер 1735*) Развиваме $\sin(\pi x)$ в ред на Маклорен и получаваме, че

$$\sin(\pi x)=\pi x-\frac{(\pi x)^3}{3!}+\frac{(\pi x)^5}{5!}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\pi^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}=:p(x).$$

Знаем, че корените на $\sin(\pi x)$ са целите числа $\mathbb{Z}$. За *крайни* полиноми $q(x)$ знаем, че може да ги разложим на произведение на линейни функции във формата на $\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, където $q(a) = 0$. Ойлер предполага, че същия трик ще работи и за $\sin(\pi x)$. Допускайки за момент, че това е така, имаме че

$$\hat{p}(x) := \pi x \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right)\ldots$$

$$= \pi x \left(1 - \frac{x^2}{1}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)\ldots = \pi x \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right),$$

забележете, че сме включили водещ x като множител, за да отчетем корена в 0 и множителя π за да работи формулата и когато $x = 1$. Сега нека разгледаме коефициента пред x^3 във формулата. Избирайки водещия множител πx и след това $-\frac{x^2}{n^2}$ от един от другите множители и 1 от всички останали, виждаме, че

$\hat{p}(x)[x^3] = -\pi\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right) = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Сравнявайки този резултат с

коефициента пред x^3 от развиването в ред на Маклорен следва, че

$p(x)[x^3] = -\frac{\pi^3}{6}$, което води до искания резултат!

$$-\frac{\pi^3}{6} = -\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Следователно търсената вероятност е $\mathbb{P}\big(gcd(n,m) = 1\big) = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079.$

$\square$

Може да факторизираме функцията $\sin(\pi x)$ като използваме това, че знаем корените му, тъй като може да адресираме мощната теорема за факторизация на Вайерщрас (Weierstrass), която гласи, че може да извършим тази коренна факторизация за всяка функция над $\mathbb{C}$.