

Задача. Дядо Коледа раздава n подаръка на n деца. Нека x_i е броят на подаръците, харесвани от i -тото дете, $x_i > 0$. Ако $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \leq 1$, докажете, че Дядо Коледа може да раздаде подаръците по един на всяко дете така, че всяко дете да получи подарък, който харесва.

Доказателство: Избираме k деца произволно. Ако всяко от тях харесва по-малко от k подаръка, то сборът от реципрочните стойности на техните хиксове ще бъде по-голям от $k \times \frac{1}{k} = 1$, което противоречи на условието на задачата. Ето защо поне едно от тях харесва k или повече подаръци. Тогава те общо харесват поне k подаръка. От теоремата на Хол следва, че има съвършено съчетание в двуделния граф с върхове – децата и подаръците, ребра – харесванията. Това съвършено съчетание определя начина за раздаване на подаръците.