

Пътища в целочислена решетка

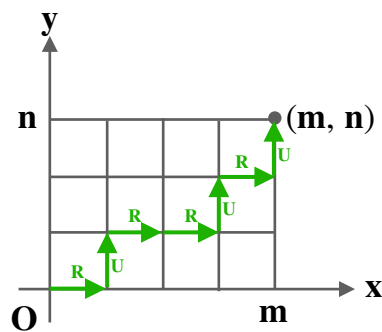
(2021-04-22)

(Брой траектории. Принцип на отражението. Приложения в теорията на вероятностите и при финансовите пазари.)

Дефиниция: Целочислена решетка наричаме всички точки с целочислени, неотрицателни координати от декартова координатна система.

Пътищата в такива решетки се задават с набор от правила, които трябва да се спазват при траверсиране от една до друга точка от решетката. Тези правила ще наричаме още „позволені стъпки“ или просто „стъпки“. В задачите, които ще разгледаме по-долу, ще се интересуваме от броя на различните пътища, по които може да достигнем от точка (a_S, b_S) до точка (a_F, b_F) в решетката.

Твърдение 1. Стъпки (\rightarrow топ \uparrow): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y) & \rightarrow \\ (x, y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до (m, n) .



$\pi = \text{RURRURU}$

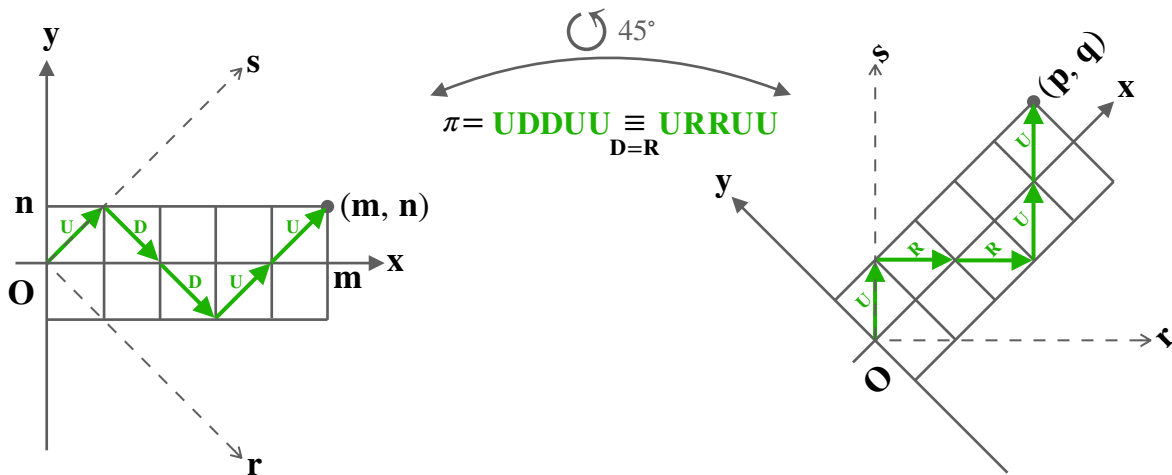
Нека кодираме всяка стъпка надясно с буквата **R** и всяка стъпка нагоре с буквата **U**. Един път е успешен, тогава и само тогава, когато образува низ π съставен само от буквите **R** и **U**, като $|\pi|_R = m$ и $|\pi|_U = n$, където с $|\omega|_\sigma$ бележим броя на буквите σ в думата ω , а дума наричаме всяка поредица от букви. Например, $\pi = \underbrace{\text{R} \dots \text{R}}_m \underbrace{\text{U} \dots \text{U}}_n$ е един успешен път. Съпоставянето по-горе е

еднозначно и конструираната биекция свежда задачата до намирането на броя различни думи ω , притежаващи посоченото по-горе свойство. Тъй като всяка такава дума ще е съставена от $m + n$ букви и намирането на позициите на буквите от единия вид определя еднозначно позициите на останалите букви, то е достатъчно да намерим по колко начина може да изберем m от общо $m + n$ позиции, на които да разположим буквата **R**. Следователно търсеният отговор е

$$\binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}.$$

□

Твърдение 2. Стъпки (\hat{a} офицер \hat{i}): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y+1) \\ (x+1, y-1) \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до (m, n) .



Отново кодираме всяка стъпка надолу с буквата **D** и всяка стъпка нагоре с буквата **U**. Нека дефинираме четността на дадена позиция като четността на сбора от координатите по абсцисата и ординатата на съответната позиция и нека отбелязваме тази четност с **k**. Ако (a_s, b_s) е стартовата позиция с четност **k**, то четността при последваща стъпка ще е или $a_s + 1 + b_s + 1 = a_s + b_s + 2$ или $a_s + 1 + b_s - 1 = a_s + b_s$. Т.е. каквато и да е следващата стъпка, четността на стартовата позиция ще се запазва винаги. Следователно ако стартовата позиция и финалната дестинация са от различни четности, тогава броя на търсените пътища очевидно ще е равен на 0. В конкретния случай, тъй като стартовата позиция е четна, то ще искаме **m** и **n** да са от една четност, за да има какво да броим. Ако стартовата позиция е друга, то винаги ще може да нормализираме по такъв начин, че стартовата позиция отново да е $(0, 0)$. В такъв случай, необходимото условие ще е еквивалентно на това **m** и **n** да са от една четност.

Въвеждаме нова координатна система $\overrightarrow{O\ rs}$, която се получава от старата $\overrightarrow{O\ xy}$, чрез ротация обратно на часовниковата стрелка на 45° градуса (ъглополовящите на I^{-VI} и IV^{-TI} квадрант образуват новата координатна система). Спрямо $\overrightarrow{O\ rs}$ се движим със същите стъпки като тези от **Твърдение 1**. Разликата е само в координатите на новата финална дестинация. Връзката между (m, n) и (p, q) е следната: тъй като при всяка една от стъпките на оригиналната координатна система се движим с една позиция надясно, то $p + q = m$, а от друга страна **n** е височината на пътя в оригиналната координатна система, която е равна на броя пъти, в които сме поели нагоре минус броя пъти, в които сме поели надясно, в стъпки от $\overrightarrow{O\ xy}$, т.е. $n = q - p$.

$\begin{cases} m = p + q \\ n = q - p \end{cases}$. Сведохме задачата до броя на успешните пътища от $(0, 0)$ до (p, q) , където стъпките са същите като тези от **Твърдение 1**. Следователно търсения брой е равен на

б.о.о. да го игнорираме (защото не само някои, а всички пътища от т. $(0, 0)$ до т. $(m, 2s-n)$ ще имат пресечна точка с правата $n = s$). По този начин, може отново да приложим формулата от **Твърдение 2** и за неблагоприятните пътища. Окончателно, броя на търсените пътища е равен на

$$\text{all} - \text{bad} = \binom{m}{\frac{m-n}{2}} - \binom{m}{\frac{m+n}{2} - s} \quad (\text{в случай, че условието } m+n \text{ да е от същата}$$

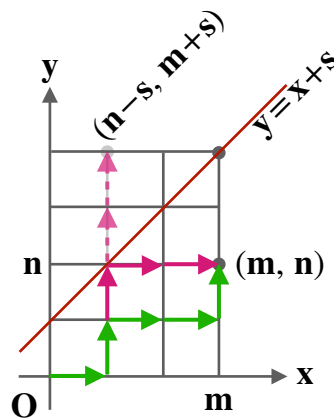
четност като четността на стартовата позиция, в противен случай броя е равен на 0).

Еквивалентни представяния:

$$\binom{m}{\frac{m-n}{2}} - \binom{m}{\frac{m-n}{2} + s} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} - \binom{m}{\frac{m+n}{2} - s} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} - \binom{m}{\frac{m-n}{2} + s}.$$

□

Твърдение 4. Стъпки (↗ топ ↘): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y) & \rightarrow \\ (x, y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до (m, n) , такива че $y < x + s$ за всяка точка (x, y) от пътя. Допълнителни условия: $s > 0$; $0 \leq m, n$; $n < m + s$. По-общ запис на допълнителните условия: $0 \leq n$; $0 < s(m+s-n)$; $0 \leq m$.



Всички пътища, с позволените стъпки, от точка $(0, 0)$ до точка (m, n) , без ограничението $y < x + s$ наложено от правата, са точно $\binom{m+n}{m}$ от **Твърдение 1**.

От тях трябва да извадим лошите пътища, т.е. тези които имат пресечна точка с правата $y = x + s$. Ще отразим остатъка на всеки лош път след първата му (най-лявата) пресечна точка с правата $y = x + s$, спрямо същата права. Всеки лош път ще започва от точка $(0, 0)$ и ще финишира в точка $(n-s, m+s)$. Тази финална точка задължително ще е от другата страна на правата (точките $(n-s, m+s)$ и (m, n) са

от различни страни на правата $y=x+s$, тъй като от горната страна ще имаме условието $y > x+s \Leftrightarrow m+s > n-s+s = n$, което е вярно от условието на задачата, тъй като искаме (m, n) да е под правата $y=x+s$. Последното заключение ни позволява да игнорираме допълнителното условие а пресечни точки с правата $y=x+s$ за всички лоши пътища. Следователно, техния брой ще е точно $\text{bad} = \binom{m+s+n-s}{n-s} = \binom{m+n}{n-s} = \binom{m+n}{m+s}$. Окончателно, броя на търсените пътища е

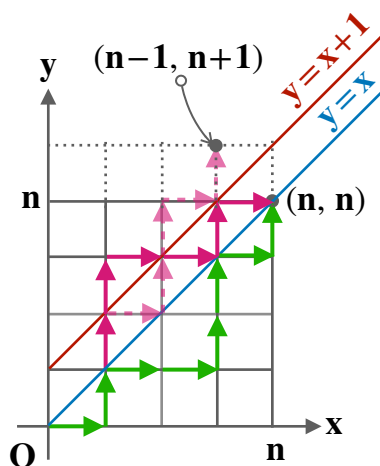
$$\text{all} - \text{bad} = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{n-s}.$$

Еквивалентни представяния:

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+s} = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{n-s} = \binom{m+n}{n} - \binom{m+n}{m+s}.$$

□

Твърдение 5. Стъпки (↘ топ ↘): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y) & \rightarrow \\ (x, y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до (n, n) , които не пресичат диагонала $(0, 0), (n, n)$ на квадрата $(0, 0), (n, 0), (n, n), (0, n)$.



Отново от метода на отраженията, може да отразим остатъка на всеки един лош път, който има поне една пресечна точка с правата $y = x + 1$, спрямо същата тази права от първата такава (най-лявата) пресечна точка. Всеки един такъв път ще стартира от точка $(0, 0)$ и ще финишира в точка $(n-1, n+1)$. Отговора очевидно е

$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, което n -тото число на Каталан.

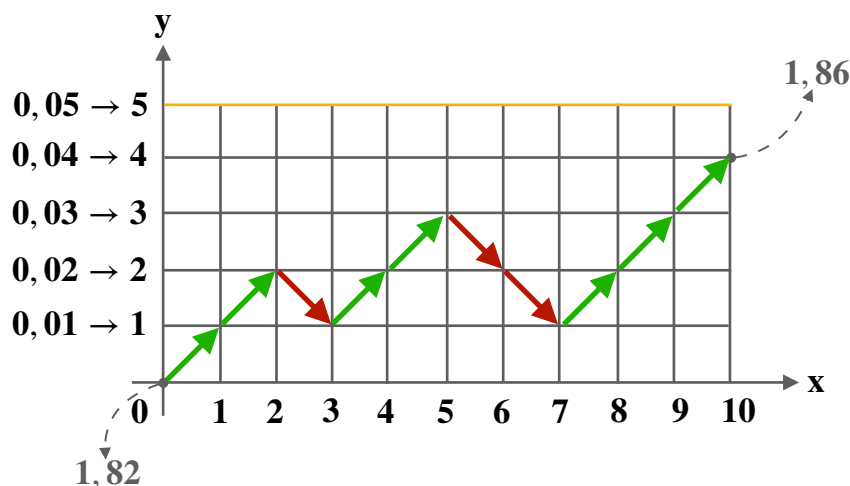
Задачата може да се разглежда и като частен случай на **Твърдение 4.**, за $m = n$ и $s = 1$. Това е така, защото ако допуснем, че път пресича диагонала от условието, то той ще има обща точка с правата $y = x + 1$, т.е. $s = 1$. Заместайки във формулата от **Твърдение 4.** ще получим отново

$$\text{all} - \text{bad} = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{n-s} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

□

Задача 1. Разглеждаме следния валутен курс: $BGN \rightarrow USD$. Цената на долара спрямо лева, всеки ден се мени с 1 стотинка на долар, като поевтиняването и поскъпването са равно вероятни. Известно е, че преди 10 дни търговец е закупил определено количество долари на цена от 1,82 лв./долар и цената на долара е 1,86 лв./долар. Знае се, че търговеца чака цената да достигне 1,87лв./долар, за да продаде всички долари (т.е. целта му е да спечели по 5 ст. от всеки закупен долар). Каква е вероятността търговеца да е продал всички долари и да е постигнал жеаната печалба?

Решение:



Моделираме задачата чрез декартова координатна система, в която разглеждаме целочислените решетки с неотрицателни координати. По абсцисата са отбелязани дните, а по ординатата стотинките, с които се мени долара. Началото на координатната система $(0, 0)$ е началото на ден $1^{\text{ви}}$ и цена **1,82** лв. за един долар. Търсената вероятност е равна на броя на благоприятните пътища в тази решетка разделен на броя на всички пътища от точка $(0, 0)$ до точка $(10, 4)$, където благоприятни пътища са тези, които нямат пресечна точка с правата $x=5$. Тъй като времето расте винаги, а долара винаги или поскъпва или

поевтинява, то стъпките ще са от вида $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y+1) & \nearrow \\ (x+1, y-1) & \searrow \end{cases}$.

Броя на всички пътища от т. $(0, 0)$ до т. $(10, 4)$ е равен на $\binom{10}{\frac{10+4}{2}} = \binom{10}{7}$.

Броя на благоприятните пътища от т. $(0, 0)$ до т. $(10, 4)$ е равен на $\binom{m}{\frac{m+n}{2}-s}$, за

$$m=10, n=4 \text{ и } s=5. \text{ Т.е. } \binom{m}{\frac{m+n}{2}-s} = \binom{10}{7-5} = \binom{10}{2}.$$

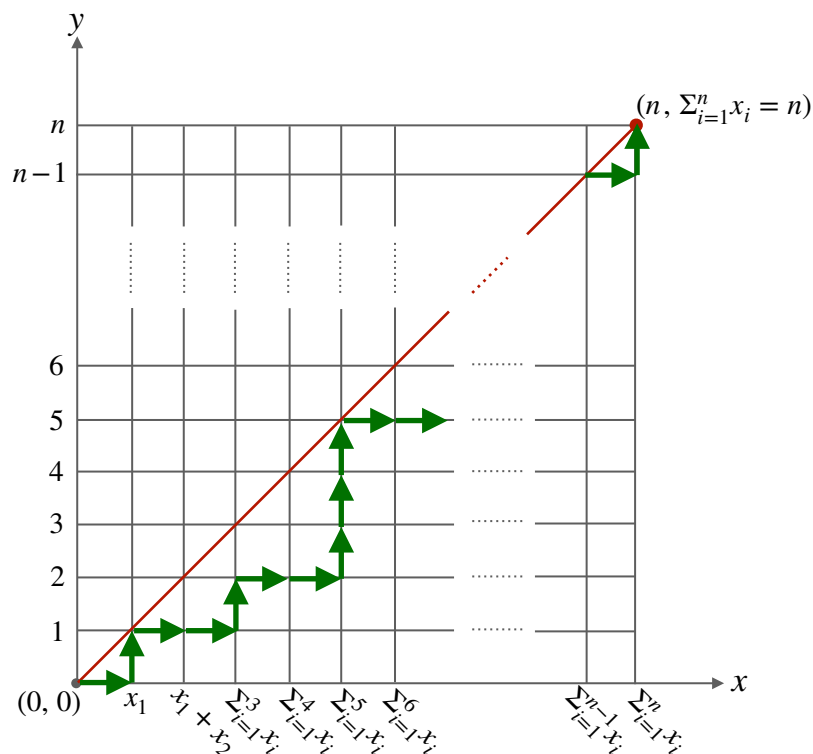
$$\text{Окончателно } \mathbb{P}(\text{profit} = 0.05 \text{ ст./\$}) = \frac{\text{good}}{\text{all}} = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{10}{7}} = \frac{\frac{10!}{2!8!}}{\frac{10!}{7!3!}} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

□

Задача 2. Да се намери броят на целочислените решения (x_1, x_2, \dots, x_n) на системата

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0; \\ x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} \leq n-1; \\ x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = n. \end{cases}$$

Решение:



Всяко едно решение на системата от уравнения ще отговаря на единствен успешен път от целочислената решетка показана на фигурата по-горе и обратно, всеки един успешен път в целочислената решетка ще отговаря на единствено решение на системата от уравнения. Следователно има биекция между успешните пътища в целочислената решетка от фигурата и решенията на системата от уравнения.

Пояснения: В целочислената решетка по-горе може да се движим със стъпки само надясно и нагоре, тъй като по абсцисата имаме сумите $\sum_{i=1}^k x_i$, за $k = 1, \dots, n$, а по ординатата има ме съответно максимумите, които могат да достигат тези суми. Тъй като последната сума $\sum_{i=1}^n x_i = n$ по условие, то един успешен път в целочислената решетка ще стартира от $(0, 0)$ и ще финишира в (n, n) , като всеки един край на негова стъпка ще е с координати $(x, y) : x \leq y$, т.е.

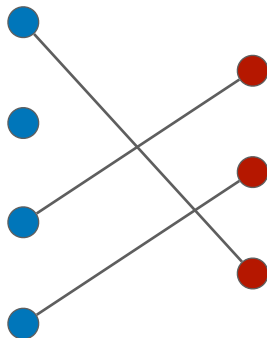
ще се намира под диагонала $y = x + 1$ (няма да преминава над ъглополовящата на първи квадрант). От Твърдение 5. знаем че броя на тези пътища е n -тото число на Каталан, т.е. $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Точно толкова са и решенията на системата уравнения.



Теорема на Хол за сватбите. Съчетание (сдвояване) в граф.

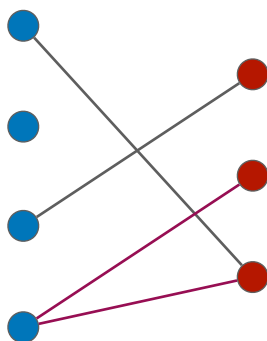
Сдвояване или съчетание в граф се нарича множество от ребра без общи краища. Графът може да е напълно произволен, т.е. не е задължително да е двуделен граф, макар че много често задачата се поставя за двуделни графи (в каквито ще я разглеждаме и ние).

Нека имаме двуделен граф G .



G

G е съчетание от ребра, тъй като ребрата в G нямат общи краища.

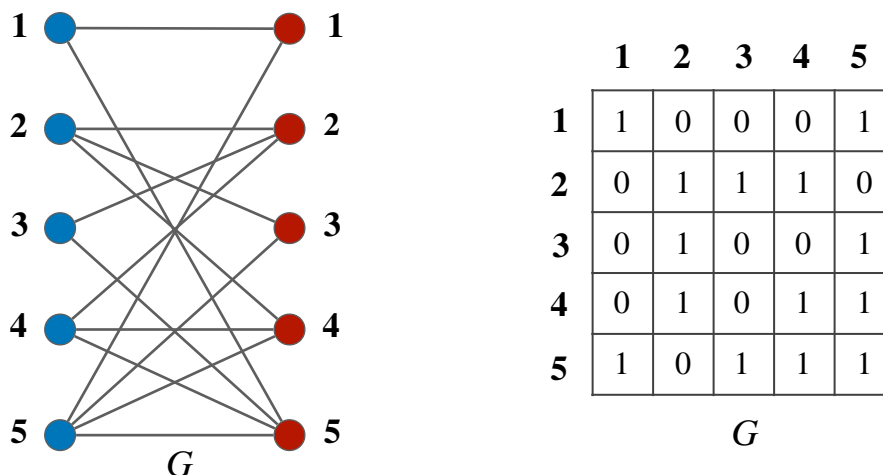


G

След добавянето на ново ребро, G вече не е съчетание, тъй като от последния син връх излизат две ребра, т.е. имат общо начало.

Случаите за съчетания в двуделни графи са най-интересни за практиката и за тях е в сила теоремата на Хол за сватбите. Тя казва кога съществува съчетание, което е достатъчно голямо. Когато двата дяла от графа са с еднакъв брой върхове, тогава се въвежда понятието „съвършено“ съчетание. Съвършено е такова съчетание, при което всеки връх от единия дял е свързан с връх от другия дял. С други думи, в двуделен граф с $n + n$ върха, съвършено съчетание е такова, което е от n ребра (максималния възможен брой). Искаме да разберем дали може да намерим някаква проста характеристика на графа, която да послужи за необходимо и достатъчно условие за съществуването на съвършено съчетание.

Графът може да го представим и като матрица на съседства. Например за двуделен граф $5 + 5$ имаме следните еквивалентни представяния:



Може да разглеждаме сините върхове, които съответстват на редовете на матрицата като кандидати за работа, а червените върхове, които съответстват на стълбовете на матрицата като работни места. Задачата сега ще звучи и по следния начин:

Дадена е квадратна матрица $A_{n \times n}$ (симетрична, ако репрезентира ненасочен граф, както е в нашия случай). Търсим n единици, по една от всеки ред и всеки стълб.

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1

G

Такива единици ще има \Leftrightarrow обединението на всеки k ($k = 1, \dots, n$) стълба има мощност поне k (като всеки стълб се разглежда като множество от индекси на редове). Например, $|\{\text{стълб 2}\} \cup \{\text{стълб 3}\}| = |\{2, 3, 4, 5\}| = 4$.

Доказателство: (\Rightarrow) Ако матрицата съдържа поне една единица за всеки ред и всеки стълб, то тогава обединението на всеки k стълба ще има мощност поне k елемента, тъй като всеки от k -те стълба ще има поне една единица, която ще е от различен ред от останалите $k - 1$ стълба.

(\Leftarrow) Обратното твърдение е по-трудно за доказване. Нека е изпълнено изискването, че обединението на всеки k стълба има мощност поне k . Искаме да докажем, че

съществуват n единици, по една от всеки ред и всеки стълб. Ще го докажем чрез пълна математическа индукция спрямо n .

База: За $n = 1$ имаме матрица 1×1 и само един ред и една колона. Единствената колона за $k = 1$ има мощност поне 1 и тази единица е напълно достатъчна.

Индукционна хипотеза: Нека твърдението е изпълнено за матрици $1 \times 1, 2 \times 2, \dots, n-1 \times n-1$. Ще докажем, че твърдението е в сила и за матрици $n \times n$.

Разглеждаме два случая:

I^{-ви} случай: Нека обединението на всеки k стълба има мощност поне $k+1$. Избираме една единица от матрицата и задраскваме реда и стълба, в които е единицата. По този начин във всеки друг ред и стълб ще сме премахнали най-много една единица (може и нищо да не сме премахнали). Щом сме премахнали най-много един елемент, то този елемент ще е премахнат и от обединението \Rightarrow обединението на всеки k стълба има мощност поне k , а матрицата вече е $n-1 \times n-1 \Rightarrow$ остава само да приложим индуктивното предположение.

II^{-ри} случай: Нека обединението на всеки k стълба има мощност поне k , но обединението **не** на всеки k стълба има мощност поне $k+1$. Т.е. ще се намери някаква k -орка от стълбове, за която обединението им ще има мощност **точно** равна на k . Да предположим (за удобство), че сме ги разместили така, че тези стълбове са един до друг и обединението им (тези k реда) са също един до друг.

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	1

G

Отделяме матрицата в горния ляв ъгъл. В нея, които и l стълба (k вече е фиксирано, в конкретния пример на фигурата, $k = 2$ и от тези k стълба, взимаме произволни l) да вземем, обединението им ще има мощност поне l . Сега да разгледаме другата матрица в долния десен ъгъл. Тя е $n-k \times n-k$ и каквито и l стълба да вземем от нея и ги обединим с първите k стълба ще получим обединение с мощност $l+k$ (разгледани като стълбове на голямата матрица $n \times n$). Така доказана, теоремата на Хол е в сила и за несиметрична матрица, т.е. и за насочен граф.

Нека сега се върнем на двуделен ненасочен граф и да видим как ще звучи теоремата на Хол за него. Тъй като матрицата е квадратна, то графа ще има равен брой върхове в двата дяла ($n + n$). Съществува съвършено съчетание в графа \Leftrightarrow всеки k върха ($k = 1, \dots, n$) от първия дял са свързани с поне k върха от втория дял (номерацията е само за удобство).

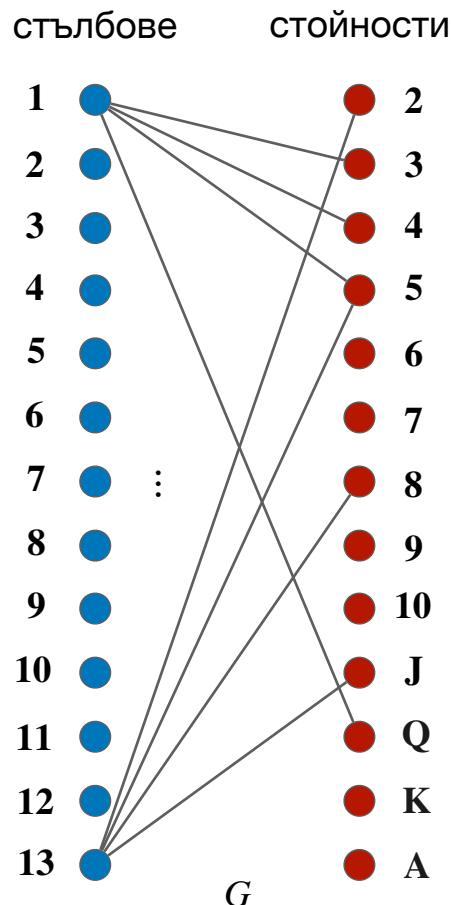
Следствие: Всеки R -регулярен двуделен граф $n + n$ с $R > 0$ съдържа съвършено съчетание.

Доказателство: Ако представим графа чрез матрица на съседства ще получим регулярна матрица, в която всеки стълб и всеки ред има точно R единици. Които и k стълба да вземем, обединението им ще съдържа общо поне k единици. Това е очевидно вярно докато $k < R$, но ако регулярността например е $R = 10$ и обединяваме 15 стълба, сигурни ли сме, че ще имаме мощност поне 15? Да **допуснем** че обединяваме k ($k > R$) стълба и сме получили мощност $k - 1$ или по-малка (обединението съдържа не повече от $k - 1$ реда). Къде е противоречието? Общият брой единици в подматрицата, съставена от тези k стълба е не повече от $(k - 1) \times R$, защото всеки от тези не повече от $k - 1$ реда съдържа точно R единици като цяло, затова не повече от R в частта, където пресича избраните k стълба. От друга страна, понеже всеки стълб съдържа точно R единици, то избраните k стълба съдържат общо kR единици и те, естествено, се намират в редовете от обединението им (тривиално). Излиза, че $kR \leq (k - 1)R$, откъдето следва, че $R \leq 0$, а това противоречи на неравенството $R > 0$, което е изпълнено по условие.

Задача 3. Тесте от 52 карти е наредено в правоъгълник с 4 реда и 13 стълба. Докажете, че можем да изберем 13 карти, които да са от различни стълбове и с различни стойности (асо, двойка, тройка, ... десятка, вале, дама, поп).

3	A	10	J	6	9	A	3	10	2	2	6	5
Q	8	7	3	Q	K	8	4	5	8	Q	6	8
5	J	7	A	2	9	K	7	A	5	7	10	J
4	9	4	6	K	10	4	Q	J	9	K	3	2

Доказателство: Разглеждаме двуделен граф с 26 върха: 13-те върха от първия дял са стълбовете на правоъгълника, а 13-те върха от втория дял са стойностите на картите (асо, двойка, тройка, ..., десятка, вале, дама, поп).



Има ребро между стълба i и стойността $j \Leftrightarrow$ стълбът i съдържа карта със стойност j . Всеки k стълба съдържат общо $4k$ карти, а от всяка стойност има точно 4 карти. Следователно в тези k стълба ще имаме поне $4k/4$ различни карти. Следователно всеки k стълба съдържат карти с общо поне k Различни стойности. От теоремата на Хол следва, че графът притежава съвършено съчетание, тоест 13 ребра без общи краища. На тях съответстват 13 карти с различни стойности от различни стълбове.

□

Задача 4. (Г. Георгиев — Скелета, от домашно по „Дискретни структури“ на специалност „Компютърни науки“, през зимния семестър на 2020/2021, I^{ВИ} курс)
Върху шахматна дъска 8×8 са разположени 33 топа. Докажете, че измежду тях могат да се намерят пет топа, никои два от които не се бият.

Доказателство:

Първи начин (Д. Кралчев):

Ще използваме следното обобщение на теоремата на Хол:

Матрица $A_{n \times n}$ съдържа $q \leq n$ единици (по една от всеки ред и стълб) \Leftrightarrow обединението на всеки k стълба (като множества от индекси на редове имащи

единица) има мощност не по-малка от $k - (n - q)$, т.е. мощността на обединението е $\geq k + q - n$, за всяко $k = 1, \dots, n$.

В нашия случай имаме: $n = 8$, $q = 5$, $q - n = -3$. Т.е. искаме да докажем, че обединението на всеки k стълба има мощност поне $k - 3$. Ако $k \leq 3$, то твърдението става тривиално, тъй като $k - 3 \leq 0$, а всяко едно обединение е с мощност поне 0. Нека $k \geq 4$. Допускаме обратното, т.е. обединението на някои k стълба съдържа не повече от $k - 4$ елемента (обединението са индексите на редовете, в които някои от тези стълбове има единица) \Rightarrow в останалите $8 - k$ стълба има най-много 8 единици. Т.е. получаваме следното уравнение: $k(k - 4) + (8 - k)8 \geq 33$, което е еквивалентно на квадратното уравнение спрямо k : $k^2 - 12k + 31 \geq 0$. За неговите корени получаваме $k_1 = 6 - \sqrt{5}$ и $k_2 = 6 + \sqrt{5}$. Следователно $k \in (-\infty, 6 - \sqrt{5}) \cup (6 + \sqrt{5}, +\infty)$. От това, че k са стълбове следва, че k е цяло число и k може да бъде най-много 8 в конкретната задача. Следователно k трябва да е по-малко от 4, но този случай го разгледахме вече, откъдето идва и противоречието.

Втори начин (Г. Георгиев – Скелета):

Ще използваме принципа на Дирихле. Разглеждаме осем успоредни диагонала, като диагонал номер j се състои от всички клетки, за които номера на реда минус номера на стълба дава остатък j при деление на 8, където $j = 0, \dots, 7$. Нека тези диагонали са „чекмеджета“, а топовете – „предмети“. От принципа на Дирихле, тъй като $33/8 = 4$ с остатък 1, то има диагонал с поне $4 + 1$ топа. Тези пет топа лежат в различни редове и в различни стълбове, тоест не се бият.

