

**Комбинаторни тъждества. Формула на Стирлинг. Терема на
Льожандер. Теорема на Люка. Теорема на Кумер.**
(2021-03-04)

$n! = (n - 1)! \times n$, за $n \in \mathbb{N}_0$, като $0! = 1$, $k, n \in \mathbb{N}$.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \leq k \leq n$; $k, n \in \mathbb{N}$ (като понякога път се обобщава и се приема, че при $k > n$: $\binom{n}{k} = 0$).

$\binom{n}{k}$ е броя на начините, по които може да изберем k елемента от n без да ги подреждаме. $\binom{n}{k}$ също така са биномните коефициенти:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, т.е. погледнато по друг начин, обикновената пораждаща функция на редицата $a_k = \binom{n}{k} x^k$ е $(x + 1)^n$. А най-просто казано, това е биномната формула на Нютон.

Свойства (комбинаторни тъждества):

Методи за доказване:

- математическа индукция;
- свеждане до други тъждества, в т.ч. биномната формула;
- комбинаторни разсъждения:
 - двукратно преброяване;
 - построяване на биекция.

Тъждество 1. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ (Тъждество на Паскал)

Алтернативен запис: $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$

Доказателство:

I н/н: (двукратно преброяване) Знаем, че $\binom{n}{k}$ е броя на начините, по които може

да изберем k елемента от общо n елемента без наредба. Тези начини може да ги преброим и по следния алтернативен начин:

Нека фиксираме един от n -те елемента. Той или е сред избраните или не е. Ако е от избраните, то от останалите $n - 1$ елемента трябва да изберем $k - 1$, което става по $\binom{n-1}{k-1}$ начина. Ако фиксираният елемент обаче не е от избраните, то от

останалите $n - 1$ елемента трябва да изберем всичките k , което става по $\binom{n-1}{k}$

начина. Следователно $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$, което искахме да

$\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{фикс. ел. е от избраните}} + \underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{фикс. ел. НЕ е от избраните}}$

докажем.

II н/н: (грубо прилагане на дефиницията) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} =$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \times \frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Тъждество 2. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$

Доказателство:

I н/н: (биномна формула)

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$$

II н/н: (двукратно преброяване)

$\binom{n}{k}$ е броя на k елементните подмножества на n . Броят на всички подмножества на n елементно множество са 2^n (всеки от n -те елемента или участва или не

участва: $\underbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}_n$ възможности). Пускаме k да пробягва от 0 до n и сумираме целия брой и получаваме исканото тъждество.

Тъждество 3.
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

Доказателство:

I н/н: (прилагане на формулата от дефиницията)

$$\frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n}{k} \times \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Тъждество 4.
$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} = \binom{n}{j} \binom{n-j}{i}.$$

Доказателство:

I н/н (комбинаторни разсъждения): Няма никакво значение дали от n елемента първо ще изберем i и от останалите ще изберем j или първо ще изберем j и от останалите ще изберем i по отношение на начините, по които може да го направим.

II н/н (грубо прилагане на дефиницията):

$$\binom{n}{i} \binom{n-i}{j} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \frac{(n-i)!}{j!(n-i-j)!} = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!},$$
 и тъй като изразът е симетричен спрямо i и j , то ще получим същия израз ако им разменим позициите, което е дясната страна на тъждеството, което искаме да докажем.

Тъждество 5. Докажете, че
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$$
 (Тъждество на Вандермонд).

Доказателство: (двукратно преброяване)

Допускаме, че имаме множество A , което се състои от $m+n$ елемента:

$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Искаме да намерим броя на k -елементните подмножества на A . Те са $\binom{n+m}{k}$. Друг начин, по който може да го направим това е като първо изберем i елемента от $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_m\}$ и след това изберем $k-i$ елемента от $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$. Това може да бъде направено по $\binom{m}{i} \binom{n}{k-i}$

начина. Но i може да заема всяка стойност от 0 до k , следователно

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{m}{i} \binom{n}{k-i}.$$

Теорема на Лъожандер

За всяко просто число p и всяко положително число n , нека $\nu_p(n)$ е експонентата на най-голямата степен на p , която дели n . Тогава $\nu_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor$.

Формулата е записана като безкрайна сума, но за всеки две фиксирани стойности на n и p тази сума има само краен брой ненулеви събираеми: за всяко достатъчно голямо i , за което $p^i > n$, $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0$.

Доказателство: Тъй като $n!$ е произведението на целите числа от 1 до n , намираме колко от числата $\{1, 2, \dots, n\}$ имат поне един делител p : $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$. За всяко число което се дели на p^2 ще имаме, че съдържа допълнителен множител p , всяко число което се дели на p^3 съдържа допълнителен множител на p и т.н. Събирайки резултатите от тези целочислени деления дава безкрайната сума за $\nu_p(n!)$.

Пример 1: На колко нули завършва числото $2021!$?

Броя на завършващите нули на едно число е равен на най-голямата степен на 10, която дели числото. Ако едно число се дели на 10, то то ще се дели на 2 и на 5, тъй като в $2021!$ (и по принцип в $n!$) четните числа се срещат много по-често от делящите се на 5, то достатъчно ще е да преброим каква е най-голямата степен на 5 която дели $2021!$.

$$\nu_5(2021!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2021}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{5^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{5^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{5^4} \right\rfloor + 0 + \dots = 404 + 80 + 16 + 3 = 503$$

Приближение на биномни коефициенти (Формула на Стирлинг):

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Приближение 1. Намерете добро приближение на $\binom{2n}{n}$.

Решение:

Едно добро асимптотично приближение ще получим прилагайки формулата на Стирлинг:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}.$$

Деление на биномен коефициент (Теорема на Люка):

$$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k-1} \binom{m_i}{n_i} \pmod{p},$$

където p е просто число, $m = \overline{(m_{k-1}m_{k-2} \dots m_0)}_p$ и $n = \overline{(n_{k-1}n_{k-2} \dots n_0)}_p$ са представянията на числата m и n в p -ична бройна система.

Пример 2:

Да се определи четността на числото $\binom{23}{16}$.

Решение:

$23 = \overline{11101}_2$, $16 = \overline{10000}_2$. Следователно от теоремата на Люка ще имаме, че:

$$\binom{23}{16} \equiv \binom{1}{1} \binom{1}{0} \binom{1}{0} \binom{0}{0} \binom{1}{0} \equiv 1.1.1.1.1 \equiv 1 \pmod{2}. \text{ Т.е. числото е нечетно.}$$

Ако се случи така, че числата да не са с равен брой цифри, тогава може или да запълним липсващите цифри с нули или тъй като всяко число над 0 винаги дава единица, то може просто да не вземаме предвид тези числа, които са в повече.

Нека например проверим каква е четността на $\binom{23}{4}$:

$$23 = \overline{11101}_2, 16 = \overline{100}_2$$

$$\binom{23}{4} \equiv \binom{1}{1} \binom{0}{0} \binom{1}{0} \equiv 1.1.1 \equiv 1 \pmod{2}, \text{ т.е. и това число не е четно.}$$

С други думи, приемаме, че и двете числа са в p -ична бройна система.

Пример 3: Какъв остатък дава числото $\binom{588}{277}$ при деление на 5?

Решение: Имаме, че $588 = \overline{4323}_5$ и $277 = \overline{2102}_5$. Следователно, от теоремата на

$$\text{Люка, } \binom{588}{277} \equiv \binom{4}{2} \binom{3}{1} \binom{2}{0} \binom{3}{2} = 6 \times 3 \times 1 \times 3 = 54 \equiv 4 \pmod{5}.$$

Доказателство (Теорема на Люка):

$\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod n$, винаги когато n е просто число и $0 < k < n$ (т.е. $k \neq 0$ и $k \neq n$).

Простият факт по-горе следва директно от елементарни разсъждения по формулата $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ и допълнителни условия за n и k . В числителя, n ще остане несъкратено до последното съкращение.

Нека $f(x)$ и $g(x)$ са полиноми. Ще казваме, че $f(x) \equiv g(x) \pmod p$, ако коефициентите пред k -тите им степени, където k пробягва от 0 до $\max(\deg(f(x)), \deg(g(x)))$, са сравними по модул от p ($\equiv \pmod p$).

$$(1+x)^p \equiv 1^p + \binom{p}{1}x^{p-1} + \binom{p}{2}x^{p-2} + \dots + x^p \equiv 1 + x^p \pmod p$$

$$(1+x)^{p^2} \equiv ((1+x)^p)^p \equiv (1+x^p)^p \equiv 1 + x^{p^2} \pmod p$$

...

$$(1+x)^{p^k} \equiv 1 + x^{p^k} \pmod p$$

Нека $m = m_0 + m_1p + m_2p^2 + \dots + m_kp^k = \sum_{i=0}^k m_i p^i$ е представянето на числото n

в p -ична бройна система. От предходната лекция ние знаем, че всяко число има единствено представяне в такъв вид.

Тогава,

$$\sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m = (1+x)^{(m_0+m_1p+\dots+m_kp^k)} = \prod_{i=0}^k ((1+x)^{p^i})^{m_i} \equiv$$

$$\equiv \prod_{i=0}^k (1+x^{p^i})^{m_i} = \prod_{i=0}^k \left(\sum_{n_i=0}^{m_i} \binom{m_i}{n_i} x^{n_i p^i} \right) = \prod_{i=0}^k \left(\sum_{n_i=0}^{p-1} \binom{m_i}{n_i} x^{n_i p^i} \right) =$$

$$\sum_{n=0}^m \left(\prod_{i=0}^k \binom{m_i}{n_i} \right) x^n \pmod p.$$

Задача 1. (следствие на Люка) Колко от биномните коефициенти в n -тия ред на триъгълника на Паскал се делят на p , където p е просто число?

Решение:

Т.е. искаме да видим колко биномни коефициенти от вида $\binom{n}{m}$, за $m = 0, 1, 2, \dots, n$, **не** се делят на просто число p , тъй като знаем, че на всеки ред има $n + 1$ числа.

От теоремата на Люка, знаем че $\binom{n}{m} \equiv \binom{n_0}{m_0} \binom{n_1}{m_1} \dots \binom{n_k}{m_k} \pmod{p}$, където $n = (\overline{n_0 n_1 \dots n_k})_p$ и $m = (\overline{m_0 m_1 \dots m_k})_p$ са записите на числата n и m в p -ична бройна система.

Тъй като записите са в p -ична бройна система, то всяко едно от числата n_i и m_i за $i = \overline{1, k}$ ще е най-много $p - 1$. Т.е. за да **не** се дели $\binom{n_0}{m_0} \binom{n_1}{m_1} \dots \binom{n_k}{m_k}$ на p е необходимо нито един от множителите $\binom{n_i}{m_i}$, за $i = \overline{1, k}$ да не се нулира. За да бъде изпълнено последното е необходимо да се удовлетворява условието: $m_i \leq n_i$. Тъй като n_i и m_i са цифри, то тогава ще имаме:

$m_0 : 0, 1, 2, \dots, n_0$ - общо $n_0 + 1$ възможности за m_0

$m_1 : 0, 1, 2, \dots, n_1$ - общо $n_1 + 1$ възможности за m_1

...

$m_k : 0, 1, 2, \dots, n_k$ - общо $n_k + 1$ възможности за m_k

Тоест ще имаме общо $(n_0 + 1)(n_1 + 1) \dots (n_k + 1) = \prod_{i=0}^k (n_i + 1)$ възможности за

числата m , при които $\binom{n}{m}$ **не** се дели на p , а при всички останали случай ще

имаме поне едно $j : 0 < j < k$ и $m_j > n_j \longrightarrow \binom{n_j}{m_j} = 0$.

Отговор: $n + 1 - \prod_{i=0}^k (n_i + 1)$, където n_i е i -тата цифра в представянето на числото n в p -ична бройна система.

Пример 4:

Колко от числата на седмия ред от триъгълника на Паскал се делят на 7, а на 5 ?
 $7 = \overline{10}_7$ и $7 = \overline{12}_5$

Следователно броя на числата от седмия ред, които се делят на 7 е:

$$7 + 1 - (1 + 1)(0 + 1) = 6,$$

а броя на числата от седмиця ред, които се делят на 5 е:

$$7 + 1 - (1 + 1)(1 + 2) = 2$$

В действительност:

[illegible]

Пример 5:

Колко от числата на 2021-вия ред от триъгълника на Паскал **не** се делят на 13?

$$2021 \mid 13 = 155 \mid 13 = 11 \mid 13 = \mathbf{11}$$

$$\begin{array}{r} 13 \\ \hline 72 \\ 65 \\ \hline \mathbf{6} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ \hline 25 \\ 13 \\ \hline \mathbf{12} \end{array}$$

Т.е. $2021 = \overline{11\ 12\ 6}_{13}$. По следствието от теоремата на Люка, броя на търсените числа е равен на: $(11 + 1)(12 + 1)(6 + 1) = 12 \times 13 \times 7 = \mathbf{1092}$. А пък останалите, които се делят

на 13 са $\frac{2021}{1092}$, т.е. **939**.

Пример 6:

Колко от числата от 5-тия ред на триъгълника на паскал са нечетни?

$5 = \overline{101}_2$, следователно от следствието на теоремата на Люка ще имаме, че точно $(1 + 1)(1 + 0)(1 + 1)$ ще е броя на числата, които не се делят на 2 в 5-тия ред. Т.е. 4 числа.

Пример 7: Може ли ред от триъгълника на Паскал да има точно 1000 нечетни числа?

Не, тъй като в двойчна бройна система, всяко едно естествено число ще има представяне само с 0 и 1. Добавяйки 1-ци към всяка една цифра от това представяне ще получим само 1-ци и 2-ки, чието произведение ще резултира единствено в точни степени на двойката, каквато числото 1000 не е.

Извод: Броя на нечетните числа във всеки ред от триъгълника на паскал е точна степен на двойката!

Теорема на Кумер

Теоремата на Кумер ни дава коя е най-високата степен на p , която дели биномния коефициент $\binom{m}{n}$, където p е просто число.

Ако p не дели $\binom{m}{n}$, то отговора ще е 0. С други думи, теоремата на Кумер е интересна само в случая когато от теоремата на Люка получим остатък 0.

Формулата гласи следното: Записваме m и n в p -ична бройна система и изваждаме m от n ($m > n$). Броя на пъти, в които взимаме „едно на ум“ (едно на заем от по-старшата цифра) е равен на най-високата степен на p , която дели биномния коефициент.

Пример 8: Коя е най-високата степен на 3, която дели $\binom{100}{50}$?

Решение:

$$\begin{array}{r} 100 \div 3 = 33 \div 3 = 11 \div 3 = 3 \div 3 = 1 \\ \underline{9} \quad \underline{33} \quad \underline{9} \quad \underline{3} \\ 10 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \\ \underline{9} \\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 50 \div 3 = 16 \div 3 = 5 \div 3 = 1 \\ \underline{3} \quad \underline{15} \quad \underline{3} \\ 20 \quad 1 \quad 2 \\ \underline{18} \\ 2 \end{array}$$

Т.е. получихме, че $100 = \overline{10201}_3$ и $50 = \overline{1212}_3$

$\begin{array}{r} \underline{10201} \\ 01212 \\ \hline 01212 \end{array}$ Следователно 3^4 дели C_{100}^{50} , но 3^5 **не** го дели. Т.е. отговора е 4.

Доказателството на теоремата на Кумер става чрез теоремата на Лужандер.

Доказателство (Теорема на Кумер):

$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, проверяваме колко пъти множителя p се среща в числителя и колко

в знаменателя. Следователно $\nu_p\left(\binom{n}{m}\right) = \nu_p(n!) - \nu_p(m!) - \nu_p((n-m)!)$. Т.е.

$$\text{имаме, че: } \nu_p\left(\binom{n}{m}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{m}{p^i} \right\rfloor - \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-m}{p^i} \right\rfloor =$$

(n и m са по-малки от p^{k+1} и щом са по-малки знаем, че многоточието в сумата ще има значение само до степен k)

$$\begin{aligned} &= \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{m}{p^2} \right\rfloor - \dots - \left\lfloor \frac{m}{p^k} \right\rfloor \\ &\quad - \left\lfloor \frac{n-m}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-m}{p^2} \right\rfloor - \dots - \left\lfloor \frac{n-m}{p^k} \right\rfloor = \end{aligned}$$

Записваме n и m в p -ична бройна система:

$$\begin{aligned} n &= n_0 + n_1p + n_2p^2 + \dots + n_kp^k \\ m &= m_0 + m_1p + m_2p^2 + \dots + m_kp^k \end{aligned}$$

Б.о.о. може да считаме, че m и n имат равен брой цифри в p -ична бройна система (ако нямат-допълваме с водещи нули по-късия запис)

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n_0}{p} + n_1 + n_2p + \dots + n_kp^{k-1} \right\rfloor = \left\lfloor n_1 + n_2p + \dots + n_kp^k \right\rfloor \right)$$

$$\begin{aligned} &\overline{n_k \dots n_2 n_1}_p + \overline{n_k \dots n_2}_p + \dots + n_k \\ &= -\overline{m_k \dots m_2 m_1}_p - \overline{m_k \dots m_2}_p - \dots - m_k = \\ &\quad -\overline{z_k \dots z_2 z_1}_p - \overline{z_k \dots z_2}_p - \dots - z_k \end{aligned}$$

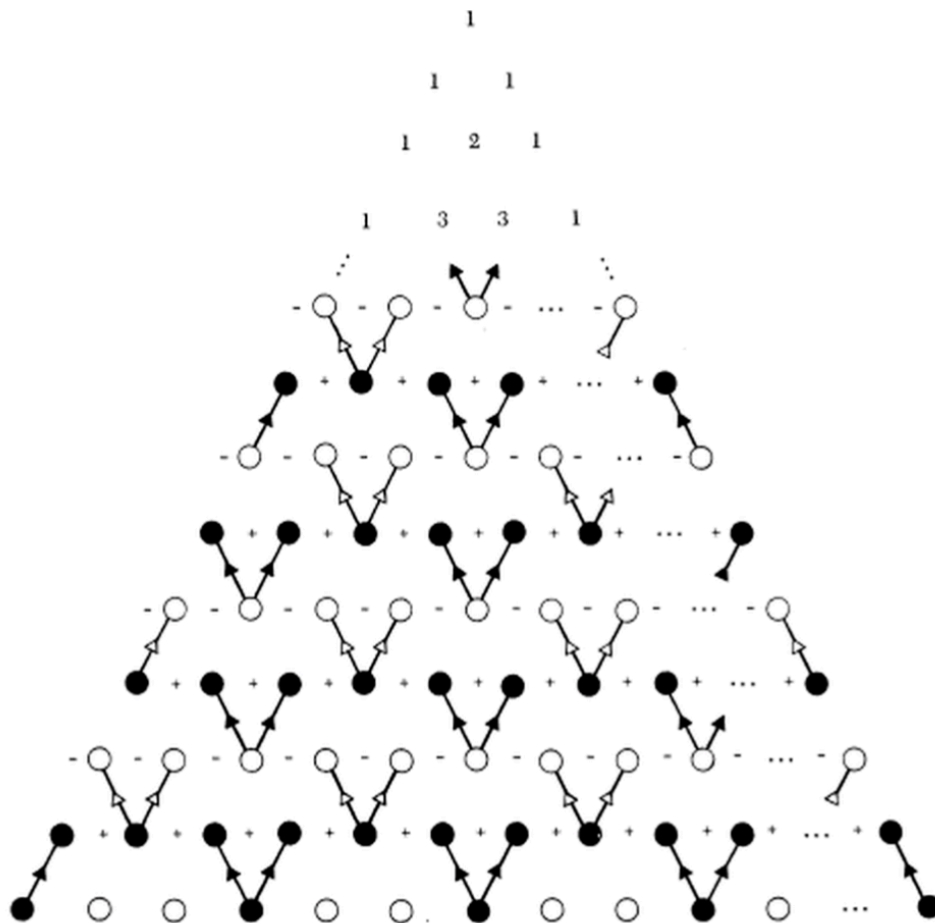
= или 0 или 1 + (0 или 1) + ... + (0 или 1) = $\sum 1$, което
 в зависимост от това
 дали сме взели „едно на ум“
 когато сме изваждали m_0 от n_0

съответства на броя на броя на преносите, което искахме да докажем.

□

Доказателство без думи на едно тъждество.

Доказателство без думи на тъждеството: $3 \sum_{j=0}^n \binom{3n}{3j} = 8^n + 2(-1)^n$, чрез
 включване и изключване в триъгълника на Паскал.



$$\sum_{j=0}^n \binom{3n}{3j} = \sum_{j=1}^{3n-1} (-1)^{j-1} 2^{3n-j} = -2^{3n} \sum_{j=1}^{3n-1} \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{8^n + 2(-1)^n}{3}.$$

- Dean S. Clark (University of Rhode Island, Kingston, RI 02881)

□