Разбиване на естествено число. Диаграми на Юнг. Числа на Каталан.

Лектор: Д. Кралчев (2021-03-11)

Две разбивания смятаме за различни, ако те се различават като мулти множества.

$$
\begin{aligned}
5 &= 5 \\
&= 4 + 1 \\
&= 3 + 2 \\
&= 3 + 1 + 1 \\
&= 2 + 2 + 1 \\
&= 2 + 1 + 1 + 1 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

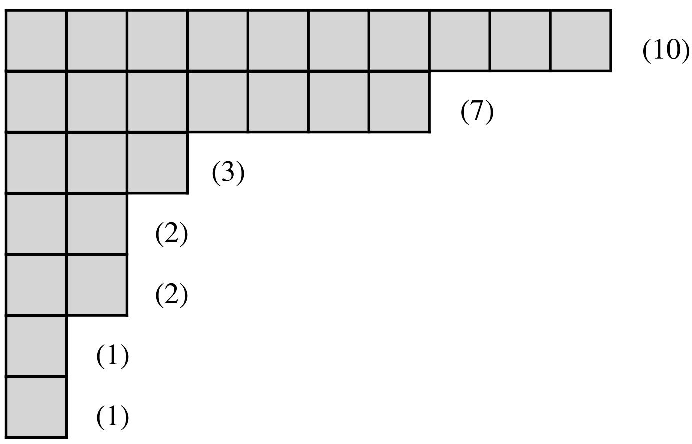
Ако едно разбиване се получава от друго само с разместване на елементите – за нас това е едно и също разбиване. В примера показан по-горе имаме $p(5) = 6$. По дефиниция взимаме $p(n) = 0$ за всички отрицателни цели числа n и $p(0) = 1$ (единствено представяне). Функцията $p(n)$, която дава броя на тези целочислени разбивания не е елементарна. Тя не може да се изрази в явен вид, но може да боравим с нея по други направления.

Функцията $p(n, k)$ дава броя на целочислените разбивания на n на точно k на брой събираеми.

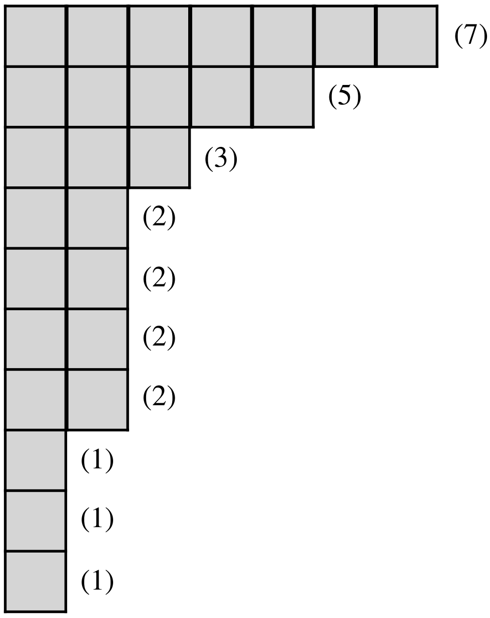
$p(5,1) = 1$, $p(5,2) = p(5,3) = 2$, $p(5,4) = p(5,5) = 1$

$p(n, k)$ също не е елементарна функция, но може да изразим $p(n)$ чрез нея, по следния начин: $p(n) = \sum_{k=1}^{n} p(n, k)$.

$p(n, k)$ има и друга дефиниция: броя на разбиванията на n с произволен брой събираеми, като най-голямото от тях е равно на k. Последното твърдение се доказва с т.нар. диаграми на Юнг.



На фигурата горе може да видим диаграма на Юнг за числото $26 = 10 + 7 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1$



$26 = 7 + 5 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

След транспониране на диаграмата на Юнг (всеки ред става колона) получаваме друго представяне на съответното число. Но тъй като първия ред е най-дългия и участва като събираемо в оригиналната диаграма на Юнг, то в транспонираната диагама, той ще отразява броя на събираемите. По този начин породихме биекция между различните представяния. Т.е. броя на разбиванията с максимално събираемо 10 е равен на броя на разбиванията със 10 събираеми. Но същото важи не само за числото 10, а за всяко естествено число n.

Лема 1. Броят на разбиванията на n, които не съдържат 1-ца е равен на $p(n) - p(n-1)$.

<u>Доказателство</u>:

Всички разбивания на n са $p(n)$ на брой, а тези разбивания, който съдържат 1-ца са $p(n-1)$ на брой, тъй като може да премахнем единицата и да преброим колко са разбиванията на $n-1$. Следователно $p(n) - p(n-1)$ е броя на разбиванията на n, които не съдържат 1-ца.

Теорема 1. Броя на разбиванията на n на различни части (числа) е равен на броя на разбивания на n на нечетни части.

Доказателство:

$partition$	odd	$distinct$
5	*	*
$4+1$		*
$3+2$		*
$3+1+1$	*	
$2+2+1$		
$2+1+1+1$		
$1+1+1+1+1$	*	

Очевидно твърдението е в сила за $n=5$. Ще докажем, че твърдението е вярно и за всяко n, като използваме пораждащи функции.

$$\text{DISTINCT} = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots = \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\ldots =$$

$$= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\ldots =$$

$$= (1+x+x^2+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)\ldots$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{3i}\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^{5i}\right)\ldots =$$

$$= \ldots + {}^{\text{бр. на разб. на } n}_{\qquad\text{от опр. вид}} + \ldots =$$

$$= \ldots + (i+3j+5l+\ldots)x^n + \ldots =$$

$$= \ldots + (\underbrace{1+\ldots+1}_{i} + \underbrace{3+\ldots+3}_{j} + \underbrace{5+\ldots+5}_{k} + \ldots)x^n + \ldots$$

$\Rightarrow$ горе описания вид е само от нечетни числа.

II начин (**Доказателство на Ойлер с биекция**):

Разбиване на различни части може да бъде записано в следния вид:

$n = d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_k$, където всяко естествено число d_i може да бъде представено по уникален начин като степен на $2^{\text{-ката}}$ умножена по нечетно число.

Следователно:

$n = 2^{\alpha_1}O_1 + 2^{\alpha_2}O_2 + 2^{\alpha_3}O_3 + \ldots + 2^{\alpha_k}O_k$, където O_i е някакво (ODD) нечетно число. Ако групираме заедно нечетните числа ще получим следния израз за n:

$$n = (2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots) \times 1 + (2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \ldots) \times 3 + + (2^{\gamma_1} + 2^{\gamma_2} + \ldots) \times 5 + \ldots =$$

$$= \mu_1 \times 1 + \mu_3 \times 3 + \mu_5 \times 5 + \ldots$$

Във всяка редица $(2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots)$, α_i-тата са различни (тъй като d_i са различни). Следователно сумата е представянето на някакво число μ_j в двоична бройна система. Т.е. сме съпоставили на всяко представяне на n (от раззлични числа) - представяне като сума от нечетни числа. Това е разбиването, което съдържа μ_1 1 -ци, μ_3 3-ки и т.н.

$\square$

Пример за Ойлеровата биекция:
$5 = 3 + 2 = 2^0 \times 3 + 2^1 \times 1 = 2^1 \times (1) + 2^0 \times (3) =$ две единици и една тройка $= 3 + 1 + 1$

Рекурентна формула за $p(n, k)$.

$$p(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-k, k)$$

Доказателство:

$p(n-1, k-1)$ е броя на разбиванията на n, които съдържат събиаемо 1-ца, която може да я премахнем.
$p(n-k, k)$ е броя на останалите разбивания на n, които НЕ съдържат 1-ца и тогава ще може от всяко събираемо да извадим 1-ца и то да остане (няма да изчезне).
Формула на Харди, Рамануджан и Радемахер (Hardy, Ramanujan и Rademacher):

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k} \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(x - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{24}\right)}} \right]$$, където

$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le h \le k-1 \\ (h,k)=1}} \omega_{h,k} e^{-2\pi inh/k}$, където $\omega_{h,k}$ е $24^{\text{-тия}}$ корен на единицата.

Това не е просто сума, а е подредена сума. Т.е. при $k = 1$ получаваме най-голямата част от тази сума и колкото повече k расте - толкова по-малка част ще се сумира (и то много по-малка).

Например за $p(200) = 3{,}972{,}999{,}029{,}388$.

$$\begin{array}{r} + \ 3{,}972{,}998{,}993{,}185.896 \\ + \ 36{,}282.978 \\ - \ 87.584 \\ + \ 5.147 \\ + \ 1.424 \\ + \ 0.071 \\ + \ 0.000 \\ + \ 0.044 \\ \hline 3{,}972{,}999{,}029{,}387.975 \end{array}$$

След като първото събираемо е най-важно, то то ще задава асимптотиката на $p(n)$. Следователно за $k = 1$ може да видим, че $p(n) \sim \dfrac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2n/3}}$, $n \to \infty$ расте експоненциално.

Броят на разбиванията на нечетни събираеми е равен на броя на разбивания на различни събираеми на дадено число n. Това вече го доказахме, но да вземем сега допълненията на тези множества и да намерим биекция между тях.

$$\begin{array}{ll} ODD(\mathscr{A}) & DISTINCT(\mathscr{B}) \\ A_1 = 2 & \qquad B_1 = \{1,1\} \\ A_2 = 4 & B_2 = \{2,2\} \\ A_3 = 6 & \qquad B_3 = \{3,3\} \\ A_4 = 8 & B_4 = \{4,4\} \\ \dots & \dots \\ A_k = 2k & B_k = \{k, k\} \\ \dots & \dots \end{array}$$

Тази биекция между дефектите е такава, че запазва сбора на елементите в множеството. Тя поражда биекция между лошите разбивания. Но добрите разбивания са равни на всички разбивания без лошите и от тук добрите разбивания следва, че са равен брой.

Това е случая, когато тези множества нямат сечение, но ако имат сечение - тогава има допълнително изискване:

Сумата на обединението на дефекти от единя вид трябва да е равна на сумата от обединението на съответните дефекти от другия вид, като под обединение тук разбираме максималния брой присъствие (а не сбор) на елементи от един вид при обединение на мултимножества от дефекти.

Пример 1. Броят на разбиванията без повторения е равен на броя на разбиванията само с нечетни събираеми на дадено число n.

$\mathscr{A}$: $\{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{4,4\}, \cdots, \{k,k\}, \cdots$
$\mathscr{B}$: $2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad \cdots, \quad 2k, \quad \cdots$

Пример 2. Броят на разбиванията с числа, който не са кратни на d е равен на броя на разбиванията с не повече от d еднакви събираеми на дадено число n.

$\mathscr{A}$: $d, \quad 2d, \quad 3d, \quad 4d, \quad \cdots, \quad kd, \quad \cdots$
$\mathscr{B}$: $\{1,...,1\}, \{2,...,2\}, \{3,...,3\}, \{4,...,4\}, \quad \cdots, \{k,\ldots,k\}, \cdots$

Пример 3. Броят на разбиванията на дадено число n с числа, взаимно прости с 6 (не се делят нито на 2, нито на 3, т.е. са от вида $6k \pm 1$) е равен на броя на разбиванията без повторения на събираеми и без числа кратни на 3.

$\mathscr{A}$: $2, \quad 3, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 9, \quad \cdots$
$\mathscr{B}$: $\{1,1\}, \quad 3, \quad \{2,2\}, \quad 6, \quad \{4,4\}, \quad 9, \quad \cdots$

Числа на Каталан

Тази редица има следните членове: $C_0 = 1$, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$, $C_4 = 14$, $C_5 = 42, \ldots$ Рекурентната зависимост: $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \,.\, C_{n-1-i}$, за $n \geq 1$. Редицата намира много приложения. Формула за числата на Каталан може да се изведе сравнително лесно с пораждащи функции.

Нека означим с $f(x)$ пораждащата функция на редицата, тоест $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \,.\, x^n$. Рекурентното уравнение на редицата наподобява умножение на полиноми: ако $P(x) = \sum_{i=0}^{m} p_i \,.\, x^i$, $Q(x) = \sum_{i=0}^{k} q_i \,.\, x^i$, то $P(x) \,.\, Q(x) = \sum_{n=0}^{m+k} \left(\sum_{i=0}^{n} p_i \,.\, q_{n-i} \right) x^n$.

Това ни подсеща да разгледаме $f^2(x)$, защото там всеки от коефициентите е отново член на редицата заради рекурентната формула. Подробно:

$$f^2(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} C_i \,.\, x^i \right) . \left(\sum_{j=0}^{\infty} C_j \,.\, x^j \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} C_i \,.\, C_{n-i} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \,.\, x^n$$

$$\Rightarrow f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \,.\, x^n \Rightarrow x f^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \,.\, x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,.\, x^n.$$

$$\Rightarrow x \,.\, f^2(x) + 1.1 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \,.\, x^n = f(x).$$

Така от рекурентното уравнение получихме функционалното уравнение: $x \,.\, f^2(x) - f(x) + 1 = 0$ за всяко x. Решаваме квадратното уравнение спрямо функцията:

$$D = 1 - 4x \Rightarrow f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \text{ или } f(x) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Нашата функция ще е със знак минус, тъй като ние искаме тя да е дефинирана в околност на нулата (за да може да бъде аналитична).

Имаме, че $f(0) = C_0 = 1$,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{1^2 - (1 - 4x)}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \to 0} \frac{4x}{2x(1 + \sqrt{1 - 4x})} = \lim_{x \to 0} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{0}=+\infty$, т.е. $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ е пораждащата функция на

числата на Каталан. Развиваме в ред на Тейлор:

$$f(x)=\frac{1-(1+(-4x))^{0,5}}{2x}=\frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{0,5}{n}.(-4x)^n}{2x}=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}-\binom{0,5}{n}.(-4x)^n}{2x}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-0,5.\binom{0,5}{n}.(-4)^n.x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}-0,5.\binom{0,5}{n+1}.(-4)^{n+1}.x^n.$$

От друга страна, $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n.x^n$. Сравняваме коефициентите:

$$C_n=-0,5.\binom{0.5}{n+1}.(-4)^{n+1}=-0,5.\frac{(2n-1)!!(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)!}.(-4)^{n+1}=\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!}.2^n=$$

$$\frac{(2n-1)!!(2n)!!}{(n+1)!(2n)!!}.2^n=\frac{(2n)!}{(n+1)!2^n n!}.2^n=\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}=\frac{1}{n+1}.\frac{(2n)!}{n!.n!}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

.

Тази формула ще използваме по-нататък: $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

Забележка: $C_n=\dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}=\dbinom{2n}{n}-\dbinom{2n}{n+1}=\dfrac{(2n)!}{(n+1)!n!}=\prod\limits_{k=2}^{n}\dfrac{n+k}{k}$.

Първите няколко числа на Каталан:

$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845, \ldots$

$C_n\sim\dfrac{4^n}{n^{3/2}\sqrt{\pi}}$ (асимптотично приближение, получено от формулата на Стирлинг).

Задача: Нека $n \in \mathbb{N}$. Колко са думите $w \in \{0,1\}^{2n}$, за които

1. $|w|_0 = |w|_1$
2. за всеки префикс u : $|u|_0 \geq |u|_1$?

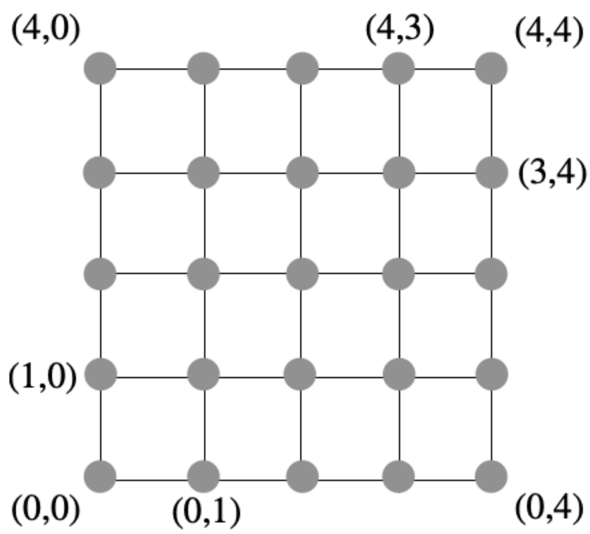
Задачата има следната еквивалентна формулировка:

(a) По колко начина може да стигнем от точката $(0,0)$ до точката (n, n) в стандартна квадратна решетка, ако правим единични стъпки само надясно и нагоре? А ако трябва да не преминаваме над диагонала, свързващ тези две точки?

(b) По колко коректни начина може да съставим дума от n откриващи и n закриващи скоби (пример: "$(())$" е коректна, а "$())($" - не)?

Решение:

(a)



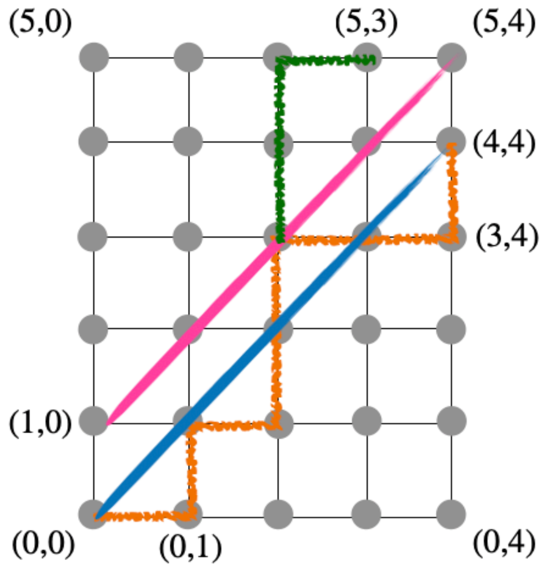
Нека разгледаме квадратната решетка за $n = 4$. Нейната размерност е 4×4.

Очевидно за всяко n - пътя от началната до крайната точка ще е с дължина $2n$. Нека означим движение надясно с r, а движение нагоре с u.

Съществено е да направим следните наблюдения:

- Всеки един път от начлната до крайната точка ще е от вида $\underbrace{rurruu\ldots urru}_{2n}$
- Всички желани пътища ще имат еднаква дължина
- Ако R е множеството на поетите посоки надясно, а U е множеството на поетите посоки нагоре, то $|R| = |U| = n$.

Задачата се свежда до това да изберем n елементни подмножества на $2n$ елементно множество. Това може да стане по $C_{2n}^{n} = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n)!(n)!}$ начина.



Нека сега преброим пътищата, които не минават над диагонала свързващ началната и крайната точка, спазвайки същите правила.

Броя на тези пътища ще намерим като от броя на всички пътища извадим броя на „лошите“ пътища, т.е. тези които си позволят да преминат през синия диагонал.

Нека разгледаме един такъв път, който е „лош“. Например оранжевият такъв от картинката по-горе. Освен това нека разширим решетката с още един ред нагоре. По този начин ще получим решетка от $n+1$ реда и n колони. Сега, след като лошия път е пресякъл синия диагонал, то той или ще пресича и новия розов диагонал или най-малко ще има точка лежаща на него. От тази точка която лежи на розорвия диагонал, до края на пътя ще направим симетричния му спрямо розовия диагонал и по този начин новия път (със зелената проекция и старото начало на оригиналния път) ще се намират изцяло в решетката с размерност $n+1 \times n-1$. Това може да го направим за всеки път, който си позволи да премине синия диагонал. Така между множеството на всички пътища в решетка с размерност $n+1 \times n-1$ и лошите (всички проектирани симетрично спрямо розовия диагонал) построихме биекция.

По този начин на всеки „лош“ път съпоставихме път от $(0,0)$ до $(n-1, n+1)$. Обратно, ако имаме път от $(0,0)$ до $(n-1, n+1)$, то той минава над главния диагонал и заменяйки r с u и u с r (т.е. $\rightarrow$ с $\uparrow$ и $\uparrow$ с $\rightarrow$) след първия момент k, в който $x_k < y_k$ (където с x_k сме отбелязали броя на r (, а с y_k броя на u) в катия момент/преход от пътя) получаваме „лош“ път от $(0,0)$ до (n,n), който минава над главния диагонал в момента k.

Но броя нвсички пътища в решетка с размерност $n+1 \times n-1$ е $C_{2n}^{n-1} = C_{2n}^{n+1} = \binom{2n}{n-1}$, например избираме $n-1$ подмножества от $2n$ елементно множество $\Big($или аналогично $n+1$ подмножества от $2n$ елементно подмножество (биномните коефициенти от един ред са симетрични - *триъгълник на Паскал*)$\Big)$

Следователно броя на търсените пътища е равен на $\binom{2n}{n} - |BAD| = \underline{\underline{\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}}} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \binom{2n}{n}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$

което е n-тото число на Каталан (https://en.wikipedia.org/wiki/Catalan_number).