Числат на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации и за реципрочния хиперболичен косинус.

(2021-03-25)

Числа на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации.

Означаваме с A_n- n-тото зигзагообразно число на Ойлер и го дефинираме комбинаторно като броя на наредбите на числата $\{1,2,...,n\}$ без повторения, в които всяко число е алтернативно по-голямо или по-малко от предходното (първия знак винаги е $<$, т.е. първото число винаги е по малко от следващото - по дефиниция). Първите няколко зигзагообразни числа на Ойлер са $1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, \ldots$ (като започваме от нулевото число, което по дефиниция е $A_0 = A_\emptyset = 1$)

Рекурентното уравнение е $2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$.

Доказателство: Да разгледаме мястото на $n+1$-вото число в пермутацията. Където и да го сложим обаче, то винаги ще си е най-голямото от всички наредени. Т.е. знака преди $n+1$ вече е $<$, а след $n+1$ е $>$. Трябва сега да изберем кои k числа ще застанат в ляво (т.е. да изберем мястото на $n+1$). Избирайки това k ние избираме еднозначно мястото на $n+1$-вото число. В ляво от него може да има $0,1,2,...,n$ числа $\Rightarrow$ по $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ начина може да му изберем позиция. Числата преди $n+1$ може да ги подредим в зигзагообразна пермутация по A_k начина, а числата след $n+1$ по A_{n-k} начина. Всяка пермутация отляво може да се сглоби с всяка пермутация отдясно. Двойката идва от съображението, че клкото на брой са зигзагообразните пермутации, които започват със знак $<$, толкова са и тези при които първия знак е $>$. Т.е. получаваме зигзагообразните пермутации от двата вида и взимаме само тези отговарящи на дефиницията.

Имайки вече рекурентна зависимост с начални условия, може да смятаме, че познаваме редицата от числа A_n.

Освен това може да се опитаме да изведем асимптотиката им, като приложим познатите методи от аналитичната комбинаторика (пораждащи функции):

$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$, е в сила при $n \geq 1$ (за $n = 0$ не е вярна рекурентната зависимост) $\Rightarrow$ ЕПФ: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \Rightarrow A^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k A_{n-k}}{k!(n-k)!} x^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!A_k A_{n-k}}{n!k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k A_{n-k}x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k A_{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}2A_{n+1} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n = 1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n+1}}{(n+1)!}x^{n+1}\right] =$$

$$= 1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{A_n}{n!}x^n\right] = 1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x) - \frac{A_0}{0!}x^0 - \frac{A_1}{1!}x^1\right] = 1 + 2\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x) - 1 - x\right] =$$

$$= 1 + 2\frac{\partial}{\partial x}A(x) - 2 = 2\frac{\partial}{\partial x}A(x) - 1.$$

$$A^2(x) = 2\frac{\partial}{\partial x}A(x) - 1 = 2A'(x) - 1 \mapsto A^2 = 2A - 1.$$

Следователно $A' = \dfrac{1 + A^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1 + A^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial A}{1 + A^2} = \frac{\partial x}{2}\,\Big|\int \Rightarrow \operatorname{arctg} A(x) = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow A(x) = \operatorname{tg}\left(C + \frac{1}{2}\right)$$

, но

$A(0) = 1 = \operatorname{tg}(C) \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$. Т.е. $A(x) = \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Опростяваме:

$$A(x) = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}} = \frac{1 + 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

$A(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$ (Теорема на Андрѐ)

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{1!}x^1 + \frac{2}{3!}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \frac{272}{7!}x^7 + \dots$$

Числителя е броя на зигзагообразните пермутации на числата от 1 до n без повторения, където n е равно на степента на x в текущото събираемо. Т.е. числителите се явяват решение на комбинаторна задача.

<u>Пример</u>:

$$f(x)=\frac{17}{1-3x}+\frac{12}{1-5x}=17\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+12\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(17.3^n+12.5^n).$$

Асимптотиката на коефициента $17.3^n+12.5^n$ се определя от по-бързо растящия коефициент $5^n \Rightarrow 17.3^n+12.5^n \underset{n\to\infty}{\sim} 5^n$.

$f(x)$ не е дефинирана при $x_1=\frac{1}{3}$ и $x_2=\frac{1}{5}$, но редът е сходящ за $x\in\left(-\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right)\Rightarrow R=\frac{1}{5}$. *<u>Извод</u>*: Ако имаме няколко особени точки, важна за функцията е тази, която е по-близо до нулата. Тя определя асимптотиката на коефициента пред събираемото във всеки член от развитието и в степенен ред.

Следователно, $f(x)=\frac{17}{1-3x}+\frac{12}{1-5x}\underset{x\to\frac{1}{5}-0}{\sim}\frac{12}{1-5x}$. Т.е. не сме длъжни да получим точните коетициенти, а е достатъчно да направим асимптотично приближение на функцията и тогава на по-простата функция, получена от приближението може да намерим коефициентите, които ще се явяват асимптотично приближение на A_n.

$A(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}=\sec x+\operatorname{tg} x$ има особени точки $x_1=-\frac{\pi}{2}$ и $x_2=-\frac{\pi}{2}$ и тъй като и двете са еднакво близо до 0, то може да вземем която и да е от тях.

При $x\to\frac{\pi}{2}-0: A(x)\underset{x\to\frac{\pi}{2}-0}{\sim}\frac{2}{\cos x}=\frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=\frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times 2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=$

$$=\frac{2}{\frac{\pi}{2}-x}.\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{4}{\pi}}{1-\frac{2}{\pi}.x}=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n.x^n\Rightarrow\frac{A_n}{n!}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{4}{\pi},\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\Rightarrow$$

$A_n\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n n!=2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1}n!$ (асимптотика на числата на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации)

Числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

Тези обекти не са комбинаторни, а ако ги тълкуваме като такива, те ще съвпадат с броя на зигзагообразните пермутации, ако ги вземем под модул. Те са интересни като допълнение на класификацията.

$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ ще наричаме хиперболичен косинус от t. Аналогично хиперболичен синус от t ще наричаме $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. Тези две функции имат доста подобни свойства на косинуса и синуса.

Например: $\cosh^2 t - \sinh^2 = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t} + 2e^0}{4} - \dfrac{e^{2t} + e^{-2t} - 2e^0}{4} = 1$. При формулите за$\cosh(\alpha \pm \beta)$ също ще има голяма прилика и т.н.

Тази аналогия не е случайна и може да се види чрез използването на малко комплексен анализ.

$e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$

$e^{ix} = \left[1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots\right] + \left[\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right] = \cos x + i \sin x$ (формула на

Ойлер). Любопитно: Ако вземем $x = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1$.

Следователно $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

$f(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_n}{n!} t^n$, където по формула на Тейлор $E_n = f^{(n)}(0)$. Търсим E_n.

E_n е четвъртия вид числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

E_n е четна $\Rightarrow E_n = 0$ за всяко нечетно n. Оказва се, че нечетните n с точност до знак са броя на зигзакообразните пермутации.

Нека $t = ix$. От $\dfrac{1}{\cosh t} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_n}{n!} t^n$ следва, че $\dfrac{1}{\cosh ix} = \sum_{n=0} \infty \dfrac{E_n}{n!} i^n x^n$, но $\cosh ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh x \Rightarrow \dfrac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{E_n}{n!} i^n x^n$, но $\sec x = \dfrac{1}{\cos hx}$ вече я развихме в степенен ред и $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} i^{2k} x^{2k}$, тъй като нечетните събираеми ще са нули. Следователно $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} (i^2)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$, но от формулата на Андрѐ

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \Rightarrow \frac{A_{2k}}{(2k)!} = \frac{E_{2k}}{(2k)!} (-1)^k \Rightarrow E_{2k} = A_{2k} (-1)^k.$$