

Числа на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации и за реципрочния хиперболичен косинус.

Лектор: Д. Кралчев (2021-03-25)

Числа на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации.

Означаваме с A_n - n -ТОТО зигзагообразно число на Ойлер и го дефинираме комбинаторно като броя на наредбите на числата $\{1, 2, \dots, n\}$ без повторения, в които всяко число е алтернативно по-голямо или по-малко от предходното (първия знак винаги е $<$, т.е. първото число винаги е по-малко от следващото – по дефиниция). Първите няколко зигзагообразни числа на Ойлер са 1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, ... (като започваме от нулевото число, което по дефиниция е $A_0 = A_{\emptyset} = 1$)

$$\text{Рекурентното уравнение е } 2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k}.$$

Доказателство: Да разгледаме мястото на $n+1$ -вото число в пермутацията. Където и да го сложим обаче, то винаги ще си е най-голямото от всички наредени. Т.е. знака преди $n+1$ вече е $<$, а след $n+1$ е $>$. Трябва сега да изберем кои k числа ще застанат в ляво (т.е. да изберем мястото на $n+1$). Избирайки това k ние избираме еднозначно мястото на $n+1$ -вото число. В ляво от него може да има $0, 1, 2, \dots, n$ числа \Rightarrow по $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ начина може да му изберем позиция. Числата

преди $n+1$ може да ги подредим в зигзагообразна пермутация по A_k начина, а числата след $n+1$ по A_{n-k} начина. Всяка пермутация отляво може да се сглоби с всяка пермутация отдясно. Двойката идва от съображението, че клкото на брой са зигзагообразните пермутации, които започват със знак $<$, толкова са и тези при които първия знак е $>$. Т.е. получаваме зигзагообразните пермутации от двата вида и взимаме само тези отговарящи на дефиницията.

Имайки вече рекурентна зависимост с начални условия, може да смятаме, че познаваме редицата от числа A_n .

Освен това може да се опитаме да изведем асимптотиката им, като приложим познатите методи от аналитичната комбинаторика (пораждащи функции):

$$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k} \text{ е в сила при } n \geq 1 \text{ (за } n=0 \text{ не е вярна рекурентната}$$
$$\text{зависимост)} \Rightarrow \text{ЕПФ: } A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \Rightarrow A^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{A_k A_{n-k}}{k!(n-k)!} x^n =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n! A_k A_{n-k}}{n! k! (n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k A_{n-k} = \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2A_{n+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right] = \\
&= 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \right] = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) - \frac{A_0}{0!} x^0 - \frac{A_1}{1!} x^1 \right] = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} [A(x) - 1 - x] = \\
&= 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 2 = 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 1.
\end{aligned}$$

$$A^2(x) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 1 = 2A'(x) - 1 \mapsto A^2 = 2A - 1.$$

$$\text{Следователно } A' = \frac{1 + A^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1 + A^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial A}{1 + A^2} = \frac{\partial x}{2} \left| \int \Rightarrow \arctg A(x) = \frac{1}{2}x + C \Rightarrow A(x) = \operatorname{tg} \left(C + \frac{1}{2} \right) \right.$$

, но

$$A(0) = 1 = \operatorname{tg}(C) \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}. \text{ Т.е. } A(x) = \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Опростяваме:

$$\begin{aligned}
A(x) &= \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} = \\
&= \frac{1 + \sin x}{\cos x}.
\end{aligned}$$

$$A(x) = \sec x + \operatorname{tg} x \text{ (Теорема на Андрè)}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \frac{272}{7!} x^7 + \dots$$

Числителя е броя на зигзагообразните пермутации на числата от 1 до n без повторения, където n е равно на степента на x в текущото събираемо. Т.е. числителите се явяват решение на комбинаторна задача.

Пример:

$$f(x) = \frac{17}{1-3x} + \frac{12}{1-5x} = 17 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n + 12 \sum_{n=0}^{\infty} (5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n (17 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n).$$

Асимптотиката на коефициента $17 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n$ се определя от по-бързо растящия коефициент $5^n \Rightarrow 17 \cdot 3^n + 12 \cdot 5^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 5^n$.

$f(x)$ не е дефинирана при $x_1 = \frac{1}{3}$ и $x_2 = \frac{1}{5}$, но редът е сходящ за $x \in \left(-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\right) \Rightarrow R = \frac{1}{5}$. Извод: Ако имаме няколко особени точки, важна за функцията е тази, която е по-близо до нулата. Тя определя асимптотиката на коефициента пред събираемото във всеки член от развитието и в степенен ред.

Следователно, $f(x) = \frac{17}{1-3x} + \frac{12}{1-5x} \underset{x \rightarrow \frac{1}{5}-0}{\sim} \frac{12}{1-5x}$. Т.е. не сме длъжни да

получим точните коефициенти, а е достатъчно да направим асимптотично приближение на функцията и тогава на по-простата функция, получена от приближението може да намерим коефициентите, които ще се явяват асимптотично приближение на A_n .

$A(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \sec x + \operatorname{tg} x$ има особени точки $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$ и тъй като и двете са еднакво близо до 0, то може да вземем която и да е от тях.

$$\text{При } x \rightarrow \frac{\pi}{2} - 0 : A(x) \underset{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0}{\sim} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times 2}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} =$$

$$= \frac{2}{\frac{\pi}{2} - x} \cdot \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{4}{\pi}}{1 - \frac{2}{\pi} \cdot x} = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \cdot x^n \Rightarrow \frac{A_n}{n!} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{\pi}, \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \Rightarrow$$

$$A_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^n n! = 2 \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n+1} n! \text{ (асимптотика на числата на Ойлер за броя на}$$

зигзагообразните пермутации)

Числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

Тези обекти не са комбинаторни, а ако ги тълкуваме като такива, те ще съвпадат с броя на зигзагообразните пермутации, ако ги вземем под модул. Те са интересни като допълнение на класификацията.

$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ще наричаме хиперболичен косинус от t . Аналогично хиперболичен синус от t ще наричаме $\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$. Тези две функции имат доста подобни свойства на косинуса и синуса.

Например: $\cosh^2 t - \sinh^2 = \frac{e^{2t} + e^{-2t} + 2e^0}{4} - \frac{e^{2t} + e^{-2t} - 2e^0}{4} = 1$. При формулите за $\cosh(\alpha \pm \beta)$ също ще има голяма прилика и т.н.

Тази аналогия не е случайна и може да се види чрез използването на малко комплексен анализ.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{ix} = \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right] + \left[\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right] = \cos x + i \sin x \quad (\text{формула на Ойлер}).$$

Любопитно: Ако вземем $x = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1$.

$$\text{Следователно } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \text{ и } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

$$f(x) = \frac{1}{\cos x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n, \text{ където по формула на Тейлор } E_n = f^{(n)}(0). \text{ Търсим } E_n.$$

E_n е четвъртия вид числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

E_n е четна $\Rightarrow E_n = 0$ за всяко нечетно n . Оказва се, че нечетните n с точност до знак са броя на зигзакообразните пермутации.

$$\text{Нека } t = ix. \text{ От } \frac{1}{\cosh t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n \text{ следва, че } \frac{1}{\cosh ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} i^n x^n, \text{ но}$$
$$\cosh ix = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh x \Rightarrow \frac{1}{\cosh x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} i^n x^n, \text{ но } \sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ вече я}$$

развихме в степенен ред и $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} i^{2k} x^{2k}$, тъй като нечетните събираеми
 ще са нули. Следователно $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} (i^2)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$, но от

формулата на Андрè

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \Rightarrow \frac{A_{2k}}{(2k)!} = \frac{E_{2k}}{(2k)!} (-1)^k \Rightarrow E_{2k} = A_{2k} (-1)^k.$$