Числа на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации и за реципрочния хиперболичен косинус.

(2021-03-25)

Числа на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации.

Означаваме с A_n- n-тото зигзагообразно число на Ойлер и го дефинираме комбинаторно като броя на наредбите на числата $\{1,2,...,n\}$ без повторения, в които всяко число е алтернативно по-голямо или по-малко от предходното (първия знак винаги е $<$, т.е. първото число винаги е по малко от следващото – по дефиниция). Първите няколко зигзагообразни числа на Ойлер са $1, 1, 1, 2, 5, 16, 61, 272, 1385, 7936, \ldots$ (като започваме от нулевото число, което по дефиниция е $A_0 = A_\varnothing = 1$)

Рекурентното уравнение е $2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$.

Доказателство: Да разгледаме мястото на $n+1$-вото число в пермутацията. Където и да го сложим обаче, то винаги ще си е най-голямото от всички наредени. Т.е. знака преди $n+1$ вече е $<$, а след $n+1$ е $>$. Трябва сега да изберем кои k числа ще застанат в ляво (т.е. да изберем мястото на $n+1$). Избирайки това k ние избираме еднозначно мястото на $n+1$-вото число. В ляво от него може да има $0,1,2,...,n$ числа $\Rightarrow$ по $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ начина може да му изберем позиция. Числата преди $n+1$ може да ги подредим в зигзагообразна пермутация по A_k начина, а числата след $n+1$ по A_{n-k} начина. Всяка пермутация отляво може да се сглоби с всяка пермутация отдясно. Двойката идва от съображението, че клкото на брой са зигзагообразните пермутации, които започват със знак $<$, толкова са и тези при които първия знак е $>$. Т.е. получаваме зигзагообразните пермутации от двата вида и взимаме само тези отговарящи на дефиницията.

Имайки вече рекурентна зависимост с начални условия, може да смятаме, че познаваме редицата от числа A_n.

Освен това може да се опитаме да изведем асимптотиката им, като приложим познатите методи от аналитичната комбинаторика (пораждащи функции):

$2A_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k}$, е в сила при $n \geq 1$ (за $n = 0$ не е вярна рекурентната зависимост) $\Rightarrow$ ЕПФ: $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \Rightarrow A^2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{A_k A_{n-k}}{k!(n-k)!} x^n =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{n! A_k A_{n-k}}{n! k! (n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k A_{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} 2A_{n+1} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1} \right] =$$

$$= 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{n!} x^n \right] = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) - \frac{A_0}{0!} x^0 - \frac{A_1}{1!} x^1 \right] = 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[A(x) - 1 - x \right] =$$

$$= 1 + 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 2 = 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 1.$$

$$A^2(x) = 2 \frac{\partial}{\partial x} A(x) - 1 = 2A'(x) - 1 \mapsto A^2 = 2A - 1.$$

Следователно $A' = \dfrac{1 + A^2}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1 + A^2}{2} \Rightarrow \frac{\partial A}{1 + A^2} = \frac{\partial x}{2} \Bigg| \int \Rightarrow \operatorname{arctg} A(x) = \frac{1}{2} x + C \Rightarrow A(x) = \operatorname{tg} \left(C + \frac{1}{2} \right)$$

, но

$A(0) = 1 = \operatorname{tg}(C) \Rightarrow C = \dfrac{\pi}{4}$. Т.е. $A(x) = \operatorname{tg} \left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4} \right)$.

Опростяваме:

$$A(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} = \frac{1 + 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1 + \sin x}{\cos x}.$$

$A(x) = \sec x + \operatorname{tg} x$ (Теорема на Андрѐ)

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{1!} x^1 + \frac{2}{3!} x^3 + \frac{16}{5!} x^5 + \frac{272}{7!} x^7 + \ldots$$

Числителя е броя на зигзагообразните пермутации на числата от 1 до n без повторения, където n е равно на степента на x в текущото събираемо. Т.е. числителите се явяват решение на комбинаторна задача.

<u>Пример</u>:

$$f(x) = \frac{17}{1-3x} + \frac{12}{1-5x} = 17\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + 12\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n = \sum_{n=0}^{\infty}x^n(17.3^n + 12.5^n).$$

Асимптотиката на коефициента $17.3^n + 12.5^n$ се определя от по-бързо растящия коефициент $5^n \Rightarrow 17.3^n + 12.5^n \underset{n\to\infty}{\sim} 5^n$.

$f(x)$ не е дефинирана при $x_1 = \dfrac{1}{3}$ и $x_2 = \dfrac{1}{5}$, но редът е сходящ за $x \in \left(-\dfrac{1}{5}, \dfrac{1}{5}\right) \Rightarrow R = \dfrac{1}{5}$. *<u>Извод</u>*: Ако имаме няколко особени точки, важна за функцията е тази, която е по-близо до нулата. Тя определя асимптотиката на коефициента пред събираемото във всеки член от развитието и в степенен ред.

Следователно, $f(x) = \dfrac{17}{1-3x} + \dfrac{12}{1-5x} \underset{x\to\frac{1}{5}-0}{\sim} \dfrac{12}{1-5x}$. Т.е. не сме длъжни да получим точните коетициенти, а е достатъчно да направим асимптотично приближение на функцията и тогава на по-простата функция, получена от приближението може да намерим коефициентите, които ще се явяват асимптотично приближение на A_n.

$A(x) = \dfrac{1+\sin x}{\cos x} = \sec x + \operatorname{tg} x$ има особени точки $x_1 = -\dfrac{\pi}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ и тъй като и двете са еднакво близо до 0, то може да вземем която и да е от тях.

При $x \to \dfrac{\pi}{2} - 0 : A(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}-0}{\sim} \dfrac{2}{\cos x} = \dfrac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \dfrac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times 2}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} =$

$$= \frac{2}{\frac{\pi}{2}-x}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{4}{\pi}}{1-\frac{2}{\pi}\cdot x} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^n\cdot x^n \Rightarrow \frac{A_n}{n!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{4}{\pi}, \left(\frac{2}{\pi}\right)^n \Rightarrow$$

$A_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^n n! = 2\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^{n+1} n!$ (асимптотика на числата на Ойлер за броя на зигзагообразните пермутации)

Числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

Тези обекти не са комбинаторни, а ако ги тълкуваме като такива, те ще съвпадат с броя на зигзагообразните пермутации, ако ги вемем под модул. Те са интересни като допълнение на класификацията.

$\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ ще наричаме хиперболичен косинус от t. Аналогично хиперболичен синус от t ще наричаме $\sinh t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$. Тези две функции имат доста подобни свойства на косинуса и синуса.

<u>Например</u>: $\cosh^2 t - \sinh^2 = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t} + 2e^0}{4} - \dfrac{e^{2t} + e^{-2t} - 2e^0}{4} = 1$. При формулите за$\cosh(\alpha \pm \beta)$ също ще има голяма прилика и т.н.

Тази аналогия не е случайна и може да се види чрез използването на малко комплексен анализ.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$e^{ix} = \left[1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots\right] + \left[\dfrac{x}{1!} - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dots\right] = \cos x + i \sin x$ (формула на

Ойлер). <u>Любопитно</u>: Ако вземем $x = \pi \Rightarrow e^{i\pi} = -1$.

Следователно $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

$f(x) = \dfrac{1}{\cos x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n$, където по формула на Тейлор $E_n = f^{(n)}(0)$. Търсим E_n.

E_n е четвъртия вид числа на Ойлер за реципрочния хиперболичен косинус.

E_n е четна $\Rightarrow E_n = 0$ за всяко нечетно n. Оказва се, че нечетните n с точност до знак са броя на зигзакообразните пермутации.

Нека $t = ix$. От $\dfrac{1}{\cosh t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} t^n$ следва, че $\dfrac{1}{\cosh ix} = \displaystyle\sum_{n=0} \infty \frac{E_n}{n!} i^n x^n$, но $\cosh ix = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cosh x \Rightarrow \dfrac{1}{\cosh x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} i^n x^n$, но $\sec x = \dfrac{1}{\cos hx}$ вече я развихме в степенен ред и $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} i^{2k} x^{2k}$, тъй като нечетните събираеми ще са нули. Следователно $\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!} (i^2)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{E_{2k}}{(2k)!} x^{2k}$, но от формулата на Андрè

$$\sec x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{2k}}{(2k)!} x^{2k} \Rightarrow \frac{A_{2k}}{(2k)!} = \frac{E_{2k}}{(2k)!} (-1)^k \Rightarrow E_{2k} = A_{2k} (-1)^k.$$