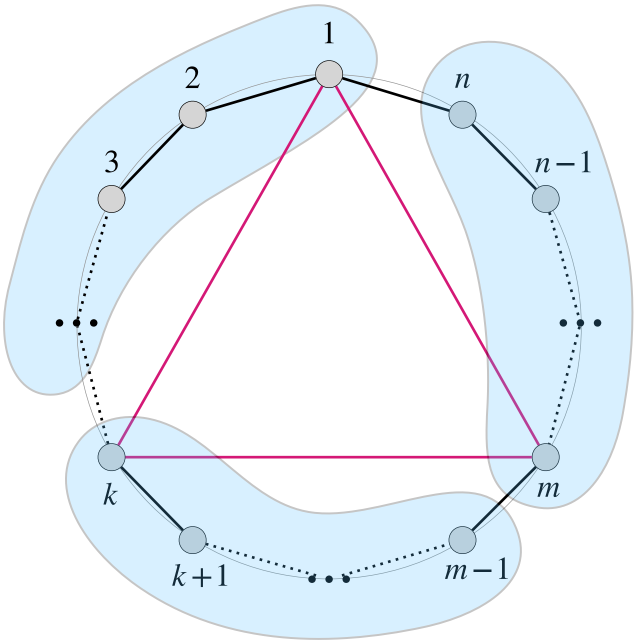
Задача. Да се докаже, че броят на различните триъгълници с върхове във върховете на правилен n-ъгълник е $\left\{\dfrac{n^2}{12}\right\}$, където $\{a\}$ означава най-близкото до a цяло число.

Доказателство:

Забележете, че всеки един триъгълник с върхове във върховете на правилен n-ъгълник ще разбива числото n на три части. Нека го покажем и на картинка:



С розов цвят сме начертали разбиващия многоъгълника триъгълник. Можем да вземем следното разбиване: всички точки от точката 1 до точката $k-1$; всички точки от точката k до точката $m-1$; всички точки от точката m до точката n.
По този начин във всяко едно от разбиванията ще имаме поне една точка — тази от върха на триъгълника (т.е. всяко събираемо ще е поне единица). Следователно сме разбили числото n на три части:

$$\underbrace{1+\ldots+1}_{\substack{\text{от } 1 \text{ до } k\\ \text{без } k}}+\underbrace{1+\ldots+1}_{\substack{\text{от } k \text{ до } l\\ \text{без } l}}+\underbrace{1+\ldots+1}_{\text{от } l \text{ до } n}=\underbrace{k-1}+\underbrace{l-k}+\underbrace{n-l+1}=n.$$

Получаваме биекция между различните триъгълници и целочислените разбивания на n на 3 събираеми $p_3(n)=p(n,3)$, $n\in\mathbb{N}$. Не е известна затворена формула за функцията $p(n,k)$, когато k е произволно естествено число, но има проста формула за $p(n,3)$. Ще докажем, че $p(n,3)=\left\{\dfrac{n^2}{12}\right\}$.

Нека $a_3(n)$ е броят на решенията на уравнението $x_1+x_2+x_3=n$, където $x_1\geq x_2\geq x_3\geq 0$. Ясно е, че $a_3(n)=p(n,3)$. Полагайки $y_1=x_1-x_2$, $y_2=x_2-x_3$ и $y_3=x_3$, получаваме, че $a_3(n)$ е броят на решенията на $n=y_1+2y_2+3y_3$, $y_i\geq 0$.

Следователно

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_3(n)x^n = (1 + x + \ldots + x^n + \ldots)(1 + x^2 + \ldots + x^{2n} + \ldots)$$
$$(1 + x^3 + \ldots + x^{3n} + \ldots)$$
$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^3} \,;$$

По метода на неопределените коефициенти получаваме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_3(n)x^n = \frac{1/6}{(1-x)^3} + \frac{1/4}{(1-x)^2} + \frac{17/72}{1-x} + \frac{1/8}{1+x} + \frac{1/9}{1-\omega x} + \frac{1/9}{1+\omega^2 x},$$ където

$\omega = e^{2\pi i/3}$ (тези, които са карали курса по комплексен анализ, може би ще се досетят откъде се появява това число)

Използвайки равенството $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j} x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ и приравнявайки

коефициентите пред x^n, получаваме:

$$a_3(n) = \frac{1}{6}\binom{n+2}{n} + \frac{1}{4}\binom{n+1}{n} + \frac{17}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9}(\omega^2 + \omega^{2n})$$
$$= \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{12} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9}(\omega^2 + \omega^{2n})\,.$$

Оттук

$$|\, a_3(n) - \frac{1}{12}(n+3)^2 \,| = \left| -\frac{7}{72} + \frac{(-1)^n}{8} + \frac{1}{9}(\omega^n + \omega^{2n}) \right|$$
$$\leq \frac{7}{72} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{32}{72} < \frac{1}{2},$$

което означава, че $p(n,3) = \left\{ \dfrac{n^2}{12} \right\}$.

$\square$

Използваното равенство в доказателството $\sum_{j=0}^{\infty}\binom{k+j}{j}x^j = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$ е

все пак интересно да се каже откъде идва. То се получава, като вземем k-тата производна на $\frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j$, което ще доведе до $\frac{k!}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{j=k}^{\infty}[j]_k x^{j-k} = \sum_{j=0}^{\infty}[j+k]_k x^j = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(k+j)!x^j}{j!}$.

<u>Коментари</u>: Твърдението от задачата може да докажем и по хамалски начин, като докажем следното:

$$p(n,3) = \begin{cases} \frac{n^2}{12} & n \equiv 0 \pmod 6, \\ \frac{n^2}{12} - \frac{1}{12} & n \equiv 1, 5 \pmod 6, \\ \frac{n^2}{12} - \frac{1}{3} & n \equiv 2, 4 \pmod 6, \\ \frac{n^2}{12} + \frac{1}{4} & n \equiv 3 \pmod 6. \end{cases}$$

Ще докажем формулата само за $n \equiv 0 \pmod 6$. В останалите случаи доказателството е аналогично. Нека $n = 6t$. Знаем, че

$$p(n,k) = p_k(n) = \sum_{s=1}^{k} p_s(n-k) \qquad (1)$$

(където използваме еквивалентното означение $p_s = p(s)$, за да избегнем двусмислия), което се доказва лесно като сумираме почленно рекурентните равенства

$p_{k-i}(n-i) = p_{k-i-1}(n-i-1) + p_{k-i}(n-k)$ за $i = 0, \ldots, k-1$ и извършим

съкращаване на равните членове вляво и вдясно.

Съгласно това уравнение (1) ще имаме

$$\begin{aligned} p_3(6t) &= p_3(6t-3) + p_2(6t-3) + p_1(6t-3), \\ p_3(6t-3) &= p_3(6t-6) + p_2(6t-6) + p_1(6t-6), \\ p_3(6t-6) &= p_3(6t-9) + p_2(6t-9) + p_1(6t-9), \\ &\ldots \\ p_3(6) &= p_3(3) + p_2(3) + p_1(3), \\ p_3(6) &= 1. \end{aligned}$$

Сумирайки тези равенства получаваме

$$\begin{cases} p_3(6t) = & \sum_{i=1}^{t} p_2(6t-6i+3) + \sum_{i=2}^{t} p_2(6t-6i+6) + 2t \\ & = \sum_{i=1}^{t}(3t-3i+1) + \sum_{i=2}^{t}(3t-3i+3) + 2t \\ & = \frac{(3t-1)t}{2} + \frac{3t(t-1)}{2} + 2t \\ & = 3t^2 = \frac{n^2}{12}\,. \end{cases}$$

□

Може да се спори кой е по-естествения подход към задачата. Според мен това е първия. В него може да се покаже, че $p_k(n)$ е полином от степен $k-1$, чийто старши член е $\dfrac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$, което реално е доста силен резултат, защото от него автоматично може да си изедем асимптотиката на $p(n,k) = p_k(n)$.

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!} \quad (n \to \infty).$$

В лекциите споменахме само за формулата на Харди, Рамануджан и Радемахер, която обаче е доста технически сложна и задава асимптотиката на $p(n)$. Сега допълнихме и с асимптотика на $p_k(n)$, която се оказва технически по-лесна, но в никакъв случай и проста формула.

Тази асимптотика обаче може да се докаже и по доста по-лесен начин.

Доказателство: (k е фиксирано естествено число)

Ако $n = x_1 + \ldots + x_k$, $x_1 \geq \ldots \geq x_k \geq 1$, то всяка пермутация на $(x_1, \ldots, x_k)$ дава отново решение на това уравнение, не непременно различно от изходното. Тъй като броя на пермутациите на k елемента е $k!$, получаваме неравенството

$$k!p_k(n) \geq \binom{n-1}{k-1}. \tag{2}$$

От друга страна, ако $n = x_1 + \ldots + x_k$, $x_1 \geq \ldots \geq x_k \geq 1$, да положим $y_i = x_i + (k-i)$, $i = 1, \ldots, n$. Сега целите числа y_i са различни (като решение) и

$$y_1 + \ldots + y_k = \sum_{i=1}^{n} x_i + k^2 + \sum_{i=1}^{k} i = n + k^2 + \frac{k(k+1)}{2} = n + \frac{k(k-1)}{2},$$

следователно:

$$k!p_k(n) \leq \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1} \qquad (3)$$

Твърдението за асимптотиката на $p_k(n)$ следва от (2) и (3) след граничен преход при $n \to \infty$, формулата на Стирлинг и теоремата за двата полицая.

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!} \leq p_k \leq \frac{\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}}{k!}$$

$$\frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!} = \frac{\binom{n}{k}\frac{k}{n}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.\frac{k}{n}.\frac{1}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!}.\frac{1}{k!(k-1)!} \sim$$

$$\sim \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\sqrt{2\pi(n-k)}\left(\frac{n-k}{e}\right)^n}.\frac{1}{n.k!(k-1)!} \underset{\substack{n \to \infty \\ k \text{ е фикс.}}}{\sim} \frac{\cancel{\sqrt{2\pi n}}}{\cancel{\sqrt{2\pi n}}}.\frac{n^n}{(n-k)^{n-k}}.\frac{\cancel{e^n}}{\cancel{e^n}}.\frac{1}{n.k!(k-1)!} \sim$$

$$\sim n^{n-n+k}.\frac{1}{n.k!(k-1)!} = \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

А аналогични разсъждения:

$$\frac{\binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}}{k!} = \frac{\binom{n + \frac{k(k-1)}{2}}{k}\frac{k}{n + \frac{k(k-1)}{2}}}{k!} \sim \frac{\binom{n}{k}}{n.(k-1)!} = \frac{n!}{k!(k-1)!n(n-k)!} \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}$$

$\square$

Асимптотиката на $p_k(n)$ може да се изведе и с геометрични съображения. Броят на решенията на уравнението $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$ в цели неотрицателни числа, образуващи нерастяща редица, е равен на броя на решенията на уравнението $y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \ldots + ky_k = n$ в цели неотрицателни числа. Връзката между двете уравнение следва от полагането $x_1 = y_k$, $x_2 = y_k + y_{k-1}$, $x_3 = y_k + y_{k-1} + y_{k-2}$ и т.н. Уравнението с y_i има толкова решения в цели неотрицателни числа, колкото решения има неравенството $2y_2 + 3y_3 + \ldots + ky_k \leq n$. Точният брой е труден за намиране, но приближение може да се открие лесно. В $(k-1)$-мерното пространство въвеждаме координатна система $Oy_2y_3y_4\ldots y_k$. Тогава $2y_2 + 3y_3 + \ldots + ky_k = n$ е уравнение на хиперравнина, а пък неравенството $2y_2 + 3y_3 + \ldots + ky_k \leq n$ описва пирамида: частта от първия октант, отсечена от споменатата равнина. тя има прав многостенен ъгъл с пръх O, затова обемът ѝ е равен на произведението от дължините на ръбовете през точка O, разделено на факториела на броя им, тоест $V = \frac{n}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n}{4}...\frac{n}{k}.\frac{1}{(k-1)!} = \frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$. От друга страна, броят на решенията на неравенството е равен на броя на целоислените точки в пирамидата, който е равен на целочислените кубчета в нея, което е приблизително колкото е обема ѝ V. Приближението се оказва доста точно, то прихваща не само порядъка, а и константния множител пред него. Например при $k = 3$ се получава $\sim \frac{n^2}{12}$.

Източници:

[1] Олимпийски теми 2006 - сборник (Американска фондация за България) Институт по Математика и Информатика на БАН, СМБ. От темата „Разбивания" на Иван Ланджев.
[2] Лекции на доктор Добромир Павлов Кралчев, ФМИ