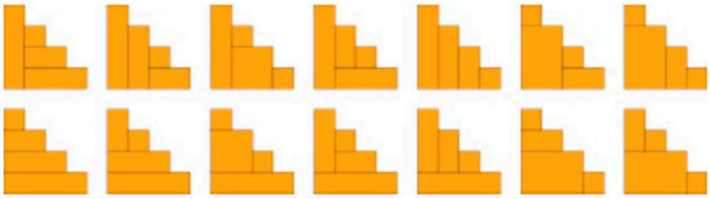
Избрани глави от комбинаториката и теорията на графите, летен семестър 2020/2021

(Контролна работа №1, 27 Март 2021 г.)

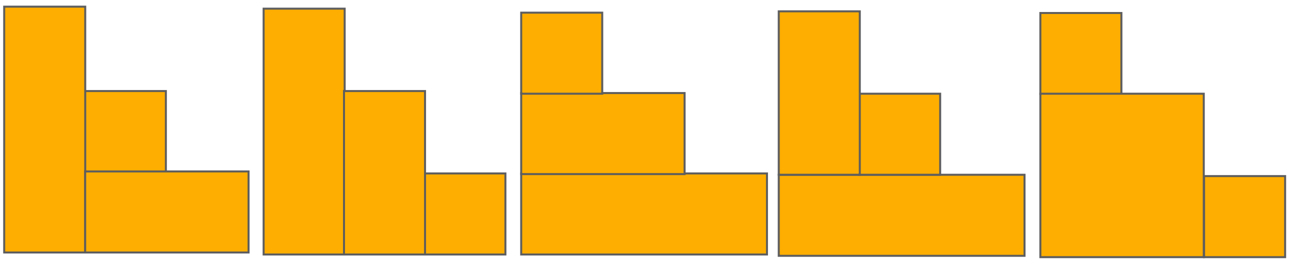
Задача 1. Пресметнете броя на различните стълби, съставени от n правоъгълника. Горният десен връх на всеки правоъгълник трябва да бъде стъпало на стълбата.



Решение:

На пръв поглед задачата ни казва, че има нещо общо с диаграмите на Юнг, но на втори поглед, за $n = 4 \rightarrow 14$ по-скоро ни подсказва, че има повече общо с числата на Каталан. За всеки случай на тоя етап няма да изключваме нито една от приликите.

Нека по дефиниция имаме, че от нула правоъгълничета може да създадем само празната стълба $\{\emptyset\}$, тоест само една: $C_0 = 1$. За $n = 1$ отново може да построим само една стълба, т.е. $C_1 = 1$. При две правоъгълничета може да построим две стълби: първо слагаме по дългото хоризонтално и над него в ляво по-късото и след това слагаме по-дългото вертикално и от дясно на него долу по-късото. Т.е. $C_2 = 2$. При C_3 става малко по-интересно, тъй като при този случай, вече ще имаме $1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 1 = 5$ начина:

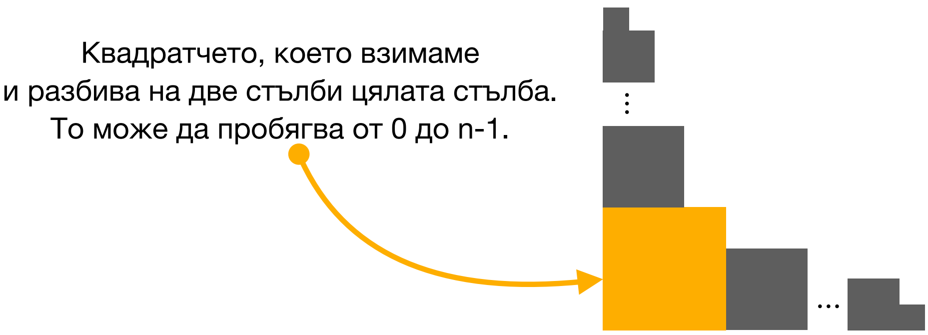


Забелязваме, че начините при добавяне на ново стъпало се получават от начините на предходното стъпало като залепяме отгоре или от ляво новото стъпало на всички възможности от n стъпала и освен това имаме още една наредба, която е обединила някои стъпала.

Да вземем стълба от n стъпала, която може да се образува по C_n различни начина чрез n правоъгълничета. Нека номерираме стъпалата с номерата от 1 до n. Реално няма значение реда, в който го правим, но нека например най-горното стъпало е с номер 1, а най-долното с номер n. Тогава ако премахнем произволно стъпало ще разбием стълбата на две стълби, чиито стъпала ще са със сбор от $n - 1$ стъпала. Ако разглеждаме едната стълба като изродена (тоест от предната част си е нормална стълба, но от задната тялото и е издължено), то тази изродена стълба лесно ще може да и отрежем изродената част и да я нормализираме. Тази изродена част (жълтеникавото правоъгълниче във фигурката по долу) реално е новото стъпало което добавяме. Сега тези две стълби по колко начина може да ги образуваме? Ами може да ги образуваме по C_k и C_{n-k-1} начина, тъй като сме извадили едно стъпало. Всяка една стълба от едните може да се комбинира с всяка една от другите като това води до произведението за общите начини.

Следователно, $C_n = \sum_{i=1}^{n-1} C_i \,.\, C_{n-i-i}$, за $n \geq 1$, като за $n = 0$ сме дефинирали допълнително празното стъпало че се конструира по един начин. Рекурентната зависимост съвпада, а освен това съвпадат и началните условия. Следователно отговора е n-тото число на Каталан.

<u>Пояснение</u>: изродената част която премахваме/добавяме всеки път е жълтото квадратче от фигурата по-долу. Забележете че то варира и се явява изродена част за долната стълба, ако го разглеждаме като част от долната стълба. След премахването му ще нормализзираме долната стълба.



$\square$

Задача 2. Намерете най-високата степен на 7, която дели $100!$.

Решение:

Ще използваме теоремата на Льожандер, тъй като $p = 7$ е просто число, то търсената най-висока степен на p, което дели $100!$ е $\nu_7(100!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{7^k} \right\rfloor = S$.

Сумата S е записана като безкрайна сума, но тъй като числата $100!$ и 7 очевидно са фиксирани, то от един момент нататък всички събираеми на тази сума ще са само нули и следователно ще има само краен брой ненулеви събираеми. Ами да видим кои са те:

$$\nu_7(100!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{7^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{7^2} \right\rfloor + \underbrace{\left\lfloor \frac{100}{7^3} \right\rfloor}_{=0} + 0 + \ldots = 14 + 2 = 16. \quad \square$$

Задача 3. Какъв остатък дава биномният коефициент $\binom{47}{23}$ при деление на 7.

Решение:

Прехвърляме се на теоремата на Люка, която ще ни помогне да решим тази задача. От нея знаем, че:

$\binom{m}{n} \equiv \prod_{i=0}^{k-1} \binom{m_i}{n_i} \mod p$, където p е просто число, $m = \overline{(m_{k-1}m_{k-2}\dots m_0)}_p$ и $n = \overline{(n_{k-1}n_{k-2}\dots n_0)}_p$ са представянията на числата m и n в p-ична бройна система.

Ами нека ги видим кои са тези представяния:

$$
\begin{array}{ll}
47\,|\,7 = 6 \Rightarrow 47 = \overline{65}_7 & 23\,|\,7 = 3 \Rightarrow 23 = \overline{32}_7 \\
\underline{42} & \underline{21} \\
\ 5 & \ 2
\end{array}
$$

Следователно от директно прилагане на теоремата на Люка получаваме, че

$$\binom{47}{23} \equiv \binom{6}{3} \times \binom{5}{2} = \frac{6!}{3!3!} \times \frac{5!}{2!3!} = 4 \times 5 \times 2 \times 5 = 20 \times 10 \equiv 18 \equiv 4 \pmod 7$$

$\square$

Предал: Андрей Кирилов Стоев, 3-ти курс, спец. СИ, ф.н. 62369
Проверил: д-р Добромир Кралчев