Броене на съществено различими конфигурации. Лема на Бърнсайд.

(2021-04-01)

Броя на класовете на еквивалентност ни интересува когато казваме, че броим с точност до някаква релация. Релация на еквивалентност $\Leftrightarrow$ група (най-често от пермутации).

<u>Дефиниране на релация чрез група</u>: Две комбинаторни конфигурации са в релация $R \Leftrightarrow$ едната може да се получи от другата като се извършат пермутации от дадената група.

- Рефлексивност $\Leftrightarrow$ наличието на неутрален (единичен) елемент – идентитет, покой;
- Симетричност $\Leftrightarrow$ съществуване на обратен елемент;
- Транзитивност $\Leftrightarrow$ затвореност спрямо операцията композиция;

Най-често ще имаме дадена група от пермутации, която действа върху някакво множество от елементи и ще търсим породената от нея релация на еквивалентност с колко класа на еквивалентност е. Т.е. колко са съществено различимите конфигурации (релацията на еквивалентност определя кои конфигурации са сходни).

Лема на Бърнсайд. Броят на класовете на еквивалентност е средния брой неподвижни конфигурации за пермутация от групата.

$$\text{Брой класове на еквивалентсност} = \frac{1}{|G|} \times \sum_{\substack{\pi \in G \\ \text{пермутация}}} \text{брой неподвижни конфигурации за } \pi.$$

<u>Доказателство</u>:

$$\underbrace{\text{Д.С.}}_{\text{дясна страна}} = \frac{1}{|G|} \times \sum_{\pi \in G} \text{брой неподвижни конфигурации за } \pi =$$

$$= \frac{1}{|G|} \times \sum_{\pi \in G} \sum_{c \in Conf} \mathbb{I}_c, \text{ където}$$

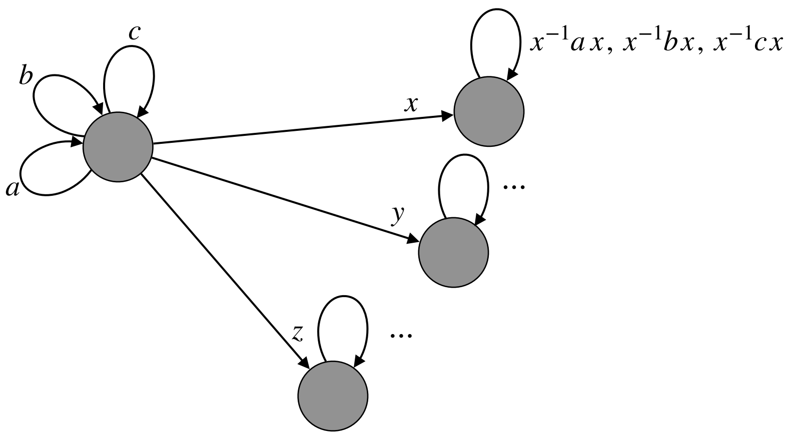
$$\mathbb{I}_c = \begin{cases} 1, & \text{ако } c \text{ е неподвижна конфигурация} \\ 0, & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е индикаторна функция.

Разменяме реда на сумиране:

$$
\begin{aligned}
\text{Д.С.} &= \frac{1}{|G|} \sum_{c \in Conf} \sum_{\pi \in G} \mathbb{1}_c = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{c \in Conf} \underbrace{\text{броя пермутации запазващи конфигурацията } c}_{} = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{[k]_R} \sum_{c \in Conf} \mathbb{1} = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{[k]_R} \sum_{c \in Conf} = \\
&= \frac{1}{|G|} \sum_{[k]_R} \underbrace{3 + 3 + 3 + 3}_{\text{пример}} = \\
&= \frac{1}{\cancel{|G|}} \times \cancel{|G|} \times \underbrace{\text{броя на кл. на екв.}}_{}
\end{aligned}
$$

Пример:



Всяка една от 4-те конфигурации ще се запазва точно 3 пермутаци.