Задача за двуделен граф от 63-та НОМ

доклад по ИГКТГ, 20 май 2021 г.
Георги Димитров, ф.н. 62256, СУ, ФМИ

Ежегодно в България се провежда Национална олимпиада по математика, в която могат да участват всички средношколници. На 30 март 2014 година, на областния кръг на 63-та Национална олимпиада по математика, е била дадена под номер 4 следната задача, обща за 10-ти и 11-ти клас.

Задача. Някои от градовете на една държава са свързани с пътища, като от всеки град излизат точно три пътя и във всеки два града, свързани с път, живеят различен брой жители. Върху всеки път е записано най-малкото общо кратно на броя на жителите на двата града, които са свързани с този път. Известно е, че сборът на числата върху всички пътища е два пъти по-голям от броя на жителите в държавата. Да се докаже, че градовете в държавата могат да се разделят на две групи така, че няма път, който да свързва два града от една и съща група.

Решение. Ако X е сборът на числата върху всички пътища, а Y е броят на жителите на всички градове, то от условието имаме $X = 2Y$. Нека x е най-малкото общо кратно на различните числа a и b, като $a > b$. Тогава $x \geq a$ и $x \geq 2b$, откъдето $3x \geq 2(a + b)$. Събираме съответните неравенства за всеки от пътищата в държавата и като използваме, че от всеки град излизат точно три пътя, получаваме, че $3X \geq 6Y$, т.е. $X \geq 2Y$. Това означава, че за всеки път е изпълнено равенството $3x = 2(a + b)$, тоест $x = a$ и $x = 2b$, откъдето следва, че $a = 2b$.

Доказахме, че ако два града са свързани с път, то жителите на единия са два пъти повече от жителите на другия. Това означава, че ако от град с a жители можем да стигнем до град с $b < a$ жители, минавайки по t пътя, то $a = 2^k b$, където t и k имат една и съща четност, защото $t = r + s$, $k = r - s$, където r е броят на умноженията по 2, а пък s е броят на деленията на 2 при движението от първия към втория град (числата t и k имат една и съща четност, защото $t = k + 2s$). Следователно в държавата няма затворен маршрут с нечетен брой пътища. Тогава градовете могат да се разделят в две групи без пътища във всяка от тях (това следва от добре известния факт, че граф без нечетни цикли е двуделен).