Пътища в целочислена решетка

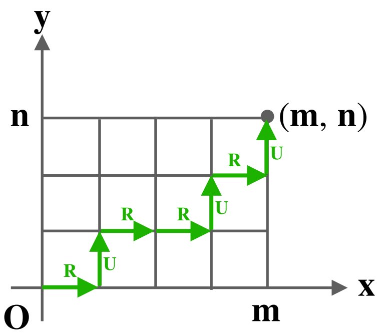
Лектор: д-р Д. Кралчев (2021-04-22)

(Брой траектории. Принцип на отражението. Приложения в теорията на вероятностите и при финансовите пазари.)

<u>Дефиниция</u>: Целочислена решетка наричаме всички точки с целочислени, неотрицателни координати от декартова координатна система.

Пътищата в такива решетки се задават с набор от правила, които трябва да се спазват при траверсиране от една до друга точка от решетката. Тези правила ще наричаме още „позволени стъпки“ или просто „стъпки“. В задачите, които ще разгледаме по-долу, ще се интересуваме от броя на различните пътища, по които може да достигнем от точка (a_S, b_S) до точка (a_F, b_F) в решетката.

<u>Твърдение 1</u>. Стъпки (♖ топ ♜): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1, y) & \rightarrow \\ (x, y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$.

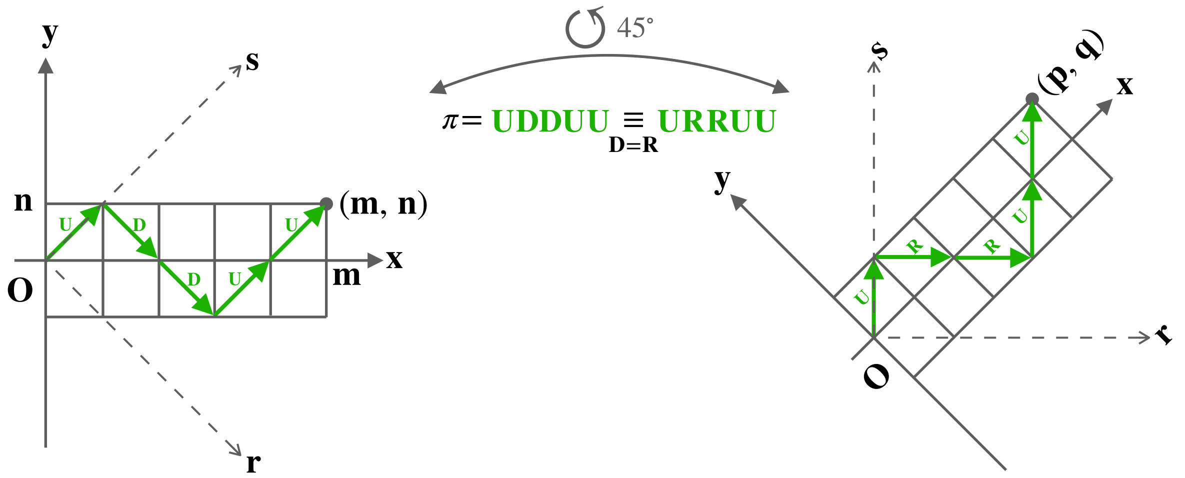


$\pi =$ **RURRURU**

Нека кодираме всяка стъпка надясно с буквата $\mathbf{R}$ и всяка стъпка нагоре с буквата $\mathbf{U}$. Един път е успешен, тогава и само тогава, когато образува низ π съставен само от буквите $\mathbf{R}$ и $\mathbf{U}$, като $|\pi|_{\mathbf{R}} = \mathbf{m}$ и $|\pi|_{\mathbf{U}} = \mathbf{n}$, където с $|\omega|_\sigma$ бележим броя на буквите σ в думата ω, а дума наричаме всяка поредица от букви. Например, $\pi = \underbrace{\mathbf{R}\ldots\mathbf{R}}_{m}\underbrace{\mathbf{U}\ldots\mathbf{U}}_{n}$ е един успешен път. Съпоставянето по-горе е еднозначно и конструираната биекция свежда задачата до намирането на броя различни думи ω, притежаващи посоченото по-горе свойство. Тъй като всяка такава дума ще е съставена от $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ букви и намирането на позициите на буквите от единия вид определя еднозначно позициите на останалите букви, то е достатъчно да намерим по колко начина може да изберем $\mathbf{m}$ от общо $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ позиции, на които да разположим буквата $\mathbf{R}$. Следователно търсеният отговор е $\binom{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{\mathbf{m}} = \binom{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{\mathbf{n}}$.

□

Твърдение 2. Стъпки (♗ офицер ♝): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1,\ y+1) & \nearrow \\ (x+1,\ y-1) & \searrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0,\ 0)$ до $(\mathbf{m},\ \mathbf{n})$.



Отново кодираме всяка стъпка надолу с буквата $\mathbf{D}$ и всяка стъпка нагоре с буквата $\mathbf{U}$. Нека дефинираме четността на дадена позиция като четността на сбора от координатите по абсцисата и ординатата на съответната позиция и нека отбелязваме тази четност с $\mathbf{k}$. Ако $(a_S,\ b_S)$ е стартовата позиция с четност $\mathbf{k}$, то четността при последваща стъпка ще е или $a_S + 1 + b_S + 1 = a_S + b_S + 2$ или $a_S + 1 + b_S - 1 = a_S + b_S$. Т.е. каквато и да е следващата стъпка, четността на стартовата позиция ще се запазва винаги. Следователно ако стартовата позиция и финалната дестинация са от различни четности, тогава броя на търсените пътища очевидно ще е равен на 0. В конкретния случай, тъй като стартовата позиция е четна, то ще искаме $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ да са от една четност, за да има какво да броим. Ако стартовата позиция е друга, то винаги ще може да нормализираме по такъв начин, че стартовата позиция отново да е $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$. В такъв случай, необходимото условие ще е еквивалентно на това $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ да са от една четност.

Въвеждаме нова координатна система $\mathbf{O}\,\overrightarrow{\mathbf{rs}}$, която се получава от старата $\mathbf{O}\,\overrightarrow{\mathbf{xy}}$, чрез ротация обратно на часовниковата стрелка на 45° градуса (ъглополовящите на I-ви и IV-ти квадрант образуват новата координатна система). Спрямо $\mathbf{O}\,\overrightarrow{\mathbf{rs}}$ се движим със същите стъпки като тези от **Твърдение 1**. Разликата е само в координатите на новата финална дестинация. Връзката между $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ и $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ е следната: тъй като при всяка една от стъпките на оригиналната координатна система се движим с една позиция надясно, то $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{m}$, а от друга страна $\mathbf{n}$ е височината на пътя в оригиналната координатна система, която е равна на броя пъти, в които сме поели нагоре минус броя пъти, в които сме поели надясно, в стъпки от $\mathbf{O}\,\overrightarrow{\mathbf{xy}}$, т.е. $\mathbf{n} = \mathbf{q} - \mathbf{p}$.

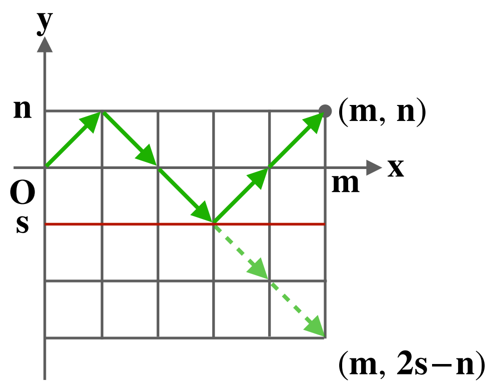
$\begin{cases} \mathbf{m} = \mathbf{p} + \mathbf{q} \\ \mathbf{n} = \mathbf{q} - \mathbf{p} \end{cases}$. Сведохме задачата до броя на успещните пътища от $(0,\ 0)$ до $(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$, където стъпките са същите като тези от **Твърдение 1**. Следователно търсения брой е равен на

$$\binom{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{\mathbf{p}} = \binom{\mathbf{m}}{\frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{2}} \text{ или } \binom{\mathbf{p}+\mathbf{q}}{\mathbf{q}} = \binom{\mathbf{m}}{\frac{\mathbf{m}+\mathbf{n}}{2}}.$$

$\square$

Забележка, ако искаме да преброим броя на различните пътища от точка $(0,\ 1)$ до точка $(4,\ 4)$, първо ще трябва да нормализираме пътя до път, който започва от $(0{,}0)$. Т.е. $\pi\ :\ (0,\ 1) \to (4{,}3) \overset{\text{norm}}{\longmapsto} \pi'\ :\ (0{,}0) \to (4{,}2) \Rightarrow \binom{4}{\frac{4+2}{2}} = \binom{4}{3} = 4.$

<u>Твърдение 3</u>. Стъпки (♗ офицер ♝): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1,\ y+1) & \nearrow \\ (x+1,\ y-1) & \searrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0,\ 0)$ до $(\mathbf{m},\ \mathbf{n})$, които не докосват правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$, т.е. за всяко координата $\mathbf{y}$ на точка от пътя, $\mathbf{y} < \mathbf{s}$, където $\mathbf{s}$ не е между ординатата на началата и крайната позиции.



Ако пътя π от точката $(0,\ 0)$ до $(\mathbf{m},\ \mathbf{n})$ има поне една допирна точка с правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$, то нека разгледаме отражение на остатъка от пътя π от първата (най-лявата) от тях, спрямо правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$. След отражението ще получим път, които отива във финална позиция с координати (всяко движение надолу се заменя с движение нагоре, т.е. $\mathbf{m}$ се запазва, а новото $\mathbf{n}$ ще бъде t, където $\mathbf{s} = (t + n)/2$, тъй като $\mathbf{s}$ ще песича отсечката с краища старата и новата финални дестинации по средата) $(\mathbf{m},\ 2\mathbf{s}-\mathbf{n})$.

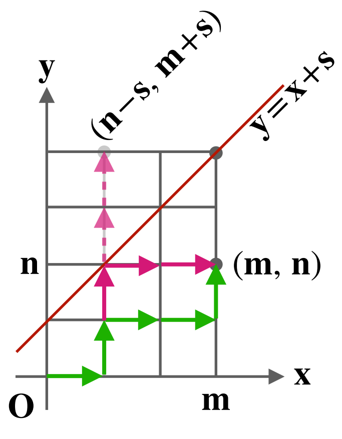
Ще намерим броят на търсените пътища, като от всички пътища извадим неблагоприятните пътища, като под неблагоприятни пътища ще разбираме тези, които имат обща точка с правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$. Броя на всички пътища може лесно да намерим, като игнорираме дипълнителното условие за липсата на обща точка на пътя с правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$ и приложим формулата от **Твърдение 2.** За да преброим броя на неблагорпиятните пътища, трябва да направим следното наблюдение: точките $(0,\ 0)$ и $(\mathbf{m},\ 2\mathbf{s}-\mathbf{n})$ са от различни страни на правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$. Следователно, условието пътя да има обща точка с правата, вече не ни е необходимо и може б.о.о. да го игнорираме (защото не само някои, а всички пътища от т. $(0, 0)$ до т. $(\mathbf{m}, \mathbf{2s-n})$ ще имат пресечна точка с правата $\mathbf{n} = \mathbf{s}$). По този начин, може отново да приложим формулата от **Твърдение 2** и за неблагоприятните пътища. Окончателно, броя на търсените пътища е равен на $\mathbf{all} - \mathbf{bad} = \binom{m}{\frac{m-n}{2}} - \binom{m}{\frac{m+n}{2} - s}$ (в случай, че условието $\mathbf{m} + \mathbf{n}$ да е от същата четност като четността на стартовата позиция, в противен случай броя е равен на 0).

Еквивалентни представяния:

$$\binom{m}{\frac{m-n}{2}} - \binom{m}{\frac{m-n}{2} + s} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} - \binom{m}{\frac{m+n}{2} - s} = \binom{m}{\frac{m+n}{2}} - \binom{m}{\frac{m-n}{2} + s}.$$

$\square$

<u>**Твърдение 4**</u>. Стъпки (♖ топ ♜): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1,\, y) & \rightarrow \\ (x,\, y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0, 0)$ до $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, такива че $\mathbf{y} < \mathbf{x} + \mathbf{s}$ за всяка точка $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ от пътя. Допълнителни условия: $\mathbf{s} > \mathbf{0}$; $\mathbf{0} \le \mathbf{m}, \mathbf{n}$; $\mathbf{n} < \mathbf{m} + \mathbf{s}$. По-общ запис на допълнителните условия: $\mathbf{0} \le \mathbf{n}$; $\mathbf{0} < \mathbf{s}(\mathbf{m} + \mathbf{s} - \mathbf{n})$; $\mathbf{0} \le \mathbf{m}$.



Всички пътища, с позволените стъпки, от точка $(0, 0)$ до точка $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$, без ограничението $\mathbf{y} < \mathbf{x} + \mathbf{s}$ наложено от правата, са точно $\binom{\mathbf{m} + \mathbf{n}}{\mathbf{m}}$ от **Твърдение 1**. От тях трябва да извадим лошите пътища, т.е. тези които имат пресечна точка с правата $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$. Ще отразим остатъка на всеки лощ път след първата му (най-лявата) пресечна точка с правата $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{s}$, спрямо същата права. Всеки лош път ще започва от точка $(0, 0)$ и ще финишира в точка $(\mathbf{n} - \mathbf{s}, \mathbf{m} + \mathbf{s})$. Тази финална точка задължително ще е от другата страна на правата (точките $(\mathbf{n} - \mathbf{s}, \mathbf{m} + \mathbf{s})$ и $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ са от различни страни на правата $\mathbf{y=x+s}$, тъй като от горната страна ще имаме условието $\mathbf{y>x+s} \Leftrightarrow \mathbf{m+s} > \mathbf{n-s+s=n}$, което е вярно от условието на задачата, тъй като искахме $(\mathbf{m}, \mathbf{n})$ да е под правата $\mathbf{y=x+s}$). Последното заключение ни позволява да игнорираме допълнителното условие а пресечни точки с правата $\mathbf{y=x+s}$ за всички лощи пътища. Следователно, техния брой ще е точно $\mathbf{bad} = \binom{\mathbf{m+s+n-s}}{\mathbf{n-s}} = \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{n-s}} = \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m+s}}$. Окончателно, броя на търсените пътища е

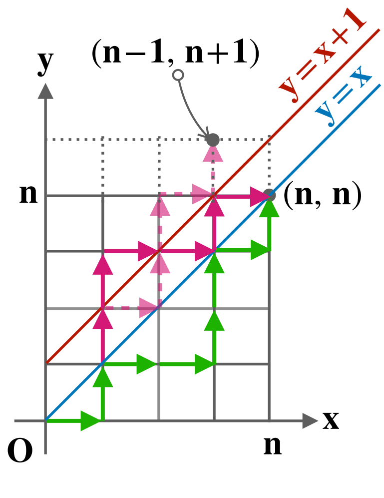
$$\mathbf{all} - \mathbf{bad} = \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m}} - \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{n-s}}.$$

Еквивалентни представяния:

$$\binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m}} - \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m+s}} = \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{n}} - \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{n-s}} = \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{n}} - \binom{\mathbf{m+n}}{\mathbf{m+s}}.$$

$\square$

<u>**Твърдение 5**</u>. Стъпки (♖ топ ♜): $(x, y) \mapsto \begin{cases} (x+1,\ y) & \rightarrow \\ (x,\ y+1) & \uparrow \end{cases}$. Намерете броя на пътищата от $(0,\ 0)$ до $(\mathbf{n},\ \mathbf{n})$, които не пресичат диагонала $(0,\ 0)$, $(\mathbf{n},\ \mathbf{n})$ на квадрата $(0,\ 0)$, $(\mathbf{n},\ 0)$, $(\mathbf{n},\ \mathbf{n})$, $(0,\ \mathbf{n})$.



Отново от метода на отраженията, може да отразим остатъка на всеки един лош път, който има поне една пресечна точка с правата $\mathbf{y=x+1}$, спрямо същата тази права от първата такава (най-лявата) пресечна точка. Всеки един такъв път ще стартира от точка $(0,\ 0)$ и ще финишира в точка $(\mathbf{n-1},\ \mathbf{n+1})$. Отговора очевидно е

$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, което n-тото число на Каталан.

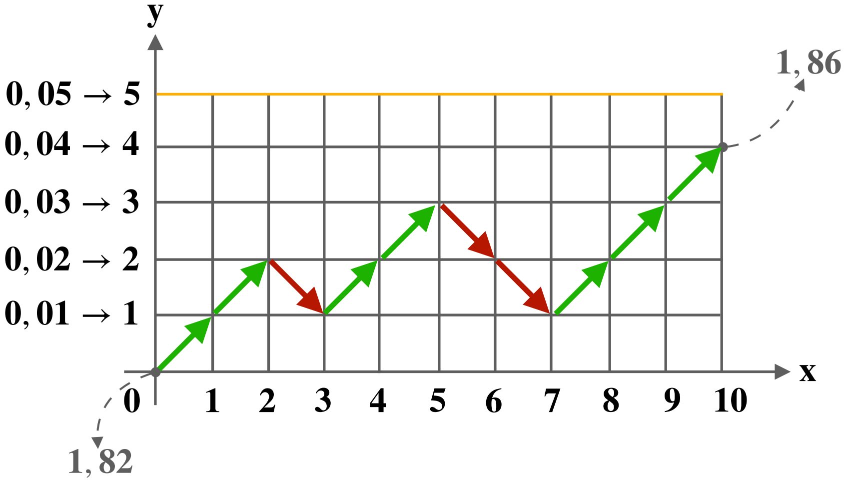
Задачата може да се разглежда и като частен случай на **Твърдение 4.**, за $m=n$ и $s=1$. Това е така, защото ако допуснем, че път пресича диагонала от условието, то той ще има обща точка с правата $y=x+1$, т.е. $s=1$. Заместайки във формулата от **Твърдение 4.** ще получим отново

$$\mathrm{all} - \mathrm{bad} = \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{n-s} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

$\square$

<u>Задача 1</u>. Разглеждаме следния валутен курс: $BGN \to USD$. Цената на долара спрямо лева, всеки ден се мени с 1 стотинка на долар, като поевтиняването и поскъпването са равно вероятни. Известно е, че преди 10 дни търговец е закупил определено количество долари на цена от 1,82 лв./долар и цената на долара е 1,86 лв./долар. Знае се, че търговеца чака цената да достигне 1,87лв./долар, за да продаде всички долари (т.е. целта му е да спечели по 5 ст. от всеки закупен долар). Каква е вероятността търговеца да е продал всички долари и да е постигнал жеаната печалба?

<u>Решение</u>:



Моделираме задачата чрез декартова координатна система, в която разглеждаме целочислените решетки с неотрицателни координати. По абсцисата са отбелязани дните, а по ординатата стотинките, с които се мени долара. Началото на координатната система $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$ е началото на ден $\mathbf{1}^{\text{-ви}}$ и цена $\mathbf{1,82}$ лв. за един долар. Търсената вероятност е равна на броя на благоприятните пътища в тази решетка разделен на броя на всички пътища от точка $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$ до точка $(\mathbf{10},\mathbf{4})$, където благоприятни пътища са тези, които нямат пресечна точка с правата $\mathbf{x}=\mathbf{5}$. Тъй като времето расте винаги, а долара винаги или поскъпва или

поевтинява, то стъпките ще са от вида $(x,y) \mapsto \begin{cases} (x+1,\ y+1) & \nearrow \\ (x+1,\ y-1) & \searrow \end{cases}$.

Броя на всички пътища от т. $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$ до т. $(\mathbf{10},\mathbf{4})$ е равен на $\begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \frac{\mathbf{10+4}}{\mathbf{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{7} \end{pmatrix}$.

Броя на благоприятните пътища от т. $(\mathbf{0},\ \mathbf{0})$ до т. $(\mathbf{10},\mathbf{4})$ е равен на $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \frac{\mathbf{m+n}}{\mathbf{2}}-\mathbf{s} \end{pmatrix}$, за $\mathbf{m}=\mathbf{10}$, $\mathbf{n}=\mathbf{4}$ и $\mathbf{s}=\mathbf{5}$. Т.е. $\begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \frac{\mathbf{m+n}}{\mathbf{2}}-\mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{7-5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

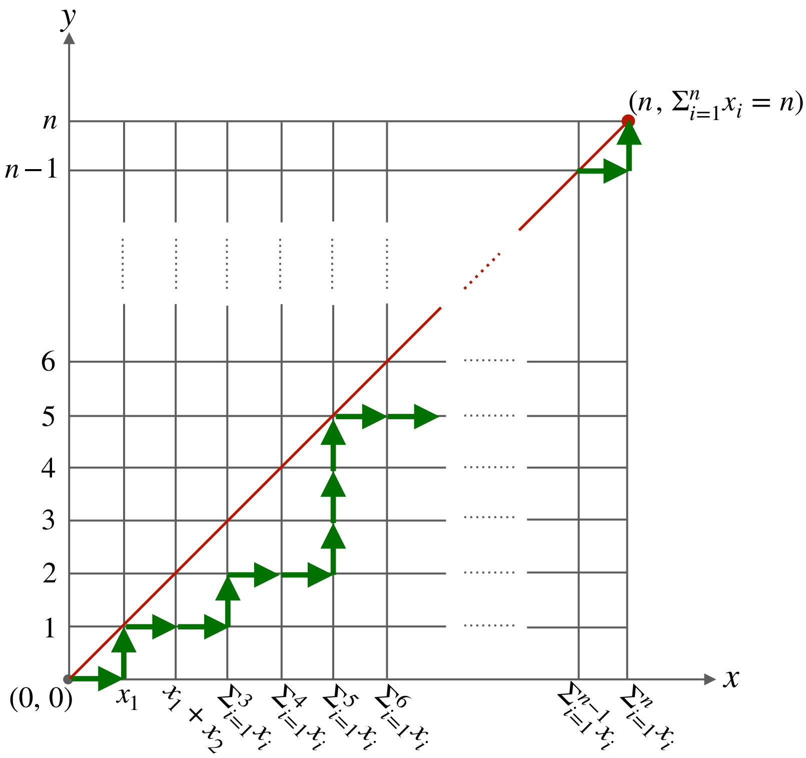
Окончателно $\mathbb{P}(profit = 0.05 \text{ ст./\$}) = \dfrac{good}{all} = \dfrac{\binom{10}{2}}{\binom{10}{7}} = \dfrac{\frac{10!}{2!8!}}{\frac{10!}{7!3!}} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375.$

$\square$

<u>Задача 2</u>. Да се намери броят на целочислените решения $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на системата

$$\left| \begin{array}{l} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0; \\ x_1 \leq 1, x_1 + x_2 \leq 2, \ldots, x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} \leq n-1; \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n = n\,. \end{array} \right.$$

<u>Решение</u>:



Всяко едно решение на системата от уравнения ще отговаря на единствен успешен път от целочислената решетка показана на фигурата по-горе и обратно, всеки един успешен път в целочислената решетка ще отговаря на единствено решение на системата от уравнения. Следователно има биекция между успешните пътища в целочислената решетка от фигурата и решенията на системата от уравнения.

Пояснения: В целочислената решетка по-горе може да се движим със стъпки само надясно и нагоре, тъй като по абсцисата имаме сумите $\Sigma_{i=1}^{k} x_i$, за $k = 1, \ldots, n$, а по ординатата има ме съответно максимумите, които могат да достигат тези суми. Тъй като последната сума $\Sigma_{i=1}^{n} x_i = n$ по условие, то един успешен път в целочислената решетка ще стартира от $(0, 0)$ и ще финишира в (n, n), като всеки един край на негова стъпка ще е с координати $(x, y) : x \leq y$, т.е.

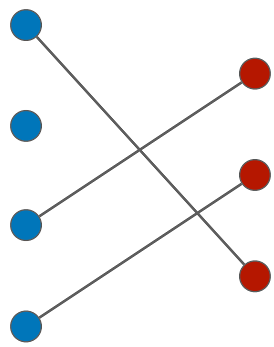
ще се намира под диагонала $y = x + 1$ (няма да преминава над ъглополовящата на първи квадрант). От Твърдение 5. знаем че броя на тези пътища е n-тото число на Каталан, т.е. $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Точно толкова са и решенията на системата уравнения.

$\square$

Теорема на Хол за сватбите. Съчетание (сдвояване) в граф.

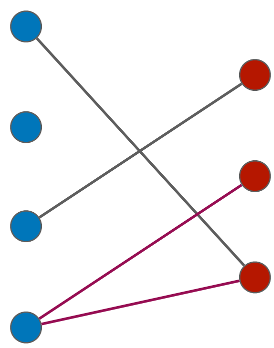
Сдвояване или съчетание в граф се нарича множество от ребра без общи краища. Графът може да е напълно произволен, т.е. не е задължително да е двуделен граф, макар че много често задачата се поставя за двуделни графи (в каквито ще я разглеждаме и ние).

Нека имаме двуделен граф G.



G

G е съчетание от ребра, тъй като ребрата в G нямат общи краища.

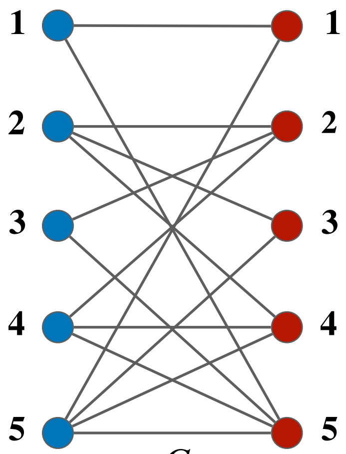


G

След добавянето на ново ребро, G вече не е съчетание, тъй като от последния син връх излизт две ребра, т.е. имат общо начало.

Случаите за съчетания в двуделни графи са най-интересни за практиката и за тях е в сила теоремата на Хол за сватбите. Тя казва кога съществува съчетание, което е достатъчно голямо. Когато двата дяла от графа са с еднакъв брой върхове, тогава се въвежда понятието „съвършено“ съчетание. Съвършено е такова съчетание, при което всеки връх от единя дял е свързан с връх от другия дяло. С други думи, в двуделен граф с $n + n$ върха, съвършено съчетание е такова, което е от n ребра (максималния възможен брой). Искаме да разберем дали може да намерим някаква проста характеристика на графа, която да послужи за необходимо и достатъзно условие за съществуването на съвършено съчетание.

Графът може да го представим и като матрица на съседства. Например за двуделен граф $5+5$ имаме следните еквивалентни представяния:



G

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	1	1	0
3	0	1	0	0	1
4	0	1	0	1	1
5	1	0	1	1	1

G

Може да разглеждаме сините върхове, които съответстват на редовете на матрицата като кандидати за работа, а червените върхове, които съответстват на стълбовете на матрицата като работни места. Задачата сега ще звучи и по следния начин:

Дадена е квадратна матрица $A_{n \times n}$ (симетрина, ако репрезентира ненасочен граф, както е в нашия случай). Търсим n единици, по една от всеки ред и всеки стълб.

	1	2	3	4	5
1	**1**	0	0	0	1
2	0	**1**	1	1	0
3	0	1	0	0	**1**
4	0	1	0	**1**	1
5	1	0	**1**	1	1

G

Такива единици ще има $\Leftrightarrow$ обединението на всеки k $(k = 1, \ldots, n)$ стълба има мощност поне k (като всеки стълб се разглежда като множество от индекси на редове). Например, $|\{$стълб 2$\} \cup \{$стълб 3$\}| = |\{2, 3, 4, 5\}| = 4$.

__Доказателство__: ($\Rightarrow$) Ако матрицата съдържа поне една единица за всеки ред и всеки стълб, то тогава обединението на всеки k стълба ще има мощност поне k елемента, тъй като всеки от k-те стълба ще има поне една единица, която ще е от различен ред от останалите $k-1$ стълба.

($\Leftarrow$) Обратното твърдение е по-трудно за доказване. Нека е изпълнено изискването, че обединението на всеки k стълба има мощност поне k. Искаме да докажем, че съществуват n единици, по една от всеки ред и всеки стълб. Ще го докажем чрез пълна математическа индукция спрямо n.

База: За $n = 1$ имаме матрица 1×1 и само един ред и една колона. Единствената колона за $k = 1$ има мощност поне 1 и тази единица е напълно достатъчна.

Индукционна хипотеза: Нека твърдението е изпълнено за матрици $1 \times 1, 2 \times 2, \ldots, n-1 \times n-1$. Ще докажем, че твърдението е в сила и за матрици $n \times n$.

Разглеждаме два случая:
I-ви случай: Нека обединението на всеки k стълба има мощност поне $k+1$. Избираме една единица от матрицата и задраскваме реда и стълба, в които е единицата. По този начин във всеки друг ред и стълб ще сме премахнали най-много една единица (може и нищо да не сме премахнали). Щом сме премахнали най-много един елемент, то този елемент ще е премахнат и от обединението $\Rightarrow$ обединението на всеки k стълба има мощност поне k, а матрицата вече е $n-1 \times n-1 \Rightarrow$ остава само да приложим индуктивното предположение.

II-ри случай: Нека обединението на всеки k стълба има мощност поне k, но обединението **не** на всеки k стълба има мощност поне $k+1$. Т.е. ще се намери някаква k-орка от стълбове, за която обединението им ще има мощност **точно** равна на k. Да предположим (за удобство), че сме ги разместили така, че тези стълбове са един до друг и обединението им (тези k реда) са също един до друг.

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	0	1	0	0	1
2	1	0	1	1	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	0	1
5	0	0	0	1	1

G

Отделяме матрицата в горния ляв ъгъл. В нея, които и l стълба (k вече е фиксирано, в конкретния пример на фигурата, $k = 2$ и от тези k стълба, взимаме произволни l) да вземем, обединението им ще има мощност поне l. Сега да разгледаме другата матрица в долния десен ъгъл. Тя е $n-k \times n-k$ и каквито и l стълба да вземем от нея и ги обединим с първите k стълба ще получим обединение с мощност $l+k$ (разгледани като стълбове на голямата матрица $n \times n$). Така доказана, теоремата на Хол е в сила и за несиметрична матрица, т.е. и за насочен граф.

Нека сега се върнем на двуделен ненасочен граф и да видим как ще звучи теоремата на Хол за него. Тъй като матрицата е квадратна, то графа ще има равен брой върхове в двата дяла ($n + n$). Съществува съвършено съчетание в графа ⇔ всеки k върха ($k = 1, \ldots, n$) от първия дял са свързани с поне k върха от втория дял (номерацията е само за удобство).

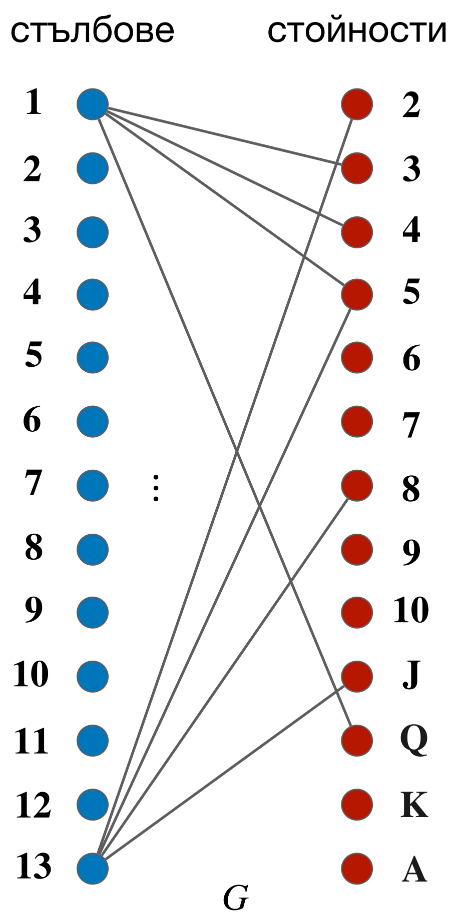
Следствие: **Всеки R-регулярен двуделен граф $n+n$ с $R > 0$ съдържа съвършено съчетание.**

Доказателсво: Ако представим графа чрез матрица на съседства ще получим регулярна матрица, в която всеки стълб и всеки ред има точно R единици. Които и k стълба да вземем, обединението им ще съдържа общо поне k единици. Това е очевидно вярно докато $k < R$, но ако регулярността например е $R = 10$ и обединяваме 15 стълба, сигурни ли сме, че ще имаме мощност поне 15? Да **допуснем** че обединяваме k ($k > R$) стълба и сме получили мощност $k - 1$ или по-малка (обединението съдържа не повече от $k - 1$ реда). Къде е противоречието? Общият брой единици в подматрицата, съставена от тези k стълба е не повече от $(k-1) \times R$, защото всеки от тези не повече от $k-1$ реда съдържа точно R единици като цяло, затова не повече от R в частта, където пресича избраните k стълба. От друга страна, понеже всеки стълб съдържа точно R единици, то избраните k стълба съдържат общо kR единици и те, естествено, се намират в редовете от обединението им (тривиално). Излиза, че $kR \leq (k-1)R$, откъдето следва, че $R \leq 0$, а това противоречи на неравенството $R > 0$, което е изпълнено по условие.

Задача 3. Тесте от 52 карти е наредено в правоъгълник с 4 реда и 13 стълба. Докажете, че можем да изберем 13 карти, които да са от различни стълбове и с различни стойности (асо, двойка, тройка, ... десятка, вале, дама, поп).

3	**A**	10	**J**	6	9	**A**	3	10	2	2	6	5
Q	8	7	3	**Q**	**K**	8	4	5	8	**Q**	6	8
5	**J**	7	**A**	2	9	**K**	7	**A**	5	7	10	**J**
4	9	4	6	**K**	10	4	**Q**	**J**	9	**K**	3	2

Доказателство: Разглеждаме двуделен граф с 26 върха: 13-те върха от първия дял са стълбовете на правоъгълника, а 13-те върха от втория дял са стойностите на картите (асо, двойка, тройка, ..., десятка, вале, дама, поп).



Има ребро между стълба i и стойността $j \Leftrightarrow$ стълбът i съдържа карта със стойност j. Всеки k стълба съдържат общо $4k$ карти, а от всяка стойност има точно 4 карти. Следователно в тези k стълба ще имаме поне $4k/4$ различни карти. Следователно всеки k стълба съдържат карти с общо поне k Различни стойности. От теоремата на Хол следва, че графът притежава съвършено съчетание, тоест 13 ребра без общи краища. На тях съответстват 13 карти с различни стойности от различни стълбове.

$\square$

<u>Задача 4</u>. (Г. Георгиев – Скелета, от домашно по „Дискретни структури“ на специалност „Компютърни науки“, през зимния семестър на 2020/2021, I$^{\text{-ви}}$ курс)
Върху шахматна дъска 8×8 са разположени 33 топа. Докажете, че измежду тях могат да се намерят пет топа, никои два от които не се бият.

<u>Доказателство</u>:

Първи начин (Д. Кралчев):

Ще използваме следното обобщение на теоремата на Хол:

Матрица $A_{n\times n}$ съдържа $q \leq n$ единици (по една от всеки ред и стълб) $\Leftrightarrow$ обединението на всеки k стълба (като множества от индекси на редове имащи

единица) има мощност не по-малка от $k-(n-q)$, т.е. мощността на обединението е $\geq k+q-n$, за всяко $k=1,\ldots,n$.

В нашия случай имаме: $n=8$, $q=5$, $q-n=-3$. Т.е. искаме да докажем, че обединението на всеки k стълба има мощност поне $k-3$. Ако $k\leq 3$, то твърдението става тривиално, тъй като $k-3\leq 0$, а всяко едно обединение е с мощност поне 0. Нека $k\geq 4$. Допускаме противното, т.е. обединението на някои k стълба съдържа не повече от $k-4$ елемента (обединението са индексите на редоете, в коиот някои от тези стълбове има единица) $\Rightarrow$ в останалите $8-k$ стълба има най-много 8 единици. Т.е. получаваме следното уравнение: $k(k-4)+(8-k)8\geq 33$, което е еквивалентно на квадратното уравнение спрямо $k: k^2-12k+31\geq 0$. За неговите корени получаваме $k_1=6-\sqrt{5}$ и $k_2=6+\sqrt{5}$. Следователно $k\in(-\infty,6-\sqrt{5})\cup(6+\sqrt{5},+\infty)$. От това, че k са стълбове следва, че k е цяло число и k може да бъде най-много 8 в конкретната задача. Следователно k трябва да е по-малко от 4, но този случай го разгледахме вече, откъдето идва и противоречието.

Втори начин (Г. Георгиев — Скелета):

Ще използваме принципа на Дирихле. Разглеждаме осем успоредни диагонала, като диагонал номер j се състои от всички клетки, за които номера на реда минус номера на стълба дава остатък j при деление на 8, където $j = 0, \ldots, 7$. Нека тези диагонали са „чекмеджета“, а топовете — „предмети“. От принципа на Дирихле, тъй като $33/8 = 4$ с остатък 1, то има диагонал с поне $4 + 1$ топа. Тези пет топа лежат в различни редове и в различни стълбове, тоест не се бият.