Теория на Пойа за броене.

Лектор: Д. Кралчев (2021-04-08)

Два обекта ги разглеждаме като сходни, ако се получават един от друг чрез някое преобразувание от дадена група. Искаме да преброим колко са съществено различните обекти, т.е. по един обект от всеки клас на еквивалентност. Теорията на Пойа съдържа лемата на Бърнсайд, едно твърдение наречено теотема на Пойа и обобщенията (следствията) на теорема на Пойа. Теоремата на Пойа се доказва с помощта на лемата на Бърнсайд. В лемата на Бърнсайд броим всички съществено ралични комбинаторни обекта, а в теоремата на Пойа броим тези от определен вид.

Огърлици и гривни.

Имаме кръг с n места, на които може да слагаме мъниста, които са оцветени в различни цветове. Мънистата от един и същ цвят са неразличими. Имаме неограничен брой от всеки цвят, но напрактика n цвята ни стигат. Може всички маниста да са от един цвят; всички да са от различен цвят; две да са от един цвят, три от друг, ..., k от различен на всички останали и т.н. Въпросът е кога една огърлица или гривна ще се брои за различна от друга огърлица или съответно гривна.

Две **огърлици** се смятат за несъществено различими, ако се получават една от друга чрез завъртане на кръга около неговия център. Групата на преобразувания съдържа само ротации.

Две **гривни** се смятат за несъществено различими, ако се получават една от друга чрез завъртане на кръга около неговия център и/или чрез отражение. Групата на преобразувания съдържа и ротации и отражения.

Така употребени тези думи са термини. Огърлици и гривни са кратки названия, които изясняват преобразуванията.

Нека разгледаме огърлица с фиксирани $n = 6$ мъниста от k цвята. За всяка пермутация ни интересува следната информация:

Пермутации (завъртания)	Брой цикли	Събираемо от лемата на Бърнсайд	Събираемо от теоремата на Пойа
$\underbrace{(1)(2)(3)(4)(5)(6)}_{id}$	6	k^6	a_1^6 горен индекс: брой цикли долен индекс: дължина на цикли
(123456)	1	k^1	a_6^1
$(135)(246)$	2	k^2	a_3^2
$(14)(25)(36)$	3	k^3	a_2^3
$(153)(264)$	2	k^2	a_3^2
(165432)	1	k^1	a_6^1

$$\text{броя на огърлици} = \underbrace{N_k(n)}_{\substack{\text{Necklesses}\\ \text{(огърлици)}}} = N_k(6) \overset{\text{Бърнсайд}}{=} \frac{k^6 + k^3 + 2k^2 + 2k}{6}$$

$$N_{3\{\text{син, зелен, червен}\}}(6) = \frac{3^6 + 3^3 + 2.3^2 + 2.3}{6} = \frac{3^5 + 3^2 + 8}{2} = \frac{3^2(27+1) + 8}{2} = 130$$

Има 130 огърлици съставени от 6 мъниста от 3 цвята (син, зелен и червен).

Колко са огърлиците съставени от 6 мъниста от 3 цвята, като две от тях са сини, едно зелено и три червени (т.е. вида е определен)? На този въпрос може да отговори теоремата на Пойа.

Ето какво е предложил Пойа като метод за изчисляване. Вече не е достатъчно да знаем броя на циклите, а е необходимо да опишем и колко цикъла с каква дължина са. Пойа разглежда следния полином:

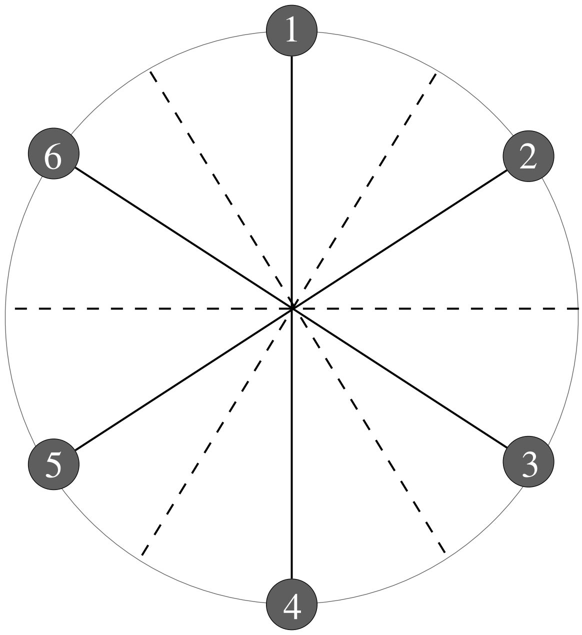
$$P(\text{з,ч,с}) = \underbrace{\frac{1}{6}}_{\text{брой перм.}} \left((\text{ч}^1 + \text{з}^1 + \text{с}^1) + 2\,(\text{ч}^6 + \text{з}^6 + \text{с}^6) + 2\,(\text{ч}^3 + \text{з}^3 + \text{с}^3)^2 + (\text{ч}^2 + \text{з}^2 + \text{с}^2)^3 \right)$$

Търсим броя на огърлиците от две сини, едно зелено и три червени мъниста. Той е равен на коефициента пред събираемо от вида

$$\text{ч}^3\text{з}^1\text{с}^2 = \frac{1}{6}\left(\underbrace{\binom{6}{3;1;2}}_{\substack{\text{мултиномен}\\ \text{коефициент}}} + 2.0 + 2.0 + 1.0 \right) = \frac{1}{6} . \frac{6!}{3!1!2!} = 2.5 = 10.$$

Връзката между лемата на Бърнсайд и теоремата на Пойа е, че при теоремата на Пойа имаме по-голяма грануларност и ако заместим в полинома $P(\text{з,ч,с})$ с единици ще получим, че всички различни огърлици без цветово ограничение са $P(1,1,1) = 130$.

Теоремата на Пойа съдържа повече информация отколкото лемата на Бърнсайд.



Нека сега разгледаме гривни с фиксирано $n = 6$ мъниста от k цвята.

Пермутации (завъртания)	Брой цикли	Събираемо от лемата на Бърнсайд	Събираемо от теоремата на Пойа
$\underbrace{(1)(2)(3)(4)(5)(6)}_{id}$	6	k^6	a_1^6 горен индекс: брой цикли долен индекс: дължина на цикли
(123456)	1	k^1	a_6^1
$(135)(246)$	2	k^2	a_3^2
$(14)(25)(36)$	3	k^3	a_2^3
$(153)(264)$	2	k^2	a_3^2
(165432)	1	k^1	a_6^1
$(1)(4)(26)(35)$	4	k^4	$a_1^2 a_2^2$
$(2)(5)(36)(25)$	4	k^4	$a_1^2 a_2^2$
$(3)(6)(14)(25)$	4	k^4	$a_1^2 a_2^2$
$(12)(36)(45)$	3	k^3	a_2^3
$(23)(14)(56)$	3	k^3	a_2^3
$(16)(25)(34)$	3	k^3	a_2^3

Други пермутации няма, тъй като композиция на две завъртания е завъртане, а композиция на две отражения е отново завъртане.

$$\underbrace{B_k(n)}_{\text{Bracelets}} = B_k(6) = \frac{k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k}{12}$$

гривни

$$B_3(6) = \frac{3^6 + 3.3^4 + 4.3^3 + 2.3^2 + 2.3}{12} = \frac{12.3^4 + 12(3^2+2)}{12} = 3^4 + 3^2 + 2 = 81 + 9 + 2 = 92$$

Следователно има 92 гривни от 6 мъниста от 3 цвята. Ако искаме да видим колко от различните гривни са симетрични, може да тръгнем в обратна посока:

Нека x са несиметричните гривни. Тогава имаме $92 + x - \frac{x}{2} = 130 \Rightarrow x = 76$.

Следователно симетричните различими гривни са $130 - x = 54$.

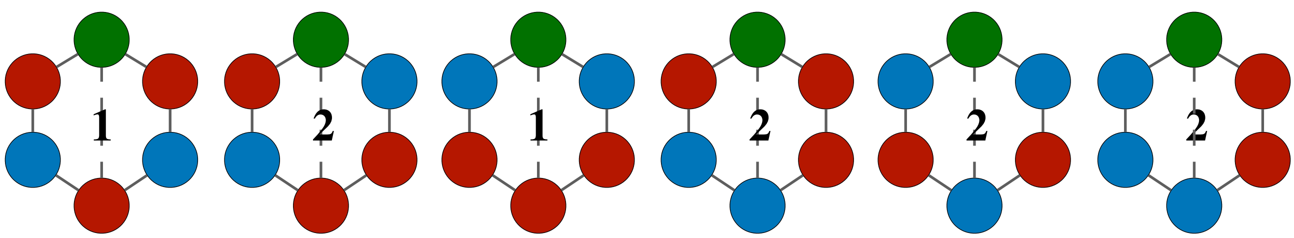
Колко са гривните съставени от две сини, едно зелено и три червени мъниста? За да отговорим на този въпрос ще трябва да използваме отново теоремата на Пойа.

$$\begin{aligned}
P(\text{ч,з,с}) &= \frac{1}{12}\Big((\text{ч}+\text{з}+\text{с})^6 + 2(\text{ч}^6+\text{з}^6+\text{с}^6) + 2(\text{ч}^3+\text{з}^3+\text{с}^3) \\
&\quad +4(\text{ч}^2+\text{з}^2+\text{с}^2)^3 + 3(\text{ч}+\text{з}+\text{с})^2(\text{ч}^2+\text{з}^2+\text{с}^2)^2 \\
&= \frac{1}{12}\Big((\text{ч}+\text{з}+\text{с})^6 + 2(\text{ч}^6+\text{з}^6+\text{с}^6) + 2(\text{ч}^3+\text{з}^3+\text{с}^3) \\
&\quad +4(\text{ч}^2+\text{з}^2+\text{с}^2)^3 + 3\underbrace{(\text{ч}+\text{з}+\text{с})(\text{ч}+\text{з}+\text{с})(\text{ч}^2+\text{з}^2+\text{с}^2)(\text{ч}^2+\text{з}^2+\text{с}^2)}\Big)
\end{aligned}$$

Търсим коефициента пред

$$\text{ч}^3\text{з}^1\text{с}^2 = \frac{1}{12}\left(\binom{6}{3;1;2} + 2.0 + 2.0 + 4.0 + 3.2.2\right) = \frac{1}{2}.10 + \frac{1}{12}.12 = 6.$$

Нека ги изпишем за проверка: Б.о.о може да фиксираме единственото зелено манисто да е най-отгоре.



Има шест различими гривни и десет различими огърлици, които са съставени от едно зелено, две сини и три червени мъниста.

Както споменахме по-горе, теорията н Пойа съдържа не само теоремата на Пойа, а и някои нейни обобщения и следствия. От тях ще разгледаме следното следствие:

Да допуснем, че в полинома на Пойа получаваме $6ч^3з^1с^2 + 17ч^2з^2с^2 + 9ч^2з^4 + \dots$

Характеристиките червен, зелен и син цвят са качествени. По същия начин може да кажем диаманти, опал и емералд вместо цветове или някакви геометрични фигури като триъгълник, квадрат и кръг. Но характеристиките може да бъдат и количествени. Т.е. на червения, синия и зеления цвят можем да препишем тегла и да се интересуваме от броя на огърлиците или гривните с определено тегло.

Нека например всяко червено манисто има тегло 5, всяко зелено манисто има тегло 10 и всяко сино манисто има тегло 6. Заместваме "ч" с t^5, "з" с t^{10} и "с" с t^6.

$$\begin{cases} ч = t^5 \\ з = t^{10} \\ с = t^6 \end{cases}$$

Тогава действието в полинома на Пойа ще изглежда по слендия начин:

$$6(t^5)^3 . (t^{10})^1 . (t^6)^2 + 17(t^5)^2 . (t^{10})^2 . (t^6)^2 + 9(t^{10})^2 . (t^5)^4 + \dots = 6t^{27} + 17t^{42} + 9t^{40} + \dots$$

Т.е. имаме 6 гривни с тегло 27.

Ако заменим в полинома на Пойа всеки цвят с t^k, където k е теглото на цвета и разкрием скобите и извършим приведение, това което ще получим е пораждащата функция на комбинаторните конфигурации с дадено тегло. Т.е. коефициента пред t^m ще бъде броят на обектите с тегло m.

Това, с което до тук се занимавахме беше частен случай за $n=6$. Сега искаме да изведем формула, която е в сила за всяко n.

Формулата е следната: Има $N_k(n) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{d|n} \varphi(d)k^{\frac{n}{d}}$ различни огърлици, съставени от n мъниста от k цвята, където φ е функцията на Ойлер и $\varphi(a) = |\{b \,|\, 1 \le b \le a, b \in \mathbb{N}$ и $\gcd(a,b) = 1\}|$, което е броя на взаимнопростите с $a \in \mathbb{N}$ числа от $\{1,2,...,a\}$

Частни случаи:

$\varphi(p) = p - 1$, за всяко просто число p
$\varphi(1) = 1$ (1 не е просто число)
$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$

Общ случай: $\varphi(a) = \varphi(p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}) = (p_1^{k_1} - p_1^{k_1 - 1})(p_2^{k_2} - p_2^{k_2 - 1}) \dots (p_s^{k_s} - p_s^{k_s - 1})$.

Т.е. може да пресметнем $\varphi(a)$ за всяко $a \in \mathbb{N}$, стига да знаем разлагането на a на прости множители. Но самото намиране на разлагането на прости множители за големи числа е трудна задача и няма бърз алгоритъм за нея и много системи за криптиране разчитат на този факт.

Нека приложим формулата за $n = 6$ за да направим проверка.

$$N_k(6) = \frac{1}{6}\left(\varphi(1)k^6 + \varphi(2)k^3 + \varphi(3)k^2 + \varphi(6)k\right) = \frac{1}{6}\left(k^6 + k^3 + 2k^2 + 2k\right)$$

Доказателство:

Големия въпрос е как се получават коефициентите, т.е. от къде идва функцията на Ойлер $\varphi(d)$.

$\frac{1}{n}$ идва от лемата на Бърнсайд. n е броя на пермутациите, но те са завъртания.

$k^{\frac{n}{d}}$ идва отново от завъртанията. При въртенето, ако единицата минава цикъл с дължина 3, то идвойката ще минава цикъл със същата дължина 3. Всички мъниста като върхове на правилен n-ъгълник са абсолютно симетрични и равнопоставени при завъртането. С други думи, винаги ще получаваме цикли с еднаква дължина в най-лявата колонка на таблицата, която разгледахме.

Ако обозначим с d дължината на цикъла, тогава броя на циклите ще бъде $\frac{n}{d}$. Остана да докажем, че има $\varphi(d)$ пермутации, чиито цикли са с дължина точно d. Например $\varphi(6) = 2$, защото (само 1 и 5 са взаимно прости с 6) имаме два цикъла с дължина 6.

За да докажем идеята трябва да тръгнем в обратна посока. Не може от дължината на цикъла d веднага да изведем кои са пермутациите. Ще е необходима обратната операция. Нека имаме пермутация, която е завъртане на ъгъл $a = 0, 1, 2, \dots, n-1$ (степен на завъртането или стъпки, на които въртим). Параметъра a се явява идентификатор на пермутацията. По това a можем да намерим дължината на циклите.

Вземаме някое число x от пермутацията ($x = 1, 2, \dots, n$) и знаем, че то ще отиде на позиция $x + a$, което пък от своя страна ще отиде на $x + 2a$ и т.н. Тоест ще имаме цикъл $\left(x, x+a, x+2a, x+3a, \dots, x+(d-1)a\right)$, който е с дължина d. Всички тези числа ще са по-малки от n, тъй като са по модул от n $\left(x, x+a, x+2a, \dots, x+(d-1)a \equiv \bmod n\right)$.

Няма следващ елемент, защото искаме да имаме цикъл. За да имаме цикъл следващия елемент трябва да отива в първия, т.е. $x + da \equiv x \pmod{n}$.

Остатъците по модул n са краен брой и рано или късно ще повторим x за някое d и това d е най-малкото положително число с това свойство. Така се определя дължината на цикъла, в която и да е пермутация a. Ако a е пермутация, d – то трябва да го определим от тук, по споменатия начин.

Ето доказателство, че нищо не зависи от x : $x + da \equiv x \pmod{n}$ – всички точки от пермутацията изминават цикли с една и съща дължина.

$da \equiv 0 \pmod{n}$, т.е. $n \mid da$. d е най-малкото цяло положително число, за което da се дели на n. Така наммираме d по дадено a.

Обратно, нека d е дадено. Търсим колко са пермутациите a, на които им съответства това d. Трябва да изкараме отговор $\varphi(d)$, за да гокажем формулата.

$d-$дадено. За колко a-та от $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ е вярно, че d е цяло положително число, за което da се дели на n (n е произволно, но фиксирано $\Rightarrow$ е дадено), но $a, 2a, 3a, \dots, (d-1)a$ не се делят на n.

$\dfrac{da}{n}$ е цяло число, $\dfrac{da}{n} = \dfrac{a}{\frac{n}{d}} \Rightarrow a$ трябва да се дели на $\dfrac{n}{d} \Rightarrow a$ има вида $a = \dfrac{kn}{d}$ за някое цяло неотрицателно $k = 0, 1, 2, \dots, d-1$.

Има биекция между a-тата и k-тата. Т.е. за колко k-та от $0, 1, 2, \dots, d-1$ е вярно, че d е най-малкото цяло положително число, за което $a, 2a, 3a, \dots, (d-1)a$ не се делят на n.

Заместваме a с $\dfrac{kn}{d} \Rightarrow$ колко от числата $\dfrac{kn}{d}, \dfrac{2kn}{d}, \dfrac{3kn}{d}, \dots, \dfrac{(d-1)kn}{d}$ не се делят на n?

Т.е. числата $\dfrac{k}{d}, \dfrac{2k}{d}, \dfrac{3k}{d}, \dots, \dfrac{(d-1)k}{d}$ не са цели? $\Leftrightarrow$ т.е. искаме тези k да са

взаимнопростите с d.

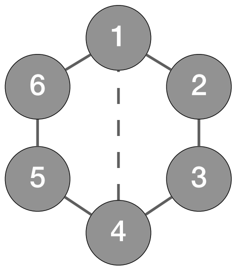
$(\Rightarrow)$ $\gcd(k, d) = 1 \Rightarrow$ Никои от простите множители на k не може да съкрати прост множител на $d \Rightarrow$ всички прости множители на d са в другия множител. Ако допуснем, че някое число е цяло $\Rightarrow d$ ще дели 1 или d ще дели 2 или d ще дели 3 и т.н., което е противоречие, т.к. d не дели никое от числата $1, 2, \dots, d-1$. Следователно никое от тях не е цяло и това е изпълнено за всяко k с $\gcd(k, d) = 1$.

($\Leftarrow$) Обратно, нека $\gcd(k,d) \neq 1 \Rightarrow k$ и d имат общ делител r. Следователно $\dfrac{k}{d} = \dfrac{k_2}{d_2}$. Тогава поне едно от числата $\dfrac{k_2}{d_2}, \dfrac{2k_2}{d_2}, \ldots, \dfrac{\mathbf{d_2 k_2}}{\mathbf{d_2}}, \ldots, \dfrac{(d-1)k_2}{d_2}$. Т.е. има $\varphi(d)$ възможни стойности за k.

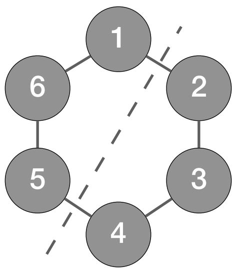
Броят на гривните: $B_k(n) = \begin{cases} \frac{1}{2}N_k(n) + \frac{1}{4}(k+1)k^{\frac{n}{2}}, & \text{ако } n \text{ е четно} \\ \frac{1}{2}N_k(n) + \frac{1}{2}k^{\frac{n+1}{2}}, & \text{ако } n \text{ е нечетно} \end{cases}.$

Доказателство: Множителя $\dfrac{1}{2}$ идва от това, че колкото са авъртанията, толкова са и отраженията и следователно броя на пермутациите е два пъти по-голям тук и делим на два пъти повече пермутации.

Допълнителните събираеми идват от отраженията. Отраженията са половината от пермутациите, но те самите се разделят на групички. Половината отражения са от вида:



и т.н., т.е. минаващи през две срещуположни мъниста, т.е. имаме $\dfrac{1}{2} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ от този вид а другата половина са от вида



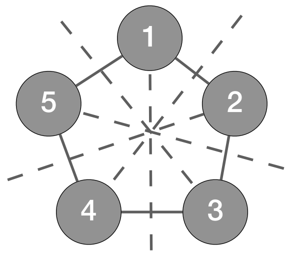
и т.н., т.е. минаващи между две мъниста, т.е. отново имаме $\dfrac{1}{2} . \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$ и от този вид.

Да видиим какви цикли ще породят те (в случая разглеждаме за $n = 6$ – четно). Тези от втория вид пораждат цикли с дължина 2. Тези цикли са $\dfrac{n}{2}$ на брой.

Следователно от тук се пораждат събираеми $k^{\frac{n}{2}}$ и те са $\frac{1}{4}n$ на брой (и следователно след разделяне на n получаваме $\frac{1}{4}k^{\frac{n}{2}}$). Имаме още $\frac{1}{4}n$ от другия вид, които са с един цикъл повече: $\frac{n}{2}+1$. Т.е. $\frac{\frac{1}{4}n\ .\ k^{\frac{n}{2}+1}}{n}=\frac{1}{4}k^{\frac{n}{2}+1}$.

Следователно ще имаме $\frac{1}{4}(k+1)k^{\frac{n}{2}}$ като допълнително събираемо.

Какво се случва когато n е нечетно (например $n=5$)



Отраженията са само от един вид. Всяка ос минава през манисто и срещуположното му празно място. Т.е. всички $\frac{1}{2}n$ отражения са от един вид и циклите им са $\frac{n+1}{2}$ на брой. Следователно ще имаме допълнително събираемо (след разделяне на n) $\frac{1}{2}k^{\frac{n+1}{2}}$.

Проветка:

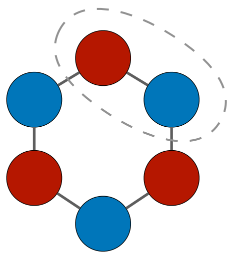
Нека $n=6$ и $k=3$

$$\Rightarrow B_3(6)=\frac{1}{2}N_3(6)+\frac{1}{4}(3+1)3^3=\frac{1}{2}.130+27=65+27=92,$$

което е броя на гривните.

Колко са непериодичните огърлици?

Периодична е например следната огърлица:



За да решим тази задача трябва да въведем още една аритметична функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Формулата за броя на различните непериодични огърлици е изведена от французина Моро, но за да я изведем ни е необходима аритметичната функция на Мьобиус и формулата за обръщане на аритметични функции, свързана с нея.

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^k, & \text{ако } n \text{ е безквадратно число с } k \text{ на брой прости множители} \\ 0, & \text{ако } n \text{ не е безквадратно число} \end{cases}.$$

Това е функцията на Мйобиус, което приема само три стойности и е дефинирана за $n \in \mathbb{N}$.

<u>Свойства</u>:

- Мултипликативност: $\mu(ab) = \mu(a)\mu(b)$, за всички прости числа a и b.
- $\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1 \end{cases}$

  Нека $n = p_1 p_2 \dots p_k$ е разлагането на n на прости множители. Има биекция между делителите на n и подмножествата на $\{1,2,...,k\}$. $\underbrace{d_{i_0} = 1}_{+1},\ \underbrace{d_{i_1} = p_1 p_3}_{+1},\ \underbrace{p_{i_2} = p_4 p_6 p_8}_{-1}, \dots, p_{i_{2^k}} = n.$

  Т.е. формулата казва, че броя на $+1$ е равен на броя на -1. Доказателството на този факт се получава чрез биекция.

  Нека A е някакво множество от делители на n. Тогава $A \leftrightarrow A \backslash \{k\}$, $A \leftrightarrow A \cup \{k\}$. Това преобразуване е инволюция. Разделя множествата на двойки и вув всяка двойка двете множества като мощности се различават с една единица (едното съдържа k, а другото не съдържа k). Понеже се различават с единица – едната мощност е четна, а другата нечетна $\Rightarrow$ подмножествата с четен брой елементи са толкова колкото са подмножествата с нечетен брой елементи. Това свойство ще ни е необходимо при формулата за обръщане.

<u>**Формула за обръщане**</u>:

За всички аритметични функции f и g е в сила следната еквивалентност:

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \Leftrightarrow f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right).$$

<u>**Доказателство**</u>:

Необходимост ($\Rightarrow$) Знаем, че $g(n) = \sum_{n|d} f(d)$.

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \left[\mu(d) \sum_{d_2|\frac{n}{d}} f(d_2)\right] = \sum_{d|n} \sum_{d_2|\frac{n}{d}} \mu(d) f(d_2) = \sum_{d_2|n} \sum_{d|\frac{n}{d_2}} \mu(d) f(d_2) =$$

$$= \sum_{d_2|n} \left[f(d_2) \sum_{d|\frac{n}{d_2}} \mu(d)\right] =$$

$\frac{n}{d_2} = kd \Rightarrow d$ дели $\frac{n}{d_2}$

$d_2 | \frac{n}{d} \Rightarrow \frac{\frac{n}{d}}{d_2}$ е цяло число $\Rightarrow \underbrace{\frac{n}{dd_2}}_{(1)}$ е цяло число $\Rightarrow \frac{n}{dd_2} = k \Rightarrow \frac{n}{d_2} = kd$ е цяло число

$\Rightarrow d_2 | n \Rightarrow d_2$ пробягва <u>някои</u> от делителите на n и след това за всяко d, d_2 пробягва делителите на $\frac{n}{d}$. За $d = 1$, d_2 ще пробягва всички делители на $n \Rightarrow d_2$ пробягва всички делители на n.

d и d_2 си размениха ролите (което се вижда от (1), тъй като d и d_2 участват симетрично)

$$= f(1).0 + \ldots + f(\underbrace{\cdots}_{\text{делител на } n}).0 + f(n).1 = f(n).$$

Достатъчност ($\Leftarrow$) Знаем, че $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$.

$$\sum_{n|d} f(d) = \sum_{d|n} \sum_{d_2|d} \mu(d_2) g\left(\frac{d}{d_2}\right) = \sum_{d_2|n} \sum_{d:d_2|d|n} \mu(d_2) g\left(\frac{d}{d_2}\right) = \sum_{d_2|n} \left[\mu(d_2) \sum_{d:d_2|d|n} g\left(\frac{d}{d_2}\right)\right] =$$

(ако вземем d да бъде n ще видим, че d_2 пробягва всички делители на n)

(d дели n и d_2 дели n)

Полагаме $k = \dfrac{d}{d_2} \Rightarrow d\,|\,n \Leftrightarrow d = d_2 k\,|\,n \Leftrightarrow \dfrac{n}{d_2 k} = d$ е цяло число. $\dfrac{\frac{n}{d_2}}{k}$, числителя е цяло число от външната сума, а от делимостта следва, че $k\,|\,\dfrac{n}{d_2}$ (k и d_2 участват симетринчно)

$$= \sum_{d_2|n}\left[\mu(d_2)\sum_{k|\frac{n}{d_2}} g(k)\right] = \sum_{d_2|n}\sum_{k|\frac{n}{d_2}}\mu(d_2)g(k) = \sum_{k|n}\sum_{d_2|\frac{n}{k}}\mu(d_2)g(k) = \sum_{k|n} g(k)\sum_{d_2|\frac{n}{k}}\mu(d_2) =$$

$$= g(1).0 + \ldots + g(\underbrace{\cdots}_{\text{делител на } n}).0 + g(n).1 = g(n).$$

Непериодична огърлица с дължина n е клас на еквивалентност с размер n, в които нито две различни завъртания на огърлица от този клас не са еднакви.

Формула на Моро.

Броя на различните непериодични огърлици съставени от n мъниста с k цвята е:

$$M_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)k^{\frac{n}{d}}$$

<u>Доказателство</u>:

$$M_k(n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu(d)k^{\frac{n}{d}} \Leftrightarrow \underbrace{nM_k(n)}_{g(n)} = \sum_{d|n}\mu(d)\underbrace{k^{\frac{n}{d}}}_{f\left(\frac{n}{d}\right)} \overset{\substack{\text{Формула} \\ \text{за обръщане}}}{\Leftrightarrow} \underbrace{k^n = \sum_{d|n} dM_k(d)}_{\text{двукратно броене}}.$$

k^n са всички наредби в кръг (n номерирани позиции, k цвята). От една непериодична огърлица може да получим n наредби в кръг.

Нека d е най-късия период на огърлица. Тогава d е непериодична огърлица, при затваряне. Всяка непериодична огърлица с дължина d ще даде $dM_k(d)$ наредби в кръг.