

**Специални числа.**  
**Числа на Стирлинг. Числа на Бел. Числа на Ойлер.**  
 Лектор: Д. Кралчев (2021-03-18(21))

**Числа на Стирлинг (от първи род).**

Означение:  $c(n, k)$  ,  $s(n, k)$  ,  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = c(n, k)$ .  
 без знак    със знак

Имаме, че  $s(n, k) = (-1)^{n-k} \left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]$  и следователно  $\left[ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right] = c(n, k) = |s(n, k)|$ .

$s(n, k)$  се дефинира чрез пораждаща функция:

$$(x)_n = x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n s(n, k)x^k$$

$s(n, k)$  е коефициента пред  $x^k$  в  $(x)_n$ . Следователно може да дефинираме допустимите стойности за параметрите на  $s(n, k)$ :  $0 \leq k \leq n$ .

**Твърдение:**  $s(n+1, k) = -n \cdot s(n, k) + s(n, k-1)$

**Доказателство:**

$$\begin{aligned} s(n+1, k) &= [x^k] \underbrace{[x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)(x-n)]}_n = [x^k] \prod_{k=0}^n (x-k) = \\ &= [x^k] \left( x \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) - n \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) \right) = [x^k] x \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) - [x^k] n \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = \\ &= [x^{k-1}] \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) - n [x^k] \prod_{k=0}^{n-1} (x-k) = s(n, k-1) - n \cdot s(n, k), \text{ което искахме да} \end{aligned}$$

докажем. □

Получихме рекурентна зависимост, но нека видим и кои са началните условия.

$$(x)_3 = \underbrace{x(x-1)(x-2)}_{3 \text{ множителя}} = 1 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x \Rightarrow s(3,3) = 1, s(3,2) = -3, s(3,1) = 2$$

$$s(0,0) = [x^0] \left( \underbrace{1}_{\substack{\text{дъното} \\ \text{на празно} \\ \text{произведение}}} \right) = 1;$$

$$s(n,0) = [x^0] (x(x-1)(x-2) \dots (x-n+1)) = 0; \quad n > 0$$

$s(0,k) = [x^k](1) = 0$ . По-общо, може да дефинираме, като  $s(n,k) = 0$  (тъй като  $0 < k \leq n$   $k > n$ )

нямаме толкова голям степенен показател на  $x$ );

$$s(n,n) = [x^n](x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)) = 1.$$

Пример.  $s(4,3) = -3.s(3,3) + s(3,2) = -3.1 + (-2.s(2,2) + s(2,1)) =$   
 $= -3 - 2.1 + (-1.s(1,1) + s(1,0)) = -3 - 2 - 1 + 0 = -6.$

Проверка:  $[x^3](x(x-1)(x-2)(x-3)) = [x^3](-3x^3 - 2x^3 - 1x^3) = -6.$

s(n, k)										
n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	-1	1							
3	0	2	-3	1						
4	0	-6	11	-6	1					
5	0	24	-50	35	-10	1				
6	0	-120	274	-225	85	-15	1			
7	0	720	-1764	1624	-735	175	-21	1		
8	0	-5040	13068	-13132	6769	-1960	322	-28	1	
9	0	40320	-109584	118124	-67284	22449	-4536	546	-36	1

Числата на Стирлинг без знак се дефинират по следния начин:

$$c(n, k) = |s(n, k)| = \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right].$$

$\Rightarrow c(0,0) = c(n, n) = 1$  и  $c(n,0) = c(n, k) = 0$ , т.е. началните условия се запазват.  
 $n > 0$   $k > n$

c(n, k)										
n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	0	1								
2	0	1	1							
3	0	2	3	1						
4	0	6	11	6	1					
5	0	24	50	35	10	1				
6	0	120	274	225	85	15	1			
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1

Знака на  $s(n, k)$  зависи от четността на  $n + k$ . Следователно  $s(n, k)$  и  $s(n, k - 1)$  са от различни четности. От друга страна,  $s(n + 1, k)$  има същата четност като  $s(n, k - 1)$ .

От рекурентната формула, която изведохме знаем, че

$$s(n + 1, k) = s(n, k - 1) - n \cdot s(n, k).$$

Сега, ако решим да сменим знаците ще имаме един от двата случая:

$$c(n + 1, k) = c(n, k - 1) + n \cdot c(n, k) \text{ или } -c(n + 1, k) = -c(n, k - 1) - n \cdot c(n, k),$$

което е същото като горното.

Окончателно, числата на Стирлинг без знак удовлетворяват следното рекурентно уравнение:  $c(n + 1, k) = c(n, k - 1) + n \cdot c(n, k)$ .

**Твърдение:** Числото на Стирлинг от първи род без знак  $c(n, k) = \left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$  е броят на пермутациите на  $n$  елемента без повторения с  $k$  цикъла.

Например:  $3! = 6$  са пермутациите на 3 елемента.

123, 132, 213, 231, 312, 321

- С 3 цикъла:  $123 = (1)(2)(3)$
- С 2 цикъла:  $132 = (1)(23)$ ;  $213 = (2)(31)$ ;  $312 = (3)(21)$
- С 1 цикъл:  $312 = (132)$ ;  $231 = (123)$

**Доказателство:** Нека  $f(n, k)$  е броя на пермутациите на  $n$  елемента с  $k$  цикъла. Проверяваме началните условия:  $f(0,0) = 1$ ,  $f(n,0) = 0$  (всяка пермутация съдържа поне един цикъл),  $f(n, k) = 0$  (при  $k > n$ , тъй като всеки цикъл съдържа поне един елемент, то не може циклите да са повече от елементите),  $f(n, n) = 1$  (идентитет - всеки елемент е сам в цикъл със себе си, т.е. е неподвижен)

Следователно началните условия са удовлетворени. Нека сега пресметнем  $f(n+1, k)$  или по-точно да намерим рекурентна формула за нея.

Новият елемент  $n+1$  или е самичък в цикъл или не е. Ако е самичък в цикъл, то след премахването му елементите и циклите ще намалеят с по един, т.е.  $n+1 \mapsto n$  и  $k \mapsto k-1$ .

Ако е в някой от вече наличните  $k$  цикли, тогава премахването му няма да промени броя на циклите  $k \mapsto k$ , но ще трябва да се включи в друг цикъл. Включването може да стане след елемент 1, след елемент 2 и т.н., т.е. по  $n$  начина. Следователно  $f(n+1, k) = f(n, k-1) + n \cdot f(n, k)$ .

$f$  удовлетворява началните условия на числата на Стирлинг от първи род, както и рекурентната им зависимост и тъй като тези две условия определят редицата еднозначно, то  $f \equiv c$ . Т.е.  $c(n, k)$  числата, броят пермутациите на  $n$  елемента с  $k$  цикъла.

□

**Числа на Стирлинг (от втори род).** Бележим с  $S(n, k) = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ . Този път дефинираме  $S(n, k)$  комбинаторно, а не чрез пораждаща функция.  $S(n, k)$  или  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  е броя на начините, по които може да разделим множеството от  $n$  номерирани елемента в  $k$  непразни неномерирани подмножества (купчинки от елементи - нямат ред (разпознават се само по елементите си) и не съществува празна купчинка). Тези числа също нямат представяне с елементарни функции.

Начални условия:  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ n \end{smallmatrix} \right\} = 1$  (всеки от  $n$ -те елемента е в отделна купчинка),  
 $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = 1$ , за  $n \geq 1$  (всички  $n$  елемента са в една купчинка) и може да  
додефинираме, че  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = 0$ , за  $n < k$ .

Рекурентна зависимост:

Търсим рекурентна зависимост за  $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ .

$n+1$ -вия елемент може да бъде отделен в собствена купчинка, т.е.  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$  или  
да е в някоя от останалите купчинки, т.е.  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ , като това може да стане по  $k$  начина  
(колкото са купчинките). Следователно  $\left\{ \begin{smallmatrix} n+1 \\ k \end{smallmatrix} \right\} = k \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} + \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\}$ .

S(n, k)											
n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

## Числа на Бел.

Числата на Бел означаваме с  $B_n$  и дефинираме по следния начин:  $B_n$  е броя на разбиванията на  $n$  елементно множество. Разликата с числата на Стирлинг от втори род е, че тук не се казва на колко подмножества се разбива множеството, докато при числата на Стирлинг от втори род имаме параметър  $k$ , който конкретизира броя на тези подмножества.

Връзката между числата на Стирлинг от втори ред и числата на Бел може да запишем по следния начин:  $B_n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ . Оказва се, че  $B_n$  няма явен вид.

Началните условия са  $B_0 = B_1 = 1$ . Първите няколко числа на Бел са :

1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975 и т.н. ( $0 \leq n$ )  
 $\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots \end{matrix}$

Пример: Разбиванията на три елементно множество  $\{a, b, c\}$  са:

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}; \{\{a, b\}, \{c\}\}; \{\{a, c\}, \{b\}\}; \{\{a\}, \{b, c\}\}; \{\{a, b, c\}\}$ .  $B_3 = 5$ .

**Твърдение:** Рекурентна формула:  $B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k$ .

### Доказателство:

Питаме се, по колко начина може да разбием множество от  $n + 1$  на подмножества, всяко от които не е празно.

$n + 1$ -вия елемент трябва да попада в някое от множествата. Въпросът е заедно с колко други елемента участва в едно и също подмножество. Нека  $n + 1$  е в множеството  $A$  на цялото множество  $T$ , което разбиваме -  $|T| = n + 1$ . Нека елементите извън  $A$  са  $k$  на брой. Тогава тези  $k$  елемента може да изберем по  $\binom{n}{k}$

начина и освен това може да ги разбием по  $B_k$  начина. Следователно,

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k, \text{ което искаме да докажем.}$$

□

Лесен начин за ръчно пресмятане на числата на Бел:

	$B_n$				
1					
1	1				
2	3	5			
5	7	10	15		
15	20	27	37	52	
52	...				

**Задача:** Намерете експоненциалната пораждаща функция на числата на Бел в явен вид.

**Решение:**

$$\begin{aligned}
 \text{ЕПФ: } B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n x^n}{n!} \stackrel{n \mapsto n+1}{=} 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} = \\
 &= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{k} B_k x^{n+1}}{(n+1)!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{n}{k} B_k x^{n+1}}{(n+1)!} = \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n! B_k x^{n+1}}{(n+1)! k! (n-k)!} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-k)! (n+1)} = \\
 &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k+1}}{(n+k)! (n+k+1)} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k+1}}{n! (n+k+1)} \\
 &\Rightarrow B'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+k}}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} e^x = e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k x^k}{k!} = e^x B(x)
 \end{aligned}$$

Получихме следното диференциално уравнение с разделящи се променливи:

$$B'(x) = e^x B(x) \Rightarrow \frac{\partial B(x)}{\partial x} = e^x B(x) \Rightarrow \frac{\partial B(x)}{B(x)} = e^x dx, \text{ като пропускаме да}$$

разгледаме  $B(x) = 0$ , тъй като ще го разгледаме по-късно.

$$\Rightarrow \int \frac{1}{B(x)} d B(x) = \int e^x dx \Rightarrow \ln |B(x)| = e^x + c, \text{ където } c = \text{const}.$$

$B(x) = \pm e^{e^x + c} = \pm e^{e^x} \cdot e^c = \tilde{c} \cdot e^{e^x}$ , където  $\tilde{c}$  е някаква нова константа (включително 0, която пропуснахме да разгледаме)

$\Rightarrow B(x) = \tilde{c} e^{e^x}$  е решението на функционалното диференциално уравнение.

Но от началните условия имаме, че  $1 = B(0) = \tilde{c} \cdot e \Rightarrow \tilde{c} = \frac{1}{e} \Rightarrow B(x) = e^{e^x - 1}$ .

Така изведохме експоненциалната пораждаща функция на числата на Бел:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

□  
7

### Формула на Добински за числата на Бел:

От тази функция може да получим формулата на Добински:  $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ , която е

явна, но не е затворена, т.е. не е проста. Този ред е сходящ, но за големи  $n$  сходяда бавно.

$k!$  ще надхвърли  $k!$  от даден момент нататък, но за големи  $n$ , този момент може да се забави доста.

**Доказателство:** Ние вече намерихме ЕПФ:  $B(x) = e^{e^x-1}$ ;  $B_n$  ще е коефициента пред  $x^n$  в ЕПФ умножен по  $n!$  (тъй като в ЕПФ го делим на  $n!$ ). Нека развием тази функция в степенен ред:

$$\begin{aligned} e^{e^x-1} &= \frac{1}{e} e^{e^x} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^x)^n}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{n! k!} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k x^k}{n! k! e} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{x^k}{k! e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} \right). \end{aligned}$$

Следователно  $B_k = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$  или

аналогично (след

преименуване на променливите),  $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$ , което искахме да докажем.

□

### Задача (сортиране):

Имаме купчинка от  $n$  карти и разглеждаме следното разбъркване: избираме случайна карта от купчинката, изтегляме я и я слагаме на върха на купчинката (може дори тази карта да е най-горната - в такъв случай няма да преместим нищо). Тази операция я правим точно толкова пъти, колкото са картите -  $n$  на брой.

„Добро“ ли е полученото случайно разбъркване след  $n$ -те операции?

(Упътване: За да може да определим едно разбъркване като „добро“ е необходимо да докажем, че след него - всяка пермутация се появява равно вероятно.)

### Решение:

Тъй като ние не знаем какво ще е първоначалното нареждане на картите, от което стартираме, то може да считаме че разбъркването за всяка една от възможните  $n!$  разбърквания. Тази стартова наредба може един вид да играе ролята на равномерна случайна величина. За да проверим дали едно разбъркване е „добро“ е достатъчно да проверим каква е вероятността след операциите от условието да получим идентитета (т.е. отново същото нареждане на картите като стартовото).

Всички възможни начини за протичане на играта са общо:



$$\underbrace{n}_{\text{за 1-ви ход}} \times \underbrace{n}_{\text{за 2-ри ход}} \times \dots \times \underbrace{n}_{\text{за } n\text{-ти ход}} = n^n.$$

Благоприятните възможни начини (т.е. тези, при които в края на разбъркването ще се получи идентитета) са:

Нека номерираме операциите с  $1, 2, \dots, n$ . При всяко теглене на карта ние разбиваме множеството от  $n$  карти спрямо картата която сме изтеглили от съответното теглене, по следния начин: в едно множество слагаме номерата на ходовете, при които е изтеглена една и съща карта.

Например: Нека картите са  $n = 7$  и нека множествата са  $\underbrace{\{1, 4, 6\}}_{k_1}; \underbrace{\{2, 7\}}_{k_2}; \underbrace{\{3, 5\}}_{k_3}$ .

Тези множества описват до някаква степен как е протекло самото разбъркване. Това означава, че в първото множество на 1-вия, 4-тия и 6-тия ход сме изтеглили една и съща карта.

На 2-рия и 7-мия ход сме изтеглили отново една и съща карта, но различна от тази в първото множество. На 3-тия и 5-тия ход отново сме изтеглили една и съща карта, но различна от тези на първото и второто множество. Така получените множества може да породят въпроса: „Кога сме изтеглили картите с номера  $k_4, k_5, k_6, k_7$ ?“ Отговорът е, че тях не сме ги избирали измежду всички  $n$  операции. През цялото време сме теглили само карти с номера  $k_1, k_2, k_3$ , където  $k_i \in 1, 2, \dots, 7$ , за  $i = 1, 7$  и  $k_i \neq k_j$ , т.е. това е преномериране на числата от 1 до 7.

Това което направихме до тук все още не е биекция между разбъркванията и всички разбърквания. За да стане биекция е необходимо да определим и кои карти сме изтеглили на всеки ход. Но ако се ограничим само до благоприятните случаи и определим изтеглените карти, то тогава ще имаме биекция.

Нека номерираме картите от стартовата купчинка съответно с номерата от 1 до  $n$ . Очевидно последната изтеглена карта трябва да е 1, за да може след като я поставим най-отгоре - отново да дойде на мястото си (търсим идентитета). Но карта номер 1 от стартовата купчинка вече е в множество с мощност поне 1 (в нейното множество от разбиването, което описахме по-горе има поне един елемент и той е номера на ход-а, в който сме я изтеглили тази карта, а именно  $n$ . Въпроса е, че може да има и други ходове, в които сме я теглили.) На предходния ход трябва да сме изтеглили карта с номер 2, тъй като тя ще се похлупи от карта с номер 1 на следващия ход и ще застане на мястото си (т.е. в множеството, което съдържа елемента  $n - 1$  ще са ходовете, в които сме теглили карта 2) и т.н.

За нашия пример това ще изглежда по следния начин:

$\{1,4,6\}$  ;  $\{2,7\}$  ;  $\{3,5\}$   
 ходовете, на ходовете, на ходовете, на  
 които теглим които теглим които теглим  
 карта 2 карта 1 карта 3

$1234567 \xrightarrow[\text{ход 1}]{\text{карта 2}} 2134567 \xrightarrow[\text{ход 2}]{\text{карта 1}} 2134567 \xrightarrow[\text{ход 3}]{\text{карта 3}} 3214567 \xrightarrow[\text{ход 4}]{\text{карта 2}} 2314567 \mapsto$   
 $\xrightarrow[\text{ход 5}]{\text{карта 3}} 1234567 \xrightarrow[\text{ход 6}]{\text{карта 2}} 2134567 \xrightarrow[\text{ход 7}]{\text{карта 1}} 1234567 \equiv id.$

Това вече е биекция между благоприятните протичания на разбъркването и разбиванията на  $n$  елементно множество.

Следователно търсената вероятност е  $n$ -тото число на Бел, разделено на  $n^n$ , т.е.

$\mathbb{P}(\text{„добро“ разбъркване}) = \frac{B_n}{n^n}$  или казано по алтернативен начин, това е

вероятността да получим идентитета (стартовата купчинка) след изпълнението на  $n$ -те операции от условието. Тази вероятност обаче е много по-голяма, ако случайно изберем някаква пермутация на картите. Тоест ние твърдим, че  $\frac{B_n}{n^n} \gg \frac{1}{n!}$  или

аналог.  $B_n \gg \frac{n^n}{n!}$ , от където ще следва, че разбъркването не е добро. С това означение, което използвахме по-горе искаме да кажем, че израза от лявата страна е асимптотично по-бързо нарастващ от този от дясната.

Нека го докажем. От формулата на Добинкси знаем, че  $B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$  и от нея ще изведем долна граница за  $B_n$ .

Да изследваме функцията  $f(k) = \frac{k^n}{k!}$ .

$$\frac{f(k+1)}{f(k)} = \frac{(k+1)^n}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^n} = \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^n}{k+1} = \frac{\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k\right)^{\frac{n}{k}}}{k+1} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\frac{n}{k}}}{k+1} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{n}{k}} \stackrel{?}{\odot} k+1 \Big| \ln$$

$$\frac{n}{k} \odot \ln(k+1) \sim \ln(k) \Rightarrow n \sim \underset{\text{растяща}}{k \ln k}.$$

Следователно ще имаме, че за малки стойности на  $k$  :  $n > k \ln k$ , след което в дадено момент ще имаме  $n = k \ln k$  и от този момент нататък ще имаме  $n < k \ln k$ , което ще е в сила за големи стойности на  $k$ .

Следователно,  $\frac{f(k+1)}{f(k)} > 1$ , което искахме да докажем.

□

## Числа на Ойлер.

Числата на Ойлер от първи и втори род се срещат като Eulerian Numbers, докато другите два вида се срещат като Euler Numbers.

### Числа на Ойлер (от първи род):

Означаваме с  $A(n, m)$ , където буквата  $A$  идва от алтернативни (макар и тук да няма алтерниране - по-нататък ще има) или още  $E(n, m)$  и  $\left\langle \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\rangle = 1$ .

Дефинираме ги комбинаторно като броя на пермутациите (без повторения) на числата  $1, 2, \dots, n$ , в които точно  $m$  числа са по-големи от непосредствените си предшественици.

Пример:  $n = 5$  и имаме следната пермутация:

$45312 \mapsto 4 < 5 > 3 > 1 < 2 \Rightarrow n = 5, m = 2$  (две числа са по-големи от непосредствените си предшественици).

Числото на Ойлер от първи род казва колко са всички такива пермутации с  $m = 2$  има. То не може да се изрази като функция на елементарни функции.

**Тъждество:**  $A(n, m) = A(n, n - m - 1)$

**Доказателство:** На всяка пермутация  $a_1 \triangle_1 a_2 \triangle_2 \dots \triangle_{n-1} a_n$  ще съпоставим пермутацията  $a_n \overline{\triangle}_{n-1} \dots \overline{\triangle}_2 a_2 \overline{\triangle}_1 a_1$ , която се явява обрънатата пермутация, а  $\triangle$  е знак или за по-малко или за по-голямо, докато  $\overline{\triangle}$  е съответния му обрънат знак.

В първоначалната пермутация, ако сме имали  $m$  знака  $<$ , то в получената пермутация след обръщането ще имаме  $n - m - 1$  знака  $<$  (броя на всички знаци е  $n - 1$  и тези които сега ще са  $<$ , в изходната са били  $>$ , т.е.  $m$ ).

$n$	$m$	Пермутации	$A(n, m)$
1	0	(1)	$A(1, 0) = 1$
2	0	(2, 1)	$A(2, 0) = 1$
	1	(1, 2)	$A(2, 1) = 1$
3	0	(3, 2, 1)	$A(3, 0) = 1$
	1	(1, 3, 2) (2, 1, 3) (2, 3, 1) (3, 1, 2)	$A(3, 1) = 4$
	2	(1, 2, 3)	$A(3, 2) = 1$

**Рекурентно уравнение:**  $A(n, m) = (n - m)A(n - 1, m - 1) + (m + 1)A(n - 1, m)$

**Доказателство:**  $n$ -тото число може да го сложим в пермутация на  $1, 2, \dots, n - 1$  по два начина: на място където знака е бил  $<$  и в началото и на място където знака е бил  $>$  и в края.

I сл.  $a_i < a_j \mapsto a_i < a_n > a_j$ , т.е. появява се един знак  $>$ , но броя на знаците  $<$  се запазва. Това ще се случи и когато добавим числото  $n$  в началото.

II сл.  $a_i > a_j \mapsto a_i < a_n > a_j$ , т.е. появява се един нов знак  $<$ . Това ще се случи и ако добавим числото  $n$  в края.

Тоест може да вмъкнем  $n$ -то число в пермутация от  $n - 1$  числа и точно  $m$  знака  $<$  по  $m + 1$  начина, така че да си останат  $m$  знака  $<$  и по  $n - 2 - (m - 1) + 1 = n - m$  начина, така че да нарастнат знаците  $<$  с един. Следователно:

$A(n, m) = (m + 1)A(n - 1, m) + (n - m)A(n - 1, m + 1)$ , което искахме да докажем.



Дефиниционно множество:  $n = 1, 2, \dots \in \mathbb{N}, 0 \leq m \leq n - 1$ .

Гранични условия:

$A(n, 0) = 1$  (наредба в низходящ ред)

$A(n, n - 1) = 1$  (наредба във възходящ ред)

A(n, m)									
n/m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1								
2	1	1							
3	1	4	1						
4	1	11	11	1					
5	1	26	66	26	1				
6	1	57	302	302	57	1			
7	1	120	1191	2416	1191	120	1		
8	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1	
9	1	502	14608	88234	156190	88234	11	502	1

Всеки ред е симетричен, което го видяхме и от тъждеството. Освен това, сумата от елементите на всеки ред е равна на съответния факториел на номера на реда. Това е така, тъй като всички пермутации се разбиват от числата на Ойлер от първи род по  $m$ , за  $m$  от Д.О.

$$\sum_{m=0}^{n-1} A(n, m) = n!, \text{ за } n \geq 1.$$

### Числа на Ойлер (от втори род):

Означение:  $\langle\langle n \rangle\rangle_m$ . Отново ги дефинираме комбинаторно. Пермутациите на мултимножеството  $\{1, 1, 2, 2, \dots, n, n\}$ , които имат свойството, че за всяко  $k$ , всички елементи, които се появяват между две срещания на  $k$  в пермутацията са по-големи от  $k$  са  $(2n - 1)!!$ . Числото на Ойлер от втори род  $\langle\langle n \rangle\rangle_m$  е броя на всички такива пермутации, които имат точно  $m$  знака  $<$ . Например, за  $n = 3$  имаме 15 такива пермутации: една без знак за по-малко, 8 с единствен знак за по-малко и 6 с два знака за по-малко.

332211,  
221133, 221331, 223311, 233211, 113322, 133221, 331122, 331221,  
112233, 122133, 112332, 123321, 133122, 122331

### Рекурентна зависимост за $\langle\langle n \rangle\rangle_m$ :

Новата двойка числа  $(n, n)$  може да поставим в пермутацията на числата с точно две повторения за всяко от 1 до  $n - 1$  само ако са заедно, тъй като между  $n$  и  $n$  няма как да има по-големи числа.

Т.е. може да ги добавим (на място със знак  $<$  или в началото) или (на място със знак  $>$  или на място без знак или в края). Следователно

$$\langle\langle n \rangle\rangle_m = (m + 1) \langle\langle n - 1 \rangle\rangle_m + (2n - m - 1) \langle\langle n - 1 \rangle\rangle_{m-1}.$$

Начални условия:

$$\langle\langle n \rangle\rangle_0 = 1 \quad (n, n, n - 1, n - 1, \dots, 1, 1)$$

$$\langle\langle n \rangle\rangle_{n-1} = n \langle\langle n - 1 \rangle\rangle_{n-1} + n \langle\langle n - 1 \rangle\rangle_{n-2} = 0 + n \langle\langle n - 1 \rangle\rangle_{n-2} = \dots = n!$$