

Примитивно рекурсивни функции

02.10.2019г.

Твърдение 5. Следните функции са примитивно рекурсивни:

а) $C_a^n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def.}}{=} a, \forall \bar{x} \in \mathbb{N}, n \geq 1, a \in \mathbb{N}$

б) $f_1(x, y) = x + y$

в) $f_2(x, y) = x \cdot y$

г) $f_3(x, y) = x^y$

д) $f_4(x, y) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^x}}}}}_y$

е) $f_5(x, y) = \underbrace{x \diamond x \diamond \dots (x \diamond x))}_{y}, \text{ където } x \diamond y = f_4(x, y)$

ж) $pred(x) = x \ominus 1 \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ където}$

$$pred(x) = x \ominus 1 \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ е функция предшественик}$$

з) $sg(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

и) $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

й) $\min(x, y)$

к) $\max(x, y)$

Док-во:

а) $C_a^n(x_1, \dots, x_n) = S\left(\underbrace{S\left(\underbrace{\dots \vartheta(I_1^n(x_1, \dots, x_n))}_{x_1} \dots\right)}_0\right) = a, \text{ където } a \text{ е}$

фиксирано.

б) $f_1(x, 0) = x + 0 = x = I_1^1(x)$

$$f_1(x, y+1) = x + (y+1) = \underbrace{(x+y) + 1}_{S(f_1(x,y))} = S(f_1(x,y))$$

Следователно от дефиницията за *примитивно рекурсивна функция*:

$$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$$

$$f(\bar{x}, y+1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \text{ формално имаме}$$

$$\begin{cases} f_1(x, 0) = I_1^1 \\ f_1(x, y+1) = S(f_1(x, y)) = h(x, f_1(x, y)) \end{cases}$$

където $h(x, z) = S(z)$. Така достигнахме примитивно рекурсивни (базови) функции от десните страни на равенствата – което искахме. f_1 се получава с помощта на *примитивна рекурсия* от базовата примитивно рекурсивна функция I_1^1 и h , която също е примитивна рекурсия – следователно и f_1 е ПРФ

в) $f_2(x, y) = x \cdot y$

$$f_2(x, 0) = x \cdot 0 = 0 = \vartheta(x)$$

$$f_2(x, y+1) = x \cdot (y+1) = x \cdot y + x = f_2(x, y) \stackrel{PRF}{+} x = h(x, y, f_2(x, y)), \text{ където}$$

$h(x, y, z) = x + z$. Т.е. f_2 се получава с помощта на операцията *примитивна рекурсия* от 0 и събирането и следователно е *примитивно рекурсивна функция*. (0 е базова ПРФ, а събирането доказахме, че е ПРФ в а))

г) $f_3(x, y) = x^y$

$$f_3(x, 0) = x^0 = 1 = S(\vartheta x)$$

$$f_3(x, y+1) = x^{y+1} = x^y \cdot x = f_3(x, y) \cdot x = f_2(x, f_3(x, y)) = h(x, y, f_3(x, y))$$

д) $f_4(x, y) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^x}}}}_y$ – суперстепенуване.

$$x^{y^z} \stackrel{\text{def}}{=} x^{(y^z)}$$

$$f_4(x, 0) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^x}}}}_0 = 1$$

$$f_4(x, y+1) = \underbrace{x^{x^{\cdot^{\cdot^x}}}}_{y+1} = x^{\underbrace{x^{\cdot^{\cdot^x}}}_y} = x^{f_4(x, y)}$$

$$\text{При } y = 0 : f_4(x, 0+1) \stackrel{\text{def}}{=} x = x^{f_4(x, 0)} = x$$

е) аналогично на **д)**

ж) $x \stackrel{o}{\underset{y}{-}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

$$f(x, 0) = x - 0 = x = I_1^1(x)$$

$$f(x, y + 1) = x - (y + 1) \stackrel{?}{=} (x - y) - 1$$

Проверка:

1.) $x > y$ ($x \geq y + 1$)

от ляво: $x \ominus (y + 1) \stackrel{\text{def}}{=} x - (y + 1) = (x - y) - 1 = \underbrace{(x \ominus y)}_{>0} \ominus 1$

2.) $x \leq y$: $x \ominus (y + 1) = 0$; $(x \ominus y) \ominus 1 = 0$

Функцията предшественик е примитивно рекурсивна, защото:

$$pred(0) = 0 ; p(x + 1) = (x + 1) - 1 = x + 1 - 1 = x = I_1^1(x) = g(x, pred(x)), g(x, y) = x$$

$$3) \begin{cases} sg(0) = 0 \\ sg(\underbrace{x + 1}_{>0}) = 1 = S(\vartheta(x)) \end{cases}$$

и) $\overline{sg}(x) = 1 - sg(x) = 1 \ominus sg(x)$

й) $min(x, y) = x \ominus (x \ominus y)$

к) $max(x, y) = x + (y \ominus x)$

Проверка:

1.) $x \geq y \Rightarrow x + (y \ominus x) = x + 0 = x = max(x, 0)$

2.) $x < y \Rightarrow x + (y \ominus x) = x + (y - x) = y = max(0, y)$

Задача 1.

а) Докажете, че: $f(x_1, \dots, x_n) = max(x_1, \dots, x_n)$ е примитивно рекурсивна функция.

б) $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} max\{g(x, z) | z \leq y\}$ докажете, че ако g е примитивно рекурсивна функция, то и f е такава.

Док-во:

а) $f(x_1, \dots, x_n) = max(x_1, max(x_2, max(\dots x_{n-2}(max(x_{n-1}, x_n)) \dots)))$

Итеративна програма, която симулира примитивна рекурсия за намирането на най-големия от 5 сравними елемента:

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```

int max(int x, int y){
    return x > y ? x : y;
}
int main(){
    int a, b; cin >> a >> b;
    int result(max(a, b));
    size_t i = 0
    for (; i < 3; ++i){
        int c; cin >> c;
        result = max(result, c);
    }
    cout << result;
    return 0;
}

```

$$6) f(x,0) = \max\{g(x,z) \mid z \leq 0\} = g(x,0)$$

$$f(x,y+1) = \max\{g(x,0), \dots, g(x,y)\}$$

$$f(x,y+1) = \max(\max\{g(x,0), \dots, g(x,y)\}, g(x,y+1)) =$$

$$= \max(f(x,y), g(x,y+1)) =$$

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x,0) \\ f(x,y+1) = \max(f(x,y), g(x,y+1)) = h(x,y, f(x,y)), h(x,y,z) = \max(z, g(x,y)) \end{cases}$$

Задача 2.

$h(\bar{x}) = \max\{g(\bar{x}, z) \mid z \leq b(\bar{x}), g, b - \text{фикси́рани функции. Докажете, че ако } g, b \text{ са примитивно рекурсивни, то и } h \text{ е примитивно рекурсивна функция.}$

$h(\bar{x}) = f(\bar{x}, b(\bar{x}))$, където f е функцията от задача 1.