Сложност и Изчислимост Л.
02.10.2019 г.

Подходи към формализиране на изчислимостта:
- подход на Тюринг, *1936 г.* – машини на Тюринг
- подход на Клини, *1936 г.* – частично рекурсивни функции

Частични функции: $f(x) = \dfrac{1}{x}$; $f(x) = \log_2 x$ – не са дефинирани върху цялото множество $\mathbb{R}$ на реалните числа.

По-надолу, където споменаваме *функция* ще разбираме $f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}$, където $\mathbb{N} = \{0,1,2,...\}$ (частично дефинирана функция).

$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\overline{x})$.

Означения:
- $!f(\overline{x})$ – f е дефинирана в $\overline{x}$
- $\neg !f(\overline{x})$ – f няма дефинирана стойност в $\overline{x}$
- $f(\overline{x}) \cong g(\overline{x})$ условно равенство $\Leftrightarrow$ и двете функции са дефинирани и имат еднакви стойности:
$!f(\overline{x})\ \&\ !g(\overline{x})\ \&\ f(\overline{x}) = g(\overline{x})$ или едновременно не са дефинирани:
$\neg !f(\overline{x})\ \&\ \neg !g(\overline{x})$
- $Dom(f)$ – дефиниционна област на f: $\{\overline{x} \mid !f(\overline{x})\}$ множеството на тези $\overline{x}$, за които $f(\overline{x})$ е дефинирана

Изходни (базисни) примитивно рекурсивни функции:
- $\vartheta(x) = 0$, за $\forall x \in \mathbb{N}$
- $S(x) = x + 1$, за $\forall x \in \mathbb{N}$

$I^n_k(x_1, \ldots, x_n) = x_k, \forall n \in \mathbb{N}, 1 \le k \le n$ – проектираща (координатна) функция.

$\overline{f_n} = \{f \mid f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}^n$– f е тотална, ако $Dom(f) = \mathbb{N}^n$.
- композиция $h = f \cdot g \Leftrightarrow h(x) \stackrel{\text{def}}{=} g(f(x))$.
- суперпозиция: по дадени $f_1, \ldots, f_k \in \overline{f_n}$ и $g \in \overline{f_k}$, дефинираме нов функция $h = g(f_1, \ldots, f_k) \in \overline{f_n}$ по следния начин
$h(x_1, \ldots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} g(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n))$.

Примитивна рекурсия:

Пример – $f(x) = 1$, ако $x = 0$. $f(x) = f(x-1).x$, в противен случай.
$f(x) = x!$.

Казваме, че f се дефинира чрез примитивна рекурсия от g, ако :

$$\begin{cases} f(0) = c \\ f(x+1) = g(x, f(x)) \end{cases}.$$

примера за $x!$: $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x+1) = (x+1)\,.\,f(x) \end{cases}$, $c = 1, g(x,y) = (x+1)\,.\,y$

Нека $g \in \overline{f_n}, h \in \overline{f_{n+2}}, n \geq 0$ и $\overline{0}\{0,1,2,...\}$ – константи, са дадени функции и с тяхна помощ дефинираме нова функция $\overline{f_{n+1}}$ по следния начин:

$$* \begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, 0) \cong g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y+1) \cong h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)) \end{cases}$$

* ще наричаме обща схема на примитивната рекурсия и ще казваме, че f е дефинирана чрез примитивна рекурсия от g и h.

Твърдение 1. По дадени f и h $\exists! f$ (съществува еднозначно определена функция f) удовлетворяваща примитивно рекурсивната схема *.

Док-во: (индукция) Нека f_1 и f_2удовлетворяват *. Ще покажем, че $f_1 = f_2$, т.е. $\forall \bar{x}\, \forall y (f_1(\bar{x}, y)) \cong f_2(\bar{x}, y)$. Фиксираме произволна наредена n-орка $\bar{x} \in \mathbb{N}$ и нека $P(y) \Leftrightarrow f_1(\bar{x}, y) \cong f_2(\bar{x}, y)$.

С индукция по y ще докажем, че $\forall y (P(y))$

База: $y = 0$: $f_1(\bar{x}, y) \overset{*}{\cong} g(\bar{x}) \Rightarrow P(0)$ и $f_2(\bar{x}, y) \overset{*}{\cong} g(\bar{x}) \Rightarrow P(0)$ е вярно.

Индукционна хипотеза: Нека $P(y)$ е вярно, т.е. $f_1(\bar{x}, y) \cong f_2(\bar{x}, y)$.

Индукционен преход (стъпка) за $y+1$:

$f_1(\bar{x}, y+1) \cong g(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y)) \overset{\text{ind. hyp.}}{\cong} g(\bar{x}, y, f_2(\bar{x}, y)) \cong f_2(\bar{x}, y+1)$. С това твърдението е доказано.

Да разгледаме функцията на Маккарти McCarthy 91 function. Тя дава ясен пример за това, какво не е примитивна рекурсия. Имаме, че $M(n) = \begin{cases} n - 10, & if\ n > 100 \\ M(M(n+11)), & if\ n \leq 100 \end{cases}$. Тя дава ясен пример за това как при всяка итерация (навлизане в рекурсията) се отдалечаваме от базовия случай (дъното на рекурсията). В този случай, няма как да знаем дали рекурсията изобщо ще спре

някога, за това тя не е примитивна. Въпреки това, в тои случай, тя спира. Например:
$M(102) = 92, M(103) = 93, \dots$.

Твърдение 2. От дефиницията за примитивно рекурсивна функция се вижда че ако g и h са тотални, то и f – тяхната примитивна рекурсия (функцията, която се получава от тях чрез помощта на операцията примитивна рекурсия) също е тотална.

Док-во: (индукция по y) $\forall \bar{x}\, \forall y !f(\bar{x}, y)$, фиксираме $\bar{x}$, $P(y) \overset{\text{def.}}{\cong} !f(\bar{x}, y)$.

База: $y = 0$: $f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$– тотална по дефиниция.

Индукционна хипотеза: Нека за някое y : $P(y) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} !f(\bar{x}, y)$. Тогава за $y + 1$: $f(\bar{x}, y + 1) \overset{*}{\cong} h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))$ – също е дефинирана, защото $f(\bar{x}, y)$ е дефинирана от индукционната хипотеза.

Това технически означава, че само с тези две операции не може да стигнем далеч, а под далеч разбираме че няма да може да си достигнем желаната цел, която беше да формализираме операциите.

Деф. Ще казваме, че една функция f е примитивно рекурсивна функция, ако f може да се получи от изходните функции чрез суперпозиция и/или примитивна рекурсия.

Твърдение 3. Всяка примитивно рекурсивна функция е тотална.
Док-во: Ще приложим индукция по дефиницията на ПРФ (примитивно рекурсивните функции).

База: Изходните ПРФ са тотални
- ако $f = g(h_1, \dots, h_k)$ и $g, h_1, \dots, h_k$ са тотални, то и f е тотална.
- ако <f е примитивна рекурсия на g и h, които са тотални, тогава по твърдение 2 – f е тотална.

(Очевидно само тези две операции не са достатъчни, защото затворихме един компакт, а извън него съществуват функции, които не са тотални)

Въвеждаме операцията *минимизация* (μ–операция, *while* цикъл (*Клини*))

Нека g е $\overline{f_{n+1}}$. Дефинираме $f(x_1, ..., x_n) \cong \mu y[g(x_1, ..., x_n, y) \cong 0]$ и ще наричаме това минимизация на g.

f се дефинира по следния начин:
$\bar{f} \cong y \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} g(\bar{x}, y) \cong 0 \ \& \ \forall z < y : g(\bar{x}, z) > 0$

важно! Така дефинираната $f(\bar{x}) \ncong min\{y \,|\, g(\bar{x}, y) \cong 0\})$. $g(x,0) = \neg!$, докато $g(x,1) = 0$.

Тезис на Чърч: всяка числова функция, която може да се изчисли, може да се изчисли с машина на Тюринг.

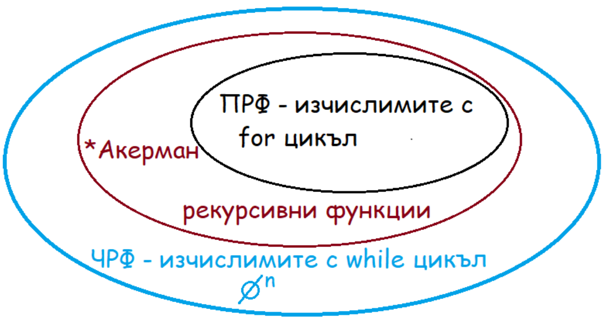
Деф. f е частично рекурсивна функция (ЧРФ), ако може да се получи от изходните чрез суперпозиция, примитивна рекурсия и/или минимизация (μ-операция) приложени краен брой пъти.

Рекурсивни функции Гьодел
f е *рекурсивна*. ако е частично рекурсивна и тотална функция.

$f(\bar{x}) \cong \mu y[g(\bar{x}, y) \cong 0]$
$g(x, y) = x + 1(= S(x)) > 0$ за $\forall x$.

$f(x) \cong \mu y[g(x, y) \cong 0]$ – не е дефинирана за никое x. т.е. тази функция е ЧР и е тотална $\Rightarrow$ не е рекурсивна.

$\emptyset(n)$ – n местната никъде недефинирана функция.



$f : \mathbb{N}^n \nrightarrow \mathbb{N}, n = 1,2,... \sim \mathbb{R}$
$A^* = \{\epsilon\} \cup A \cup A^2 \cup ...$ – изчислимите функции са изброимо много (т.е. нищожно малко в сравнение с всички функции, но достатъчно много за да се изучават)

Твърдение 4. Нека $f \in \overline{f_k}$, a $i_1, \ldots, i_k$ са числа между 1 и n ($\in \{1,...,n\}$). Дефинираме y по следния начин:
$g(x_1, \ldots, x_n) \overset{\text{def.}}{\cong} f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, тогава твърдим, че ако f е примитивна рекурсия, частична рекурсия или само рекурсия, то и g е такава.

Док-во: $g(x_1, \ldots, x_n) \cong g\left(\underbrace{I^n_{i_1}(\bar{x})}_{x_{i_1}}, \ldots, \underbrace{I^n_{i_k}(\bar{x})}_{x_{i_k}}\right) \Rightarrow g = f(I^n_{i_1}, \ldots, I^n_{i_k})$

Частни случай:

$g(x) \cong f(x, x)$;

$g(x, y) \cong f(x)$;

$g(x, y) \cong f(y, x)$;

удвояване на аргумент, въвеждане на фиктивни аргументи, размяна на аргументи (всички пермутации) -> новите функции са със същите сложности.