

## Примитивно рекурсивни функции

02.10.2019г.

**Твърдение 5.** Следните функции са примитивно рекурсивни:

**а)**  $C_a^n(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def.}}{\cong} a, \forall \bar{x} \in \mathbb{N}, n \geq 1, a \in \mathbb{N}$

**б)**  $f_1(x, y) = x + y$

**в)**  $f_2(x, y) = x \cdot y$

**г)**  $f_3(x, y) = x^y$

**д)**  $f_4(x, y) = \underbrace{x \cdot \dots \cdot x}_y$

**е)**  $f_5(x, y) = \underbrace{x \diamond x \diamond \dots (x \diamond x)}_y, \text{ където } x \diamond y = f_4(x, y)$

**ж)**  $pred(x) = x \stackrel{\text{def.}}{\cong} \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}, \text{ където}$

$pred(x) = x \stackrel{\text{def.}}{\cong} \begin{cases} x - 1, & x \geq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  е функция предшественик

**з)**  $sg(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & > 0 \end{cases}$

**и)**  $\overline{sg}(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & > 0 \end{cases}$

**й)**  $min(x, y)$

**к)**  $max(x, y)$

**Док-во:**

**а)**  $C_a^n(x_1, \dots, x_n) = S\left(S\left(\underbrace{\dots \vartheta}_{x_1} \underbrace{(I_1^n(x_1, \dots, x_n)) \dots}_{0}\right)\right) = a, \text{ където } a \text{ е}$   
фиксирано.

**б)**  $f_1(x, 0) = x + 0 = x = I_1^1(x)$

$$f_1(x, y + 1) = x + (y + 1) = (x + y) + 1 = f_1(x, y) + 1 = S(f_1(x, y))$$

Следователно от дефиницията за примитивно рекурсивна функция:

$$f(\bar{x}, 0) = g(\bar{x})$$

$f(\bar{x}, y + 1) = h(\bar{x}, y, f(\bar{x}, y))$  формално имаме

$$\begin{cases} f_1(x, 0) = I_1^1 \\ f_1(x, y + 1) = S(f_1(x, y)) = h(x, f_1(x, y)) \end{cases}$$

където  $h(x, z) = S(z)$ . Така достигнахме примитивно рекурсивни (базови) функции от десните страни на равенствата – което искахме.  $f_1$  се получава с помощта на примитивна рекурсия от базовата примитивно рекурсивни функция  $I_1^1$  и  $h$ , която също е примитивна рекурсия – следователно и  $f_1$  е ПРФ

в)  $f_2(x, y) = x \cdot y$

$$f_2(x, 0) = x \cdot 0 = 0 = \vartheta(x)$$

$$f_2(x, y + 1) = x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x = f_2(x, y) + x = h(x, y, f_2(x, y)), \text{ където}$$

$h(x, y, z) = x + z$ . Т.е.  $f_2$  се получава с помощта на операцията примитивна рекурсия от 0 и събирането следователно е примитивно рекурсивна функция. (0 е базова ПРФ, а събирането доказахме, че е ПРФ в а))

г)  $f_3(x, y) = x^y$

$$f_3(x, 0) = x^0 = 1 = S(\vartheta x)$$

$$f_3(x, y + 1) = x^{y+1} = x^y \cdot x = f_3(x, y) \cdot x = f_2(x, f_3(x, y)) = h(x, y, f_3(x, y))$$

д)  $f_4(x, y) = \underbrace{x^x}_y$  – суперстепенуване.

$$x^{y^z} \stackrel{\text{def}}{=} x^{(y^z)}$$

$$f_4(x, 0) = \underbrace{x^x}_0^x = 1$$

$$f_4(x, y + 1) = \underbrace{x^x}_y^x = x^{\underbrace{x^x}_y} = x^{f_4(x, y)}$$

$$\text{При } y = 0 : f_4(x, 0 + 1) \stackrel{\text{def}}{=} x = x^{f_4(x, 0)} = x$$

е) аналогично на д)

ж)  $x \stackrel{o}{-} y \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x - y, & x \geq y \\ 0, & x < y \end{cases}$

$$f(x, 0) = x - 0 = x = I_1^1(x)$$

$$f(x, y + 1) = x - (y + 1) \stackrel{?}{=} (x - y) - 1$$

Проверка:

1.)  $x > y \ (x \geq y + 1)$

от ляво:  $x \ominus (y + 1) \stackrel{\text{def}}{=} x - (y + 1) = (x - y) - 1 = \underbrace{(x \ominus y) \ominus 1}_{>0}$

2.)  $x \leq y : x \ominus (y + 1) = 0 ; (x \ominus y) \ominus 1 = 0$

Функцията предшественик е примитивно рекурсивна, защото:

$$pred(0) = 0 ; p(x + 1) = (x + 1) - 1 = x + 1 - 1 = x = I_1^1(x) = g(x, pred(x)), g(x, y) = x$$

3) 
$$\begin{cases} sg(0) = 0 \\ sg \underbrace{(x + 1)}_{>0} = 1 = S(\vartheta(x)) \end{cases}$$

и)  $\overline{sg}(x) = 1 - sg(x) = 1 \ominus sg(\bar{x})$

и)  $\min(x, y) = x \ominus (x \ominus y)$

к)  $\max(x, y) = x + (y \ominus x)$

Проверка:

1.)  $x \geq y \Rightarrow x + (y \ominus x) = x + 0 = x = \max(x, 0)$

2.)  $x < y \Rightarrow x + (y \ominus x) = x + (y - x) = y = \max(0, y)$

Задача 1.

а) Докажете, че:  $f(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \dots, x_n)$  е примитивно рекурсивна функция.

б)  $f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \max\{g(x, z) \mid z \leq y\}$  докажете, че ако  $g$  е примитивно рекурсивна функция, то и  $f$  е такава.

Док-во:

а)  $f(x_1, \dots, x_n) = \max(x_1, \max(x_2, \max(\dots x_{n-2}(\max(x_{n-1}, x_n)) \dots)))$

Итеративна програма, която симулира примитивна рекурсия за намирането на най-големия от 5 сравними елемента:

```
#include <iostream>
using namespace std;
```

```

int max(int x, int y){
    return x > y ? x : y;
}
int main(){
    int a, b; cin >> a >> b;
    int result(max(a, b));
    size_t i = 0
    for (; i < 3; ++i){
        int c; cin >> c;
        result = max(result, c);
    }
    cout << result;
    return 0;
}

```

$$6) f(x,0) = \max\{g(x,z) \mid z \leq 0\} = g(x,0)$$

$$f(x,y+1) = \max\{g(x,0), \dots, g(x,y)\}$$

$$f(x,y+1) = \max(\max\{g(x,0), \dots, g(x,y)\}, g(x,y+1)) =$$

$$= \max(f(x,y), g(x,y+1)) =$$

$$\begin{cases} f(x,0) = g(x,0) \\ f(x,y+1) = \max(f(x,y), g(x,y+1)) = h(x,y, f(x,y)), h(x,y,z) = \max(z, g(x,y)) \end{cases}$$

## Задача 2.

$h(\bar{x}) = \max\{g(\bar{x},z) \mid z \leq b(\bar{x})\}$ ,  $g, b$  – фиксираны функции. Докажете, че ако  $g, b$  са примитивно рекурсивни, то и  $h$  е примитивно рекурсивна функция.

$h(\bar{x}) = f(\bar{x}, b(\bar{x}))$ , където  $f$  е функцията от задача 1.