

**Задача 17.** Намерете равновесните точки на системата.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

В околност на всяка една от равновесните точки напишете съответното линейно приближение на системата.

*Решение:*

Равновесните точки са там където скоростите са равни на нула. Т.е. десните страни

на системата са 0:  $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow$  равновесните точки са  $(\pm 1, \mp 1)$

$$f(x, y) = y^2 - 1 \text{ и } g(x, y) = x + y \Rightarrow f_x = 0, f_y = 2y, g_x = 1, g_y = 1.$$

$$\text{Образуваме матрицата на Якоби: } Ja(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{За точката } (1, -1) \Rightarrow a = 1 \text{ и } b = -1 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(1, -1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{x} = 0(x - 1) - 2(y + 1) = -2y - 2 \text{ и } \dot{y} = 1(x - 1) + 1(y + 1) = x + y \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}. \text{ За точката } (-1, 1) \Rightarrow a = -1 \text{ и } b = 1 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(-1, 1) \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\dot{x} = 0(x + 1) + 2(y - 1) = 2y - 2 \text{ и } \dot{y} = (x + 1) + 1(y - 1) = x + y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$\text{Окончателно: } 1) \text{ При точката } (1, -1) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$$2) \text{ При точката } (-1, 1) \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$