Задача 22. Определете типа на уравнението

$$u_{xx} - 4u_{yy} - x^3 u_x - 5y^2 u_y = 0$$

във всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнението.

Решение:

Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ (област в равнината) уравнението
$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u = f(x, y)$ е

1. хиперболично, ако $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$;
2. параболично, ако $D(x_0, y_0) = 0$;
3. елиптнично, ако $D(x_0, y_0) < 0$.

В нашия случай ще имаме, че $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}$ и $D(x, y) = 0 - 1.(-4) = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично в цялата равнина.

Уравнението на характеристиките на даденото уравнение от условието има вида:

$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)(dx)^2 = 0$, където
$a(x, y) = 1, b(x, y) = 0, c(x, y) = -4$.

$(dy)^2 - 4(dx)^2 = 0 \qquad (dy - 2dx)(dy + 2dx) = 0$

От $dy - 2dx = 0 \Rightarrow d(y - 2x) = 0 \Rightarrow y - 2x = c_1 \Rightarrow y = 2x + c_1$;
От $dy + 2dx = 0 \Rightarrow d(y + 2x) \Rightarrow y + 2x = c_2 \Rightarrow y = -2x + c_2$

Следователно характеристичните криви на уравнението са:
$y = 2x + c_1, \ y = -2x + c_2$, където $c_1, c_2 - const$.