Задача 12. Решете уравнението

$$y''' - 3y'' + 2y' = 4x - 6.$$

Решение:

Всички решения ще намерим като съберем общото решение $y_0(x)$с едно частно решение $z(x)$. Характеристичния полином на хомогенната част на уравнението има вида: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$. Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

ФСР:= $\{1, e^x, e^{2x}\}$, от където намираме общото решение$y_0(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x}$.

За частно решение може да подходим по следния начин:
$f(x) = 4x - 6 = Q_m(x) \,.\, e^{\gamma x} \Rightarrow m = 1, \gamma = 0$, като γ е еднократен корен на характеристичния полином на хомогенната част, откъдето следва, че $s = 1$, където $z(x) = x^s \,.\, R_m(x) \,.\, e^{\gamma x} = xR_1(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx$. Заместваме с получения вид на частно решение в уравнението и получаваме, че
$z'''(x) - 3z''(x) + 2z'(x) = 0 - 6a + 4ax + 2b = 4x - 6 \Rightarrow (4x - 6)(a - 1) = 2b.$
Лесно се вижда, че за да е изпълнено последното равенството за произволно x е необходимо $a = 1$ и $b = 0$. Следователно решенията са
$y(x) = y_0(x) + z(x) = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} + x^2.$

Забележка: за да е пълно решението е необходимо да докажем, че общото и частното решение са ЛНЗ, което става като докажем, че детерминантата на Вронски не се нулира, което е очевидно, тъй като имаме квадратна функция и експоненциална.

<u>Втори начин:</u>

Търсим частно решение на даденото уравнение от вида:
$z(x) = b_1(x) + b_2(x)e^x + b_3(x)e^{2x}$

$y_1 = 1; \quad y_2 = e^x; \quad y_3 = e^{2x} \qquad y_1(x)b_1'(x) + y_2(x)b_2'(x) + y_3(x)b_3'(x) = 0$

$y_1' = 0; \quad y_2' = e^x; \quad y_3' = 2e^{2x} \qquad y_1'(x)b_1'(x) + y_2'(x)b_2'(x) + y_3'(x)b_3'(x) = 0$

$y_1'' = 0; \quad y_2'' = e^x; \quad y_3'' = 4e^{2x} \qquad y_1(x)b_1''(x) + y_2(x)b_2''(x) + y_3(x)b_3''(x) = 4x - 6$

$\Rightarrow b_1' + e^x b_2' + e^{2x} b_3' = 0$

$e^x b_2' + 2e^{2x} b_3'(x) = 0 \Rightarrow e^x b_2'(x) = -2e^{2x} b_3'(x) \Big| : e^x \Rightarrow b_2'(x) = -2e^x b_3'(x)$

$e^x b_2'(x) + 4e^{2x} b_3'(x) = 4x - 6; \; -2e^{2x} b_3'(x) + 4e^{2x} b_3'(x) = 4x - 6 \Big| : 2;$

$e^{2x} b_3'(x) = 2x - 3; \qquad b_3' = \dfrac{2x - 3}{e^{2x}} = (2x - 3)e^{-2x} \Rightarrow b_3(x) = -(x - 1)e^{-2x} + c_4$

$b_2'(x) = -2e^x(2x - 3)e^{-2x} = -2(2x - 3)e^{-x}$

$\Rightarrow b_2(x) = \displaystyle\int -2(2x - 3)e^{-x} dx = (4x - 2)e^{-x} + c_5$

$b_1'(x) = 4x + 6 + 2x - 3 = 0;$

$b_1'(x) = 2x - 3 \Rightarrow b_1(x) = \int (2x-3)dx - x^2 - 3x + c_6$. Нека $c_6 = c_5 = c_4 = 0$

$\Rightarrow z(x) = x^2 - 3x + (4x-2)e^{-x}e^x - (x-1)e^{-2x}\,.\,e^{2x} = x^2 - 3x + 4x - 2 - x + 1 = x^2 - 1$

$\Rightarrow y(x) = y_0(x) + z(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + x^2 - 1.$