

1 Фазови портрети на нелинейни автономни системи в равнината. Векторни полета. Устойчивост по линейно приближение. Движение на точка по фазова крива.

Нека точката $(a, b) \in D$ е равновесна точка на автономната система

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases} \quad (1)$$

където $f, g \in C^1(D)$, а D е област в равнината.

Следователно $f(a, b) = 0, g(a, b) = 0$.

Дефиниция 1.1 Казваме, че (a, b) е устойчиво положение на равновесие на автономната система (1), ако за всяка околност $U \subseteq D$ на (a, b) съществува такава околност $V \subseteq U$ на (a, b) , че решението $(\varphi(t), \psi(t))$, удовлетворяващо началното условие $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) = (x_0, y_0) \in V$, има свойствата:

1. Решението $(\varphi(t), \psi(t))$ е дефинирано за всички $t \geq t_0$.
2. Решението остава в V при $t \geq t_0$, т.е. $(\varphi(t), \psi(t)) \in V$ за всяко $t \geq t_0$.

Положението на равновесие се нарича асимптотично устойчиво, ако е устойчиво и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\varphi(t), \psi(t)) = (a, b).$$

Дефиниция 1.2 Линейно (първо) приближение на системата (1) в околност на нейната равновесна точка (a, b) наричаме системата

$$\begin{cases} \dot{x} = f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b), \\ \dot{y} = g_x(a, b)(x - a) + g_y(a, b)(y - b). \end{cases}$$

Ако въведем означението

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{pmatrix},$$

първото приближение може да бъде записано във вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}.$$

- Ако всички собствени стойности на матрицата $J(a, b)$ са с отрицателни реални части, то равновесната точка (a, b) на системата (1) е асимптотично устойчива.
- Ако съществува собствена стойност на матрицата $J(a, b)$ с положителна реална част, то равновесната точка (a, b) на системата (1) е неустойчива.

Задача 1. Дадена е системата

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \sin(x + y). \end{cases}$$

1. Намерете равновесните точки на системата и ги изследвайте за устойчивост.
2. Начертайте фазов портрет на системата в правоъгълник, който съдържа три от равновесните точки
3. Намерете първото приближение на системата в околност на някоя изобразените от равновесните точки и начертайте фазов портрет на полученото линейно приближение.

Решение.

1.) Равновесните точки са решения на системата

$$\begin{cases} y = 0, \\ \sin(x + y) = 0. \end{cases}$$

Следователно равновесните точки на системата са $(a_k, b_k) = (k\pi, 0)$, където k е цяло число.

2.) Matlab кодът е след точка 3.

3.) В дадената система $f(x, y) = y$, $g(x, y) = \sin(x + y)$ и следователно $f_x = 0$, $f_y = 1$, $g_x = g_y = \cos(x + y)$. така получаваме

$$J(a_k, b_k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \cos k\pi & \cos k\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (-1)^k & (-1)^k \end{pmatrix}.$$

Следователно линейното приближение на системата в околност на равновесната точка $(a_k, b_k) = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$ е

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = (-1)^k(x - k\pi) + (-1)^k y. \end{cases}$$

Да намерим собствените стойности на матрицата $J(k\pi, 0)$. Ще разгледаме два случая

i) k е четно число

Тогава

$$J(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и има характеристичен полином

$$P_J = -\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1,$$

който има корени $\lambda_1 = (1 - \sqrt{5})/2 < 0$ и $\lambda_2 = (1 + \sqrt{5})/2 > 0$. Следователно тези равновесни точки на дадената система са неустойчиви.

ii) k е нечетно число

Тогава

$$J(k\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

и има характеристичен полином

$$P_J = -\lambda(-1 - \lambda) + 1 = \lambda^2 + \lambda + 1,$$

който има корени $\lambda_1 = (-1 - i\sqrt{3})/2$ и $\lambda_2 = (-1 + i\sqrt{3})/2 > 0$. $Re(\lambda_{1,2}) < 0$ и следователно тези равновесни точки на дадената система са асимптотично устойчиви.

```
function nonlinearphaseportrait2020

clear ;
clf;
tmax=5;

function z=ff(t,y)
    z=[y(2); sin(y(1)+y(2))];
end

k=1;

A=[0,1;(-1)^k,(-1)^k]; ak=k*pi;bk=0;

function u=fl(t,y)
    u=A*(y-[ak;bk]);
end

d=5;s=1;
x=ak-d:s:ak+d;
y=bk-d:s:bk+d;

% chertane na fazovia portret
[X,Y]=meshgrid(x,y);

for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        [T,Z]=ode45(@fl,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
        [T1,Z1]=ode45(@fl,[0,-tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
        [T2,Z2]=ode45(@ff,[0,tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);
        [T3,Z3]=ode45(@ff,[0,-tmax],[X(i,j),Y(i,j)]);

        subplot(2,1,2)
        title('Linearization')
        hold on
        plot(ak,bk,'r*')
        axis([ak-d-1, ak+d+1,bk-d-1,bk+d+1]);
        plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2),'b')
        xlabel('x')
        ylabel('y')
```

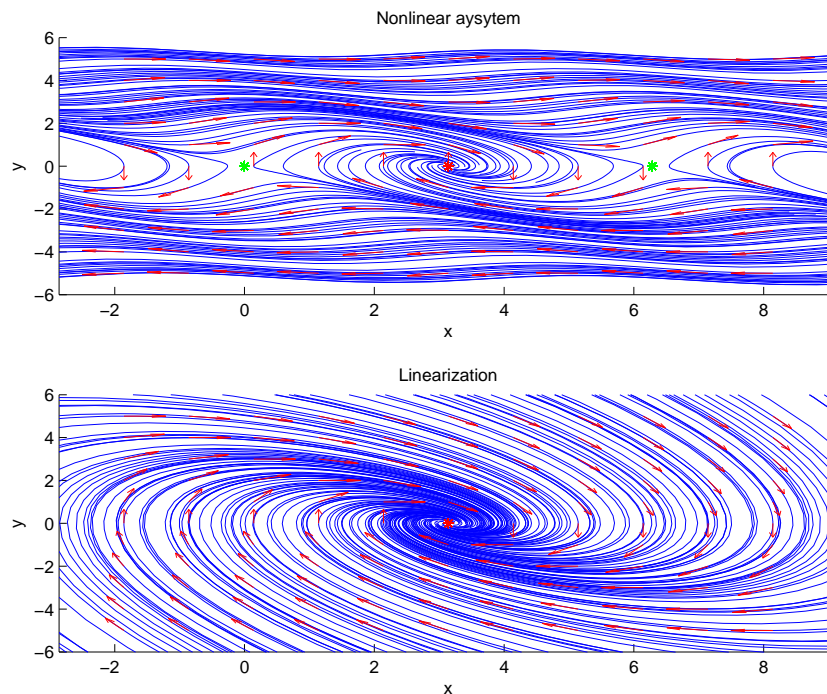
```

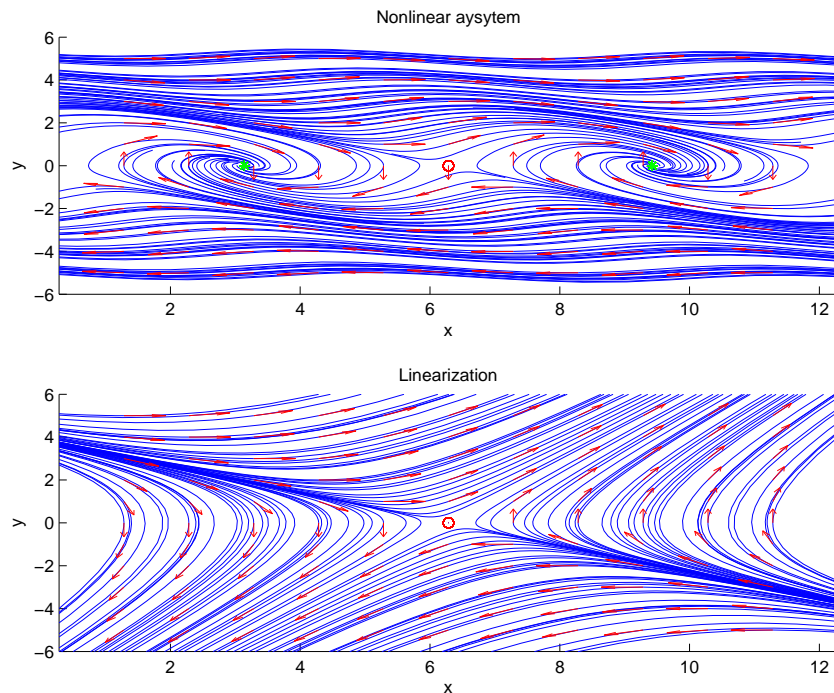
subplot(2,1,1) title('Nonlinear aysytem')
hold on
plot(ak,bk,'r*',ak-pi,bk,'g*',ak+pi,bk,'g*')
plot(Z2(:,1),Z2(:,2),Z3(:,1),Z3(:,2),'b')
axis([ak-d-1,ak+d+1,bk-d-1,bk+d+1])
xlabel('x')
ylabel('y')
end
end
% chertane na vektornite ploeta
DX=Y; DY=sin(X+Y);
d=sqrt(DX.^2+DY.^2);
subplot(2,1,1)
quiver(X,Y,DX./d,DY./d,0.5,'r')

DXL=A(1,1)*(X-ak)+ A(1,2)*(Y-bk);
DYL= A(2,1)*(X-ak)+ A(2,2)*(Y-bk);
dL=sqrt(DXL.^2+DYL.^2);
subplot(2,1,2)
quiver(X,Y,DXL./dL,DYL./dL,0.5,'r')

saveas(gcf,'fig1.png')
end

```





Задача 2. Разглеждаме системата на Лотка-Волтера

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy, \\ \dot{y} = -cy + dxy, \end{cases}$$

където a, b, c, d са положителни константи.

Системата описва динамиката в популации от хищници и жертви, които съжителстват на определена територия. Предполага се, че хищниците се хранят само с индивиди от жертвите, а жертвите разполагат с неограничен хранителен ресурс. С $x(t) \geq 0$ и $y(t) \geq 0$ са означени съответно броя жертви и броя хищници в момента t .

1. Намерете равновесните точки на системата
2. При $a = 1, b = 0.3, c = 1, d = 0.2$ начертайте векторно поле на система в правоъгълник, който съдържа намерените равновесни точки. С негова помощ изследвайте равновесните точки за устойчивост.
3. Направете анимация на движението на точката $(x(t), y(t))$ от фазовата крива на системата, минаваща при $t = 0$ през точката (x_0, y_0) , въведена с кликуване с мишката или пък задайте конкретна точка.

Решение. Равновесните точки са решения на системата

$$\begin{cases} ax - bxy = 0, \\ -cy + dxy = 0. \end{cases}$$

Следователно системата има две равновесни точки $(0, 0)$ и $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$.

```

function phasemovie
clear;
tmax=10;
a=1;b=0.3;c=1;d=0.2;
x=-1:0.5:c/d+15;
y=-1:0.5:a/b+10;

axis([-1,c/d+15,-1,a/b+10])
hold on
plot(0,0,'m* ',c/d,a/b,'m* ')
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Dx=a*X-b*X.*Y;
Dy=-c*Y+d*X.*Y;
D=sqrt(Dx.^2+Dy.^2);
quiver(X,Y,Dx./D,Dy./D,0.5,'k')

[x0,y0]=ginput(1);
plot(x0,y0,'go') xlabel('x') ylabel('y')

[T,Y]=ode45(@ff,[0,tmax],[x0;y0]);
for k=1:length(T)
    plot(Y(1:k,1),Y(1:k,2),'r');

    M(k)=getframe;
end

function z=ff(t,y)
    z=[a*y(1)-b*y(1)*y(2);-c*y(2)+d*y(1)*y(2)]
end

end

```

От начертаното векторно поле се вижда, че равновесната точка $(0, 0)$ е нулестойчива, а равновесната точка $(\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ е устойчива, но не е асимптотично устойчива.

