Факултет по математика и информатика, СУ
„Св. Климент Охридски“

ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър, учебна година 2019/2020

Тема № 41

XX.XX.XXXX г.
гр. София

Изготвил: XXXXX XXXXX
група X, ф.н. XXXX

Оценка:............................

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта.

Тема СИ20-П-41. Разпределението на топлината в тънък хомогенен прът се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_t = c^2 u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < 3\pi \\ u|_{t=0} = \begin{cases} 20sin(x) - 18sin\frac{x}{2}, & x \in [7{,}8] \\ 0, & x \in [0{,}7) \cup (8{,}3\pi], \end{cases} \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=3\pi} = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.
2. Намерете явен вид на решението и начертайте
   - в един прозорец графиките на разпределението на температурата в пръта в моментите $t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, при $c = 0{,}2$.
   - в друг прозорец графиките на разпределението на температурата в пръта в моменти когато $c = 0{,}4$. Означете коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задачата

2.1. Теоритична част:

Ще използваме метода на Фурие:
Търсим решения от вида $u(x,t) = X(x)T(t)$, които са тъждествено равни на 0.

$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t) \Rightarrow u_t(x,t) = X(x)T'(t)$, т.е. всяко събираемо иска да

удовлетворява уравнението и ще има посочения вид и

$u_{xx} = X''(x)T(t) \Rightarrow$ от условието $u_t = c^2 u_{xx} \Rightarrow X(x)T'(t) = c^2 X''(x)T(t) \Rightarrow$

$\dfrac{T'(t)}{c^2 T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, където $-\lambda$ е произволна константа.

Получаваме следните диференциални уравнения $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T'(t) + c^2 \lambda T(t) = 0 \end{cases}$.

Използваме граничните условия:

$u|_{x=0} = X(0)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0$
$u_x|_{x=3\pi} = X'(2\pi)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X'(3\pi) = 0$

За $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 \le x \le \pi \\ X(0) = 0 \\ X(3\pi) = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Ще търсим нетривиални решения на

уравнението. Характеристичния му полином е
$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda$.

I сл. $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} \Rightarrow$ ФСР:$= \left\{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\right\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow X'(x) = \sqrt{-\lambda}(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}) \Rightarrow$

$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2;$

$X'(3\pi) = \sqrt{-\lambda}\left(c_1 e^{\sqrt{-\lambda}3\pi} - e_2 e^{-\sqrt{-\lambda}3\pi}\right) = \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\neq 0}\, c_1 \big(\underbrace{e^{\sqrt{-\lambda}3\pi} + e^{-\sqrt{-\lambda}3\pi}}_{\neq 0}\big)$

$\Rightarrow c_1 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$

II сл. $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0 \Rightarrow$ ФСР:= $\{1, x\} \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow X'(x) = c_2 \Rightarrow$

$X(0) = c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$; $X'(3\pi) = c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0.$

III сл. $\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C} \Rightarrow$ ФСР:= $\left\{cos(\sqrt{\lambda}x),\, sin(\sqrt{\lambda}x)\right\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = \sqrt{\lambda}\big(-c_1 sin(\sqrt{\lambda}x) + c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)\big) \Rightarrow$

$X(0) = c_1 = 0;$

$X'(3\pi) = \sqrt{\lambda} c_2 cos(\sqrt{\lambda}3\pi)$. От тук следва, че имаме следните два случая:

1.) $c_2 = 0 \Rightarrow$ имаме отново тривиалното нулево решение $X(x) \equiv 0$

2.) $cos(\sqrt{\lambda}3\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}3\pi = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ \ k = 0,1,\ldots \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \dfrac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{3\pi} \Rightarrow$

$\lambda_k = \left(\sqrt{2k+1}6\right)^2,\ \ k = 0,1,\ldots$ (собствени стойности)

$sin\left(\dfrac{(2k+1)x}{6}\right)$ - собствени функции и $X(x) = c_2 sin\left(\dfrac{(2k+1)x}{6}\right)$ са

всички решения на задачата на Щурм-Лиувил.

Решаваме уравнението за $T(t)$ при $\lambda = \lambda_k$:

$T_k'(t) + c^2 \lambda_k T_k(t) = 0 \longrightarrow T(t) = \pm\, c_1 e^{-\lambda_k c^2 t} \Rightarrow T_k(t) = A_k e^{-\left(\frac{2k+1}{6}\right)^2 c^2 t}$, A_k е произволна константа ⇒ Така получаваме за решението на дадената задача:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k e^{-\left(\frac{2k+1}{6}c\right)^2 t} sin\left(\frac{2k+1}{6}x\right). \quad u(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k sin\left(\frac{2k+1}{6}x\right).$$

$A_k=\dfrac{2}{3\pi}\displaystyle\int_0^{3\pi}\varphi(x) sin\left(\frac{2k+1}{6}x\right)dx$, където

$$\varphi(x)=\begin{cases}20 sin x-18 sin\frac{x}{2}, & x\in[7,8]\\ 0, & x\in[0,7)\cup[(8,3\pi]\end{cases}.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function fourieThermalConductivityEquation41
clf; clc
        a=0.2;
        L=3*pi;
        tmax=2;

        x=0:L/100:L;
        t=0:tmax/50:tmax;

        function y=phi(x)
                for i=1:length(x)
                        if x(i)>=7 && x(i)<=8
                                y(i)=20*sin(x(i))-18*sin(x(i)/2);
                        else
                                y(i)=0;
                        end
                end
        end

        function y=psi(x)
                for i=1:length(x)
                        y(i)=sin(2*pi*x(i));
                end
        end

        function y=u(x,t)
                y=0;
                for k=0:13
                        Xk=sin(((2*k+1)*x)/6);
                        Ak=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
                        Tk=Ak*exp(-(a*(2*k+1)/6).^2*t);
                        y=y+Tk*Xk;
                end
        end

        for n=1:length(t)
                plot(x, u(x,t(n)), 'r', 'LineWidth', 2);
                axis([0, L, -30, 30]);
                grid on;
                M(n)=getframe;
        end
        subplot(3,1,1);
```

```
        plot(x,u(x,0), 'r', 'LineWidth', 2);
        axis([0, L, -30, 30]);
        title('t=0');
        grid on;

        subplot(3,1,2);
        plot(x,u(x,6), 'r', 'LineWidth', 2);
        axis([0, L, -30, 30]);
        title('t=1');
        grid on;

        subplot(3,1,3);
        plot(x,u(x,3/2), 'r', 'LineWidth', 2);
        axis([0, L, -30, 30]);
        title('t=1.5');
        grid on;
end
```

2.3. Графики (включително от анимация)