Задача 6. Приложете теоремата за съществуване и единственост в правоъгълник $\Pi := \{\,|x| \le 2,\ |y| \le 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = y^2 - x - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

От $|x| \le 2$ и $|y| \le 1 \Rightarrow a = 2$ и $b = 1$. От $f(x, y) = y^2 - x - 1$ е непрекъсната в компакта $\Pi \Rightarrow$ е ограничена в него.
Намираме $f'_x = 2y$ и f'_y съществува и е непрекъсната в $\Pi \Rightarrow f$ е липшицова по y в Π.
От $f \in C(\Pi)$ и f е липшицова (от f'_y) $\Rightarrow$ притежава единствено решение. Тъй като $f'_x = 0$ и f'_y не е изпълнено, заключаваме, че $f_{max}(x, y)$ се намира по периферията на компакта Π.
При $x = 2 \Rightarrow f(2,y) = y^2 - 3, \quad min = -3, max = -2$
При $x = -2 \Rightarrow f(-2,y) = y^2 + 1, \quad min = 1, max = 2$
При $y = 1 \Rightarrow f(x,1) = -x, \quad min = -2, max = 2$
При $y = -1 \Rightarrow f(x,-1) = -x, \quad min = -2, max = 2$
$\Rightarrow h = min\{a, \frac{M}{b}\} = min\{2, \frac{1}{2}\} = \frac{1}{2}$. Следователно съществува решение при
$x \in \{x_0 - \frac{1}{2}, x_0 + \frac{1}{2}\} \equiv \{0 - \frac{1}{2}, 0 + \frac{1}{2}\} \equiv \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.