1 Линейни диференциални уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули.

Линейни диференциални уравнения от първи ред наричаме уравнения от вида

$$y' = a(x)y + b(x), \tag{1}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал $\Delta := (\alpha, \beta)$.

1.1 Линейни уравнения. Общо решение.

Нека $y \in C^1(\Delta)$. Тогава

$$\left(e^{-\int a(x)\,dx}y(x)\right)' = e^{-\int a(x)\,dx}[y'(x) - a(x)y(x)].$$

Следователно, ако умножим (1) с $e^{-\int a(x)\,dx}$ ще получим

$$e^{-\int a(x)\,dx}[y'(x) - a(x)y(x)] = e^{-\int a(x)\,dx}b(x),$$

тоест

$$\left(e^{-\int a(x)\,dx}y(x)\right)' = e^{-\int a(x)\,dx}b(x).$$

Сега едно интегриране ни дава

$$e^{-\int a(x)\,dx}y(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx + C,$$

т.е.

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right). \tag{2}$$

Формула (2) ни дава общото решение на уравнение (1). Това може да се провери непосредствено. Наистина, непосредственето диференциране в (2) ни дава

$$y'(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left[a(x)\left(C + \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right) + b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\right] = a(x)y + b(x).$$

Пример 1.1 *Решете уравнението*

$$y' = -2xy + 3x^2e^{-x^2}.$$

Отговор: $y(x) = e^{-x^2}(c + x^3)$.

1.2 Задача на Коши за линейни уравнения.

Теорема 1.2 *Нека $a, b \in C^1(\Delta)$, $x_0 \in \Delta$ и $y_0 \in \mathbb{R}$. Тогава същедтвува единствено решение на задачата на Коши*

$$y' = a(x)y + b(x),\ y(x_0) = y_0$$

и това решение е дефинирано в целия интервал Δ.

Доказателство.

i.) *Единственост.*

Нека $y(x) \in C^1(\Delta)$ е едно произволно решение на задачта на Коши. Тогава за $s \in \Delta$ имаме

$$y'(s) = a(s)y(s) + b(s)$$

и

$$\left(e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} y(s)\right)' = e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}[y'(s) - a(s)y(s)].$$

Следователно, ако умножим (1) с $e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}$ ще получим

$$e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}[y'(s) - a(s)y(s)] = e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} b(s),$$

тоест

$$\left(e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt} y(s)\right)' = b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}.$$

Сега едно интегриране от x_0 до $x \in \Delta$ ни дава

$$e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds} y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\,ds,$$

т.е.

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\,ds\right). \tag{3}$$

$y(x)$ беше произволно избрано. Следователно всяко решение на разглежданата задача на Коши се изразява чрез $a(x)$, $b(x)$, x_0 и y_0 посредством формулта (3). Това доказва единствеността.

ii.) *Съществуване.*

Нека $y(x)$ е функция, дефинирана чрез формулата (3). Ще покажем, че тя е решение на задачата на Коши. Очевидно $y(x_0) = y_0$. Остава да проверим, че $y(x)$ е решение на уравнението (1). Диференцираме (3) и получаваме

$$y'(x) = e^{\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}\left[a(x)\left(y_0 + \int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(t)\,dt}\,ds\right) + b(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(s)\,ds}\right] = a(x)y + b(x).$$

Доказателството е завършено. □

1.3 Уравнения на Булнули.

Уравнения от вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \tag{4}$$

където $a(x)$ и $b(x)$ са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал $\Delta := (\alpha, \beta)$, а $n \neq 0, 1$ се наричат уравнения на Бурнули.

При $n = 0$ уравнението (4) е линейно, а при $n = 1$ е уравнение с разделящи се променливи, което е и линейно.

Ако $n > 0$, то $y(x) \equiv 0$ е решение на уравнението (4).

Решенията, които не се анулират в интервала Δ се намират лесно. Разделяме (4) с y^n и получаваме

$$\frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x).$$

Сега полагаме $z(x) = y^{1-n}(x)$ и доситгаме до линейното уравнение

$$z' = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x).$$

Решаваме го и се връщаме към старите променливи.

Забележка 1.3 *Направените разсъждения показват, че задачата на Коши за уравнението на Бернули с начално условие $y(x_0) = y_0 > 0$ винаги притежава единствено решение. Случаят $y \leq 0$ е по-деликатен и възникват различни възможности. Например, ако n е ирационално число и $y < 0$, тази задача очевидно няма решение, защото функцията t^n е дефинирана само за положителни стойности на t.*

Пример 1.4 *Решете уравнението*

$$xy' = 2x^3\sqrt{y} + 4y.$$

Общоото решение е $y(x) = x^4(c+x)^2$. Тъй като $\sqrt{y} = x^2(c+x) \geq 0$, то $x \geq -c$. Ако додефинираме $y(x)$ като 0 за $x < -c$, то ще получим ли решение на уравнението, дефинирано върху цялата реална права?