Факултет по математика и информатика, СУ
„Св. Климент Охридски“

ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър, учебна година 2019/2020

Тема № 12

XX.XX.XXXX г.

гр. София

Изготвил: XXXXX XXXXX

група X, ф.н.   XXXX

Оценка:............................

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта.

Тема СИ20-П-12. Движението на полуограничена струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y\,. \end{cases}$$

1. Намерете нейните равновесни точки. Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.
2. Начертайте фазов портрет на написаната линейна система в подточка (1). Към всяка една от изобразените фазови криви (бе равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

2. Решение на задачата
2.1. Теоритична част

Дадената система не е линейна, но е автономна, тъй като не зависи от t. Равновесните ѝ точки са там където скоростите се нулират, това са решенията на системата:

$$\begin{cases} x - x^3 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ \ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$x_2 = 1,\ x_3 = -1$. Следователно равновесните точки на дадената система са: $(0;\ 0),\ (1;\ 0),\ (-1;\ 0)$.

Линейното (първо) приближение на дадената система в околност на равновесната точка (a, b) е системата:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a,b)\begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}, \text{ където } J(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix} \text{ и}$$

$f(x,y) = x - x^3,\ \ g(x,y) = -y$. Следователно:

$f'_x = 1 - 3x^2; \quad f'_y = 0$
$g'_x = 0; \quad g'_y = -1$

Т.е. $J(x, y) - \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

1.) В околност на равновесната точка $(1;\ 0)$:

$J(1;\ 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, следователно линейното приближение на дадената система в околност на тази равновесна точка е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \dot{x} = -2(x-1) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

Аналогизно може да намерим и линейното приближение на системата в околност на останалите равновесни точки.

2.) В околност на равновесната точка $(0\ 0)$:

$J(0;\ 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, следователно линейното приближение на дадената система в околност на тази равновесна точка е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

3.) В околност на равновесната точка $(-1;\ 0)$:

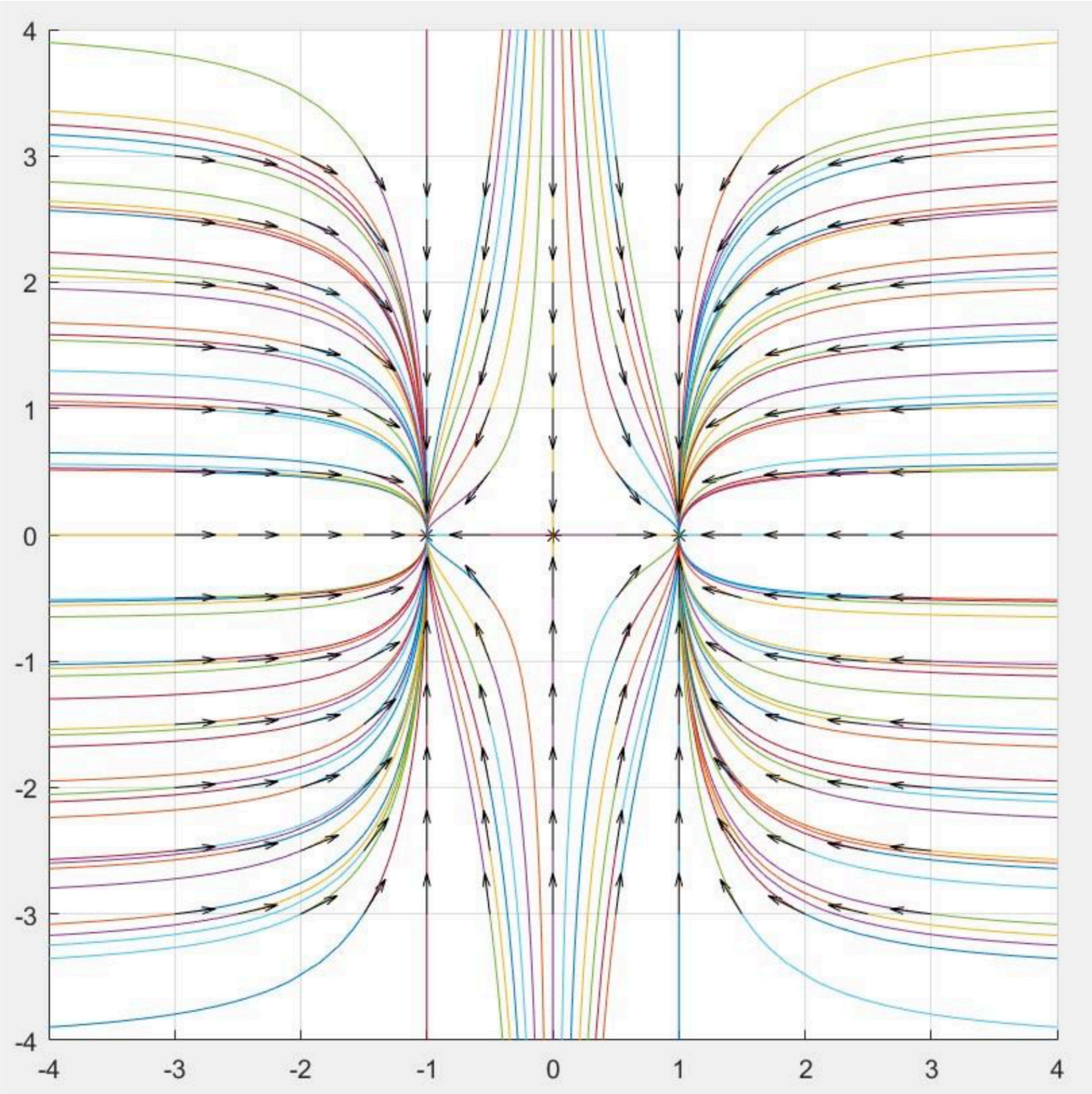
$$J(-1;\ 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x - 2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function phasePortrait12
        function z=ff(t,y)
                z=[y(1)-y(1)^3; -y(2)];
        end
clf; clc
tmax=5;
hold on
grid on
daspect([1 1 1])

% можем да изобразим повече фазови криви като намалим стъпката
x=-3:0.5:3;
y=-3:0.5:3;

[X,Y]=meshgrid(x,y);
% чертаем равновесните точки на системата
plot(0, 0, 'k*', -1, 0, 'k*', 1, 0, 'k*')

% чертаем фазов портрет
for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
                [T,Z]=ode45(@ff, [0, tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
                [T1,Z1]=ode45(@ff, [0, -tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

                plot(Z(:,1), Z(:,2), Z1(:, 1), Z1(:, 2))
                axis([-4, 4, -4, 4])
         end
end

% тангенциални вектори:
DX=X - X.^3;
DY=-Y;

% чертаем ненормирани тангенциални вектори
% quiver(X, Y, DX, DY, 1.5, 'k');

% нормираме тангенциалните вектори
D=sqrt(DX.^2+DY.^2);

% чертаем нормираните тангенциални вектори
quiver(X, Y, DX./D, DY./D, 0.5, 'k')
end
```

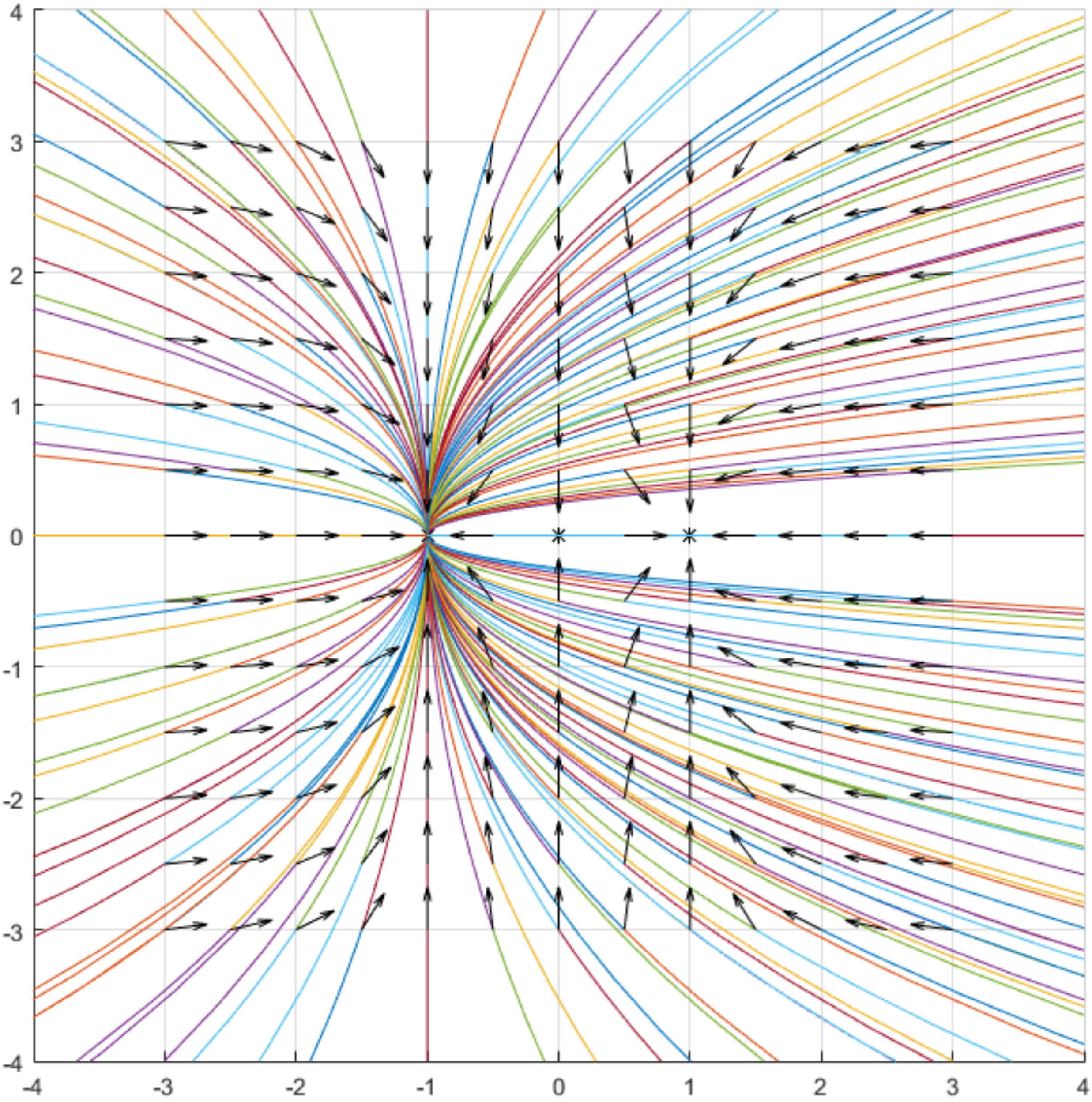
2.3. Графики

а) Фазов портрет и нормирани тангенциални вектори



Избираме си точката $(-1;\ 0)$. Ще начертаем фазовия портрет на линейното и приближение. За целта трябва само да променим кода на функцията z=ff(t, y) по следния начин:

```
function z=ff(t, y)
        z=[-2*y(1)-2; -y(2)];
end
```



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати:

От получения чертеж забелязваме, че фазовите криви при $x < -1$ и $x > 1$ са параболи. Освен това, равновесните точки $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ са асимптотично устойчиви - и двете точки са пример за устойчив възел. Точката $(0;\ 0)$ е неустойчива и се нарича седло. Това може да покажем и със следните изчисления:

1. За равновесните токи $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$:

$J(-1,0) = J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Следователно трябва да пресметнем:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$(2+\lambda)(1+\lambda) = 0; \quad \lambda_1 = -2 < 0; \qquad \lambda_2 = -1 < 0$

Следователно $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ са асимптотично устойчиви положения на равновесие. Както $(-1;\ 0)$, така и $(1;\ 0)$ е устойчив възел.

2. За равновесната точка $(0;\ 0)$

$$J(0,0) = J(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(1-\lambda)(-1-\lambda) = 0$

$(1-\lambda)(1+\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1 > 0; \quad \lambda_2 = -1 < 0$

Следователно $(0;\ 0)$ е неустойчиво положение на равновесие и се нарича седло.