Задача 11. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = 2xy + 4x^3 - 2x^5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Уравнение от първи ред с начално условие.

$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)$, където $a(x) = 2x$ и $b(x) = 4x^3 - 2x^5$.

$\int a(x)dx = \int 2xdx = x^2$;

$$\int b(x)e^{-x^2}dx = \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int -2x^5e^{-x^2} = \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int -2x\,.\,x^4e^{-x^2}dx \underbrace{=}_{de^{-x^2}=-2xe^{-x^2}dx}$$

$$= \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int x^4de^{-x^2} = \int 4x^3e^{-x^2}dx + x^4e^{-x^2} - \int e^{-x^2}dx^4 = \cancel{\int 4x^3e^{-x^2}dx} + x^4e^{-x^2} - \cancel{\int 4x^3e^{-x^2}dx} =$$

$= x^4e^{-x^2}$. Следователно $y(x) = e^{x^2}\left(c + x^4e^{-x^2}\right) = ce^{x^2} + x^4$.

От началното условие намираме, че $y(0) = c = 1 \Rightarrow y(x) = e^{x^2} + x^4$.