

# 1 Линейни диференциални уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули.

Линейни диференциални уравнения от първи ред наричаме уравнения от вида

$$y' = a(x)y + b(x), \quad (1)$$

където  $a(x)$  и  $b(x)$  са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал  $\Delta := (\alpha, \beta)$ .

## 1.1 Линейни уравнения. Общо решение.

Нека  $y \in C^1(\Delta)$ . Тогава

$$\left( e^{-\int a(x) dx} y(x) \right)' = e^{-\int a(x) dx} [y'(x) - a(x)y(x)].$$

Следователно, ако умножим (1) с  $e^{-\int a(x) dx}$  ще получим

$$e^{-\int a(x) dx} [y'(x) - a(x)y(x)] = e^{-\int a(x) dx} b(x),$$

тоест

$$\left( e^{-\int a(x) dx} y(x) \right)' = e^{-\int a(x) dx} b(x).$$

Сега едно интегриране ни дава

$$e^{-\int a(x) dx} y(x) = \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx + C,$$

т.е.

$$y(x) = e^{\int a(x) dx} \left( C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right). \quad (2)$$

Формула (2) ни дава общото решение на уравнение (1). Това може да се провери непосредствено. Наистина, непосредственото диференциране в (2) ни дава

$$y'(x) = e^{\int a(x) dx} \left[ a(x) \left( C + \int b(x) e^{-\int a(x) dx} dx \right) + b(x) e^{-\int a(x) dx} \right] = a(x)y + b(x).$$

**Пример 1.1** Решете уравнението

$$y' = -2xy + 3x^2 e^{-x^2}.$$

Отговор:  $y(x) = e^{-x^2} (c + x^3)$ .

## 1.2 Задача на Коши за линейни уравнения.

**Теорема 1.2** Нека  $a, b \in C^1(\Delta)$ ,  $x_0 \in \Delta$  и  $y_0 \in \mathbb{R}$ . Тогава съществува единствено решение на задачата на Коши

$$y' = a(x)y + b(x), \quad y(x_0) = y_0$$

и това решение е дефинирано в целия интервал  $\Delta$ .

**Доказателство.**

*i.) Единственост.*

Нека  $y(x) \in C^1(\Delta)$  е едно произволно решение на задачата на Коши. Тогава за  $s \in \Delta$  имаме

$$y'(s) = a(s)y(s) + b(s)$$

и

$$\left( e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} y(s) \right)' = e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} [y'(s) - a(s)y(s)].$$

Следователно, ако умножим (1) с  $e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt}$  ще получим

$$e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} [y'(s) - a(s)y(s)] = e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} b(s),$$

т.е.

$$\left( e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} y(s) \right)' = b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt}.$$

Сега едно интегриране от  $x_0$  до  $x \in \Delta$  ни дава

$$e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} y(x) - y(x_0) = \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds,$$

т.е.

$$y(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \left( y_0 + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds \right). \quad (3)$$

$y(x)$  беше произволно избрано. Следователно всяко решение на разглежданата задача на Коши се изразява чрез  $a(x)$ ,  $b(x)$ ,  $x_0$  и  $y_0$  посредством формулата (3). Това доказва единствеността.

*ii.) Съществуване.*

Нека  $y(x)$  е функция, дефинирана чрез формулата (3). Ще покажем, че тя е решение на задачата на Коши. Очевидно  $y(x_0) = y_0$ . Остава да проверим, че  $y(x)$  е решение на уравнението (1). Диференцираме (3) и получаваме

$$y'(x) = e^{\int_{x_0}^x a(s) ds} \left[ a(x) \left( y_0 + \int_{x_0}^x b(s) e^{-\int_{x_0}^s a(t) dt} ds \right) + b(x) e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \right] = a(x)y + b(x).$$

Доказателството е завършено. □

### 1.3 Уравнения на Булнули.

Уравнения от вида

$$y' = a(x)y + b(x)y^n, \quad (4)$$

където  $a(x)$  и  $b(x)$  са функции, дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал  $\Delta := (\alpha, \beta)$ , а  $n \neq 0, 1$  се наричат уравнения на Булнули.

При  $n = 0$  уравнението (4) е линейно, а при  $n = 1$  е уравнение с разделящи се променливи, което е и линейно.

Ако  $n > 0$ , то  $y(x) \equiv 0$  е решение на уравнението (4).

Решенията, които не се анулират в интервала  $\Delta$  се намират лесно. Разделяме (4) с  $y^n$  и получаваме

$$\frac{y'}{y^n} = a(x)y^{1-n} + b(x).$$

Сега полагаме  $z(x) = y^{1-n}(x)$  и доситгаме до линейното уравнение

$$z' = (1 - n)a(x)z + (1 - n)b(x).$$

Решаваме го и се връщаме към старите променливи.

**Забележка 1.3** *Направените разсъждения показват, че задачата на Коши за уравнението на Булнули с начално условие  $y(x_0) = y_0 > 0$  винаги притежава единствено решение. Случаят  $y \leq 0$  е по-деликатен и възникват различни възможности. Например, ако  $n$  е ирационално число и  $y < 0$ , тази задача очевидно няма решение, защото функцията  $t^n$  е дефинирана само за положителни стойности на  $t$ .*

**Пример 1.4** *Решете уравнението*

$$xy' = 2x^3\sqrt{y} + 4y.$$

Общоото решение е  $y(x) = x^4(c + x)^2$ . Тъй като  $\sqrt{y} = x^2(c + x) \geq 0$ , то  $x \geq -c$ . Ако додефинираме  $y(x)$  като 0 за  $x < -c$ , то ще получим ли решение на уравнението, дефинирано върху цялата реална права?