

Задача 1. Решете системата с метода на изключването

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Задача 2. Решете системата с метода на изключването

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y. \end{cases}$$

Задача 3. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$$

- а) Покажете, че функцията $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$ не зависи от t .
б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Задача 4. Намерете равновесните точки на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

В околност на всяка една от равновесните ѝ точки напишете съответното линейно линейно приближение на системата.

Задача 5. Определете типа на уравнението

$$u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - x^3u_x - 5y^2u_y = 0$$

във всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнението.

Задача 6. Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = 2 \sin x, \quad u_t(x, 0) = xe^x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Задача 7. Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = x^3, \quad u_t(x, 0) = x^2 \sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Задача 8. Намерете собствените стойности и собствените функции на задачата на Штурм-Лиувил

$$\left| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 5 \\ X(0) = 0, \quad X'(5) = 0. \end{array} \right.$$

За кои стойности на λ задачата няма други решения, освен $X(x) \equiv 0$?

Задача 9. Решете задачата на Штурм-Лиувил

$$\left| \begin{array}{l} y'' + 16\pi^2 y = 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ y(0) = 0, \quad y(\frac{1}{2}) = 0. \end{array} \right.$$

Задача 10. Решете задачата на Штурм-Лиувил

$$\left| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, \quad X(2) = 0, \end{array} \right.$$

където λ е реален параметър.

Задача 11. Решете смесената задача за уравнението на струната

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Задача 12. Решете смесената задача за уравнението на топлопроводността

$$\left| \begin{array}{l} u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$