Примерни задачи за тест по "Диференциални уравнения и приложения"
за спец. Софтуерно инженерство

Задача 1. Колко решения има задачата?

1.1. $\begin{cases} y' = (y+1)e^{x^2-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} (y')^2 + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} (y')^2 + xy' - y = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$

Задача 2. Дадено е уравнението

$$y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}. \tag{$*$}$$

1.) Намерете пресечната точка (a, b) на правите $l_1 : 4y - 2x - 6 = 0$ и $l_2 : x + y - 3 = 0$.
2.) Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(t) = y(t + a) - b$ след като направите смяна на променливите $x = t + a$, $y = z + b$ в уравнението (*)?

Задача 3. За уравнението

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2} \tag{$**$}$$

намерете частно решение от вида $y_1(x) = \frac{a}{x}$. Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(x)$ след полагане $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(**)$?

Задача 4. Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases},$$

където $a \in C(-3, 5)$. Проверете, че функцията

$$y(x) := e^{\int_1^x a(t)\,dt} \left(2 + \int_1^x t^2 e^{-\int_1^t a(s)\,ds}\,dt \right)$$

е решение да дадената задача на Коши в интервала $(-3, 5)$.

Задача 5. Сведете задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} y' = x^2 + y \\ y(1) = 2 \end{array} \right.$$

до интегрално уравнение. Намерете с метода на Пикар първите три последователни приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ на решението на задачата на Коши.

Задача 6. Приложете теоремата за съществуване и единственост в правоъгълник $\Pi := \{|x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\left| \begin{array}{l} y' = y^2 - x - 1 \\ y(0) = 0. \end{array} \right.$$

Задача 7. Намерете особените точки на уравнението

$$x(y'^2 + x) = 2yy'.$$

Има ли уравнението особени решения?

Задача 8. Дадено е уравнението

$$y'' + y' - y = 1.$$

а) Намерете общото решение на уравнениет.

б) Намерете всички решения на уравнениет, които са ограничени за $x \in [0, +\infty)$.

в) Намерете всички периодични решения на уравнението.

Задача 9. Дадено е уравнението

$$y'' + p\,y' + 4y = 0,$$

където p е реален параметър.

а) При какви стойности на p всички решения на уравнението са ограничени за $x \in (-\infty, +\infty)$?

б) При какви стойности на p всички решения на уравнението клонят към 0 при $x \to -\infty$?

в) При какви стойности на p уравнението има поне едно периодично решение, различно от $y(x) \equiv 0$?

Задача 10. Дадено е уравнението

$$(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0,\ x > 1.$$

а) Намерете две частни решения на уравнението от вида $y_1(x) = e^{ax}$ и $y_2(x) = bx + c$, $b \neq 0$.

б) Покажете, че намерените частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими в интервала $(1, +\infty)$.

в) Намерете общото решение на уравнението.

Задача 11. Решете задачата на Коши

$$\left|\begin{array}{l} y' = 2xy + 4x^3 - 2x^5 \\ y(0) = 1. \end{array}\right.$$

Задача 12. Решете уравнението

$$y''' - 3y'' + 2y' = 4x - 6.$$

Задача 13. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{array}\right.$$

а) Покажете, че функцията $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$ не зависи от t.

б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Задача 14. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

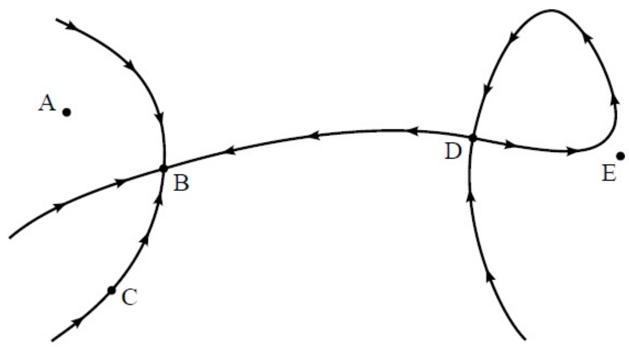
$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = x + 2y - e^t \\ \dot{y} = x - y \end{array}\right.$$

Намерете линейно диференциално уравнение, което се удовлетворява от функцията $y(t)$.

Задача 15. На чертежа са изобразени няколко фазови криви и всички равновесни точки на A, B, C, D и E на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y), \end{array}\right.$$

където $f,\ g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Колко са изобразените фазови криви? За кои от равновесните точки можем със сигурност да твърдим, че са неустойчиви? Кои от равновесните точки е възможно да са устойчиви?



Задача 16. Определете кои от следните системи са линейни, кои са нелинейни и кои са автономни.

$$(1)\ \begin{cases}\dot{x} = x + y - t\\ \dot{y} = x + y\end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases}\dot{x} = xy\\ \dot{y} = 3x + 2y + t^2\end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases}\dot{x} = x + y\\ \dot{y} = -x + 4y^2\end{cases}$$

$$(4)\ \begin{cases}\dot{x} = x - y\\ \dot{y} = -x + y\end{cases} \qquad (5)\ \begin{cases}\dot{x} = x - y + t\\ \dot{y} = x + y\end{cases} \qquad (6)\ \begin{cases}\dot{x} = x - 3y\\ \dot{y} = x - y\end{cases}$$

линейни	
нелинейни	
автономни	

Задача 17. Намерете равновесните точки на системата.

$$\begin{cases}\dot{x} = y^2 - 1\\ \dot{y} = x + y.\end{cases}$$

В околност на всяка една от равновесните точки напишете съответното линейно приближение на системата.

Задача 18. Намерете решението на задачата на Коши за уравнението на струната

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} = 4u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \\ u(x,0) = 2\sin x,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Задача 19. Намерете собствените стойности и собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил

$$\left| \begin{array}{l} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 5 \\ X(0) = 0,\ X'(5) = 0. \end{array} \right.$$

За кои стойности на λ задачата няма други решения, освен $X(x) \equiv 0$?

Задача 20. Решете смесената задача за уравнението на струната

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ \\ u(x,0) = \sin(3\pi x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t \ge 0. \end{array} \right.$$

Задача 21. Определете функцията $\varphi \in C^2(0,3)$ в смесената задача за уравнението на струната

$$\left| \begin{array}{l} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0 \\ \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3 \\ \\ u(0,t) = 0,\ u_x(3,t) = 0,\ t \ge 0, \end{array} \right.$$

така че решението й да бъде стояща вълна.

Задача 22. Определете типа на уравнението

$$u_{xx} - 4u_{yy} - x^3 u_x - 5y^2 u_y = 0$$

във всяка точка $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнението.

Задача 23. Кое е общото решение на уравнението $u_{xy} = 0$ в $\mathbb{R}^2$?