1 Уравнения от втори и по-висок ред, допускащи понижаване на реда.

Разглеждаме общия вид на ОДУ от ред $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

i) В уравнение от вида

$$F(x, y^{(k)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0,\ 1 \leq k \leq n$$

полагаме $z(x) = y^{(k)}(x)$ и получаваме уравнение от ред $n-k$ за $z(x)$:

$$F(x, z(x), z^{(1)}(x), \ldots, z^{(n-k)}(x)) = 0$$

След това интегрираме k пъте за да намерим $y(x)$.

Пример 1.1 *Решете уравнението*

$$xy'' = 2y' + x^3.$$

Полагае $z(x) = y'$ *и получаваме*

$$z' = \frac{2}{x}z + x^2.$$

Това е линейно уравнение, което има решение

$$z(x) = x^2(c_1 + x).$$

Следователно

$$y' = c_1x^2 + x^3$$

и след интегриране получаваме

$$y(x) = \frac{c_1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + c_2.$$

ii) Ако

$$F(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}G(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = 0,$$

то получаваме уравнение от ред $n-1$:

$$G(x, y(x), y^{(1)}(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = const.$$

Пример 1.2 *Решете уравнението*

$$yy'' + (y')^2 = 2x.$$

Забелязваме, че уравнението може да бъде записано във вида

$$(yy' - x^2)' = 0$$

и следователно

$$yy' - x^2 = c_1.$$

Това е уравнение с разделящи се променливи, което има решение

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + 2c_1x + c_2}.$$

iii) В уравнение от вида

$$F(y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

полагаме $p(y) = y'$, ако $y'(x) > 0$ или $y'(x) < 0$. В тези случаи $y(x)$ е строго монотонна функциу и следователно тя е обратима, тоест $x(y)$ същесквува и съответно $x'(y) > 0$ или $x'(y) < 0$. Тогава можем да разглеждаме $y'(x)$ като функция на y : $p(y) = y'(x(y))$. За производинте от по-висок ред получаваме $y'' = (y')_x = (y')_y y'_x = p'p$; $y''' = (y'')_x = (y'')_y y'_x = (p')^2 p + p^2 p''$ и тн получаваме уравнение от ред $n-1$ ред

$$G(y, p(y), p^{(1)}(y), \dots, p^{(n-1)}(y)) = 0.$$

Пример 1.3 *Решете уравнението*

$$(y-1)y'' = 2(y')^2.$$

Полагаме $p(y) = y'$ *и следователно* $y'' = pp'$. *Заместваме в уравнението и получаваме*

$$(y-1)pp' = 2p^2.$$

Това е уравнение с разделящи се променливи, което има решение $p = 0$, *а при* $p \neq 0$ *получаваме*

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2\,dy}{y-1}$$

$$\ln|p| = \ln(y-1)^2 + c.$$

Следователно

$$p(y) = c_1(y-1)^2,$$

където c_1 *е поризволна константа.*

Връщаме се към старите променливи

$$y' = c_1(y-1)^2.$$

това е уравнение с разделящи се променливи, което има решение

$$y = 1 - \frac{1}{c_1 x + c_2}.$$

iv) Ако съществува k, такова че за всяко λ

$$F(x, \lambda y(x), \lambda y^{(1)}(x), \dots, \lambda y^{(n)}(x)) = \lambda^k F(x, y(x), y^{(1)}(x), \dots, y^{(n)}(x)),$$

то полагаме $y'(x) = y(x)z(x)$ е за $z(x)$ получаваме уравнение от ред $n-1$. Наистина:

$$y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$$

$$y''' = y'(z^2 + z') + y(2zz' + z'') = y(z^3 + 3zz' + z'')$$

и т.н.

$$y^k G(x, z(x), z^{(1)}(x), \dots, z^{(n-1)}(x)) = 0.$$

Пример 1.4 *Решете уравнението*

$$xyy'' - x(y')^2 = yy'.$$

Полагаме $y' = zy$ *и следователно* $y'' = y(z^2 + z')$. *Заместваме в уравнението и получаваме*

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z.$$

Следователно $y = 0$ *или*

$$xz' = z.$$

Това е уравнение с разделящи се променливи, което има решение $z = c_1x$. *Следователно*

$$y' = c_1xy.$$

Решаваме това уравнение с разделящи се променливи. Всички решения на даденото уравнеие са

$$y(x) = c_2e^{c_1x^2/2}.$$