Факултет по математика и информатика,
СУ „Св. Климент Охридски“

ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения
спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър, учебна година 2019/2020

Тема № 72

16.06.2020 г.
гр. София

Изготвил: Андрей Стоев
група 3, ф.н. 62369

Оценка:............................

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта.

Тема СИ20-П-72. Движението на полуограничена струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{\pi} u_{xx},\ t > 0,\ x > 0, \\ u\,|_{t=0} = sin\frac{x}{2},\ u_t\,|_{t=0} = 2sin\frac{3x}{2},\ x \geq 0 \\ u\,|_{x=0} = 0,\ t \geq 0 \end{cases}$$

a. Опишете как се получава решението на дадената задача с помощта на формулата на Даламбер и метода на отраженията.
b. Направете на MatLab анимация на трептенето на частта от струната $C = \{0 \leq x \leq 2\pi\}$ за $t \in [0,10]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките от направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задачата
2.1. Теоритична част

Имаме, че $u\,|_{t=0} = u(x,0) = \varphi(x) = sin\dfrac{x}{2}$ е зададеното положение в началния момент, а началната скоротс е $u_t\,|_{t=0} = u_t(x,0) = \psi(x) = 2sin\dfrac{3x}{2}$.

Тъй като $u\,|_{x=0} = u(0,t) = 0, t \geq 0$, то в левия край струната винаги ще е 0 (т.е. ще имаме фиксиран ляв край). Това не е задача на Коши, тъй като имаме начални и гранични условия, от което следва че е смесена задача. За да имаме единствено решение по формулата на Даламбер е необходимо да я приведем в задача на Коши и да сведем струната до неограничена такава.

Проверяваме дали са изпълнени условията за съглсуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$. Очевидно са изпълнени.

Идеята на метода на отраженията е да направим нечетно отражение на началните данни. Свеждаме го до неограничена струна и наблюдаваме какво се случва само в желания интервал.

Продължаваме нечетно функциите φ и ψ дофункции φ_odd и ψ_odd и получаваме задача на Коши за неограничена струна с начални данни φ_odd и ψ_odd. Ако u_odd е решението на получената задача на Коши, то неговара рестрикция в $\{x > 0, t > 0\}$ е решение на задачата за полуограничената струна с фиксиран ляв край.

$\varphi\_odd = \begin{cases} \varphi(x),\ x \geq 0 \\ -\varphi(x),\ x < 0 \end{cases}$, но $\varphi(x) = sin\dfrac{x}{2}$ е нечетна функция

$\Rightarrow \varphi\_odd(x) = \varphi(x) = sin\dfrac{x}{2}$. Аналогично и за

$\psi\_odd(x) = \psi(x) = 2sin\dfrac{3x}{2}$.

По формулата на Даламбер, задачата има единствено решение: $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0; +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds =$$

$$= \frac{1}{2}[sin\frac{x-\frac{t}{\sqrt{\pi}}}{2} + sin\frac{x+\frac{t}{\sqrt{\pi}}}{2}] + \sqrt{\pi}\int_{x-\frac{t}{\sqrt{\pi}}}^{x+\frac{t}{\sqrt{\pi}}} sin\frac{3s}{2}ds =$$

$$= \frac{1}{2}[2sin(x).cos\frac{t}{\sqrt{\pi}}] - \sqrt{\pi}.\frac{2}{3}.cos\frac{3s}{2}\Big|_{x-\frac{t}{\sqrt{\pi}}}^{x+\frac{t}{\sqrt{\pi}}} =$$

$$= sinx.cos\frac{t}{\sqrt{\pi}} - \frac{2\sqrt{\pi}}{3}.(-2.sin(3x).cos\frac{3t}{2\sqrt{\pi}}) =$$

$$= sinx.cos\frac{t}{\sqrt{\pi}} + \frac{4\sqrt{\pi}}{3}sin(3x).cos\frac{3t}{2\sqrt{\pi}}.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function stringDalambert72
clf; clc
tmax=10; a=1/sqrt(pi);
t=linspace(0,tmax,90);
xmin=0;xmax=2*pi;
x=linspace(xmin,xmax,90);
   function y=phi(x)
      for i=1:length(x)
            y(i)=sin(x(i)/2);
      end
   end

   function y=psi(x)
      y=2*sin((3*x)/2);
   end

   function y=dalambert(x,t)
      for j=1:length(x);
         if t==0
            integral=0;
         else
            s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
            integral=trapz(s,psi(s));
         end
         y(j)=(phi(x(j)-a*t)+phi(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
      end
    end

   for k=1:length(t)
      clf
      hold on
      plot(x,dalambert(x,t(k)),'k','Linewidth',2)
      plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0,0,0])
      axis([0, xmax, -4, 4])
      grid on
      daspect([1,1,1])
      xlabel('x')
      ylabel('u(x,t)')
     M=getframe;
   end
```

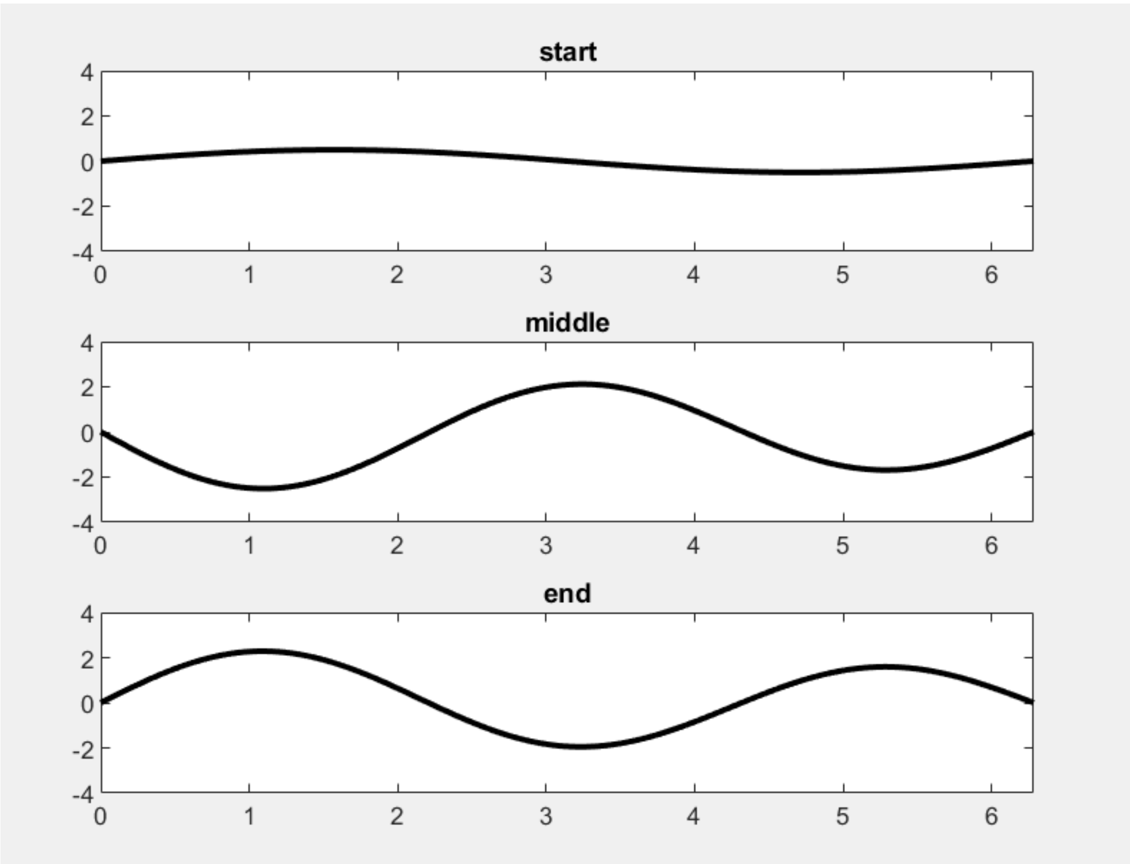
```
    subplot(3,1,1)
    plot(x,dalambert(x,0),'k','Linewidth',2)
    axis([0,xmax,-4,4])
    title('start')
    hold on

    subplot(3,1,2)
    plot(x,dalambert(x,5),'k','Linewidth',2)
    axis([0,xmax,-4,4])
    title('middle')
    hold on

    subplot(3,1,3)
    plot(x,dalambert(x,10),'k','Linewidth',2)
    axis([0,xmax,-4,4])
    title('end')
    hold on

end
```

2.3. Графики от три момента (начален, краен и произволен междинен)



2.4. Коментари към получените с MatLab резултати:

Ако погледнем в задачата, при началните условия, променливата x е просто положително число. Докато в задачата за неограничена струна, която директно използва формулата на Даламбер, там x е реално. Така, че е важно да се отбележи, че поради нечетността на функциите на началните условия, ние просто разглеждаме същата функция, само че не върху $x > 0$, а върху цялата реална права.

Стоящите вълни се получават когато „взаимодействат" две вълни, които се разпространяват в противоположни посоки. Ако загледаме в началния момент как изглежда графиката, може да видим, че когато вълната отиде към левия край, ще се обърне надолу и ще се „удари" в тази част, която е отдолу. За да се получи стояща вълна, тези две вълни, които си „взаимодействат" трябва да имат еднаква дължина, честота и амплитуда. При полуограничена струна, стояща вълна може да се получи, ако се окаже, че дължината на струната е някакво нечетно число, умножено по дължината на вълната. Нашия случай е именно такъв.