Задача 18. Намерете решението на задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 2sinx,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение:

Общ вид на задачата на Кошу за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - w^2u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} ;\ w = const.,\ \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi(x) \in C^1$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - wt) + \varphi(x + wt)\right] + \frac{1}{2w}\int_{x-wt}^{x+wt}\psi(s)ds.$$

От условието $\Rightarrow w = 2,\ \varphi(x) = 2sinx,\ \varphi(x) = 0$
$\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$: 0 - непрекъсната функция и $\psi'(x) = 0$ - непрекъсната
$\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$: $2sinx$ - непрекъсната функция и $\varphi'(x) = 2cosx$ - непрекъсната

$\varphi''(x) = -2sinx$ - непрекъсната

$\varphi(x - 2t) = 2sin(x - 2t)$ и $\varphi(x + 2t) = 2sin(x + 2t)$; $\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t} 0ds = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[2sin(x - 2t) + 2sin(x + 2t)\right] = sin(x - 2t) + sin(x + 2t) =$$

$$= 2sin\left(\frac{x - \cancel{2t} + x + \cancel{2t}}{2}\right)cos\left(\frac{\cancel{x} - 2t - \cancel{x} - 2t}{2}\right) = 2sinxcos(2t).$$

Окончателно, $u(x,t) = 2sinx\,.\,cos(2t)$.