Изпит 2020

Вариант 73

Задача 1. Решете уравнението: $-(x+1)y' - 4y = (x+1)^6 e^{5x} y^2$

Решение:

$y' = \underbrace{-\frac{4}{x+1}}_{a(x)} y \underbrace{-(x+1)^5 e^{5x}}_{b(x)} y^2, \quad x \neq -1$. Това очевидно е уравнение на бернули.

1.) $y \equiv 0$ очевидно е решение на уравнението;
2.) При $y \neq 0$ имаме (раделяме на y^2)

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{4}{x+1} y^{-1} - (x+1)^5 e^{5x} \qquad (*)$$

Полагаме $z = y^{-1}$, тогава $z' = -y^{-2}y'$ и следователно $\frac{y'}{y^2} = -z'$. Сега заместваме в $(*)$

$$-z' = -\frac{4}{x+1} z - (x+1)^5 e^{5x} \quad \text{или} \quad z' = \frac{4}{x+1} z + (x+1)^5 e^{5x}.$$ Супер!

Сведохме уравнението на Бернули до уравнение от първи ред, което е линеино. Може да използваме формулата:

$z(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx\right)$, където

$$a(x) = \frac{4}{x+1} \quad \text{и} \quad b(x) = (x+1)^5 e^{5x}.$$

$$\int a(x)dx = \int \frac{4}{x+1} dx = 4\int \frac{d(x+1)}{x+1} = 4ln|x+1| = ln(x+1)^4.$$

$$\int b(x) e^{-\int a(x)dx} dx = \int (x+1)^5 e^{5x} e^{-4ln|x+1|} dx = \int (x+1)^5 e^{5x} . \frac{1}{(x+1)^4} dx =$$

$$= \int (x+1) e^{5x} dx = \int x e^{5x} dx + \int e^{5x} dx = \frac{e^{5x}}{5} + \frac{1}{5}\int x d e^{5x} = \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{5}\left(x e^{5x} - \int e^{5x} dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x} + \frac{1}{5} x e^{5x} - \frac{1}{25} e^{5x} = \frac{5x+4}{25} e^{5x}.$$

Следователно: $z(x) = e^{ln(x+1)^4}\left(c + \frac{5x+4}{25} e^{5x}\right) = (x+1)^4\left(c + \frac{5x+4}{25} e^{5x}\right)$.

Т.е. $\dfrac{1}{y} = y^{-1} = z = (x+1)^4\left(c + \dfrac{5x+4}{25}e^{5x}\right).$

Окончателно:

$y = \dfrac{1}{(x+1)^4\left(c + \frac{5x+4}{25}e^{5x}\right)}$, където са дефинирани коефициентите, т.е. $x \neq -1$.