Контролна Работа 02/06/2020

Задача С-14

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{49}u_{tt} = 0,\ t > 0,\ 0 < x < 14, \\ u\Big|_{t=0} = \frac{1}{6}sin\frac{7\pi x}{14},\ 0 \le x \le 14, \\ u_t\Big|_{t=0} = \frac{1}{7}sun\frac{6\pi x}{14},\ 0 \le x \le 14, \\ u\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=14} = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Търси решение от вида $u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$, което не се анулира тъждествено. Заместваме в уравнението на струната и получаваме следното:

$$X''(x)T(t) - \frac{1}{49}X(x)T''(t) = 0$$
$$X''(x)T(t) = \frac{1}{49}X(x)T''(t)$$
$$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{49T(t)} = -\lambda \ \ (\lambda = const.) \ \ (1)$$

Ако фиксираме t и променяме x, то тогава (1) не зависи от x, защото отношението $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ ще е едно и също за всяка стойност на x. До аналогично заключение ще стигнем, ако фиксираме x и променяме t. Тогава (1) може да е изпълнено само ако отношението е равно на някаква произволна константа $-\lambda$. Следователно

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$T''(t) + 49\lambda T(t) = 0$$

От граничните условия получаваме

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0,$
$u(14,t) = X(14)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X(14) = 0,$
това е изпълнено, тъй като не може $T(t) \neq 0$.

По този начин за функцията $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 14 \\ X(0),\ X(14) = 0 \end{cases}$$

За тази задача търсим ненулево решение. Характеристичния полином на уравнението е:

$$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda$$

1.) $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

В този случай получаваме следната ФСР:$= \{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$
$X(14) = c_1 e^{14\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-14\sqrt{-\lambda}} = 0$
$-c_2\big(\underbrace{e^{14\sqrt{-\lambda}} - e^{-14\sqrt{-\lambda}}}_{\neq 0}\big) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$, което вече сме разгледали.

2.) $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0$
В този влучай получаваме ФСР:= $\{e^{0x}, xe^{0x}\} = \{1, x\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 + xc_2$
$X(0) = c_1 = 0$
$X(14) = c_1 + 14c_2 = 0;\quad 14c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Отново получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$

3.) $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} \pm i\sqrt{\lambda}$
В този случай получаваме ФСР:= $\{cos\big(\sqrt{\lambda}x\big), sin\big(\sqrt{\lambda}x\big)\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 cos\big(\sqrt{\lambda}x\big) + c_2 sin\big(\sqrt{\lambda}x\big)$
$X(0) = c_1 = 0$
$X(14) = c_2 sin\big(14\sqrt{\lambda}\big) = 0$

3.1.) $sin\big(14\sqrt{\lambda}\big) \neq 0 \Rightarrow c_2 = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ (вече сме разгледали)
3.2.)$sin\big(14\sqrt{\lambda}\big) = 0 \Rightarrow 14\sqrt{\lambda} = k\pi,\ k \in \mathbb{N};\quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{14}\right)^2,\ k \in \mathbb{N}.$

λ_k са собствените стойности на задачата на Щурм-Лиувил, а собствените функции са:

$X_k(x) = sin\left(\frac{k\pi}{14}x\right),\ k \in \mathbb{N}.$

Така общото решение на задачата на Щурм-Лиувил има вида $cX_k(x)$, където c е произволна константа.

При $\lambda = \lambda_k$ решаваме съответно уравнение за $T(t)$:
$(1) \qquad T_k''(t) + 49\lambda_k T(t) = 0$

Това е линейно уравнение от втори ред, което има характеристичен полином:

$Q(\alpha) = \alpha^2 + 49\lambda_k = 0$
$\alpha^2 = -49\lambda_k = -49\left(\frac{k\pi}{14}\right)^2$
$\alpha_{1,2} = \pm i7.\frac{k\pi}{14} = \pm \frac{k\pi}{2}i,\ k \in \mathbb{N}$

Така получаваме следната ФСР:$= \{cos(\frac{k\pi}{2}t), sin(\frac{k\pi}{2}t)\}$ $\Rightarrow$ общото решение за уравнението (1) е произволна линейна комбинация на $cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right)$ и $sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)$:

$T_k(t) = A_k cos\left(\frac{k\pi}{2}t\right) + B_k sin\left(\frac{k\pi}{2}t\right)$, където A_k и B_k са произволни константи. $k \in \mathbb{N}$.

По този начин намерихме функции $u_k(x,t) = X_k(x) \,.\, T_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, които са решения на уравнението на струната в дадената чадача и удовлетворяват граничните условия в нея.

От началните условия получаваме:

$u_k\Big|_{t=0} = X_k(x) \,.\, T_k(0) = A_k \,.\, sin\left(\frac{k\pi}{14}x\right) = \frac{1}{6} sin\frac{7\pi x}{14}$. Това е възможно само при $k = 7$ и $A_7 = \frac{1}{6}$ и при $k \neq 7$, $A_k = 0$.

$u_{k_t}\Big|_{t=0} = \frac{k\pi}{2} B_k \,.\, sin\left(\frac{k\pi}{14}x\right) = \frac{1}{7} sin\frac{6\pi x}{14}$, $0 \leq x \leq 14$, $k \in \mathbb{N}$.

Това е вълможно при $k = 6$ и $B_6 = \frac{1}{21\pi}$ и при $k \neq 6$, $B_k = 0$. Тогава решението на нашата задача е:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = u_6(x,t) + u_7(x,t) = \frac{1}{21\pi} sin(3\pi t) \,.\, sin\left(\frac{6\pi}{14}x\right) + \frac{1}{6} cos\left(\frac{7\pi}{2}t\right) \,.\, sin\left(\frac{7\pi}{14}x\right)$$