Задача 8. Дадено е уравнението

$$y'' + y' - y = 1$$

а) Намерете общото решение на уравнението;
б) Намерете всички решения на уравнението, които са ограничени за $x \in [0, +\infty)$;
в) Намерете всички периодични решения на уравнението.

Решение:

а) Характеристичния полином на хомогенната част е $R(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$. Корените на $R(\lambda) = 0$ са $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, следователно ФСР:$= \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ и общото решение има вида $y_o(x) = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$, където c_1 и c_2 са произволни константи.
б) За да намерим всички решения $y_\forall$ на уравнението, е необходимо да намерим и частно решение $z(x)$. Частното решение намираме по следния начин:
$f(x) = 1 = P_m(x)e^{\gamma x}, \gamma \in C \Rightarrow m = 0, \gamma = 0$ - не е корен на характеристичното уравнение на хомогенната част $\Rightarrow s = 0$, където
$z(x) = x^s \,.\, Q_m(s) \,.\, e^{\gamma x} = 1.c_3.1 = c_3$. Тоест търсим такова решение, че
$z''(x) + z'(x) - z(x) = 1$ или $0 + 0 - c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$.

Всички решения на уравнението са
$y(x) = y_o(x) + z(x) = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x} - 1$

Тъй като $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x} = 0 \Rightarrow c_1$ трябва да е нула, за да бъдат ограничени решенията в искания интервал. Следователно всички такива решения ще са$y(x) = -1 + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$.

в) Тъй като функциите $e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x}$ и $e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x}$ са монотонни и непериодични, то за да са периодични решенията е необходимо $c_1 = c_2 = 0$ и така $y(x) = -1$ е единсвеното периодично решение за уравнението.