Задача 7. Намерете особените точки на уравнението

$$x(y'^2 + x) = 2yy'$$

Има ли уравнението особени решения?

Решение:

$x((y')^2 + x) = 2yy' \Rightarrow x(y')^2 - 2yy' + x^2 = 0$. Полагаме $z = y'$.
$F(x, y, z) = xz^2 - 2yz + x^2$; $F'_z(x, y, z) = 2xz - 2y$.
Особените точки удовлетворяват условията.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xz^2 - 2yz + x^2 = 0 \\ 2xz - 2y = 0 \end{cases}.$$

Точката $(x, y) = (0,0)$ очевидно е решение. Тогава от второто уравнение получаваме, че $z = \dfrac{y}{x}$, $x \neq 0$ и заместваме в първото уравнение:

$$x\,.\frac{y^2}{x^2} - 2y\,.\frac{y}{x} + x^2 = 0; \quad \frac{y^2}{x} - \frac{2y^2}{x} + x^2 = 0; \quad -\frac{y^2}{x} + x^2 = 0; \quad -y^2 + x^3 = 0$$

Следователно особените точки са всички от вида $\left(s, \sqrt[3]{s^2}\right)$. Тъй като $y^2 = x^3$, то очевидно x не може да е отрицателно, т.е. $x \geq 0$. Всяка точка от парабулата $y = x^{\frac{3}{2}}$ е особена.

Остана да проверим дали $y = x^{\frac{3}{2}}$ е решение на уравнението на задачата.

$$x((y')^2 + x) = 2yy'; \quad x\left(\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2 + x\right) = 2y\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; \quad x\left(\frac{9}{4}x + x\right) = 2.x^{\frac{3}{2}}\,.\,x^{\frac{1}{2}}\,.\frac{3}{2} = x^2\,.$$

Оевидно $\dfrac{13}{4}x^2 \neq x^2$ и следователно нямаме особени решения на уравнението.