ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА КОНТРОЛНО

Задача 1. Решете системата с метода на изключването:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Решение:

От първото уравнение имаме, че $y = \dfrac{1}{4}(\dot{x} - x)$, заместваме във второто и получаваме, че

$$\left(\frac{1}{4}(\dot{x} - x)\right)' = x - \frac{1}{4}(\dot{x} - x) \qquad \text{или} \qquad \frac{1}{4}(\ddot{x} - \dot{x}) = x - \frac{1}{4}(\dot{x} - x)\,;$$

$\ddot{x} - \cancel{\dot{x}} = 4x - \cancel{\dot{x}} + x\,;$ $\quad \ddot{x} - 5x = 0 \ \rightarrow (1).$ Аналогично за $x = \dot{y} + y$ от второто уравнение, заместваме в първото и получаваме, че $(\dot{y} + y)' = \dot{y} + y + 4y\,;$
$\ddot{y} + \dot{y} = \dot{y} + 5y$ или $\ddot{y} - 5y = 0 \ \rightarrow (2).$

Получените уравнения са от II-ри ред и имат следния общ характеристичен полином $\lambda^2 - 5\lambda^0 = 0,\ \lambda^2 = 5 \ \Rightarrow \ \lambda_1 = \sqrt{5}$ и $\lambda^2 = -\sqrt{5}.$ Корените λ_1 и λ_2 са еднократни и реални и следователно образуват следната фундаментална система от решения (ФСР) на уравненията (1) и (2): $\{e^{\sqrt{5}t}, e^{-\sqrt{5}t}\}$

$$\begin{cases} x(y) = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ y(t) = c_3 e^{\sqrt{5}t} + c_4 e^{-\sqrt{5}t} \end{cases}, \qquad \text{където } c_i, i = \overline{1,4} - const\,.$$

Тъй като уравненията (1) и (2) са следствия от системата, а не еквивалентни на нея, то не всички уравнения породени от тях ще са решения на системата. Налага се да ги филтрираме, като заместим с $x(t)$ и $y(t)$ в едно от двете уравнения на системата. Нека това уравнение бъде първото, например. Тогава ще имаме, че:

$$(c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t})' = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} + 4(c_3 e^{\sqrt{5}t} + c_4 e^{-\sqrt{5}t})$$

$$c_1\sqrt{5}e^{\sqrt{5}t} + (-\sqrt{5})c_2 e^{-\sqrt{5}t} = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} + 4c_3 e^{\sqrt{5}t} + 4c_4 e^{-\sqrt{5}t}$$

$$e^{\sqrt{5}}\big(c_1(\sqrt{5} - 1) - 4c_3\big) - e^{-\sqrt{5}t}\big(c_3(\sqrt{5} + 1) - 4c_4\big) = 0$$

и тъй като $e^{\sqrt{5}t}$ и $e^{-\sqrt{5}t}$ образуват ФСР, то те са линейно независими и следователно единствената възможност това равенство да бъде изпълнено е когато

$$\begin{cases} c_3 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} c_1 \\ c_4 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} c_2 \end{cases}, \qquad \text{от където получаваме, че решенията на системата са:}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ y(t) = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{4} c_1 e^{\sqrt{5}t} + \dfrac{1 + \sqrt{5}}{4} c_2 e^{-\sqrt{5}t} \end{cases}$$

$\square$

Задача 2. Решете системата с метода на изключването:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

Решение:

От първото уравнение имаме, че $y = 2x - \dot{x}$, заместваме във второто и получаваме, че $(2x - \dot{x})' = x + 2(2x - \dot{x})$ или $2\dot{x} - \ddot{x} = x - 2\dot{x} + 4x$;

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0 \quad \rightarrow (1)$. Аналогично за $x = \dot{y} - 2y$ от второто уравнение, заместваме в първото и получаваме, че $(\dot{y} - 2y)' = 2(\dot{y} - 2y) - y$;
$\ddot{y} - 2\dot{y} = 2\dot{y} - 4y - y$ или $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0 \quad \rightarrow (2)$.

Получените уравнения са от II-ри ред и имат следния общ характеристичен полином $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 1.i, \lambda_2 = 2 - 1.i$. Корените λ_1 и λ_2 са еднократни и комплексно спрегнати и следователно образуват следната фундаментална система от решения (ФСР) на уравненията (1) и (2): $\{e^{2t}cos(1.t), e^{2t}sin(1.t)\}$

$$\begin{cases} x(y) = c_1e^{2t}cos(t) + c_2e^{2t}sin(t) \\ y(t) = c_3e^{2t}cos(t) + c_4e^{2t}sin(t) \end{cases}, \qquad \text{където } c_i, i = \overline{1{,}4} - const\,.$$

Тъй като уравненията (1) и (2) са следствия от системата, а не еквивалентни на нея, то не всички уравнения породени от тях ще са решения на системата. Налага се да ги филтрираме, като заместим с $x(t)$ и $y(t)$ в едно от двете уравнения на системата. Нека това уравнение бъде второто, например. Тогава ще имаме, че:

$$\underbrace{(c_3e^{2t}cos(t) + c_4e^{2t}sin(t))')}_{Left} = \underbrace{c_1e^{2t}cos(t) + c_2e^{2t}sin(t) + 2(c_3e^{2t}cos(t) + c_4e^{2t}sin(t))}_{Right}$$

$$Left = c_3\left(2e^{2t}cos(t) + e^{2t}(-sin(t))\right) + c_4\left(2e^{2t}sin(t) + e^{2t}cos(t)\right) \Rightarrow$$

$$2c_3e^{2t}\left(\cancel{cos(t)} - \cancel{cos(t)}\right) + c_3e^{2t}\left(-sin(t)\right) + 2c_4\left(\cancel{sin(t)} - \cancel{sin(t)}\right) + c_4e^{2t}cos(t) = c_1e^{2t}cos(t) + c_2e^{2t}sin(t)$$

или $\quad (c_2 + c_3)e^{2t}sin(t) + (c_1 - c_4)e^{2t}cos(t) = 0$

и тъй като $e^{2t}cos(t)$ и $e^{2t}sin(t)$ образуват ФСР, то те са линейно независими и следователно единствената възможност това равенство да бъде изпълнено е когато

$\begin{cases} c_1 = c_4 \\ c_2 = -c_3 \end{cases}$, от където получаваме, че решенията на системата са:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{2t}cos(t) + c_2e^{2t}sin(t) \\ y(t) = -c_2e^{2t}cos(t) + c_1e^{2t}sin(t) \end{cases}$$

□

Задача 3. Нека функциите $x(t), y(t)$ са решения на системата $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$

а) Покажете, че функцията $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$ не зависи от t.
б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Решение:

а) $$v'(t) = \left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = 2x(t) \,.\, \dot{x(t)} + 2y(t) \,.\, \dot{y(t)} =$$

$$= 2x(t) \,.\, x(t) \,.\, y(t) + 2y(t) \,.\, \left(-x^2(t)\right) = 2x^2(t) \,.\, y(t) - 2x^2(t) \,.\, y(t) = 0$$

$$\Rightarrow \; v(t) = const\,.$$

Може да подходим и по следния начин:

$$\frac{dx}{dt} = xy \Rightarrow dt = \frac{dx}{xy};\; \frac{dy}{dt} = -x^2 \Rightarrow dt = -\frac{dy}{x^2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{x^2} \qquad \text{или} \qquad xdx = -ydy \,\Big|\, \int$$

$$\int xdx = -\int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \qquad \text{или} \qquad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

функцията $x^2(t) + y^2(t)$ е първи интеграл на системата, т.е. ако заместим в нея с някое решение на системата, ще получим константа. (това издава, че фазовите криви ще са елипси (окръжността е частен случай на елипсата)).

б) Равновесните точки са там където скоростите се нулират, т.е. където се нулират десните страни на системата.

$\begin{cases} xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,y_0)$ са равновесните точки, където $y_0 \in \mathbb{R}$ е реален параметър. Теоремата

на Ляпунов ни казва, че понякога може да определим какъв е вида на точките само от първото линейно приближение на системата. Нека проверим. Линейното проближение на системата го взимаме от матрицата на Якоби:

$Ja(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$, където $f = xy, g = -x^2$

$$\Rightarrow \; Ja(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 0 \end{pmatrix};\; Ja(0,y_0) - \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|Ja(0,y_0) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} y_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(y_0 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = y_0$.

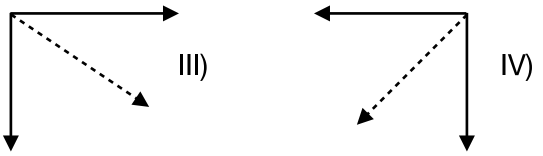
Сега, ако $y_0 > 0$ ще имаме неустойчивост, но ако $y_0 < 0$, имайки че $\lambda_1 = 0$ (не е нито положителна нито отрицателна) не попадаме в нито един от двата случая и първото приближение не може да определи вида на точките $(0, y_0)$ за $y_0 < 0$.

Но ние знаем какъв е вида на фазовите криви и ще проверим посоката на фазовите тангенциални векторчета. Имаме $x^2 = -y^2 + c$.

$\vec{\tau}(x, y) = (xy, -x^2)$. Очевидно втората координата на този вектор е винаги отрицателна.

Ще разгледаме само III-ти и IV-ти квадрант, защото само там ще имаме $y_0 < 0$.

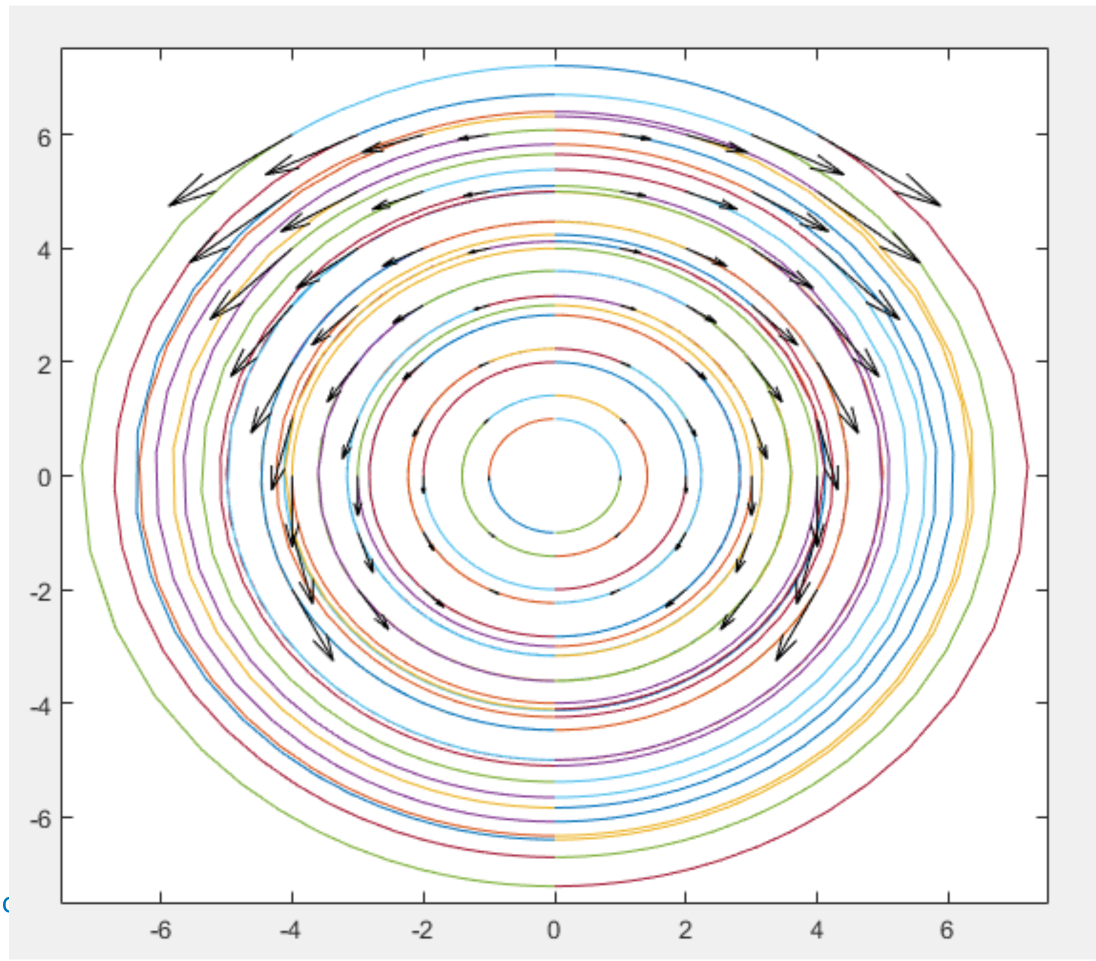
Да вземем първо III-ти квадрант. Там имаме $x_0 < 0, y_0 < 0$, следователно $xy > 0$



С аналогични разсъждения може да заключим, че в IV-ти квадрант тангенциалните вектори отново ще сочат към ординатата, където са равновесните точки, т.е. там ще имаме устойчивост, но не и асимптотична, тъй като не всички собствени стойности са отрицателни (имаме $\lambda_1 = 0$, трябваше да е отрицателно, за да кажем че устойчивостта е асимптотична).

И остана да проверим за $y_0 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}(x_0, y_0) = (0, -x_0^2)$, т.е. ще имаме неустойчивост.

Фазов портрет за онагледяване на получения резултат:



MathLab код на фазовия портрет:

```
Command Window
>> function zad3
    tmax=5;

    function z=ff(t,y) %y1'=y1*y2; y2'=-y1^2
        z=[y(1)*y(2); -y(1)^2];
    end

ak=0;
bk=2;

x=ak-4 : 1 : ak+4;
y=bk-4 : 1 : bk+4;

[X Y]=meshgrid(x,y);
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
                [T,Z]=ode45(@ff, [0,tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
                [T1,Z1]=ode45(@ff, [0,-tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

                plot(ak,bk,'r')
                hold on
                plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2));
                axis([ak-7.5 ak+7.5 bk-9.5 bk+5.5]);
        end
    end
    DX=X.*Y;
    DY=-X.^2;
    quiver(X,Y,DX,DY,1.8,'k');
end
```

☐

Задача 4. Намерете равновесните точки на системата $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

В околност на всяка една от равновесните ѝ точки напишете съответното линейно приближение на системата.

Решение:

Равновесните точки са там където скоростите се нулират. В нашия случай това е когато десните страни на системата се нулират:

$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -y \end{cases}$. Следователно $y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 1$.

Всички равновесни точки са $B_1(1, -1)$ и $B_2(-1,1)$. Якобианът на системата е:

$$Ja(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейното приближение ще получим като пресметнем якобианът в съответните равновесни точки:

$$Ja(B_1) = Ja(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \ Ja(B_2) = Ja(-1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Линейното приближение в B_1 ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(1, -1)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$ или

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.(x - 1) - 2.(y + 1) \\ \dot{y} = 1.(x - 1) + 1.(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2(y + 1) \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Линейното приближение в B_2 ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(-1,1)\begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$ или

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.(x + 1) + 2.(y - 1) \\ \dot{y} = 1.(x + 1) + 1.(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2(y - 1) \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

□

Задача 5. Определете типа на уравнението $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - x^3u_x - 5y^2u_y = 0$
Във всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнвнението.

Решение:

Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ (област в равнината) уравнението
$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u = f(x, y)$ е

1. хиперболично, ако $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$;
2. параболично, ако $D(x_0, y_0) = 0$;
3. елиптично, ако $D(x_0, y_0) < 0$.

В нашия случай ще имаме, че $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}$ и $D(x, y) = 1 - 1(-3) = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично в цялата равнина.

Уравнението на характеристиките на даденото уравнение от условието има вида:

$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dxdy + c(x, y)(dx)^2 = 0$, където
$a(x, y) = 1, b(x, y) = 1, c(x, y) = -3$.

$\underline{(dy)^2 - 2dxdy - 3(dx)^2 = 0}$ $\quad // : (dx)^2$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - 2\left(\frac{dx}{dy}\right) - 3 = 0$$

Полагаме $\dfrac{dx}{dy} = p \Rightarrow\ p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow\ p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4}$ или $p_1 = 3, p_2 = -1$.

$$\frac{dy}{dx} = 3 \Leftrightarrow\ dy = 3dx \ \Bigg|\int \ \Leftrightarrow\ \int dy = 3\int dx \Leftrightarrow \underline{y - 3x = c_1}.$$

Аналогично

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow\ dy = -1dx \ \Bigg|\int \ \Leftrightarrow\ \int dy = -\int dx \Leftrightarrow \underline{y + x = c_2}.$$

Следователно характеристичните криви на уравнението са: $y = 3x + c_1$, $y = -x + c_2$, където $c_1, c_2 - const$.

$\square$

Задача 6. Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 2sin x,\ u_t(x,0) = xe^x,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Решение:

За решаването на задачара,ще използваме формулата на Даламбер и казваме, че задачата има единствено решение, което се задава със следната формула:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

Общия вид на уравнението е $u_{tt} - a^2u_{xx} = 0 \longrightarrow a = 2$, като:

- началното положение е $\varphi(x) = 2sin x$;
- началната скорост е $\psi(x) = xe^x$.

Сега просто заместваме във формулата и пресмятаме интеграла:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[2sin(x-2t) + 2sin(x+2t)\Big] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} s\,.\,e^s ds.$$

Първо решаваме неопределения интеграл

$\int se^s ds = \int s de^s = s\,.\,e^s - \int e^s s = se^s - e^s = (s-1)e^s + c$, следователно

$$\int_{x-2t}^{x+2t} se^s ds = (s-1)e^s\Big|_{x-2t}^{x+2t} = (x+2t-1)e^{x+2t} - (x-2t-1)e^{x-2t}.$$

Окончателно,

$$u(x,t) = sin(x-2t) + sin(x+2t) + \frac{1}{4}((x+2t-1)e^{x+2t} - (x-2t-1)e^{x-2t}). \qquad \square$$

Задача 7. Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0,\ x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = x^3,\ u_t(x,0) = x^2 sin x,\ x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Решение:

За решаването на задачара,ще използваме формулата на Даламбер и казваме, че задачата има единствено решение, което се задава със следната формула:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)\Big] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds$$

Общия вид на уравнението е $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \ \longrightarrow a = 1$, като:

- началното положение е $\varphi(x) = x^3$;
- началната скорост е $\psi(x) = x^2 sin x$.

Сега просто заместваме във формулата и пресмятаме интеграла:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big[(x-t)^3 + (x+t)^3\Big] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} s^2 sin(s)ds.$$

Първо решаваме неопределения интеграл

$$\int s^2 sin(s)ds = \int s^2 d(-cos(s)) = \underbrace{-s^2cos(s)}_{A} - \int -cos(s)d(s^2) = A + \int cos(s)d(s^2) =$$

$$= A + \int 2s\,.\,cos(s)ds = A + 2\int sd(sin(s)) = A + 2\Big(ssin(s) - \int sin(s)ds\Big) =$$

$$= -s^2cos(s) + 2(s\,.\,sin(s) + cos(s)) + c = 2s\,.\,sin(s) + (2-s^2)cos(s) + c.$$

$$\int_{x-t}^{x+t} s^2 sin(s)ds = 2s\,.\,sin(s) + (2-s^2)cos(s)\Big|_{x-t}^{x+t} =$$

$$= 2((x+t)\,.\,sin(x+t)) + (2-(x+t)^2)cos(x+t) - 2(x-t)sin(x-t) - (2-s^2)(cos(x-t)) = B$$

Окончателно,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(x^3 - \cancel{3x^2}t + 3xt^2 - \cancel{t^3} + x^3 + \cancel{3x^2}t + 3xt^2 + \cancel{t^3}\Big) + \frac{B}{2} = x^3 + 3xt^2 + \frac{B}{2}\,. \qquad \square$$

Задача 8. Намерете собствените стойности и собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил: $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 5 \\ X(0) = 0 \\ X'(5) = 0 \end{cases}$

За кои стойности на λ задачата няма други решения освен $X(x) \equiv 0$?
Решение:
Имаме едно диференциално линейно уравнение от втори ред с две начални условия и характеристичен полином $P(s) = s^2 + \lambda = 0$, от където следва, че $s^2 = -\lambda, s = \pm\sqrt{-\lambda}$.
Ще разгледаме 3 случая за параметъра λ.

I сл. $\underline{\lambda = 0}$
$\Rightarrow$ имаме 1 корен и фундаменталната система от решения (ФСР) има вида $\{e^0, xe^0\} = \{1, x\}$. Следователно (тъй като корена е двукратен), $X(x) = c_1 + c_2x$.
Използвайки началните условия получаваме, че $X(0) = c_1 = 0$ и $X'(5) = c_2 = 0 \Rightarrow \ X(x) = 0$, което е тривиалното решение, от което се опитваме да „избягаме", за да намерим други.

II сл. $\underline{\lambda < 0}$
$\Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow \ \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ имаме два различни реални корена и ФСР=$\{e^{\sqrt{-\lambda}}, e^{-\sqrt{-\lambda}}\}$
$\Rightarrow \ X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Отново използваме началните условия и получаваме, че $X(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0 \ \Rightarrow \ c_1 = -c_2; \ X'(5) = \sqrt{-\lambda}c_1e^{5\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda}c_2e^{-5\sqrt{-\lambda}} =$

$= \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\neq 0}\, c_1\big(\underbrace{e^{5\sqrt{-\lambda}} + e^{-5\sqrt{-\lambda}}}_{\neq 0}\big) = 0.$ Следователно, за да бъде изпълнено последното равенство, трябва $c_1 = 0 \Rightarrow \ c_1 = c_2 = 0$ и отново имаме тривиалното решение.
Следователно за $\lambda \leq 0$ няма други решения различни от тривиалното. Продължаваме да търсим в послеция останал случай.

III сл. $\underline{\lambda > 0}$
$\Rightarrow -\lambda < 0 \Rightarrow \ \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$ е комплексно число. Следователно $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, тогава

ФСР=$\{cos(\sqrt{\lambda}x), \ sin(\sqrt{\lambda}x)\}$, тъй като реалната част на корените е 0.

$X(x) = c_1 . cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . sin(\sqrt{\lambda}x); \quad X(0) = c_1 . cos0 + c_2 . sin0 = c_1 = 0;$

$X'(5) = \left(c_2 . sin(\sqrt{\lambda}x)\right)'_{x=5} = \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0} . c_2 . cos(5\sqrt{\lambda}) = 0.$ Следователно или $c_2 = 0$ или $cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$.
Ако $c_2 = 0$ ще получим отново тривиалното решение, за това нека $cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$.
Последното е изпълнено когато: $5\sqrt{\lambda} = \dfrac{2k+1}{2}\pi$, където $k = 0,1,2,...$

$\Rightarrow \ \lambda_k = \left(\dfrac{2k+1}{10}\pi\right)^2$ са собствените стойности, а

$X_k(x) = c_2 . sin\left(\dfrac{2k+1}{10}x\pi\right)$ са собствените функции на задачата. □

Задача 9. Решете задачата на Щурм-Лиувил: $\begin{cases} y'' + 16\pi^2 y = 0, 0 < x < \frac{1}{2} \\ y(0) = 0, y(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$

Решение:

Тази задача е частен случай на 8-ма задача, в която $\lambda = 16\pi^2$. Т.е. $\lambda > 0$ и влизаме директно в III-тия случай.

Имаме характеристичния полином $P(\beta) = \beta^2 + 16\pi^2 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = \pm 4\pi i \in \mathbb{C}$, тогава ФСР=$\{cos(\sqrt{\lambda}x), sin(\sqrt{\lambda}x)\} = \{cos(4\pi x), sin(4\pi x)\}$, тъй като реалната част на корените е 0. Ако това е собствена стойност, ще имаме ненулево решение, в противен случай ще имаме само тривиалното нулево решение. Нека проверим.

$y(x) = c_1 . cos(4\pi x) + c_2 . sin(4\pi x);$ $\quad y(0) = c_1 . cos0 + c_2 . sin0 = c_1 = 0;$

$y(\frac{1}{2}) = c_2 . sin(4\pi . \frac{1}{2}) = c_2 . sin(2\pi) = 0$. Т.е. без значение каква е константата c_2, условието винаги ще е изпълнено и следователно c_2 е произволна.

Следователно задачата има безбройно много ненулеви решения от вида:

$y(x) = c_2 . sin(2\pi x)$. $\square$

Задача 10. Решете задачата на Щурм-Лиувил $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 2 \\ X(0) = 0,\ X(2) = 0, \end{cases}$ където λ е реален параметър.

Решение:
Имаме едно диференциално линейно уравнение от втори ред с две начални условия и характеристичен полином $P(s) = s^2 + \lambda = 0$, от където следва, че $s^2 = -\lambda, s = \pm\sqrt{-\lambda}$.
Ще разгледаме 3 случая за параметъра λ.

I сл. $\underline{\lambda = 0}$
$\Rightarrow$ имаме 1 корен и фундаменталната система от решения (ФСР) има вида $\{e^0, xe^0\} = \{1,x\}$. Следователно (тъй като корена е двукратен), $X(x) = c_1 + c_2x$.
Използвайки началните условия получаваме, че $X(0) = c_1 = 0$ и
$X(2) = 2c_2 = 0 \Rightarrow\ X(x) = 0$, което е тривиалното решение, от което се опитваме да „избягаме“, за да намерим други.

II сл. $\underline{\lambda < 0}$
$\Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow\ \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ имаме два различни реални корена и ФСР=$\{e^{\sqrt{-\lambda}}, e^{-\sqrt{-\lambda}}\}$
$\Rightarrow\ X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$. Отново използваме началните условия и получаваме, че
$X(0) = c_1e^0 + c_2e^0 = c_1 + c_2 = 0\ \Rightarrow\ c_1 = -c_2;\ X(2) = c_1e^{2\sqrt{-\lambda}} - c_1e^{-2\sqrt{\lambda}} =$

$= c_1e(e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0$ и тъй като $e^{\sqrt{-\lambda}}$ и $e^{-\sqrt{-\lambda}}$ образуват ФСР, то те ще са линейно независими и следователно, за да бъде изпълнено последното равенство, трябва
$c_1 = 0 \Rightarrow\ c_1 = c_2 = 0$ и отново имаме тривиалното решение.
Следователно за $\lambda \leq 0$ няма други решения различни от тривиалното. Продължаваме да търсим в послeния останал случай.

III сл. $\underline{\lambda > 0}$
$\Rightarrow -\lambda < 0 \Rightarrow\ \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$ е комплексно число. Следователно $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, тогава

ФСР=$\{cos(\sqrt{\lambda}x),\ sin(\sqrt{\lambda}x)\}$, тъй като реалната част на корените е 0.

$X(x) = c_1 . cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . sin(\sqrt{\lambda}x);\quad X(0) = c_1 . cos0 + c_2 . sin0 = c_1 = 0;$

$X(2) = c_2 . sin(2\sqrt{\lambda}) = 0.$ Следователно или $c_2 = 0$ или $sin(2\sqrt{\lambda}) = 0.$
Ако $c_2 = 0$ ще получим отново тривиалното решение, за това нека $sin(2\sqrt{\lambda}) = 0$.
Последното е изпълнено когато: $2\sqrt{\lambda} = k\pi$, където $k = 0,1,2,...$

$\Rightarrow\ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2$ са собствените стойности, а

$X_k(x) = sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$ са собствените функции на задачата, $k \in \mathbb{N}$.

□

Задача 11. Решете смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = sin(3\pi x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$$

Решение:

Търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$, което да не се анулира тъждествено. Първо заместваме в уравнението на струната и получаваме:
$u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow X(x)\,.\,T''(t) = X''(x)\,.\,T(t),\ 0 < x < 1,\ t > 0$. Там където не се нулират функциите делим и получаваме, че $\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$. Тъй като тези функции са функции на различни променливи, то единствения начин те да са равни е ако са равни на някаква константа (или ако фиксираме t, то $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ не се променя и не зависи от x и аналогично, ако фиксираме x, то $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ също не се променя и не зависи от t $\Rightarrow$ тази пропорционална стойност не зависи нито от x, нито от t, което означава, че е константа) и
$\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, където $-\lambda = const.$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0. \end{cases}$$ От граничните условия получаваме:

$0 = u(0,t) = X(0)\,.\,T(t),\ t \ge 0$. Следователно $X(0) = 0$.
Аналогично в другия край: $0 = u(1,t) = X(1)\,.\,T(t),\ t \ge 0$. Следователно $X(1) = 0$.

По този начин за функцията $X(x)$ получихме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 1 \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$, която вече решихме в задача 10.

Неаналитично решение за MathLab:
Имаме струна със закрепени краища в 0 и 1. Може да ползваме формулата на Даламбер, но трябва да я сведем до безкрайна струна. За целта ще направим четните продължения извън интервала.

За дадена функция $f(x)$, $f_{even}(x) = \begin{cases} f(x), \ x \geq 0, \ 0 \leq x \leq 1 \\ f(-x), x < 0, -1 \leq x < 0 \end{cases}$. Т.е.

$$\varphi_{even}(x) = \begin{cases} \varphi(x), \ 0 \leq x \leq 1 \\ -\varphi(x), \ -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \psi_{even} \equiv 0 = \psi(x).$$

Продължаваме φ_{even} и ψ_{even} $2L$ - периодично върху цялата реална права, където L е дължината на струната.

$$f_{prod}(x) = \begin{cases} f_{prod}(x - 2L), \ x > L \\ f_{prod}(X + 2L), \ x < -L \\ f(x), \ x \in [0; L] \end{cases}$$

В нашия случай имаме $L = 1$.

$$\psi_{evenprod} \equiv 0$$

$$\varphi_{evenprod} = \begin{cases} \varphi_{evenprod}(x - 2), \ x > 1 \\ \varphi_{evenprod}(x + 2), \ x < -1 \\ \varphi_{even}(x), \ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Сега вече, по формулата на Даламбер и направените свеждания на задачата до безкрайна струна, имаме единственото решение

$$u_{evenprod}(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{evenprod}(x - t) + \varphi_{evenprod}(x + t)\right] + \underbrace{\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_{evenprod}(s)ds}_{=0}$$

$$u_{evenprod}(x, t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_{evenprod}(x - t) + \varphi_{evenprod}(x + t)\right]$$

$$u(x, t) = u_{evenprod}(x, t) \cap \{(x, t) \,|\, 0 \leq x \leq 1, \ t > 0\}$$

$\square$

Задача 12. Решете смесената задача за уравнението на топлопроводността

$$\begin{cases} u_t = u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u(x,0) = sin(3\pi x),\ 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Общ вид на задачата $\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 \le x \le L \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 \end{cases}$

В нашия случай имаме, че $a = 1$, $\varphi(x) = sin(3\pi x)$ и $L = 1$. Ще търсим решение от следния вид $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)\,.\,T_k(t)$.

$u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$. Тогава $\begin{cases} u_t(x,t) = X(x)\,.\,T'(t) \\ u_{xx}(x,t) = X''(x)\,.\,T(t) \end{cases}$. Заместваме в $u_t = u_{xx} \Rightarrow X(x)\,.\,T'(t) = X''(x)\,.\,T(t)$, т.е. (тъй като търсим не тривиални решения)

$\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)}$. Тъй като тези функции са функции на различни променливи, то единствения начин те да са равни е ако са равни на някаква константа (или ако фиксираме t, то $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ не се променя и не зависи от x и аналогично, ако фиксираме t, то $\dfrac{T'(t)}{T(t)}$ също не се променя и не зависи от t $\Rightarrow$ тази пропорционална стойност не зависи нито от x, нито от t, което означава, че е константа) и $\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, където $-\lambda = const$.

$$\Rightarrow \begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0,\ t > 0 \quad (*) \\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 1 \\ X(0) = 0 \quad \Leftarrow\ u(0,t) = X(0)\,.\,T(t) = 0 \\ X(1) = X(L) = 0 \quad \Leftarrow\ u(1,t) = X(1)\,.\,T(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Вложената система е същата като задача 10. Това е задача на Щурм-Лиувил, която вече решихме. Следователно имаме, че собствените стойности са $\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\pi)^2$ и $X_k(x) = sin\left(\dfrac{k\pi x}{L}\right) \overset{L=1}{=} sin(k\pi x),\ \ k \in \mathbb{N}_0$ са решенията на задачата на Щурм-Лиувил.

Заместваме с тях в най-горното уравнение $(*)$: .

Намираме решението на $T_k'(t) + \lambda_k T_k(t) = 0 \Rightarrow T_k' = -\lambda_k T_k$. Това е уравнение от първи ред и лесно се вижда, че решенията му са $T_k(t) = c_k e^{-\lambda_k t} = c_k e^{-k\pi^2 t}$.

$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(x); \qquad u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(x);$

$u_k\Big|_{t=0} = c_k sin(k\pi x) = sin(3\pi x) \Rightarrow c_3 = 1$ и решението е $u_3(x,t) \overset{c_3=1}{=} e^{-9\pi^2 t} sin(3\pi x)$

$$\left[c_k = \frac{2}{L}\int_2^L \varphi(x)\,.\,X_k(x)dx, \quad \text{като в нашия случай} \quad c_k = 2\int_0^1 sin(3\pi x)\,.\,sin(k\pi x)dx\,.\right]$$

$\square$