Вариант А
github.com/andy489/DEA
Задача 1. Решете уравнението

$$(2+e^x)y'' = e^x(y'-3)\,.$$

Решение:

Имаме уравнение от втори ред, допускащо понижаване на реда (тъй като не участва y). Свежда се до уравнение с разделящи се променливи.

Полагаме $z(x) = y'(x)$. Тогава $y''(x) = z'(x)$ и $(*)\quad (2+e^x)z' = e^x(z-3)$, което е уравнение от 1-ви ред с разделящи се променливи.
1.) $g(z) = z-3$ се анулира при $z=3 \Rightarrow z(x) \equiv 3$ е решение на уравнението $(*)$.
2.) $z \neq 3$. Разделяме променливите.
$(2+e^x)\dfrac{dz}{dx} = e^x(z-3)$ или $\dfrac{dz}{z-3} = \dfrac{e^x dx}{2+e^x}\Bigg|\int$

$$ln|z-3| = \int \frac{e^x}{2+e^x}dx = \int \frac{de^x+2}{2+e^x} = ln(e^x+2)+c$$

$e^{ln|z-3|} = e^{ln(2+e^x)+c};\quad |z-3| = e^c\,.\,(2+e^x)$

$z-3 = c_1\,.\,(2+e^x)$, където c_1 е произволна константа и така освен, че премахваме модула, включваме и решението от 1.)

$$y'(x) = z = c_1(2+e^x)+3\Bigg|\int \Rightarrow y(x) = c_1\int(2+e^x)dx + \int 3dx =$$

$= c_1(2x+e^x)+3x+c2 = 2c_1x+3x+c_1e^x+c_2,$ където c_1 и c_2 се произволни константи.

Задача 2. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y''+2y'+2y = 0 \\ y(0) = 2,\, y'(0) = -1 \end{cases}$$

Решение:

Характеристичния полином на линейното уравнение от втори ред е:
$P(\lambda) = \lambda^2+2\lambda+2 = (\lambda+1)^2+1$. Корените на $P(\lambda)=0$ са $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$.
ФСР:= $\{e^{-x}cosx,\, e^{-x}sinx\};\quad y(x) = c_1e^{-x}cosx + c_2e^{-x}sinx = e^{-x}(c_1cosx+c_2sinx)$.
От условието имаме, че $y(0)=2$ и $y'(0) = -1$.

Намираме $y'(x) = -e^{-x}(c_1cosx+c_2sinx) + e^{-x}(-c_1sinx+c_2cosx)$

$y(0) = c_1 = 2;\quad y'(0) = -c_1+c_2 = -1 \Rightarrow c_2 = -1+c_1 = 1 \Rightarrow$

$y(x) = e^{-x}(2cosx+sinx)$.