Факултет по математика и информатика, СУ
„Св. Климент Охридски“

ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър, учебна година 2019/2020

Тема № 65

XX.XX.XXXX г.
гр. София

Изготвил: XXXXX XXXXX
група X, ф.н. XXXX

Оценка:............................

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта.

Тема СИ20-П-65. Дадена е задачата на Коши

$$xy' - 4x = 6y,\ y(1) = -2.$$

1. Решете символно дадената задача и начертайте с черен цвят графиката на репението ѝ в интервала $[1,3]$.
2. Начертайте с различни цветове графиките на приближенията $y_0(x)$, $y_1(x)$ и $y_5(x)$ на решението получени с метода на Пикар.

2. Решение на задачата

2.1. Теоритична част:

Имаме линейно уравнение от първи ред, което не е решено относно производната.

$$y' = \underbrace{\frac{6}{x}}_{a(x)}\, y + \underbrace{4}_{b(x)}\,.$$

$$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right);$$

$$\int a(x)dx = \int \frac{6}{x}dx = 6ln|x| = ln(x^6)$$

$$\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx = \int 4.e^{-ln(x^6)}dx = 4\int x^{-6}dx = -\frac{4}{5x^5} \Rightarrow$$

$$y(x) = x^6\left(c - \frac{4}{5x^5}\right) = cx^6 - \frac{4}{5}x.$$

$$y(1) = c - 4 = -2 \Rightarrow c = -\frac{10}{5} + \frac{4}{5} = -\frac{6}{5};$$

$$y(x) = -\frac{6}{5}x^6 - \frac{4}{5}x.$$

За приближенията ще използваме метода на Пикар и рекурентната формула $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_n(t)\right)dt,\ n = 0,1,2,...$, където $y(1) = -2$.

$x_0 = 1$ и $y_0 = -2$, а $f\left(t, y_n(t)\right) = y' = \frac{6}{x}y + 4$

$$\Rightarrow y(x) = -2 + \int_1^x \left(\frac{6y(t)}{t} + 4\right)dt$$

$y_0(x) = -2;$

$$y_1(x) = -2 + \int_1^x \left(\frac{6.(-2)}{t} + 4\right)dt = -2 - 12\int_1^x \frac{1}{t}dt + 4\int_1^x dt =$$

$$-2 - 12ln(t)\Big|_1^x + 4t\Big|_1^x = -2 - 12lnx + 4x - 4 \Rightarrow \ y_1(x) = 4x - 12lnx - 6$$

$$y_2(x) = -2 + \int_1^x \left(\frac{6.y_1(t)}{t} + 4\right)dt = -2 + \int_1^x \left(\frac{24t - 72lnt - 36}{t} + 4\right)dt =$$

$$= -2 + \int_1^x \left(28 - \frac{72lnt}{t} - \frac{36}{t}\right)dt =$$

$$= -2 + 28t\Big|_1^x - 36ln^2t\Big|_1^x - 36lnt\Big|_1^x = -2 + 28x - 28 - 36ln^2x - 36lnx.$$

Аналогично:

$$y_3(x) = 172x - 72ln^3x - 108ln^2x - 108ln^2x - 180lnx - 174;$$

$$y_4(x) - 1036x - 1038 - 108ln^4(x) - 216ln^3(x) - 540ln^2x - 1044lnx;$$

$$y_5(x) = 6220x - 6222 - 6228lnx - 3132ln^2x - 1080ln^3x - 324ln^4x - \frac{648}{5}ln^5x$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function pikar65
	clc; clf
	xmin=1; xmax=3;
	x0=1; y0=-2;
	hold on; grid on
	axis([xmin xmax -40 20]);
	y=dsolve('Dy=((y*6)/t)+4','y(x0)=y0','t');
	t=linspace(xmin,xmax);
	p=plot(t,eval(y), 'k'); N=6;
	x=linspace(x0,xmin);
	xx=linspace(x0,xmax);
	z=y0*ones(1,length(x));
	zz=y0*ones(1,length(xx));
	p0=plot(x,z,'b');
	plot(xx,zz,'b');
	for k=1:N
		z=y0+cumtrapz(x,ff(x,z));
		zz=y0+cumtrapz(xx,ff(xx,zz));
		if k== 1
			p1=plot(x,z,'r');
			plot(xx,zz,'r');
		elseif k==5
			p5=plot(x,z,'g');
			plot(xx,zz,'g');
		end
	end
	legend( [ p p0 p1 p5 ], ...
	{ 'y(x)', ...
	'y0(x)', ...
	'y1(x)', ...
	'y5(x)'});
	function z=ff(x,y)
		z=((6*y)./(x))+4;
	end
end
```

2.3. Графики (включително от анимация)