6. УРАВНЕНИЯ, КОИТО ДОПУСКАТ ПОНИЖАВАНЕ НА РЕДА

1. Редът на уравнението $d/dxF(x,y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ понижаваме, като интегрираме по x.

Пример 1. $yy'' = y'^2$.

$y''/y' = y'/y$, $(\ln y')' = (\ln y)'$, $\ln y' = \ln y + \ln C$, $y' = Cy$. Последното уравнение е от първи ред и като го решим получаваме $y = e^{Cx} + C_1$, където C и C_1 са произволни константи.

2. Ако уравнението има вида $F(x,y^{(k)},\dots,y^{(n)}) = 0$, то като положим $y^{(k)} = z$, за намирането на $z = z(x)$ получаваме уравнение от ред $n-k$.

Пример 2. $y'' = y'^2 + 1$.

Полагаме $y' = z$ и получаваме уравнението $z' = z^2 + 1$, което има решение $z = tg(x+C)$. Следователно

$$y' = tg(x+C),\ y = -\ln|\cos(x+C)| + C_1,\ e^{-y} = C_2\cos(x+C).$$

3. Ако x не участвува явно в уравнението, т.е. то има вида $F(y,y',y'',\dots,y^{(n)}) = 0$, след като изберем за нова независима променлива y, за функцията $p = p(y)$, където $p(y) = y'(x)$, получаваме уравнение от ред $n-1$.

Пример 3. $2yy'' = y'^2 + 1$.

Полагаме $y' = p(y)$. Тогава

$$y'' = d(y')/dx = dp(y)/dx = dp/dy\ dy/dx = p'p.$$

Като заместим с $y' = p$ и $y'' = pp'$ в уравнението получаваме, че функцията $p = p(y)$ удовлетворява уравнението от първи ред $2ypp' = p^2 + 1$. Решението на това уравнение е $p = \pm\sqrt{Cy-1}$. Следователно $y' = \pm\sqrt{Cy-1}$, откъдето получаваме $4(Cy-1)=C^2(x+C_1)^2$.

4. Ако уравнението е хомогенно относно y и производните ѝ, то за функцията $z = z(x)$, която въвеждаме чрез полагането $y' = yz$, получаваме уравнение от ред с единица по-малък от реда на уравнението за y.

Пример 4. $xyy'' - xy'^2 = yy'$.

Полагаме $y' = yz$. Тогава $y'' = y'z + yz' = y(z^2 + z')$ и като заместим в уравнението получаваме

$$xy^2(z^2 + z') - xy^2z^2 = y^2z,\ xy^2z' = y^2z\,|:y^2\neq 0,\ xz' = z,\ z = Cx,$$

$$y'/y = Cx,\ (\ln|y|)' = Cx,\ \ln|y| = Cx^2/2 + C_1,\ y = C_2e^{C_3x^2}.$$

Решете следващите задачи, като използувате описаните способи за понижение на реда.

6.1. $yy''' + 3y'y'' = 0$.

6.2. $yy'' = y'(y' + 1)$.

6.3. $yy'' + y'^2 = 1$.

6.4. $xy'' = 2yy' - y'$.

6.5. $x^2y'' = y'^2$.

6.6. $2xy'y'' = y'^2 - 1$.

6.7. $y'^2 + 2yy'' = 0$.

6.8. $y'' = 2yy'$.

6.9. $y''(e^x + 1) + y' = 0$.

6.10. $y''' = y''^2$.

6.11. $xy''' = y'' - xy''$.

6.12. $y''^2 = y'^2 + 1$.

6.13. $y'' = e^y$.

6.14. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$.

6.15. $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

6.16. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

6.17. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$.

6.18. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

6.19. $x^2yy'' + y'^2 = 0$.

6.20. $x^2(y'^2 - 2yy'') = y^2$.

Задача 5.) Решете уравнението

$$x^2y'' - y'^2 = 0$$

Полагаме $z = y'$ и получаваме уравнение с разделящи се променливи

$$x^2z' - z^2 = 0.$$

Едно решение е $z = 0$, а при $z \neq 0$ получаваме

$$\int \frac{z'(x)dx}{z(x)^2} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Следоватилно

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}.$$

Решаваме интегралите и получаваме

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - c.$$

Откъдето намираме последователно

$$y' = z = \frac{x}{cx+1}$$

$$y(x) = \int \frac{x\,dx}{cx+1}.$$

Тук разглеждаме два случая:
- ако $c = 0$, получаваме

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$$

- ако $c \neq 0$, то

$$y(x) = \frac{x}{c} - \frac{\ln|cx+1|}{c^2} + c_1,$$

Остава да добавим и решението $y(x) = c$, което се получава от $z = 0$.

Задача 6М. Решете символно задачата на Коши

$$y''' = 2(y'' - 1)cotg(x), y(\pi/2) = 1, y'(\pi/2) = 0, y''(\pi/2) = 1.$$

Начертайте графиката на решението в интервала [-5,5]. Намерете най-голямата и най-малката стойност на решението в същия интервал и ги маркирайте с различни символи върху графиката.

```
function zad6M

y=simplify(dsolve('D3y=2*(D2y-1)*cot(x)','y(pi/2)=1',...
'Dy(pi/2)=0', 'D2y(pi/2)=1','x')) x=-5:0.01:5;
```

```
y=eval(y);
hold on
plot(x,y)

[m,xm]= min(y); [M,xM]=max(y);

plot(x(xm),m,'mo',x(xM),M,'r*')
grid on
xlabel('x')
ylabel('y')
axis([-6,6,-1,26])
end
```