Вариант B
github.com/andy489/DEA
Задача 1. Решете уравнението

$$(e^{-x}-3)y''+e^{-x}(y'+2)=0.$$

Решение:

Имаме уравнение от втори ред, допускащо понижаване на реда (тъй като не участва y). Свежда се до уравнение с разделящи се променливи.

Полагаме $z(x)=y'(x)$. Тогава $y''(x)=z'(x)$ и $(*)\quad (e^{-x}-3)z'+e^{-x}(z+2)=0$, което е уравнение от 1-ви ред с разделящи се променливи.
$(*)\qquad (e^{-x}-3)z'=-e^{-x}(z+2)$
1.) $g(z)=z+2$ се анулира при $z=-2 \Rightarrow z(x)\equiv -2$ е решение на уравнението $(*)$.
2.) $z\neq -2$. Разделяме променливите.
$(e^{-x}-3)\dfrac{dz}{dx}=-e^{-x}(z+2)$ или $\dfrac{dz}{z+2}=\dfrac{-e^{-x}dx}{e^{-x}-3}=\dfrac{de^{-x}-3}{e^{-x}-3}\Bigg|\int$

$ln|z+2|=ln|e^{-x}-3|+c;\quad e^{ln|z+2|}=e^{ln|e^{-x}-3|+c};\quad |z+2|=e^{c}.|e^{-x}-3|$

$z+2=c_1(e^{-x}-3)$, където c_1 е произволна константа и така освен, че премахваме модула, включваме и решението от 1.)

$$y'(x)=z=c_1(e^{-x}-3)-2\Bigg|\int \Rightarrow y(x)=c_1\int(e^{-x}-3)dx-\int 2dx=-c_1\int(e^{-x}-3)d(-x)-\int 2dx$$

$=-c_1e^{-x}-3c_1x-2x+c_2,$ където c_1 и c_2 се произволни константи.

Задача 2. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y''-4y'+5y=0 \\ y(0)=-1,\, y'(0)=2 \end{cases}$$

Решение:

Характеристичния полином на линейното уравнение от втори ред е:
$P(\lambda)=\lambda^2-4\lambda+5=(\lambda-2)^2+1$. Корените на $P(\lambda)=0$ са $\lambda_{1,2}=2\pm i$.
ФСР:= $\{e^{2x}cosx,\, e^{2x}sinx\};\quad y(x)=c_1e^{2x}cosx+c_2e^{2x}sinx=e^{2x}(c_1cosx+c_2sinx)$.
От условието имаме, че $y(0)=-1$ и $y'(0)=2$.

Намираме $y'(x)=2e^{2x}(c_1cosx+c_2sinx)+e^{2x}(-c_1sinx+c_2cosx)$

$y(0)=c_1=-1;\quad y'(0)=c_1+c_2=2\Rightarrow c_2=2-c_1=3\Rightarrow$

$y(x)=e^{2x}(-cosx+3sinx)$.