Задача 21. Определете функцията $\varphi \in C^2(0,3)$ в смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, \ 0 < x < 3, \ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = 0, \ 0 \le x \le 3 \\ u(0,t) = 0, \ u_x(3,t) = 0, \ t \ge 0 \end{cases},$$

така че решението ѝ да бъде стояща вълна.

Решение:

Стояща вълна се получава, когат $\varphi(x)$ е някоя от собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил, която се получава при решаването на даденото уравнение на струната.

Цел: да получим задачата на Щурм-Лиувил и да видим какви са собствените и функции.

Разделяме променливите:
$$u(x,t) = X(t)T(t); \quad X(x) \cdot T''(t) = X''(x) \cdot T(t);$$
 $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const;$
$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}.$$

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0, t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

 $u_r(3,t) = X'(3)T(t) = 0, t \ge 0 \Rightarrow X'(3) = 0$

За X(x) получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ 0 < x < 3 \\ X(0), \ X'(3) = 0 \end{cases}$$

Тя е със собствени стойности $\lambda_k=\left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2,\,k\in\mathbb{N}_0$ и собствени функции $X_k(x)=sin\left(\frac{2k+1}{6}\pi x\right),\,k\in\mathbb{N}_0.$

Всички решения на задачата на Щурм-Лиувил са $X_k(x) = c \cdot sin \left(\frac{2k+1}{2L} \pi x \right)$.

Окончателно, ще получим стояща вълна, ако изберем φ да е някоя от собствените функции X(k).