Задача 5. Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

до интегрално уравнение. Намерете с метода на Пикар първите три последователни приближения $y_0(x),\ y_1(x)\ y_2(x)$ на решението на задачата на Коши.

Решение:

$$\int_1^x y'(s)ds = y(x) - y(1) = y(x) - 2 \Rightarrow y(x) = 2 + \int_1^x y'(s)ds = 2 + \int_1^x \left(y(s) + s^2\right)ds =$$

$$= 2 + \frac{s^3}{3}\Bigg|_1^x + \int_1^x y(s)ds = 2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} + \int_1^x y(s)ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \int_1^x y(s)ds,$$ което е интегралното уравнение на задачата на Коши.

Метод на Пикар:

$y(1) = 2$ (първо приближение)

Чрез рекурентната редица $y_{n+1}(x) = \dfrac{5}{3} + \dfrac{x^3}{3} + \displaystyle\int_1^x y_n(s)ds$ ще намерим по-прецизните приближения.

$$y_1(x) = \frac{5}{3} + \int_1^x 2ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + 2s\Bigg|_1^x = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + 2x - 2 = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{3}$$ (второ приближение)

$$y_2(x) = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \int_1^x y_1(s)ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{s^4}{12} + s^2 - \frac{1}{3}s\right)\Bigg|_1^x =$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{11}{12}$$ (трето приближение)