

1 Задача на Коши за уравнението на струната. Формула на Даламбер.

1.1 Понятие за Частни диференциални уравнения (ЧДУ)

Уравнение от вида

$$a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u = f(x, y), \quad (1)$$

където $(x, y) \in G$ (G -област в равнината) са независими променливи, а $u(x, y)$ е търсената функция се нарича линейно ЧДУ от втори ред с две независими променливи.

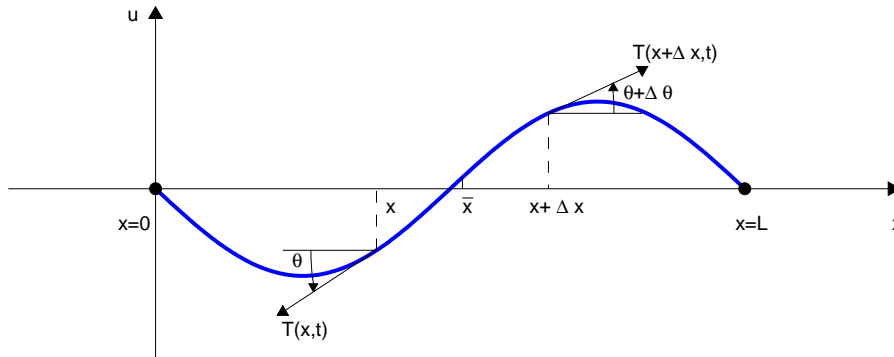
Ще предполагаме, че $|a(x, y)| + |b(x, y)| + |c(x, y)| \neq 0$.

Дефиниция 1.1 Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in G$ уравнението (1) е

1. хиперболично, ако $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$;
2. параболично, ако $D(x_0, y_0) = 0$;
3. елиптически, ако $D(x_0, y_0) < 0$.

Казваме, че уравнението е хиперболично/параболично/елиптически в областта $\Omega \subseteq G$ ако то е хиперболично/параболично/елиптически във всяка точка от Ω .

Пример 1.2 Уравнение на струната.



Фигура 1: Движение на еластична струна.

Разглеждаме една идеално гъвкава неразтеглива струна с фиксирани краища на едно и също хоризонтално ниво. Нека оста Ox е разположена по дължината на струната, чиито краища са в точките $x = 0$ и $x = L$. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$ (чрез придърпване, например) и след това е оставена без външно въздействие, то тя ще се движи във вертикална равнина, при условие, че ефекти като съпротивление на средата или триене в краищата са пренебрегнати. Ще предполагаме, че отклонението на струната от равновесното ѝ положение е малко и следователно всяка точка от нея се движи върху вертикална линия. Да означим с $u(x, t)$ вертикалното отместване на точката x от струната в момента t .

Уравнението описващо това движение на струната е

$$u_{tt}(x, t) - \omega^2 u_{xx}(x, t) = 0,$$

където ω е положителна константа. Възможно е да интерпретираме ω като скоростта, с която малки смущения (вълни) се придвижват по струната.

Тук $a(x, t) = -\omega^2$, $b(x, t) = 0$, $c(x, t) = 1$ и $D(x, t) = b^2 - ac = \omega^2 > 0$. Следователно уравнението на струната е хиперболично в цялата равнина.

Пример 1.3 Уравнение на топлопроводността.

Да разгледаме тънък хомогенен прът, подложен на някакъв топлинен режим. Нека означим с $u(x, t)$ температурата на пръта в точката x , в момента t . Изменението на температурата се описва чрез следното уравнение

$$u_t(x, t) - \omega^2 u_{xx}(x, t) = f(x, t),$$

където ω е положителна константа. Възможно е да интерпретираме ω като коефициент на топлопроводност, а $f(x, t)$ като източник на топлина.

Тук $a(x, t) = -\omega^2$, $b(x, t) = 0$, $c(x, t) = 0$ и $D(x, t) = b^2 - ac = 0$. Следователно уравнението на топлопроводността е параболично в цялата равнина.

Параболични са тези еволюционни (нестационарни) уравнения, при които разпространението на смущенията става с безкрайна скорост, т.е. малко изменение на решението в дадена точка предизвиква веднага изменение на решението във всички точки (разбира се изменението е малко в отдалечените точки).

Пример 1.4 Уравнението на Лаплас

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0$$

се нарича още уравнение на потенциала, понеже се удовлетворява от потенциалите на полета, създадени от равнинно разпределени електрически заряди или гравитационни маси.

Тук $a(x, y) = 1$, $b(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$ и $D(x, y) = b^2 - ac = -1 < 0$. Следователно уравнението на Лаплас е елиптично в цялата равнина.

Пример 1.5 Уравнение на Трикоми

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Тук $a(x, y) = y$, $b(x, y) = 0$, $c(x, y) = 1$ и $D(x, y) = b^2 - ac = -y$. Следователно уравнението на Трикоми е хиперболично в полуравнината $\{y < 0\}$, параболично в точките от правата $\{y = 0\}$ и е елиптично в полуравнината $\{y > 0\}$. Такива уравнения, които променят типа си, ще казваме, че са от смесен тип.

Уравнението на трикоми намира приложения в газовата динамика при моделирането на трансзвукови потоци.

Ако уравнението (1) не променя типа си в G , то съществува неособена смяна на променливите $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, такава че в новите променливи уравнението има следния вид (каноничен вид) в зависимост от типа си:

1. Хиперболични уравнения: $v_{\xi\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$;
2. Параболични уравнения: $v_{\eta\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$
3. Елиптични уравнения: $v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + \tilde{p}v_\xi + \tilde{q}v_\eta + \tilde{r}v = g$

Смяната, която привежда едно уравнение в каноничен вид, може да бъде открита, като се реши така нареченото уравнение на характеристиките на (1):

$$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y) dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0.$$

Ще демонстрираме как може да бъде направено това с уравнението на струната.

Пример 1.6 *Каноничен вид на уравнението на струната.*

Разглеждаме хомогенното уравнение на струната

$$u_{tt}(x, t) - \omega^2 u_{xx}(x, t) = 0.$$

Уравнението на характеристиките е

$$(dx)^2 - \omega^2(dt)^2 = 0.$$

То се разпада на две уравнения с разделящи се променливи

$$dx - \omega dt = 0, \quad dx + \omega dt = 0,$$

които могат да бъдат решени и по следния начин

$$d(x - \omega t) = 0, \quad d(x + \omega t) = 0.$$

Така намираме две семейства характеристики на уравнението на струната

$$x - \omega t = c_1, \quad x + \omega t = c_2,$$

където c_1 и c_2 са произволни константи.

Това ни позволява да направим следната неособена смяна на независимите променливи

$$\xi = x - \omega t, \quad \eta = x + \omega t,$$

за която

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_t \\ \eta_x & \eta_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -\omega \\ 1 & \omega \end{vmatrix} = 2\omega > 0.$$

Обратната смяна е

$$x = \frac{\eta + \xi}{2}, \quad t = \frac{\eta - \xi}{2\omega}.$$

Въвеждаме нова функция

$$U(\xi, \eta) = u\left(\frac{\eta + \xi}{2}, \frac{\eta - \xi}{2\omega}\right)$$

тоест

$$u(x, t) = U(x - \omega t, x + \omega t).$$

Сега вече лесно пресмятаме

$$u_x = U_\xi \xi_x + U_\eta \eta_x = U_\xi + U_\eta,$$

$$u_t = U_\xi \xi_t + U_\eta \eta_t = -\omega U_\xi + \omega U_\eta,$$

$$u_{xx} = U_{\xi\xi} \xi_x + U_{\xi\eta} \eta_x + U_{\eta\xi} \xi_x + U_{\eta\eta} \eta_x = U_{\xi\xi} + 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta},$$

$$u_{tt} = \omega[-U_{\xi\xi} \xi_t - U_{\xi\eta} \eta_t + U_{\eta\xi} \xi_t + U_{\eta\eta} \eta_t] = \omega^2[U_{\xi\xi} - 2U_{\xi\eta} + U_{\eta\eta}].$$

Заместваме в уравнението на струната и получаваме

$$u_{tt} - \omega^2 u_{xx} = -4\omega^2 U_{\xi\eta} = 0.$$

Така достигаме до каноничния вид на уравнението на струната

$$U_{\xi\eta} = 0. \quad (2)$$

1.2 Уравнение на струната

Ще разгледаме движението на точки от струната, които са достатъчно отдалечени от нейните краища, така че поведението на струната в двата ѝ края не оказва влияние върху движението на тези точки. Така достигаме до математическата абстракция, наречена неограничена струна. Нека струната е пусната да се движи в някакъв момент $t = 0$, чрез придърпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие ($f(x, t) \equiv 0$). Така получаваме следната задача на Коши

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - \omega^2 u_{xx}(x, t) = 0, & x \in \mathbf{R}, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & x \in \mathbf{R}, \end{cases} \quad (3)$$

където $\omega = \text{const.} > 0$, а $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$ са произволни функции. При направените предположения задачата на Коши (3) има единствено решение $u \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega} \int_{x-\omega t}^{x+\omega t} \psi(s) ds. \quad (4)$$

Ще изведем формулата на Даламбер чрез метода на характеристиките. Нека $u(x, t) \in C^2(\mathbf{R} \times [0, +\infty))$ е решение на задачата на Коши. Както вече знаем, смяната на променливите

$$\xi = x - \omega t, \quad \eta = x + \omega t,$$

привежда уравнението на струната в каноничен вид

$$U_{\xi\eta} = 0,$$

където

$$u(x, t) = U(x - \omega t, x + \omega t).$$

Следният запис на уравнението (2)

$$[U_\xi(\xi, \eta)]_\eta = 0$$

показва, че $U_\xi(\xi, \eta)$ не зависи от η , тоест

$$U_\xi(\xi, \eta) = H(\xi),$$

където $H(\xi)$ е диференцируема функция. Интегрираме последното равенство при фиксирано η и намираме

$$U(\xi, \eta) = \int H(\xi) d\xi + g(\eta) = h(\xi) + g(\eta),$$

където $g(\eta)$ е двукратно гладка функция, а $h(\xi) = \int H(\xi) d\xi$.

Следователно решението има вида

$$u(x, t) = h(x - \omega t) + g(x + \omega t). \quad (5)$$

Началните условия в задачата на Коши (3) ни дават системата

$$\begin{cases} h(x) + g(x) = \varphi(x), \\ -\omega h'(x) + \omega g'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

Диференцираме първото уравнение и получаваме следната систем за $h'(x)$ и $g'(x)$

$$\begin{cases} h'(x) + g'(x) = \varphi'(x), \\ -h'(x) + g'(x) = \frac{1}{\omega}\psi(x). \end{cases}$$

Следователно

$$h'(x) = \frac{1}{2}\varphi'(x) - \frac{1}{2\omega}\psi(x). \quad (6)$$

Интегрираме равенството

$$h'(s) = \frac{1}{2}\varphi'(s) - \frac{1}{2\omega}\psi(s)$$

от 0 до x и получаваме

$$h(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2\omega} \int_0^x \psi(s) ds + h(0) - \frac{1}{2}\varphi(0).$$

Сега лесно пресмятаме

$$\begin{aligned} g(x) &= \varphi(x) - h(x) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2\omega} \int_0^x \psi(s) ds - h(0) + \frac{1}{2}\varphi(0). \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= h(x - \omega t) + g(x + \omega t) \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega} \left(\int_0^{x+\omega t} \psi(s) ds - \int_0^{x-\omega t} \psi(s) ds \right) \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega} \left(\int_0^{x+\omega t} \psi(s) ds + \int_{x-\omega t}^0 \psi(s) ds \right) \\
 &= \frac{1}{2}[\varphi(x - \omega t) + \varphi(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega} \int_{x-\omega t}^{x+\omega t} \psi(s) ds.
 \end{aligned}$$

По този начин показахме, че ако задачата на Коши (3) има решение то се дава с формулата на Даламбер и следователно е единствено. Лесно се проверява и обратното - ако $\varphi(x) \in C^2(\mathbf{R})$ и $\psi(x) \in C^1(\mathbf{R})$, то формулата на Даламбер дава решени на задачата на Коши (3). Наистина, като използваме формулата

$$\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s) ds \right]'_x = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x)),$$

пресмятаме

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{1}{2}[\varphi'(x - \omega t) + \varphi'(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega}[\psi(x + \omega t) - \psi(x - \omega t)], \\
 u_t &= \frac{\omega}{2}[-\varphi'(x - \omega t) + \varphi'(x + \omega t)] + \frac{1}{2}[\psi(x + \omega t) + \psi(x - \omega t)] \\
 u_{xx} &= \frac{1}{2}[\varphi''(x - \omega t) + \varphi''(x + \omega t)] + \frac{1}{2\omega}[\psi'(x + \omega t) - \psi'(x - \omega t)], \\
 u_{tt} &= \frac{\omega^2}{2}[\varphi''(x - \omega t) + \varphi''(x + \omega t)] + \frac{\omega}{2}[\psi'(x + \omega t) - \psi'(x - \omega t)].
 \end{aligned}$$

Веднага се вижда, че $u_{tt} = \omega^2 u_{xx}$. Остава да проверим началните условия:

$$u(x, 0) = \frac{1}{2}[\varphi(x) + \varphi(x)] + \frac{1}{2\omega} \int_x^x \psi(s) ds = \varphi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \frac{\omega}{2}[-\varphi'(x) + \varphi'(x)] + \frac{1}{2}[\psi(x) + \psi(x)] = \psi(x),$$

с което проверката е завършена.

Пример 1.7 Решете задачата на Коши за уравнението на струнатана

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{\pi^2}{4} u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u|_{t=0} = \cos(x^2), & u_t|_{t=0} = \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^{2x} + 4}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Тук $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(x) = \cos(x^2)$, $\psi(x) = \frac{e^x - 2e^{2x}}{e^{2x} + 4}$. Заместяваме във формулата на Даламбер

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\cos \left(x - \frac{\pi}{2} t \right)^2 + \cos \left(x + \frac{\pi}{2} t \right)^2 \right] + \frac{1}{\pi} \int_{x - \frac{\pi}{2} t}^{x + \frac{\pi}{2} t} \frac{e^s - 2e^{2s}}{e^{2s} + 4} ds.$$

Ще пресметнем неопределения интеграл

$$\begin{aligned}\int \frac{e^s - 2e^{2s}}{e^{2s} + 4} ds &= \int \frac{1 - 2e^s}{e^{2s} + 4} de^s = \int \frac{1}{e^{2s} + 4} de^s - \int \frac{2e^s}{e^{2s} + 4} de^s \\&= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\left(\frac{e^s}{2}\right)^2 + 1} d\left(\frac{e^s}{2}\right) - \int \frac{1}{e^{2s} + 4} de^{2s} \\&= \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{e^s}{2}\right) - \ln(e^{2s} + 4)\end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{1}{2} \left[\cos\left(x - \frac{\pi}{2}t\right)^2 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}t\right)^2 \right] + \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{e^{x+\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) \\&\quad - \frac{1}{2\pi} \arctan\left(\frac{e^{x-\frac{\pi}{2}t}}{2}\right) - \frac{1}{\pi} \ln(e^{2x+\pi} + 4) + \frac{1}{\pi} \ln(e^{2x-\pi} + 4).\end{aligned}$$