Вариант С
github.com/andy489/DEA
Задача 1. Да се реши задачата на Коши

$$\begin{cases} 3(x+1)y' + 6x(x+1)y^4 + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Даденото уравнение е уравнение на Бернули. $y' = \underbrace{-\frac{4}{3(x+1)}}_{a(x)} y \underbrace{-2x}_{b(x)} y^4.$

1.) $y \equiv 0$ е решение на уравнението, но не и на дадената задача на Коши
2.) $y \neq 0$ делим на y^4

$\frac{y'}{y^4} = -\frac{4}{3(x+1)} \, . \, y^{-3} - 2x.$ Полагаме $z(x) = y^{-3}(x)$; $z' = -3y^{-4} \, . \, y' = -3.\frac{y'}{y^4}$;

$\Rightarrow \frac{y'}{y^4} = -\frac{z'}{3}$; $-\frac{z'}{3} = -\frac{4}{3(x+1)}z - 2x$; $z' = \underbrace{\frac{4}{x+1}}_{a(x)} z + \underbrace{6x}_{b(x)}$. Полученото уравнение

е линейно уравнение за z с коефициенти $a(x) = \frac{4}{x+1}$ и $b(x) = 6x$;

$$\int a(x)dx = \int \frac{4}{x+1} d(x+1) = 4ln|x+1| = ln(x+1)^4;$$

$$\int b(x) \, . \, e^{-\int a(x)dx} dx = \int 6x \, . \, e^{-ln(x+1)^4} dx = 6\int \frac{x}{(x+1)^4} dx = 6\int \frac{x+1-1}{(x+1)^4} dx =$$

$$= 6\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^3} - 6\int \frac{d(x+1)}{(x+1)^4} = 6\frac{(x+1)^{-2}}{-2} - 6\frac{(x+1)^{-3}}{-3} = -3(x+1)^{-2} + 2(x+1)^{-3}.$$

$$z(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x) \, . \, e^{-\int a(x)dx} dx\right) = e^{ln(x+1)^4}\left(c - 3(x+1)^{-2} + 2(x+1)^{-3}\right) =$$

$$= (x+1)^4 c - 3(x+1)^2 + 2(x+1) = (x+1)\left(c(x+1)^3 - 3(x+1) + 2\right).$$

$z = \frac{1}{y^3} \Rightarrow y^3 = \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt[3]{z}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)\left(c(x+1)^3 - 3(x+1) + 2\right)}}$. Остана само да

заместим с $y(0) = 1$ и да намерим константата c. $y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{c-3+2}} = 1 \Rightarrow c = 2.$

Окончателно получихме, че $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)\left(2(x+1)^3 - 3(x+1) + 2\right)}}$.

Задача 2. Решете задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} y'' + 4y = 0, \;\; 0 < x < 2\pi \\ y(0) = 0, \quad y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

Решение:

Характеристичния полином на уравнението е: $P(\alpha) = \alpha^2 + 4$. Корените на $P(\alpha) = 0$ са $\alpha_{1,2} = \pm\, 2i$.
ФСР:= $\{cos(2x), sin(2x)\}$; $\qquad y(x) = c_1 \,.\, cos(2x) + c_2 \,.\, sin(2x)$
$y(0) = c_1 = 0$
$y(2\pi) = c_2 \,.\, sin(4\pi) = 0; \quad c_2.0 = 0 \Rightarrow c_2$ си остава произволна константа (условието не носи ограничение за c_2).

$y(x) = c_2 \,.\, sin(2x)$.