Примерни задачи за тест по „Диференциални уравнения и приложения“
за спец. Софтуерно инженерство

Задача 1. Колко решения има задачата?

1.1. $\begin{cases} y' = (y+1)e^{x^2-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} (y')^2 + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} (y')^2 + xy' - y = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\, y'(\pi) = 0 \end{cases}$

Решение:

1.1. Имаме линейно диференциално уравнение от първи ред с едно начално условие - задача на Коши. Следователно имаме единствено решение дефинирано там където са дефинирани коефициентите на уравнението, т.е. в цялото $\mathbb{R}$.
За уравнението $y' = ye^{x^2-1} + e^{x^2-1}$ имаме, че $a(x) = b(x) = e^{x^2-1}$, които са непрекъснати в $\mathbb{R}$. $y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}\right)$. Имаме една степен на свобода - това е произволната константа c и едно начално условие, от което ще намерим тази константа еднозначно. Решението ще е единствено.

1.2. Ще проверим каква точка е $(1,1)$ за уравнението.
$D(x, y) = x^2 - 4y \Rightarrow D(1,1) = -3 < 0$. Следователно в околност на тази точка няма как да разрешим уравнението относно y'. Нито едно решение не минава през тачи точка.

1.3. Имаме линейно уравнение с постоянни коефициенти. Характеристичния полином на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$. Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_1 = 1$. Следователно ФСР:= $\{e^{-3x}, e^x\}$. Тогава $y(x) = c_1 . e^{-3x} + c_2 . e^x$. Т.е. имаме две степени на свобода - произволните константи c_1 и c_2 и едно начално условие. Чрез него ще урпеем да изразим едната константа чрез другата и така ще останем с една степен на свобода. Следователно уравнението има безбройно много решения.

1.4. Аналогично на 1.2.. но за точката $(2,1)$ и дескриминантата $D(x, y) = x^2 + 4y \Rightarrow D(2,1) = 8 > 0$. Следователно задачата ще се сведе до две линейни уравнения от първи ред с едно условие, т.е. ще имаме точно две решения.

1.5. Задача на Щурм-Лиувил. Имаме два варианта:
- 9-ката е собствена стойност и задачата има безбройно много решения
- 9-ката не е собствена стойност и задачата има единствено нулевото решение

Собствените стоиности имат вида
$\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right) \overset{L=\frac{\pi}{2}}{=} \left(2k+1\right)^2$, където $k \in \mathbb{N}_0$. $\lambda_1 = 9 \Rightarrow$ има безброино много решения.

1.6. Аналогично на 1.6. $\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right) \overset{L=\pi}{=} \left(k+\frac{1}{2}\right)^2$. 9-ката няма как да бъде представена в този вид, следователно няма да бъде от спектъра уравнението (от собствените стоиности) и ще имаме единствено нулевото решение.

Задача 2. Дадено е уравнението

$$y' = \frac{4y-2x-6}{x+y-3} \qquad (*)$$

1.) Намерете пресечната точка (a, b) на правите $l_1 : 4y - 2x - 6 = 0$ и $l_2 : x + y - 3 = 0$.
2.) Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(t) = y(t+a) - b$ след като направите смяна на променливите $x = t + a,\ y = z + b$ в уравнението $(*)$?

Решение:
Всяко уравнение от вида $y' = \frac{ax+by+c}{mx+ny+p}$ може да бъде сведено до хомогенно уравнение като се намери пресечната точка на двете прави $l_1 : ax + by + c = 0$ и $l_2 : mx + ny + p = 0$ (ако съществува пресечна точка).

1.) $\begin{cases} 4y-2x-6=0 \\ x+y-3=0 \end{cases},\ y = 3-x,\ 4(3-x)-2x-6=0;\quad 12-4x-2x-6=0;$
$2-x-1=0;\quad x=1 \Rightarrow y=2$. Т.е. пресечната точка на двете прави е $(a, b) = (1,2)$.

2.) $z(t) = y(t+a) - b = y(t+1) - 2;\ \ x = t+1,\ \ y = z+2$

$$y' = \frac{4(z+2)-2(t+1)-6}{t+1+z+2-3} = \frac{4z-2t}{z+t} = \frac{4\left(\frac{z}{t}\right)-2}{\frac{z}{t}+1};\qquad y' = (z+2)' = z' \quad \Rightarrow$$

$z' = \frac{4\left(\frac{z}{t}\right)-2}{\frac{z}{t}+1}$, хомогенно диференциално уравнение.

Задача 3. За уравнението

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2} \qquad (**)$$

намерете частно решение от вида $y_1(x) = \frac{a}{x}$. Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(x)$ след полагане $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(**)$.

Решение:

Уравнение на Рикати. $y_1(x) = \frac{a}{x} \Rightarrow y_1' = -\frac{a}{x^2}$. Заместваме в уравнението и получаваме: $-\frac{a}{x^2} + 2.\frac{a^2}{x^2} = \frac{6}{x^2} \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$;
$D = 1 - 4.2.(-6) = 40 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm 7}{4}$, т.е. $a_1 = 2$ и $a_2 = -\frac{3}{2}$. Получихме две частни решения:
$y_1(x) = \frac{2}{x}$ и $y_2(x) = -\frac{3}{2x}$. За втората заст имаме следното:

$z(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - \frac{2}{x} \Rightarrow z = y - \frac{2}{x}$ или $y = z + \frac{2}{x}$. Заместваме в уравнението на Рикати и получаваме:

$$\left(z + \frac{2}{x}\right)' + 2\left(z + \frac{2}{x}\right)^2 = \frac{6}{x^2}; \quad z' - \frac{2}{x^2} + 2z^2 + \frac{8z}{x} + \frac{8}{x^2} = \frac{6}{x^2};$$

$z' = -\frac{8}{x}z - 2z^2$, което е уравнение на Бернули.

Аналогично се получава и ако използваме второто частно решение $y_2(x) = -\frac{3}{2x}$.

Коментар: уравнение на Рикати е всяко уравнение от вида $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, тоест единственото което му пречи да бъде уравнение на Бернули е наличността на $c(x)$. Рикати въвежда смяната която отстранява $c(x)$. В общия случай уравнението на Рикати не може да се реши, но ако намерим едно частно решение ще може да намерим всички негови решения като го сведем до уравнение на Бернули.

Задача 4. Дадена е задачата на Коши
$$\begin{cases} y' = a(x)y + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases},$$
където $a \in C(-3,5)$. Проверете, че функцията
$$y(x) := e^{\int_1^x a(t)dt}\left(2 + \int_1^x t^2 e^{-\int_1^x t^2 e^{-\int_1^t a(s)ds}} dt\right)$$
е решение на дадената задача на Коши в интервала $(-3,5)$.

Решение:

Имаме, че $a \in C(-3,5)$ - интервал, който съдържа единицата. Проверяваме началното условие:

$y(1) = e^{\int_1^1 a(t)dt}\left(2 + \int_1^1 t^2 e^{\int_1^t a(s)ds} dt\right) = e^0(2+0) = 2$. Сега заместваме с решението в уравнението, за да проверим дали го удовлетворява.

$$y' = e^{\int_1^x a(t)dt}\left(\int_1^x a(t)dt\right)'\big(2 + I(x)\big) + e^{\int_1^t a(t)dt}\Big(\underbrace{x^2 e^{-\int_1^x a(s)ds}}_{I'(x)}\Big) =$$

$= e^{\int_1^x a(t)dt} \,.\, a(x)\big(2 + I(x)\big) + x^2 = a(x)\,.\,y(x) + x^2$, което искахме да получим.

Задача 5. Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = x^2 + y \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

до интегрално уравнение. Намерете с метода на Пикар първите три последователни приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$ $y_2(x)$ на решението на задачата на Коши.

Решение:

$$\int_1^x y'(s)ds = y(x) - y(1) = y(x) - 2 \Rightarrow y(x) = 2 + \int_1^x y'(s)ds = 2 + \int_1^x \big(y(s) + s^2\big)ds =$$

$= 2 + \frac{s^3}{3}\Big|_1^x + \int_1^x y(s)ds = 2 + \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} + \int_1^x y(s)ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \int_1^x y(s)ds$, което е интегралното уравнение на задачата на Коши.

Метод на Пикар:

$y(1) = 2$ (първо приближение)

Чрез рекурентната редица $y_{n+1}(x) = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \int_1^x y_n(s)ds$ ще намерим по-прецизните приближения.

$y_1(x) = \frac{5}{3} + \int_1^x 2ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + 2s\Big|_1^x = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + 2x - 2 = \frac{x^3}{3} + 2x - \frac{1}{3}$ (второ приближение)

$$y_2(x) = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \int_1^x y_1(s)ds = \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \left(\frac{s^4}{12} + s^2 - \frac{1}{3}s\right)\Bigg|_1^x =$$

$= \frac{5}{3} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x}{3} + \frac{11}{12}$ (трето приближение)

Задача 6. Приложете теоремата за съществуване и единственост в правоъгълник $\Pi := \{\,|x| \leq 2,\ |y| \leq 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = y^2 - x - 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

От $|x| \leq 2$ и $|y| \leq 1 \Rightarrow a = 2$ и $b = 1$. От $f(x, y) = y^2 - x - 1$ е непрекъсната в компакта $\Pi \Rightarrow$ е ограничена в него.
Намираме $f'_x = 2y$ и f'_y съществува и е непрекъсната в $\Pi \Rightarrow f$ е липшицова по y в Π.
От $f \in C(\Pi)$ и f е липшицова (от f'_y) $\Rightarrow$ притежава единствено решение. Тъй като $f'_x = 0$ и f'_y не е изпълнено, заключаваме, че $f_{max}(x, y)$ се намира по периферията на компакта Π.
При $x = 2 \Rightarrow f(2,y) = y^2 - 3,\quad min = -3, max = -2$
При $x = -2 \Rightarrow f(-2,y) = y^2 + 1,\quad min = 1, max = 2$
При $y = 1 \Rightarrow f(x,1) = -x,\quad min = -2, max = 2$
При $y = -1 \Rightarrow f(x, -1) = -x,\quad min = -2, max = 2$
$\Rightarrow h = min\{a, \dfrac{M}{b}\} = min\{2, \dfrac{1}{2}\} = \dfrac{1}{2}$. Следователно съществува решение при $x \in \{x_0 - \dfrac{1}{2}, x_0 + \dfrac{1}{2}\} \equiv \{0 - \dfrac{1}{2}, 0 + \dfrac{1}{2}\} \equiv \{-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\}$.

Задача 7. Намерете особените точки на уравнението

$$x(y'^2 + x) = 2yy'$$

Има ли уравнението особени решения?

Решение:

$x((y')^2 + x) = 2yy' \Rightarrow x(y')^2 - 2yy' + x^2 = 0$. Полагаме $z = y'$.
$F(x, y, z) = xz^2 - 2yz + x^2;\quad F'_z(x, y, z) = 2xz - 2y$.
Особените точки удовлетворяват условията.

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ F'_z(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} xz^2 - 2yz + x^2 = 0 \\ 2xz - 2y = 0 \end{cases}.$$

Точката $(x, y) = (0,0)$ очевидно е решение. Тогава от второто уравнение получаваме, че $z = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0$ и заместваме в първото уравнение:

$$x\,.\,\frac{y^2}{x^2} - 2y\,.\,\frac{y}{x} + x^2 = 0;\quad \frac{y^2}{x} - \frac{2y^2}{x} + x^2 = 0;\quad -\frac{y^2}{x} + x^2 = 0;\quad -y^2 + x^3 = 0$$

Следователно особените точки са всички от вида $\left(s, \sqrt[3]{s^2}\right)$. Тъй като $y^2 = x^3$, то очевидно x не може да е отрицателно, т.е. $x \geq 0$. Всяка точка от парабулата $y = x^{\frac{3}{2}}$ е особена.

Остана да проверим дали $y = x^{\frac{3}{2}}$ е решение на уравнението на задачата.

$x((y')^2 + x) = 2yy'; \quad x\left((\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}})^2 + x \right) = 2y\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}; \quad x\left(\frac{9}{4}x + x\right) = 2.x^{\frac{3}{2}}.x^{\frac{1}{2}}.\frac{3}{2} = x^2.$

Оевидно $\frac{13}{4}x^2 \neq x^2$ и следователно нямаме особени решения на уравнението.

Задача 8. Дадено е уравнението

$$y'' + y' - y = 1$$

а) Намерете общото решение на уравнението;
б) Намерете всички решения на уравнението, които са ограничени за $x \in [0, +\infty)$;
в) Намерете всички периодични решения на уравнението.

Решение:

а) Характеристичния полином на хомогенната част е $R(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 1$. Корените на $R(\lambda) = 0$ са $\lambda_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, следователно ФСР:$= \{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$ и общото решение има вида $y_o(x) = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$, където c_1 и c_2 са произволни константи.
б) За да намерим всички решения $y_\forall$ на уравнението, е необходимо да намерим и частно решение $z(x)$. Частното решение намираме по следния начин:
$f(x) = 1 = P_m(x)e^{\gamma x}, \gamma \in C \Rightarrow m = 0, \gamma = 0$ - не е корен на характеристичното уравнение на хомогенната част $\Rightarrow s = 0$, където
$z(x) = x^s . Q_m(s) . e^{\gamma x} = 1.c_3.1 = c_3$. Тоест търсим такова решение, че
$z''(x) + z'(x) - z(x) = 1$ или $0 + 0 - c_3 = 1 \Rightarrow c_3 = -1$.

Всички решения на уравнението са
$y(x) = y_o(x) + z(x) = c_1 e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x} - 1$

Тъй като $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x} = +\infty$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x} = 0 \Rightarrow c_1$ трябва да е нула, за да бъдат ограничени решенията в искания интервал. Следователно всички такива решения ще са$y(x) = -1 + c_2 e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}x}$.

в) Тъй като функциите $e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x}$ и $e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}x}$ са монотонни и непериодични, то за да са периодични решенията е необходимо $c_1 = c_2 = 0$ и така $y(x) = -1$ е единсвеното периодично решение за уравнението.

Задача 9. Дадено е уравнението

$$y'' + py' + 4y = 0,$$

където p е реален параметър.

а) При какви стойности на p всички решения на уравнението са ограничени за $x \in (-\infty, +\infty)$?

б) При какви стойности на p всички решения на уравнението клонят към 0 при $\to -\infty$?

в) При какви стойности на p уравнението има поне едно периодично решение, различно от $y(x) \equiv 0$

Решение:

Характеристичния полином на хомогенната и единствена част на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + 4$. За $P(\lambda) = 0$ имаме, че $D = p^2 - 16 = (p-4)(p+4)$.

I сл. При $p \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

$D > 0 \Rightarrow$ имаме два реални корена $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2} \Rightarrow$

ФСР:$= \{e^{\frac{-p+\sqrt{p^2-16}}{2}x}, e^{\frac{-p-\sqrt{p^2-16}}{2}x}\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{-p+\sqrt{p^2-16}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-p-\sqrt{p^2-16}}{2}x}$

II сл. При $p \in (-4;\ 4)$

$D > 0 \Rightarrow$ имаме два комплексни корена

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{16 - p^2}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{16-p^2}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{16-p^2}}{2} \Rightarrow$$

ФСР:$= \{e^{\alpha x}cos(\beta x), e^{\alpha x}sin(\beta x)\}$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} cos\left(\frac{\sqrt{16-p^2}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{p}{2}x} sin\left(\frac{\sqrt{16-p^2}}{2}x\right)$$

III сл. При $p = \pm 4$

$D = 0 \Rightarrow$ имаме двоен корен $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2} = \pm 4$.

При $p = 4:\ y(x) = c_1 e^{-2x} + x c_2 e^{-2x}$; При $P = -4:\ y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

а) За да са ограничени решенията на уравнението е необходимо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = const$.

Изследваме първо в интервала $(-\infty; -4)$:

$\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2-16}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2-16} < 2 \pm p$, няма такива стойности на p, за които това да е изпълнено едновременно, както в този интервал, така и в интервала $(4; +\infty)$

В интервала $p \in (-4;\ 4)$: $e^{-\frac{p}{2}x}$ може да е ограничена, единствено ако $p = 0$, което е от интервала. И тъй като $sin(x)$ и $cos(x)$ са ограничени функции, то и всички решения ще бъдат ограничени.

При $p = \pm 4$ няма как да ограничим решенията при положение че x пробягва от $-\infty$ до $+\infty$.

б) При $p \in (-\infty; -4)$ и $x \to -\infty$ всички решения клонят към 0.

в) Единствено при $p = 0$ ще има периодични решения.

Задача 10. Дадено е уравнението

$$(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0,\ x > 1.$$

а) Намерете две частни решения на уравнението от вида $y_1(x) = e^{ax}$ и $y_2(x) = bx + c,\ b \neq 0$.

б) Покажете, че намерените частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими в интервала $(1,\ +\infty)$.

в) Намерете общото решение на уравнението.

Решение:

а)

За $y_1(x) = e^{ax}$ имаме $y_1 = e^{ax},\ y_1' = ae^{ax},\ y_1'' = a^2e^{ax} \Rightarrow$

$(x+1)a^2e^{ax} + (x-2)ae^{ax} - e^{ax} = 0 \Big|\ : e^{ax} \neq 0$

$(x-1)a^2 + (x-2)a - 1 = 0;\quad a^x - a^2 + ax - 2a - 1 = 0;$

$(a^2+a)x - (a+1)^2 = 0;\quad \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a = 0 \\ (a+1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}.$

За $y_2(x) = bx + c$ имаме $y_2 = bx + c,\ y_2' = b,\ y_2'' = 0 \Rightarrow$

$(x-1).0 + (x-2)b - bx - c = 0;\quad bx - 2b - bx - c = 0;$

$2b + c = 0 \Rightarrow\ c = -2b$. Избираме $b = 1 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y_2(x) = x - 2.$

б) Ако детерминанската на Вронски не е равна на нула в посочения интервал, ще е достатъчно, за да кажем, че намерените частни решения са ЛНЗ:

$$detW = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x-2 \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = e^{-x} + xe^{-x} - 2e^{-x} = xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-1) \overset{x>1}{>} 0$$

в) $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{-x} + c_2(x-2)$, където c_1 и c_2 са произволни константи.

Задача 11. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = 2xy + 4x^3 - 2x^5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Решение:

Уравнение от първи ред с начално условие.

$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)$, където $a(x) = 2x$ и $b(x) = 4x^3 - 2x^5$.

$\int a(x)dx = \int 2xdx = x^2$;

$$\int b(x)e^{-x^2}dx = \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int -2x^5e^{-x^2} = \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int -2x\,.\,x^4e^{-x^2}dx \underbrace{=}_{de^{-x^2}=-2xe^{-x^2}dx}$$

$$= \int 4x^3e^{-x^2}dx + \int x^4de^{-x^2} = \int 4x^3e^{-x^2}dx + x^4e^{-x^2} - \int e^{-x^2}dx^4 = \cancel{\int 4x^3e^{-x^2}dx} + x^4e^{-x^2} - \cancel{\int 4x^3e^{-x^2}dx} =$$

$= x^4e^{-x^2}$. Следователно $y(x) = e^{x^2}\left(c + x^4e^{-x^2}\right) = ce^{x^2} + x^4$.

От началното условие намираме, че $y(0) = c = 1 \Rightarrow y(x) = e^{x^2} + x^4$.

Задача 12. Решете уравнението

$$y''' - 3y'' + 2y' = 4x - 6.$$

Решение:

Всички решения ще намерим като съберем общото решение $y_0(x)$с едно частно решение $z(x)$. Характеристичния полином на хомогенната част на уравнението има вида: $P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$. Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = 0,\, \lambda_2 = 1,\, \lambda_3 = 2$.

ФСР:$= \{1,\, e^x,\, e^{2x}\}$, от където намираме общото решение$y_0(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x}$.

За частно решение може да подходим по следния начин:
$f(x) = 4x - 6 = Q_m(x)\,.\,e^{\gamma x} \Rightarrow m = 1,\, \gamma = 0$, като γ е еднократен корен на характеристичния полином на хомогенната част, откъдето следва, че $s = 1$, където $z(x) = x^s\,.\,R_m(x)\,.\,e^{\gamma x} = xR_1(x) = x(ax+b) = ax^2 + bx$. Заместваме с получения вид на частно решение в уравнението и получаваме, че
$z'''(x) - 3z''(x) + 2z'(x) = 0 - 6a + 4ax + 2b = 4x - 6 \Rightarrow (4x-6)(a-1) = 2b.$

Лесно се вижда, че за да е изпълнено последното равенството за произволно x е необходимо $a = 1$ и $b = 0$. Следователно решенията са
$y(x) = y_0(x) + z(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + x^2$.

Забележка: за да е пълно решението е необходимо да докажем, че общото и частното решение са ЛНЗ, което става като докажем, че детерминантата на Вронски не се нулира, което е очевидно, тъй като имаме квадратна функция и експоненциална.

Втори начин:

Търсим частно решение на даденото уравнение от вида:
$z(x) = b_1(x) + b_2(x)e^x + b_3(x)e^{2x}$
$y_1 = 1; \quad y_2 = e^x; \quad y_3 = e^{2x} \qquad\qquad y_1(x)b_1'(x) + y_2(x)b_2'(x) + y_3(x)b_3'(x) = 0$
$y_1' = 0; \quad y_2' = e^x; \quad y_3' = 2e^{2x} \qquad\qquad y_1'(x)b_1'(x) + y_2'(x)b_2'(x) + y_3'(x)b_3'(x) = 0$
$y_1'' = 0; \quad y_2'' = e^x; \quad y_3'' = 4e^{2x} \qquad\qquad y_1(x)b_1''(x) + y_2(x)b_2''(x) + y_3(x)b_3''(x) = 4x - 6$

$\Rightarrow b_1' + e^xb_2' + e^{2x}b_3' = 0$
$e^xb_2' + 2e^{2x}b_3'(x) = 0 \Rightarrow e^xb_2'(x) = -2e^{2x}b_3'(x) \Big| : e^x \Rightarrow b_2'(x) = -2e^xb_3'(x)$
$e^xb_2'(x) + 4e^{2x}b_3'(x) = 4x - 6; \;\; -2e^{2x}b_3'(x) + 4e^{2x}b_3'(x) = 4x - 6 \Big| : 2;$
$e^{2x}b_3'(x) = 2x - 3; \qquad b_3' = \dfrac{2x-3}{e^{2x}} = (2x-3)e^{-2x} \Rightarrow b_3(x) = -(x-1)e^{-2x} + c_4$

$b_2'(x) = -2e^x(2x-3)e^{-2x} = -2(2x-3)e^{-x}$
$\Rightarrow b_2(x) = \displaystyle\int -2(2x-3)e^{-x}dx = (4x-2)e^{-x} + c_5$
$b_1'(x) = 4x + 6 + 2x - 3 = 0;$
$b_1'(x) = 2x - 3 \Rightarrow b_1(x) = \displaystyle\int (2x-3)dx - x^2 - 3x + c_6$. Нека $c_6 = c_5 = c_4 = 0$
$\Rightarrow z(x) = x^2 - 3x + (4x-2)e^{-x}e^x - (x-1)e^{-2x}\,.\,e^{2x} = x^2 - 3x + 4x - 2 - x + 1 = x^2 - 1$
$\Rightarrow y(x) = y_0(x) + z(x) = c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} + x^2 - 1.$

Задача 13. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$$

а) Покажете, че функцията $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$ не зависи от t.
б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Решение:

а) $\qquad v'(t) = \left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = 2x(t)\,.\,\dot{x}(t) + 2y(t)\,.\,\dot{y}(t) =$

$$= 2x(t)\,.\,x(t)\,.\,y(t) + 2y(t)\,.\,\big(-x^2(t)\big) = 2x^2(t)\,.\,y(t) - 2x^2(t)\,.\,y(t) = 0$$

$$\Rightarrow\ v(t) = const\,.$$

Може да подходим и по следния начин:

$$\frac{dx}{dt} = xy \Rightarrow dt = \frac{dx}{xy};\ \frac{dy}{dt} = -x^2 \Rightarrow dt = -\frac{dy}{x^2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{x^2} \quad \text{или} \quad xdx = -ydy \Big| \int$$

$$\int xdx = -\int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \quad \text{или} \quad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

функцията $x^2(t) + y^2(t)$ е първи интеграл на системата, т.е. ако заместим в нея с някое решение на системата, ще получим константа. (това издава, че фазовите криви ще са елипси (окръжността е частен случай на елипсата)).

б) Равновесните точки са там където скоростите се нулират, т.е. където се нулират десните страни на системата.

$\begin{cases} xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0{,}y_0)$ са равновесните точки, където $y_0 \in \mathbb{R}$ е реален параметър.

Теоремата

на Ляпунов ни казва, че понякога може да определим какъв е вида на точките само от първото линейно приближение на системата. Нека проверим. Линейното проближение на системата го взимаме от матрицата на Якоби:

$Ja(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$, където $f = xy, g = -x^2$

$$\Rightarrow\ Ja(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 0 \end{pmatrix};\ Ja(0{,}y_0) - \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|Ja(0{,}y_0) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} y_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(y_0 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = y_0$.

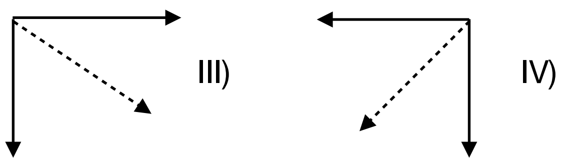
Сега, ако $y_0 > 0$ ще имаме неустойчивост, но ако $y_0 < 0$, имаики че $\lambda_1 = 0$ (не е нито положителна нито отрицателна) не попадаме в нито един от двата случая и първото приближение не може да определи вида на точките $(0{,}y_0)$ за $y_0 < 0$.

Но ние знаем какъв е вида на фазовите криви и ще проверим посоката на фазовите тангенциални векторчета. Имаме $x^2 = -y^2 + c$.

$\vec{\tau}(x, y) = (xy, -x^2)$. Очевидно втората координата на този вектор е винаги отрицателна.

Ще разгледаме само III-ти и IV-ти квадрант, защото само там ще имаме $y_0 < 0$.

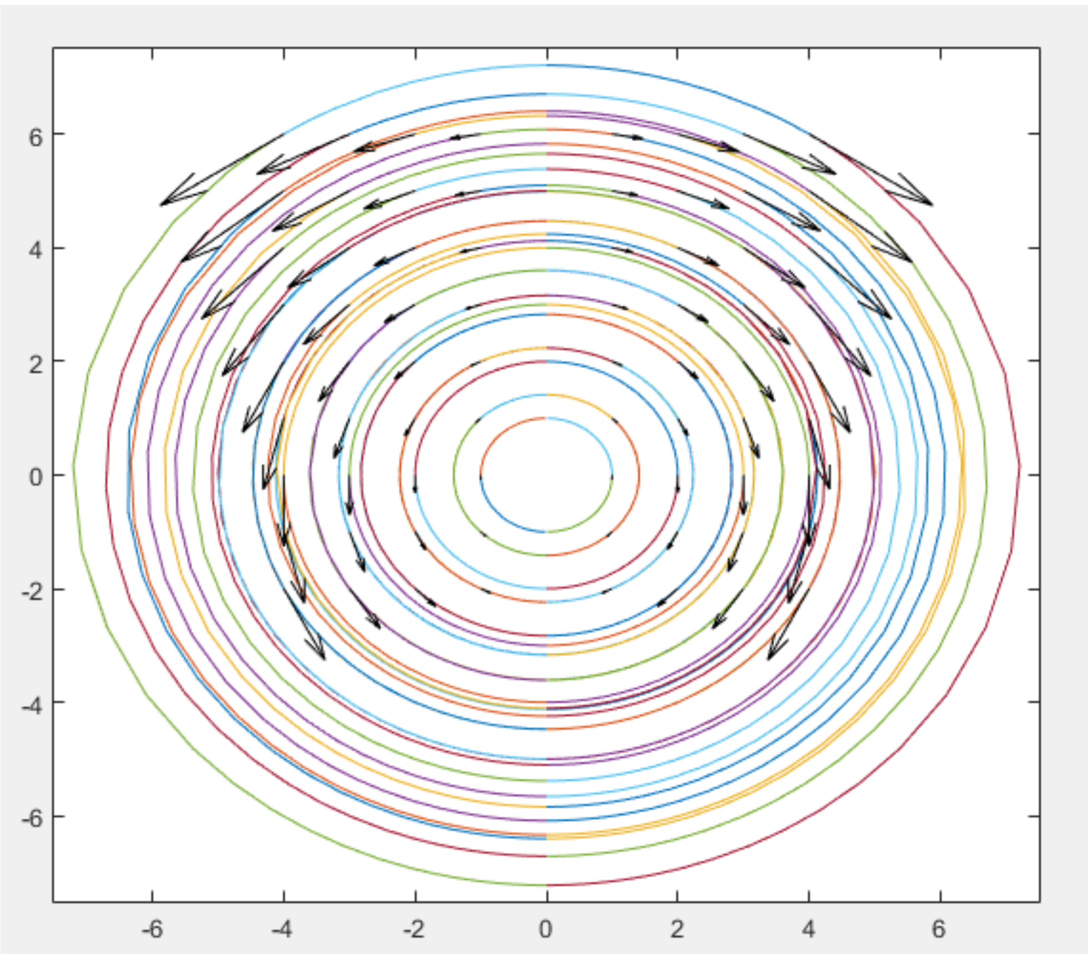
Да вземем първо III-ти квадрант. Там имаме $x_0 < 0, y_0 < 0$, следователно $xy > 0$



С аналогични разсъждения може да заключим, че в IV-ти квадрант тангенциалните вектори отново ще сочат към ординатата, където са равновесните точки, т.е. там ще имаме устойчивост, но не и асимптотична, тъй като не всички собствени стойности са отрицателни (имаме $\lambda_1 = 0$, трябваше да е отрицателно, за да кажем че устойчивостта е асимптотична).

И остана да проверим за $y_0 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}(x_0, y_0) = (0, -x_0^2)$, т.е. ще имаме неустойчивост.

Фазов портрет за онагледяване на получения резултат:



MathLab код на фазовия портрет:

```
Command Window
>> function zad3
     tmax=5;

     function z=ff(t,y) %y1'=y1*y2; y2'=-y1^2
         z=[y(1)*y(2); -y(1)^2];
     end

ak=0;
bk=2;

x=ak-4 : 1 : ak+4;
y=bk-4 : 1 : bk+4;

[X Y]=meshgrid(x,y);
     for i=1:length(x)
         for j=1:length(y)
                 [T,Z]=ode45(@ff, [0,tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
                 [T1,Z1]=ode45(@ff, [0,-tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

                 plot(ak,bk,'r')
                 hold on
                 plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2));
                 axis([ak-7.5 ak+7.5 bk-9.5 bk+5.5]);
         end
     end
     DX=X.*Y;
     DY=-X.^2;
     quiver(X,Y,DX,DY,1.8,'k');
end
```

Задача 14. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - e^t \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

намерете линейно диференциално уравнение, което се удовлетворява от функцията $y(t)$.

Решение:

От второто уравнение $\Rightarrow x = \dot{y} + y \Rightarrow \dot{x} = \ddot{y} + \dot{y}$. Заместваме x и $\dot{x}$ в първото уравнение и получаваме $\ddot{y} + \cancel{\dot{y}} = \cancel{\dot{y}} + y + 2y - e^t$; $\ddot{y} - 3y = -e^t$.
Търсим общото решение на хомогенното уравнение $\ddot{y} - 3y = 0$.
характеристичния му полином е $P(\alpha) = \alpha^2 - 3 = 0$ с корени $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{3}$ $\Rightarrow$
$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}$, където c_1 и c_2 са произволни константи.
Сега търсим частно решение от вида:
$z(t) = b_1(t)e^{\sqrt{3}t} + b_2(t)e^{-\sqrt{3}t}$, където $b_1(t)$ и $b_2(t)$ са някакви неизвестни функции.

$$\begin{cases} b_1'(t)e^{\sqrt{3}t} + b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = 0 \\ \sqrt{3}b_1'(t)e^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$b_1'(t) = \frac{-b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t}}{e^{\sqrt{3}t}} = -b_2'(t)e^{-2\sqrt{3}t} \Rightarrow -\sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} - \sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t}$$

$$-2\sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t}; \qquad b_2'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t+\sqrt{3}t} = \frac{-e^{t(\sqrt{3}-1)}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow b_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int e^{t(\sqrt{3}-1)}dt = -\frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}e^{t(\sqrt{3}-1)} = \frac{-e^{t(\sqrt{3}-1)}}{6-2\sqrt{3}} + c_3$$

$\left(c_3 = c_4 = 0\right)$

$$b_1(t) = \frac{e^{t(\sqrt{3}-1)}.\,e^{-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{e^{(-1-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow b_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{1}{(-1-\sqrt{3})}e^{(-1-\sqrt{3})t} = -\frac{e^{-(1+\sqrt{3})t}}{6+2\sqrt{3}} + c_4$$

$$z(t) = -\frac{e^{-(1+\sqrt{3})t}}{6+2\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t} - \frac{e^{t(\sqrt{3}-1)}}{6-2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}t} = -\frac{e^{-t}}{6+2\sqrt{3}} - \frac{e^{-t}}{6-2\sqrt{3}} =$$

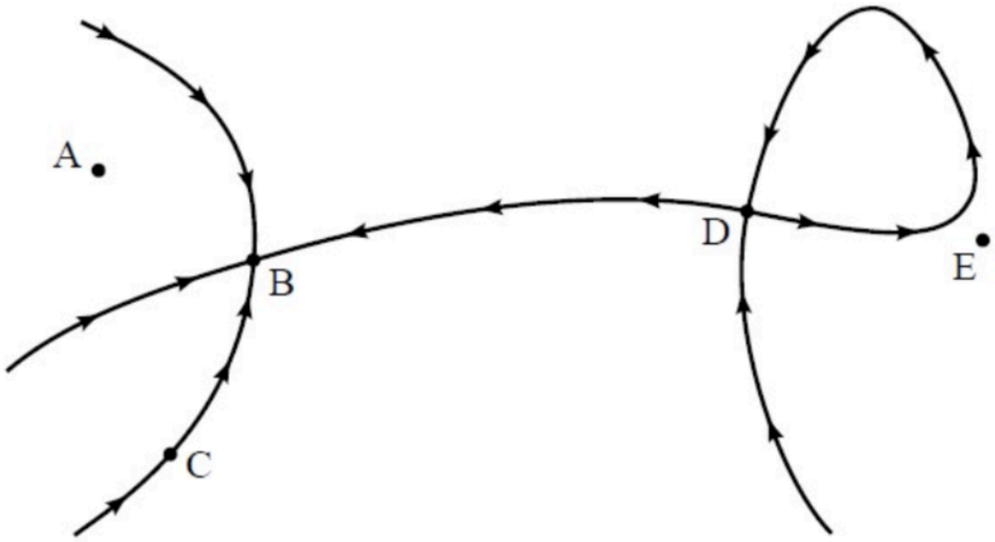
$$= \frac{-e^{-t}(6 - \cancel{-2\sqrt{3}} + 6 + \cancel{2\sqrt{3}})}{6^2 - 4.3} = \frac{-e^{-t}.12}{36-12} = -\frac{e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0(t) + z(t) = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} - \frac{e^{-t}}{2}.$$

Задача 15. На чертежа са изобразени няколко фазови криви и всички равновесни точки на A, B, C, D и E на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$$

където f, $g \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Колко са изобразените фазови криви? За кои от равновесните точки можем със сигурност да твърдим, че са неустойчиви? Кои от равновесните точки е възможно да са устойчиви?



Решение:

Изобразените фазови криви са общо 6. C, D са неустойчиви със сигурност. B е устойчива, а A, E е възможно да са устойчиви.

Задача 16. Определете кои от следните системи са линейни, кои са нелинейни и кои са автономни.

$$(1)\begin{cases} \dot{x} = x + y - t \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad (2)\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = 3x + 2y + t^2 \end{cases} \quad (3)\begin{cases} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = -x + 4y^2 \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases} \quad (5)\begin{cases} \dot{x} = x - y + t \\ \dot{y} = x + y \end{cases} \quad (6)\begin{cases} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

линейни	(1), (4), (5), (6)
нелинейни	(2), (3)
автономни	(3), (4), (6)

- Автономни системи са системи, на който десните им страни не зависят от t.

Задача 17. Намерете равновесните точки на системата.

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

В околност на всяка една от равновесните точки напишете съответното линейно приближение на системата.

Решение:

Равновесните точки са там където скоростите са равни на нула. Т.е. десните страни на системата са 0: $\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \mp 1 \end{cases} \Rightarrow$ равновесните точки са $(\pm 1, \mp 1)$

$f(x, y) = y^2 - 1$ и $g(x, y) = x + y \Rightarrow f_x = 0,\ f_y = 2y,\ g_x = 1,\ g_y = 1.$

Образуваме матрицата на Якоби: $Ja(a, b) = \begin{pmatrix} f_x(a, b) & f_y(a, b) \\ g_x(a, b) & g_y(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

За точката $(1, -1) \Rightarrow a = 1$ и $b = -1 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(1, -1)\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \dot{x} = 0(x - 1) - 2(y + 1) = -2y - 2$ и $\dot{y} = 1(x - 1) + 1(y + 1) = x + y \Rightarrow$

$\begin{cases} \dot{x} = -2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$. За точката $(-1, 1) \Rightarrow a = -1$ и $b = 1 \Rightarrow J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(-1, 1)\begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\dot{x} = 0(x + 1) + 2(y - 1) = 2y - 2$ и $\dot{y} = (x + 1) + 1(y - 1) = x + y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} - 2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

Окончателно: 1) При точката $(1, 1) \to \begin{cases} \dot{x} = -2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

2) При точката $(-1, 1) \to \begin{cases} \dot{x} = 2y - 2 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

Задача 18. Намерете решението на задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = 2sinx,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение:

Общ вид на задачата на Кошу за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - w^2 u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{cases} ;\ w = const.,\ \varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}),\ \psi(x) \in C^1$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - wt) + \varphi(x + wt)\right] + \frac{1}{2w}\int_{x-wt}^{x+wt} \psi(s)ds.$$

От условието $\Rightarrow w = 2,\ \varphi(x) = 2sinx,\ \varphi(x) = 0$
$\psi(x) \in C^1(\mathbb{R})$: 0 - непрекъсната функция и $\psi'(x) = 0$ - непрекъсната
$\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R})$: $2sinx$ - непрекъсната функция и $\varphi'(x) = 2cosx$ - непрекъсната

$\varphi''(x) = -2sinx$ - непрекъсната

$\varphi(x - 2t) = 2sin(x - 2t)$ и $\varphi(x + 2t) = 2sin(x + 2t)$; $\displaystyle\int_{x-2t}^{x+2t} 0ds = 0$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}\left[2sin(x - 2t) + 2sin(x + 2t)\right] = sin(x - 2t) + sin(x + 2t) =$$
$$= 2sin\left(\frac{x - \cancel{2t} + x + \cancel{2t}}{2}\right)cos\left(\frac{\cancel{x} - 2t - \cancel{x} - 2t}{2}\right) = 2sinxcos(2t).$$

Окончателно, $u(x,t) = 2sinx\,.\,cos(2t)$.

Задача 19. Намерете собствените сойности и собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 5 \\ X(0) = 0,\ X'(5) = 0 \end{cases}$$

За кои стойности на λ задачата няма други решения, освен $X(x) \equiv 0$?

Решение:

Характеристичния полином на уравнението е$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0$ и има следните

корени: $\alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-\lambda},\ \ \lambda < 0 \\ 0,\ \ \lambda = 0 \\ \pm i\sqrt{\lambda},\ \ \lambda > 0\ \ \left(\alpha = 0, \beta = \sqrt{\lambda}\right) \end{cases}$. Общото решение

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \ \ c_1, c_2 - const., \lambda < 0 \\ c_1 + c_2 x \ \ , c_1, c_2 - const., \lambda = 0 \\ c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin\left(\sqrt{\lambda}x\right), c_1, c_2 - const., \ \ \lambda > 0 \end{cases}$$

1 сл.) При
$\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$
При $x = 5 \Rightarrow X'(5) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{5\sqrt{-\lambda}} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-5\sqrt{-\lambda}=0} \Big| : \sqrt{-\lambda} \neq 0$
$c_1 e^{5\sqrt{-\lambda} - c_2 e^{-5\sqrt{-\lambda}}} = 0 \Rightarrow c_1(e^{5\sqrt{-\lambda}} + e^{-5\sqrt{-\lambda}}) = 0$. Тъй като $e^{5\sqrt{-\lambda}}$ и $e^{-5\sqrt{-\lambda}}$ са ЛНЗ
$\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \rightarrow$ тривиално решение $\Rightarrow \lambda < 0$ е решение.

2 сл.) При $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow X'(x) = c_2$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 = 0;$ При $x = 5 \Rightarrow X'(5) = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ е решение.

3 сл.) При $\lambda > 0 \Rightarrow$
$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = -\sqrt{\lambda}c_1 sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 cos0 + c_2 sin0 = c_1 = 0 \Rightarrow X'(x) = \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)$
При $x = 5 \Rightarrow \sqrt{\lambda}c_2 cos(5\sqrt{\lambda}) = 0 \Big| : \sqrt{\lambda} \neq 0 \Rightarrow c_2 cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$
3.1) $c_2 = 0$, т.е.
$cos(5\sqrt{\lambda}) \neq 0 \Rightarrow 5\sqrt{\lambda} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \lambda \neq \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}\right)^2 \neq \left(\frac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2$
3.2) $c_2 \neq 0 \Rightarrow cos(5\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2$
$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k+1)}{10}\right)^2$-собствени стойности; $X_k(x) = sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)$ -собствени функции;

При $\lambda \leq 0$ и $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2, X(0) = 0.$

Задача 20. Решете смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = sin(3\pi x), u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Решение:

Струна със закрепени краища:

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t\Big|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le L \\ u\Big|_{x=0} = 0,\ u\Big|_{x=L} = 0,\ t \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(x) \in C^2[0,L],\ \psi(x) \in C^1[0,L] \\ \varphi(x) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0 \\ \varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0 \end{cases}$$

$u_{tt} - 1u_{xx} = 0 \Rightarrow a^2 = 1$ и $a > 0 \Rightarrow a = 1, \quad L = 1$
$\varphi(x) = sin(3\pi x),\ \ \varphi'(x) = 2\pi cos(3\pi x),\ \ \varphi''(x) = -9\pi^2 sin(3\pi x)$
$\psi(x) = \psi'(x) = 0; \quad \varphi(0) = sin0 = 0; \quad \varphi(1) = sin(3\pi) = sin(\pi) = 0;$
$\varphi''(0) = -9\pi^2 sin0 = 0; \quad \varphi''(5) = -9\pi^2 sin(16\pi) = -9\pi^2 sin(3\pi) = 0;$
$\psi(0) = 0; \quad \psi(1) = 0.$

Задача 21. Определете функцията $\varphi \in C^2(0,3)$ в смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(3,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases},$$

така че решението ѝ да бъде стояща вълна.

Решение:

Стояща вълна се получава, когат $\varphi(x)$ е някоя от собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил, която се получава при решаването на даденото уравнение на струната.
Цел: да получим задачата на Щурм-Лиувил и да видим какви са собствените и функции.

Разделяме променливите: $u(x,t) = X(t)T(t);\ \ X(x)\,.\,T''(t) = X''(x)\,.\,T(t);$
$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const; \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}.$$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ \ t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0$
$u_x(3,t) = X'(3)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X'(3) = 0$

За $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ 0 < x < 3 \\ X(0),\ \ X'(3) = 0 \end{cases}$$

Тя е със собствени стойности $\lambda_k = \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$ и собствени функции $X_k(x) = sin\left(\frac{2k+1}{6}\pi x\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Всички решения на задачата на Щурм-Лиувил са $X_k(x) = c\,.\,sin\left(\frac{2k+1}{2L}\pi x\right)$.

Окончателно, ще получим стояща вълна, ако изберем φ да е някоя от собствените функции $X(k)$.

Задача 22. Определете типа на уравнението

$$u_{xx} - 4u_{yy} - x^3 u_x - 5y^2 u_y = 0$$

във всяка точка $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнението.

Решение:

Казваме, че в точката $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$ (област в равнината) уравнението $a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + p(x,y)u_x + q(x,y)u_y + r(x,y)u = f(x,y)$ е

1. хиперболично, ако $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$;
2. параболично, ако $D(x_0, y_0) = 0$;
3. елиптнично, ако $D(x_0, y_0) < 0$.

В нашия случай ще имаме, че $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}$ и $D(x, y) = 0 - 1.(-4) = 4 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично в цялата равнина.

Уравнението на характеристиките на даденото уравнение от условието има вида:

$a(x,y)(dy)^2 - 2b(x,y)dxdy + c(x,y)(dx)^2 = 0$, където
$a(x,y) = 1, b(x,y) = 0, c(x,y) = -4$.

$(dy)^2 - 4(dx)^2 = 0 \qquad (dy - 2dx)(dy + 2dx) = 0$

От $dy - 2dx = 0 \Rightarrow d(y - 2x) = 0 \Rightarrow y - 2x = c_1 \Rightarrow y = 2x + c_1$;
От $dy + 2dx = 0 \Rightarrow d(y + 2x) \Rightarrow y + 2x = c_2 \Rightarrow y = -2x + c_2$

Следователно характеристичните криви на уравнението са:
$y = 2x + c_1$, $y = -2x + c_2$, където $c_1, c_2 - const$.

Задача 22. Кое е общото решение на уравнението $u_{xy} = 0$ в $\mathbb{R}^2$?

Решение:

Знаем, че $u_{xy} = u_{yx}$; $(u_y)_x = 0$; Също така знаем, че ако $f'(x) = 0$, то $f(x) = const$.

$u_y = f(y) \Rightarrow u(x, y) = \int f(y)dy = F(y) + g(x)$, където $F(y)$ е примитивната на $f(y)$.

Проверка: $u(x, y) = F(y) + g(x)$; $\left(u(x, y)\right)_y^| = f(y)$; $\left(g(x)\right)_y^| = 0$;

$$\left(\left(u(x, y)\right)_y^|\right)_x^| = \left(f(y)\right)_x^| = 0.$$