

## ЗАДАЧИ ЗА ПОДГОТОВКА ЗА КОНТРОЛНО

github.com/andy489

**Задача 1.** Решете системата с метода на изключването:

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 4y \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

Решение:

От първото уравнение имаме, че  $y = \frac{1}{4}(\dot{x} - x)$ , заместваме във второто и получаваме, че

$$\left( \frac{1}{4}(\dot{x} - x) \right)' = x - \frac{1}{4}(\dot{x} - x) \quad \text{или} \quad \frac{1}{4}(\ddot{x} - \dot{x}) = x - \frac{1}{4}(\dot{x} - x);$$

$$\ddot{x} - \dot{x} = 4x - \dot{x} + x; \quad \ddot{x} - 5x = 0 \rightarrow (1). \quad \text{Аналогично за } x = \dot{y} + y \text{ от}$$

второто уравнение, заместваме в първото и получаваме, че  $(\dot{y} + y)' = \dot{y} + y + 4y;$

$$\ddot{y} + \dot{y} = \dot{y} + 5y \quad \text{или} \quad \ddot{y} - 5y = 0 \rightarrow (2).$$

Получените уравнения са от II-ри ред и имат следния общ характеристичен полином  $\lambda^2 - 5\lambda^0 = 0$ ,  $\lambda^2 = 5 \Rightarrow \lambda_1 = \sqrt{5}$  и  $\lambda^2 = -\sqrt{5}$ . Корените  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  са еднократни и реални и следователно образуват следната фундаментална система от решения (ФСР) на уравненията (1) и (2):  $\{e^{\sqrt{5}t}, e^{-\sqrt{5}t}\}$

$$\begin{cases} x(y) = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ y(t) = c_3 e^{\sqrt{5}t} + c_4 e^{-\sqrt{5}t} \end{cases}, \quad \text{където } c_i, i = \overline{1,4} - const.$$

Тъй като уравненията (1) и (2) са следствия от системата, а не еквивалентни на нея, то не всички уравнения породени от тях ще са решения на системата. Налага се да ги филтрираме, като заместим с  $x(t)$  и  $y(t)$  в едно от двете уравнения на системата. Нека това уравнение бъде първото, например. Тогава ще имаме, че:

$$(c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t})' = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} + 4(c_3 e^{\sqrt{5}t} + c_4 e^{-\sqrt{5}t})$$

$$c_1 \sqrt{5} e^{\sqrt{5}t} + (-\sqrt{5})c_2 e^{-\sqrt{5}t} = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} + 4c_3 e^{\sqrt{5}t} + 4c_4 e^{-\sqrt{5}t}$$

$$e^{\sqrt{5}t}(c_1(\sqrt{5} - 1) - 4c_3) - e^{-\sqrt{5}t}(c_2(\sqrt{5} + 1) - 4c_4) = 0$$

и тъй като  $e^{\sqrt{5}t}$  и  $e^{-\sqrt{5}t}$  образуват ФСР, то те са линейно независими и следователно единствената възможност това равенство да бъде изпълнено е когато

$$\begin{cases} c_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} c_1 \\ c_4 = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} c_2 \end{cases}, \quad \text{от където получаваме, че решенията на системата са:}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{\sqrt{5}t} + c_2 e^{-\sqrt{5}t} \\ y(t) = \frac{1 - \sqrt{5}}{4} c_1 e^{\sqrt{5}t} + \frac{1 + \sqrt{5}}{4} c_2 e^{-\sqrt{5}t} \end{cases}$$

□

**Задача 2.** Решете системата с метода на изключването:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$$

*Решение:*

От първото уравнение имаме, че  $y = 2x - \dot{x}$ , заместваме във второто и получаваме, че  $(2x - \dot{x})' = x + 2(2x - \dot{x})$  или  $2\dot{x} - \ddot{x} = x - 2\dot{x} + 4x$ ;

$\ddot{x} - 4\dot{x} + 5x = 0 \rightarrow (1)$ . Аналогично за  $x = \dot{y} - 2y$  от второто уравнение, заместваме в първото и получаваме, че  $(\dot{y} - 2y)' = 2(\dot{y} - 2y) - y$  ;  
 $\ddot{y} - 2\dot{y} = 2\dot{y} - 4y - y$  или  $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = 0 \rightarrow (2)$ .

Получените уравнения са от II-ри ред и имат следния общ характеристичен полином  $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 1.i, \lambda_2 = 2 - 1.i$ . Корените  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  са еднократни и комплексно спрегнати и следователно образуват следната фундаментална система от решения (ФСР) на уравненията (1) и (2):  $\{e^{2t}\cos(1.t), e^{2t}\sin(1.t)\}$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t) \\ y(t) = c_3 e^{2t} \cos(t) + c_4 e^{2t} \sin(t) \end{cases}, \quad \text{където } c_i, i = \overline{1,4} - \text{const.}$$

Тъй като уравненията (1) и (2) са следствия от системата, а не еквивалентни на нея, то не всички уравнения породени от тях ще са решения на системата. Налага се да ги филтрираме, като заместим с  $x(t)$  и  $y(t)$  в едно от двете уравнения на системата. Нека това уравнение бъде второто, например. Тогава ще имаме, че:

$$\underbrace{(c_3 e^{2t} \cos(t) + c_4 e^{2t} \sin(t))'}_{Left} = \underbrace{c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t) + 2(c_3 e^{2t} \cos(t) + c_4 e^{2t} \sin(t))}_{Right}$$

$$Left = c_3(2e^{2t} \cos(t) + e^{2t}(-\sin(t))) + c_4(2e^{2t} \sin(t) + e^{2t} \cos(t)) \Rightarrow$$

$$2c_3 e^{2t}(\cos(t) - \cos(t)) + c_3 e^{2t}(-\sin(t)) + 2c_4(\sin(t) - \sin(t)) + c_4 e^{2t} \cos(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t)$$

$$\text{или } (c_2 + c_3)e^{2t} \sin(t) + (c_1 - c_4)e^{2t} \cos(t) = 0$$

и тъй като  $e^{2t} \cos(t)$  и  $e^{2t} \sin(t)$  образуват ФСР, то те са линейно независими и следователно единствената възможност това равенство да бъде изпълнено е когато

$$\begin{cases} c_1 = c_4 \\ c_2 = -c_3 \end{cases}, \quad \text{от където получаваме, че решенията на системата са:}$$

$$\begin{cases} x(t) = c_1 e^{2t} \cos(t) + c_2 e^{2t} \sin(t) \\ y(t) = -c_2 e^{2t} \cos(t) + c_1 e^{2t} \sin(t) \end{cases}$$

□

**Задача 3.** Нека функциите  $x(t), y(t)$  са решения на системата  $\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$

- а) Покажете, че функцията  $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$  не зависи от  $t$ .  
 б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

*Решение:*

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad v'(t) &= (x^2(t) + y^2(t))' = 2x(t) \cdot \dot{x}(t) + 2y(t) \cdot \dot{y}(t) = \\ &= 2x(t) \cdot x(t) \cdot y(t) + 2y(t) \cdot (-x^2(t)) = 2x^2(t) \cdot y(t) - 2x^2(t) \cdot y(t) = 0 \\ &\Rightarrow v(t) = \text{const.} \end{aligned}$$

Може да подходим и по следния начин:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = xy \Rightarrow dt = \frac{dx}{xy}; \quad \frac{dy}{dt} = -x^2 \Rightarrow dt = -\frac{dy}{x^2} \\ \Rightarrow dt = \frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{x^2} \quad \text{или} \quad x dx = -y dy \Big| \int \end{aligned}$$

$$\int x dx = - \int y dy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \quad \text{или} \quad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

функцията  $x^2(t) + y^2(t)$  е първи интеграл на системата, т.е. ако заместим в нея с някое решение на системата, ще получим константа. (това издава, че фазовите криви ще са елипси (окръжността е частен случай на елипсата)).

- б) Равновесните точки са там където скоростите се нулират, т.е. където се нулират десните страни на системата.

$$\begin{cases} xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0, y_0) \text{ са равновесните точки, където } y_0 \in \mathbb{R} \text{ е реален параметър. Теоремата}$$

на Ляпунов ни казва, че понякога може да определим какъв е вида на точките само от първото линейно приближение на системата. Нека проверим. Линейното приближение на системата го взимаме от матрицата на Якоби:

$$Ja(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}, \text{ където } f = xy, g = -x^2$$

$$\Rightarrow Ja(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 0 \end{pmatrix}; \quad Ja(0, y_0) = \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|Ja(0, y_0) - E \cdot \lambda| = \begin{vmatrix} y_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(y_0 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 = y_0.$$

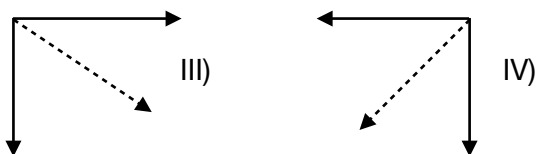
Сега, ако  $y_0 > 0$  ще имаме неустойчивост, но ако  $y_0 < 0$ , имайки че  $\lambda_1 = 0$  (не е нито положителна нито отрицателна) не попадаме в нито един от двата случая и първото приближение не може да определи вида на точките  $(0, y_0)$  за  $y_0 < 0$ .

Но ние знаем какъв е вида на фазовите криви и ще проверим посоката на фазовите тангенциални векторчета. Имаме  $x^2 = -y^2 + c$ .

$\vec{\tau}(x, y) = (xy, -x^2)$ . Очевидно втората координата на този вектор е винаги отрицателна.

Ще разгледаме само III-ти и IV-ти квадрант, защото само там ще имаме  $y_0 < 0$ .

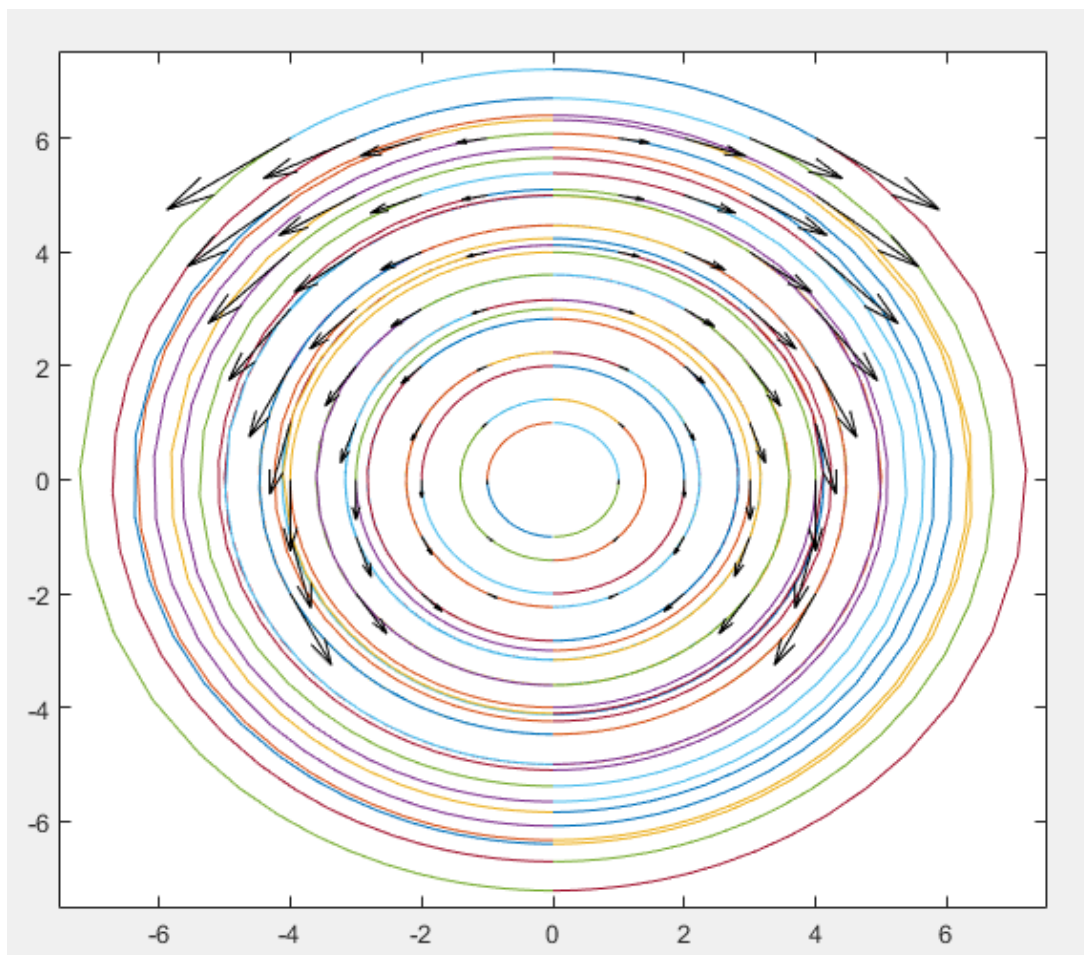
Да вземем първо III-ти квадрант. Там имаме  $x_0 < 0, y_0 < 0$ , следователно  $xy > 0$



С аналогични разсъждения може да заключим, че в IV-ти квадрант тангенциалните вектори отново ще сочат към ординатата, където са равновесните точки, т.е. там ще имаме устойчивост, но не и асимптотична, тъй като не всички собствени стойности са отрицателни (имаме  $\lambda_1 = 0$ , трябваше да е отрицателно, за да кажем че устойчивостта е асимптотична).

И остана да проверим за  $y_0 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}(x_0, y_0) = (0, -x_0^2)$ , т.е. ще имаме неустойчивост.

Фазов портрет за онагледяване на получения резултат:



MathLab код на фазовия портрет:

```
Command Window
fx >> function zad3
    tmax=5;

    function z=ff(t,y) %y1'=y1*y2; y2'=-y1^2
        z=[y(1)*y(2); -y(1)^2];
    end

    ak=0;
    bk=2;

    x=ak-4 : 1 : ak+4;
    y=bk-4 : 1 : bk+4;

    [X Y]=meshgrid(x,y);
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
            [T,Z]=ode45(@ff, [0,tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
            [T1,Z1]=ode45(@ff, [0,-tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

            plot(ak,bk,'r')
            hold on
            plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2));
            axis([ak-7.5 ak+7.5 bk-9.5 bk+5.5]);

        end
    end
    DX=X.*Y;
    DY=-X.^2;
    quiver(X,Y,DX,DY,1.8,'k');
end
```



**Задача 4.** Намерете равновесните точки на системата  $\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 1 \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$

В околност на всяка една от равновесните ѝ точки напишете съответното линейно приближение на системата.

*Решение:*

Равновесните точки са там където скоростите се нулират. В нашия случай това е когато десните страни на системата се нулират:

$$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = -y \end{cases} \quad \text{Следователно } y = \pm 1 \Rightarrow x = \mp 1.$$

Всички равновесни точки са  $B_1(1, -1)$  и  $B_2(-1, 1)$ . Якобианът на системата е:

$$Ja(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейното приближение ще получим като пресметнем якобианът в съответните равновесни точки:

$$Ja(B_1) = Ja(1, -1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad Ja(B_2) = Ja(-1, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  Линейното приближение в  $B_1$  ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(1, -1) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y + 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.(x - 1) - 2.(y + 1) \\ \dot{y} = 1.(x - 1) + 1.(y + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2(y + 1) \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

$\Rightarrow$  Линейното приближение в  $B_2$  ще е

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Ja(-1, 1) \begin{pmatrix} x - (-1) \\ y - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 0.(x + 1) + 2.(y - 1) \\ \dot{y} = 1.(x + 1) + 1.(y - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x} = 2(y - 1) \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

□

**Задача 5.** Определете типа на уравнението  $u_{xx} + 2u_{xy} - 3u_{yy} - x^3u_x - 5y^2u_y = 0$   
 Във всяка точка  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Напишете уравнението на характеристиките на даденото уравнение. Намерете характеристичните криви на уравнението.

*Решение:*

Казваме, че в точката  $(x_0, y_0) \in \mathbb{G}$  (област в равнината) уравнението  $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + p(x, y)u_x + q(x, y)u_y + r(x, y)u = f(x, y)$  е

1. хиперболично, ако  $D(x_0, y_0) := b^2(x_0, y_0) - a(x_0, y_0)c(x_0, y_0) > 0$ ;
2. параболично, ако  $D(x_0, y_0) = 0$ ;
3. елиптически, ако  $D(x_0, y_0) < 0$ .

В нашия случай ще имаме, че  $\mathbb{G} \equiv \mathbb{R}$  и  $D(x, y) = 1 - 1(-3) = 4 > 0 \Rightarrow$  уравнението е хиперболично в цялата равнина.

Уравнението на характеристиките на даденото уравнение от условието има вида:

$a(x, y)(dy)^2 - 2b(x, y)dx dy + c(x, y)(dx)^2 = 0$ , където  $a(x, y) = 1, b(x, y) = 1, c(x, y) = -3$ .

$$(dy)^2 - 2dx dy - 3(dx)^2 = 0 \quad // : (dx)^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right) - 3 = 0$$

Полагаме  $\frac{dy}{dx} = p \Rightarrow p^2 - 2p - 3 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = 1 \pm \sqrt{4}$  или  $p_1 = 3, p_2 = -1$ .

$$\frac{dy}{dx} = 3 \Leftrightarrow dy = 3dx \quad \Bigg| \int \Leftrightarrow \int dy = 3 \int dx \Leftrightarrow \underline{y - 3x = c_1}. \quad \text{Аналогично}$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 \Leftrightarrow dy = -1dx \quad \Bigg| \int \Leftrightarrow \int dy = - \int dx \Leftrightarrow \underline{y + x = c_2}.$$

Следователно характеристичните криви на уравнението са:  $y = 3x + c_1, y = -x + c_2$ , където  $c_1, c_2 = \text{const}$ .

□

**Задача 6.** Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - 4u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x,0) = 2\sin x, & u_t(x,0) = xe^x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Решение:*

За решаването на задачата, ще използваме формулата на Даламбер и казваме, че задачата има единствено решение, което се задава със следната формула:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x-at) + \varphi(x+at) \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

Общия вид на уравнението е  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \rightarrow a = 2$ , като:

- началното положение е  $\varphi(x) = 2\sin x$ ;
- началната скорост е  $\psi(x) = xe^x$ .

Сега просто заместваме във формулата и пресмятаме интеграла:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \left[ 2\sin(x-2t) + 2\sin(x+2t) \right] + \frac{1}{4} \int_{x-2t}^{x+2t} s \cdot e^s ds.$$

Първо решаваме неопределения интеграл

$$\int s e^s ds = \int s d e^s = s \cdot e^s - \int e^s s = s e^s - e^s = (s-1)e^s + c, \text{ следователно}$$

$$\int_{x-2t}^{x+2t} s e^s ds = (s-1)e^s \Big|_{x-2t}^{x+2t} = (x+2t-1)e^{x+2t} - (x-2t-1)e^{x-2t}.$$

Окончателно,

$$u(x,t) = \sin(x-2t) + \sin(x+2t) + \frac{1}{4}((x+2t-1)e^{x+2t} - (x-2t-1)e^{x-2t}).$$

□



**Задача 7.** Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ u(x, 0) = x^3, & u_t(x, 0) = x^2 \sin x, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

*Решение:*

За решаването на задачата, ще използваме формулата на Даламбер и казваме, че задачата има единствено решение, което се задава със следната формула:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi(x - at) + \varphi(x + at) \right] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds$$

Общия вид на уравнението е  $u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \rightarrow a = 1$ , като:

- началното положение е  $\varphi(x) = x^3$ ;
- началната скорост е  $\psi(x) = x^2 \sin x$ .

Сега просто заместваме във формулата и пресмятаме интеграла:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ (x - t)^3 + (x + t)^3 \right] + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} s^2 \sin(s) ds.$$

Първо решаваме неопределения интеграл

$$\begin{aligned} \int s^2 \sin(s) ds &= \int s^2 d(-\cos(s)) = \underbrace{-s^2 \cos(s)}_A - \int -\cos(s) d(s^2) = A + \int \cos(s) d(s^2) = \\ &= A + \int 2s \cdot \cos(s) ds = A + 2 \int s d(\sin(s)) = A + 2 \left( s \sin(s) - \int \sin(s) ds \right) = \\ &= -s^2 \cos(s) + 2(s \cdot \sin(s) + \cos(s)) + c = 2s \cdot \sin(s) + (2 - s^2) \cos(s) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{x-t}^{x+t} s^2 \sin(s) ds &= 2s \cdot \sin(s) + (2 - s^2) \cos(s) \Big|_{x-t}^{x+t} = \\ &= 2((x+t) \cdot \sin(x+t)) + (2 - (x+t)^2) \cos(x+t) - 2(x-t) \sin(x-t) - (2 - (x-t)^2) \cos(x-t) = B \end{aligned}$$

Окончателно,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (x^3 - \cancel{3x^2t} + 3xt^2 - \cancel{t^3} + x^3 + \cancel{3x^2t} + 3xt^2 + \cancel{t^3}) + \frac{B}{2} = x^3 + 3xt^2 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

**Задача 8.** Намерете собствените стойности и собствените функции на задачата на Щурм-

$$\text{Лиувил: } \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 5 \\ X(0) = 0 \\ X'(5) = 0 \end{cases}$$

За кои стойности на  $\lambda$  задачата няма други решения освен  $X(x) \equiv 0$ ?

*Решение:*

Имаме едно диференциално линейно уравнение от втори ред с две начални условия и характеристичен полином  $P(s) = s^2 + \lambda = 0$ , от където следва, че  $s^2 = -\lambda$ ,  $s = \pm \sqrt{-\lambda}$ .  
Ще разгледаме 3 случая за параметъра  $\lambda$ .

I сл.  $\lambda = 0$

$\Rightarrow$  имаме 1 корен и фундаменталната система от решения (ФСР) има вида

$\{e^0, xe^0\} = \{1, x\}$ . Следователно (тъй като корена е двукратен),  $X(x) = c_1 + c_2x$ .

Използвайки началните условия получаваме, че  $X(0) = c_1 = 0$  и

$X'(5) = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$ , което е тривиалното решение, от което се опитваме да „избягаме“, за да намерим други.

II сл.  $\lambda < 0$

$\Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow$  имаме два различни реални корена и  $\text{ФСР} = \{e^{\sqrt{-\lambda}}, e^{-\sqrt{-\lambda}}\}$

$\Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Отново използваме началните условия и получаваме, че

$X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$ ;  $X'(5) = \sqrt{-\lambda} c_1 e^{5\sqrt{-\lambda}} - \sqrt{-\lambda} c_2 e^{-5\sqrt{-\lambda}} =$

$= \underbrace{\sqrt{-\lambda}}_{\neq 0} c_1 \underbrace{(e^{5\sqrt{-\lambda}} + e^{-5\sqrt{-\lambda}})}_{\neq 0} = 0$ . Следователно, за да бъде изпълнено последното

равенство, трябва  $c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$  и отново имаме тривиалното решение.

Следователно за  $\lambda \leq 0$  няма други решения различни от тривиалното. Продължаваме да търсим в посления останал случай.

III сл.  $\lambda > 0$

$\Rightarrow -\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$  е комплексно число. Следователно  $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ , тогава

$\text{ФСР} = \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$ , тъй като реалната част на корените е 0.

$X(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)$ ;  $X(0) = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 = c_1 = 0$ ;

$X'(5) = (c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x))'_{x=5} = \underbrace{\sqrt{\lambda}}_{\neq 0} \cdot c_2 \cdot \cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$ . Следователно или  $c_2 = 0$  или

$\cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$ .

Ако  $c_2 = 0$  ще получим отново тривиалното решение, за това нека  $\cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$ .

Последното е изпълнено когато:  $5\sqrt{\lambda} = \frac{2k+1}{2}\pi$ , където  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{2k+1}{10}\pi\right)^2$  са собствените стойности, а

$X_k(x) = c_2 \cdot \sin\left(\frac{2k+1}{10}x\pi\right)$  са собствените функции на задачата.

□

**Задача 9.** Решете задачата на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} y'' + 16\pi^2 y = 0, 0 < x < \frac{1}{2} \\ y(0) = 0, y(\frac{1}{2}) = 0. \end{cases}$$

*Решение:*

Тази задача е частен случай на 8-ма задача, в която  $\lambda = 16\pi^2$ . Т.е.  $\lambda > 0$  и влизаме директно в III-тия случай.

Имаме характеристичния полином  $P(\beta) = \beta^2 + 16\pi^2 = 0 \Rightarrow \beta_{1,2} = \pm 4\pi i \in \mathbb{C}$ , тогава  $\text{ФСР} = \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\} = \{\cos(4\pi x), \sin(4\pi x)\}$ , тъй като реалната част на корените е 0. Ако това е собствена стойност, ще имаме ненулево решение, в противен случай ще имаме само тривиалното нулево решение. Нека проверим.

$$y(x) = c_1 \cdot \cos(4\pi x) + c_2 \cdot \sin(4\pi x); \quad y(0) = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 = c_1 = 0;$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = c_2 \cdot \sin\left(4\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = c_2 \cdot \sin(2\pi) = 0. \text{ Т.е. без значение каква е константата } c_2, \text{ условието винаги ще е изпълнено и следователно } c_2 \text{ е произволна.}$$

Следователно задачата има безбройно много ненулеви решения от вида:

$$y(x) = c_2 \cdot \sin(2\pi x).$$



**Задача 10.** Решете задачата на Щурм-Лиувил  $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 2 \\ X(0) = 0, & X(2) = 0, \end{cases}$  където  $\lambda$  е реален параметър.

*Решение:*

Имаме едно диференциално линейно уравнение от втори ред с две начални условия и характеристичен полином  $P(s) = s^2 + \lambda = 0$ , от където следва, че  $s^2 = -\lambda$ ,  $s = \pm \sqrt{-\lambda}$ . Ще разгледаме 3 случая за параметъра  $\lambda$ .

I сл.  $\lambda = 0$

$\Rightarrow$  имаме 1 корен и фундаменталната система от решения (ФСР) има вида  $\{e^0, xe^0\} = \{1, x\}$ . Следователно (тъй като корена е двукратен),  $X(x) = c_1 + c_2x$ . Използвайки началните условия получаваме, че  $X(0) = c_1 = 0$  и  $X(2) = 2c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0$ , което е тривиалното решение, от което се опитваме да „избягаме“, за да намерим други.

II сл.  $\lambda < 0$

$\Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow$  имаме два различни реални корена и  $\text{ФСР} = \{e^{\sqrt{-\lambda}}, e^{-\sqrt{-\lambda}}\}$   
 $\Rightarrow X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$ . Отново използваме началните условия и получаваме, че  $X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$ ;  $X(2) = c_1 e^{2\sqrt{-\lambda}} - c_1 e^{-2\sqrt{-\lambda}} =$   
 $= c_1 (e^{\sqrt{-\lambda}} - e^{-\sqrt{-\lambda}}) = 0$  и тъй като  $e^{\sqrt{-\lambda}}$  и  $e^{-\sqrt{-\lambda}}$  обрачуваат ФСР, то те ще са линейно независими и следователно, за да бъде изпълнено последното равенство, трябва  $c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$  и отново имаме тривиалното решение.  
 Следователно за  $\lambda \leq 0$  няма други решения различни от тривиалното. Продължаваме да търсим в посления останал случай.

III сл.  $\lambda > 0$

$\Rightarrow -\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$  е комплексно число. Следователно  $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$ , тогава  $\text{ФСР} = \{\cos(\sqrt{\lambda}x), \sin(\sqrt{\lambda}x)\}$ , тъй като реалната част на корените е 0.

$X(x) = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}x)$ ;  $X(0) = c_1 \cdot \cos 0 + c_2 \cdot \sin 0 = c_1 = 0$ ;

$X(2) = c_2 \cdot \sin(2\sqrt{\lambda}) = 0$ . Следователно или  $c_2 = 0$  или  $\sin(2\sqrt{\lambda}) = 0$ .

Ако  $c_2 = 0$  ще получим отново тривиалното решение, за това нека  $\sin(2\sqrt{\lambda}) = 0$ .

Последното е изпълнено когато:  $2\sqrt{\lambda} = k\pi$ , където  $k = 0, 1, 2, \dots$

$\Rightarrow \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{2}\right)^2$  са собствените стойности, а

$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{2}x\right)$  са собствените функции на задачата,  $k \in \mathbb{N}$ .

□

**Задача 11.** Решете смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x,0) = \sin(3\pi x), u_t(x,0) = 0, 0 \leq x \leq 1 \\ u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Решение:

Търсим решение от вида  $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ , което да не се анулира тъждествено. Първо заместваме в уравнението на струната и получаваме:

$$u_{tt} = u_{xx} \Rightarrow X(x) \cdot T''(t) = X''(x) \cdot T(t), 0 < x < 1, t > 0. \text{ Там където не се нулират}$$

функциите делим и получаваме, че  $\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ . Тъй като тези функции са функции на

различни променливи, то единствения начин те да са равни е ако са равни на някаква

константа (или ако фиксираме  $t$ , то  $\frac{X''(x)}{X(x)}$  не се променя и не зависи от  $x$  и аналогично, ако

фиксираме  $x$ , то  $\frac{T''(t)}{T(t)}$  също не се променя и не зависи от  $t \Rightarrow$  тази пропорционална

стойност не зависи нито от  $x$ , нито от  $t$ , което означава, че е константа) и

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda, \text{ където } -\lambda = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0. \end{cases} \text{ От граничните условия получаваме:}$$

$$0 = u(0,t) = X(0) \cdot T(t), t \geq 0. \text{ Следователно } X(0) = 0.$$

$$\text{Аналогично в другия край: } 0 = u(1,t) = X(1) \cdot T(t), t \geq 0. \text{ Следователно } X(1) = 0.$$

По този начин за функцията  $X(x)$  получихме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, 0 < x < 1 \\ X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}, \text{ която вече решихме в задача 10.}$$

Неаналитично решение за MathLab:

Имаме струна със закрепени краища в 0 и 1. Може да ползваме формулата на Даламбер, но трябва да я сведем до безкрайна струна. За целта ще направим четните продължения извън интервала.

За дадена функция  $f(x)$ ,  $f_{even}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, 0 \leq x \leq 1 \\ f(-x), & x < 0, -1 \leq x < 0 \end{cases}$ . Т.е.

$$\varphi_{even}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ -\varphi(x), & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \psi_{even} \equiv 0 = \psi(x).$$

Продължаваме  $\varphi_{even}$  и  $\psi_{even}$   $2L$  - периодично върху цялата реална права, където  $L$  е дължината на струната.

$$f_{prod}(x) = \begin{cases} f_{prod}(x - 2L), & x > L \\ f_{prod}(x + 2L), & x < -L \\ f(x), & x \in [0; L] \end{cases} \quad \text{В нашия случай имаме } L = 1.$$

$$\psi_{evenprod} \equiv 0$$

$$\varphi_{evenprod} = \begin{cases} \varphi_{evenprod}(x - 2), & x > 1 \\ \varphi_{evenprod}(x + 2), & x < -1 \\ \varphi_{even}(x), & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Сега вече, по формулата на Даламбер и направените свеждания на задачата до безкрайна струна, имаме единственото решение

$$u_{evenprod}(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_{evenprod}(x - t) + \varphi_{evenprod}(x + t) \right] + \underbrace{\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi_{evenprod}(s) ds}_{=0}$$

$$u_{evenprod}(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \varphi_{evenprod}(x - t) + \varphi_{evenprod}(x + t) \right]$$

$$u(x, t) = u_{evenprod}(x, t) \cap \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t > 0\}$$

□

**Задача 12.** Решете смесената задача за уравнението на топлопроводността

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < 1, t > 0 \\ u(x, 0) = \sin(3\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

Решение:

Общ вид на задачата 
$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 \leq x \leq L \\ u(x, 0) = \varphi(x) \\ u(0, t) = u(L, t) = 0 \end{cases}$$

В нашия случай имаме, че  $a = 1$ ,  $\varphi(x) = \sin(3\pi x)$  и  $L = 1$ . Ще търсим решение от следния вид  $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot T_k(t)$ .

$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ . Тогава  $\begin{cases} u_t(x, t) = X(x) \cdot T'(t) \\ u_{xx}(x, t) = X''(x) \cdot T(t) \end{cases}$ . Заместваме в

$u_t = u_{xx} \Rightarrow X(x) \cdot T'(t) = X''(x) \cdot T(t)$ , т.е. (тъй като търсим не тривиални решения)

$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$ . Тъй като тези функции са функции на различни променливи, то единствения начин те да са равни е ако са равни на някаква константа (или ако фиксираме  $t$ , то  $\frac{X''(x)}{X(x)}$  не се променя и не зависи от  $x$  и аналогично, ако фиксираме  $t$ , то  $\frac{T'(t)}{T(t)}$  също не се променя и не зависи от  $t \Rightarrow$  тази пропорционална стойност не зависи нито от  $x$ , нито от  $t$ , което означава, че е константа) и  $\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$ , където  $-\lambda = \text{const}$ .

$$\Rightarrow \begin{cases} T'(t) + \lambda T(t) = 0, & t > 0 \quad (*) \\ \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ X(0) = 0 \Leftrightarrow u(0, t) = X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(1) = X(L) = 0 \Leftrightarrow u(1, t) = X(1) \cdot T(t) = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Вложената система е същата като задача 10. Това е задача на Щурм-Лиувил, която вече решихме. Следователно имаме, че собствените стойности са  $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\pi)^2$  и

$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \stackrel{L=1}{=} \sin(k\pi x)$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  са решенията на задачата на Щурм-Лиувил.

Заместваме с тях в най-горното уравнение (\*):

Намираме решението на  $T'_k(t) + \lambda_k T_k(t) = 0 \Rightarrow T'_k = -\lambda_k T_k$ . Това е уравнение от първи ред и лесно се вижда, че решенията му са  $T_k(t) = c_k e^{-\lambda_k t} = c_k e^{-k\pi^2 t}$ .

$u_k(x, t) = X_k(x) T_k(t); \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t);$

$u_k \Big|_{t=0} = c_k \sin(k\pi x) = \sin(3\pi x) \Rightarrow c_3 = 1$  и решението е  $u_3(x, t) \stackrel{c_3=1}{=} e^{-9\pi^2 t} \sin(3\pi x)$

$\left[ c_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) \cdot X_k(x) dx, \text{ като в нашия случай } c_k = 2 \int_0^1 \sin(3\pi x) \cdot \sin(k\pi x) dx. \right]$

□