Задача 9. Дадено е уравнението

$$y'' + py' + 4y = 0,$$

където p е реален параметър.

а) При какви стойности на p всички решения на уравнението са ограничени за $x \in (-\infty, +\infty)$?

б) При какви стойности на p всички решения на уравнението клонят към 0 при $\to -\infty$?

в) При какви стойности на p уравнението има поне едно периодично решение, различно от $y(x) \equiv 0$

Решение:

Характеристичния полином на хомогенната и единствена част на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 + p\lambda + 4$. За $P(\lambda) = 0$ имаме, че $D = p^2 - 16 = (p-4)(p+4)$.

I сл. При $p \in (-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$

$D > 0 \Rightarrow$ имаме два реални корена $\Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2} \Rightarrow$

ФСР:= $\{e^{\frac{-p+\sqrt{p^2-16}}{2}x}, e^{\frac{-p-\sqrt{p^2-16}}{2}x}\} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{\frac{-p+\sqrt{p^2-16}}{2}x} + c_2 e^{\frac{-p-\sqrt{p^2-16}}{2}x}$

II сл. При $p \in (-4;\ 4)$

$D > 0 \Rightarrow$ имаме два комплексни корена

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-p \pm i\sqrt{16 - p^2}}{2} = -\frac{p}{2} \pm i\frac{\sqrt{16-p^2}}{2} \Rightarrow \alpha = -\frac{p}{2}, \beta = \frac{\sqrt{16-p^2}}{2} \Rightarrow$$

ФСР:= $\{e^{\alpha x}cos(\beta x), e^{\alpha x}sin(\beta x)\}$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{-\frac{p}{2}x} cos\left(\frac{\sqrt{16-p^2}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{p}{2}x} sin\left(\frac{\sqrt{16-p^2}}{2}x\right)$$

III сл. При $p = \pm 4$

$D = 0 \Rightarrow$ имаме двоен корен $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{p}{2} = \pm 4$.

При $p = 4: \ y(x) = c_1 e^{-2x} + xc_2 e^{-2x}$; При $P = -4: \ y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

а) За да са ограничени решенията на уравнението е необходимо $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = const$.

Изследваме първо в интервала $(-\infty; -4)$:

$\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{p^2 - 16} < 2 \pm p$, няма такива стойности на p, за които

това да е изпълнено едновременно, както в този интервал, така и в интервала $(4; +\infty)$
В интервала $p \in (-4;\ 4)$: $e^{-\frac{p}{2}x}$ може да е ограничена, единствено ако $p = 0$, което е от интервала. И тъй като $sin(x)$ и $cos(x)$ са ограничени функции, то и всички решения ще бъдат ограничени.

При $p = \pm 4$ няма как да ограничим решенията при положение че x пробягва от $-\infty$ до $+\infty$.

б) При $p \in (-\infty; -4)$ и $x \to -\infty$ всички решения клонят към 0.

в) Единствено при $p = 0$ ще има периодични решения.