Задача 4. Дадена е задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = a(x)y + x^2 \\ y(1) = 2 \end{cases},$$

където $a \in C(-3{,}5)$. Проверете, че функцията

$$y(x) := e^{\int_1^x a(t)dt}\left(2 + \int_1^x t^2 e^{-\int_1^x t^2 e^{-\int_1^t a(s)ds}} dt\right)$$

е решение на дадената задача на Коши в интервала $(-3{,}5)$.

Решение:

Имаме, че $a \in C(-3{,}5)$ - интервал, който съдържа единицата. Проверяваме началното условие:

$y(1) = e^{\int_1^1 a(t)dt}\left(2 + \displaystyle\int_1^1 t^2 e^{\int_1^t a(s)ds} dt\right) = e^0(2+0) = 2$. Сега заместваме с решението в уравнението, за да проверим дали го удовлетворява.

$$y' = e^{\int_1^x a(t)dt}\left(\int_1^x a(t)dt\right)'\big(2 + I(x)\big) + e^{\int_1^t a(t)dt}\left(\underbrace{x^2 e^{-\int_1^x a(s)ds}}_{I'(x)}\right) =$$

$= e^{\int_1^x a(t)dt} \,.\, a(x)\big(2 + I(x)\big) + x^2 = a(x) \,.\, y(x) + x^2$, което искахме да получим.