Вариант D
github.com/andy489
Задача 1. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} xy'' = (y'-1)(x+1) \\ y(1) = 0,\, y'(1) = 2 \end{cases}$$

Решение:

Уравнението е от втори ред и позволява понижаване на реда, тъй като y не участва в него. Следователно, нека $z(x) = y'(x) \Rightarrow z'(x) = y''(x)$. Тогава уравнението придобива вида: $z' = (z-1)\,.\,\dfrac{x+1}{x}$, което е уравнение с разделящи се променливи.

1.) Очевидно $z \equiv 1$ е решение.

2.) При $z \neq 1$: $\dfrac{dz}{z-1} = \dfrac{(x+1)dx}{x} \Bigg| \int$; $ln|z-1| = \displaystyle\int 1dx + \int \frac{1}{x}dx = x + ln|x| + c.$

$e^{ln|z-1|} = e^{x+ln|x|+c}$; $|z-1| = e^c\,.\,|x|\,.\,e^x$, което може да запишем по следния начин:

$z - 1 = c_1\,.\,x\,.\,e^x$, където c_1 е произволна константа. По този начин освен че отстраняваме модула, включваме и първото решение от 1.)

$y' = z = 1 + c_1xe^x \Bigg| \int$;

$y(x) = x + c_1\displaystyle\int xe^xdx = x + c_1\int xde^x = x + c_1(xe^x - \int e^xdx) = x + c_1xe^x - c_1e^x + c_2,$

където c_2 е произволна константа.
Остана само да приложим началните условия, за да намерим константите. За целта трябва да пресметнем: $y'(x) = 1 + c_1e^x + c_1xe^x - c_1e^x = 1 + c_1xe^x$.
$y(1) = 1 + c_1\,.\,e - c_1\,.\,e + c_2 = 1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = -1$
$y'(1) = 1 + c_1e = 2 \Rightarrow c_1 = e^{-1}$
Окончателно: $y(x) = x + xe^{x-1} - e^{x-1} - 1$.

Задача 2. Решете уравнението

$$x^2(x-1)y' + 2x(x-1)y = 1$$

Решение:

Изразяваме y', за да може по-лесно да определим какъв е вида на уравнението.
$y' = -\dfrac{2}{x}y + \dfrac{1}{x^2(x-1)}$. Получихме линейно уравнение от първи ред.

$y(x) = e^{\int a(x)dx}\Big(c + \displaystyle\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\Big)$, където $a(x) = -\dfrac{2}{x}$ и $b(x) = \dfrac{1}{x^2(x-1)}$.

$\displaystyle\int a(x)dx = -2ln|x| = -lnx^2$; $\displaystyle\int b(x)x^2dx = \int \frac{1}{x+1}dx = ln|x-1|.$

$\Rightarrow y(x) = e^{-lnx^2}\Big(c + ln|x-1|\Big) = \dfrac{c + ln|x-1|}{x^2}.$