Метод на Фурие за уравнението на топлопроводността

1. Постоянна температура в краищата

Разглеждаме уравнението на топлопроводността

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в правоъгълника $\Omega = \{0 \le x \le L, 0 \le t \le T\}$,

където a, L, T са положителни константи.

Задача на Дирихле: Да се намери решение на уравнението на топлопроводността в Ω, което удовлетворява условията

$$u(x,0) = \varphi(x), 0 \le x \le L$$

$$u(0,t) = 0, u(L,t) = 0, 0 \le t \le T,$$

където $\varphi \in C^1([0,L])$ и удовлетворява условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$.

Задачата на Дирихле моделира разпространението на температурата в тънък хомогенен прът с дължина L. Граничните условия при x=0 и x=L означават, че в краищата на пръта се поддържа постоянна температура 0.

Разделяме променливите както н уравнението на струната

Търсим решението във вида $u(x,t) = X(x)T(t)$.

Заместваме в уравнението и получаваме $\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$

Използваме граничните условия и за X(x) получаваме задачата на Щрум-Лиувил

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0, 0 < x < L,$$

$$X(0) = 0, X(L) = 0$$

Това е същата задача както при струната с фиксирани краища. Знаем вече нейните собствени стойности $\lambda_k = (\frac{k\pi}{L})^2$ и собствени функции $X_k(x) = \sin\frac{k\pi}{L}x,\ k = 1,2,3, \ldots.$

За T(t) получаваме уравнение от първи ред, което решаваме при $\lambda = \lambda_k$:

$$T_k'(t) + a^2 \lambda_k T_k(t) = 0$$

с решения

$$T_k(t) = c_k e^{-a^2 \lambda_k t}$$

Така получаваме за решението на дадената задача

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k e^{-(\frac{ak\pi}{L})^2 t} \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

Коефициентите се дават с формулата

$$C_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)\,dx$$

Задача1: Разпространението на температурата в тънък хомогенен прът се моделира със описаната по-горе задача. Да се направи анимация на изменението на температурата в пръта за време t от 0 до 12 при $L = \pi\sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$

a) $\varphi(x) = \begin{cases} 50\, e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$

b) $\varphi(x) = 2\sin(2x/\sqrt{2}) - \sin(3x/\sqrt{2})$

Като се използва 30-та парциална сума в реда на Фурие.

Решение: В подточка (b) може да намерим явен вид на решението, понеже

$\varphi(x) = 2X_2(x) - X_3(x)$. Следователно

$$\boldsymbol{u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(x) = 2X_2(x) - X_3(x)}$$

Следователно $C_2=2$, $C_3=-1$ и всички останали $C_k=0$.

Решението на задачата в този случаи е

$$\boldsymbol{u(x,t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) - e^{-\frac{9}{8}t}\sin\left(\frac{3x}{\sqrt{2}}\right)}$$

```
function heatfourie1
L=pi*sqrt(2);a=0.5;tmax=12;
t=0:tmax/50:tmax;
x=0:L/100:L;
 function y=phi(x)
        for i=1:length(x)
```

```
            if 1<x(i) & x(i)<2
            y(i)=50*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
            else
            y(i)=0;
            end
        end
% y=   2 sin(2x/sqrt(2))-sin(3x/sqrt(2))
end
   function y=heat(x,t)
   K=30;
   y=0;
      for k=1:K
      Xk=sin(k*pi*x/L);
      Ck=2*trapz(x, phi(x).*Xk)/L;
      Tk=Ck*exp(-(a*k*pi/L)^2*t);
            y=y+Xk*Tk;
            end
      end
            for n=1:length(t)
      plot(x,heat(x,t(n)))
      axis([0,L,-0.1,1])
      grid on
      M(n)=getframe;
      end
movie(M,2)
end
```

2. Фиксирана температура в левия край и топлоизолиран десен край

Изменението във времето на температурата в точките от пръта се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx},\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le L, \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=L} = 0,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{5}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = 0,\ \varphi'(L) = 0$.

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{6}$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ получаваме слдната задача на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = 0,\ X'(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности $\lambda_k = \left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}\right)^2$ и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} x\right),\ k \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение от първи ред

$$T_k'(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0.$$

което е и с разделящи се променливи

То има общо решение

$$T_k(t) := A_k \mathrm{e}^{-\lambda_k a^2 t} = A_k \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L} a\right)^2 t},$$

където A_k са произволни реални константи. От началното условие в изходната задача получаваме, че

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L \varphi(x) X_k(x)\, dx.$$

Задача2: Разпространението на температурата в тънък хомогенен прът се моделира със задача (5). Да се направи анимация на изменението на температурата в пръта за време t от 0 до 12 при $L = \pi\sqrt{2}, a = \frac{1}{2}$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 50\, e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & 1 < x < 2 \\ 0, & else \end{cases}$$

Като се използва 30-та парциална сума в реда на Фурие.

```
function heatfourie1
L=pi*sqrt(2);a=0.5;tmax=12;
t=0:tmax/50:tmax;
x=0:L/100:L;
 function y=phi(x)
        for i=1:length(x)
            if 1<x(i) & x(i)<2
            y(i)=50*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
            else
            y(i)=0;
            end
        end
end
   function y=heat(x,t)
   y=0;
      for k=0:30
      Xk=sin((2*k+1)*pi*x/(2*L));
      Ck=2*trapz(x, phi(x).*Xk)/L;
      Tk=Ck* exp(-(a*(2*k+1)*pi/(2*L))^2*t);
            y=y+Xk*Tk;
            end
      end
            for n=1:length(t)
      plot(x,heat(x,t(n)))
      axis([0,L,-0.1,1])
      grid on
      M(n)=getframe;
      End
      movie(M,2)
end
```