1 Уравнения от първи ред нерешени относно производната. Уравнения на Клеро.

Разглеждаме уравнения от вида

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0, \tag{1}$$

където $F(x, y, z)$ е функция дефинирана в цилиндрична област $Q := D \times (c, d) \subseteq \mathbb{R}^3$, а D е двумерна област. Ще предполагаме, че F, F'_y, F'_z съществуват и са непрекъснати в Q.

Дефиниция 1. Казваме, че точката $(x_0, y_0) \in D$ е обикновена точка за уравнението (1), ако уравнението $F(x_0, y_0, z)$ има краен брой различни реални решения $z_1 < z_2 < \ldots < z_m$ и $F_z(x_0, y_0, z_j) \neq 0$ за $j = 1, 2, \ldots m$.

През обикновена точка минават m различни интегрални криви (имат различни ъглови коефициенти) на уравнението (1).

Дефиниция 2. Казваме, че точката $(x_0, y_0) \in D$ е особена точка за уравнението (1), ако уравнението $F(x_0, y_0, z)$ има поне едно реално решение $z = b$, за което $F'_z(x_0, y_0, b) = 0$.

Тази класификация не е пълна. Може да има точки в D, които не са особени и не са обикновени. Примерно точките $(x_0, y_0) \in D$, за които уравнението (1) няма реални решения.

Особените точки удовлетворяват системата

$$\left| \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0, \\ F'_z(x, y, z) = 0. \end{array} \right.$$

Геометричното място на точки, удовлетворяващи тази система се нарича дискриминатната крива. Особените точки лежат върху дискриминатнтната крива. Решения, които се състоят от особени точки се наричат особени решения.

Задача 1. Дадено е уравнението

$$(y')^2 - xy' - x^2 + 5y = 0.$$

1. Намерете негонвите обикновени и особени точки. Ако уравнениетото има особени решения, то начертайте с черен цвят техните графики в интервала $[-8, 8]$;

2. Решенете уравнението с метода на въвеждане на параметър;

3. Начертайте графиките в интервала $[-8, 8]$ на решенията на уравнението, които минават през обикновена точка, въвеждана чрез кликване с мишката в правоъгълника $[-8, 8] \times [-6, 6]$. Ако кликвате в точка, през която не минава решение, то изведете съобщение за това.

Решение.

1.) Даденото уравнение е от вида (1) с функция

$$F(x, y, z) = z^2 - xz - x^2 + 5y.$$

Пресмятаме $F'_z = -2z + x$ и за особените точки получаваме системата

$$\left| \begin{array}{l} z^2 - xz - x^2 + 5y = 0, \\ 2z - x = 0, \end{array} \right.$$

откъдето получаваме, че точките от параболата $y = x^2/4$ са особени. Проверете, че функцията $y = x^2/4$ е решение на даденото уравнение.

Всъщност, уравненението $F(x, y, z) = 0$ е квадратно относно z. То има дискриминанта $D(x, y) = 5(x^2 - 4y)$. Виждаме, че тя се анулира в точките от параболата $y = x^2/4$. Когато $y > x^2/4$, квадратното уравнение няма решения и през такива точки не минават интегрални криви на . Когато $y < x^2/4$ квадратното уравнение има две решени. Тези точки са обикновеи (Проверте!) и през всяка такава точка (x_0, y_0) минават две различни интегрални криви на даденото уравнение. В оклонст на такава точка задачата на Коши за даденото уравнение с начално условие $y(x_0) = y_0$ е еквивалентна на две задачи на Коши със същото начално условие, но за уравнения, решени относно производната, които се получават като решим квадратното уравнение (1) относно y' : $y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{5x^2 - 20y})$ и $y' = \frac{1}{2}(x - \sqrt{5x^2 - 20y})$. Решете тези уравнения като положите $v(x) = \sqrt{5x^2 - 20y}$. Вместо това ние ще решим по-друг начин уравнението, използвайки факта, че то е решено относно y.

2.) Уравнението не е решено относно производната y', но е решено отнсно y :

$$5y = -(y')^2 + xy' + x^2.$$

По тази причина можем да го решим с метода на въвеждане на параметър. Полгаме

$$p(x) := y'(x),$$

и получаваме

$$5y = -p^2 + xp + x^2. \tag{2}$$

Сега диференцираме относно x :

$$5y' = -2pp' + p + xp' + 2x,$$

т.е.

$$5p = -2pp' + p + xp' + 2x,$$

След групиране получаваме уравнението

$$(2p - x)(p' + 2) = 0,$$

което има решения $p = x/2$ и $p' = -2$, т.е. $p = -2x + c$. Заместваме в (2) за да намерим y :

От $p = x/2$ получаваме особеното решение на уравнението

$$y = \frac{1}{5}(-x^2/4 + x^2/2 + x^2) = x^2/4.$$

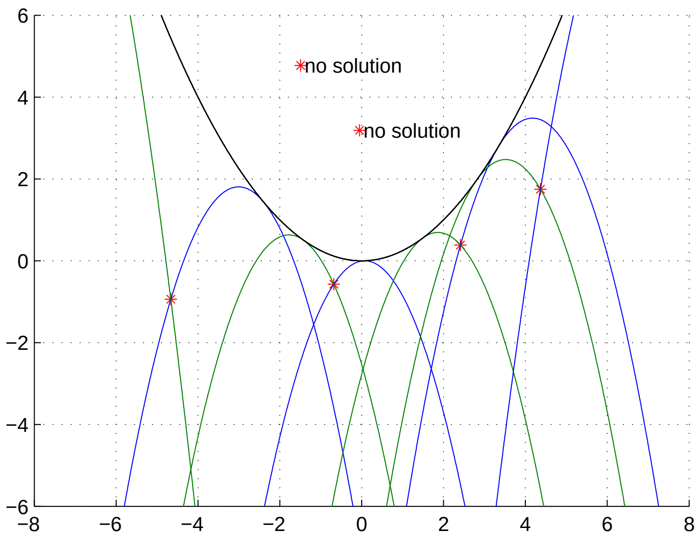
От $p = 2x + c$ получаваме решенията, които минават през обикновена точка

$$y = -x^2 + cx - c^2/5.$$

3.)

```
 function unsolved
 %5y+y'^2=x^2+xy'
 clear
axis([-8,8,-6,6])
set(gca,'DataAspectRatio',[1,1,1])
hold on
grid on
syms x y z
F=z^2+5*y-x^2-x*z;
Fz=diff(F,z);
[y,z]=solve(F,Fz,y,z)
x=-8:1/100:8;
sol=eval(y);
plot(x,sol,'k')
[x0,y0]=ginput(1);
plot(x0,y0,'r*')
if y0>x0^2/4
    text(x0+0.1,y0,'no solution')
else
    y1=dsolve('(Dy)^2-x*Dy-x^2+5*y=0','y(x0)=y0','x');

    plot(x,eval(y1))
end
end
```



Във всяка точка от графиката на особеното решение (с черен цвят) се допира графиката на точно едно "обикновено" решение, т.е. графиката на особеното решение е обвивка на фамилията криви, графики на "обикновените решения".

Задача 2. Решете задача 1, но за уравнението на Клеро

$$y = xy' + (y')^2.$$

Това уравнение е от вида (1) с функция

$$F(x, y, z) = z^2 + xz - y.$$

Лесно намираме, че всяка точка от параболата $y = -x^2/4$ е особена и функцията $y(x) = -x^2/4$ е особено решение. Точките (x,y), за които $y > -x^2/4$ са обикновени, а през точките, за които $y < -x^2/4$ не минават решения на даденото уравнение. Лесно можем да намерим решенита, минаващи през обикновена точка чрез метода на въвеждане на параметър $p(x) = y'(x)$:

$$y = xp + p^2$$

и едно диференциране по x ни дава

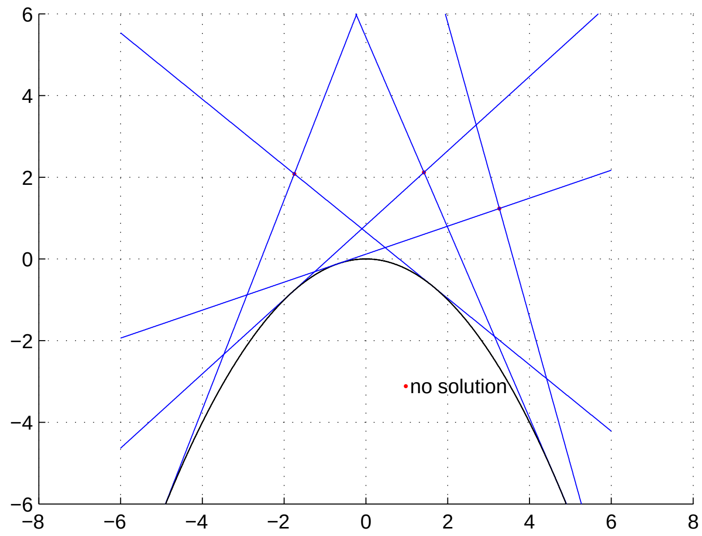
$$y' = p + xp' + 2pp',$$

тоест

$$(x + 2p)p' = 0.$$

От $p = -x/2$ получаваме особеното решение, а от $p' = 0$ получаваме $p = c$, т.е. правите $y = cx + c^2$.

```
function clairaut
 %y=xy'+f(y')
clear
axis([-8,8,-6,6])
set(gca,'DataAspectRatio',[1,1,1])
hold on
syms x y z
F='x*z+z^2-y';
Fz=diff(F,z);
[y,z]=solve(F,Fz,'y,z')
x=-6:1/100:6;
sol=eval(y);
plot(x,sol,'k')
grid on
[x0,y0]=ginput(1);
plot(x0,y0,'r.')
if y0<-x0^2/4
    text(x0+0.1,y0,'no solution')
else
    f=dsolve('x*Dy+(Dy)^2-y=0','y(x0)=y0','x')
     for k=1:length(f)
     y1=eval(f(k));
     plot(x,y1,'b')
     end
end
 end
```



Отново особеното решение е обвивка на фамилията от обикновени решения - правите $y = cx + c^2$.