1 Уравнение на хармоничния осцилатор.

Разглеждаме задачата на Коши за уравнението на хармоничния осцилатор

$$\begin{aligned} &y''(t) + ky'(t) + \omega^2 y(t) = f(t),\ t > 0 \\ &y(0) = y_0,\ y'(0) = v_0, \end{aligned} \tag{1}$$

където коефициентът на триене $k \geq 0$ и собствената честота $\omega > 0$ са параметри, зависеща от конкретната физична система, а y_0 и v_0 са константи.

Задача 1. Решете символно задачата на Коши (1) и начертайте графиките на решението ѝ $y(t)$ и неговата първа производна $y'(t)$, както и кривата $\phi := \{(y(t), y'(t))\}$ за $t \in [0, 30]$ при $y_0 = 1,\ v_0 = 1,\ \omega = 4,$ и

а) $k = 0,\ f(t) = 0$ - свободни трептения без триене;

б) $k = 0.5,\ f(t) = 0$ - свободни трептения с триене;

в) $k = 0,\ f(t) = 3\sin\frac{t}{2}$ - принудени трептени;

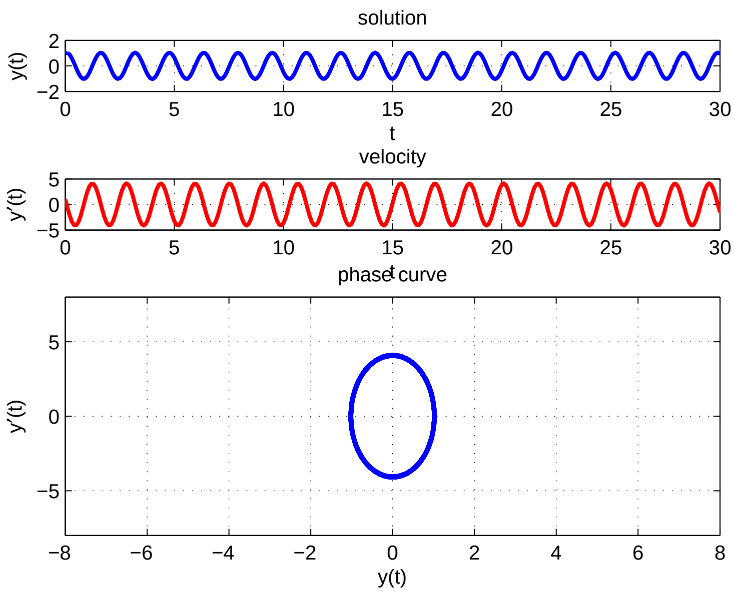
г) $k = 0,\ f(t) = 3\sin(4t)$ - резонанс;

д) $k = 0,\ f(t) = 3\sin(4,6t)$ - биене.

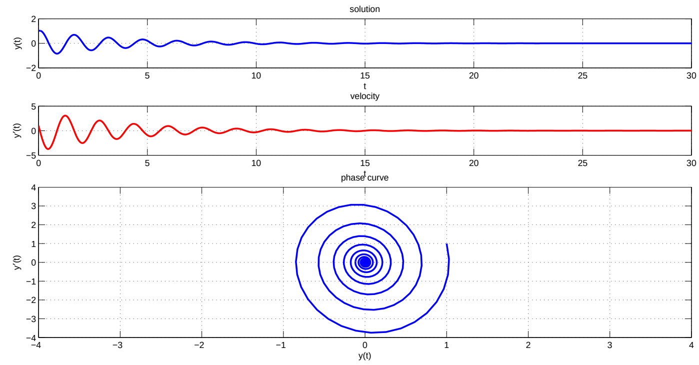
Ще направим анимация на движението на съответните точки върху кривите с нарастване на t.

```
function hoscilator
clear
clf
%HARMONICHEN OSCILATOR s dsolve

t0=0;y0=1;v0=1; tmax=30;k=0;w=4;

y=simplify(dsolve('D2y+0.5*Dy+16*y=3*sin((0)*t)','y(0)=1','Dy(0)=1'))
dy=diff(y);

% bez triene (k=0) i bez vunshna sila
% s triene k=0.5
% s vunshna sila k=0,f= 3sin(w1 x),  chestota w1= 0.5; rezonans s w1=w
% i biene s w1=w+0.6

t=t0:0.05:tmax;
Y=eval(y);dY=eval(dy);

for k = 1: length(t)

subplot(4,1,1)
  plot(t(1:k),Y(1:k),'LineWidth',2)
axis([t0,tmax,-2,2])
grid on
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('solution')
```

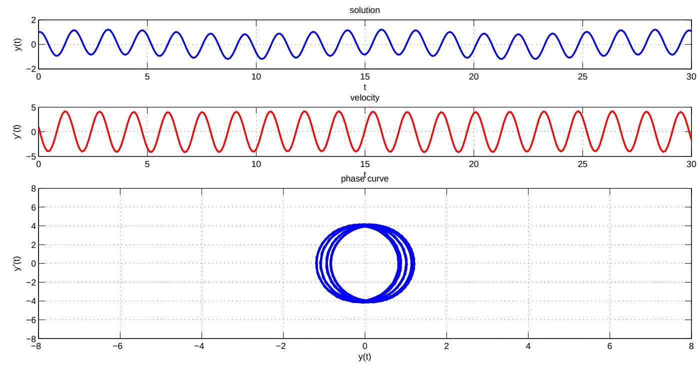
```
subplot(4,1,2)
plot(t(1:k),dY(1:k),'r','LineWidth',2)
axis([t0,tmax,-5,5])
grid on
xlabel('t')
ylabel('y{\prime}(t)')
title('velocity')

subplot(4,1,3:4)
plot(Y(1:k),dY(1:k),'b','LineWidth',2)
axis([-8,8,-8,8]/2)
grid on
xlabel('y(t)')
ylabel('y{\prime}(t)')
title('phase curve')


M(k)=getframe;
end
end
```



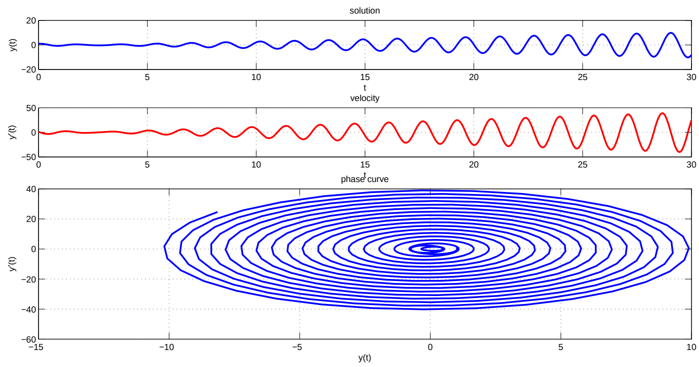
Фигура 1: Периодично движение.



Фигура 2: Триене.

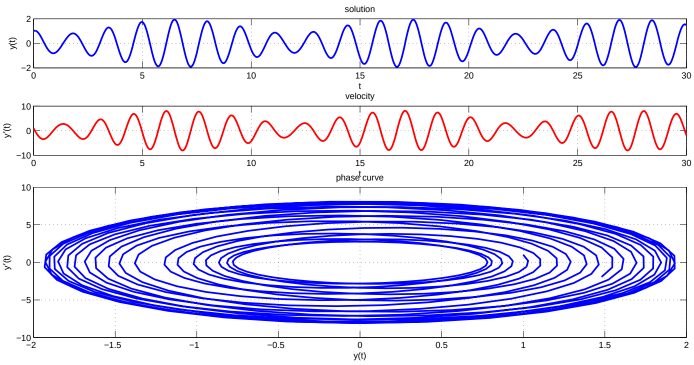


Фигура 3: Принудени трептения.



Фигура 4: Резонанс.

.



Фигура 5: Биене.

Задача 2. Дадена е задачата на Коши за уравнението на хармоничния осцилатор

$$\left|\begin{array}{l} y'' + 5y = a\cos(\omega_0 t) \\ y(0) = 2,\ y'(0) = -1. \end{array}\right.$$

1. Сведете дадената задача до задача на Коши за нормална система от първи ред.

2. Решете символно получената задача на Коши при $a = 0$. Начертайте графиката на намереното решението на изходната задача в интервала $[0, 60]$.

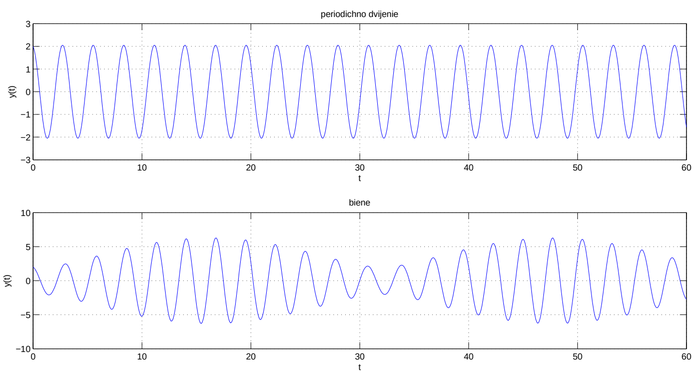
2. При $a = 2$ изберете подходяща стойност на честота ω_0 на външната сила, така че да демонстрирате явлението биене. Решете числено получената задача и начертайте графиката на намереното приближение на решението на дадената задача в същия интеравл, както в подточка (1). Разположете графиките от двете подточки една под друга.

Решение. Полагаме $y_1(t) = y(t),\ y_2(t) = y'(t)$ и получаваме задачата на коши

$$\left|\begin{array}{l} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -5y_1 + a\cos(\omega_0 t) \\ y_1(0) = 2,\ y_2(0) = -1. \end{array}\right.$$

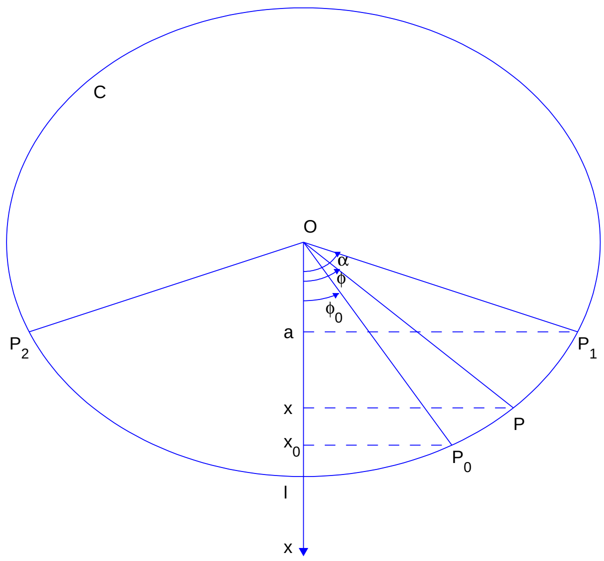
```
function hoscilator2
clear
clf

t0=0;tmax=60;
y0=2;v0=-1;w=sqrt(5);

[y1,y2]=dsolve('Dy1=y2','Dy2=-5*y1','y1(0)=y0','y2(0)=v0')

t=t0:0.05:tmax;

subplot(2,1,1)
```

```
plot(t,eval(y1))
grid on
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('periodichno dvijenie')


  a=2; omega0=w+0.2;
    function u=f(t,y)
        u=[y(2);-5*y(1)+a*cos(omega0*t)];
    end

[T,Y]=ode45(@f,[t0,tmax],[y0;v0]);

subplot(2,1,2)

plot(T,Y(:,1))
grid on
xlabel('t')
ylabel('y(t)')
title('biene')

end
```



2 Математическо махало

Ще разгледаме движението на тежка частица P с маса m по окръжност C с център точката O и радиус l, разположена във вертикална равнина. Избираме остта Ox да е насочена в посока на земното ускорение g. Нека φ е ъгълът между оста Ox и OP, а движението на точката да започва в момента t_0 от положение $P_0(\varphi_0)$. Друга поста-



Фигура 6: Математическо махало.

новка на задачата, която води до същия модел е движението във вертикална равнина на тежка частица P с маса m, закачена посредством безтегловен неразтеглив прът с дължина l за една фиксирана точка O.

Първоначална ще предполагаме, че няма триене. Тогава уравнението описващо движението на тежката частица е

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0. \tag{2}$$

Това уравнение се нарича уравнение на математическото махало и често се среща в различни задачи на механиката в една от двете си форми, написани по-горе. В случая, когато разглеждаме малки осцилации около равновесното положение, можем да смятаме, че $\sin\varphi \approx \varphi$. Тогава уравнението (2) приема вида

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0. \tag{3}$$

Това е линейно уравнение от втори ред и ако знаем началното положение $\varphi(t_0)$ и началната скорост $\dot{\varphi}(t_0)$, можем еднозначно да определим положението на частицата във всеки момент $t \geq t_0$.

Периодът на това движение е

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{4}$$

Този период не зависи от началното отклонение, тоест осцилирането е изохронно. Ако отчетем и съпротивлението γ, което оказва средата, в която се движи частицата P, то уравнението на движението ще има следния вид

$$ml\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0. \tag{5}$$

Пример 2.1 *Да се визуализира движението на математическото махало за* $t \in [0, 30]$*, ако дължината на пръта е 6 m., масата на точката е 2 kg., а коефициента на съпротивление на средата е 0.4. Първоначално точката е отклонена от равновесното си положение на ъгъл* $\pi/3$*, а началната и скорост е* $0.3\ m/sec$.

Решение. За малки отклонения от равновесното положение можем да използваме следното линейно приближение на уравнението на движението (5)

$$ml\ddot{\varphi} + \gamma\dot{\varphi} + mg\varphi = 0.$$

Въвеждаме нови функции $y_1(t) = \varphi(t),\ y_2(t) = \dot{\varphi}(t)$ и достигаме до следната задача на Коши

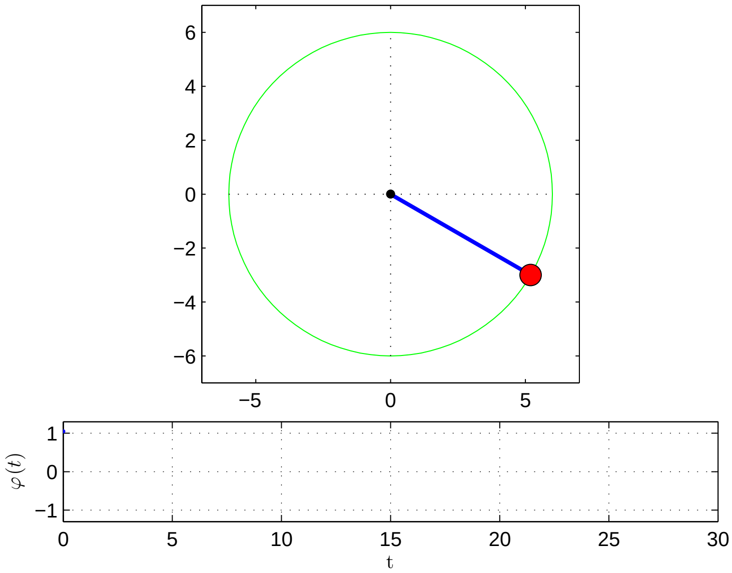
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{g}{l}y_1 - \frac{\gamma}{ml}y_2, \\ y_1(0) = \pi/6,\ y_2(0) = 0.3, \end{cases} \tag{6}$$

която ще решим числено.

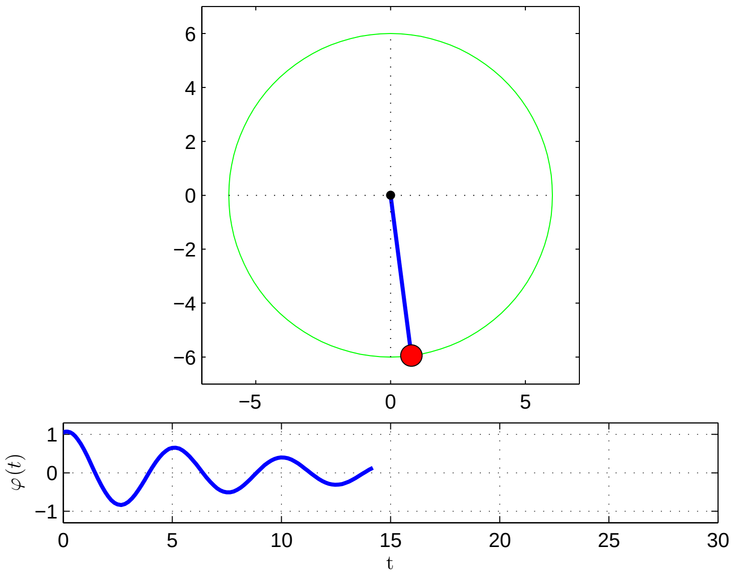
Следния примерен Matlab код визуализира движението на махалото.

```
function pendulum

clear; clf;

gamma=0.4; m=2; g=9.81; l=6; tmax=30;

 %дясна страна на системата
function z=rhs(t,y) z= [y(2);-(g/l)*y(1)-(gamma/m/l)*y(2)]; end

% решаване на системата
[T,Y]=ode45(@rhs,[0,tmax],[pi/3, 0.3]);


% координатите на частицата
x=l*sin(Y(:,1)); y=-l*cos(Y(:,1));

% движението частицата

for k = 1:length(T)

    subplot(4,4,1:12)
```

```
    plot(x(k),y(k),'LineWidth',2)
    hold on
    axis([-l-1 l+1 -l-1 l+1]);
    daspect([1,1,1])

    p=0:pi/50:2*pi;
    plot(l*cos(p),l*sin(p),'g')
    line([0,x(k)],[0,y(k)],'LineWidth',2);

    plot([-l l],[0 0],':k');
    plot([0 0],[-l l],':k');

    rectangle('Position',[x(k)-0.4 y(k)-0.4 0.8 0.8]...
    'Curvature',[1,1],'FaceColor','r')
    rectangle('Position',[-0.15 -0.15 0.3 0.3],...
    'Curvature',[1,1],'FaceColor','k')

        hold off

        subplot(4,4,13:16)
        plot(T(1:k),Y(1:k,1),'LineWidth',2)
        axis([0,tmax,-1.3,1.3])
        grid on
        xlabel('t')
        set(0,'DefaultTextInterpreter', 'latex');
        ylabel('$\varphi(t)$')

getframe;

end
end
```



Фигура 7: Движение на математическото махало от Пример 2.1 в моментите $t = 0$.



Фигура 8: Движение на математическото махало от Пример 2.1 в моментите $t = 14$.