0.1 Системи линейни обикновени диференциални уравнения в нормален вид.

Да разгледаме следната система от $n \geq 2,\ n \in \mathbf{N}$ линейни обикновени диференциални уравнения

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \ldots + a_{1n}(t)x_n(t) + f_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \ldots + a_{2n}(t)x_n(t) + f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \ldots + a_{nn}(t)x_n(t) + f_n(t), \end{array} \tag{1}$$

където $a_{ij}(t),\ f(t)$ са реални или комплексни функции дефинирани и непрекъснати в някакъв интервал Δ. Дали този интервал е краен или безкраен, както и дали е отворен или затворен, няма значение.

Системите от вида (1) се наричат нормални системи. Ако въведем стандартните означения

$$x(t) := \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ x_n(t) \end{pmatrix},\ \dot{x}(t) := \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \dot{x}_n(t) \end{pmatrix},$$

$$A(t) := \begin{pmatrix} a_{11}(t)\ a_{12}(t) \ldots a_{1n}(t) \\ a_{21}(t)\ a_{22}(t) \ldots a_{2n}(t) \\ . \\ . \\ . \\ a_{n1}(t)\ a_{n2}(t) \ldots a_{nn}(t) \end{pmatrix},\ f(t) := \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ . \\ . \\ . \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

системата (1) добива векторния вид

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + f(t),\ t \in \Delta. \tag{2}$$

Ако към системата (2) добавим и n начални условия за n-те неизвестни функции $x_1(t),\ x_2(t), \ldots x_n(t)$ в нея

$$x(t_0) = x_0,\ t_0 \in \Delta,\ x_0 \in \mathbf{C}^n, \tag{3}$$

то получаваме задача на Коши.

Теорията на линейните системи е твърде близка до теорията на линейните диференциални уравнения от n-ти ред.

Ще започнем с основния резултат в тази теория, а именно теоремата за съществуване и единственост на задачата на Коши (2),(3).

Теорема 0.1 *Нека функциите $a_{ij}(t)$ и $f(t)$ са дефинирани и непрекъснати в интервала Δ, а $t_0 \in \triangle$. Тогава задачата на Коши (2),(3) притежава единствено решение, дефинирано в целия интервал Δ.*

Когато $f(t) \equiv \vec{0}$, системата (2) се нарича хомогенна, в противен случай се нарича нехомогенна. Да разгледаме сега хомогенната система

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t),\ t \in \Delta. \tag{4}$$

Лесно се проверява, че линейна комбинация на решения на тази система е пак нейно решение. Може да се докаже следната

Лема 0.2 *Решенията на системата (4) образуват линейно пространство с размерност n.*

Дефиниция 0.3 *Системата $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots,\ \varphi_n$ от решения на (4) се нарича фундаментална система в Δ, ако е линейно независима в този интервал.*

Лема 0.4 *Системата (4) притежава безбройно много фундаментални системи.*

Дефиниция 0.5 *Нека решенията $\varphi_k = (\varphi_k^1, \varphi_k^2, \dots, \varphi_k^n),\ k = 1, 2, \dots n$ на (4) са линейно независими в Δ. Матрицата*

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t)\ \varphi_2^1(t) \dots \varphi_n^1(t) \\ \varphi_1^2(t)\ \varphi_2^2(t) \dots \varphi_n^2(t) \\ . \\ . \\ . \\ \varphi_1^n(t)\ \varphi_2^n(t) \dots \varphi_n^n(t) \end{pmatrix},\ t \in \Delta,$$

се нарича фундаментална за системата (4), а нейната детерминанта - детерминанта на Вронски за $\{\varphi_k\}_1^n$. Детерминанта на матрицата Φ се нарича детерминанта на Вронски и в случая, когато функциите $\{\varphi_k\}_1^n$ са линейно зависими.

Сега вече можем да запишем общото решение на системата (4)

$$x(t) = \Phi(t) \cdot c, \tag{5}$$

където $\Phi(t)$ е фундаментална матрица, а $c \in \mathbf{C}^n$.

Детерминантата на Вронски ни позволява да дадем един прост критерии за линейна независимост за дадена n-торка от решения на (4).

Лема 0.6 *Нека $\varphi_1,\ \varphi_2, \dots, \varphi_n$ са решения на системата (4), дефинирани в Δ, а $W(t)$ е тяхната детерминанта на Вронски. Следните три твърдения са еквивалентни.*

1. *Съществува $t_0 \in \Delta$, за което $W(t_0) \neq 0$.*

2. Системата $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *е линейно независима в* Δ.

3. $W(t) \neq 0$ *за всяко* $t \in \Delta$.

Наличието на фундаментална система от решения на хомогенната система (4) ни позволява да намерим всички решения на нехомогенната система (2), стига да знаем едно нейно частно решение. Наистина, ако $x(t)$ и $\psi(t)$ са две решения на нехомогенната система (2), то очевидно тяхната разлика $x(t) - \psi(t)$ е решение на хомогенната система (4) и за него е в сила представянето (5), тоест

$$x(t) = \psi(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t), \tag{6}$$

Остава да покажем как знаейки фундаментална система от решения на хомогенната система можем да намерим частно решение на нехомогенната. Ще използваме метода на Лагранж, известен още като метод на вариране на константите. Търсим решение на нехомогенната система (2) от вида

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \varphi_k(t), \tag{7}$$

където $c_k(t) \in C^1(\Delta),\ k = 1, 2, \ldots, n$ са функции, който подлежат на определение. Това ще стане като заместим в (2)

$$\dot{\psi}(t) = A(t)\psi(t) + f(t) = A(t) \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \varphi_k(t) + f(t).$$

От друга страна

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t) \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) \dot{\varphi}_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t) \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{n} c_k(t) A(t) \varphi_k(t). \end{aligned}$$

Следователно

$$\sum_{k=1}^{n} \dot{c}_k(t) \varphi_k(t) = f(t). \tag{8}$$

Вярно е и обратното - ако функциите $c_k(t) \in C^1(\Delta),\ k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяват (8), то (7) ще бъде решение на (2). Остава да покажем, че системата (8) има решение. Тя може да записана по следния начин

$$\Phi(t)\dot{c}(t) = f(t),\ t \in \Delta,$$

където $c(t)$ е вектор-стълб с елементи $c_k(t), t \in \Delta$, $\Psi(t)$ е фундаментална матрица на системата (2) и следователно нейната детерминанта е ненулева в Δ. Следователно $\Psi(t)$ е обратима в Δ и можем да запишем

$$\dot{c}(t) = \Phi^{-1}(t) f(t).$$

Сега вече едно интегриране ни дава

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) f(s)\, ds + c_0,\ t_0 \in \Delta,\ c_0 \in \mathbf{C}^n.$$

Така окончателно получаваме

$$\psi(t) = \Phi(t) c_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s) f(s)\, ds. \tag{9}$$

Понеже търсим едно частно решение на нехомогенната система (2), то можем да изберем $c_0 = \vec{0}$. Ако векторът c_0 е произволен, то (9) ни дава всички решения на (2).

Следващата наша стъпка ще бъде да покажем, че линейните системи с постоянни коефициенти се решават експлицитно. Ще изложим най-простия метод, който води до тази цел, именно метода на изключването. Чрез диференциране и образуване на подходящи линейни комбинации, задачата се свежда до решаване на едно диференциално уравнение с постоянни коефициенти и на система от линейни алгебрични уравнения. Да разгледаме системата

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),\ t \in \Delta, \tag{10}$$

където $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$ е матрица от реални константи.

Лесно се вижда, че ако $f(t) \in C^k(\Delta),\ k \geq 1$, то $x(t) \in C^{k+1}(\Delta)$. Наистина, тогава ще имаме

$$\ddot{x}(t) = A\dot{x}(t) + \dot{f}(t),$$

тоест $x(t) \in C^2(\Delta)$. След k диференцирания получаваме желания резултат.

След това наблюдение, ще покажем, че хомогенната система с постоянни коефициенти

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in \Delta, \tag{11}$$

може да бъде сведена до n еднакви линейни диференциални уравнения от n-ти ред за всяка една от функциите $x_k(t),\ k = 1, 2, \ldots, n$. Това ще стане по следния начин: да означим с p диференциалния оператор $\frac{d}{dt}$. Тогава системата (11) може да бъде записана по следния начин

$$px(t) = A\dot{x}(t)$$

или

$$(A - pE)x(t) = 0, \tag{12}$$

където E е единичната матрица с размерност $n \times n$.

Нека $A_{ij}(p)$ е адюлгираното количество на елемента в i-я ред и j-я стълб на матрицата $A - pE$.

Да фиксираме едно k и да умножим i-я ред в (12) с $A_{ik}(p)$ (на практика, това означава, че на i-то уравнение в (11) действаме с диференциалния оператор $A_{ik}(\frac{d}{dt})$) и да съберем получените равенства. Ще получим

$$\det(A - pE)x_k(t) = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{13}$$

Това означава, че за всяка една от неизвестните функции $x_k(t)$ получаваме едно и също линейно диференциално уравнение от ред n с характеристичен полином $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$. Вижда се, че $P(\lambda)$ е характеристичният полином на матрицата A и следователно, човек може веднага да напише уравненията (13) до които се свежда системата (11). Разбира се тези уравнения са само следствие на системата и не всички решения на (13) са решения на (11).

В случая,когато системата е с реални коефициенти, можем да отделим нейните реални решения. Понеже в този случай елементите на матрицата A са реални константи, то полиномът $P(\lambda)$,както и уравненията (11) са с реални коефициенти. Това означава, че (11) има фундаментална система от реални решения $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$. Следователно

$$\begin{array}{l} x_1(t) = c_{11}\varphi_1(t) + c_{12}\varphi_2(t) + \ldots + c_{1n}\varphi_n(t), \\ x_2(t) = c_{21}\varphi_1(t) + c_{22}\varphi_2(t) + \ldots + c_{2n}\varphi_n(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t) = c_{n1}\varphi_1(t) + c_{n2}\varphi_2(t) + \ldots + c_{nn}\varphi_n(t). \end{array} \tag{14}$$

За да определим кои от решенията (14) на уравненията (13) са решения на системата (11), заместваме в нея и установяваме, че от всичките n^2 константи c_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ само n са независими, а останалите се изразяват чрез тях. По този начин получаваме общото решение на хомогенната система (11).

Ако искаме да намерим общото решение на нехомогенната система с постоянни коефициенти (10), то можем да използваме описания по-горе метод на Лагранж. В случая, когато компонентите $f_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ на дясната страна $f(t)$ са квазиполиноми, то метода на неопределените коефициенти за намиране на частно решение е значително по-ефикасен от метода на Лагранж. Тогава представяме f като сума от квазиполиноми от вида $Q(t)e^{\alpha t}$, където $Q(t)$ е векторен полином, а α е реална или комплексна константа. Преобразувайки системата (10) до уравненията (13) ще получим във всяко едно от тях дясна страна $F_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, която е квазиполином и по-нататък процедираме както при линейните уравнения с постоянни коефициенти.

Пример 0.7 *Ще решим с метода на изключването линейната система*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x + y, \\ \dot{y}(t) = 4x + y \end{cases} \tag{15}$$

Решение.

От първото уравнение в системата изразяваме $y = \dot{x} - x$ и заместваме във второто

$$\ddot{x} - \dot{x} = 4x + \dot{x} - x$$

$$\ddot{x} - 2\dot{x} - 3x = 0. \tag{16}$$

Сега от второто уравнение изразяваме $x = \frac{1}{4}(\dot{y} - y)$ и заместваме в първото уравнение

$$\frac{1}{4}(\ddot{y} - \dot{y}) = \frac{1}{4}(\dot{y} - y) + y$$

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = 0. \tag{17}$$

За $x(t)$ и $y(t)$ получихме едно и също линейно уравнение от втори ред, което има характеристичен полином

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Корените на този полином са $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$. Следователно Фундаменталните системи от решения на уравненията (16) и (17) са

$$\{e^{-t}, e^{3t}\},$$

а техните решения са

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t},$$
$$y(t) = c_3e^{-t} + c_4e^{3t},$$

където c_1, c_2, c_3, c_4 са произволни константи. Не всички от тези функции са решения на дадената система, защото уравненията (16) и (17) са следствие от системата, а не са еквивалнтни с нея. За да намерим решенията на системата, заместваме получените фанкции $x(t)$ и $y(t)$ в едно от уравненията на системата. Например в първото уравнение:

$$-c_1e^{-t} + 3c_2e^{3t} = c_1e^{-t} + c_2e^{3t} + c_3e^{-t} + c_4e^{3t}.$$

Откъдето намираме

$$(2c_1 + c_3)e^{-t} + (c_4 - 2c_2)e^{3t} = 0.$$

понеже функциите e^{-t} и e^{3t} са линейно независими в $\mathbb{R}$, то $c_3 = -2c_1$ и $c_4 = 2c_2$ и решението на системата е

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t},$$
$$y(t) = -2c_1e^{-t} + 2c_2e^{3t},$$

където c_1, c_2 са произволни константи. То може да бъде записано и във вида

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Пример 0.8 *Решете нехомеганната система*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x + y, \\ \dot{y}(t) = 4x + y + \frac{4e^{4t}}{1+e^t} \end{cases} \tag{18}$$

Решение. Вече знаем решението на хомогенната система:

$$\begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Търсим частно решение на дадената нехомогенна система от вида (метод на Лагранж):

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & 2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{pmatrix}.$$

Прозводните на неизвестните функции $b_1(t)$ и $b_2(t)$ са решение на системата

$$\begin{pmatrix} e^{-t} & e^{3t} \\ -2e^{-t} & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{b}_1(t) \\ \dot{b}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{4e^{4t}}{1+e^t} \end{pmatrix}$$

От първото уравнение намираме $\dot{b}_1(t) = -e^{4t}\dot{b}_2(t)$ и заместваме във второто уравнение

$$\dot{b}_2(t) = \frac{e^t}{1+e^t}, \ \dot{b}_1(t) = -\frac{e^{5t}}{1+e^t}.$$

Последователно пресмятаме

$$b_2(t) = \int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \int \frac{d\,e^t}{1+e^t} = \ln(1+e^t) + k_1,$$

$$\begin{aligned}
b_1(t) &= -\int \frac{e^{5t}}{1+e^t}\,dt \\
&= -\int \frac{e^{4t}}{1+e^t}\,de^t \\
&= -\int \frac{e^{4t}-1+1}{1+e^t}\,de^t \\
&= -\int \frac{(e^{2t}-1)(e^{2t}+1)+1}{1+e^t}\,de^t \\
&= -\int \frac{(e^t-1)(e^t+1)(e^{2t}+1)+1}{1+e^t}\,de^t \\
&= -\int (e^{3t}-e^{2t}+e^t-1)\,de^t - \int \frac{de^t}{1+e^t} \\
&= -\frac{1}{4}e^{4t} + \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{1}{2}e^{2t} + e^t - \ln(1+e^t) + k_2,
\end{aligned}$$

където k_1 и k_2 са произволни константи. Понеже търсим едно частно решение, можем да изберем $k_1 = k_2 = 0$.

Общото решение на дадената нехомогенна система е

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}.$$