Задача 21. Определете функцията $\varphi \in C^2(0,3)$ в смесената задача за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx},\ 0 < x < 3,\ t > 0 \\ u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = 0,\ 0 \le x \le 3 \\ u(0,t) = 0,\ u_x(3,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases},$$

така че решението ѝ да бъде стояща вълна.

Решение:

Стояща вълна се получава, когато $\varphi(x)$ е някоя от собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил, която се получава при решаването на даденото уравнение на струната.
Цел: да получим задачата на Щурм-Лиувил и да видим какви са собствените и функции.

Разделяме променливите: $u(x,t) = X(t)T(t)$; $X(x) \,.\, T''(t) = X''(x) \,.\, T(t)$;
$\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const$; $\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ T''(t) + \lambda T(t) = 0 \end{cases}.$

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ \ t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0$
$u_x(3,t) = X'(3)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X'(3) = 0$

За $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ \ 0 < x < 3 \\ X(0),\ \ X'(3) = 0 \end{cases}$$

Тя е със собствени стойности $\lambda_k = \left(\dfrac{2k+1}{2L}\pi\right)^2$, $k \in \mathbb{N}_0$ и собствени функции
$X_k(x) = sin\left(\dfrac{2k+1}{6}\pi x\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Всички решения на задачата на Щурм-Лиувил са $X_k(x) = c \,.\, sin\left(\dfrac{2k+1}{2L}\pi x\right)$.

Окончателно, ще получим стояща вълна, ако изберем φ да е някоя от собствените функции $X(k)$.