

Факултет по математика и информатика, СУ  
„Св. Климент Охридски“

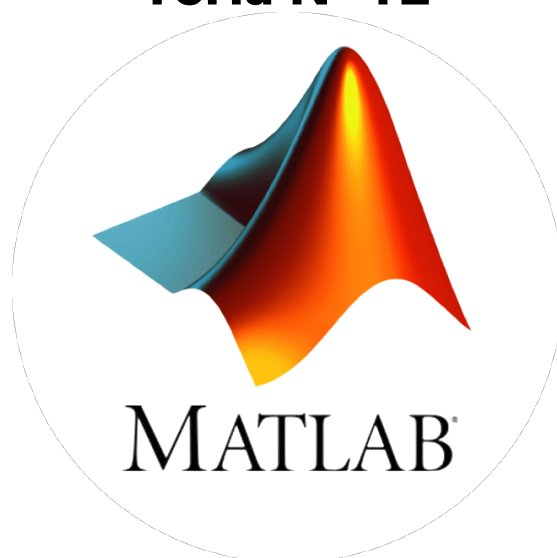


ПРОЕКТ

ПО

Диференциални уравнения и приложения  
спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен  
семестър, учебна година 2019/2020

**Тема № 12**



XX.XX.XXXX г.  
гр. София

Изготвил: XXXXX XXXXX  
група X, ф.н. XXXX

Оценка:.....

## СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта
2. Решение на задачата
  - 2.1. Теоритична част
  - 2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му
  - 2.3. Графики (включително от анимация)
  - 2.4. Коментари към получените с MathLab резултати

## 1. Тема (задание) на проекта.

**Тема СИ20-П-12.** Движението на полуограничена струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} \dot{x} = x - x^3 \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

1. Намерете нейните равновесни точки. Напишете линейното приближение на системата в околност на една от намерените равновесни точки.
2. Начертайте фазов портрет на написаната линейна система в подточка (1). Към всяка една от изобразените фазови криви (бе равновесната точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

## 2. Решение на задачата

### 2.1. Теоритична част

Дадената система не е линейна, но е автономна, тъй като не зависи от  $t$ . Равновесните ѝ точки са там където скоростите се нулират, това са решенията на системата:

$$\begin{cases} x - x^3 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1 - x^2) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x(1 - x^2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad 1 - x^2 = 0 \Rightarrow$$

$x_2 = 1, x_3 = -1$ . Следователно равновесните точки на дадената система са:  $(0; 0), (1; 0), (-1; 0)$ .

Линейното (първо) приближение на дадената система в околност на равновесната точка  $(a, b)$  е системата:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = J(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}, \text{ където } J(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{pmatrix} \text{ и}$$

$f(x, y) = x - x^3, g(x, y) = -y$ . Следователно:

$$f'_x = 1 - 3x^2; \quad f'_y = 0$$

$$g'_x = 0; \quad g'_y = -1$$

$$\text{Т.е. } J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.) В околност на равновесната точка (1; 0):

$J(1; 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , следователно линейното приближение на дадената система в околност на тази равновесна точка е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \dot{x} = -2(x - 1) \\ \dot{y} = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x + 2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

Аналогично може да намерим и линейното приближение на системата в околност на останалите равновесни точки.

2.) В околност на равновесната точка (0 0):

$J(0; 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ , следователно линейното приближение на дадената система в околност на тази равновесна точка е:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

3.) В околност на равновесната точка (-1; 0):

$$J(-1; 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x + 1 \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -2x - 2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}.$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function phasePortrait12
    function z=ff(t,y)
        z=[y(1)-y(1)^3; -y(2)];
    end
clf; clc
tmax=5;
hold on
grid on
daspect([1 1 1])

% можем да изобразим повече фазови криви като намалим стъпката
x=-3:0.5:3;
y=-3:0.5:3;

[X,Y]=meshgrid(x,y);
% чертаем равновесните точки на системата
plot(0, 0, 'k*', -1, 0, 'k*', 1, 0, 'k*')

% чертаем фазов портрет
for i=1:length(x)
    for j=1:length(y)
        [T,Z]=ode45(@ff, [0, tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
        [T1,Z1]=ode45(@ff, [0, -tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

        plot(Z(:,1), Z(:,2), Z1(:, 1), Z1(:, 2))
        axis([-4, 4, -4, 4])
    end
end

% тангенциални вектори:
DX=X - X.^3;
DY=-Y;

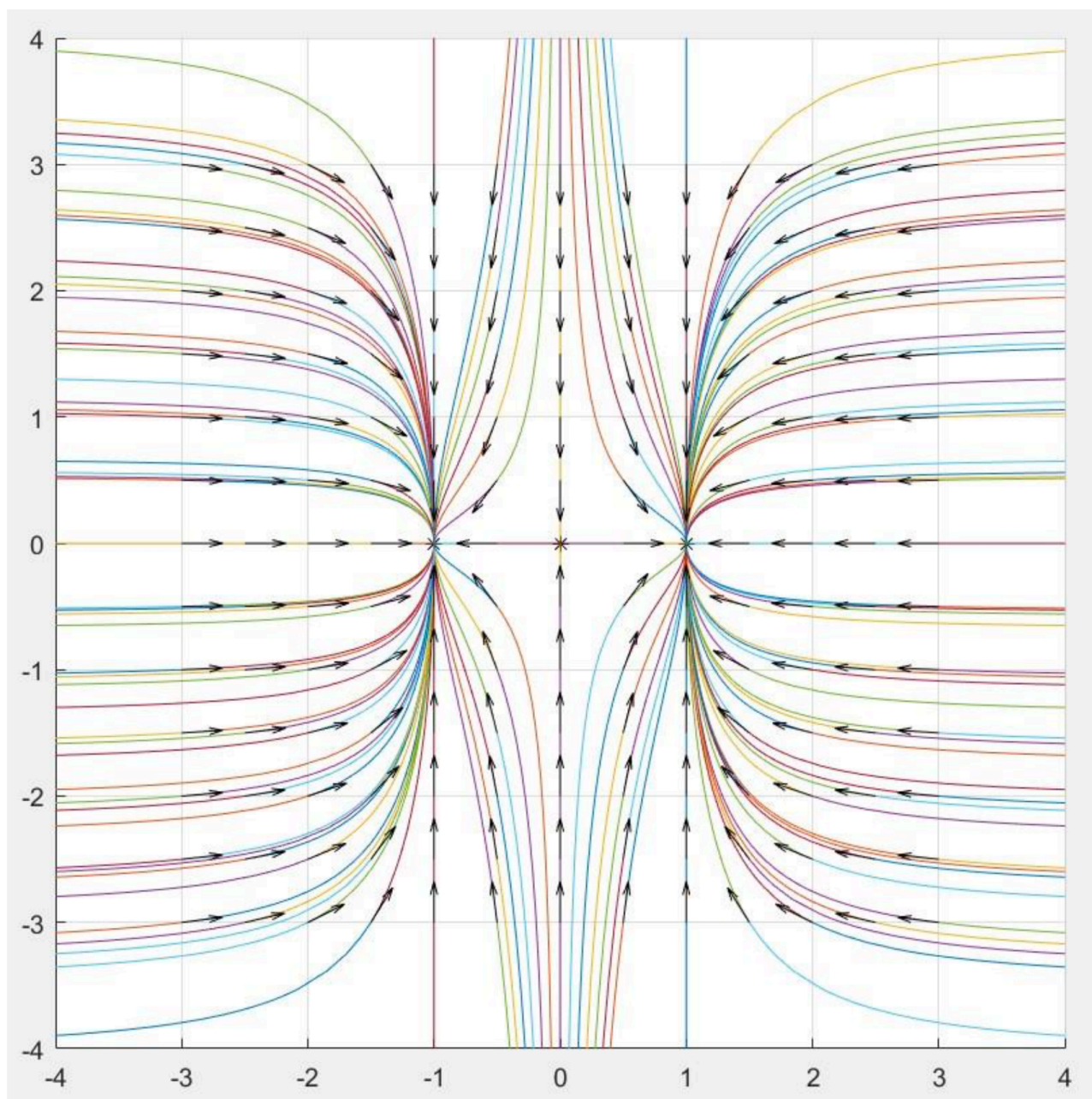
% чертаем ненормирани тангенциални вектори
% quiver(X, Y, DX, DY, 1.5, 'k');

% нормираме тангенциалните вектори
D=sqrt(DX.^2+DY.^2);

% чертаем нормираните тангенциални вектори
quiver(X, Y, DX./D, DY./D, 0.5, 'k')
end
```

## 2.3. Графики

### а) Фазов портрет и нормирани тангенциални вектори

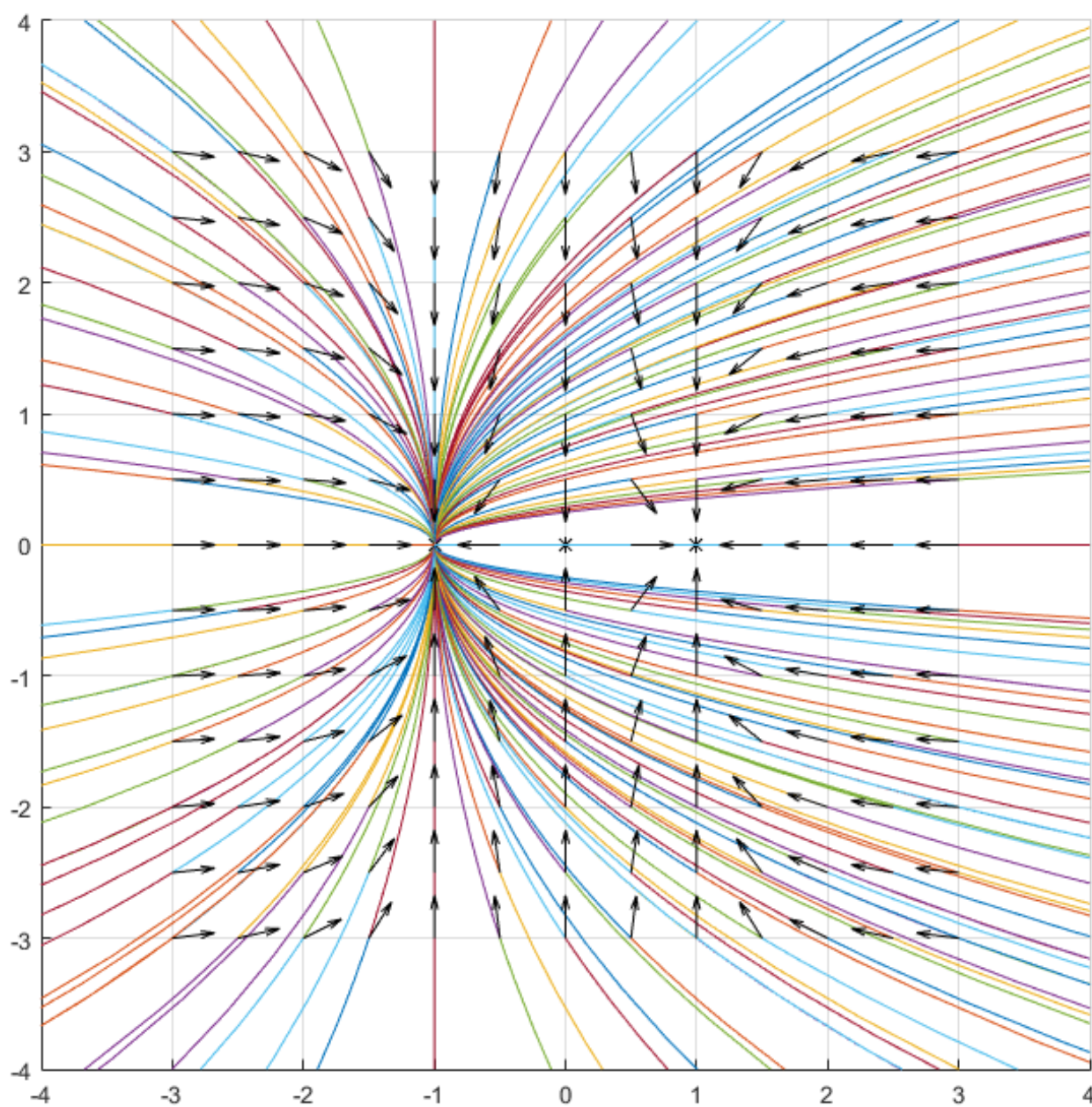


Избираме си точката  $(-1; 0)$ . Ще начертаем фазовия портрет на линейното и приближение. За целта трябва само да променим кода на функцията  $z=ff(t, y)$  по следния начин:

```
function z=ff(t, y)
    z=[-2*y(1)-2; -y(2)];
end
```

както и тангенциалните вектори на:

```
DX=X - X.^3;
DY=-Y;
```



## 2.4. Коментари към получените с MatLab резултати:

От получения чертеж забелязваме, че фазовите криви при  $x < -1$  и  $x > 1$  са параболи. Освен това, равновесните точки  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$  са асимптотично устойчиви - и двете точки са пример за устойчив възел. Точката  $(0; 0)$  е неустойчива и се нарича седло. Това може да покажем и със следните изчисления:

1. За равновесните токи  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$ :

$J(-1,0) = J(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Следователно трябва да пресметнем:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$(2 + \lambda)(1 + \lambda) = 0; \quad \lambda_1 = -2 < 0; \quad \lambda_2 = -1 < 0$$

Следователно  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$  са асимптотично устойчиви положения на равновесие. Както  $(-1; 0)$ , така и  $(1; 0)$  е устойчив възел.

2. За равновесната точка  $(0; 0)$

$$J(0,0) = J(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 0 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1 - \lambda)(-1 - \lambda) = 0$$

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 > 0; \quad \lambda_2 = -1 < 0$$

Следователно  $(0; 0)$  е неустойчиво положение на равновесие и се нарича седло.