Задача 1. Колко решения има задачата?

1.1. $\begin{cases} y' = (y+1)e^{x^2-1} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} (y')^2 + xy' + y = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = 3 \end{cases}$ 1.4. $\begin{cases} (y')^2 + xy' - y = 0 \\ y(2) = 1 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} y'' + 9y = 0 \\ y(0) = 0,\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$

Решение:

1.1. Имаме линейно диференциално уравнение от първи ред с едно начално условие - задача на Коши. Следователно имаме единствено решение дефинирано там където са дефинирани коефициентите на уравнението, т.е. в цялото $\mathbb{R}$.
За уравнението $y' = ye^{x^2-1} + e^{x^2-1}$ имаме, че $a(x) = b(x) = e^{x^2-1}$, които са непрекъснати в $\mathbb{R}$. $y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \displaystyle\int b(x)e^{-\int a(x)dx}\right)$. Имаме една степен на свобода - това е произволната константа c и едно начално условие, от което ще намерим тази константа еднозначно. Решението ще е единствено.

1.2. Ще проверим каква точка е $(1,1)$ за уравнението.
$D(x,y) = x^2 - 4y \Rightarrow D(1,1) = -3 < 0$. Следователно в околност на тази точка няма как да разрешим уравнението относно y'. Нито едно решение не минава през тачи точка.

1.3. Имаме линейно уравнение с постоянни коефициенти. Характеристичния полином на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$. Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_1 = 1$. Следователно ФСР:$= \{e^{-3x},\ e^{x}\}$. Тогава $y(x) = c_1 \,.\, e^{-3x} + c_2 \,.\, e^{x}$. Т.е. имаме две степени на свобода - произволните константи c_1 и c_2 и едно начално условие. Чрез него ще урпеем да изразим едната константа чрез другата и така ще останем с една степен на свобода. Следователно уравнението има безбройно много решения.

1.4. Аналогично на 1.2.. но за точката $(2,1)$ и дескриминантата
$D(x,y) = x^2 + 4y \Rightarrow D(2,1) = 8 > 0$. Следователно задачата ще се сведе до две линейни уравнения от първи ред с едно условие, т.е. ще имаме точно две решения.

1.5. Задача на Щурм-Лиувил. Имаме два варианта:
- 9-ката е собствена стойност и задачата има безбройно много решения
- 9-ката не е собствена стойност и задачата има единствено нулевото решение

Собствените стоиности имат вида

$\lambda_k = \left(\dfrac{2k+1}{2L}\pi\right) \overset{L=\frac{\pi}{2}}{=} \left(2k+1\right)^2$, където $k \in \mathbb{N}_0$. $\lambda_1 = 9 \Rightarrow$ има безброино много решения.

1.6. Аналогично на 1.6. $\lambda_k = \left(\dfrac{2k+1}{2L}\pi\right) \overset{L=\pi}{=} \left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2$. 9-ката няма как да бъде представена в този вид, следователно няма да бъде от спектъра уравнението (от собствените стоиности) и ще имаме единствено нулевото решение.