Задача 2. Дадено е уравнението

$$y' = \frac{4y - 2x - 6}{x + y - 3} \qquad (*)$$

1.) Намерете пресечната точка (a, b) на правите $l_1 : 4y - 2x - 6 = 0$ и $l_2 : x + y - 3 = 0$.
2.) Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(t) = y(t + a) - b$ след като направите смяна на променливите $x = t + a,\ y = z + b$ в уравнението (*)?

Решение:

Всяко уравнение от вида $y' = \dfrac{ax + by + c}{mx + ny + p}$ може да бъде сведено до хомогенно уравнение като се намери пресечната точка на двете прави $l_1 : ax + by + c = 0$ и $l_2 : mx + ny + p = 0$ (ако съществува пресечна точка).

1.) $\begin{cases} 4y - 2x - 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$, $\ y = 3 - x,\ \ 4(3 - x) - 2x - 6 = 0;\quad 12 - 4x - 2x - 6 = 0;$
$2 - x - 1 = 0;\quad x = 1 \Rightarrow y = 2$. Т.е. пресечната точка на двете прави е $(a, b) = (1,2)$.

2.) $z(t) = y(t + a) - b = y(t + 1) - 2;\ \ x = t + 1,\ \ y = z + 2$

$$y' = \frac{4(z + 2) - 2(t + 1) - 6}{t + 1 + z + 2 - 3} = \frac{4z - 2t}{z + t} = \frac{4\left(\frac{z}{t}\right) - 2}{\frac{z}{t} + 1};\qquad y' = (z + 2)' = z' \ \Rightarrow$$

$z' = \dfrac{4\left(\frac{z}{t}\right) - 2}{\frac{z}{t} + 1}$, хомогенно диференциално уравнение.