Векторни полета и фазови портрети на линейни автономни системи в равнината. Устойчивост

1 Дефиниции

Дадена е автономната система $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$, т.е система от диференциални уравнения, в дясната част на която не участва явно t.

- Точката (a,b) наричаме равновесна (стационарна/особена), ако $\begin{cases} f(a, b) = 0 \\ g(a, b) = 0 \end{cases}$.

  Ако (a,b) е равновесна точка, то $(x(t) = a,\ y(t) = b)$ е решение на системата.

- Ако $(x(t),\ y(t)),\ t \in \Delta$ е решение на дадената система, то кривата $I = \{(x(t),\ y(t),\ t),\ t \in \Delta\}$ се нарича интегрална крива. $(I \subset \mathbb{R}^3)$

- Нейната проекция в равнината $\{t = 0\}$ се нарича фазова крива $\Phi = \{(x(t),\ y(t)),\ t \in \Delta\}$, $\Phi \subset \mathbb{R}^2$.
  Съвкупност от всевъзможните фазови криви ще наричаме фазов портрет.

2 Класификация на равновесните точки на линейни автономни системи в равнината

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1 \\ \dot{y} = a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2 \end{cases}$$

Равновесните точки са решенията на системата
$\begin{cases} a_{11}\ x + a_{12}\ y + b_1 = 0 \\ a_{21}\ x + a_{22}\ y + b_2 = 0 \end{cases}$
Основна информация за фазовия портрет на системата носят двете собствени стойности λ_1 и λ_2 на матрицата A $= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

- При λ_1, $\lambda_2 \in$ R:
  - Ако $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то равновесната точка се нарича неустойчив възел.
  - $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, то равновесната точка се нарича устойчив възел.
  - $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$, то равновесната точка се нарича седло и е неустойчива.
- При λ_1, $\lambda_2 \in$ C:
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) > 0$, равновесната точка се нарича неустойчив фокус и е неустойчива, а фазовите криви са развиващи се спирали.
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) < 0$, равновесната точка се нарича устойчив фокус и е устойчива, а фазовите криви са навиващи се спирали.
  - Ако $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = 0$, равновесната точка се нарича център и е устойчива, а фазовите криви са елипси.

3 Задача

Дадени са системите

- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\ -4\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-5\\ 0\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5 & 1\\ -18 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & -4\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\ -2\end{pmatrix}$

1. Намерете равновесните точки на системите и ги изследвайте относно устойчивост. Определете типа на намерените равновесни точки.
2. Начертайте фазови портрети на системите в околност на равновесните точки. Към всяка една от изобразените фазови криви (без равновесните точка) начертайте по един тангенциален вектор. Маркирайте със символа звезда положението на равновесие.

4 Решение

1. - $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

     Намиране на равновесни точки:

     $$\begin{cases} x + 2y + 1 = 0\\ 4x + 3y - 1 = 0\end{cases}$$

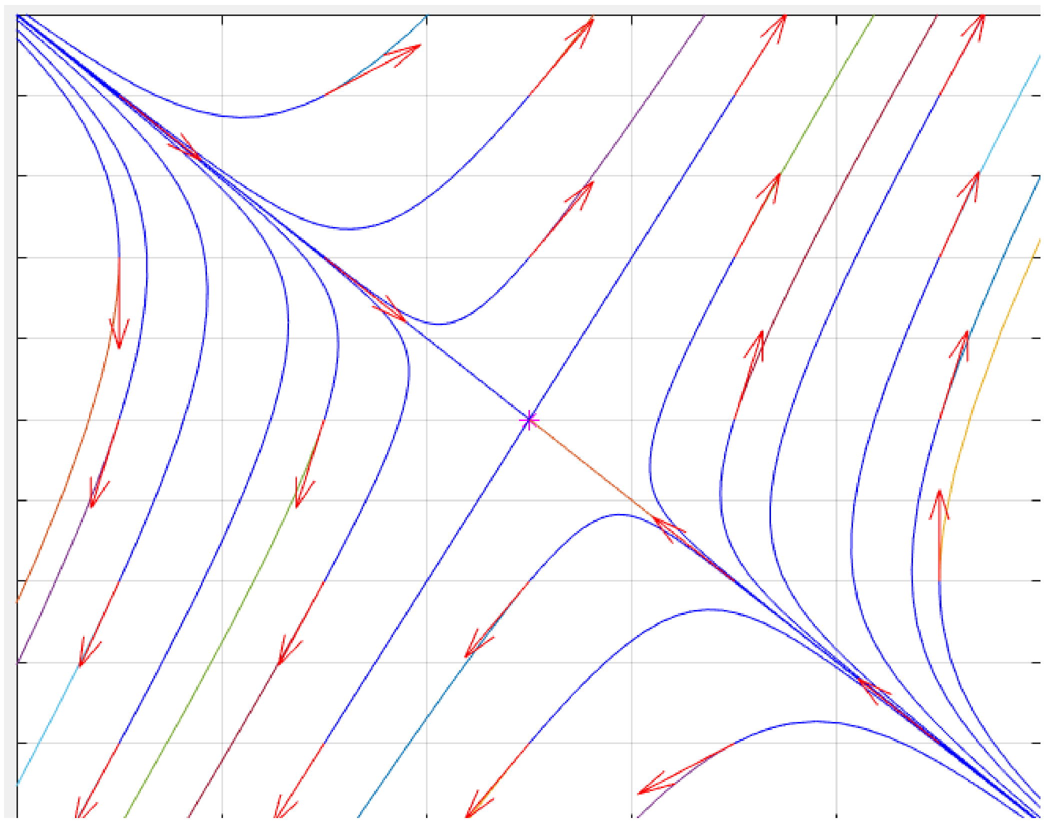
     Решението на системата е (1,-1).

     Намиране на собствените стойности λ_1 и λ_2 - те са корените на уравнението $\det\left(\grave{A} - \lambda E\right)$.

     $$\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 2*4 = 3 - 4\lambda + \lambda^2 - 8 = 0$$

     $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0 \implies \lambda_1 = -1$ и $\lambda_1 = 5$

Равновесната точка е неустойчива (седло).

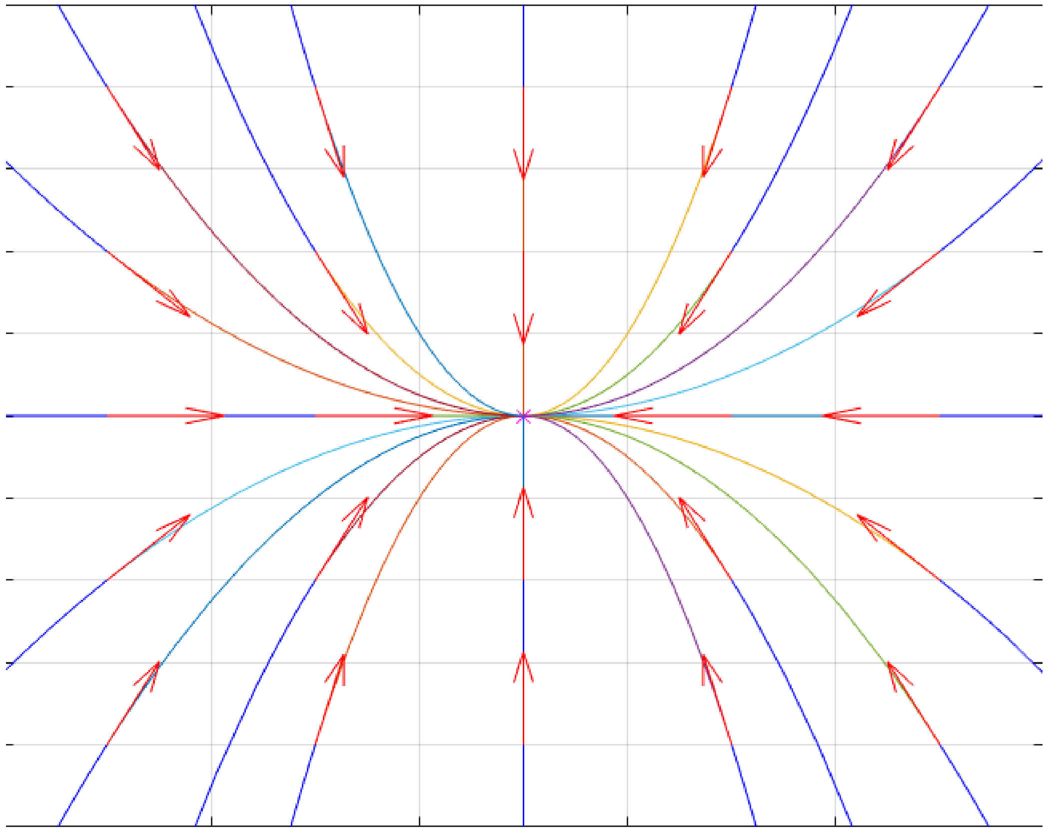


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} -x - 1 = 0 \\ -2y - 6 = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (-1,3).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_1 = -2$
  Равновесната точка е устойчива (устойчив възел).

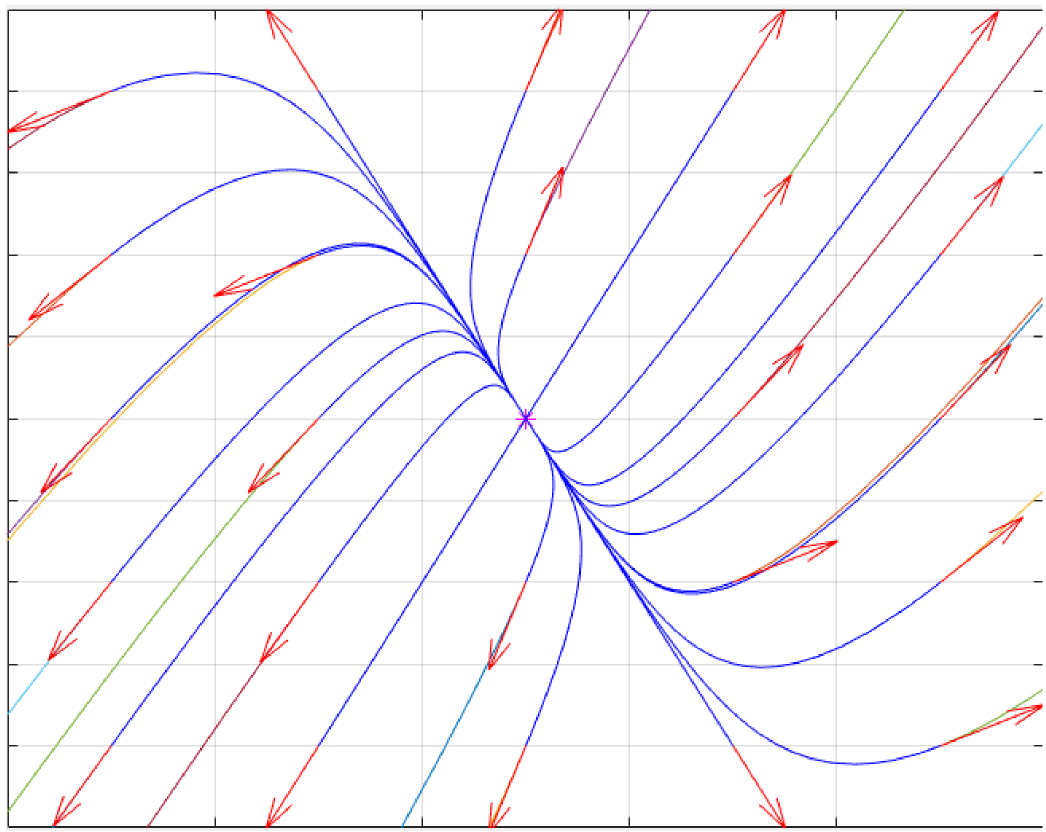


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} 3x + y - 3 = 0 \\ 4x + 3y - 4 = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (1,0).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_1 = 5$
  Равновесната точка е неустойчива (неустойчив възел).

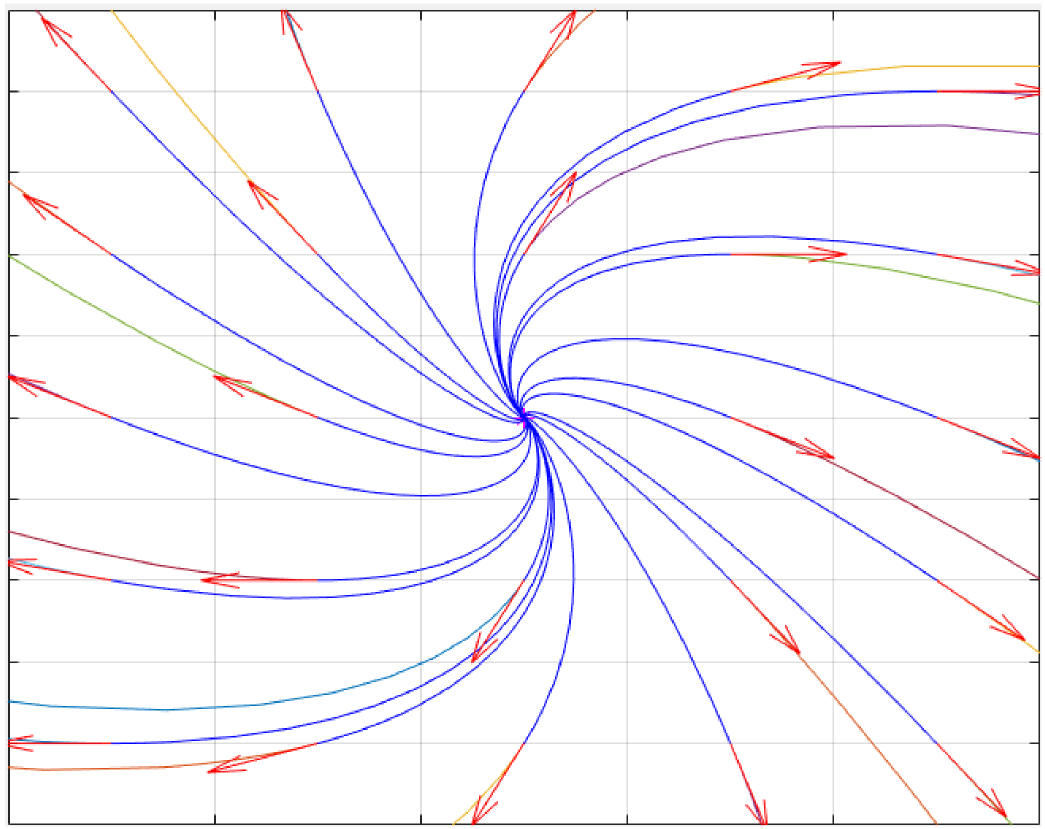


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} 4x + y - 5 = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (1,1).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 3 + i$ и $\lambda_1 = 3 - i$
  Равновесната точка е неустойчива (неустойчив фокус).

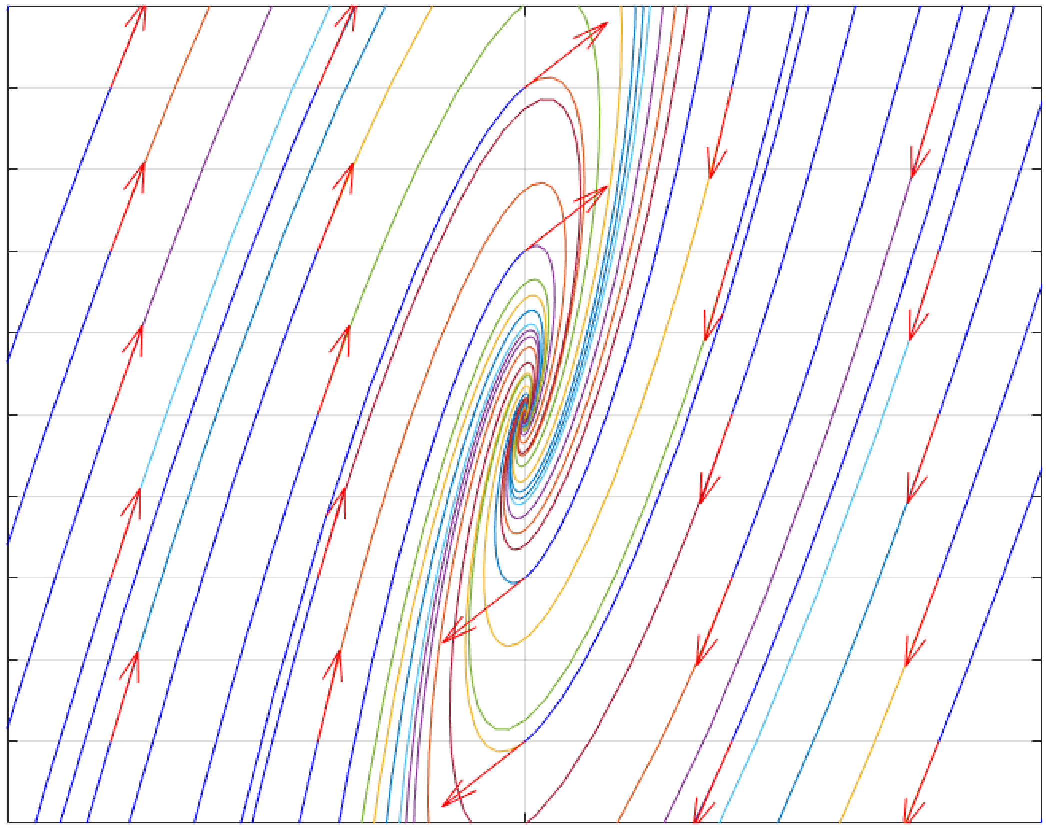


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ -18 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

  $$\begin{cases} -5x + y = 0 \\ -18x + y = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (0,0).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = -2 + 3i$ и $\lambda_1 = -2 - 3i$
  Равновесната точка е устойчива (устойчив фокус).

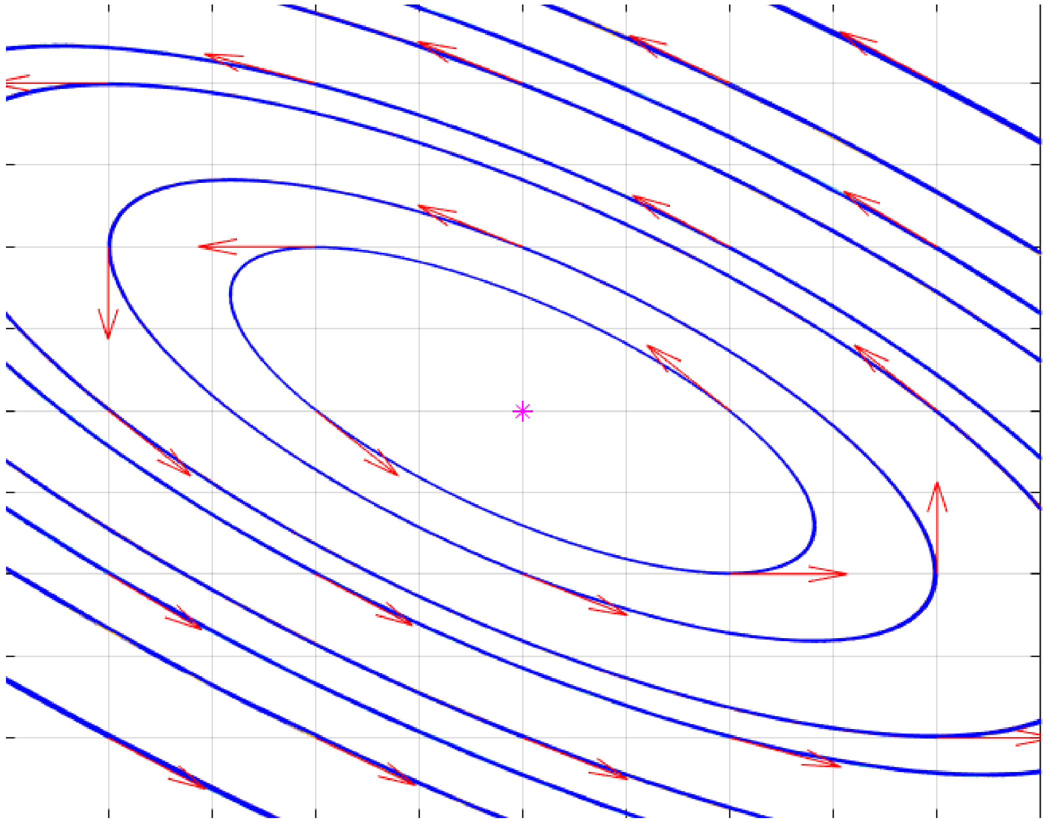


- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

  Намиране на равновесни точки:

$$\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ 2x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

  Решението на системата е (2,-1).
  Собствените стойности са $\lambda_1 = 2i$ и $\lambda_1 = -2i$
  Равновесната точка е устойчива (център).



2. MATLab код

```
function phaseportreit
clc
clf
tmax = 50;
A = [1, 2; 4, 3]; b = [1; -1]; % sedlo
%A = [-1, 0; 0, -2]; b = [-1; -6]; % ustoichiv vuzel
%A = [3, 1; 4, 3]; b = [-3; -4]; % neustoichiv vuzel
%A = [4, 1; -2, 2]; b = [-5; 0]; % neustoichiv fokus
%A = [-5, 1; -18, 1]; b = [0; 0]; % ustoichiv fokus
%A = [-2, -4 ;2, 2]; b = [0; -2]; % centur

% equilibrium point
eqpoint = A \ (-b)
```

```
plot(eqpoint(1),eqpoint(2),'m*')

axis([eqpoint(1)-5, eqpoint(1)+5,eqpoint(2)-5, eqpoint(2)+5])
hold on
grid on
[T, D] = eig(A)

if imag(D(1,1)) == 0 % v tozi if se izchertavat pravite,
    % opredeleni ot sobstvenite vektori na sistemata, kogato
    % kogato sobstvenite stoinosti sa realni.
    % Togava chastite ot tezi pravi bez ravnovesnata tochka
    % sa fazovi krivi na sistemata.
    % Ravnovesnata tochka e otdelna fazova kriva.
    xx = -10 : 1 : 10;
    for j = 1 : 2
        if T(1,1) ~= 0
            plot(xx+eqpoint(1),T(2,j)/T(1,j)*xx + eqpoint(2), 'k')
        else
            plot(0*xx + eqpoint(1), xx, 'k')
        end
    end
end

x = eqpoint(1)-4 : 2 : eqpoint(1)+4;
y = eqpoint(2)-4 : 2 : eqpoint(2)+4;

[X, Y] = meshgrid(x,y);

for i = 1 : length(x)
    for k = 1 : length(y)
        [T, Z] = ode45(@rhs, [0, tmax],[X(i, k), Y(i, k)]);
        [T1, Z1] = ode45(@rhs, [0, -tmax],[X(i, k), Y(i, k)]);
        plot(Z(:, 1), Z(:,2 ), Z1(:, 1), Z1(:, 2), 'b')
    end
end

function z = rhs(~,y)
    z = A*y + b;
```

```
end

DX = A(1,1)*X + A(1,2)*Y + b(1);
DY = A(2,1)*X + A(2,2)*Y + b(2);

d=sqrt(DX.^2+DY.^2);
quiver(X,Y,DX./d,DY./d,0.5,'r')
end
```

Ако не чертаем фазовите криви, а само тангенциалните вектори (x, Ax + b) в мрежа от точки, то получаваме векторно поле на системата.