Вариант Е
github.com/andy489/DEA
Задача 1. Решете задачата на Коши

$$\begin{cases} xy'' = (y'+3)(1-x) \\ y(-1) = 2,\ y'(-1) = -2 \end{cases}$$

Решение:

Уравнението е от втори ред и позволява понижаване на реда, тъй като y не участва в него. Следователно, нека $z(x) = y'(x) \Rightarrow z'(x) = y''(x)$. Тогава уравнението придобива вида: $z' = (z+3)\,.\,\dfrac{1-x}{x}$, което е уравнение с разделящи се променливи.
1.) Очевидно $z \equiv -3$ е решение.
2.) При $z \neq -3$: $\dfrac{dz}{z+3} = \dfrac{(1-x)dx}{x} \Bigg| \int;\quad ln|z+3| = \displaystyle\int \frac{1}{x}dx - \int 1dx = ln|x| - x + c.$

$e^{ln|z+3|} = e^{ln|x|-x+c};\quad |z+3| = e^c\,.\,|x|\,.\,e^{-x}$, което може да запишем по следния начин:

$z + 3 = c_1\,.\,x\,.\,e^{-x}$, където c_1 е произволна константа. По този начин освен че отстраняваме модула, включваме и първото решение от 1.)
$y' = z = -3 + c_1xe^{-x} \Bigg| \int;$
$y(x) = -3x + c_1\displaystyle\int xe^{-x}dx = -3x - c_1\int xe^{-x}d(-x) = -3x - c_1\int xde^{-x} =$
$= -3x - c_1\left(xe^{-x} - \displaystyle\int e^{-x}dx\right) = -3x - c_1xe^{-x} - c_1e^{-x} + c_2$, където c_2 е произволна константа.
Остана само да приложим началните условия, за да намерим константите. За целта трябва да пресметнем: $y'(x) = -3 - c_1e^{-x} + c_1xe^{-x} + c_1e^{-x} = -3 + c_1xe^{-x}$.
$y(-1) = 3 + c_1e - c_1e + c_2 = 2 \Rightarrow c_2 = -1$
$y'(-1) = -3 - c_1e = -2 \Rightarrow c_1 = -e^{-1}$
Окончателно: $y(x) = -3x + xe^{-x-1} + e^{-x-1} - 1$.

Задача 2. Решете уравнението

$$x(x+1)y' = 2(x+1)y + x^4$$

Решение:

Изразяваме y', за да може по-лесно да определим какъв е вида на уравнението.
$y' = \dfrac{2}{x}y + \dfrac{x^3}{x+1}$. Получихме линейно уравнение от първи ред.
$y(x) = e^{\int a(x)dx}\left(c + \displaystyle\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx\right)$, където $a(x) = \dfrac{2}{x}$ и $b(x) = \dfrac{x^3}{x+1}$.
$\displaystyle\int a(x)dx = 2ln|x| = lnx^2;\quad \int b(x)e^{-lnx^2}dx = \int b(x)x^{-2}dx = \int \frac{x}{x+1}dx =$
$= \displaystyle\int \frac{x+1-1}{x+1}dx = x - ln|x+1|$

$\Rightarrow y(x) = e^{lnx^2}\left(c + x - ln|x-1|\right) = cx^2 + x^3 - x^2ln|x-1|.$