Домашна работа 2

по „Диференциални уравнения и приложения“

Специалност „Софтуерно инженерство“, летен семестър на 2019/2020 уч. година

Име: *Андрей Кирилов Стоев*

Факултетен номер: *62369* **Група:** 3 **Дата:** *29.04.2020 г.*

Срок за предаване: *03.05.2020 г.*

<u>Задача СИ20-ДР2-72.</u>
Условие:
а) Намерете фундаментална система от решения (ФСР) на уравнението $2y''' - 4y'' - 5y' = 0$.

б) Пресметнете детерминантата на Вронски за функциите от ФСР и напишете общото решение на уравнението.

в) Напишете $MATHLAB$ код, в който решава символно задачата на Коши за това уравнение с начални условия $y(1) = 0,\, y'(1) = -6,\, y''(1) = 0$ и начертайте графиката на полученото решение в подходящ интервал.

<u>Разработка:</u>
Аналитично решение:

а) Намиране:
Имаме следното линейно и хомогенно уравнение с постоянни коефициенти:
$2y''' - 4y'' - 5y' = 0$. Неговият характеристичен полином $q(\alpha)$ има вида
$q(\alpha):\ 2\alpha^3 - 4\alpha^2 - 5\alpha = 0$ и $deg(\alpha) = 3$. Следователно търсим 3-те корена на уравнението $\alpha(2\alpha^3 - 4\alpha - 5) = 0,\, D = 2^2 - 2.(-5) = 14 \Rightarrow$

$$\alpha_1 = 0,\, \alpha_2 = 1 + \frac{\sqrt{14}}{2},\, \alpha_3 = 1 - \frac{\sqrt{14}}{2}.$$

И трите получени корена са от първа кратност $\Rightarrow$ имаме ФСР

$\{e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, e^{\alpha_3 x}\} = \{1, e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}, e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)}\}$. Твърдим, че тази функаментална система от решения удовлетворява уравнението. Сега, в б) следва да защитим това твърдение.

б) Доказване:
За да докажем, че това ФСР наистина удовлетворява нашето уравнение е необходимо да пресметнем детерминантата на Вронски за него.

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$$, където $y_1=1$, $y_2=e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}$, $y_3=e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}$

$$y_1'=y_1''=0$$

$$y_2'=\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x},\ \ y_2''=\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}$$

$$y_3'=\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x},\ \ y_3''=\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} & e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} \\ 0 & \left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} & \left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} \\ 0 & \left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} & \left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x} \end{vmatrix}=$$

$$=\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2 e^{2x}+0+0-0-\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^2\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{2x}-0=$$

$$=\left(1-\frac{7}{2}\right)\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{2x}-\left(1-\frac{7}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)e^{2x}=-\frac{5}{2}e^{2x}\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}-1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)=$$

$$=\frac{5}{2}e^{2x}\sqrt{14}\neq 0$$

От това, че детерминантата на Вронски е различна от нула следва, че получената в подточка а) ФСР удовлетворява нашето равенство.

Следователно:

$$y(x)=c_1y_1+c_2y_2+c_3y_3=c_1+c_2e^{\left(1+\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}+c_3e^{\left(1-\frac{\sqrt{14}}{2}\right)x}$$

б) Mathlab код:

```
function task72
    y=dsolve('2*D3y-4*D2y-5*Dy=0', 'y(1)=0', 'Dy(1)=-6, 'D2y(1)=0');
    t=linspace(-10, 10);

    hold on
    grid on
    axis([-10 10 -200 200])

    plot(t, eval(y))
end
```

Резултат от изпълнението на кода: