Контролна Работа 02/06/2020

Задача С-4

$$\begin{cases} u_{xx} - \frac{1}{36}u_{tt} = 0,\ t > 0,\ 0 < x < 4, \\ u(x,0) = \frac{1}{5} sin\frac{6\pi x}{4},\ 0 \le x \le 4, \\ u_t(x,0) = \frac{1}{6} sun\frac{5\pi x}{4},\ 0 \le x \le 4, \\ u(0,t) = 0,\ u(4,t) = 0,\ t \ge 0 \end{cases}$$

Решение:

Търси решение от вида $u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$, което не се анулира тъждествено. Заместваме в уравнението на струната и получаваме следното:

$X''(x)T(t) - \dfrac{1}{36}X(x)T''(t) = 0$

$X''(x)T(t) = \dfrac{1}{36}X(x)T''(t)$, делим на $X(x)T(t)$ и получаваме

$\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T''(t)}{36T(t)} = -\lambda \ \ (\lambda = const.) \ \ (1)$

Ако фиксираме t и променяме x, то тогава (1) не зависи от x, защото отношението $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ ще е едно и също за всяка стойност на x. До аналогично заключение ще стигнем, ако фиксираме x и променяме t. Тогава (1) може да е изпълнено само ако отношението е равно на някаква произволна константа $-\lambda$. Следователно получаваме двете диференциални уравнения от втори ред:

$X''(x) + \lambda X(x) = 0$
$T''(t) + 36\lambda T(t) = 0$

От граничните условия получаваме

$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X(0) = 0,$
$u(4,t) = X(4)T(t) = 0,\ t \ge 0 \Rightarrow X(4) = 0,$
това е изпълнено, тъй като не може $T(t) \neq 0$.

По този начин за функцията $X(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 4 \\ X(0),\ X(4) = 0 \end{cases}$$

За тази задача търсим ненулево решение. Характеристичния полином на уравнението е:

$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda$

1.) $\lambda < 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

В този случай получаваме следната ФСР:$= \{e^{\sqrt{-\lambda}x}, e^{-\sqrt{-\lambda}x}\} \Rightarrow$
$X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$

$X(0) = c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$
$X(4) = c_1 e^{4\sqrt{-\lambda}} + c_2 e^{-4\sqrt{-\lambda}} = 0$
$-c_2 \big(\underbrace{e^{4\sqrt{-\lambda}} - e^{-4\sqrt{-\lambda}}}_{\neq 0}\big) = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$

Получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$, което вече сме разгледали.

2.) $\lambda = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = 0$
В този влучай получаваме ФСР:= $\{e^{0x}, xe^{0x}\} = \{1, x\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 + xc_2$
$X(0) = c_1 = 0$
$X(14) = c_1 + 4c_2 = 0;\ \ 4c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$

Отново получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$

3.) $\lambda > 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} \pm i\sqrt{\lambda}$
В този случай получаваме ФСР:= $\{cos(\sqrt{\lambda}x), sin(\sqrt{\lambda}x)\} \Rightarrow$

$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x)$
$X(0) = c_1 = 0$
$X(14) = c_2 sin(4\sqrt{\lambda}) = 0$

3.1.) $sin(4\sqrt{\lambda}) \neq 0 \Rightarrow c_2 = c_1 = 0 \Rightarrow X(x) \equiv 0$ (вече сме разгледали)
3.2.)$sin(4\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow 4\sqrt{\lambda} = k\pi, k \in \mathbb{N};\ \ \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{4}\right)^2, k \in \mathbb{N}.$

λ_k са собствените стойности на задачата на Щурм-Лиувил, а собствените функции са:

$$X_k(x) = sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right), k \in \mathbb{N}.$$

Така общото решение на задачата на Щурм-Лиувил има вида $cX_k(x)$, където c е произволна константа.

При $\lambda = \lambda_k$ решаваме съответно уравнение за $T(t)$:
(Т.е. решаваме второто уравнение за $\lambda = \lambda_k$)
$(1) \qquad T_k''(t) + 36\lambda_k T(t) = 0$

Това е линейно уравнение от втори ред, което има характеристичен полином:

$Q(\alpha) = \alpha^2 + 36\lambda_k = 0$
$\alpha^2 = -36\lambda_k = -36\left(\frac{k\pi}{4}\right)^2$
$\alpha_{1,2} = \pm i6.\frac{k\pi}{4} = \pm \frac{3k\pi}{2}i, k \in \mathbb{N}$

Така получаваме следната ФСР:$= \{cos(\frac{3k\pi}{2}t), sin(\frac{3k\pi}{2}t)\}$ $\Rightarrow$ общото решение за уравнението (1) е произволна линейна комбинация на $cos\left(\frac{3k\pi}{2}t\right)$ и $sin\left(\frac{3k\pi}{2}t\right)$:

$T_k(t) = A_k cos\left(\frac{3k\pi}{2}t\right) + B_k sin\left(\frac{3k\pi}{2}t\right)$, където A_k и B_k са произволни константи. $k \in \mathbb{N}$.

По този начин намерихме функции $u_k(x,t) = X_k(x)\,.\,T_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$, които са решения на уравнението на струната в дадената чадача и удовлетворяват граничните условия в нея.

От началните условия получаваме:

1.) $u_k(x,0) = sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right)\left[A_k\,.\,cos\left(\frac{6k\pi}{4}t\right) + B_k\,.\,sin\left(\frac{6k\pi}{4}t\right)\right] =$

$= sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right)\left[A_k cos0 + B_k sin0\right] = A_k sin(k\pi x)$ $\Rightarrow$ искаме $A_k sin\left(\frac{6k\pi}{4}x\right) = \frac{1}{5}sin\frac{6\pi x}{4}$

$\Rightarrow A_6 = \frac{1}{5};\quad k = 6;\quad \forall A_k = 0$ за $k \neq 6$

2.) $\left[u_k(x,t)\right]_t^| = \left[-A_k sin\left(\frac{6k\pi}{4}t\right)\,.\,\frac{6k\pi}{4} + B_k cos\left(\frac{6k\pi}{4}t\,.\,\frac{6k\pi}{4}\right)\right]\,.\,sin\left(\frac{k\pi}{4}x\right)$

$\left[u_k(x,0)\right]_t^| = \frac{1}{6}sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right) \Rightarrow -A_k.-+B_k\,.\,\frac{6k\pi}{4}.1.son\frac{k\pi x}{4} = \frac{1}{6}sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right) \Rightarrow$

$B_k\,.\,\frac{6k\pi}{4}\,.\,sin\frac{k\pi x}{4} = \frac{1}{6}sin\frac{5x\pi}{4}$ $\Rightarrow$ $k = 5$ и трябва $B_5\,.\,\frac{6.5.\pi}{4} = \frac{1}{6};\quad B_5 = \frac{1}{6}\,.\,\frac{4}{6.5.\pi} = \frac{1}{45\pi}$

$B_5 = \frac{1}{45\pi}$ и $\forall B_k = 0$ за $k \neq 5$.

Търсеното решение на задачата е:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x,t) = son\frac{5\pi x}{4}\,.\,\left[0 + \frac{1}{45\pi}\,.\,sin\frac{6.5\pi}{4}t\right] + sin\frac{6\pi x}{4}\left[\frac{1}{5}cos\frac{6.6\pi t}{4} + 0\right] =$$

$$= \frac{1}{45\pi}sin\frac{4\pi x}{4}\,.\,sin\frac{30\pi t}{4} + \frac{1}{5}\,.\,sin\frac{6\pi x}{4}\,.\,cos\frac{36\pi t}{4};$$

Окончателно : $u(x,t) = \frac{1}{45\pi}sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right)sin\left(\frac{15\pi}{2}t\right) + \frac{1}{5}sin\left(\frac{3\pi}{2}x\right)cos(9\pi t)$