Линейни уравнения от първи ред. Уравнения на Бернули.

1. Линейни уравнения от първи ред

Общото решение на линейното уравнение

$$y' = a(x)y + b(x);\ a, b \in C(\alpha, \beta)$$

се дава с формулата

$$y(x) = e^{\int a(x)\,dx}\left(C + \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx\right).$$

Задача 1. Решете уравнението аналитично и символно (с Matlab)

$$xy' - 2y = 2x^4.$$

Решение:

1. Аналитично

$$y' = \frac{2}{x}y + 2x^3$$

Това е линейно уравнение с коефициенти $a(x) = \frac{2}{x}$ и $b(x) = 2x^3$. Последователно пресмятаме

$$\int a(x)\,dx = \int \frac{2\,dx}{x} = 2\ln|x| = \ln x^2.$$

$$\int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx = \int 2x^3 e^{-\ln x^2}dx = \int 2x\,dx = x^2.$$

Следователно

$$y(x) = e^{\ln x^2}(c + x^2) = x^2(c + x^2).$$

2. Символно

```
>> y=dsolve('x*Dy -2*y=2*x^4', 'x')

y =

x^4 + C2*x^2

>>
```

Задача 2. **- за упражнение.** Решете уравнението аналитично и символно (с Matlab)

$$y' + y\, tg(x) = \cos^2(x).$$

2. Уравнения на Белнули

Уравнението

$$y' = a(x)y + b(x)y^n,\ n \neq 0, 1$$

се свежда до линейното уравнение

$$z' = (1-n)a(x)z + (1-n)b(x)$$

чрез полагането $z(x) = y^{1-n}(x)$. Ако $n > 0$, то $y = 0$ е решение.

Пример 1.3. *Намерете общото решение на логистичното уравнение*

$$y' = (a - by)y, \qquad (1.11)$$

при $a > 0$, $b > 0$ *и покажете, че* $y(x) \to a/b$ *при* $x \to +\infty$.

Решение. Уравнението (1.11) е Бернулиево. Разделяме го на y^2 и полагаме $z = 1/y \quad \Rightarrow \quad z' = -y'/y^2$. Тогава

$$\frac{y'}{y^2} - \frac{a}{y} = -b \quad \Leftrightarrow \quad -z' - az = -b \quad \Leftrightarrow$$

$$z' + az = b \quad \Rightarrow \quad z = e^{-\int a dx}\left(C + \int b e^{\int a dx} dx\right)$$

$$\Rightarrow z = e^{-ax}\left(C + \frac{b}{a}e^{ax}\right) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a},$$

откъдето $y = 1/(Ce^{-ax} + b/a)$. При $x \to +\infty$, $e^{-ax} \to 0$ и следователно $y(x) \to a/b$. Да отбележим, че при $C > 0$ решенията са определени за всички $x \in \mathbf{R}$ и тогава $0 < y < a/b$. При $C < 0$, решенията са определени за $x > (1/a)\ln(ca/b)$, $C = -c < 0$ и следователно $y > a/b$.

Зад М2. Дадена е задача на Коши :

$$3xy' + 4x^5y^4 = 2y, y(1) = 1/2$$

Решете символно задачата и начертайте графиката на решението й в интервала [1/2, 5]. Намерете локалните екстремуми и инфлексните точки на решението в същия интервал и ги маркирайте върху графиката съответно с точка и звезда.

```
function zadm2
hold on
grid on

y=dsolve('3*x*Dy+4*x^5*y^4=2*y','y(1)=1/2','x')

x=0.5:0.1:6;
plot(x,eval(y),'b')

dy=diff(y) % първата производна на y
a=double(solve(dy))% solve(dy) решава символно y-то dy=0

d2y=diff(y,2)
b=double(solve(d2y))

x=a(1) % това е реалния корен на d2y=0
```

```
plot(x,eval(y),'r*')

x=b(1) % това е реалния корен
plot(x,eval(y),'mo')
xlabel('x')
ylabel('y(x)')
 end
```