Задача 3. За уравнението

$$y' + 2y^2 = \frac{6}{x^2} \qquad (**)$$

намерете частно решение от вида $y_1(x) = \dfrac{a}{x}$. Уравнение от какъв тип се получава за функцията $z(x)$ след полагане $y(x) = z(x) + y_1(x)$ в $(**)$.

Решение:

Уравнение на Рикати. $y_1(x) = \dfrac{a}{x} \Rightarrow y_1' = -\dfrac{a}{x^2}$. Заместваме в уравнението и получаваме: $-\dfrac{a}{x^2} + 2.\dfrac{a^2}{x^2} = \dfrac{6}{x^2} \Rightarrow a^2 - a - 6 = 0$;

$D = 1 - 4.2.(-6) = 40 \Rightarrow a_{1,2} = \dfrac{1 \pm 7}{4}$, т.е. $a_1 = 2$ и $a_2 = -\dfrac{3}{2}$. Получихме две частни решения:

$y_1(x) = \dfrac{2}{x}$ и $y_2(x) = -\dfrac{3}{2x}$. За втората заст имаме следното:

$z(x) = y(x) - y_1(x) = y(x) - \dfrac{2}{x} \Rightarrow z = y - \dfrac{2}{x}$ или $y = z + \dfrac{2}{x}$. Заместваме в уравнението на Рикати и получаваме:

$$\left(z + \frac{2}{x}\right)' + 2\left(z + \frac{2}{x}\right)^2 = \frac{6}{x^2}; \quad z' - \frac{2}{x^2} + 2z^2 + \frac{8z}{x} + \frac{8}{x^2} = \frac{6}{x^2};$$

$z' = -\dfrac{8}{x}z - 2z^2$, което е уравнение на Бернули.

Аналогично се получава и ако използваме второто частно решение $y_2(x) = -\dfrac{3}{2x}$.

Коментар: уравнение на Рикати е всяко уравнение от вида $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, тоест единственото което му пречи да бъде уравнение на Бернули е наличността на $c(x)$. Рикати въвежда смяната която отстранява $c(x)$. В общия случай уравнението на Рикати не може да се реши, но ако намерим едно частно решение ще може да намерим всички негови решения като го сведем до уравнение на Бернули.