Задача 19. Намерете собствените сойности и собствените функции на задачата на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < 5 \\ X(0) = 0,\ X'(5) = 0 \end{cases}$$

За кои стойности на λ задачата няма други решения, освен $X(x) \equiv 0$?

Решение:

Характеристичния полином на уравнението е$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda = 0$ и има следните корени: $\alpha_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-\lambda},\ \lambda < 0 \\ 0,\ \lambda = 0 \\ \pm i\sqrt{\lambda},\ \lambda > 0 \ \left(\alpha = 0, \beta = \sqrt{\lambda}\right) \end{cases}$. Общото решение

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x},\ c_1, c_2 - const.,\ \lambda < 0 \\ c_1 + c_2 x\ \ , c_1, c_2 - const.,\ \lambda = 0 \\ c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),\ c_1, c_2 - const.,\ \lambda > 0 \end{cases}$$

1 сл.) При
$\lambda < 0 \Rightarrow X(x) = c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2$
При $x = 5 \Rightarrow X'(5) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{5\sqrt{-\lambda}} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-5\sqrt{-\lambda}=0}\Big| :\sqrt{-\lambda}\neq 0$
$c_1 e^{5\sqrt{-\lambda} - c_2 e^{-5\sqrt{-\lambda}}} = 0 \Rightarrow c_1(e^{5\sqrt{-\lambda}} + e^{-5\sqrt{-\lambda}}) = 0$. Тъй като $e^{5\sqrt{-\lambda}}$ и $e^{-5\sqrt{-\lambda}}$ са ЛНЗ $\Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \rightarrow$ тривиално решение $\Rightarrow \lambda < 0$ е решение.

2 сл.) При $\lambda = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 + c_2 x \Rightarrow X'(x) = c_2$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 = 0;$ При $x = 5 \Rightarrow X'(5) = c_2 = 0 \Rightarrow X(x) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ е решение.

3 сл.) При $\lambda > 0 \Rightarrow$
$X(x) = c_1 cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sin(\sqrt{\lambda}x) \Rightarrow X'(x) = -\sqrt{\lambda}c_1 sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)$
При $x = 0 \Rightarrow X(0) = c_1 cos0 + c_2 sin0 = c_1 = 0 \Rightarrow X'(x) = \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)$
При $x = 5 \Rightarrow \sqrt{\lambda}c_2 cos(5\sqrt{\lambda}) = 0\Big| : \sqrt{\lambda} \neq 0 \Rightarrow c_2 cos(5\sqrt{\lambda}) = 0$

3.1) $c_2 = 0$, т.е.

$$cos(5\sqrt{\lambda}) \neq 0 \Rightarrow 5\sqrt{\lambda} \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \Rightarrow \lambda \neq \left(\frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}\right)^2 \neq \left(\frac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2$$

3.2) $c_2 \neq 0 \Rightarrow cos(5\sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow \lambda_k = \left(\dfrac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2$

$\lambda_k = \left(\frac{\pi(2k+1)}{10}\right)^2$ -собствени стойности; $X_k(x) = sin\left(\sqrt{\lambda_k}x\right)$ -собствени функции;

При $\lambda \leq 0$ и $\lambda \neq \left(\frac{\pi}{10}(2k+1)\right)^2$, $X(0) = 0$.