Примерен Изпит 2 по Диференциални Уравнения и Приложения

https://github.com/andy489/DEA

Име: .... Група: .... Ф. No: ....

Оценка: $2+\dfrac{N}{10}$**, където** N **е броя на точките.**

Задача 1. (5 т.) Колко решения има задачата?

	единствено решение	точно две решения	няма решение	безбройно много решения
$(y')^2+yy'-x=0$ $y(1)=1$		X		
$y'=(2+y)e^x$ $y(0)=1$	X			
$(y')^2-yy'-x=0$ $y(-2)=1$			X	
$y''-4y'-5y=0$ $y(0)=-3,\ y'(0)=1$	X			
$y''+16\pi^2y=0$ $y(0)=0,\ \ y(1)=0$				X

1.)
$(y')^2+yy'-x=0 \Rightarrow F(x,y,z)=z^2+yz-x=0.$
$D_F(x,y)=y^2-4.1.(-x)=y^2+4x;\quad D(1,1)=5>0.$
$F'_z=2z+y$. Точките, в които дескриминантата на характеристичното уравнение е положителна ще имат два различни реални корена. Проверяваме дали не е особена:

$F(1,1,z)=z^2+z-1=0$ има 2 рал. реални корена $z_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

$F'_z(1,1,z_{1,2})=-1\pm\sqrt{5}+1=\pm\sqrt{5}\neq 0 \Rightarrow$ точката (1,1) е обикновена и през нея минават точно 2 решения на даденото уравнение.

2.)
Линейно диференциално уравнение от първи ред с начално условие $\Rightarrow$ задача на Коши. От теоремата за съществуване и единственост знаем, че това уравнение има единствено решение, там където са дефинирани коефициентите $a(x)=e^x$ и $b(x)=2e^x$.

3.)
Аналогично на 1.), с тази разлика, че тук имаме $D(-2,1)=1-8<0$, т.е. точката (-2,1) не е нито обикновена нито особена и през нея не преминава нито едно решение на уравнението.

4.)

Характеристично уравнение: $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0;\quad D = 4 - 1.(-5) = 9;\quad \lambda_{1,2} = 2 \pm 3.$
$\lambda_1 = 5,\ \ \lambda_2 = -1$. ФСР:= $\{e^{5x}, e^{-x}\}$. Общото решение е $y(x) = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-x}$.
$y(0) = c_1 + c_2 = -3 \Rightarrow c_2 = -3 - c_1;\quad y'(x) = 5c_1 e^{5x} - c_2 e^{-x}$
$y'(0) = 5c_1 - c_2 = 1 \Rightarrow c_2 = 5c_1 - 1$. Следователно
$c_2 = -3 - c_1 = 5c_1 - 1 \Rightarrow c_1 = -\dfrac{1}{3}$ и $c_2 = 5c_1 - 1 = -\dfrac{5}{3} - 1 = -\dfrac{8}{3}$.
Окончателно, $y(x) = -\dfrac{1}{3}.e^{5x} - \dfrac{8}{3}e^{-x}$ е единственото решение на уравнението.

5.)
$y'' + \underbrace{16\pi^2}_{a}\, y = 0;\ y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$. Задача на Щурм-Лиувил. Имаме нулевото решение. Ако a е от собствените стойности имаме безбройно много решения, ако не - имаме само нулевото. Собствените стойности имат вида:
$\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2 \overset{L=1}{=} (k\pi)^2$, където $k \in \mathbb{N}$. При $k = 4,\ \ \lambda_4 = 16\pi^2 = a$ (четвъртата собствена стойност от спектъра на уравнението) $\Rightarrow$ ще имаме безброино много решения.

Задача 2. (2 т.) Определете общото решение на уравнението $y'' + 6y' + 10y = 10$.

а) $c_1 cosx + c_2 sinx$ б) $e^{-3x}cosx + c_1 sinx$ в)$e^{-3x}(c_1 cos + c_2 sinx) + 1$
г) $c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$ д) $e^{-3x}(c_1 cosx + c_2 sinx) - 1$ е) $c_1 cos3x + c_2 sin2x$,
където c_1 и c_2 са произволни реални константи.

Решение:

$y'' + 6y' + 10y = 10$. Характеристичния полином на хомогенната част на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10 = 10$.
$D = 9 - 10 = \pm i \Rightarrow \lambda_1 = -3 + 1.i,\ \lambda_2 = -3 - 1.i$
ФСР:= $\{e^{-3x}.cos(1.x), e^{-3x}.sin(1.x)\}$. Следователно
$y(x) = c_1(e^{-3x}cosx + c_2 e^{-3x}sinx) = e^{-3x}(c_1 cosx + c_2 sinx)$ - общо решение.
Остана да видим кое от 1 и -1 (от подточки в) и д)) е частно решение.

$10 = f(x) = P_m(x).e^{\gamma x} \Rightarrow m = 0, \gamma = 0$ - не е корен на характеристичния полином $\Rightarrow s = 0$, където $z(x) = x^s.Q_m(x).e^{\gamma x} = c_3 = const.$ - частното решение.
$c_3'' + 6c_3' + 10c_3 = 10 \Rightarrow c_3 = 1.$

$y(x) =$ общо решение + частно решение = $e^{-3x}(c_1 cosx + c_2 sinx) + 1$. Отговор в).

Задача 3. (2 т.) Определете решението на смесената задача за уравнението на топлопроводността.

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{4}u_{xx}, \ 0 < x < \frac{\pi}{4}, \ t > 0 \\ u\,\big|_{t=0} = cos(10x), \ 0 \le x \le \frac{\pi}{4} \\ u_x\,\big|_{x=0} = 0, \ u\,\big|_{x=\frac{\pi}{4}} = 0, \ t \ge 0. \end{cases}$$

а) $e^{25t}sin(10x)$ б) $e^{25t}cos(10x)$ в) $e^{-5t}cos(10x)$
г) $e^{-5t}sin(10x)$ д) $e^{-25t}cos(10x)$ е) $e^{-25t}sin(10x)$

Решение:

$u_x\,\big|_{x=0} = 0 \Rightarrow$ левия край е топлоизолиран.
При $t = 0$ трябва да имаме $cos(10x)$ (от условието). Следователно остават отговори б), в) и д). При $t \to +\infty$: $u_t = 0$, следователно отпада и б). От директно заместваме в уравнението на топлопроводността виждаме, че верния отговор е д):
$u_t = -25e^{-25t}cos(10x)$ и
$$\frac{1}{4}u_{xx} = \left(-\frac{10}{4}e^{-25x}sin(10x)\right)' = -\frac{100}{4}e^{-25x}cos(10x) = -25e^{-25x}cos(10x).$$

Задача 4. (1 т.) Определете типа на уравнението

$$u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{yy} + 2u_x - 4yu_y + u = 0.$$

а) смесен б) параболичен в) елиптичен г) хиперболичен

Решение:

$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + pu_x + qu_y + ru = 0.$
$b^2 - ac = 4 - 1.(-2) = 6 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично г).

Задача 5. Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = 2y - 3x^2 \\ y(0) = -3 \end{cases}$$

до интегрално уравнение. (2 т.) Намерете с метода на Пикар първите три последователни приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ на решението на задачата на Коши. (3 т.)

Решение:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_{0}^{x} y'(s)ds = \int_{0}^{x} \left(2y(s) - 3s^2\right) ds\,;$$

$\int_0^x y'(s)ds = y(x) - y(0) = y(x) + 3;$

$y(x) = -3 + \int_0^x \left(2y(s) - 3s^2\right) ds$ - интегрално уравнение на задачата на Коши.

Опростено: $y(x) = -3 - x^3 + 2\int_0^x y(s)ds$;

Метод на Пикар:

$y_0(x) = -3$ (първо приближение)

$y_{n+1} = -3 - x^3 + 2\int_0^x y_n(s)ds$ (рекурентната редица, от която ще получим по-прецизните приближения)

$y_1(x) = -3 - x^3 + 2\int_0^x -3ds = -3 - x^3 - 6x$ (второ приближение)

$y_2(x) = -3 - x^3 + 2\int_0^x \left(-3 + s^3 - 6s\right) ds = -3 - x^3 - 6x + 2.\frac{x^4}{4} - 12\frac{s^2}{2} =$

$= \frac{x^4}{2} - x^3 - 6x^2 - 6x - 3$ (трето приближение)

Задача 6. Дадено е уравнението:

$$y''' - 6y'' + 9y' = 0.$$

а) Намерете общото решение на уравнението (4 т.)

б) Намерете всички решения на уравнението, които са ограничени за $x \in (-\infty,0]$ (4 т.)

Решение:

Характеристичен полином:

а) $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 9\lambda = \lambda(\lambda - 3)^2$

Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 3$;

ФСР:= $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_3 x}\} = \{1, e^{3x}, xe^{3x}\}$;

Общо решение: $y(x) = c_1 + c_2 \,.\, e^{3x} + c_3 xe^{3x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} c_2 e^{3x} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} c_3 xe^{3x} = 0$ (експонентата расте с по-голяма скорост от всеки полином от степен k; или от Лопитал: $xe^{3x} \underset{x\to-\infty}{=} \frac{x}{e^{3x}} \underset{x\to+\infty}{=} 0$)

Следователно всички решения са ограничени в интервала $(-\infty,0]$.

Задача 7. Дадена е системата

$$\begin{cases} \dot{x} = x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

а) Намерете равновесните точки на системата. (2 т.)
б) Напишете линейното приближение на системата в околност на всяка една равновесна точка. (4 т.)
в) Изследвайте относно устойчивост равновесните точки на дадената система (5 т.)

Решение:

а) Равновесните точки са там където скоростите се зануляват, т.е. десните страни на системата са 0.

$$\begin{cases} x + x^2 - y^2 = 0 \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0 \text{ или } x = -1.$$

Равновесни точки са $(0{,}0)$ и $(-1{,}0)$.

б) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Ja(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ x-b \end{pmatrix}$, където $Ja(a,b)$ е Якобианът на системата в точката (a,b).

$$f = x + x^2 - y^2, \quad g = -y$$

$$Ja(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2x & -2y \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$Ja(0{,}0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ - линейно приближение в равновесната точка (0,0).

$Ja(-1{,}0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x-1 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ - линейно приближение в равновесната точка (-1,0).

в)

- Ако всички собствени стойности на Якобиана в равновесната точка са с отрицателна реална част, то точката е асимптотично устойчива.
- Ако съществува поне една собствена стойност на Якобиана в равновесната точка, която е с положителна реална част, тогава точката е неустойчива.

$(0{,}0) : det\,|Ja(0{,}0) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$ равновесната точка (0,0) е неустойчива.

$(-1{,}0) : det\,|Ja(0{,}1) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 < 0 \Rightarrow$

равновесната точка (-1,0) е асимптотично устойчива.

Задача 8. (6 т.) Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = -x^3, \quad u_t(x,0) = -1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение:

От формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds\,.$$

Имаме, че $\varphi(x) = -x^3; \ \ \psi(x) = -1$ и $a = 3$. Следователно

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[-(x-3t)^3 - (x+3t)^3] + \frac{1}{6}\int_{x-3t}^{x+3t} -1ds = x^3 + 27xt^2 - \frac{1}{6}s\Big|_{x-3t}^{x+3t} = -x^3 - 27xt^2 - t$$