Задача 13. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = xy \\ \dot{y} = -x^2 \end{cases}$$

а) Покажете, че функцията $v(t) := [x(t)]^2 + [y(t)]^2$ не зависи от t.
б) Намерете равновесните точки на системата. Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

Решение:

а) $$v'(t) = \left(x^2(t) + y^2(t)\right)' = 2x(t)\,.\,\dot{x(t)} + 2y(t)\,.\,\dot{y(t)} =$$

$$= 2x(t)\,.\,x(t)\,.\,y(t) + 2y(t)\,.\,\left(-x^2(t)\right) = 2x^2(t)\,.\,y(t) - 2x^2(t)\,.\,y(t) = 0$$

$$\Rightarrow\ v(t) = const\,.$$

Може да подходим и по следния начин:

$$\frac{dx}{dt} = xy \Rightarrow dt = \frac{dx}{xy};\ \frac{dy}{dt} = -x^2 \Rightarrow dt = -\frac{dy}{x^2}$$

$$\Rightarrow dt = \frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{x^2} \quad \text{или} \quad xdx = -ydy \Big| \int$$

$$\int xdx = -\int ydy \Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = c_1 \quad \text{или} \quad x^2(t) + y^2(t) = c,$$

функцията $x^2(t) + y^2(t)$ е първи интеграл на системата, т.е. ако заместим в нея с някое решение на системата, ще получим константа. (това издава, че фазовите криви ще са елипси (окръжността е частен случай на елипсата)).

б) Равновесните точки са там където скоростите се нулират, т.е. където се нулират десните страни на системата.

$\begin{cases} xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow (0,y_0)$ са равновесните точки, където $y_0 \in \mathbb{R}$ е реален параметър.
Теоремата

на Ляпунов ни казва, че понякога може да определим какъв е вида на точките само от първото линейно приближение на системата. Нека проверим. Линейното проближение на системата го взимаме от матрицата на Якоби:

$Ja(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y \\ g'_x & g'_y \end{pmatrix}$, където $f = xy, g = -x^2$

$$\Rightarrow \ Ja(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -2x & 0 \end{pmatrix}; \ Ja(0,y_0) - \begin{pmatrix} y_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|Ja(0,y_0) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} y_0 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(y_0 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ и } \lambda_2 = y_0.$$

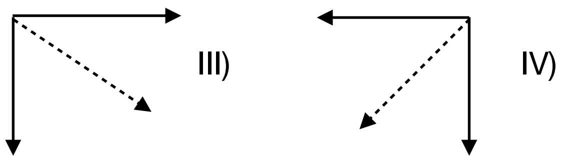
Сега, ако $y_0 > 0$ ще имаме неустойчивост, но ако $y_0 < 0$, имаики че $\lambda_1 = 0$ (не е нито положителна нито отрицателна) не попадаме в нито един от двата случая и първото приближение не може да определи вида на точките $(0,y_0)$ за $y_0 < 0$.

Но ние знаем какъв е вида на фазовите криви и ще проверим посоката на фазовите тангенциални векторчета. Имаме $x^2 = -y^2 + c$.

$\vec{\tau}(x,y) = (xy, -x^2)$. Очевидно втората координата на този вектор е винаги отрицателна.

Ще разгледаме само III-ти и IV-ти квадрант, защото само там ще имаме $y_0 < 0$.

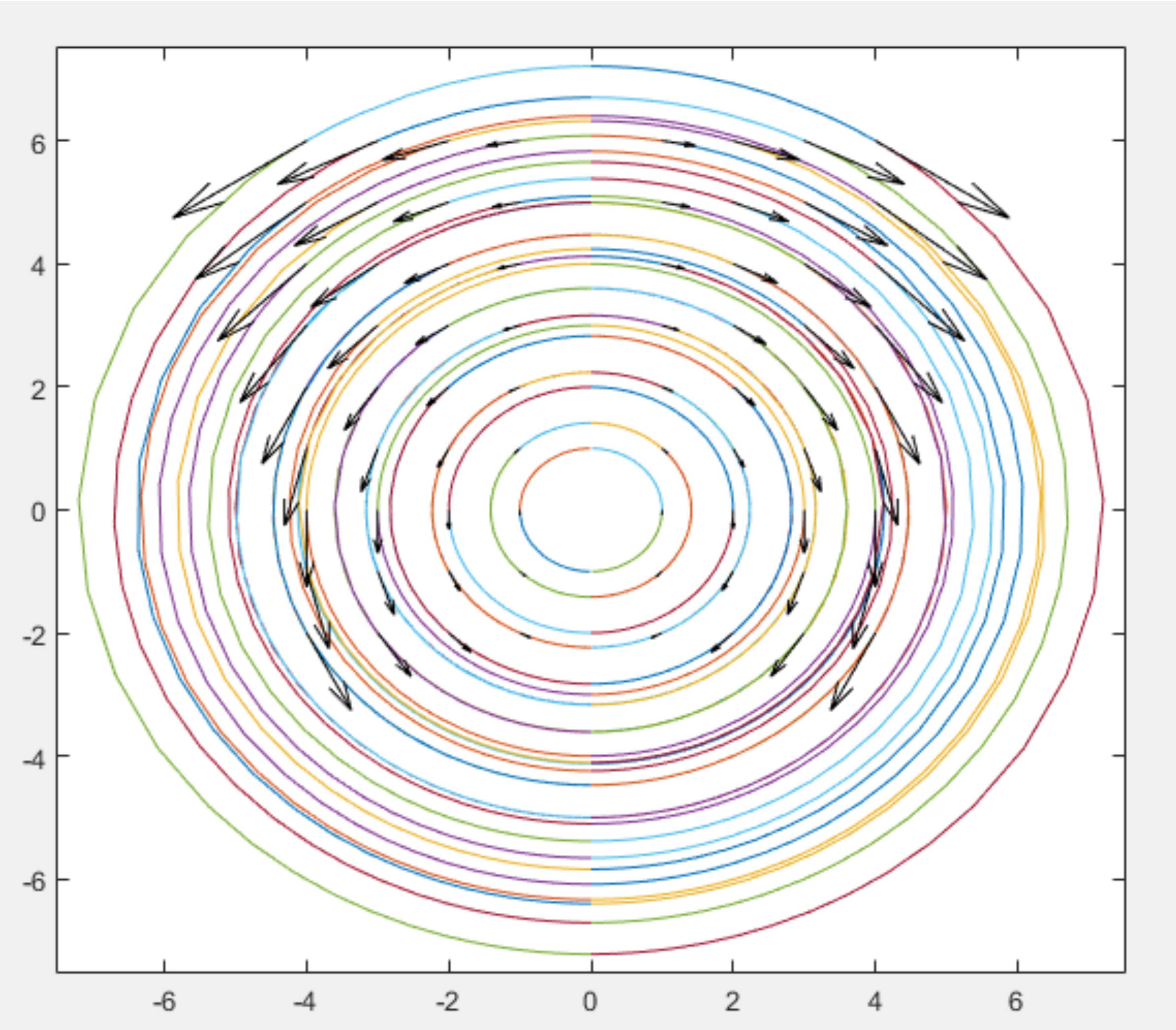
Да вземем първо III-ти квадрант. Там имаме $x_0 < 0, y_0 < 0$, следователно $xy > 0$



С аналогични разсъждения може да заключим, че в IV-ти квадрант тангенциалните вектори отново ще сочат към ординатата, където са равновесните точки, т.е. там ще имаме устойчивост, но не и асимптотична, тъй като не всички собствени стойности са отрицателни (имаме $\lambda_1 = 0$, трябваше да е отрицателно, за да кажем че устойчивостта е асимптотична).

И остана да проверим за $y_0 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}(x_0, y_0) = (0, -x_0^2)$, т.е. ще имаме неустойчивост.

Фазов портрет за онагледяване на получения резултат:



MathLab код на фазовия портрет:

Command Window

```
>> function zad3
    tmax=5;

    function z=ff(t,y) %y1'=y1*y2; y2'=-y1^2
        z=[y(1)*y(2); -y(1)^2];
    end

ak=0;
bk=2;

x=ak-4 : 1 : ak+4;
y=bk-4 : 1 : bk+4;

[X Y]=meshgrid(x,y);
    for i=1:length(x)
        for j=1:length(y)
                [T,Z]=ode45(@ff, [0,tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);
                [T1,Z1]=ode45(@ff, [0,-tmax], [X(i,j), Y(i,j)]);

                plot(ak,bk,'r')
                hold on
                plot(Z(:,1),Z(:,2),Z1(:,1),Z1(:,2));
                axis([ak-7.5 ak+7.5 bk-9.5 bk+5.5]);
        end
    end
    DX=X.*Y;
    DY=-X.^2;
    quiver(X,Y,DX,DY,1.8,'k');
end
```