Задача 10. Дадено е уравнението

$$(x-1)y'' + (x-2)y' - y = 0,\ x > 1.$$

а) Намерете две частни решения на уравнението от вида $y_1(x) = e^{ax}$ и $y_2(x) = bx + c,\ b \neq 0$.

б) Покажете, че намерените частни решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ са линейно независими в интервала $(1,\ +\infty)$.

в) Намерете общото решение на уравнението.

Решение:

а)

За $y_1(x) = e^{ax}$ имаме $y_1 = e^{ax},\ y_1' = ae^{ax},\ y_1'' = a^2e^{ax} \Rightarrow$

$(x+1)a^2e^{ax} + (x-2)ae^{ax} - e^{ax} = 0 \Big|\ : e^{ax} \neq 0$

$(x-1)a^2 + (x-2)a - 1 = 0; \quad a^x - a^2 + ax - 2a - 1 = 0;$

$(a^2+a)x - (a+1)^2 = 0; \quad \Rightarrow \begin{cases} a^2 + a = 0 \\ (a+1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow y_1(x) = e^{-x}.$

За $y_2(x) = bx + c$ имаме $y_2 = bx + c,\ y_2' = b,\ y_2'' = 0 \Rightarrow$

$(x-1).0 + (x-2)b - bx - c = 0; \quad bx - 2b - bx - c = 0;$

$2b + c = 0 \Rightarrow\ c = -2b$. Избираме $b = 1 \Rightarrow c = -2 \Rightarrow y_2(x) = x - 2.$

б) Ако детерминанската на Вронски не е равна на нула в посочения интервал, ще е достатъчно, за да кажем, че намерените частни решения са ЛНЗ:

$$detW = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x-2 \\ -e^{-x} & 1 \end{vmatrix} = e^{-x} + xe^{-x} - 2e^{-x} = xe^{-x} - e^{-x} = e^{-x}(x-1) \overset{x>1}{>} 0$$

в) $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{-x} + c_2(x-2)$, където c_1 и c_2 са произволни константи.