Примерен Изпит 1 по Диференциални Уравнения и Приложения
https://github.com/andy489/DEA

Име: .... Група: .... Ф. No: ....

Оценка: $2+\dfrac{N}{10}$**, където** N **е броя на точките.**

Задача 1. (5 т.) Колко решения има задачата?

	единствено решение	точно две решения	няма решение	безбройно много решения
$y''-3y'-2y=0$ $y(1)=3$				X
$x(y')^2+2xyy'-y=0$ $y(2)=-1$		X		
$2x(y')^2-xy'+y=0$ $y(1)=1$			X	
$y'=e^xy-cosx$ $y(-1)=1$	X			
$y''+16y=0$ $y(0)=0,\ y(\frac{\pi}{4})=0$				X

1.)
ФСР:$=\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}\}$, $y=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}$, където c_1, c_2 са произволни константи, а λ_1, λ_2 са корените на характеристичното уравнение. Следователно имаме две степени на свобода (константите) и едно начално условие, което ще ни помогн е да изрaчим едната константа чрез другата и така ще остане само една степен на свобода. Т.е. имаме безбройно много решения.

2.)
$x(y')^2+2xyy'-y=0 \Rightarrow F(x,y,z)=xz^2+2xyz-y\,.$
$D_F(x,y)=x^2y^2+xy=xy(xy+1)\,.\,D(2,-1)=2>0.$
$F'_z=2xz+2xy\,.$ Точките, в които дескриминантата на характеристичното уравнение е положителна ще имат два различни реални корена. Проверяваме дали не е особена:

$F(2,-1,z)=2z^2-4z+1=0$ има 2 разл. реални корена $z_{1,2}=1\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$$F'_z(2,-1,z_{1,2})=2.2.\left(1\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+2.2.(-1)=\pm\sqrt{2}\neq 0.$$

$\Rightarrow$ точката (2, -1) е обикновена и през нея минават точно 2 решения на даденото уравнение.

3.)

Аналогично на 2.): $F(x, y, z) = 2xz^2 - xz + y; \quad F(1,1,z) = 2z^2 - z + 1.$
$D_{F(1,1)} = 1 - 4.2.1 < 0 \Rightarrow$ тачзи точка (1,1) не е нито обикновена нито особена и през нея не минават решения на даденото уравнения.

4.)
Линейно диференциално уравнение от първи ред с начално условие ⇒ задача на Коши. От теоремата за съществуване и единственост знаем, че това уравнение има единствено решение, там където са дефинирани коефициентите $a(x) = e^x$ и $b(x) = -\,cosx$.

5.)
$y'' + \underbrace{16}_{a}\, y = 0;\ \ y(0) = 0,\ \ y(\frac{\pi}{4}) = 0$. Задача на Щурм-Лиувил. Имаме нулевото решение. Ако a е от собствените стойности имаме безбройно много решения, ако не - имаме само нулевото. Собствените стойности имат вида:
$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \overset{L=\frac{\pi}{4}}{=} \left(\frac{k\pi}{\frac{\pi}{4}}\right)^2 = 16k^2$, където $k \in \mathbb{N}$. При $k = 1,\ \ \lambda_1 = 16 = a$ (първата собствена стойност от спектъра на уравнението) ⇒ ще имаме безброино много решения.

Задача 2. (2 т.) Определете общото решение на уравнението $y'' - 4y' + 5y = -\,5.$

а) $c_1cosx + c_2sinx$ б) $e^xcosx + c_1sinx$ в) $e^{2x}(c_1cos + c_2sinx) + 1$
г) $c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$ д) $e^{2x}(c_1cosx + c_2sinx) - 1$ е) $c_1cos2x + c_2sin2x,$
където c_1 и c_2 са произволни реални константи.

Решение:

$y'' - 4y' + 5y = -\,5$. Характеристичния полином на хомогенната част на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$
$D = 4 - 1.5 = \pm\, i \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 1.i,\ \lambda_2 = 2 - 1.i$
ФСР:= $\{e^{2x}\,.\,cos(1.x), e^{2x}\,.\,sin(1.x)\}$. Следователно
$y(x) = c_1(e^{2x}cosx + c_2e^{2x}sinx) = e^{2x}(c_1cosx + c_2sinx)$ - общо решение. Остана да видим кое от 1 и -1 (от подточки в) и д)) е частно решение.

$-5 = f(x) = P_m(x)\,.\,e^{\gamma x} \Rightarrow m = 0, \gamma = 0$ - не е корен на характеристичния полином $\Rightarrow s = 0$, където $z(x) = x^s\,.\,Q_m(x)\,.\,e^{\gamma x} = c_3 = const\,.$ - частното решение.
$c_3'' - 4c_3' + 5c_3 = -\,5 \Rightarrow c_3 = -\,1.$

$y(x) =$ общо решение + частно решение = $e^{2x}(c_1cosx + c_2sinx) - 1$. Отговор д).

Задача 3. (2 т.) Определете решението на смесената задача за уравнението на топлопроводността.

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < \pi,\ t > 0 \\ u\,|_{t=0} = cos\frac{3x}{2},\ 0 \leq x \leq \pi \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u\,|_{x=\pi} = 0,\ t \geq 0. \end{cases}$$

а) $e^{-9t}sin\dfrac{3x}{2}$ б) $e^{-9t}cos\dfrac{3x}{2}$ в) $e^{9t}cos\dfrac{3x}{2}$

г) $e^{9t}sin\dfrac{3x}{2}$ д) $e^{-9t}cos\dfrac{x}{2}$ е) $e^{-9t}sin\dfrac{x}{2}$

Решение:

$u_x|_{x=0} = 0 \Rightarrow$ левия край е топлоизолиран.

При $t = 0$ трябва да имаме $cos\dfrac{3x}{2}$ (от условието). Следователно остава отговор б).

Проверка: $\left(e^{-9t}cos\dfrac{3x}{2}\right)' = e^{-9t}.\dfrac{3}{2}\left(-sin\dfrac{3x}{2}\right) \overset{x=0,x=\pi}{=} 0.$

Задача 4. (1 т.) Определете типа на уравнението

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 2u_{yy} - u_x + yu_y + 5u = 0.$$

а) смесен б) параболичен в) елиптичен г) хиперболичен

Решение:

$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + pu_x + qu_y + ru = 0.$
$b^2 - ac = 4 - 1.2 = 2 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично г).

Задача 5. Сведете задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = -4y + 5x^2 \\ y(0) = -4 \end{cases}$$

до интегрално уравнение. (2 т.) Намерете с метода на Пикар първите три последователни приближения $y_0(x),\ y_1(x),\ y_2(x)$ на решението на задачата на Коши. (3 т.)

Решение:

$$\int_{x_0}^{x} y'(s)ds = \int_0^x y'(s)ds = \int_0^x \left(-4y(s) + 5s^2\right) ds\,;$$

$$\int_0^x y'(s)ds = y(x) - y(0) = y(x) + 4;$$

$y(x) = -4 + \int_0^x \left(-4y(s) + 5s^2\right) ds$ - интегрално уравнение на задачата на Коши.

Опростено: $y(x) = -4 + \frac{5}{3}x^3 - 4\int_0^x y(s)ds$;

Метод на Пикар:

$y_0(x) = -4$ (първо приближение)
$y_{n+1} = -4 + \frac{5}{3}x^3 - 4\int_0^x y_n(s)ds$ (рекурентната редица, от която ще получим по-прецизните приближения)

$y_1(x) = -4 + \frac{5}{3}x^3 - 4\int_0^x -4ds = -4 + \frac{5}{3}x^3 - 16x$ (второ птиближение)
$y_2(x) = -4 + \frac{5}{3}x^3 - 4\int_0^x \left(-4 + \frac{5}{3}s^3 - 16s\right) ds = -4 + \frac{5}{3}x^3 + 16x + \frac{20}{3}.\frac{x^4}{4} - 64\frac{s^2}{2} =$
$= \frac{5}{3}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 32x^2 + 16x - 4.$

Задача 6. Дадено е уравнението:

$$y''' + 4y'' + 4y' = 0.$$

а) Намерете общото решение на уравнението (4 т.)
б) Намерете всички решения на уравнението, които са ограничени за $x \in [0, +\infty)$ (4 т.)

Решение:

Характеристичен полином:
а) $P(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda+2)^2$
Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2$;
ФСР:= $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, xe^{\lambda_3 x}\} = \{1, e^{-2x}, xe^{-2x}\}$;
Общо решение: $y(x) = c_1 + c_2 . e^{-2x} + c_3 xe^{-2x}$;
б) $\lim\limits_{x\to+\infty} c_2 e^{-2x} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} c_3 xe^{-2x} = 0$ (експонентата расте с по-голяма скорост от всеки полином от степен k; или от Лопитал: $\frac{x}{e^{2x}} = \frac{1}{2e^{2x}} \longrightarrow_{x\to+\infty} 0$)
Следователно всички решения са ограничени в интервала $[0, +\infty)$.

Задача 7. Дадена е системата

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y - x^2 - y^2 \end{cases}$$

а) Намерете равновесните точки на системата. (2 т.)
б) Напишете линейното приближение на системата в околност на всяка една равновесна точка. (4 т.)
в) Изследвайте относно устойчивост равновесните точки на дадената система (5 т.)

Решение:

а) Равновесните точки са там където скоростите се зануляват, т.е. десните страни на системата са 0.

$$\begin{cases} -x = 0 \\ y - x - y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y^2 - y = y(y-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ или } y = 1.$$

Равновесни точки са $(0,0)$ и $(0,1)$.

б) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Ja(a,b)\begin{pmatrix} x-a \\ x-b \end{pmatrix}$, където $Ja(a,b)$ е Якобианът на системата в точката (a,b).

$$f = -x, \quad g = y - x^2 - y^2$$

$$Ja(x,y) = \begin{pmatrix} f'_x(x,y) & f'_y(x,y) \\ g'_x(x,y) & g'_y(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2x & -2y+1 \end{pmatrix};$$

$Ja(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y \end{cases}$ - линейно приближение в равновесната точка (0,0).

$Ja(0,1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y+1 \end{cases}$ - линейно приближение в равновесната точка (0,1).

в)
- Ако всички собствени стойности на Якобиана в равновесната точка са с отрицателна реална част, то точката е асимптотично устойчива.
- Ако съществува поне една собствена стойност на Якобиана в равновесната точка, която е с положителна реална част, тогава точката е неустойчива.

$(0,0) : det|Ja(0,0) - E.\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$ равновесната точка (0,0) е неустойчива.

$(0,1) : det|Ja(0,1) - E.\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 < 0 \Rightarrow$

равновесната точка (0,1) е асимптотично устойчива.

Задача 8. (6 т.) Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = x^2, \quad u_t(x,0) = 1, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение:

От формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds\,.$$

Имаме, че $\varphi(x) = x^2$; $\psi(x) = 1$ и $a = 2$. Следователно

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[(x-2t)^2 + (x+2t)^2] + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} 1ds = x^2 + 4t^2 + \frac{1}{4}s\Big|_{x-2t}^{x+2t} = x^2 + 4t^2 + t$$