1 Метод на Фурие за уравнението на струната.

1.1 Струна със закрепен ляв край и свободен десен край

Ще разгледаме движението на ограничена струна със закрепен ляв край и свободен десен край, което се описва със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\, t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 < x < L, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=L} = 0,\ t > 0, \end{cases} \tag{1}$$

където $a > 0$ е константа, $\varphi(x) \in C^2[0, L],\ \psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0,\ \varphi'(L) = \psi'(L) = 0$.

Ще намерим решение на тази задача с помощта на метода на Фурие:

В тривиалния случай на нулеви начални данни $u(x,t) \equiv 0$ е решение на тази задача. В останалите случаи ще търсим ненулево решение от следния вид

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{2}$$

Заместваме в уравнението на струната от задача (1) и получаваме

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

за $(x,t) \in G := \{(x,t):\ 0 < x < L,\, t > 0\}$.

В точките, в които $X(x)$ и $T(t)$ не се анулират в G имаме

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Като фиксираме x и оставим t да се мени, заключаваме, че λ не зависи от t. Като фиксираме t и оставим x да се мени, заключаваме, че λ не зависи от x. Следователно λ е константа. Така получаваме следните две обикновени диференциални уравнения от втори ред

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{3}$$

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \tag{4}$$

Може да се покаже, че тези уравнения са изпълнени и в точките, в които $X(x)T(t)$ се анулира.

От граничните условия в (1) получаваме

$$X(0) = 0,\ X'(L) = 0. \tag{5}$$

По този начин достигнахме до следната задача на Щурм - Лиувил (3), (5) за функцията $X(x)$.

Характеристичният полином на уравнението (3) е

$$P(\alpha) = \alpha^2 + \lambda.$$

Той има корени

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \pm\sqrt{-\lambda} & \lambda < 0; \\ 0, & \lambda = 0; \\ \pm i\sqrt{\lambda}, & \lambda > 0. \end{cases}$$

Следователно общото решение на линейното уравнение (3) е

$$X(x) = \begin{cases} c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}, & \lambda < 0; \\ c_1 + c_2 x, & \lambda = 0; \\ c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), & \lambda > 0, \end{cases}$$

където C_1 и C_2 са произволни реални константи.

Ще разгледаме три случая

1.) $\lambda < 0$.

Тогава

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0,$$
$$X'(L) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} + c_2 e^{\sqrt{-\lambda}\,L}) = 0.$$

Получаваме, че $c_2 = -c_1$ и

$$-c_1(e^{-\sqrt{-\lambda}\,L} + e^{\sqrt{-\lambda}\,L}) = 0,$$

Откъдето намираме $c_1 = c_2 = 0$.

Следователно в този случай задачата има само тривиалното решение $X(x) \equiv 0$.

2.) $\lambda = 0$.

Тогава

$$X(0) = c_1 = 0,$$
$$X'(L) = c_2 = 0.$$

Следователно и в този случай задачата има само тривиалното решение $X(x) \equiv 0$.

3.) $\lambda > 0$.

Тогава

$$X(0) = c_1 = 0,$$
$$X'(L) = \sqrt{\lambda} c_2 \cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0.$$

Имаме две възможности

3.1.) $\cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) \neq 0$. Тогава $c_2 = 0$ и отново получаваме тривиалното решение $X(x) \equiv 0$.

3.1.) $\cos\left(\sqrt{\lambda}\,L\right) = 0$. Това е възможно, ако $\lambda > 0$ е такова, че $\sqrt{\lambda}\,L = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k = 0, 1, 2, \ldots$, т.е. ако λ е някоя от константите

$$\lambda_k := \left(\frac{2k+1}{2L}\pi\right)^2,\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогава задачата на Щрум Лиувил има нетривиално решение $cX_k(x)$, където c е произволна константа, а

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right),\ k = 0, 1, 2, \ldots$$

Функциите $X_k(x)$ се наричат собствени функции, а λ_k - собствени стойности на задачата на Щурм-Лиувил.

При $\lambda = \lambda_k$, линейното уравнение (4) има характеристичен полином

$$Q(\alpha) = \alpha^2 + \lambda_k a^2,$$

който има корени $\alpha_{1,2} = \pm i\frac{(2k+1)\pi a}{2L}$. Следователно общото решение на уравнението (4) е

$$T_k(x) = A_k \cos\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right),\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{6}$$

където A_k и B_k са произволни реални константи.

По този начин получихме функциите

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t),\ k = 0, 1, 2, ..., \tag{7}$$

които удовлетворяват уравнението и граничните условия в изходната задача (1). Те обаче не удовлетворяват началните условия, освен в случаите на много специален избор на $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. По тази причина ще търсим решението на задачата (1) в следния вид

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t) \qquad (8) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\left[A_k \cos\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{(2k+1)a\pi}{2L}t\right)\right]. \end{aligned}$$

От първото начално условие получаваме

$$u(x,0) = \varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right).$$

$\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$ е пълна и ортогонална система в $L_2(0,L)$. Скаларното произведение в $L_2(0,L)$ се дефинира с

$$(f,g) = \int_0^L f(x)\bar{g}(x)dx,\ f,g \in L_2(0,L).$$

Лесно можем да проверим, че

$$(X_n(x), X_m(x)) = \begin{cases} 0, & n \neq m; \\ \frac{L}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Наистина

$$\begin{aligned} (X_n(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin^2\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left[1 - \cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)\right]dx \\ &= \frac{1}{2}\left[x - \frac{L}{(2n+1)\pi}\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\ &= \frac{L}{2}. \end{aligned}$$

При $n \neq m$ получаваме

$$\begin{aligned}
(X_m(x), X_n(x)) &= \int_0^L \sin\left(\frac{(2m+1)\pi}{2L}x\right)\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}x\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \left[\cos\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{(m+n+1)\pi}{L}x\right)\right]\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{L}{(m-n)\pi}\sin\left(\frac{(m-n)\pi}{L}x\right) - \frac{L}{(m+n+1)\pi}\sin\left(\frac{(m+n+1)\pi}{L}x\right)\right]\Big|_0^L \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Сега фиксираме едно k, умножаваме равенството

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s X_s(x) = \varphi(x)$$

с $X_k(x)$ интегрираме от 0 до L :

$$\sum_{s=0}^{\infty} A_s (X_s(x), X_k(x)) = (\varphi(x), X_k(x)).$$

Получаваме, че константите A_k са фуриеровите коефициенти в развитието на $\varphi(x)$ по системата $\left\{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\right\}_{k=0}^{\infty}$:

$$A_k = \frac{2}{L}(\varphi(x), X_k(x)) = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx.$$

Аналогично от второто начално условие получаваме

$$u_t(x,0) = \psi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{(2k+1)\pi a}{2L}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right). \tag{9}$$

Следователно

$$B_k = \frac{4}{(2k+1)\pi a}\int_0^L \psi(x)\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2L}x\right)\,dx. \tag{10}$$

Задача 1. Движението на струна се моделира със следната задача

$$\left|\begin{array}{l}
u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, \quad t>0,\ 0<x<\pi\sqrt{2}, \\
u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi\sqrt{2} \\
u|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi\sqrt{2}} = 0, \quad t \ge 0,
\end{array}\right.$$

където

а.)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2, \pi\sqrt{2}], \end{cases},$$

$\psi(x) = 0.$

б.) $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = \sin(5x\sqrt{2}/4).$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 31-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на движението на струната за $t \in [0, 30]$.

```
function string_fourie
clf
clc

L=pi*sqrt(2);  a=1/2;
x=0:L/100:L;
t0=0;tmax=30;
t=t0:(tmax-t0)/100:tmax;

function y=phi(x)
 for i=1:length(x)
        if 1<x(i) & x(i)<2
        y(i)=10*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
        else
        y(i)=0;
        end
   end
      %y=sin(5*x*sqrt(2)/4);
      %y=0;
end

function y=psi(x)
 y=0;
%y=sin(5*x*sqrt(2)/4);
end

function y=fourieru(x,t) y=0;
for k=0:30
    Xk=sin(((2*k+1)*pi/(2*L)).*x);
    Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
    Bk=(4/(2*k+1)*pi*a)*trapz(x,psi(x).*Xk);
    Tk=Ak*cos((2*k+1)*pi*a*t/(2*L))+Bk*sin((2*k+1)*pi*a*t/(2*L));

end
end

for n=1:length(t)
```

```
    clf
    hold on
y=fourieru(x,t(n));  plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
axis([0 L -1 1]);
grid on;
M(n)=getframe;
end
movie(M,2)
end
```

1.2 Струна със закрепени краища

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \leq x \leq L, \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=L} = 0,\ t \geq 0, \end{cases} \tag{11}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi(L) = \varphi''(L) = \psi(L) = 0$.

Изследването на тази задача е направено на лекции. Тук ще скицираме получените резултати.

Търсим решение по метода на Фурие във вида

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t). \tag{12}$$

За всяка от функциите $X_k(x)$ получаваме следната задача на Щурм-Лиувил

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < L, \\ X(0) = 0,\ X(L) = 0, \end{cases}$$

която има собствени стойности $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ и собствени функции

$$X_k(x) := \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right),\ k \in \mathbf{N}.$$

За всяка от функциите $T_k(t)$ получаваме линейно уравнение

$$T_k''(t) + \lambda_k a^2 T_k(t) = 0,$$

което има общо решение

$$T_k(t) := A_k \cos\left(\frac{ak\pi}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{ak\pi}{L}t\right).$$

Константите A_k и B_k се определят с помощта на началните условия в изходната задача

$$A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)X_k(x)\,dx,$$

$$B_k = \frac{2}{ak\pi}\int_0^L \psi(x)X_k(x)\,dx.$$

С получените по този начин функции $X_k(x)$ и $T_k(t)$ редът (12), както и получените от него редове с почленно диференциране по x и t от първи и втори ред са равномерно сходящи в полуивицата $G = \{(x,t) : 0 \le x \le L,\ t \ge 0\}$.

Задача 2. Движението на струна се моделира със следната задача

$$\left|\begin{array}{l} u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx},\ \ t > 0,\ 0 < x < \pi\sqrt{2}, \\ \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le \pi\sqrt{2} \\ \\ u|_{x=0} = 0,\ \ u|_{x=\pi\sqrt{2}} = 0,\ \ t \ge 0, \end{array}\right.$$

където

а.)

$$\varphi(x) = \begin{cases} 10e^{\frac{4}{(2x-3)^2-1}}, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1) \cup (2, \pi\sqrt{2}], \end{cases},$$

$$\psi(x) = 0.$$

б.) $\varphi(x) = 0,\ \psi(x) = \sin(2x\sqrt{2})$.

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.

2. Използвайте 30-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направете на MatLab анимация на движението на струната за $t \in [0, 30]$.

```
function string_fourie2
  clf
  clc

 L=pi*sqrt(2);  a=1/2;
  x=0:L/100:L;
t0=0;tmax=30;
t=t0:(tmax-t0)/100:tmax;
```

```
function y=phi(x)
 for i=1:length(x)
         if 1<x(i) & x(i)<2
         y(i)=10*exp(4/((2*x(i)-3)^2-1));
         else
         y(i)=0;
         end
   end
      %y=sin(2*x*sqrt(2));
      %y=0;
end

function y=psi(x)
 y=0;
%y=sin(2*x*sqrt(2));
end

function y=fourieru(x,t)
y=0;
for k=1:30
    Xk=sin(k*pi*x/L);
    Ak=(2/L)*trapz(x,phi(x).*Xk);
    Bk=2/(a*k*pi)*trapz(x,psi(x).*Xk);
    Tk=Ak*cos(a*k*pi*t/L)+Bk*sin(a*k*pi*t/L);
    y=y+ Tk*Xk;
end
end

for n=1:length(t)
    clf
    hold on
y=fourieru(x,t(n));
 plot(x,y,'LineWidth',2,'Color','r');
plot(0,y(1),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
plot(L,y(length(y)),'ko','MarkerFaceColor',[0 0 0]);
xlabel('x');
ylabel('u(x,t)');
axis([0 L -1 1]);
grid on;
M(n)=getframe;
end
movie(M,2)
end
```