

## 0.1 Автономни системи

### 0.1.1 Основни понятия

В тази глава ще предпологаме, че търсените функции  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  на времето  $t$  трябва да определим от система от диференциални уравнения, в които времето явно не участва. Такава система обикновени диференциални уравнения ще наричаме автономна система. Понякога тя бива наричана динамична система или консервативна система. При скаларен запис една нормална автономната система от първи ред има вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n).\end{aligned}$$

С използването на векторни означения записът е по кратък

$$\dot{x} = f(x). \quad (0.1.1)$$

Напомняме, че

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Ще отбележим, че произволна нормална неавтономна система

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (0.1.2)$$

от  $n$  уравнения можем да сведем към автономна, като увеличим броя на търсените функции с единица, полагайки  $x_{n+1} = t$ . Новата система за неизвестните  $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$

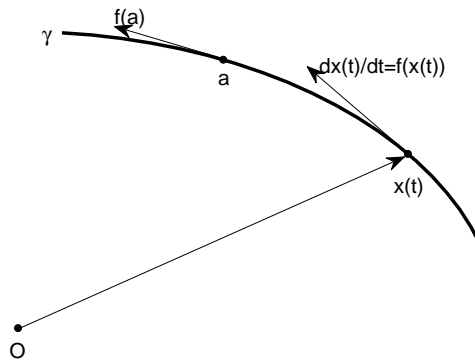
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_{n+1}, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_{n+1} &= 1\end{aligned}$$

е очевидно автономна.

По-нататък ще предпологаме, че функциите в дясната страна на автономната система притежават непрекъснати частни производни от първи ред в областта  $G \subset \mathbb{R}^n$  от  $n$ -мерното пространство, в която разглеждаме автономната система.

### 0.1.2 Геометрична и механична интерпретация

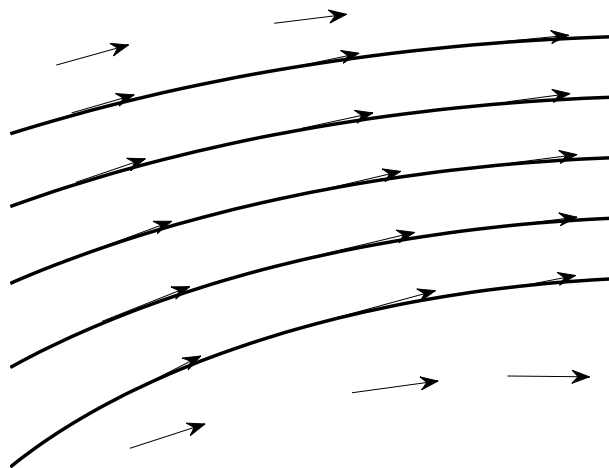
Да предположим, че  $x = \varphi(t)$ ,  $t \in \Delta$  е решение на автономната система. Множеството от точки  $\gamma = \{x : x = \varphi(t), t \in \Delta\}$  е една крива в  $n$ -мерното пространство (мислете си за по-просто, че  $n$  е равно на 2 или 3). С нарастване на времето точката  $\varphi(t)$  приема различни положения върху кривата. Можем да си мислим, че решението описва движението



Фигура 1: Траектория на движението.

на точка върху кривата. Векторът  $\dot{x} = \dot{\varphi}(t)$  е допирателен към кривата в точка  $x = \varphi(t)$  и представлява моментната скорост. От системата имаме връзката  $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ , която показва, че дясната страна на системата  $f(a)$  е векторът на скоростта, с която точката движеща се по кривата  $\gamma$ , трябва да премине през точка  $a \in G$ . Дясната страна  $f(x)$  е вектор определен еднозначно за всяка точка  $x$  от областта  $G$ . В подобни случаи говорим, че дясната страна определя в областта  $G$  векторно поле. От казаното следва, че векторната функция  $\varphi(t)$  е решение на автономната система само ако кривата  $\gamma$  е такава, че за всяка точка от нея допирателният вектор е този, определен от векторното поле (дясната страна).

Ако използваме езика на механиката, описанието е още по точно. Векторната функция  $x = x(t)$  е решение на автономната система, ако движението по кривата  $\gamma$  става по такъв начин, че през дадена точка преминаваме с предписаната от векторното поле скорост. Казано по друг начин, автономната система описва движение на точка (или множество



Фигура 2: Движение по различни траектории.

от точки, непрекъсната среда) по такъв закон, при който през дадена точка от пространството можем да преминаваме само с предписана скорост.

За автономната система

$$\dot{x} = y \quad (0.1.3)$$

$$\dot{y} = -x. \quad (0.1.4)$$

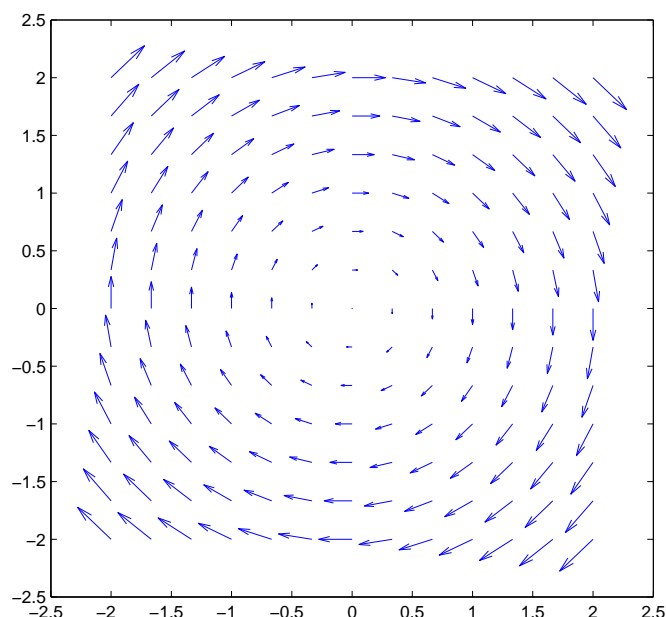
имаме следната картина на векторното поле

Кодът, който при използването на MatLab създава картината с изображението на векторното поле, се дава в следния листинг

```
[x, y] = meshgrid(-2:1/3:2, -2:1/3:2);
xd = y; yd = -x;
quiver(x, y, xd, yd)
```

Автономната система описва такъв закон на движение, който не се променя с времето, тъй като времето явно не участва в записа на системата и връзката между променливите и техните производни не се променя. Това можем да интерпретираме и така: Законът на движение не се изменя с времето, защото няма външно въздействие, т.е. движението се извършва автономно. Оттук идва и названието автономна система.

Автономните системи възникват при описанието на процеси и явления от различни области на познанието. Представете си, че наблюдаваме



Фигура 3: Картина на векторното поле.

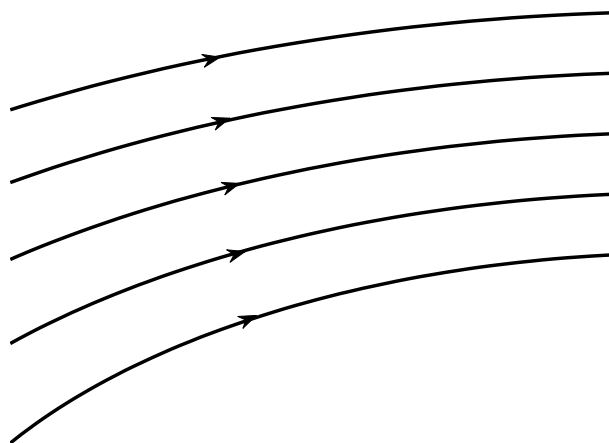
движение на частица (малък плаващ обект) върху водната повърхност на речно течение. Обикновено дори за големи интервали от време това течение е постоянно (стационарно, без изменения). Наблюденията ни показват, че движението на частицата е такова, че през дадена точка преминаваме винаги с една и съща скорост. Можем да експериментираме като пускаме многократно плаваща частица от една и съща или различни начални точки. Този тип движение на частици върху водната повърхност води до модела описван като стационарно течение на флуид в равнината.

Лесно можем да си представим и тримерни стационарни течения на флуид, т.е. течения, описвани с автономни системи. В редица случаи системи от по-висок ред се свеждат до автономна след подходящо полагане, което ще видим по-нататък като разглеждаме различни математически модели.

### 0.1.3 Основни понятия

С механичната интерпретация са свързани основните понятия при автономните системи. Кривата, по която се движи дадена точка наричаме

обикновено траектория. Математическият термин е фазова траектория или фазова крива. Тук фаза се интерпретира като състояние, положение. За всяка точка  $x \in G$  автономната система определя фазова скорост  $f(x)$ . Фазовата траектория се характеризира с посоката на движение по нея при нарастване на времето и тя е съгласувана с посоката на фазовата скорост. Посоката на движение върху траекторията указваме със стрелка. От теоремата за съществуване и единственост на решението на автономна система можем да заключим, че през всяка точка от областта минава еднозначно определена фазова траектория, т.е. областта е "изтъкана" от фазови траектории.



Фигура 4: Фазов портрет.

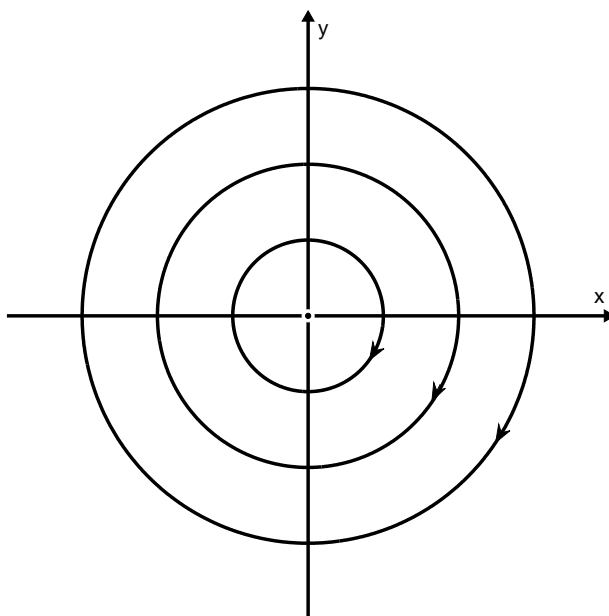
Фазово пространство наричаме множеството от всевъзможните стойности на  $x$  за разглежданата автономна система, в нашия случай това е областта  $G$ .

Фазов портрет ще наричаме съвкупността от всевъзможните фазови траектории. Разбира се, на картината представлява фазовия портрет е достатъчно да изобразим само краен брой фазови траектории, за да получим задоволителна представа за него.

Както ще се убедим по-нататък фазовият портрет на автономната системата

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}$$

изглежда така



Фигура 5: Фазов портрет на системата  $\dot{x} = y, \dot{y} = -x$ .

Най-простият тип движение е състоянието на покой, при което във всеки момент се намираме в една и съща точка  $a \in G$ , т.е.  $x(t) = a$  за всяко  $t$ . Естествено в такъв случай скоростта на движение е нулева, т.е.  $\dot{x}(t) = 0$ . Ако този тип движение се описва от нашата автономна система, то имаме  $0 = \dot{x}(t) = f(x(t)) = f(a)$ . Ако  $f(a) = 0$ , то очевидно  $x(t) \equiv a$  е решение на автономната система. В примерите за автономно движение от механиката в състояние на покой се намираме в точка, която е положение на равновесие.

**Дефиниция 0.1.1** *Казваме, че точката  $a \in G$  е положение на равновесие за автономната система, ако  $f(a) = 0$ .*

#### 0.1.4 Класификация на фазовите траектории на една автономна система

Ако ползваме механичната интерпретация и автономността на движението (без външно въздействие) описвано с автономна система, можем да се убедим, че:

Ако две фазови траектории имат обща точка, те съвпадат.

Ако една фазова траектория съдържа положение на равновесие, то тя съвпада с положението на равновесие.

Ако една фазова траектория се самопресича, то тя е затворена гладка крива с ненулев допирателен вектор, съответстваща на периодично движение по кривата.

И така, фазовият портрет на една автономна система се състои от фазови траектории само от следните три вида:

- 1) положение на равновесие,
  - 2) отворена гладка крива,
  - 3) затворена гладка крива, съответстваща на периодично движение.
- Горните изводи могат без затруднение да бъдат доказани и формално.

### 0.1.5 Фазови портрети на линейните автономни системи в равнината

Всяка линейна автономна система е линейна система с постоянни коефициенти. В двумерния случай тя има вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2.\end{aligned}\tag{0.1.5}$$

или при векторни означения  $\dot{x} = Ax + b$ , където

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Ще разгледаме само така наречените неизродени случаи, при които фазовият портрет запазва вида си, ако малко променим коефициентите.

Основното ни предположение е, че матрицата  $A$  е неособена, т.е.  $\det A \neq 0$ , което ни осигурява, че линейната система

$$Ax + b = 0, \text{ т.е. } \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 = 0 \end{cases},$$

има единствено решение  $x_1 = c_1, x_2 = c_2$  и следователно единствено положение на равновесие в точка  $(c_1, c_2)$ .

Това ни дава възможност да запишем системата във вида

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= a_{11}(x_1 - c_1) + a_{12}(x_2 - c_2) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(x_1 - c_1) + a_{22}(x_2 - c_2)\end{aligned}, \text{ т.е. } \dot{x} = A(x - c).\tag{0.1.6}$$

След полагането  $y = x - c$ , т.е.  $y_1 = x_1 - c_1, y_2 = x_2 - c_2$ , тъй като  $\dot{y} = \dot{x}$ , за новите търсени функции  $y_1$  и  $y_2$  получаваме системата  $\dot{y} = Ay$

с положение на равновесие точка  $(0, 0)$ . Ако познаваме фазовия портрет за тази система, то фазовият портрет на първоначалната система ще се получи с трансляцията  $x = y + c$ .

Затова без да ограничаваме общността ще разглеждаме само случая на хомогенна линейна система

$$\dot{x} = Ax. \quad (0.1.7)$$

Формулите за решенията на системата имат различен вид, в зависимост от собствените числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на матрицата  $A$ , които определяме от уравнението

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A = 0, \quad (0.1.8)$$

което е квадратно уравнение за  $\lambda$  с реални коефициенти. То има два реални корена  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  или два комплексно спрегнати корена  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ . Тъй като  $\det A \neq 0$  е свободният член в уравнението, то не може да има равен на нула корен.

Ще разгледаме два основни случая:

- А) собствените числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  на матрицата  $A$  са реални и различни,
- Б) собствените числа на матрицата  $A$  са комплексно спрегнати.

## А. Реални собствени числа

Собствените вектори

$$e_1 = \begin{pmatrix} e_1^1 \\ e_1^2 \end{pmatrix} \text{ и } e_2 = \begin{pmatrix} e_2^1 \\ e_2^2 \end{pmatrix}$$

съответстващи на собствените числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  са линейно независими и решението на системата се записва във вида

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} e_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} e_2. \quad (0.1.9)$$

Нека  $y_1$  и  $y_2$  са координатите на точка  $x$  спрямо новия базис образуван, от векторите  $e_1$  и  $e_2$ , т.е.  $x = y_1 e_1 + y_2 e_2$ , което е еквивалентно на въвеждането на нови променливи  $y_1$  и  $y_2$  чрез неособената линейна смяна

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 e_1^1 + y_2 e_2^1 \\ x_2 &= y_1 e_1^2 + y_2 e_2^2 \end{aligned} \quad (0.1.10)$$



Новите координати  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  на точка  $x(t)$  от решението тогава очевидно се задават като

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (0.1.11)$$

което ни позволява лесно да съобразим какъв е фазовият портрет в координати  $y_1$  и  $y_2$ . Той очевидно е симетричен спрямо осите, и затова е достатъчно да го получим най-напред само в първи квадрант, т.е. при  $C_1, C_2 \geq 0$ .

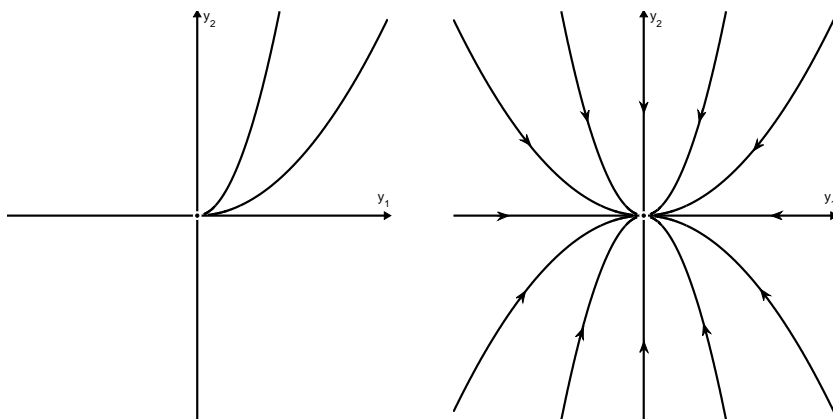
Случай А.1.  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , Устойчив възел

Положението на равновесие  $(0, 0)$  получаваме при  $C_1 = C_2 = 0$ . При  $C_1 > 0$  и  $C_2 = 0$  фазовата траектория е положителната полуос  $y_1$ , а при  $C_1 = 0$  и  $C_2 > 0$  фазовата траектория е положителната полуос  $y_2$ . Нека  $C_1, C_2 > 0$ . Тогава като изключим параметъра  $t$  получаваме, че фазовата траектория има вида

$$y_2 = C y_1^\mu, \quad \text{където } \mu = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (0.1.12)$$

Това е уравнение на парабола, но в разглеждания случай, фазовата траектория е само онази част от нея, която се съдържа в първи квадрант и не включва точка  $(0, 0)$ . Тъй като  $\mu > 1$ , параболата 0.1.12 се допира до оста  $y_1$  (при  $\mu < 1$  се допира до оста  $y_2$ ), в което можем да се убедим и като пресметнем, че

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{y_2}{y_1} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} = 0.$$

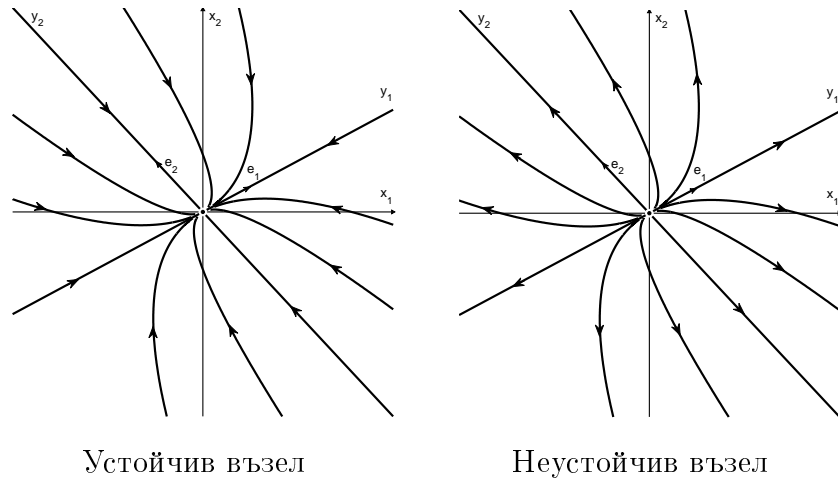


Фигура 6: Фазов портрет възел в  $y$  координати.

Пълната картина получаваме от симетрията на фазовия портрет чрез отражения относно координатните оси.

Пак от формулите 0.1.11 се вижда, че по всички фазови траектории при  $t \rightarrow \infty$  се движим към началото на координатната система. Посоката на движение по траекториите указваме със стрелки.

В старите координати картината е подобна, но деформирана. Тя е образ на вече получената чрез неособеното линейно изображение 0.1.10, като образите на параболите се допират до правата през началото, имаща направлението на вектора  $e_1$ . Полученият фазов портрет наричаме



Фигура 7: Фазов портрет на възел в старите координати.

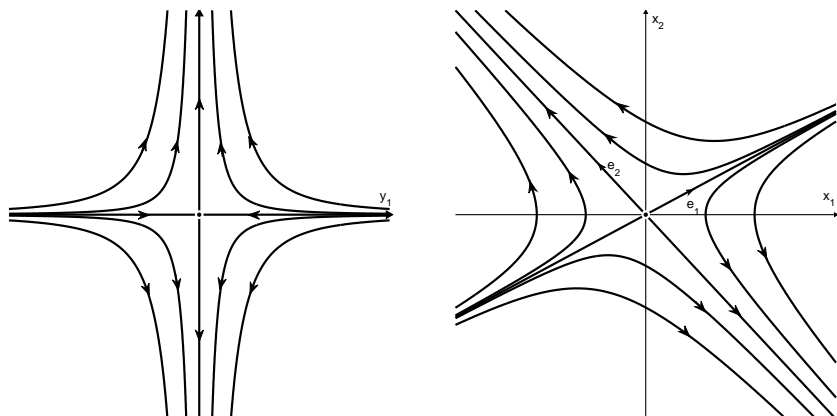
устойчив възел, тъй като положението на равновесие  $(0, 0)$  е устойчиво. От която и точка да тръгнем, за решението  $x(t)$ , съответстващо на фазовата траектория имаме  $x(t) \rightarrow (0, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Случай А.2.  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ , Неустойчив възел

Фазовите криви са същите, като сега по тях се движим като при нарастване на  $t$  се отдалечаваме от началото. Фазовият портрет наричаме неустойчив възел, а положението на равновесие неустойчиво, тъй като по всяка от траекториите при нарастване на времето бягаме от него.

Случай А.3.  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ , Седло

Сега имаме  $\mu < 0$  и при  $C_1, C_2 \neq 0$  съгласно 0.1.12 траекториите имат вид на “хиперболи” с асимптоти координатните оси. Посоките на движение върху полуосите са съгласувани с тези по хиперболите и при нарастване на времето  $y_2(t)$  расте, а  $y_1(t)$  намалява. Фазовият портрет наричаме седло. Положението на равновесие в случая на седло е неустойчиво, защото само по полуосите  $y_1$  приближаваме началото. По която и друга траектория да тръгнем, дори първоначално да приближаваме началото, при нарастване на времето започваме да се отдалечаваме неограничено от него.



Фигура 8: Фазов портрет на седло.

### Б. Комплексни собствени числа

Собствените числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  са комплексно спрегнати. Да въведем означенията  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ . Нека  $e$  е собственият вектор на матрицата  $A$ , съответстващ на собственото число  $\lambda_1$ , т.е.  $Ae = \lambda_1 e$ . Като вземем комплексно спрегнатите страни на това равенство имаме  $A\bar{e} = \overline{\lambda_1} \bar{e}$ , т.е.  $\bar{e}$  е собственият вектор съответстващ на  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ . Нека  $e = f_1 - if_2$  и  $\bar{e} = f_1 + if_2$ , където векторите  $f_1$  и  $f_2$  са реални. Те са линейно независими, защото  $e$  и  $\bar{e}$  са линейно независими (като собствени вектори съответстващи на различни собствени значения). Една фундаментална система от комплексни решения е

$$z(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} (f_1 - if_2), \quad \overline{z(t)} = e^{(\alpha-i\beta)t} (f_1 + if_2).$$

За да получим реална фундаментална система, съгласно рецептата взимаме реалната и имажинерната част на  $z(t)$ . Тъй като

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t),$$

получаваме реалната фундаментална система

$$u(t) = e^{\alpha t} (\cos \beta t f_1 + \sin \beta t f_2), \quad v(t) = e^{\alpha t} (\sin \beta t f_1 - \cos \beta t f_2)$$

Всички реални решения получаваме по формулата

$$x(t) = C_1 u(t) + C_2 v(t)$$

и след очевидни преобразувания

$$x(t) = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t) f_1 + e^{\alpha t} (C_1 \sin \beta t - C_2 \cos \beta t) f_2.$$

Въвеждаме нови координати  $y_1$  и  $y_2$ , така че  $x = y_1 f_1 + y_2 f_2$ , и решението на системата представяме във вида

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\alpha t}(C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t), \\ y_2(t) &= e^{\alpha t}(C_1 \sin \beta t - C_2 \cos \beta t). \end{aligned}$$

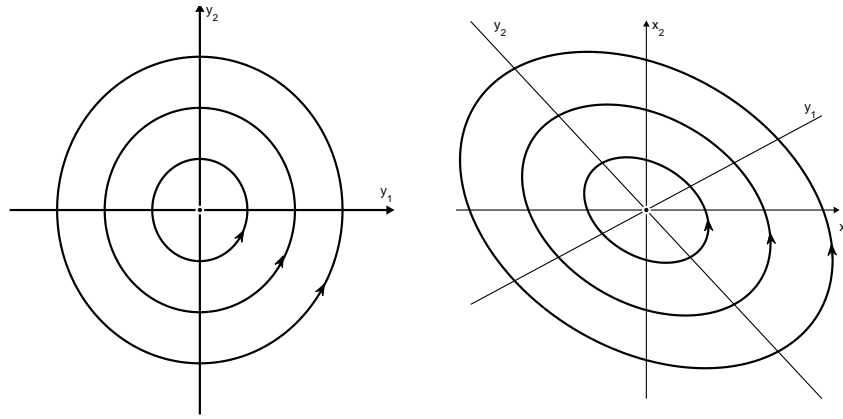
След полаганията

$$\rho = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \cos \tau = \frac{C_1}{\rho}, \quad \sin \tau = -\frac{C_2}{\rho},$$

имаме

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \rho e^{\alpha t} \cos(\beta t + \tau), \\ y_2(t) &= \rho e^{\alpha t} \sin(\beta t + \tau). \end{aligned} \quad (0.1.13)$$

Сега е лесно да анализираме поведението на фазовите траектории.



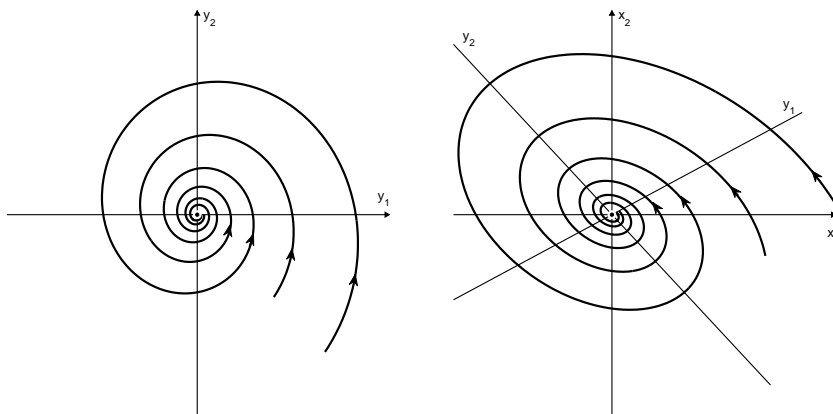
Фигура 9: Фазов портрет център.

Случай Б.1.  $\alpha = 0$ , Център.

При  $\alpha = 0$  имаме  $e^{0t} = 1$  и според 0.1.13 фазовите траектории са окръжности. Посоката на движение по тях е обратна на движението на часовниковата стрелка при  $\beta > 0$  и по посока на движението на часовниковата стрелка при  $\beta < 0$ . При връщането към старите координати картината се деформира, при което окръжностите се преобразуват в елипси. Този случай е изроден, защото при малко изменение на коефициентите на системата веднага имаме  $\alpha \neq 0$  и попадаме в някой от следващите два случая.

Случай Б.2.  $\alpha < 0$ , Устойчив фокус.

Сега отново обикаляме около положението на равновесие, но разстоянието до него намалява при нарастване на времето експоненциално съгласно 0.1.13, като  $y(t)$  клони към началото при  $t \rightarrow \infty$ . Фазовите тра-

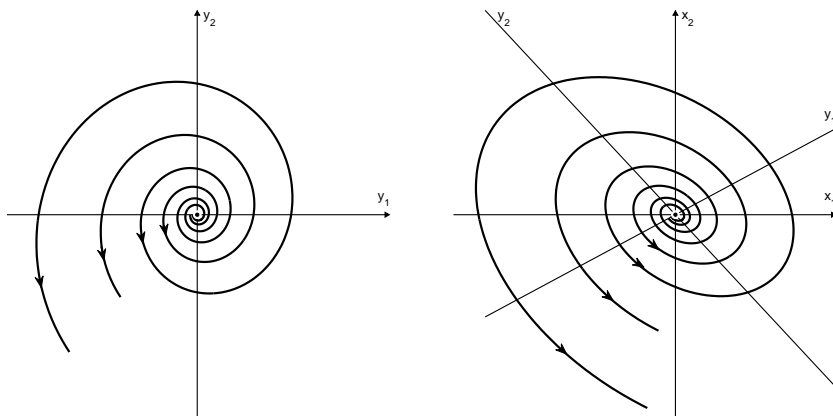


Фигура 10: Фазов портрет на устойчив фокус.

ектории са спирали, които се “събират (фокусират) в началото”. Оттук идва и названието на фазовия портрет. В старите координати картината е аналогична, но се деформира при линейната смяна на променливите.

Случай Б.3.  $\alpha > 0$ , Неустойчив фокус.

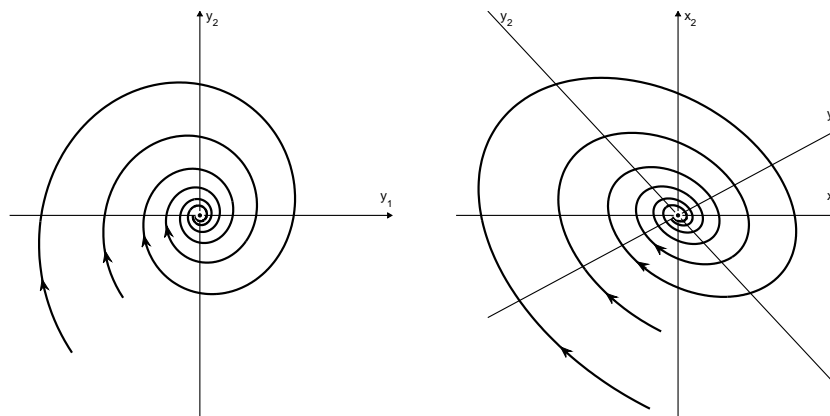
Фазовият портрет е аналогичен на предишния, но началото е неустойчиво положение на равновесие, защото по фазовите траектории бягаме от началото. В старите координати знаем вида на фазовите криви. Тъй



Фигура 11: Фазов портрет неустойчив фокус.

като ориентацията може да се промени при линейната смяна, то посоката на движение върху фазовите траектории определяме, като намерим един допирателен вектор върху някоя от кривите, например допирателният вектор в точка  $(1, 0)$ , защото лесно се пресмята чрез дясната страна на системата. Той е  $(a_{11}, a_{21})$  и сочи нагоре, при  $a_{21} > 0$ , следователно положението на равновесие обикаляме обратно на часовниковата стрелка, а

при  $a_{21} < 0$  сочи надолу и началото обикаляме по часовниковата стрелка. Като изхождаме от проведените разглеждания, благодарение на явните



Фигура 12: Фазов портрет на устойчив фокус с посока на въртене по часовниковата стрелка.

формули за решенията на линейната система, познаваме вида на фазовия портрет само като анализираме собствените числа на матрицата на системата, и можем да го изобразим приблизително. За определяне на посоката на движение по фазовите криви използваме допирателен вектор върху някоя от кривите, например както е описано по-горе.

Представа за фазовия портрет можем да получим и като използваме възможностите на MatLab. Можем да изобразим векторното поле на разглежданата автономна система, или да решим числено задача на Коши за системата с начални данни в достатъчно много точки и след това, използвайки богатите графични възможности на MatLab, да изобразим едновременно на екрана получените фазови траектории.

### 0.1.6 Фазов портрет на нелинейна автономна система

Може да бъде доказано, че в околност на точка, която не е положение на равновесие, фазовите траектории са сноп непресичащи се гладки криви, получени с непрекъснатата (дори гладка) деформация от сноп успоредни прави.

В разгледаните примери се убедихме, че поведението на фазовите траектории в околност на положение на равновесие е особено важно.

В околност на положение на равновесие, което е изолирано, при нелинейните автономни системи обикновено използваме линеаризация.

Ще предположим, без да ограничаваме общността, че  $a$  е единственото положение на равновесие за автономната система 0.1.1. Като развием

по Тейлор десните страни на системата до линейните членове от първи ред и използваме, че  $f(a) = 0$ , получаваме

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x) = f_{1x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f_{1x_n}(a)(x_n - a_n) + o(|x - a|), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x) = f_{nx_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f_{nx_n}(a)(x_n - a_n) + o(|x - a|).\end{aligned}$$

където с  $o(|x - a|)$  е означена някаква функция, например  $\varphi(x)$ , различна за всеки ред, за която  $\frac{\varphi(x)}{|x - a|} \rightarrow 0$  при  $|x - a| \rightarrow 0$ , т. е. при  $x \rightarrow a$ . Нелинейната система 0.1.1 записваме накратко при векторни означения във вида

$$\dot{x} = A(x - a) + o(|x - a|), \quad (0.1.14)$$

където

$$A = \begin{pmatrix} f_{1x_1}(a) & \dots & f_{1x_n}(a) \\ \vdots & & \\ f_{nx_1}(a) & \dots & f_{nx_n}(a) \end{pmatrix}$$

е матрицата на Якоби.

Близо до положението на равновесие  $o(|x - a|)$  намалява по бързо от линейните членове и това ни дава основание да предполагаме, че вместо нелинейната система можем да изучим така наречената линеаризирана система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_{1x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f_{1x_n}(a)(x_n - a_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_{nx_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + f_{nx_n}(a)(x_n - a_n)\end{aligned} \quad (0.1.15)$$

или при векторни означения

$$\dot{x} = A(x - a). \quad (0.1.16)$$

Както видяхме в случая на две независими променливи, след полагането  $y = x - a$  можем да разлеждаме линейната система с положение на равновесие в началото

$$\dot{y} = Ay.$$

Очакваме фазовият портрет на линеаризираната система 0.1.16 да ни даде представа за фазовия портрет на нелинейната 0.1.14. Това със сигурност е така, ако всички собствени числа на матрицата на линеаризираната система са с различни от нула реални части (Теорема на Хартман – Гробман). В околност на положението на равновесие фазовият портрет на автономната система се получава от този на линеаризираната система с непрекъсната деформация.

Ако имаме няколко различни положения на равновесие фазовият портрет може да изглежда доста сложно, както ще се убедим от примери по-нататък.

## 0.2 Устойчивост

### 0.2.1 Основни понятия

При гладка дясна страна решенията на системите обикновени диференциални уравнения зависят непрекъснато, дори гладко от началните условия и параметри. За приложенията е особено важно едно устройство да бъде създадено така, че да работи устойчиво в продължение на дълго време. Това означава, че при малки или случайни малки изменения на параметрите на устройството неговият устойчив режим на работа се запазва.

Пренасянето на тези изисквания за автономни системи води до следната дефиниция на устойчиво положение на равновесие.

**Дефиниция 0.2.1** *Казваме, че  $a$  е устойчиво положение на равновесие на автономната система  $\dot{x} = f(x)$ , ако за всяка околност  $U$  на  $a$  съществува такава околност  $V$ , че решението  $x = x(t, x_0)$ , удовлетворяващо началното условие  $x(t_0, x_0) = x_0$ , има свойствата:*

1. *Решението  $x = x(t, x_0)$  е дефинирано за всички  $t \geq t_0$ .*
2. *Решението остава в  $U$  при  $t \geq t_0$ , т.е.  $x(t, x_0) \in U$  за всяко  $t \geq t_0$ .*

*Положението на равновесие се нарича асимптотично устойчиво, ако е устойчиво и*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = a.$$

### 0.2.2 Устойчивост по линейно приближение

Най-често се използва критерият за устойчивост, при който от устойчивостта на положението на равновесие за линеаризираната система 0.1.16, можем да заключим, че положението на равновесие е устойчиво и за нелинейната автономна система.

**Теорема 0.2.1 (Ляпунов, за устойчивост)** *Ако  $a$  е положение на равновесие за автономната система и всички собствени числа на якобиевата матрица*

$$\begin{pmatrix} f_{1x_1}(a) & \dots & f_{1x_n}(a) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{nx_1}(a) & \dots & f_{nx_n}(a) \end{pmatrix} \quad (0.2.1)$$



имат отрицателни реални части, то  $a$  е асимптотично устойчиво положение на равновесие.

**Теорема 0.2.2 (Ляпунов, за неустойчивост)** Ако  $a$  е положение на равновесие за автономната система и якобиевата матрица 0.2.1 има поне едно собствено число с положителна реална части, то  $a$  е неустойчиво положение на равновесие.

**Пример 0.2.1** Да разгледаме нелинейната система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + \frac{1}{10}x^2 \\ \dot{y} &= x + \frac{1}{10}y^3\end{aligned}\tag{0.2.2}$$

Линейното приближение в околност на равновесната точка  $(0, 0)$  е седло ( $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ) и тази точка е неустойчива и за нелинейната система.

**Пример 0.2.2** Да разгледаме нелинейната система

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + ax^2 \\ \dot{y} &= x + ay^3,\end{aligned}\tag{0.2.3}$$

където  $a$  е реален параметър. Линейното приближение в околност на равновесната точка  $(0, 0)$  е център ( $\lambda_1 = -i$ ,  $\lambda_2 = i$ ) и по първо приближение не може да се определи каква е тази точка за нелинейната система. При  $a = -0.1$  тя е асимптотично устойчива, а при  $a = 0.1$  е неустойчива.

**Пример 0.2.3** Нека функциите  $x(t)$ ,  $y(t)$  са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = 2xy \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

- Намерете равновесните точки на системата.
- Покажете, че функцията  $v(t) := x(t) + [y(t)]^2$  не зависи от  $t$ .
- Начертайте фазов портрет на системата. Кои равновесни точки са устойчиви?

**Решение:**

- Очевидно всяка точка от правата  $x = 0$  е равновесна.
- Да пресметнем производната на функцията  $v(t)$  като използваме, че функциите  $x(t)$  и  $y(t)$  са решения на дадената система

$$v'(t) = \dot{x}(t) + 2y(t)\dot{y}(t) = 2x(t)y(t) - 2x(t)y(t) = 0.$$

Следователно функцията  $v(t)$  не зависи от  $t$ .

в) Вече знаем, че освен равновесните точки, фазови криви на системата са и части от параболите  $x = c - y^2$ , където  $c$  е произволна константа. Те могат да бъдат получени и от системата като запишем уравненията във вида

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2xy \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

и изключим  $t$  от двете уравнения:

$$dt = \frac{dx}{2xy} = -\frac{dy}{x}.$$

Получихме уравнение с разделящи се променливи, което има общо решение  $x = c - y^2$ .

Устойчивостта на равновесните точки ще изследваме с помощта на векторното поле на системата

$$\vec{\tau}(x, y) = (2xy, -x).$$

Знаем, че вектора  $\vec{\tau}(x_0, y_0)$  са тангенциален към фазовата крива, минаваща през точката  $(x_0, y_0)$  и показва посоката на движение на точката по тази крива при нарастване на  $t$ .

Да разгледаме само тези параболи от вида  $x = c - y^2$ , върху които лежат равновесни точки (тоест тези параболи, които пресичат ординатната ос). Нека  $(x_0, y_0)$  е точка върху някоя от тези параболи и не е положение на равновесие.

1. Нека  $x_0 < 0$ ,  $y_0 > 0$  (втори квадрант). Тогава първата координата на  $\vec{\tau}(x_0, y_0)$  е отрицателна, а втората положителна и с нарастване на  $t$  точката от фазовата крива ще се отдалечава от равновесната точка.

Следователно равновесните точки  $(0, y)$  при  $y \geq 0$  са неустойчиви.

2. Нека  $x_0 > 0$ ,  $y_0 > 0$  (първи квадрант). Тогава първата координата на  $\vec{\tau}(x_0, y_0)$  е положителна, а втората е отрицателна и с нарастване на  $t$  точката от фазовата крива ще се отдалечава от равновесната точка с положителна ордината и ще се приближава към равновесната точка с отрицателна ордината.

3. Нека  $x_0 < 0$ ,  $y_0 < 0$  (трети квадрант). Тогава първата и втората координата на  $\vec{\tau}(x_0, y_0)$  са положителни и с нарастване на  $t$  точката от фазовата крива ще се приближава към равновесната точка с отрицателна ордината.

Следователно равновесните точки  $(0, y)$  при  $y < 0$  са устойчиви, но не са асимптотично устойчиви.

