Факултет по математика и информатика, СУ „Св. Климент Охридски“

ПРОЕКТ

по

Диференциални уравнения и приложения

спец. Софтуерно инженерство, 2 курс, летен семестър, учебна година 2019/2020

Тема № 17

XX.XX.XXXX г.

гр. София

Изготвил: XXXXX XXXXX

група X, ф.н. XXXX

Оценка:.............................

СЪДЪРЖАНИЕ

1. Тема (задание) на проекта.

Тема СИ20-П-17. Трептенето на струна се моделира със следната задача

$$\begin{cases} u_{tt} = \frac{11}{4}u_{xx},\ t > 0,\ 0 < x < \frac{9}{2}, \\ u|_{t=0} = \begin{cases} -5(x-1)^3 sin^3(\frac{pix}{2}), x \in\ [1,2] \\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad x \in [0,1) \cup (2,\frac{9}{2}], \end{cases} \\ u_t|_{t=0} = sin(2\pi x),\ 0 \le x \le \frac{9}{2}, \\ u|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\frac{9}{2}} = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$$

1. Разделете променливите в задачата, като търсите решение от вида $u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$. За функциите $X_k(x)$ получете задача на Щурм-Лиувил и напишете нейните собствени стойности и собствени функции. Напишете кои са функциите $T_k(t)$ и кои са коефициентите в получения ред за $u(x,t)$.
2. Използвайте 55-та частична сума на реда за $u(x,t)$ за да направите на MATLAB анимация на трептенето на струната за $t \in [0,13]$. Начертайте в един прозорец една под друга графиките на направената анимация в началния, крайния и един междинен момент, като означите коя графика за кое t се отнася.

2. Решение на задачата

2.1. Теоритична част:

Имаме закрепен ляв край $\left(u|_{x=0} = 0\right)$ и свободен десен $\left(u_x|_{x=\frac{9}{2}} = 0\right)$. Скоростта с която смущенията се разнасят по струната е $a = \dfrac{11}{4}$, $\left(u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0\right)$. Началното положение е $\varphi(x)$, а началната скорост е $\psi(x)$.

Търсим решение от вида $u(x,t) = X(x)\,.\,T(t)$, което да не се анулира тъждествено. Първо заместваме в уравнението на струната и получаваме:
$u_{tt} = \dfrac{11}{4} u_{xx} \Rightarrow X(x)\,.\,T''(t) = \dfrac{11}{4} X''(x)\,.\,T(t),\ 0 < x < \dfrac{9}{2},\ t \geq 0$. Там където не се нулират функциите делим и получаваме, че $\dfrac{T''(t)}{T(t)} = \dfrac{11}{4}\,.\,\dfrac{X''(x)}{X(x)}$. Тъй като тези функции са функции на различни променливи, то единствения начин те да са равни е ако са равни на някаква константа (или ако фиксираме t, то $\dfrac{X''(x)}{X(x)}$ не се променя и не зависи от x и аналогично, ако фиксираме x, то $\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ също не се променя и не зависи от t $\Rightarrow$ тази пропорционална стойност не зависи нито от x, нито от t, което означава, че е константа) и $\dfrac{4}{11}\,.\,\dfrac{T'(t)}{T(t)} = \dfrac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$, където $-\lambda = const.$

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \\ T''(t) + \frac{11}{4}\lambda T(t) = 0. \end{cases}$$

От граничните условия получаваме:

$0 = u(0,t) = X(0)\,.\,T(t),\ t \geq 0$. Следователно $X(0) = 0$.

$0 = u'\left(\dfrac{9}{2}, t\right) = X'\left(\dfrac{9}{2}\right)\,.\,T(t),\ t \geq 0$. Следователно $X'\left(\dfrac{9}{2}\right) = 0$.

По този начин за функцията $X(x)$ получихме следната задача на Щурм-Лиувил:

$$\Rightarrow \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0, \ \ 0 < x < \frac{9}{2} \\ X(0) = 0, X'\left(\frac{9}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Очевидно $X(x) \equiv 0$ е решение. Ще потърсим нетривиални (ненулеви) решения.

Имаме едно диференциално линейно уравнение от втори ред с две начални условия и характеристичен полином $P(s) = s^2 + \lambda = 0$, от където следва, че $s^2 = -\lambda, s = \pm\sqrt{-\lambda}$.
Ще разгледаме 3 случая за параметъра λ.

I сл. $\underline{\lambda = 0}$
$\Rightarrow$ имаме 1 корен и фундаменталната система от решения (ФСР) има вида $\{e^0, xe^0\} = \{1, x\}$. Следователно (тъй като корена е двукратен), $X(x) = c_1 + c_2 x;\ X'(x) = c_2;$.
Използвайки началните условия получаваме, че $X(0) = c_1 = 0$ и $X'\left(\dfrac{9}{2}\right) = c_2 = 0 \Rightarrow\ X(x) = 0$, което е тривиалното решение, от което се опитваме да „избягаме", за да намерим други.

II сл. $\underline{\lambda < 0}$
$\Rightarrow -\lambda > 0 \Rightarrow\ \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{R} \Rightarrow$ имаме два различни реални корена и ФСР= $\{e^{\sqrt{-\lambda}}, e^{-\sqrt{-\lambda}}\}$

$$\Rightarrow\ X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}; \quad X'(x) = \sqrt{-\lambda}c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Отново използваме началните условия и получаваме, че

$$X(0) = c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = 0\ \Rightarrow\ c_1 = -c_2;\ X'\left(\frac{9}{2}\right) = \sqrt{-\lambda}(\underbrace{c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}}_{\neq 0}) = 0$$

и тъй като $e^{\sqrt{-\lambda}}$ и $e^{-\sqrt{-\lambda}}$ образуват ФСР, то те ще са линейно независими и следователно, за да бъде изпълнено последното равенство, трябва $c_1 = c_2 = 0$ и отново имаме тривиалното решение.

Следователно за $\lambda \leq 0$ няма други решения различни от тривиалното. Продължаваме да търсим в послeния останал случай.

III сл. $\underline{\lambda > 0}$

$\Rightarrow -\lambda < 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda} \in \mathbb{C}$ е комплексно число. Следователно $s_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$, тогава

ФСР=$\{cos(\sqrt{\lambda}x), sin(\sqrt{\lambda}x)\}$, тъй като реалната част на корените е 0.

$X(x) = c_1 . cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 . sin(\sqrt{\lambda}x)$; $X(0) = c_1 . cos0 + c_2 . sin0 = c_1 = 0$;

$X'(x) = -\sqrt{\lambda}c_1 sin(\sqrt{\lambda}x) + \sqrt{\lambda}c_2 cos(\sqrt{\lambda}x) = -\sqrt{\lambda}\big(c_1 sin(\sqrt{\lambda}x) - c_2 cos(\sqrt{\lambda}x)\big) =$

$= \sqrt{\lambda}c_2 cos\big(\sqrt{\lambda}x\big)$; $X'(\dfrac{9}{2}) = 0$. Следователно или $c_2 = 0$ или

$cos\big(\dfrac{9}{2}\sqrt{\lambda}\big) = 0.$

Ако $c_2 = 0$ ще получим отново тривиалното решение, за това нека $cos\big(\dfrac{9}{2}\sqrt{\lambda}\big) = 0$. Последното е изпълнено когато: $\dfrac{9}{2}\sqrt{\lambda} = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, където $k = 0,1,2,...$

$\Rightarrow \lambda_k = \left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{9}\right)^2$ са собствените стойности, а

$X_k(x) = sin\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{9}x\right)$ са собствените функции на задачата, $k \in \mathbb{N}_0$.

Решаваме уравнението за $T(t)$ при $\lambda = \lambda_k$: $T''(t) + \dfrac{11}{4}\lambda_k T(t) = 0.$

Характеристичния полином на уравнението е:

$Q(q) = q^2 + \dfrac{11}{4}\lambda_k = 0$; $q_{1,2} = \pm\sqrt{-\dfrac{1}{4}\lambda_k} = \pm\sqrt{-\dfrac{11}{4}\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{9}\right)^2}$

$$q_{1,2} = \pm\, i \frac{\sqrt{11}}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right).$$

ФСР:= $\left\{ cos\left(\frac{11}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right), sin\left(\frac{11}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right) \right\}$

$T_k(t) - A_k\,.\,cos\left(\frac{11}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right) + B_k\,.\,sin\left(\frac{11}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right)$, където A_k и B_k са произволни константи.

Намерихме функциии $u_k(x,t) = T_k(t)\,.\,X_k(x)$, които са решение на уравнението на струната и удовлетворяват граничните условия.

$$u(x,t) = \sum_{k=0} \infty u_k(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t)X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k\,.\,cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right) + B_k\,.\,sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}\right)t\right)\right].\,sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{9}x\right)$$

$$u\,\big|_{t=0} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k X_k(x) = \varphi(x).$$

Променяме индекса по който сумираме: $\sum_{j=0}^{\infty} A_j\,.\,X_j(x) = \varphi(x).$

Нека k е фиксирано: $\sum_{j=0}^{\infty} A_j X_j(x)\,.\,X_k(x) = \varphi(x)\,.\,X_k(x).$

$\sum_{j=0}^{\infty} A_j \int_0^L X_j(x)\,.\,X_k(x)dx = \int_0^L \varphi(x)X_k(x)dx.$ Тъй като $\int_0^L X_j(x)X_k(x)dx = \begin{cases} 0, k \neq j \\ \frac{L}{2}, k = j \end{cases}$, то $A_k\,.\,\frac{L}{2} = \int_0^L \varphi(x)X_k(x)dx$ или $A_k = \frac{2}{L}\int_0^L \varphi(x)X_k(x)dx.$

$$A_k = \frac{2}{\frac{9}{2}} \int_0^{\frac{9}{2}} \varphi(x) X_k(x) dx = \frac{4}{9} \int_0^{\frac{9}{2}} \varphi(x) X_k(x) dx.$$

$$u_t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{11}}{2} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{9} \right) \left[-A_k . sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{9} \right) t \right) + B_k . cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{9} \right) t \right) \right] . X_k(x)$$

Аналогично за B_k получаваме

$$\frac{\sqrt{11}}{2} \left(\frac{\pi + 2k\pi}{9} \right) B_k = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{9}{2}} \psi(x) X_k(x) dx \Rightarrow B_k = \frac{2.2.9}{\sqrt{11}(\pi + 2k\pi)L} \int_0^{\frac{9}{2}} \psi(x) X_k(x) dx$$

$$B_k = \frac{8}{\sqrt{11}\left(\pi + 2k\pi\right)} \int_0^{\frac{9}{2}} \psi(x) X_k(x) dx$$

2.2. MatLab код и получени в командния прозорец резултати при изпълнението му:

```
function fourieString17
    clf; clc
    a=sqrt(11/4);
    L=9/2;
    tmax=12;

    x=linspace(0,L);
    t=linspace(0,tmax);

    function y=phi(x)
        for i=1:length(x)
            if x(i)>=1 && x(i)<=2
                y(i)=(-5)*((x(i)-1)^3)*(sin(pi*x(i)/2))^3;
            else
                y(i)=0;
            end
        end
    end

    function y=psi(x)
        for i=1:length(x)
            y(i)=sin(2*pi*x(i));
        end
    end

    function y=u(x,t)
        y=0;
        for k=0:54
            Xk=sin((pi/2+k*pi)*x/L);
            Ak=2*trapz(x,phi(x).*Xk)/L;
            Bk=(4*trapz(x,psi(x).*Xk))/(a*(pi+2*k*pi));
            Tk=Ak*cos((a*(pi+2*k*pi)*t)/(2*L))+Bk*sin((a*(pi+2*k*pi)*t)/(2*L));
            y=y+Tk*Xk;
        end
    end

    for n=1:length(t)
        plot(x, u(x,t(n)), 'r', 'LineWidth', 2);
        axis([0,L,-0.5,0.5 ]);
        grid on;
        getframe;
    end
```

```
    subplot(3,1,1);
    plot(x,u(x,0), 'r', 'LineWidth', 2);
    title('t=0');
    grid on;

    subplot(3,1,2);
    plot(x,u(x,6), 'r', 'LineWidth', 2);
    title('t=6');
    grid on;

    subplot(3,1,3);
    plot(x,u(x,tmax), 'r', 'LineWidth', 2);
    title('t=12');
    grid on;
end
```

2.3. Графики (включително от анимация)