Последователни приближения.
Метод на Пикар

1 Интегрално уравнение, еквивалентно на задача на Коши

Нека е дадена задачата на Коши:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Тя е еквивалентна на интегралното уравнение:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

2 Метод на Пикар на последователните приближения.

Можем да построим следната редица $y_n(x)$ от приближения на решението:
първата функция се дефинира чрез равенството

$$y_0(x) = y_0$$

а следващите се задават с рекурентната формула

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

3 Задачи

3.1 Напишете интегрално уравнение, еквивалентно на следната задача на Коши:

$$\begin{cases} y' = y^2 - 2x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

Решение.

$$y(x) = 2 + \int\limits_1^x (y^2(t) - 2t)\, dt$$

3.2 Пресметнете последователните приближения $y_0(x)$, $y_1(x)$, $y_2(x)$ на решението на Задачата на Коши от 3.1, получени с метода на Пикар.

Решение.

$$y_0(x) = 2$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 2 + \int\limits_1^x (y_0^2(t) - 2t)\ dt \\ &= 2 + \int\limits_1^x (4 - 2t)\ dt \\ &= 2 + (4t - 2t^2)|_1^x \\ &= 2 + (4x - 2x^2) - (4 - 2) \\ &= 4x - 2x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 2 + \int\limits_1^x (y_1^2(t) - 2t)\ dt \\ &= 2 + \int\limits_1^x (16t^2 - 16t^3 + 4t^4 - 2t)\ dt \\ &= 2 + (\frac{16t^3}{3} - 4t^4 + \frac{4t^5}{5} - t^2)|_1^x \\ &= 2 + (\frac{16x^3}{3} - 4x^4 + \frac{4x^5}{5} - x^2) - \frac{17}{15} \\ &= (\frac{16x^3}{3} - 4x^4 + \frac{4x^5}{5} - x^2) + \frac{13}{15} \end{aligned} \tag{2}$$

3.3 Разглеждаме следната Задача на Коши в интервала [-4; 4]:

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

3.3.1 Решете символно задачата и начертайте графиката на решението в посочения интервал.

3.3.2 Напишете редица от последователни приближения на намереното решение, получени с метода на Пикар.

$$y_0(x) = 1$$

$$\begin{aligned} y_1(x) &= 1 + \int_0^x y_0(t)\ dt \\ &= 1 + \int_0^x 1\ dt \\ &= 1 + t|_0^x \\ &= 1 + x \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= 1 + \int_0^x y_1(t)\ dt \\ &= 1 + \int_0^x (t+1)\ dt \\ &= 1 + (\frac{t^2}{2} + t)|_0^x = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + x \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} y_3(x) &= 1 + \int_0^x y_2(t)\ dt \\ &= 1 + \int_0^x (\frac{t^2}{2} + t + 1)\ dt \\ &= 1 + (\frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{2} + t)|_0^x = \\ &= 1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x \end{aligned} \tag{5}$$

Продължавайки по същия начин се вижда, че границата на редицата от приближения е редът на Маклорен за e^x, т.е

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

3.3.3 В същия прозорец начертайте графиките на първото, второто и петото приближения, получени с метода на Пикар.

Cumulative trapezoidal numerical integration (cumtrapz):

$x = [x_1, ..., x_n]$, $y = [f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n)]$,

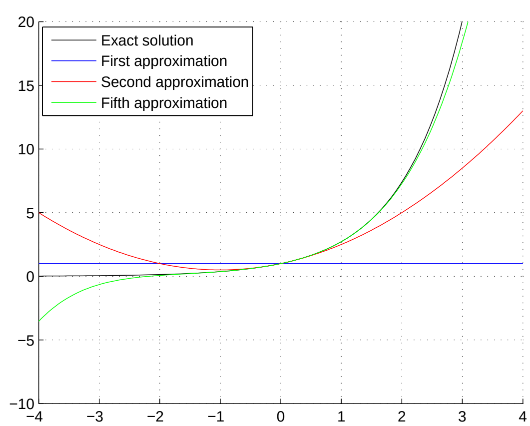
cumtrapz(x,y) $\to \left[\int_{x_0}^{x_0} f(x)\,dx, \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx, ..., \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx\right]$.

Example:

```
>> x=[-1,0,1,2]

x =

    -1     0     1     2

>> y=x;
>> cumtrapz(x,y)

ans =

         0   -0.5000         0    1.5000

>>
```

```
function pikar
xmin = -4;
xmax = 4;

x0 = 0;
y0 = 1;

hold on
grid on
axis([xmin xmax -10,20]);

% Exact solution - calculation and plotting (black)
y = dsolve('Dy = y','y(x0) = y0');
t = linspace(xmin, xmax);
p0 = plot(t,eval(y),'k');

N=6;
%Calculating the first n approximations
 x = linspace(x0,xmin);
xx = linspace(x0,xmax);

 z = y0*ones(1,length(x));
```

```
zz = y0*ones(1,length(xx));
p1 = plot(x, z, 'b');
plot(xx, zz, 'b');

for k=1:N
     z = y0 + cumtrapz(x, ff(x,z));
    zz = y0 + cumtrapz(xx, ff(xx,zz));

        if k == 2
            p2 = plot(x, z, 'r');
            plot(xx, zz, 'r');
        elseif k == 5
            p5 = plot(x, z, 'g');
            plot(xx, zz, 'g');
        end
end

legend([p0 p1 p2 p5],...
{'Exact solution',...
 'First approximation',...
  'Second approximation',...
  'Fifth approximation'});

function z = ff(~,y)
    z = y;
end

end
```



3.3.4 Направете същото за задачата

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

но първо решете числено, а не символно, задачана в същия интервал.

```
function pikar
xmin = -4;
xmax = 4;

x0 = 0;
y0 = 1;

hold on
grid on
axis([xmin xmax -10,20]);

%Exact solution - calculation and plotting (black)
[X,Y] = ode15s(@ff,[x0, xmax],y0);
[X1,Y1]= ode15s(@ff,[x0, xmin],y0);
p0 = plot(X,Y,'k');
plot(X1,Y1, 'k');


N=6;
%Calculating the first n approximations
 x = linspace(x0,xmin);
xx = linspace(x0,xmax);

 z = y0*ones(1,length(x));
zz = y0*ones(1,length(xx));
p1 = plot(x, z, 'b');
plot(xx, zz, 'b');

for k=1:N
     z = y0 + cumtrapz(x,ff(x,z));
    zz = y0 + cumtrapz(xx,ff(xx,zz));

        if k == 2
            p2 = plot(x, z, 'r');
            plot(xx, zz, 'r');
        elseif k == 5
            p5 = plot(x, z, 'g');
            plot(xx, zz, 'g');
```

```
        end
end
legend([p0 p1 p2 p5],...
{'Exact solution',...
 'First approximation',...
 'Second approximation',...
 'Fifth approximation'},...
 'Location', 'southeast');

function z = ff(x,y)
    z = x.^2 + y.^2;
end

end
```