

Задача на Коши за уравнението на струната. Формула на Даламбер. Метод на отраженията.

11.1. Движение на неограничена струна. Формула на Даламбер.

Разглеждаме идеално гъвкава, неразтеглива струна, разположена по оста Ох. Нека с $u(x,t)$ означим отклонението в точката x на струната от равновесното ѝ положение. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент $t=0$ чрез придръпване до положение $\varphi(x)$, с начална скорост $\psi(x)$ и след това е оставена без външно въздействие. Тя ще се движи във вертикална равнина, при условие че съпротивлението на средата е пренебрегнато. Така достигахме до следната задача на Коши:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} &= 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & x \in R, \end{aligned}$$

където $a = \text{const.} > 0$ е скоростта, с която малки смущения се придвижват по струната, $\varphi(x) \in C^2(R)$, $\psi(x) \in C^1(R)$.

При направените предположения задачата има единствено решение

$u \in C^2(R \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(s) ds.$$

- интегриране
- символно: `int(sym('string'))` и `int(sym('string'),a,b)`

Да се пресметне символно $\int_0^1 x^2 dx$

`syms x`

`int(x.^2,0,1)`

а неопределният интеграл се смята с `int (x.^2)`

- числено `quad` и `trapz`, с дефинирана функция $f(x)$

Да се пресметне числено $\int_0^1 x^2 dx$

`function integration`

```
I=quad(@ff,0,1)
```

```
x=0:1/100:1;
```

```
T=trapz(x,ff(x))
```

```
function z=ff(x)
```

```
z=x.^2;
```

```
end
```

или направо `x=0:0.01:1; trapz(x,x.^2)`

Зад 1. Да се направи анимация на движението на частта $C := \{-1 \leq x \leq 4\}$ от неограничена струна за време $t \in [0,6]$, ако

a) $a = 1/2$, $\varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus [1,2] \end{cases}$, $\psi(x)=0$.

b) $a = 1/10$ и същите начални условия,

c) $a=1/2$, $\varphi(x)$ от подточка (a) и $\psi(x) = \frac{1}{2} \sin(3\pi x)$

d) Да се начертаят графиките от направената анимация в три различни момента от движението на струната

```
function stringdalambert1
```

```
clf
```

```
tmax=6;
```

```
t=linspace(0,tmax);
```

```
xmin=-1;xmax=4;
```

```
x=linspace(xmin,xmax);
```

```
function y=phi(x)
```

```
for i=1:length(x)
```

```
if x(i)>=1 && x(i)<=2
```

```
y(i)=sin(pi*x(i))^4;
```

```
else
```

```
y(i)=0;
```

```
end
```

```
end
```

```
end
```

```
function y=psi(x)
```

```
y=0*x;
```

```
%y=sin(3*pi*x)/2;
```

```
end
```

```
function y=dalambert(x,t)
```

```
a=1/2;%1/10;
```

```
for j=1:length(x)
```

```

        if t==0
            integral=0;
        else
            s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
            integral=trapz(s,psi(s));
        end
        y(j)=(phi(x(j)-a*t)+phi(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
    end
end

for k=1:length(t)
    plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
    axis([xmin,xmax,-1.05,1.05])
    daspect([1,1,1])
    grid on
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,t)')
    M=getframe;
    End
subplot(3,1,1)
plot(x,dalambert(x,t(1)),'r','Linewidth',2)
hold on
subplot(3,1,2)
plot(x,dalambert(x,3),'r','Linewidth',2)
hold on
subplot(3,1,3)
plot(x,dalambert(x,5),'r','Linewidth',2)
hold on

%movie(M,2)
end

```

11.2. Движение на полуограничена струна. Метод на отраженията.

Ще разгледаме движението на полуограничена струна със закрепен или свободен ляв край - точката с абсциса $x=0$.

- Нека левият край е фиксиран. Движението на такава струна се описва със следната смесена задача.

$$\begin{aligned}
 u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} &= 0, & x > 0, t > 0, \\
 u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) &= \psi(x), & x > 0, \\
 u(0,t) &= 0, & t > 0,
 \end{aligned}$$

където $a = \text{const.} > 0$, $\varphi(x) \in C^2([0, \infty))$, $\psi(x) \in C^1([0, \infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Продължаваме нечетно функциите φ и ψ до функции φ_{odd} и ψ_{odd} и получаваме задача на Коши за неограничена струна с начални данни φ_{odd} и ψ_{odd} , която решихме в 10.1.

Ако u_{odd} е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в $\{x>0, t>0\}$ е решение на задачата за полуограничената струна с фиксиран ляв край. Ще припомним, че нечетно продължение на функцията $f(x)$ е

$$f_{\text{odd}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

- По аналогичен начин се разсъждава, ако левия край на струната е свободен. Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача.

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx} &= 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & x > 0, \\ u_x(0, t) &= 0, t > 0, \end{aligned}$$

където $a = \text{const.} > 0$, $\varphi(x) \in C^2([0, \infty))$, $\psi(x) \in C^1([0, \infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

Продължаваме четно функциите φ и ψ до функции φ_{even} и ψ_{even} и получаваме задача на Коши за неограничена струна с начални данни φ_{even} и ψ_{even} , която решихме в 10.1. Ако u_{even} е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в $\{x>0, t>0\}$ е решение на задачата за полуограничената струна със свободен ляв край. Ще припомним, че четно продължение на функцията $f(x)$ е

$$f_{\text{even}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Зад. 2. Да се моделира трептенето на частта $C := \{0 \leq x \leq 6\}$ от полуограничена струна с фиксиран или свободен ляв край за време $t \in [0, 8]$, ако

- $a = 1/2$, $\varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \in [0, 1] \cup [2, +\infty) \end{cases}$, $\psi(x) = 0$.
- $a = 1/10$ и същите начални условия,
- $a = 1/2$, $\varphi(x)$ от подточка (а) и $\psi(x) = \frac{1}{2} \sin(3\pi x)$ ($\psi(x) = \cos(5\pi x/12)/2$ в случая на свободен ляв край)

Може да се редактира кода от зад 1. До следния

```
function stringdalamber2
clear
tmax=8;
t=linspace(0,tmax,200);
xmax=6;
x=linspace(0,xmax);

function y=phi(x)
for i=1:length(x)
if x(i)>=1 && x(i)<=2
y(i)=sin(pi*x(i))^4;
```

```

        else
            y(i)=0;
        end
    end
end

function y=psi(x)
y=0.*x;
%y=sin(3*pi*x)/2; y=cos(5*pi*x/12)/5 при свободен край
end

function y=phi_odd(x)%phi_even(x)
if x>0  %(phi се извиква със скалар и тук може да се
провери x>0)
    y=phi(x);
else
    y=-phi(-x);
    %y=phi(-x);
end
end

function y=psi_odd(x)%psi_even(x)
for n=1:length(x)  %psi се извиква с вектор в trapz и
%зато проверяваме за всеки елемент на вектора дали е
%положителен или не
    if x(n)>0
        y(n)=psi(x(n));
    else
        y(n)=-psi(-x(n));
    end
end
end

function y=dalambert(x,t)
a=1/2;%1/10;
for j=1:length(x)
    if t==0
        integral=0;
    else
        s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
        integral=trapz(s,psi_odd(s));
    end
y(j)=(phi_odd(x(j)-a*t)+phi_odd(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
end
end

for k=1:length(t)
clf
hold on
plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0,0,0])

```

```

axis ([0,xmax,-1.05,1.05])
grid on
daspect ([1,1,1])
xlabel ('x')
ylabel ('u(x,t)')
M=getframe;
end
%movie(M,3)
end

```

11.3 Движение на ограничена струна със свободни краища

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < L, t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), & 0 \leq x \leq L, \\ u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=L} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (21)$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$, $\varphi'(L) = \psi'(L) = 0$.

Продължаваме четно функциите φ и ψ до функции φ_{even} и ψ_{even} в интервала $[-L, L]$ по формулата

$$f_{\text{even}}(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Продължаваме функциите φ_{even} и ψ_{even} $2L$ периодично върху цялата реална права до функции φ_{prod} и ψ_{prod} по правилото:

$$f_{\text{prod}}(x) = \begin{cases} f_{\text{prod}}(x - 2L), & x > L \\ f_{\text{prod}}(x + 2L), & x < -L \\ f(x), & -L \leq x \leq L. \end{cases}$$

Решаваме задача на Коши за неограничена струна с начални данни φ_{prod} и ψ_{prod} , която решихме в 10.1. Ако u_{prod} е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в $\{-L < x < L, t > 0\}$ е решение на задачата за ограничената струна със свободни краища.

Следният примерен код визуализира движението на такава струна с начални данни $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ от зад. 1 а. и $L=4$.

```
function Dalamber2free
```

```

clf

tmax=20;

t=linspace(0,tmax);

xmin=0;L=4;

x=linspace(xmin,L);

function y=phi(x)
    for i=1:length(x)
        if x(i)>=1 && x(i)<=2
            y(i)=sin(pi*x(i))^4;
        else
            y(i)=0;
        end
    end
end

```

```

function y=psi(x)

y=0*x;

end

```

```

function y=phi_even(x)

if x>0

    y=phi(x);

else

    y=phi(-x);

end

end

```

```

function y=psi_even(x)

for n=1:length(x)

    if x(n)>0

        y(n)=psi(x(n));

    end
end

```

```

        else
            y(n)=psi(-x(n));
        end
    end
end
end

```

```

function y=phi_prod(x)

    if x > L
        y=phi_prod(x-2*L);
    elseif x < -L
        y=phi_prod(x+2*L);
    else y= phi_even(x);
    end
end
end

```

```

function y=psi_prod(x)

    for m=1:length(x)
        if x(m) > L
            y(m)=psi_prod(x(m)-2*L);
        elseif x(m) < -L
            y(m)=psi_prod(x(m)+2*L);
        else y(m)= psi_even(x(m));
        end
    end
end
end
end

```

```

function y=dalambert(x,t)

```



```

a=1/2;

for j=1:length(x)

    if t==0

        integral=0;

    else

        s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);

        integral=trapz(s,psi_prod(s));

    end

    y(j)=(phi_prod(x(j)-a*t)+phi_prod(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);

end

end

for k=1:length(t)

    plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)

    axis ([xmin,L,-0.2,0.2])

    grid on

    xlabel('x')

    ylabel('u(x,t)')

    M=getframe;

end

subplot(3,1,1)

plot(x,dalambert(x,t(1)),'r','Linewidth',2)

xlabel('x')

ylabel('u(x,0)')

subplot(3,1,2)

plot(x,dalambert(x,2),'r','Linewidth',2)

```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('u(x,2)')
```

```
subplot(3,1,3)
```

```
plot(x,dalambert(x,5),'r','Linewidth',2)
```

```
xlabel('x')
```

```
ylabel('u(x,5)')
```

```
end
```