Задача 14. Нека функциите $x(t)$, $y(t)$ са решения на системата

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y - e^t \\ \dot{y} = x - y \end{cases}$$

намерете линейно диференциално уравнение, което се удовлетворява от функцията $y(t)$.

Решение:

От второто уравнение $\Rightarrow x = \dot{y} + y \Rightarrow \dot{x} = \ddot{y} + \dot{y}$. Заместваме x и $\dot{x}$ в първото уравнение и получаваме $\ddot{y} + \cancel{\dot{y}} = \cancel{\dot{y}} + y + 2y - e^t$; $\quad \ddot{y} - 3y = -e^t$.
Търсим общото решение на хомогенното уравнение $\ddot{y} - 3y = 0$.
характеристичния му полином е $P(\alpha) = \alpha^2 - 3 = 0$ с корени $\alpha_{1,2} = \pm\sqrt{3} \quad \Rightarrow$
$y_0(x) = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t}$, където c_1 и c_2 са произволни константи.
Сега търсим частно решение от вида:
$z(t) = b_1(t)e^{\sqrt{3}t} + b_2(t)e^{-\sqrt{3}t}$, където $b_1(t)$ и $b_2(t)$ са някакви неизвестни функции.

$$\begin{cases} b_1'(t)e^{\sqrt{3}t} + b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = 0 \\ \sqrt{3}b_1'(t)e^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t} \end{cases}$$

$$b_1'(t) = \frac{-b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t}}{e^{\sqrt{3}t}} = -b_2'(t)e^{-2\sqrt{3}t} \Rightarrow -\sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} - \sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t}$$

$$-2\sqrt{3}b_2'(t)e^{-\sqrt{3}t} = e^{-t}; \qquad b_2'(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}e^{-t+\sqrt{3}t} = \frac{-e^{t(\sqrt{3}-1)}}{2\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow b_2(t) = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\int e^{t(\sqrt{3}-1)}dt = -\frac{1}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}e^{t(\sqrt{3}-1)} = \frac{-e^{t(\sqrt{3}-1)}}{6-2\sqrt{3}} + c_3$$

$\left(c_3 = c_4 = 0\right)$

$$b_1(t) = \frac{e^{t(\sqrt{3}-1)}.\,e^{-2\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{e^{(-1-\sqrt{3})t}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow b_1(t) = \frac{1}{2\sqrt{3}}.\frac{1}{(-1-\sqrt{3})}e^{(-1-\sqrt{3})t} = -\frac{e^{-(1+\sqrt{3})t}}{6+2\sqrt{3}} + c_4$$

$$z(t) = -\frac{e^{-(1+\sqrt{3})t}}{6+2\sqrt{3}}e^{\sqrt{3}t} - \frac{e^{t(\sqrt{3}-1)}}{6-2\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}t} = -\frac{e^{-t}}{6+2\sqrt{3}} - \frac{e^{-t}}{6-2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-e^{-t}(6 - \cancel{-2\sqrt{3}} + 6 + \cancel{2\sqrt{3}})}{6^2 - 4.3} = \frac{-e^{-t}.12}{36-12} = -\frac{e^{-t}}{2}$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0(t) + z(t) = c_1 e^{\sqrt{3}t} + c_2 e^{-\sqrt{3}t} - \frac{e^{-t}}{2}.$$