Примерен Изпит 3 по Диференциални Уравнения и Приложения

https://github.com/andy489/DEA

Име: .... Група: .... Ф. No: ....

Оценка: $2+\dfrac{N}{10}$**, където** N **е броя на точките.**

Задача 1. (5 т.) Колко решения има задачата?

	единствено решение	точно две решения	няма решение	безбройно много решения
$y(y')^2+2yy'-x=0$ $y(-3)=1$			X	
$x(y')^2-2xy'+y-x=0$ $y(1)=-1$		X		
$2y''-y'+5y=0$ $y(2)=2$				X
$y'-6xy-e^x=0$ $y(1)=5$	X			
$y''+\pi^2y=0$ $y'(0)=0,\ \ y(\pi)=0$	X			

1.)

$y(y')^2+2yy'-x=0 \Rightarrow F(x,y,z)=yz^2+2yz-x=0.$

$D_F(x,y)=y^2+xy=y(x+y);\ \ D(-3,1)=-2<0.$

$\Rightarrow$ точката (-3,1) не е нито обикновена нито особена и през нея минава нито едно решение на уравнението.

2.)

$x(y')^2-2xy'+y-x=0 \Rightarrow F(x,y,z)=xz^2-2xz+y-x=0.$

$D_F(x,y)=x^2-x(y-x)=x^2+x^2-xy=x(2x-y);\ \ D(1,-1)=3>0.$

$F'_z=2xz-2x$. Точките, в които дескриминантата на характеристичното уравнение е положителна ще имат два различни реални корена. Проверяваме дали не е особена:

$F(1,-1,z)=z^2-2z-2=0$ има 2 рал. реални корена $z_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$.

$F'_z(1,-1,z_{1,2})=2.1.(1\pm\sqrt{3})-2.1=\pm 2\sqrt{3}\neq 0 \Rightarrow$ точката (1,-1) е обикновена и през нея минават точно 2 решения на даденото уравнение.

3.)

Характеристично уравнение:

$$2\lambda^2-\lambda+5=0;\ \ D=1-4.2.5=-39;\ \ \lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{-39}}{4}=\frac{1}{4}\pm i\sqrt{39}.$$

ФСР:= $\{e^{\frac{1}{4}x}cos(x\sqrt{39}), e^{\frac{1}{4}x}sin(x\sqrt{39})\}$. Общото решение е
$y(x) = c_1e^{\frac{1}{4}x}cos(x\sqrt{39}) + c_2e^{\frac{1}{4}x}sin(x\sqrt{39})$.
Имаме $y(2) = 2$ - едно начално условие и 2 степени на свобода (произволните константи c_1 и c_2) в общото решение, т.е. ще ги редуцираме на 1 степен на свобода, като изразим едната константа чрез другата от началното условие. Следователно имаме безбройно много решения.

4.)
Линейно диференциално уравнение от първи ред с начално условие $\Rightarrow$ задача на Коши. От теоремата за съществуване и единственост знаем, че това уравнение има единствено решение, там където са дефинирани коефициентите $a(x) = 6x$ и $b(x) = e^x$.

5.)
$y'' + \underbrace{\pi^2}_{a} y = 0;\ y'(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$. Задача на Щурм-Лиувил. Имаме нулевото решение. Ако a е от собствените стойности имаме безбройно много решения, ако не - имаме само нулевото. Собствените стойности имат вида:
$\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2 \overset{L=\pi}{=} (k)^2$, където $k \in \mathbb{N}$. Не съществува естествено число k, такова, че λ_k да е равно на π^2 (няма λ_k такова, което да е собствена стойност от спектъра на уравнението) $\Rightarrow$ имаме само нулевото решение.

Задача 2. (2 т.) Определете общото решение на уравнението $y'' - 4y' + 4y = 8$.

а) $e^{2x}(c_1 + c_2x)$ б) $e^{2x}(c_1 + c_2x) - 2$ в) $e^{2x}(1 + c_2x) + 2$
г) $e^{-2x}(c_1 + c_2x) + 2$ д) $e^{2x}(c_1 + c_2x) + 2$ е) $e^{2x}(c_1x + c_2x^2) + 2$,
където c_1 и c_2 са произволни реални константи.

Решение:

$y'' - 4y' + 4y = 8$. Характеристичния полином на хомогенната част на уравнението е $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0\ \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$
ФСР:= $\{e^{2x}, xe^{2x}\}$. Следователно $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} = e^{2x}(c_1 + xc_2)$ - общо решение. Остана да намерим кое е частното решение и да го добавим (съберем към общото).

$8 = f(x) = P_m(x)\,.\,e^{\gamma x} \Rightarrow m = 0, \gamma = 0$ - не е корен на характеристичния полином $\Rightarrow s = 0$, където $z(x) = x^s\,.\,Q_m(x)\,.\,e^{\gamma x} = c_3 = const.$ - частното решение.
$c_3'' - 4c_3' + 4c_3 = 8 \Rightarrow c_3 = 2$.

$y(x) =$ общо решение + частно решение = $e^{2x}(c_1 + xc_2) + 2$. Отговор д).

Задача 3. (2 т.) Определете решението на задачата на Дирихле за уравнението на топлопроводността

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx},\ 0 < x < 1,\ t > 0 \\ u|_{t=0} = sin(3\pi x),\ 0 \le x \le 1 \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=1} = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$$

а) $e^{-36\pi^2 t} cos(3\pi x)$ б) $e^{36\pi^2 t} sin(3\pi x)$ в) $e^{36\pi^2 t} cos(3\pi x)$
г) $e^{-36\pi^2 t} sin(3\pi x)$ д) $e^{-6\pi^2 t} sin(3\pi x)$ е) $e^{-6\pi^2 t} cos(3\pi x)$

Решение:

При $x = 0 : u|_{x=0} = 0 \Rightarrow$ а), в) и е) отпадат, тъй като $cos 0 = 1$.

От г), нека $u(x, t) = e^{-36\pi^2 t} sin(3\pi x);\quad u_t = -36\pi^2 . e^{-36\pi^2 t} sin(3\pi x)$.
$4u_{xx} = \left(4.3.e^{-36\pi^2 t} . cos(3\pi x)\right)' = 12e^{-36\pi^2 t}.3\pi . (-sin(3\pi x)) = -36\pi^2 . e^{-36\pi^2 t} sin(3\pi x) = u_t$
Следователно верния отговор е г).

Задача 4. (1 т.) Определете типа на уравнението

$$3u_{xx} - 9u_{xy} + 3u_{yy} - 2u_x + 2u_y + xu = 0.$$

а) смесен б) параболичен в) елиптичен г) хиперболичен

Решение:

$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + pu_x + qu_y + ru = 0.$
$b^2 - ac = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 1 > 0 \Rightarrow$ уравнението е хиперболично г).

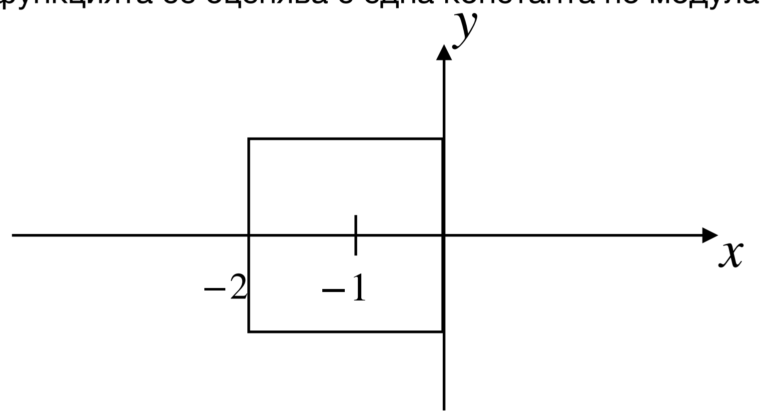
Задача 5. (5 т.) Приложете теоремата за съществуване и единственост на правоъгълника $\Pi := \{-2 \le x \le 0,\ -1 \le y \le 1\}$, за да намерите интервал, в който съществува решение на задачата на Коши

$$\begin{cases} y' = 3y^2 + \frac{1}{2}x^2 \\ y(-1) = 0 \end{cases}.$$

Решение:

Трябва да приложим теоремата за съществуване и единственост.
$f(x, y) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3y^2$. Първото изискване на теоремата, за да може да кажем, че съществува единствено решение е, тази функция да бъде непрекъсната. Очевидно тя е такава, не само в посочения правоъгълник, но дори и навсякъде $f \in C \backslash (\Pi)$.

Второто изискване на теоремата е f да е липсчицува по y (тоест каквито и две точки да вземем в правоъгълника с една и съща абсциса, модула на разликата между стойностите на функцията се оценява с една константа по модула на разликата от y -ците).



На лекции сме доказали, че ако f'_y е непрекъсната, тогава тя също ще бъде липшицова.
$f'_y = 6y \in C(\Pi) \Rightarrow f(x,y)$ е липшицова по y в Π. Тоест изпълнени са изискванията за теоремата за съществуване и единственост.
Съществува единствено решение на дадената задача на Коши, което е дефинирано поне в интервала $|x+1| \leq h$, където h по дефиниция е $h := (a, \frac{b}{M})$, където $a = 1$ и $b = 1$ са отклоненията на Π по x и y (половинките от дължините на правоъгълника), $M = \max_{\Pi} |f(x,y)|$.

$\Pi = \{ |x+1| \leq \underbrace{1}_{a}, |y-0| \leq \underbrace{1}_{b} \}$

Остана да намерим само M.

$f'_x = x = 0$; $f'_y = 6y = 0$. Кандидат за локален екстремум е точката $(0,0)$.
$f(0,0) = 0$. След което може да проверим по страните (периферията) на компакта като фиксирме едната променлива и направим уравнението да се мени само по другата променлива. Така ще е по-лесно изследването, но по-краткия път ще е да направим следното: $|f(x,y)| = \frac{1}{2}x^2 + 3y^2 \leq \frac{1}{2}.4 + 3.1 = 5$. Тази стойност се достига при $(x,y) = (-2,1)$.

$h = min\{1, \frac{1}{5}\} = \frac{1}{5}$; $-\frac{1}{5} \leq x \leq \frac{1}{5}$ или $-\frac{6}{5} \leq x \leq -\frac{4}{5}$.

Задача 6. Дадено е уравнението:

$$y''' - 2y'' + 2y' = 0.$$

а) Намерете общото решение на уравнението (4 т.)
б) Намерете всички периодични решения на уравнението (4 т.)

Решение:

Характеристичен полином:
а) $P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = \lambda((\lambda - 1)^2 + 1)$
Корените на $P(\lambda) = 0$ са $\lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = 1 \pm i$;
ФСР:= $\{1, e^x cos(x), e^x sin(x)\}$;
Общо решение: $y(x) = c_1 + c_2 . e^x cosx + c_3 e^x sinx$;
б) $sinx$ и $cosx$ са периодични функции, но умножени по e^x - вече не са.
Следователно само c_1 е периодична и трябва да изберем $c_2 = c_3 = 0$.
Следователно само $y = c_1$ е периодично решение, където c_1 е произв. константа.

Задача 7. Дадена е системата

$$f(0,0) = 0 \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + y + y^2 \end{cases}$$

а) Намерете равновесните точки на системата. (2 т.)
б) Напишете линейното приближение на системата в околност на всяка една равновесна точка. (4 т.)
в) Изследвайте относно устойчивост равновесните точки на дадената система (5 т.)

Решение:

а) Равновесните точки са там където скоростите се зануляват, т.е. десните страни на системата са 0.

$\begin{cases} -x = 0 \\ x + y + y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y(1 + y) = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$ или $y = -1$.

Равновесни точки са $(0,0)$ и $(0, -1)$.

б) $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Ja(a, b) \begin{pmatrix} x - a \\ x - b \end{pmatrix}$, където $Ja(a, b)$ е Якобианът на системата в точката (a, b).

$f = -x, \quad g = x + y + y^2$

$Ja(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) & f'_y(x, y) \\ g'_x(x, y) & g'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2y + 1 \end{pmatrix}$;

$Ja(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$ - линейно приближение в равновесната точка (0,0).

$$Ja(0,-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = x - y + 1 \end{cases}$$ -

линейно приближение в равновесната точка (0,-1).

в)

- Ако всички собствени стойности на Якобиана в равновесната точка са с отрицателна реална част, то точката е асимптотично устойчива.
- Ако съществува поне една собствена стойност на Якобиана в равновесната точка, която е с положителна реална част, тогава точката е неустойчива.

$$(0,0) : det|Ja(0,0) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -1 + \lambda^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 1 \Rightarrow$$

равновесната точка (0,0) е неустойчива.

$$(0,1) : det|Ja(0,1) - E\,.\,\lambda| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1+\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 < 0 \Rightarrow$$

равновесната точка (0,1) е асимптотично устойчива.

Задача 8. (6 т.) Решете задачата на Коши за уравнението на струната

$$\begin{cases} u_{tt} = \pi^2 u_{xx}, \ \ x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = cos x, \quad u_t(x,0) = -2, \quad x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Решение:

От формулата на Даламбер:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds\,.$$

Имаме, че $\varphi(x) = cos x$; $\psi(x) = -2$ и $a = \pi$. Следователно

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[cos(x-\pi t) + cos(x+\pi t)] + \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi t}^{x+\pi t} -2ds =$$

$$= sin x\,.\,cos(\pi t) - \frac{1}{\pi}(x + \pi t - x + \pi t) = sin x\,.\,cos(\pi t) - 2t.$$