Задача на Коши за уравнението на струната. Формула на Даламбер. Метод на отраженията.

11.1. Движение на неограничена струна. Формула на Даламбер.

Разглеждаме идеално гъвкава, неразтеглива струна, разположена по оста Ox. Нека с u(x,t) означим отклонението в точката x на струната от равновесното й положение. Ако струната е пусната да се движи в някакъв момент t=0 чрез придръпване до положение φ(x), с начална скорост ψ(x) и след това е оставена без външно въздействие. Тя ще се движи във вертикална равнина, при условие че съпротивлението на средата е пренебрегнато. Така достигаме до следната задача на Коши:

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in R, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x \in R,$$

където a = const. >0 е скоростта, с която малки смущения се придвижват по струната, $\varphi(x) \in C^2(R)$, $\psi(x) \in C^1(R)$.

При направените предположения задачата има единствено решение

$u \in C^2(R \times [0, +\infty))$, което се дава с формулата на Даламбер

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x-at) + \varphi(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(s)ds.$$

- интегриране

- символно: int(sym('string’)) и int(sym(‘string’),a,b)

Да се пресметне символно $\int_0^1 x^2 \, dx$

syms x

int(x.^2,0,1)

а неопределният интеграл се смята с int (x.^2)

- числено quad и trapz, с дефинирана функция f(x)

Да се пресметне числено $\int_0^1 x^2 \, dx$

function integration

I=quad(@ff,0,1)

x=0:1/100:1;

T=trapz(x,ff(x))

function z=ff(x)

z=x.^2;

end

или направо x=0:0.01:1; trapz(x,x.^2)

Зад 1. Да се направи анимация на движението на частта $C \coloneqq \{-1 \le x \le 4\}$ от неограничена струна за време $t \in [0,6]$, ако

a) $a = 1/2,\ \varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in R\setminus[1,2] \end{cases}$, ψ(x)=0.
b) $a = 1/10$ и същите начални условия,
c) a=1/2, φ (x) от подточка (a) и $\psi(x) = \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$
d) Да се начертаят графиките от направената анимация в три различни момента от движението на струната

```
function stringdalambert1

clf
tmax=6;
t=linspace(0,tmax);
xmin=-1;xmax=4;
x=linspace(xmin,xmax);
  function y=phi(x)
    for i=1:length(x)
        if x(i)>=1 && x(i)<=2
           y(i)=sin(pi*x(i))^4;
        else
           y(i)=0;
        end
    end
  end

       function y=psi(x)
       y=0*x;
       %y=sin(3*pi*x)/2;
       end

   function y=dalambert(x,t)
       a=1/2;%1/10;
        for j=1:length(x)
```

```
          if t==0
          integral=0;
          else
          s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
          integral=trapz(s,psi(s));
          end
        y(j)=(phi(x(j)-a*t)+phi(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
        end
    end

     for k=1:length(t)
     plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
     axis ([xmin,xmax,-1.05,1.05])
     daspect([1,1,1])
     grid on
     xlabel('x')
     ylabel('u(x,t)')
     M=getframe;
     End
subplot(3,1,1)
plot(x,dalambert(x,t(1)),'r','Linewidth',2)
hold on
subplot(3,1,2)
plot(x,dalambert(x,3),'r','Linewidth',2)
hold on
subplot(3,1,3)
plot(x,dalambert(x,5),'r','Linewidth',2)
hold on


%movie(M,2)
     end
```

11.2. Движение на полуограничена струна. Метод на отраженията.

Ще разглеадаме движението на полуограничена струна със закрепен или свободен ляв край - точката с абсциса x=0.

- Нека левият край е фиксиран. Движението на такава струна се описва със следната смесена задача.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), \qquad x > 0,$$
$$u(0,t) = 0, t > 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(x) \in C^2([0,\infty))$, $\psi(x) \in C^1([0,\infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi(0) = \varphi''(0) = \psi(0) = 0$.

Продължаваме нечетно функциите φ и ψ до функции φ_odd и ψ_odd и получаваме задача на Коши за неограничена стурна с начални данни φ_odd и ψ_odd, която решихме в 10.1.

Ако u_odd е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в {x>0, t>0} е решение на задачата за полуограничената струна с фиксиран ляв край. Ще припомним, че нечетно продължение на функция f(x) е

$$f\_odd(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

- По аналогичен начин се разсъждава, ако левия край на струната е свободен. Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача.

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx} = 0, \qquad x > 0, t > 0,$$
$$u(x,0) = \varphi(\mathrm{x}), u_t(\mathrm{x},0) = \psi(\mathrm{x}), \qquad x > 0,$$
$$u_x(0,t) = 0, t > 0,$$

където a = const. >0, $\varphi(\mathrm{x}) \in C^2([0,\infty))$, $\psi(\mathrm{x}) \in C^1([0,\infty))$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0$.

Продължаваме четно функциите φ и ψ до функции φ_even и ψ_even и получаваме задача на Коши за неограничена стурна с начални данни φ_even и ψ_even, която решихме в 10.1. Ако u_even е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в {x>0, t>0} е решение на задачата за полуограничената струна със свободенляв край. Ще припомним, че четно продължение на функция f(x) е

$$f\_even(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Зад. 2. Да се моделира трептенето на частта $C \coloneqq \{0 \leq x \leq 6\}$ от полуограничена струна с фиксиран или свободен ляв край за време $t \in [0,8]$, ако

a) $a = 1/2,\ \varphi(x) = \begin{cases} \sin^4 x, & x \in [1,2] \\ 0, & x \in [0,1] \cup [2,+\infty) \end{cases}$, ψ(x)=0.
b) $a = 1/10$ и същите начални условия,
c) a=1/2, φ (x) от подточка (a) и $\psi(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}\sin(3\pi x)$ (ψ(x)=cos(5πx/12)/2 в случая на свободен ляв край)

Може да се редактира кода от зад 1. До следния

```
function stringdalamber2
clear
tmax=8;
t=linspace(0,tmax,200);
xmax=6;
x=linspace(0,xmax);

        function y=phi(x)
             for i=1:length(x)
                   if x(i)>=1 && x(i)<=2
                      y(i)=sin(pi*x(i))^4;
```

```
                    else
                       y(i)=0;
                    end
              end
         end

          function y=psi(x)
          y=0.*x;
          %y=sin(3*pi*x)/2; y=cos(5*pix/12)/5 при свободен край
          end

    function y=phi_odd(x)%phi_even(x)
        if x>0  %(phi се извиква със скалар и тук може да се
проверри x>0)
           y=phi(x);
        else
           y=-phi(-x);
          %y=phi(-x);
        end
    end

        function y=psi_odd(x)%psi_even(x)
      for n=1:length(x)  %psi се извиква с вектор в trapz и
%затова проверяваме за всеки елемнет на вектора дали е
%положителен или не
            if x(n)>0
               y(n)=psi(x(n));
            else
               y(n)=-psi(-x(n));
            end
      end
        end

        function y=dalambert(x,t)
           a=1/2;%1/10;
              for j=1:length(x)
                 if t==0
                    integral=0;
                 else
                    s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
                    integral=trapz(s,psi_odd(s));
                 end
  y(j)=(phi_odd(x(j)-a*t)+phi_odd(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
              end
          end

     for k=1:length(t)
     clf
     hold on
     plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
     plot(0,0,'ko','MarkerFaceColor',[0,0,0])
```

```
    axis ([0,xmax,-1.05,1.05])
    grid on
    daspect([1,1,1])
    xlabel('x')
    ylabel('u(x,t)')
    M=getframe;
end
%movie(M,3)
    end
```

11.3 Движение на ограничена струна със свободни краища

Движението на такава струна се моделира със следната смесена задача

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ 0 < x < L,\ t > 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t|_{t=0} = \psi(x),\ 0 \le x \le L, \\ u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=L} = 0,\ t \ge 0, \end{cases} \tag{21}$$

където $\varphi(x) \in C^2[0, L]$, $\psi(x) \in C^1[0, L]$ и са изпълнени условията за съгласуване $\varphi'(0) = \psi'(0) = 0,\ \varphi'(L) = \psi'(L) = 0.$

Продължаваме четно функциите φ и ψ до функции φ_even и ψ_even в интервала [-L,L] по формулата

$$f\_even(x) = \begin{cases} f(x), & x \ge 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$$

Продължаваме функциите φ_even и ψ_even 2L периодично върху цялата реална права до функции φ_prod и ψ_prod по правилото:

$$f_{prod}(x) = \begin{cases} f(x-2L), & x > L \\ f(x+2L), & x < -L \\ f(x), & -L \le x \le L. \end{cases}$$

Решаваме задача на Коши за неограничена стурна с начални данни φ_prod и ψ_prod, която решихме в 10.1. Ако u_prod е решението на получената задача на Коши, то неговата рестрикция в {-L<x<L, t>0} е решение на задачата за ограничената струна със свободни краища.

Следният примерен код визуализира движението на такава струна с начални данни phi(x) и psi(x) от зад. 1 а. и L=4.

function Dalamber2free

```
clf

tmax=20;

t=linspace(0,tmax);

xmin=0;L=4;

x=linspace(xmin,L);

 function y=phi(x)
            for i=1:length(x)
                  if x(i)>=1 && x(i)<=2
                     y(i)=sin(pi*x(i))^4;
                  else
                     y(i)=0;
                  end
            end
       end


   function y=psi(x)

   y=0*x;

   end




 function y=phi_even(x)

   if x>0

     y=phi(x);

   else

     y=phi(-x);

   end

 end

      function y=psi_even(x)

         for n=1:length(x)

            if x(n)>0

            y(n)=psi(x(n));
```

```
                else
                y(n)=psi(-x(n));
                end
            end
        end

function y=phi_period(x)
    if x > L
        y=phi_even(x-2*L);
    elseif  x < -L
        y=phi_even(x+2*L);
    else y= phi_even(x);
    end
end

function y=psi_period(x)
    for m=1:length(x)
     if x(m) > L
        y(m)=psi_even(x(m)-2*L);
    elseif  x(m) < -L
        y(m)=psi_even(x(m)+2*L);
    else y(m)= psi_even(x(m));
     end
    end
end

function y=dalambert(x,t)
```

```
     a=1/2;
      for j=1:length(x)
        if t==0
        integral=0;
        else
        s=linspace(x(j)-a*t,x(j)+a*t);
        integral=trapz(s,psi_period(s));
        end
      y(j)=(phi_period(x(j)-a*t)+phi_period(x(j)+a*t))/2+integral/(2*a);
      end
  end

   for k=1:length(t)
   plot(x,dalambert(x,t(k)),'r','Linewidth',2)
   axis ([xmin,L,-0.2,0.2])
   title('Vibration of a Semi-infinite String')
   grid on
   xlabel('x')
   ylabel('u(x,t)')
   M=getframe;
   end
subplot(3,1,1)
plot(x,dalambert(x,t(1)),'r','Linewidth',2)
title('Vibration of a Sefinite String')
xlabel('x')
   ylabel('u(x,0)')
```

```
subplot(3,1,2)

plot(x,dalambert(x,2),'r','Linewidth',2)

xlabel('x')

    ylabel('u(x,2)')


subplot(3,1,3)

plot(x,dalambert(x,5),'r','Linewidth',2)

xlabel('x')

    ylabel('u(x,5)')

end
```