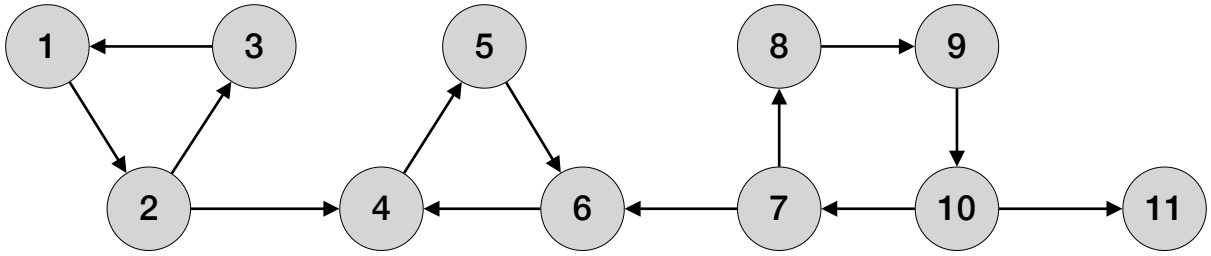
Алгоритъм на Kosaraju-Sharir за силно свързани компоненти (в насочен граф)



Силно свързана компонента е такава компонента, в която всеки връх в компонентата е достижим от всеки друг връх в нея. На фигурата по-горе имаме 4 различни компоненти на свързаност. Например {1, 2, 3} :

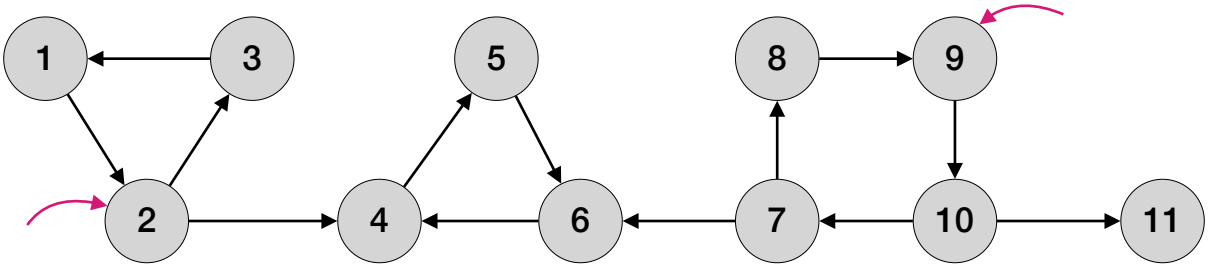
- 1 е достижим връх от 2 и 3
- 2 е достижим връх от 3 и 1
- 3 е достижим връх от 1 и 2

Аналогично {4, 5, 6} и {11} са силно свързани компоненти.

Приложения: например в инстаграм – социална мрежа наподобяваща фейсбук с фундаменталната разлика, че всеки потребител е представен като връх в насочен граф (докато във фейсбук всеки потребител е връх от ненасочен граф). Инстаграм може да използва този алгоритъм, за да намери всички силно свързани компоненти (групи) от потребители и да търси в тях общ интерес или каквото и да е в тази компонента. Друго приложение е това което сме използвали в задачата за летищните връзки – за компресация на граф. Компресирания граф се нарича още **фактор граф** на оригиналния граф (quotient graph). Фактор графът решава редица разади, като позволява да работим върху по-опростена версия на оригиналния граф, предоставяща ни по-малко, но по съществени (лишени от шум) данни.

Има няколко алгоритъма, които намират силно свързани компоненти и един от тях е този на Kosaraju-Sharir. Този алгоритъм минава през графа 2 пъти.

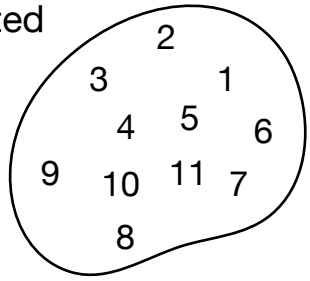
- Първо обхождане:
  Обхождаме графа в дълбоична (dfs) започвайки от непосетен връх и нареждаме върховете на графа според момента на последното им посещаване в намаляващ ред (в момента, в който всички съседи на текущия връх са посетени – излизаме от него и го добавяме в стека). Ще имаме нужда и от множество visited, до което ще се допитваме, когато искаме да разберем дали даден връх е посетен.
- Обръщане на посоката на ребрата:
  Обръщаме ребрата на насочения граф и създаваме нов списък на съседства. Това може да стане успоредно с действията в първото обхождане (но може и да е като отделно обхождане – повишаването на скритата константа от 2 към 3 не оказва влияние на общата асимптотична времева сложност на алгоритъма).
- Второ обхождане:
  Докато има връх на графа в стека – взимаме го и ако не е посетен пускаме dfs от него и на всеки връх обходен от това dfs ще му бъде прикачен представител от съответната компонента на свързаност (именно текущия връх).

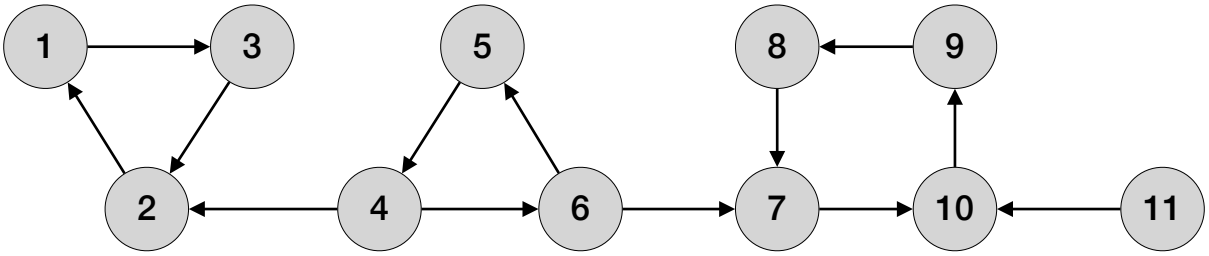


original graph

stack by finish time
9
10
7
8
11
2
4
5
6
3
1

visited

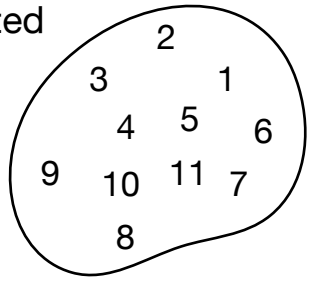




reversed graph

stack by finish time
~~9~~
~~10~~
~~7~~
~~8~~
~~11~~
~~2~~
~~4~~
~~5~~
~~6~~
~~3~~
~~1~~

visited



Силно свързани компоненти:

⊕ **9, 8, 7, 10 – първа**

⊕ **11 – втора**

⊕ **2, 1, 3 – трета**

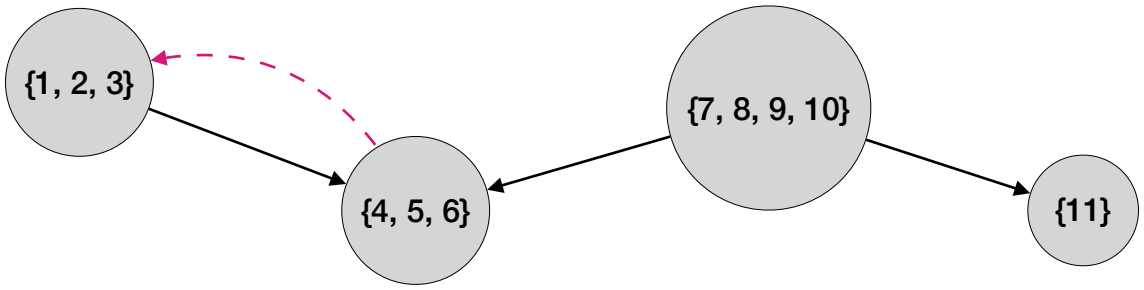
⊕ **4, 5, 6 – четвърта**

Нека анализираме времевата сложност и сложността по памет. Първото обхождане в дълбочина отнема $O(|V| + |E|)$, колкото отнема и обръщането на посоките на ребрата на графа. Сложността по памет е от порядъка на $O(|V|)$.

Защо този алгоритъм работи?

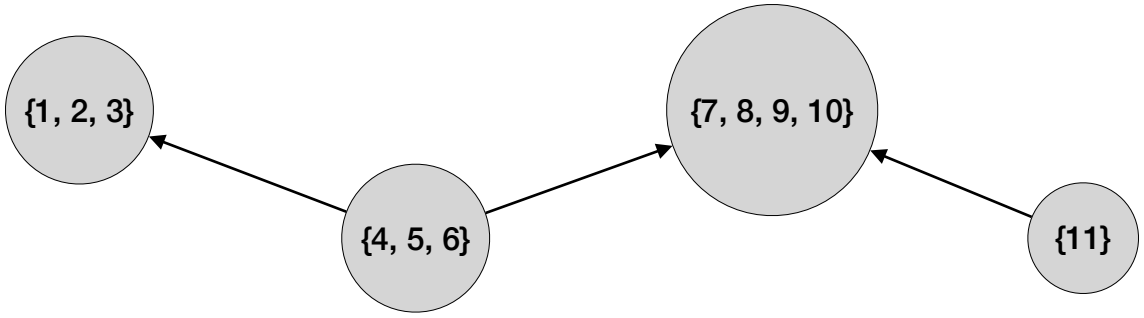
Ще разгледаме само интуицията зад него вместо чистото формалното математическо доказателство.

Нека компресираме силно свързаните компоненти по следния начин: всяка компонента ще заместим с отделен връх (представител). Нека разгледаме новополучения граф:



Резултатния граф граф след компресацията е гарантирано, че ще бъде ацикличен, защото, ако допуснем например, че има ребро от $\{4,5,6\}$ към $\{1,2,3\}$, то ще направи така, че двата върха да участват в една компонента на свързаност, което е противоречие с допускането, че всяка силно свързана компонента е компресирана.

В dfs-то правим следното: когато всички деца на текущия връх са обходени, тогава добавяме текущия връх в стека. Тогава наличието на ребро от $\{1,2,3\}$ към $\{4,5,6\}$ ще гарантира, че поне един връх от първата компонента на свързаност ще бъде добавен в стека след като всички върхове от втората компонента на свързаност вече са добавени в стека.



Обръщането на ребрата не променя абсолютно нищо в силно свързаните компоненти, което да касае алгоритъма. В тях всеки връх ще продължава да е достижим от всички останали върхове в компонентата. **Но мостовете между различните компоненти ще са сменили посоките си сега**. Тоест благодарение на стека ще си гарантираме, че поне по един връх от двете горни компоненти на фигурата ще е избран преди всички върхове от двете долни компоненти и след избирането му ще обходим цялата компонента.