РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ВАРИАНТ 1

1. Подредете функциите по порядък: $5n^3.8^n$, $3n^2.9^n$, $\log^{12} n$, 2^{3^n}, 2^{n^3}.

Отговор: $\log^{12} n \prec 5n^3.8^n \prec 3n^2.9^n \prec 2^{n^3} \prec 2^{3^n}$. .

Упътване: Първото и второто неравенство се доказват с помощта на граница на частното (прилага се и теоремата на Лопитал). Третото и четвъртото неравенство се доказват с логаритмуване.

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n) = 2T\left(\dfrac{n}{\sqrt{2}}\right) + 8n$; $T(n) = 64T\left(\dfrac{n}{4}\right) + 100\,n^3$; $T(n) = 32T\left(\dfrac{n}{2}\right) + 5^n$.

Отг. $T(n) = \Theta\left(n^2\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^3 \log n\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(5^n\right)$.

Упътване: И трите уравнения се решават с помощта на различните случаи на мастър-теоремата.

3. $T(n) = 10T(n-1) - 21T(n-2) + 9n^2 5^n$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(7^n\right)$.

$T(n) = T(n-1) + \sqrt[3]{n}$ **Отговор:** $T(n) = \Theta\left(n^{4/3}\right)$.

Решение:

Уравнението $T(n) = 10T(n-1) - 21T(n-2) + 9n^2 5^n$ е линейно-рекурентно и се решава с помощта на характеристичното уравнение $x^n = 10x^{n-1} - 21x^{n-2}$, което при $x \neq 0$ е равносилно на $x^2 - 10x + 21 = 0$ с корени 3 и 7. Те заедно с три петици от свободния член образуват мултимножество: $\{\ 7\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 5\ ;\ 5\ \}_{\text{М}}$.
От това мултимножество се получава общото решение на уравнението:
$T(n) = C_1 7^n + C_2 3^n + C_3 5^n + C_4 n\, 5^n + C_5\, n^2 5^n \asymp 7^n$.

Уравнението $T(n) = T(n-1) + \sqrt[3]{n}$ не може да се реши чрез характеристично уравнение заради дробната степен на свободния член. Вместо това се прилага развиване: $T(n) = T(n-1) + n^{1/3} = T(n-2) + (n-1)^{1/3} + n^{1/3} = \ldots =$

$= T(0) + 1^{1/3} + 2^{1/3} + \ldots + (n-1)^{1/3} + n^{1/3} \asymp n^{4/3}$.

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** $(\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[n]})^2$.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла:

Отг. $\mathtt{s} = (\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[k-1]})^2$.

```
Alg(A[1...n]: array of integers): integer
s ← 0
for k ← 1 to n
    s ← s + A[k] * A[k]
return s
```

Доказателство на инвариантата: чрез индукция.

База: При $\mathtt{k} = 1$ сумата е нула, защото е празна (не съдържа събираеми); `s` също е нула (начална стойност). Затова равенството е в сила (0 = 0).

Поддръжка: Нека $\mathtt{s} = (\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[k-1]})^2$ при някоя от проверките за край на цикъла и нека $\mathtt{k} \leq \mathtt{n}$. Тялото на цикъла ще се изпълни още веднъж и `s` ще получи стойност $(\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[k]})^2$. След това `k` се увеличава с единица и `s` (без да променя стойността си) променя своя запис: тъй като старото `k` е равно на новото `k` минус единица, то $\mathtt{s} = (\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[k-1]})^2$, което трябваше да се докаже.

Доказателство за върнатата стойност: Цикълът завършва при $\mathtt{k} = \mathtt{n} + 1$ и алгоритъмът връща текущата стойност на `s`, която (според току-що доказаната инварианта) е равна на $(\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[k-1]})^2 =$

$= (\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[n+1-1]})^2 = (\mathtt{A[1]})^2 + \mathtt{...} + (\mathtt{A[n]})^2$.

ВАРИАНТ 2

1. Подредете по порядък: $n^{12}.\log^{25} n$, $(2n)!$, 17^n, $n^{19}.\log^{21} n$, $\sqrt{n}$.

Отговор: $\sqrt{n} \prec n^{12}.\log^{25} n \prec n^{19}.\log^{21} n \prec 17^n \prec (2n)!$

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n)=81T\left(\frac{n}{3}\right)+28n$; $\quad T(n)=36T\left(\frac{n}{6}\right)+5n^3$; $\quad T(n)=64T\left(\frac{n}{4}\right)+n^3$.

Отг. $T(n)=\Theta\left(n^4\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^3\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^3 \log n\right)$.

3. $T(n)=11T(n-1)-18T(n-2)+4n\ 15^n$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n\,.15^n\right)$.

$T(n)=T(n-1)+n^{9/31}$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n^{40/31}\right)$.

ВАРИАНТ 3

1. Подредете функциите по порядък: 5^{2n} , 8^n , $\log^{2015} n$, n^6, $\sqrt{n^{15}}$.

Отговор: $\log^{2015} n \prec n^6 \prec \sqrt{n^{15}} \prec 8^n \prec 5^{2n}$.

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n)=3T\left(\frac{n}{\sqrt{3}}\right)+n^2$; $\quad T(n)=64T\left(\frac{n}{4}\right)+\log(3n)$; $\quad T(n)=15T\left(\frac{n}{5}\right)+n!$.

Отг. $T(n)=\Theta\left(n^2 \log n\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n^3\right)$. **Отг.** $T(n)=\Theta\left(n!\right)$.

3. $T(n)=7T(n-1)-6T(n-2)+8^n$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(8^n\right)$.

$T(n)=T(n-1)+\sqrt[5]{n}$ **Отговор:** $T(n)=\Theta\left(n^{6/5}\right)$.

ВАРИАНТ 4

1. Подредете функциите по порядък: 3^{n^2}, 5^n, n^{4n}, $\log^6 n$, n^5.

Отговор: $\log^6 n \prec n^5 \prec 5^n \prec n^{4n} \prec 3^{n^2}$.

2. Решете рекурентните уравнения:

$T(n) = 1000T\left(\frac{n}{10}\right) + n^3$; $T(n) = 5T\left(\frac{n}{3}\right) + \log\log n$; $T(n) = 6T\left(\frac{n}{19}\right) + n^n$.

Отг. $T(n) = \Theta\left(n^3 \log n\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^{\log_3 5}\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^n\right)$.

3. $T(n) = 9T(n-1) - 20T(n-2) + 8n^3 2^n$; $T(n) = T(n-1) + n^{3/7}$.

Отг. $T(n) = \Theta\left(5^n\right)$. **Отг.** $T(n) = \Theta\left(n^{10/7}\right)$.

ВАРИАНТИ НА ЧЕТВЪРТАТА ЗАДАЧА

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** Индекса на първата нула**.**

Формулирайте използваема инварианта на цикъла:

Отг. $A[i] \neq 0\ ,\ \ \forall i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ \ldots\ ,\ k-1.$

```
Alg(A[1...n]: array of integers): integer
for k ← 1 to n
    if A[k] = 0
        return k
return  -1
```

---

4. Какво връща следният алгоритъм?

Отг. `true` $\Leftrightarrow$ всички елементи на масива са равни.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла:

Отг. $A[1] = A[2] = \ldots = A[k].$

```
Alg(A[1...n]: array of integers): boolean
for k ← 1 to n-1
    if A[k] ≠ A[k+1]
        return false
return true
```

---

4. Какво връща следният алгоритъм? **Отг.** Най-малката стойност в масива.

Формулирайте използваема инварианта на цикъла:

Отг. $s = \min \left\{ A[1]\ ,\ \ldots\ ,\ A[k-1] \right\}.$

```
Alg(A[1...n]: array of integers): integer
s ← A[1]
for k ← 2 to n
    if A[k] < s
        s ← A[k]
return s
```