B. Maximum of Maximums of Minimums

https://codeforces.com/contest/872/problem/B

Пояснения на алгоритъма за решаване на задачата

Нека направим нещо като идукция по входната променлива k, която съхранява броя на подсегментите или както ще наричаме долу – парчетата, на които ще разделим входния масив.

1) За $k = 1$ единственото парче на което може да разделим масива е целия масив. Тоест отговора ще бъде минималния елемент от масива, тъй като масива ще бъде единствения подсегмент.

2) За $k = 2$ искаме да разделим масива на 2 парчета и да вземем максималния минимум от двете части. По колко начина може да разделим масива на две парчета? Ако масива е от n елемента, то начините, по които може да го разделим на две парчета са точно $n - 1$. Нека кръстим парчертата *ляво* и *дясно*. За всяко ляво парче ще знаем че започва от първия елемент на масива, а за всяко дясно - че завършва на последния елемент от масива. Ако края на ляво парче е a_x, $x \in \overline{1, n-1}$ то началото на съответстващото му дясно парче ще е a_{x+1}.

   Може да построим разредена таблица (*sparse table*), която ще ни подсигури преизчисляването на минимума на всеки такъв създаден интервал за константно време. Времето необходимо за построяването на такава таблица ще е $O(n \times log(n))$, но забележете, че то ще е необходимо само в случая когато $k = 2$.

3) За $k = 3$ винаги ще може да отделим максималния елемент от масива в отделен интервал. По-този начин максималния елемент от масива ще е желания отговор.

Нека разгледаме по-подробно случая в който $k = 2$. Може ли да докажем, че при $k = 2$, отговора ще е винаги a_1 или a_n $\left(max\{a[0], a[n-1]\} \right)$ в зависимост от това кой елемент е по-голям (максималния от първия и последния елемент на масива)?

Искаме да разделим масива на две части, така че минимума от двете части да е максимален. Имаме $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\}$.

Нека a_1 е максималния елемент на масива, тогава може да разделим масива по следния начин: $\{a_1\}, \{a_2, \ldots, a_n\}$ и аналогично ако a_n е максималния елемент на масива, то деленето на две части, което що доведе до искания отговор ще бъде $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\}, \{a_n\}$.

Да допуснем, че максималния елемент е някъде измежду елементите $\{a_2, \ldots, a_{n-1}\}$, т.е. не е нито a_1, нито a_n. Тогава както и да разцепим масива, този максимален елемент ще бъде без значение, тъй като ще вземем по-малкия при разделянето на парчетата в случая a_1 или a_n. А пък ако някъде по пътя между крайните елементи и максималния елемент има по-малък елемент от съответния краен, то при разделянето на интервалите може да спрем непосредствено преди него и по-този начин да максимизираме минимума.

Така доказахме, че при $k = 2$ отговора ще е $max\{a_1, a_n\}$.