ДАА, У., 2021-10-05 г., Александър Каракушев

Означения:
n – брой елементи. $A[1...n]$ (индексирането започва от 1);
$T(n)$ – време за работа на даден алгоритъм (порядък на брой стъпки);
$M(n)$ – количество допълнителна памет използвана от съответния алгоритъм.

Производни:

$$\frac{\partial}{\partial x}[f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x > 0, \alpha \in \mathbb{R}$$
$$(a^x)' = a^x \ln(a), \qquad a > 0, a \neq 1$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln(a)}, \qquad (\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

Правило на Лопитал:

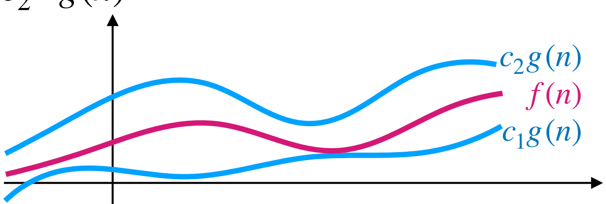
За функциите f и g, които са диференцируеми в отворен интервал I, с евентуално изключение в точката c, която с съдържа в I е изпълнено, че:
Ако $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ или $\pm\infty$ и $g'(x) \neq 0$ за всяко $x \in I, x \neq c$ и $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ съществува, тогава $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Пример: $\quad f(x) = 2^n, g(x) = n^2.$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{n^2} \overset{\text{Л.}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2 \times 2^n}{2n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2 2 \times 2^n}{2} = \infty,$$ следователно $f(x) \succ g(x)$.

Дефиниции:

1. Ще казваме, че две функции $f(x)$ и $g(x)$ са равни по порядък и ще бележим с $f(x) \asymp g(x)$, ако $\exists c_1 > 0,\ \exists c_2 > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N} \land n \geq n_0$ е изпълнено $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$



2. Ще казваме, че функцията $f(x)$ е асимптотично по-малка от функцията $g(x)$ и ще бележим с $f(n) \preceq g(n)$ или $f(n) = O\left(g(n)\right) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$ е изпълнено $f(n) \leq c \cdot g(n)$

3. $f(n) \succeq g(n)$ или $f(n) = \Omega\left(g(n)\right) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 : f(n) \geq c \cdot g(n)$

4. $f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow f(n) = O\left(g(n)\right) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ е изпълнено, че $f(n) < c \cdot g(n)$

5. $f(n) \succ g(n) \Leftrightarrow f(n) = O\left(g(n)\right) \overset{def.}{\Leftrightarrow} \exists c > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0$ е изпълнено, че $f(n) > c \cdot g(n)$

Пример: Докажете, че $\ln(n) \prec n^{0,00001}$.

Доказателство: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^{0,00001}} \overset{\text{Л.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{n^{0,00001-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{0,00001}} = 0.$

Следователно $\ln(n) \prec n^{0,00001}$ е изпълнено.

Пример: Докажете, че $n^2(6 + \sin(n)) \asymp n^2$.

$5n^2 \leq n^2(6 + \sin(n)) \leq 7n^2$, $c_1 = 5$, $c_2 = 7$ и $g(n) = n^2$. Верността на твърдението следва директно от дефиницията.

Имаме право да пренебрегваме:
- ограничени множества;
- събираеми от не най-висок порядък.

Теорема:
1) $f \asymp g \Rightarrow \log(f) \asymp \log(g)$
2) $f \prec g \Rightarrow$ не може да сравним асимптотично $\log(f)$ и $\log(g)$
3) $f \succ g \Rightarrow$ не може да сравним асимптотично $\log(f)$ и $\log(g)$
4) $\log(g) \prec \log(g) \Rightarrow f \prec g$
5) $\log(g) \succ \log(g) \Rightarrow f \succ g$
6) $\log(f) \asymp \log(g) \Rightarrow$ не може да сравним асимптотично f и g

Примери:

$\log(2n) \asymp \log(n)$, тъй като $2n \asymp n$, защото $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n} = const$.

$3^{n^5} \succ 5^{n^3}$, тъй като $n^5 \log(3) = \log(3^{n^5}) \succ \log(5^{n^3}) = n^3 \log(5)$, защото $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5 \log(3)}{n^3 \log(5)} = \infty$.

$$1 + 2 + \ldots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4};$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n} 2k - 1 = n^2.$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \asymp \int_{1}^{n} f(n) \mathrm{d}\, x$$

$$1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k \asymp \begin{cases} n^{k+1}, & \text{за } k > -1, \\ \log(n), & \text{за } k = -1, \\ 1, & \text{за } k < -1 \end{cases}$$

$$1^{10} + 2^{10} + \ldots + n^{10} = \sum_{k=1}^{n} k^{10} \asymp n^{11}$$

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{n} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \asymp n^{\frac{1}{2}+1} = n^{\frac{3}{2}}$$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \asymp n^{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{n}$$

$$1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{2}} = c_1 + c_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \asymp \log(n)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \ldots$$

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$$

Но $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots$, което расте неограничено и следователно и редицата $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ е разходяща.