

Курсова задача 62.

А.Стойков СИ 62369

Дадена е рекурентната редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където за всяко $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = F(a_n)$ и $a_1 = \lambda$.

a) Изследвайте за сходимост редицата $\{a_n\}$ в зависимост от λ ;

b) Напишете програма, която по зададен първи член връща отговор колко е границата и по зададени пет достатъчно големи индекса извежда съответните членове на редицата с добра точност;

$$62. F(x) = \frac{-2x - 9}{x^2 + 7x + 13}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Решение:

$$a) \quad a_{n+1} = \frac{-2a_n - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13}, a_1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

Ако допуснем, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има граница $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, то от

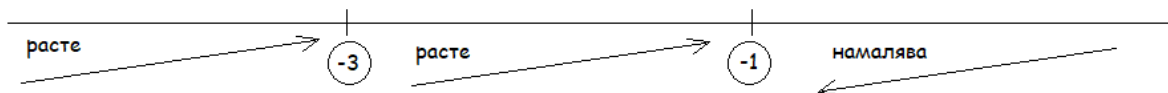
$$\text{границния преход: } l = \frac{-2l - 9}{l^2 + 7l + 13} \Leftrightarrow$$

$$l^3 + 7l^2 + 13l = -2l - 9 \Leftrightarrow l^3 + 7l^2 + 15l + 9 = 0 \Leftrightarrow l^3 + l^2 + 6l^2 + 6l + 9l + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2(l + 1) + 6l(l + 1) + 9(l + 1) = 0 \Leftrightarrow (l^2 + 6l + 9)(l + 1) = 0 \Leftrightarrow (l + 3)^2(l + 1) = 0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-(a_n + 1)(a_n + 3)^2}{a_n^2 + 7a_n + 13}$$

$$\text{sign}(a_{n+1} - a_n)$$



$$1.) \lambda \in (-1; \infty)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - (-1) &= \frac{-2a_n - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13} + 1 = \frac{-2a_n - 9 + a_n^2 + 7a_n + 13}{a_n^2 + 7a_n + 13} = \\ &= \frac{a_n^2 + 5a_n + 4}{a_n^2 + 7a_n + 13} = \frac{(a_n + 4)(a_n + 1)}{denom. > 0} \Rightarrow a_{n+1} > -1 \text{ и намалява, т.е.} \end{aligned}$$

(ограничена отдолу и намаляваща) $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

2.) $\lambda = -1$

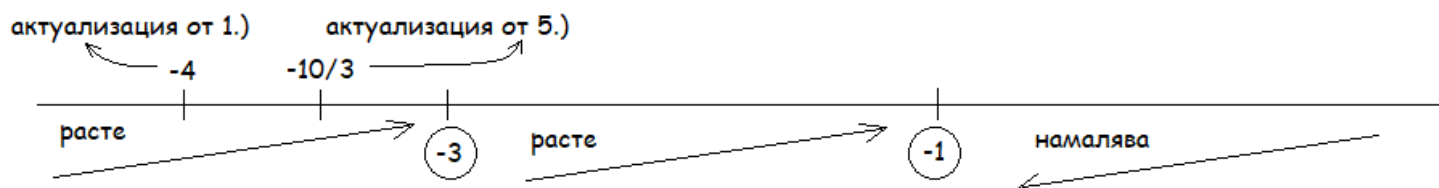
$$a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n = \dots = a_1 = -1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

3.) $\lambda \in (-3; -1)$

В този интервал редицата е растяща и съответно ще искаме да проверим дали ако сме взели първи член $a_1 = \lambda$ от този интервал, то за някое достатъчно голямо $n : a_n$ ще „прескочи“ кандидата за граница отлясно $n : -1$. Ако това не се случи, то тя ще е растяща и ограничена отгоре от $n : -1$, а ако това се случи, тя ще е намаляваща и ограничена отдолу, т.е. при всички възможни сценарии ще има граница $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

4.) $\lambda = -3$

$$a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n = \dots = a_1 = \lambda = -3 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3.$$



5.) $\lambda \in (-4; -3)$

В този интервал редицата е растяща и

$$a_{n+1} - (-3) = \frac{-2a_n - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13} + 3 = \frac{3a_n^2 + 19a_n + 30}{\text{denom.} > 0} = \frac{3(a_n + \frac{10}{3})(a_n + 3)}{\text{denom.} > 0}$$

$$5.1.) \lambda \in (\frac{-10}{3}; -3) : a_{n+1} - (-3) < 0 \text{ и } \{a_n\} \text{ е растяща } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3.$$

$$5.2.) \lambda = -\frac{10}{3} : a_{n+1} = -3 \stackrel{4.)}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -3$$

$$5.3.) \lambda \in (-4, -\frac{10}{3}) : a_{n+1} - (-3) > 0 \text{ и } \{a_n\} \text{ е растяща } \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1 \text{ от } 3.)$$

$$6.) \lambda = -4 : a_{n+1} = -1 \stackrel{2.)}{\Rightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$$

$$7.) \lambda \in (-\infty; -4) : a_{n+1} - (-3) > 0, \text{ т.е. прескача } -3 \text{ и } \{a_n\} \text{ е растяща} \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -1.$$

Окончательно :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} -1, & a_1 \in -\infty; -\frac{10}{3} \cup -3; \infty) \\ -3, & a_1 \in [-\frac{10}{3}; -3] \end{cases}$$

github.com/andy489