Курсова задача 62.

Дадена е рекурентната редица $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, където за всяко $n \in N, a_{n+1} = F(a_n)$ и $a_1 = \lambda$.
$a)$ Изследваите за сходимост редицата $\{a_n\}$ в зависимост от λ;
$b)$ Напишете програма, която по зададен първи член връща отговор колко е границата и по зададени пет достатъчно големи индекса извежда съответните членове на редицата с добра точност;

$\underline{62.}\ F(x) = \dfrac{-2x-9}{x^2+7x+13}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Решение:

$$a) \qquad a_{n+1} = \frac{-2a_n - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13}, a_1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

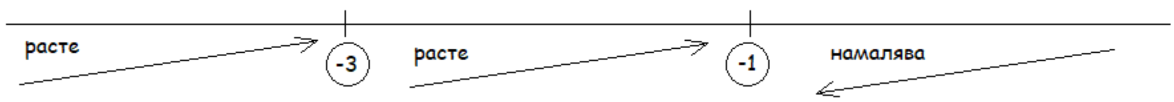
Ако допуснем, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има граница $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$, то от граничния преход: $l = \dfrac{-2l-9}{l^2+7l+13} \Leftrightarrow$

$$l^3 + 7l^2 + 13l = -2l - 9 \Leftrightarrow l^3 + 7l^2 + 15l + 9 = 0 \Leftrightarrow l^3 + l^2 + 6l^2 + 6l + 9l + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2(l+1) + 6l(l+1) + 9(l+1) = 0 \Leftrightarrow (l^2 + 6l + 9)(l+1) = 0 \Leftrightarrow (l+3)^2(l+1) = 0$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-(a_n+1)(a_n+3)^2}{a_n^2 + 7a_n + 13}$$

$$sign(a_{n+1} - a_n)$$



1.) $\lambda \in (-1; \infty)$

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{-2a_a - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13} + 1 = \frac{-2a_n - 9 + a_n^2 + 7a_n + 13}{a_n^2 + 7a_n + 13} =$$

$= \dfrac{a_n^2 + 5a_n + 4}{a_n^2 + 7_n + 13} = \dfrac{(a_n+4)(a_n+1)}{denom. > 0} \Rightarrow a_{n+1>-1}$ и намалява, т.е.

(*ограничена отдолу и намаляваща*) $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

2.) $\lambda = -1$

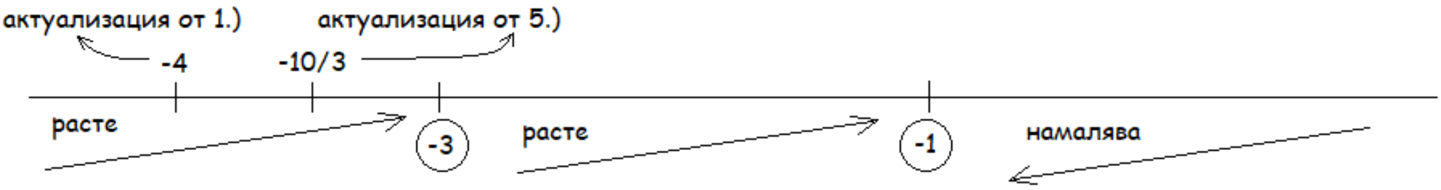
$a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n = \cdots = a_1 = -1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

3.) $\lambda \in (-3; -1)$

В този интервал редицата е растяща и съответно ще искаме да проверим дали ако сме взели първи член $a_1 = \lambda$ от този интервал, то за някое достатъчно голямо $n : a_n$ ще „прескочи“ кандидата за граница отдясно $n : -1$. Ако това не се случи, то тя ще е растяща и ограничена отгоре от $n : -1$, а ако това се случи, тя ще е намаляваща и ограничена отдолу, т.е. при всички възможни сценарии ще има граница $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

4.) $\lambda = -3$

$a_{n+1} - a_n = 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n = \cdots = a_1 = \lambda = -3 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$.



5.) $\lambda \in (-4; -3)$

В този интервал редицата е растяща и

$$a_{n+1} - (-3) = \frac{-2a_n - 9}{a_n^2 + 7a_n + 13} + 3 = \frac{3a_n^2 + 19a_n + 30}{denom. > 0} = \frac{3(a_n + \frac{10}{3})(a_n + 3)}{denom. > 0}$$

5.1.) $\lambda \in (\frac{-10}{3}; -3) : a_{n+1} - (-3) < 0$ и $\{a_n\}$ е растяща $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$.

5.2.) $\lambda = -\frac{10}{3} : a_{n+1} = -3 \overset{4.)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -3$

5.3.) $\lambda \in (-4, -\frac{10}{3}) : a_{n+1} - (-3) > 0$ и $\{a_n\}$ е растяща $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$ от *3.)*

6.) $\lambda = -4 : a_{n+1} = -1 \overset{2.)}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$

7.) $\lambda \in (-\infty; -4) : a_{n+1} - (-3) > 0$, т.е. прескача -3 и $\{a_n\}$ е растяща $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

Окончателно:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} -1, \, a_1 \in -\infty; -\frac{10}{3} \cup -3; \infty) \\ -3, \, a_1 \in [-\frac{10}{3}; -3] \end{cases}$$