Курсова задача 3а/62.
А.Стоев СИ 62369

Като използвате подходящо развитие в степенен ред на подинтегралната функция, пресметнете с точност $E = 10^{-4}$ определения интеграл:

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{ln(1+x^3)}{x} dx.$$

Решение:

От формулата на Маклорен знаем, че за
$|x| < 1 : ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

$$\Rightarrow \frac{ln(1+x^3)}{x} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.x^{3k}}{k}\right).\frac{1}{x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.x^{3k-1}}{k}.$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{ln(1+x^3)}{x} dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}.x^{3k-1}}{k} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{(-1)^{k-1}.x^{3k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.\frac{x^{3k}}{3k}\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k.3k.3^{3k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2.3^{3k+1}} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2.3^{3k+1}}}_{r_n(x)}.$$

Искаме $|r_n(x)| < 10^{-4}$. Следователно търсим такова n, за което е изпълнено:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2.3^{3k+1}}\right| < 10^{-4}. \text{ Но} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2.3^{3k+1}}\right| = |a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + \cdots| =$$

$$= |a_{n+1} - \underbrace{(a_{n+2} - a_{n+3})}_{>0} - \underbrace{(a_{n+4} - a_{n+5})}_{>0} - \cdots|, \text{ където}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2.3^{3n+1}}.$$

Тъй като редицата a_n е монотонна

$$\{a_n\} \searrow 0 \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2.3^{3k+1}} \right| < |a_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)^2.3^{3n+4}} < \frac{1}{10^4}.$$

$(n+1)^2.3^{3n+4} > 10^4$. За $n = 2 :\ 9.3^{10} = 531441 > 10\,000 \Rightarrow$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{ln(1+x^3)}{x} dx \sim \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4.3^7} = \frac{1}{81}\left(1 - \frac{1}{108}\right) = \frac{107}{81.108} = \underline{0{,}0122}31367....$$

github.com/andy489