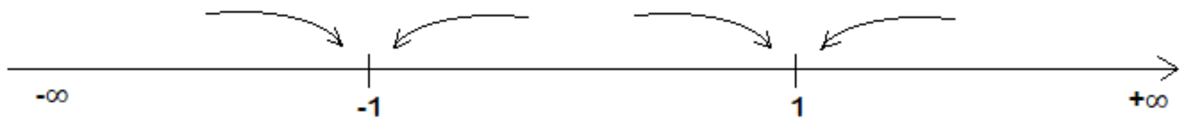
Курсова задача 2/62.
А.Стоев СИ 62369

62. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+|x+2|}}{1-|x|}$

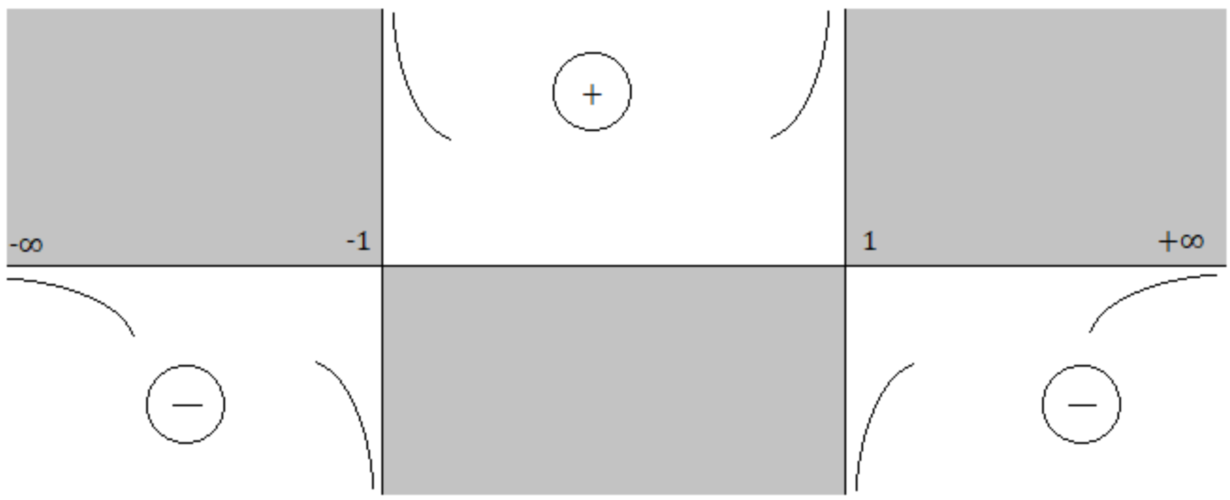
$a)$ Направете пълно изследване (включващо втора производна и допирателни във всяка *„специална“* точка (точка в която се нулира функцията, първата или втората производна + други));
$b)$ С помощта на графичен калкулатор по избор – постройте графиката на функцията, асимптотите и допирателните.

1. Дефиниционна област: denom. $1-|x| \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$:
$x \in (-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty)$



2. Четност, нечетност, периодичност:
$f(2) - = \sqrt{5}, f(-2) = -1, -f(2) = \sqrt{5} \Rightarrow f(x) \neq f(-x), f(-x) \neq -f(x)$ за $\forall x \Rightarrow$ функцията не е нито четна нито нечетна. Дори в интервала $(-1,1) : f(x_0 + x) \neq f(x_0 - x)$ за $\forall x \in (-1,1)$ и $x_0 = 0 \Rightarrow$ там няма осева симетрия. От това, че функцията е прекъсната на краен брой места $\{-1,1\}$ следва, че функцията не е и периодична.

3. Знак на $f(x)$ и поведение на $f(x)$ в краищата на дефиниционната област:



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+|x+2|}}{1-|x|} \sim \frac{\sqrt{x}}{-|x|} \sim -0.$$

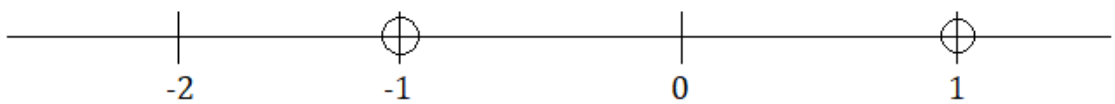
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{-0} \sim -\infty;$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{+0} \sim +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{+0} \sim +\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) \sim \frac{\sqrt{2}}{-0} \sim -\infty.$$

4. Асимптоти:
a) Наклонени: $y = kx + n$, където
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{1+|x+2|}}{x(1-|x|)} \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} \sim 0 \Rightarrow y = n.$$

$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ абсцисата е наклонена асимптота в $-\infty$ и $+\infty$.
b) От вече направените изчисления знаем, че съществуват две вертикални асимптоти: $g_1 : x - = 1$ и $g_2 : x = 1$.

5. Поведение на функцията $f(x)$ и екстремуми (знак на $f'(x)$):



$$\underline{x \in (-\infty, -2)} : f(x) = \frac{\sqrt{1-x-2}}{1+x} = \frac{1}{-\sqrt{-1-x}} = \frac{-1}{\sqrt{-(x+1)}}.$$

<img src="https://latex.codecogs.com/svg.latex?
$$f'(x) = \frac{(-1)'.\sqrt{-(x+1)} - (-1).(\sqrt{-(x+1)})'}{-(x+1)} = \frac{(-(x+1)^{\frac{1}{2}})'}{-(x+1)} = \frac{-1}{2(-x-1)^{\frac{3}{2}}} < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ е намаляваща в $(-\infty, -2)$.

$$\underline{x \in [-2, -1)} : f(x) = \frac{\sqrt{1+x+2}}{1-(-x)} = \frac{\sqrt{x+3}}{x+1}.$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+3})'.(x+1) - \sqrt{x+3}\,.(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{x+1}{\sqrt{x+3}} - \sqrt{x-3}}{(x+1)^2} =$$

$= \dfrac{x+1-2(x+3)}{2\sqrt{x+3}(x+1)^2} = \dfrac{-x-5}{2.\sqrt{x+3}(x+1)^2} < 0 \Rightarrow f(x)$ е намаляваща в $[-2,-1)$

$\underline{x \in (-1,0)}: f'(x) = \dfrac{-x-5}{2\sqrt{x+3}(x+1)^2} < 0 \Rightarrow f(x)$ е намаляваща в $(-1,0)$

$\underline{x \in [0,1)}: f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x+2}}{1-x} = \dfrac{\sqrt{x+3}}{1-x}$.

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x+3})'(1-x) - (\sqrt{x+3})(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{\frac{1-x}{2\sqrt{x+3}}\sqrt{x+3}}{(1-x)^2} =$$

$= \dfrac{1-x+2x+6}{2(1-x)^2\sqrt{x+3}} = \dfrac{x+7}{2(1-x)^2\sqrt{x+3}} > 0 \Rightarrow f(x)$ е растяща в $[0,1)$

$\underline{x \in (1,+\infty)}: f'(x) = \dfrac{x+7}{2(1-x)^2\sqrt{x+3}} > 0 \Rightarrow f(x)$ е растяща в $(1,+\infty)$.

6. Вдлъбнатост/изпъкналост на функцията $f(x)$ (знак на $f''(x)$):

$\underline{x \in (-\infty,-2)}: f''(x) = -\dfrac{1}{2}.\left(\dfrac{1}{(-x-1)^{\frac{3}{2}}}\right)' =$

$$-\frac{1}{2}.\left(\frac{-1'.(-x-1)^{\frac{3}{2}} - 1\left((-x-1)^{\frac{3}{2}}\right)'}{-(x+1)^3}\right) = -\frac{1}{2}.(-1).\frac{3}{2}\frac{(-x-1)^{\frac{3}{2}-1}.(-x-1)'}{-(x+1)^3} =$$

$= \dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{(-x-1)^{\frac{5}{2}}}(-1) = -\dfrac{3}{4}.\dfrac{1}{(-x-1)^{\frac{5}{2}}} < 0 \Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в $(-\infty,-2)$.

$\underline{x \in [-2,-1)}: f''(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-x-5}{\sqrt{x+3}(x+1)^2}\right)' =$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)\,.\sqrt{x+3}(x+1)^2+(x+5)\,.\,(\sqrt{x+3}(x+1)^2)'}{(x+3)(x+1)^4}=$$

$$=\frac{-\sqrt{x+3}(x+1)^2+(x+5)\left(\frac{(1+0)(x+1)^2}{2\sqrt{x+3}}+2(1+0)(x+1)\sqrt{x+3}\right)}{2(x+1)^4(x+3)}=$$

$=\dfrac{3x^2+30x+59}{4(x+1)^3\,.\,(x+3)^{\frac{3}{2}}}<0\Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в $[-2,-1)$.

$\underline{x\in(-1,0)}:f''(x)=\dfrac{3x^2+30x+59}{4(x+1)^3\,.\,(x+3)^{\frac{3}{2}}}>0\Rightarrow f(x)$ е изпъкнала в $(-1,0)$

$\underline{x\in[-0,1)}:f''(x)=\dfrac{(x+7)'.2(1-x)^2\sqrt{x+3}-2(x+7)\left((1-x)^2\sqrt{x+3}\right)'}{4(1-x)^4(x+3)}=$

$$=\frac{2(1-x)^2\sqrt{x+3}-2(x+7)\left(2(1-x)\,.\,(-1)+\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{x+3}}\right)}{4(1-x)^4(x+3)}=$$

$$=\frac{2(1-x)^2\sqrt{x+3}-(x+7)\left(\frac{-4(1-x)\sqrt{x+3}+(1-x)^2}{2\sqrt{x+3}}\right)}{4(1-x)^4\,.\,(x+3)}=$$

$$=\frac{(1-x)^2\sqrt{x+3}-(x+7)\left(-2(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{x+3}}\right)}{2(1-x)^4(x+3)}=$$

$=-\dfrac{3x^2+42X+83}{4(x-1)^3(x+3)^{\frac{3}{2}}}>0\Rightarrow f(x)$ е изпъкнала в интервала $[0,1)$

$\underline{x\in(1,+\infty)}:f''(x)=-\dfrac{3x^2+30x+59}{4(x+1)^3\,.\,(x+3)^{\frac{3}{2}}}<0\Rightarrow f(x)$ е вдлъбната в $(1,+\infty)$

7. „Специални“ точки и уравнение на допирателна във всяка от тях:

$f(0) = \sqrt{3}$ и 0 е инфлексна точка, тъй като $f'(x)$ сменя знака си в $x_0 = 0$.

Правата с уравнение $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ е допирателна към $\Gamma_{f(x)}$ в точката $\left(a, f(a)\right)$.

За $a = 0^-$, т.е. т.$(0^-, \sqrt{3})$ имаме (от т.5):

$$y = f(0) + \frac{-0-5}{2\sqrt{0+3}(0+1)^2}\,.\,(x-0) = \sqrt{3} - \frac{5}{2\sqrt{3}}x = \sqrt{3} - \frac{5\sqrt{3}}{6}x.$$ Аналогично

за $a = 0^+$, т.е. т.$(0^+, \sqrt{3})$:

$$y = f(0) + \frac{0+7}{2(1-0)^2\sqrt{0+3}}\,.\,(x-0) = \sqrt{3} + \frac{7}{2\sqrt{3}}x = \sqrt{3} + \frac{7\sqrt{3}}{6}x.$$

Въпреки, че $x_0 = -2$ не е инфлексна точка, може да я считаме за „специална“, защото в т.$(-2, -1), \Gamma_{f(x)}$ започва да намалява още по-бързо (сменя „скоростта/порядъка“ на намаляване).

За $a = -2^- : y = f(-2) + \dfrac{-1}{2(-(-2)-1)^{\frac{3}{2}}}\,.\,(x-(-2)) =$

$$= -1 - \frac{1}{2.1^{\frac{3}{2}}}\,.\,(x+2) = -\frac{x}{2} - 2.$$

$a = -2^+ : y = f(-2) + \dfrac{-(-2)-5}{2\sqrt{-2+3}(-2+1)^2}\,.\,(x-(-2)) =$

$$= -1 - \frac{3}{2\sqrt{1}(-1)^2}(x+2) = -1 - \frac{3x+6}{2} = -\frac{3}{2}x = 4.$$