

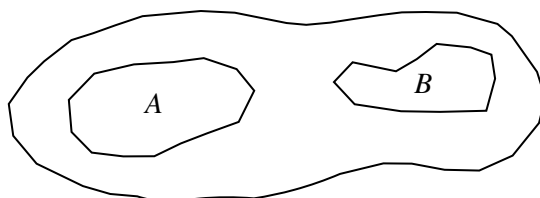
**Задача 39.** Нека  $n \geq 3$  и  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Да се намери броя на елементите на множеството  $T$ , където  $T$  е равно на:

- $\{(A, B) | A, B \subseteq U, A, B \in \rho(U)\}$ , където с  $\rho(X)$  бележим степенното множество на множеството  $X$ ;
- $\{(A, B) | A, B \subseteq U, |A| = 1\}$ ;
- $\{(A, B) | A, B \subseteq U, |A| = k, |B| = l; k, l \leq n\}$ ;
- $\{(A, B) | A, B \subseteq U, A \cap B = \emptyset\}$ ;
- $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\}$ ;
- $\{(A, B) | A \cup B = U\}$ ;
- $\{(A, B) | A, B \subseteq U, A \cup B = U \text{ \& } |A \cap B| \geq 2\}$ ;
- $\{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U \text{ \& } |U \setminus (A \setminus B)| \geq 2\}$ ;
- $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \text{ \& } |A \cap B| \geq 2\}$ ;
- $\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \text{ \& } |B \setminus A| \geq 2\}$ ;
- $\{(A, B) | A, B \subseteq U \text{ \& } |A \cap B| \leq 2\}$ .

**Решение:** ( $\wedge$  - логическо И,  $\vee$  - логическо ИЛИ)

- Тъй като броя на елементите на степенното множество на дадено изходно множество е равен на две на степен броя на елементите на изходното множество, то  $|\rho(U)| = 2^n$ . В случая ние избираме два елемента от  $\rho(U)$  като редът има значение и са възможни повторения.  $|T| = |\rho(U)| \cdot |\rho(U)| = (2^n)^2 = 4^n$ .
- Начините, по които може да изберем  $A$  са равни на броя на начините, по които може да изберем един елемент от  $U$ , което е  $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$ . Начините, по които може да изберем множеството  $B$  са  $2^n$  (за всеки елемент от  $U$  има два варианта - или е в  $B$  или не е в  $B$ ). Окончателно  $|T| = C_n^1 2^n = n 2^n$ .
- Начините, по които може да изберем множеството  $A$  са  $C_n^k = \binom{n}{k}$ , а начините по които може да изберем множеството  $B$  са  $C_n^l = \binom{n}{l}$ . Следователно  

$$|T| = C_n^k C_n^l = \binom{n}{k} \binom{n}{l} = \frac{(n!)^2}{k!(n-k)!l!(n-l)!}.$$
- Множествата  $A$  и  $B$  са непресичащи се и са подмножества на  $U$ , както е показано на



картинката по-горе. Начините, по които може да изберем множеството  $A$  са

$C_k^n = \binom{n}{k}$ , където  $k \leq n$  са броя на елементите на множеството  $A$ , т.е.  $|A| = k$ . За

множеството  $B$  ще избираме от останалите  $n - k$  елемента от множеството  $U$ , т.е. това са  $|\rho(U \setminus A)| = 2^{n-k}$  начина, по които може да го изберем. Следователно ще имаме

общо  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$  възможни избора. Тук

използвахме бинома на Нютон:  $(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$  за  $0 \leq k \leq n$ ,  $x=1$ ,  $y=2$ .

Окончателно,  $|T| = 3^n$ .

**За следващите подточки ще използваме следното фундаментално разбиване:**

На всяка наредена двойка  $(A, B)$  съпоставяме думата  $\alpha$ .

$(A, B) \mapsto \alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ . Конструираме следната азбука:

$\Sigma = \{XY, X\bar{Y}, \bar{X}Y, \bar{X}\bar{Y}\}$ , където за всяка буква  $a_k$ ,  $k \leq n$  имаме:

$$a_k = \begin{cases} XY, & \text{ако } u_k \in A, u_k \in B, \\ X\bar{Y}, & \text{ако } u_k \in A, u_k \notin B, \\ \bar{X}Y, & \text{ако } u_k \notin A, u_k \in B, \\ \bar{X}\bar{Y}, & \text{ако } u_k \notin A, u_k \notin B \end{cases}$$

Съществува биекция между множеството на думите  $\alpha$  и множеството на наредените двойки  $(A, B)$  (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне). Всяка дума  $\alpha$  ще е над азбуката  $\Sigma$ .

е)  $T = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$ .

$$(A, B) \in T \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq U \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) [u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) \neg [u_k \in A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) \neg [a_k = X\bar{Y}]$$

$$\Leftrightarrow X\bar{Y} \text{ не участва в думата } \alpha_{(A,B)}, \text{ т.е. } \alpha_{(A,B)} \text{ е дума над азбука от три типа букви}$$

$$\Sigma \setminus \{X\bar{Y}\} \Rightarrow |T| = 3^n.$$

Чрез същия подход може да се върнем на подточка d) и да направим следното:

$$T = \{(A, B) \mid A, B \subseteq U \wedge A \cup B = \emptyset\}.$$

$$(A, B) \in T \Rightarrow A, B \subseteq U \wedge A \cup B = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) [(u_k \in A \wedge u_k \notin B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \in B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \notin B)]$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) [a_k = X\bar{Y} \mid \bar{X}Y \mid \bar{X}\bar{Y}]$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) \neg [a_k = XY]$$

$$\Leftrightarrow XY \text{ не участва в думата } \alpha_{(A,B)}, \text{ т.е. } \alpha_{(A,B)} \text{ е дума над азбука от три типа букви}$$

$$\Sigma \setminus \{XY\} \Rightarrow |T| = 3^n. \text{ Именно за това този подход е фундаментален.}$$

г)  $T = \{(A, B) \mid A \cup B = U\}$

$$(A, B) \in T \Leftrightarrow A \cup B = U \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) [u_k \in A \vee u_k \in B]$$

$$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) \neq [u_k \notin A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) [a_k \neq \bar{X}\bar{Y}]$$

$$\Leftrightarrow \text{в } \alpha_{(A,B)} \text{ не се среща буквата } \bar{X}\bar{Y} \text{ от азбуката } \Sigma.$$

$$|T| = |\{\alpha \mid \alpha \text{ е дума над } \Sigma, \text{ в която не се среща } \bar{X}\bar{Y}\}| = |\{\alpha \mid \alpha \text{ е дума над азбука от три типа букви } \{XY, X\bar{Y}, \bar{X}Y\}\}| = 3^n.$$

g) Нека  $S = \{(A, B) | A, B \subseteq U, A \cup B = U\}$  и

$$K = \{(A, B) | A, B \subseteq U, A \cup B = U \wedge |A \cap B| < 2\}.$$

Имаме, че  $S = T \cup K$ ;  $T, K \subseteq S$  и  $T \cap K = \emptyset$ . Следователно  $T$  и  $K$  са разбиване на  $S$  и от принципа на събирането имаме, че  $|S| = |T| + |K|$  или  $|T| = |S| - |K|$ .

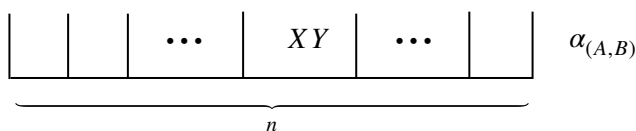
$S$ : От f) знаем, че  $|S| = 3^n$ .

$$K: K = \underbrace{\{(A, B) | A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) | A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}.$$

Тъй като  $K_0, K_1 \subseteq K$ ,  $K_0 \cap K_1 = \emptyset$  и  $K = K_0 \cup K_1$ , то  $K_0$  и  $K_1$  са разбиване на  $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$ .

$K_0$ :  $K_0 = \{(A, B) | A \cup B = U, A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) | B = U \setminus A\} = \{(A, U \setminus A) | A \subseteq U\} \Leftrightarrow$  в  $\alpha_{(A, B)} = \alpha_{(A, U \setminus A)}$  не се срещат букви от типа  $\bar{X}\bar{Y}$  и  $XY$  от  $\sum$ . Следователно  $|K_0| = 2^n$ .

$K_1$ :  $K_1 = \{(A, B) | A \cup B = U, |A \cap B| = 1\} \Rightarrow \bar{X}\bar{Y}$  не участва в  $\alpha_{(A, B)}$  и  $XY$  се среща точно веднъж в  $\alpha_{(A, B)}$ .



избираме позиция за буквата  $XY$

$$|K_1| = \binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

запълваме останалите  $n - 1$  свободни позиции с букви от типа  $\bar{X}\bar{Y}$  и  $\bar{X}Y$

$$\text{Окончателно: } |T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}.$$

h) Нека  $S = \{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U\}$  и  $K = \{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U \text{ и } |U \setminus (A \setminus B)| < 2\}$ .

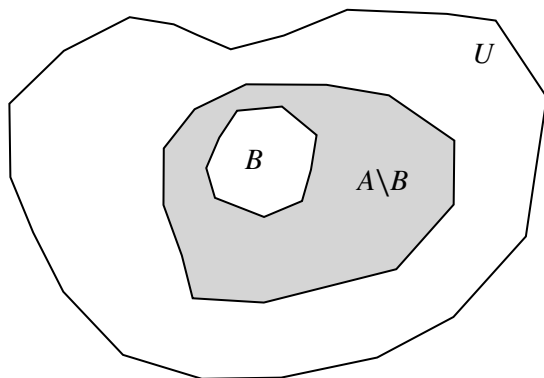
Имаме, че  $T \cup K = S$ ,  $T \cap K = \emptyset$  и  $T, K \subseteq S$ . Следователно  $T$  и  $K$  са разбиване на  $S$  и от принципа на събирането следва, че  $|S| = |T| + |K|$ , т.е.  $|T| = |S| - |K|$ .

$S$ : Аналогично на g)  $\alpha_{(A, B)}$  е дума над азбуката от три типа букви  $\sum \bar{X}\bar{Y} \Rightarrow |S| = 3^n$ .

$$K: K = \underbrace{\{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \setminus (A \setminus B)| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \setminus (A \setminus B)| = 1\}}_{K_1}$$

Тъй като  $K_0 \cup K_1 = K$ ,  $K_0, K_1 \subseteq K$  и  $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ , то  $K_0$  и  $K_1$  са разбиване на  $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$ .

$$K_0: K_0 = \{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U \wedge U \setminus (A \setminus B) = \emptyset\}.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} A \setminus B \subseteq U \\ U \setminus (A \setminus B) = \emptyset \\ \Rightarrow A \setminus B = U \\ \Rightarrow A = U, A \setminus B = U, B \subseteq A \\ \Rightarrow B = \emptyset \end{array} \right.$$

$$K_0 = \{(U, \emptyset)\}, K_0 = \binom{n}{0} = 1.$$

$$K_1: K_1 = \{(A, B) | B \subseteq A \subseteq U, |U \setminus (A \setminus B)| = 1\}; U \setminus (A \setminus B) = (U \setminus A) \cup B$$

$$1 = |U \setminus (A \setminus B)| = \underbrace{|(U \setminus A) \setminus B|}_{=1 \text{ element}} + \underbrace{|B|}_{=0} - |(U \setminus A) \cap B|. \text{ Следователно има}$$

два случая за този елемент.

I сл.) единственият елемент е в  $\{U \setminus A\}$ , тогава  $B = \emptyset$ , т.е.  $|U \setminus A| = 1$  и  $|B| = 0$ . Т.е.  $A$  не съдържа този 1 елемент.

$XY$ : 0 пъти

$X\bar{Y}$ :  $n - 1$  пъти

$\bar{X}Y$ : 0 пъти

$\bar{X}\bar{Y}$ : 1 път

$$\binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} = n$$

↑ избираме позицията за  $\bar{X}\bar{Y}$

↑ запълваме останалите позиции с  $X\bar{Y}$

II сл.) единственият елемент е в  $\{B\}$ , тогава  $U \setminus A = \emptyset$ , т.е.  $|U \setminus A| = 0$  и  $B = 1$ . Т.е.

$$U = A \Rightarrow \bar{X}Y = 0, \bar{X}\bar{Y} = 0.$$

$$|B| = 1: XY, \bar{X}Y - \text{участват общо точно веднъж. } B \subseteq A \Rightarrow \bar{X}Y = 0.$$

$XY$ : 1 път

$X\bar{Y}$ : 0 пъти

$\bar{X}Y$ :  $n - 1$  пъти

$\bar{X}\bar{Y}$ : 0 пъти

$$\binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} = n$$

↑ избираме позицията за  $XY$

↑ запълваме останалите позиции с  $\bar{X}Y$

Окончателно от I и II сл. :

$$|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 1 - n - n = 3^n - 2n - 1.$$

i) Нека  $S = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\}$  и  $K = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \text{ и } |A \cap B| < 2\}$ .

Имаме, че  $S = T \cup K$ ,  $T \cap K = \emptyset$  и  $K, T \subseteq S$ . Следователно  $T$  и  $K$  са разбиване на  $S$  и от принципа на събирането имаме, че  $|S| = |T| + |K|$  или  $|T| = |S| - |K|$ .

$S$ : от е) знаем, че  $|S| = 3^n$ .

$$K: K = \underbrace{\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$$

Тъй като  $K_0, K_1 \subseteq K$ ,  $K_0 \cap K_1 = \emptyset$  и  $K_0 \cup K_1 = K$ , то  $K_0$  и  $K_1$  са разбиване на  $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$ .

$$K_0: K_0 = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge A \cap B = \emptyset\} = \{(\emptyset, B) | B \subseteq U\}$$

$\Rightarrow$  в думата  $\alpha_{(A,B)}$  могат да участват само буквите  $\bar{X}Y$  и  $\bar{X}\bar{Y} \Rightarrow |K_0| = 2^n$ .

$$K_1: K_1 = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\} = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |A| = 1\}$$

$$(A, B) \in K_1 \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq B \subseteq U}_{XY \notin \alpha_{(A,B)}} \text{ и } \underbrace{|A| = 1}_{\swarrow} \quad XY \text{ и } XY \text{ участват точно веднъж в } \alpha_{(A,B)}.$$

избираме позицията, на която участва  $XY$

$$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n 2^{n-1}$$

останалите  $n - 1$  позиции след  $XY$ , в които може да слагаме  $\bar{X}Y, X\bar{Y}$ .

$$\text{Окончателно: } |T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n 2^{n-1}.$$

- j) Нека  $S = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U\}$  и  $K = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| < 2\}$ .  
Имаме, че  $S = T \cup K$ ,  $T \cap K = \emptyset$  и  $K, T \subseteq S$ . Следователно  $T$  и  $K$  са разбиване на  $S$  и от принципа на събирането имаме, че  $|S| = |T| + |K|$  или  $|T| = |S| - |K|$ .  
 $S$ : от е) знаем, че  $|S| = 3^n$ .  
 $K$ :  $K = \underbrace{\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| = 1\}}_{K_1}$

Тъй като  $K_0 \cup K_1 = K$ ,  $K_0, K_1 \subseteq K$  и  $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ , то  $K_0$  и  $K_1$  са разбиване на  $K$  и  $|K| = |K_0| + |K_1|$ .

$K_0$ :  $K_0 = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| = 0\} = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge A = B\}$   
 $\Rightarrow$  в думата  $\alpha_{(A,B)} = \alpha_{(A,A)}$  участват само буквите  $XY$  и  $\bar{X}\bar{Y}$ , т.е. не могат да участват  $X\bar{Y}$  и  $\bar{X}Y$ . Следователно  $\alpha_{(A,A)}$  е дума над азбуката съставена от два типа букви  
 $\Rightarrow |K_0| = 2^n$ .

$K_1$ :  $K_1 = \{(A, B) | A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \setminus A| = 1\}$ , следователно в  $B$  ще има точно един елемент повече от  $A$ , т.е. в думата  $\alpha_{(A,B)}$  ще има точно веднъж буква от типа  $\bar{X}Y$ , а останалите ще са от типа  $XY$  и  $\bar{X}\bar{Y}$ .

разпределяме буквата от тип  $\bar{X}Y$

$$\binom{n}{1} \cdot 2^{n-1} = n 2^{n-1}$$

поставяме на останалите позиции букви от типа  $XY$  и  $\bar{X}\bar{Y}$

$$\text{Окончателно: } |T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n 2^{n-1}.$$

- к) Нека  $T_0 = \{(A, B) | A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}$ ,  $T_1 = \{(A, B) | A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}$  и  $T_2 = \{(A, B) | A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 2\}$ .  
Имаме, че  $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$  и  $T_0 \cap T_1 = \emptyset$ ,  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ ,  $T_2 \cap T_0 = \emptyset$ ,  $T_1, T_1, T_2 \subseteq T$ , следователно  $|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2|$ .  
 $T_0$ :  $(A, B) \in T_0 \Leftrightarrow A, B \subseteq U$  и  $A \cap B = \emptyset$ , което е точно d) и от нея знаем че  $|T_0| = 3^n$ .  
 $T_1$ :  $(A, B) \in T_1 \Leftrightarrow A, B \subseteq U$  и  $(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$  точно един елемент е едновременно и в  $A$  и в  $B$ .  $XY$  участва в  $\alpha_{(A,B)}$  !1 (точно веднъж).  $|T_1| = \binom{n}{1} 3^{n-1}$ .  
 $T_2$ :  $XY$  участва два пъти в  $\alpha_{(A,B)}$ :  $|T_2| = \binom{n}{2} 3^{n-2}$ .

Окончательно:

$$|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2| = 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} = \sum_{i=0}^2 \binom{n}{i} 3^{n-i}.$$