Задача 18. Да се намери явен вид на редицата $\{a_n\}_0^\infty$, която е зададена със следното рекурентно уравнение: $a_{n+1} = 8a_n + (3n-1) \times 6^n$ и началното условие $a_0 = 0$.

Решение:

Хомогенна част на рекурентната зависимост: $p \times 8^n$.
Нехомогенна част на рекурантната зависимост: $(q \times n + r) \times 6^n$.

Следователно общия вид на рекурентното уравнение е:

$$a_n = p \times 8^n + (qn + r) \times 6^n$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 8a_0 + (3 \times 0 - 1) \times 6^0 = -1, \\ a_2 = 8a_1 + (3 \times 1 - 1) \times 6^1 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a - 0 = p + r \\ -1 = a_1 = 8p + 6q + 6r \\ 4 = a_2 = 64p + (2q + r) \times 36 = 64p + 72q + 36r \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & -1 \\ 64 & 72 & 36 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & -1 \\ 16 & 18 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 18 & -7 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -4 \end{pmatrix}.$$

Следователно $\begin{cases} [= 4 \\ q = -\frac{3}{2} \\ r = -4 \end{cases}$. Явния вид на редицата е $a_n = 4 \times 8^n = \left(\frac{3}{2} \times n + 4\right) \times 6^n$.

$\square$