Задача 12. (от поправителен изпит 2015г.)

Нека R е релация над двойка естествени числа $M = \mathbb{N}^2$ и
$(a,b)R(c,d) \Leftrightarrow \exists k \in N(a = kc \ \& \ d = kb)$. Да се провери дали R е частична наредба и релация на еквивалентност.

Решение:

За да решим задачата, трябва да проверим за рефлексивност, симетричност, антисиметричнот и транзитивност:

а) *Рефлексивност:* $(a,b) \in N^2$
$(a,b)R(a,b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = ka \ \& \ b = kb)$, такова k съществува: $k = 1 \Rightarrow R$ е рефлексивна.

б) *Симетричност:* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$. Нека
$(a,b)R(c,d) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}(a = kc) \ \& \ d = kb)$. Трябва да проверим дали от това следва, че $(c,d)R(a,b)$, тоест $\exists p \in N(c = pa \ \& \ b = pd)$. Ще покажем, че това не е така с контрапример. За да е изпълнено е необходимо $a = kc$ и
$c = pa \ \ \Leftrightarrow a = kpa \Leftrightarrow a(1-kp) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ или $p = k = 1 (p, k \in \mathbb{N})$. Тоест, ако вземем пример, който не отговаря на тези условия, то той ще е контрапример. Да видим: Нека $a = 2, d = 4, k = 2, (a,b)R(c,d), (2,b)R(c,4) \quad 2 = 2.c \Rightarrow c = 1$ и $4 = 2.b \Rightarrow b = 2$. Трябва да намерим $p \in \mathbb{N}$, за което
$1 = 2p, 2 = 4p \Rightarrow p = \dfrac{1}{2} \notin \mathbb{N}$, което прави $(2,2)$ и $(1,4)$ валиден контрапример.
Следователно R не е симетрична.

в) *Антисиметричност:* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$. Нека $(a,b)R(c,d)$ и
$(c,d)R(a,b) \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : (a = kc \ \& \ d = kb)$ и $\exists p \in \mathbb{N}(c = pa \ \& \ b = pd)$.
Трябва да проверим дали от това следва, че $(a,b) = (c,d)$.
$a = kpa \Rightarrow a(1-kp) = 0 \Rightarrow a = 0$ или $p = k = 1 (p, k \in \mathbb{N})$. От това произлизат два случая:
1.) $p = k = 1 \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$
2.) $a = 0 \Rightarrow c = 0.p \Rightarrow c = 0.$
Да видим за b и d : $\ d = d.p.k \Rightarrow d(1-pk) = 0 \Rightarrow d = 0$ или
$p = k = 1 (p, k \in \mathbb{N})$
Образуваме два подслучая:
2.1.) $p = k = 1 \Rightarrow a = c, b = d \Rightarrow (a,b) = (c,d)$;
2.2.) $d = 0 \Rightarrow b = 0.p \Rightarrow b = 0.$
И получаваме $a = c = 0, b = d = 0 \Rightarrow (a,b) = (c,d)$. И така получихме равенство на наредените двойки от естествени числа във всеки един от тези случаи.
Следователно релацията R е антисиметрична.

г) *Транзитивност:* $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N}^2$. Нека $(a,b)R(c,d)$ и
$(c,d)R(e,f) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N})[a = kc \ \& \ d = kb]$и $(\exists p \in \mathbb{N})[c = pe \ \& f = pd]$.

Трябва да проверим дали от това следва, че $(a, b)R(e, f)$, тоест дали $(\exists q \in \mathbb{N})[a = qe \; \& \; f = qb]$.

$a = kc = kpe$
$f = dp = bkp = kpb$
$\Rightarrow q = kp \in N \Rightarrow R$ е транзитивна.

От полученото може да заключим, че релацията е частична наредба и не е релация на еквивалентност.