Задача 10. Нека R е релация над множеството $A = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\} \setminus \{0\}$.
R се дефинира по следния начин: $xRy \Leftrightarrow (\exists p \in \mathbb{Q})[x = py \vee xy = p]$. Ще наричаме такова рационално число p свидетел за това, че x е в релация с y. Да се докаже, че R е релация на еквивалентност над A.

Доказателство:

a) Рефлексивност.
Нека $x \in A$. Тогава $1 \in \mathbb{Q}$ и $x = 1 \times x \Rightarrow (\exists 1 \in \mathbb{Q})[\underbrace{x = 1 \times x}_{\text{true}} \vee x \times x = 1]$. Тоест 1 е свидетел за това, че xRx.

b) Симетричност.
Нека xRy и $p \in \mathbb{Q}$ е свидетел за това. Тоест $x = py \vee xy = p$. Ще намерим свидетел за yRx.

Ако $x = py$, то $y = \dfrac{1}{p} \times x$ (ако $p = 0$, то $x = 0 \notin A$). Но $\dfrac{1}{p} \in \mathbb{Q}$ и така $q = \dfrac{1}{p}$ е свидетел за yRx, тъй като $y = qx \Rightarrow [y = qx \vee yx = q]$ е истина.

c) Транзитивност.
Нека xRy, yRx и $p, q \in \mathbb{Q}$ са свидетели за тези релации съответно. За да бъде R транзитивна е необходимо да е изпълнено следното:

$\forall x \forall y \forall z(xRy \wedge yRz \wedge zRx)$, тоест $[x = py \vee xy = p]$ и $[y = qz \vee yz = q]$.

Следователно имаме четири възможности за случването на xRy и yRz и при всяка една от тях трябва да се провери дали съществува свидетел за xRz. Тоест ще търсим такова $s \in \mathbb{Q}$, за което е изпълнено, че $[x = sz \wedge xz = s]$, $s \in \mathbb{Q}$.

(1) $x = py \wedge y = qz \Rightarrow x = py = p(qz) = (pq)z \Rightarrow s = pq \in \mathbb{Q}$;

(2) $x = py \wedge yz = q \Rightarrow xyz = pyq \Rightarrow xz = pq = s \in \mathbb{Q}$;

(3) $xy = p \wedge y = qz \Rightarrow xyzq = yp \Rightarrow xz = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}, q \neq 0, s = \dfrac{p}{q}$ е свидетел за xRz.

(4) $xy = p \wedge yz = q \Rightarrow y = \dfrac{q}{z}, xy = p \Leftrightarrow x \times \dfrac{q}{z} = p \Rightarrow x = \dfrac{p}{q} \times z, q \neq 0 \Rightarrow \dfrac{p}{q}$ е свидетел за релацията xRz.

Следователно релацията R е рефлексивна, симетрична и транзитивна, откъдето следва, че R е релация на еквивалентност.

$\square$