Задача 4. Да се докаже, че за всеки три множества A, B и C е изпълнено, че $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \backslash B \subseteq C$.

Доказателство:

Нека A, B и C са произволни множества.

$(\subseteq)$ Нека $A \subseteq B \cup C$. Ще докажем, че $A \backslash B \subseteq C$. За целта нека $x \in A \backslash B$ е произволен елемент. Тогава $x \in A \backslash B \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x \in A$ и $x \notin B$. Но $A \subseteq B \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$. Но $x \notin B \Rightarrow x \in C$. Тъй като x беше произволно избран елемент, то с това доказахме, че ако $x \in A \backslash B$, то $x \in C$ (в случая когато $A \subseteq B \cup C$) $\Rightarrow A \backslash B \subseteq C$.

$(\supseteq)$ Нека $A \backslash B \subseteq C$. Ще докажем, че $A \subseteq B \cup C$. Нека $x \in A$ е произволен елемент. Ако $x \in B$, то твърдението $x \in B \cup C$ е тривиално, но ако $x \notin B$, то тъй като $x \in A$ ще имаме, че $x \in A \backslash B$. От друга страна сме в случая, в който $A \backslash B \subseteq C$ и следователно $x \in C \subseteq B \cup C$.

Следователно от $(\subseteq)$ и $(\supseteq)$ следва, че за всеки три множества A, B и C е изпълнено, че $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \backslash B \subseteq C$.

$\square$