ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 2

Задачи от контролни и изпити

Този сборник съдържа условията на задачите от контролните и изпитите, давани по дисциплината Дискретни структури 2 на специалност Софтуерно инженерство.

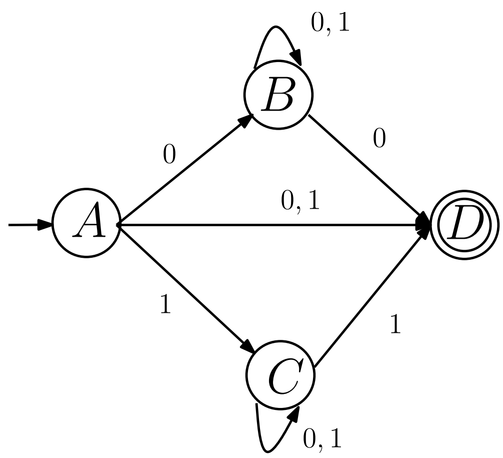
Съдържание

Глава 1

2013/2014

1. Първо контролно

1. *Намерете краен детерминиран автомат, еквивалентен на дадения:*



2. *Нека L_1 и L_2 са съответно езиците*

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* | N_b(w) \equiv 0(\mod 2)\},$$

и

$$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* | N_a(w) + N_c(w) \equiv 1(\mod 3) \text{ и } N_b(w) \equiv 0(\mod 2)\}.$$

(1) *Намерете автомат $\mathcal{A}$ с език $L(\mathcal{A}) = L_1$.*
(2) *Намерете автомат $\mathcal{A}$ с език $L(\mathcal{A}) = L_2$.*
(3) *Докажете, че езикът на построения автомат действително е L_2.*

Забележка: ако $w \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$, то с $N_a(w)$ ще бележим броя на срещанията на буквата a в думата w.

3. *Докажете, че езикът L не е регулярен, където L е:*

(1) $L = \{w \in \{1\}^* | w = 1^{2p},\ p$ *е просто число*$\}$;
(2) $L = \{w \in \{1\}^* | w = 1^{2p},\ p$ *не е просто число*$\}$.

* * *

1. *Намерете краен детерминиран автомат, еквивалентен на дадения:*

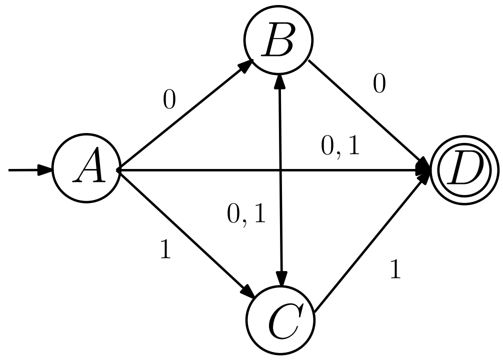
2. *Нека L_1 и L_2 са съответно езиците*

$$L_1 = \{w \in \{a, b, c\}^* | N_a(w) \equiv 1(\mod 2)\},$$

и

$$L_2 = \{w \in \{a, b, c\}^* | N_a(w) \equiv 1(\mod 2) \text{ и } N_b(w) + N_b(w) \equiv 2(\mod 3)\}.$$

(1) *Намерете автомат $\mathcal{A}$ с език $L(\mathcal{A}) = L_1$.*
(2) *Намерете автомат $\mathcal{A}$ с език $L(\mathcal{A}) = L_2$.*
(3) *Докажете, че езикът на построения автомат действително е L_2.*



Забележка: ако $w \in \Sigma^*$ и $a \in \Sigma$, то с $N_a(w)$ ще бележим броя на срещанията на буквата a в думата w.

3. *Докажете, че езикът L не е регулярен, където L е:*

(1) $L = \{w \in \{0\}^* | w = 0^{3p},\ p$ *е просто число*$\}$;

(2) $L = \{w \in \{0\}^* | w = 0^{3p},\ p$ *не е просто число*$\}$.

2. Второ контролно

1. (1) *Намерете КСГ Γ' без дълги правила (т.е. с дължина не повече от 2) и с език $L(\Gamma') = L(\Gamma)$, където Γ е граматиката:*

$$\langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, S, \{S \to AaaB|\varepsilon, A \to CbA|BBb, B \to B|bB|AAA, C \to Sb|bbb\}\rangle;$$

(2) *Намерете КСГ Γ' без ε-правила с език $L(\Gamma') = L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$, където Γ е граматиката: $\langle \{a, b\}, \{S, A, B, C, D\}, S, \{S \to AB|DD|Cb, A \to CC|bS|a, B \to \varepsilon|bA, C \to \varepsilon|Da, D \to Ba|bA\}\rangle$.*

2. *Намерете КСГ с език, съвпадащ с този на автомата:*

δ	0	1
$\to s$	$\{p, r\}$	$\{q, r\}$
$^*p$	$\{p, r\}$	$\{p\}$
q	$\{q\}$	$\{q, r\}$
$^*r$	$\emptyset$	$\emptyset$

3. *Нека L_1 и L_2 са съответно езиците*

$$L_1 = \{a^n b^m c^{2n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\},$$

и

$$L_2 = \{a^{2k+3n+5} b^{3k+2l+1} a^{2m+l+5} b^{2j+7n} a^{5j+2} \mid j, k, l, m, n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) *Намерете КСГ Γ с език $L(\Gamma) = L_1$.*

(2) *Намерете КСГ Γ с език $L(\Gamma) = L_2$.*

(3) *За всеки един от написаните от Вас нетерминали от подточка 2, посочете генерирания от него език.*

4. *Докажете, че езикът $L = \{w \in \{1\}^* | w = 1^{2p},\ p$ е просто число$\}$ не е контекстно свободен.*

* * *

1. (1) *Намерете КСГ Γ' без дълги правила (т.е. с дължина не повече от 2) и с език $L(\Gamma') = L(\Gamma)$, където Γ е граматиката:*

$$\langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, S, \{S \to bBBa|\varepsilon, A \to BCa|aaB, B \to A|AaA|Ab, C \to aS|aAa\}\rangle;$$

(2) *Намерете КСГ* Γ' *без* ε*-правила с език* $L(\Gamma') = L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$, *където* Γ *е граматиката:* $\langle\{a,b\},\{S,A,B,C,D\},S,\{S \to BA|AA|Da, A \to \varepsilon|Ba, B \to DD|Sa|b, C \to AB|aB, D \to \varepsilon|bC\}\rangle$.

2. *Намерете КСГ с език, съвпадащ с този на автомата:*

δ	0	1
$\to s$	$\{p,r\}$	$\{q,r\}$
p	$\{q,r\}$	$\{q\}$
$^*q$	$\{p\}$	$\{p,r\}$
$^*r$	$\emptyset$	$\emptyset$

3. *Нека* L_1 *и* L_2 *са съответно езиците*

$$L_1 = \{a^n b^m c^{n+2m} \mid n,m \in \mathbb{N}\},$$

и

$$L_2 = \{b^{5m+1}a^{2m+7k}b^{2j+n+4}a^{3l+2n+2}b^{2l+3k+4} \mid j,k,l,m,n \in \mathbb{N}\}.$$

(1) *Намерете КСГ* Γ *с език* $L(\Gamma) = L_1$.
(2) *Намерете КСГ* Γ *с език* $L(\Gamma) = L_2$.
(3) *За всеки един от написаните от Вас нетерминали от подточка 2, посочете генерирания от него език.*

4. *Докажете, че езикът* $L = \{w \in \{0\}^* | w = 0^{3p},\ p$ *е просто число*$\}$ *не е контекстно свободен.*

3. Изпит

3.1. Първо контролно.

1. *Нека* $L = \{w \in \{a,b\}^* |$ *между никои две* a *в* w *не се среща* $'bb'\}$.
(1) *Намерете автомат* $\mathcal{A}$ *с език* $L(\mathcal{A}) = L$.
(2) *Докажете, че езикът на построения автомат действително е* L.

2. *Докажете, че езикът* $L = \{vuv | u,v \in \{0,1\}^* \& \ |u| \leq |v|\}$ *не е регулярен.*

* * *

1. *Нека* $L = \{w \in \{a,b\}^* |$ *след някое* $'ab'$ *в* w *броят на* a*-та след него е четен*$\}$.
(1) *Намерете автомат* $\mathcal{A}$ *с език* $L(\mathcal{A}) = L$.
(2) *Докажете, че езикът на построения автомат действително е* L.

2. *Докажете, че езикът* $L = \{vuv | u,v \in \{a,b\}^* \& \ |u| < |v|\}$ *не е регулярен.*

3.2. Второ контролно.

1. *Използвайте алгоритъма за динамично програмиране (CYK), за да проверите дали думата* $\alpha = baaba$ *принадлежи на езика, определен от граматиката:*

$$\Gamma = \langle\{a,b\},\{S,A,B,C\},S,\{S \to AB|BC, A \to BA|a, B \to CC|b, C \to AB|a\}\rangle.$$

2. *Използвайте обща конструкция, за да построите к.св.г.* G *с език* $L(G) = L(G_1) \circ L(G_2)$, *където:*

$$G_1 = \langle\{a,b\},\{S_1,T_1\},S_1,\{S_1 \to T_1 b S_1 b, T_1 \to T_1 S_1 | b S_1 aa | a | \varepsilon\}\rangle$$
$$G_2 = \langle\{a,b\},\{S_2\},S_2,\{S_2 \to a | a S_2 b | bb S_2 a | S_2 a S_2\}\rangle$$

3. *Нека* $L = \{w2u | w \in \{0,1\}^* \ \& \ w_3^R$ *е поддума на* $u\}$.
(1) *Намерете КСГ* Γ *с език* $L(\Gamma) = L$.
(2) *За всеки един от написаните от Вас нетерминали от подточка 1, посочете генерирания от него език.*

Забележка. w_i^R означава думата w заисана в обратен ред като всяка буква е написана точно i пъти. Например $(001)_2^R = 110000$.

4. *Докажете, че езикът* $L = \{a^n b^n c^m | n \leq m \leq 2n\}$ *не е контекстно свободен.*

* * *

1. *Използвайте алгоритъма на динамично програмиране (CYK), за да проверите дали думата* $\alpha = babaa$ *принадлежи на езика, определен от граматиката:*

$$\Gamma = \langle \{a, b\}, \{S, A, B, C\}, S, \{S \to AB, A \to AC|a|b, B \to CB|a, C \to a\} \rangle$$

2. *Използвайте обща конструкция, за да построите к.св.г.* G *с език* $L(G) = L(G_1) \cup L(G_2)$*, където:*

$$G_1 = \langle \{a, b\}, \{S_1\}, S_1, \{S_1 \to \varepsilon|bbS_1|aS_1b\} \rangle$$
$$G_2 = \langle \{a, b\}, \{S_2, T_2\}, S_2, \{S_2 \to aT_2T_2|aS_2b, T_2 \to \varepsilon|bS_2b\} \rangle$$

3. *Нека* $L = \{wcu | w \in \{a, b\}^* \ \& \ w_2^R$ *е поддума на* $u\}$.

(1) *Намерете КСГ* Γ *с език* $L(\Gamma) = L$.

(2) *За всеки един от написаните от Вас нетерминали от подточка 1, посочете генерирания от него език.*

Забележка. w_i^R означава думата w заисана в обратен ред като всяка буква е написана точно i пъти. Например $(001)_2^R = 110000$.

4. *Докажете, че езикът* $L = \{a^n b^n c^m | n \leq m \leq 3n\}$ *не е контекстно свободен.*

Глава 2

2014/2015

1. Първо контролно

1. *Нека L_1 и L_2 са езиците, разпознавани съответно от автоматите:*

A :

Δ	a	b
$\rightarrow^* s$	$\{s\}$	$\{p\}$
p	$\{s\}$	$\emptyset$

B :

Δ	a	b
$\rightarrow q$	$\{q,r\}$	$\emptyset$
$^*r$	$\emptyset$	$\{t\}$
t	$\emptyset$	$\{q\}$

Да се построят автомати за езиците $L_1 \cup L_2$, L_1L_2.

Решение: За автомат, разпознаващ езика $L_1 \cup L_2$, достатъчно е да разгледаме такъв, образуван по следния начин:

- множеството от състояния му е обединението на множествата от състоянията на A и B с добавено ново начално състояние n;
- множеството от заключителните му състояния равно на обединението на тези на A и B, към които е прибавено и новото начално състояние, при положение, че поне едно от A и B е имал начално състояние, което е било и финално.
- преходите между състоянията се пренасят без промяна от A и B. Допълнително се добавят преходи от новото начално състояние към директните наследници на началните състояния на A и B със същите етикети по стрелките;

В конкретния случай получаваме автомата:

Δ	a	b
$\rightarrow^* n$	$\{s,q,r\}$	$\{p\}$
$^*s$	$\{s\}$	$\{p\}$
p	$\{s\}$	$\emptyset$
q	$\{q,r\}$	$\emptyset$
$^*r$	$\emptyset$	$\{t\}$
t	$\emptyset$	$\{q\}$

За автомат, разпознаващ езика L_1L_2, достатъчно е да разгледаме такъв, образуван по следния начин:

- множеството от състояния му е обединението на множествата от състоянията на A и B;
- множеството от заключителните му състояния равно на тези на B, към които е прибавено и множеството от заключителните състяния на A, при положение, че началното сътояние на B е било и финално.
- преходите между състоянията се пренасят без промяна от A и B. Допълнително се добавят преходи от състоянията, които са били заключителни за A към директните наследници на началното състояние на B със същите етикети по стрелките;

В конкретния случай получаваме автомата:

Δ	a	b
$\to^* s$	$\{s\}$	$\{p,t\}$
p	$\{s\}$	$\emptyset$
q	$\{q,r\}$	$\emptyset$
$^*r$	$\emptyset$	$\{t\}$
t	$\emptyset$	$\{q\}$

2. *Да се детерминира автомата, зададен с таблицата:*

Δ	a	b
$\to s$	$\{s,p\}$	$\{s\}$
p	$\emptyset$	$\{q\}$
q	$\emptyset$	$\{r\}$
$^*r$	$\emptyset$	$\emptyset$

Решение: Детерминираният автомат еквивалентен на дадения ще има за състояния множествата от състояния на първоначалния. Преходът на всяко нова състояние P с буквата a ще бъде в множеството от състоянията, които са достижими от кое да е състояние в P. Така търсеният детерминиран автомат ще бъде:

Δ	a	b
$\to \{s\}$	$\{s,p\}$	$\{s\}$
$\{s,p\}$	$\{s,p\}$	$\{s,q\}$
$\{s,q\}$	$\{s,p\}$	$\{s,r\}$
$^*r$	$\{s,p\}$	$\{s\}$

3. *Да се състави регулярен израз за езика*

$$L = \{\xi w \mid \xi w \textit{ съдържа поддума } \xi\xi\}.$$

Решение: Ще разделим думите u от L на два основни вида:

- $u = \xi w$, за подходящи ξ и w, където $w = \xi v$, т.е. w започва с ξ;
- $u = \xi w$, за подходящи ξ и w, където $w = v_0\xi\xi v_1$, т.е. w $\xi\xi$, но не започва с ξ;

Други възможности за u, ясно, не може да има. Оттук, и забелязвайки, че $\xi \in \{a,b\}$, получаваме и описание на L като регулярен израз:

$$L = 00(a \cup b)^* \cup 11(a \cup b)^* \cup 0(a \cup b)^* 00(a \cup b)^* \cup 1(a \cup b)^* 11(a \cup b)^*$$

4. *Да се докаже, че не е регулярен езикът*

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid N_a(w) > N_b(w) + 2\}.$$

Решение: Да допуснем, че езикът L е регулярен. Не е трудно да се види, че той е и безкраен. Следователно, по Лемата за разрастването, съществува константа $p > 0$ такава, че за всяка дума $w \in L$ с $|w| \geq p$ съществуват думи x, y, z, за които $w = xyz$ и такива, че

- $|y| > 0$;
- $|xy| \leq p$;
- $(\forall i \geq 0)[x\underbrace{y\dots y}_{i}z \in L]$;

Да разгледаме думата $w = a^{p+3}b^p$. Ясно е, че $w \in L$ и $|w| \geq p$. Така w може да се разложи като $w = xyz$, за някои x, y и z, които да изпълнват горните условия. Понеже $|xy| \geq p$, и първите $p + 3$ символа на w са a-та, то xy се състои само от a. В частност, y се състои само от a. Но понеже y е с ненулева дължина, то $y \in a^+$. Така думата $w_0 = xz = a^{p+3-|y|}b^p$ трябва да е от L, което не може да бъде вярно понеже $p + 3 - |y| \leq p + 2$. Следователно, предположението ни, че L е регулярен е погрешно.

2. Второ контролно

1. *Намерете безконтекстна граматика, която разпознава същия език като автомата, зададен с таблицата:*

Δ	a	b	c	d
$\rightarrow s$	$\{s\}$	$\{p\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$^*p$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q\}$
q	$\emptyset$	$\{q\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
$^*r$	$\{q\}$	$\emptyset$	$\{s, p\}$	$\emptyset$

Решение: Търсената граматика има за нетерминали състоянииата на автомата, като начален нетерминал, ще бъде началното състояние на автомата. Множеството от правилата ще бъде:

$$\mathcal{R} = \{q \rightarrow ap \mid p \in \Delta(q, a)\} \cup \{q \rightarrow \varepsilon \mid q \in F\}.$$

В конкретния случай, търсената граматика, ще има правилата:
$s \rightarrow as|bp$
$p \rightarrow dq|\varepsilon$
$q \rightarrow bq$
$r \rightarrow aq|cs|cp|\varepsilon$
Начален символ е s.

2. *Нека L' е езикът, разпознаван от граматиката с правила $\{S \rightarrow a|bSSP, P \rightarrow PaS\}$ и L'' е езикът, разпознаван от граматиката с правила $\{S \rightarrow SP|aPS, P \rightarrow SbS|a\}$. Да се построи граматика, чийто език е $L'L''$.*

Решение: Преименуваме нетерминалите на граматиките за L' и L'' така, че да нямат общи елемнти помежду си: $\{S' \rightarrow a|bS'S'P', P' \rightarrow P'aS'\}$ и

$$\{S'' \rightarrow S''P''|aP''S'', P'' \rightarrow S''bS''|a\}.$$

Сега, конкатенацията на езиците ще се разпознава от граматиката с правила:

$$\{S \rightarrow S'S'', S' \rightarrow a|bS'S'P', P' \rightarrow P'aS', S'' \rightarrow S''P''|aP''S'', P'' \rightarrow S''bS''|a\}$$

3. *За произволна дума w от $\{0, 1\}^*$ с $\overline{w}$ ще означаваме ĦпобитовотоY отрицание на w. Например* $\overline{01100010} = 10011101$. *Да се състави граматика, разпознаваща езика*

$$L = \{w\#x \colon w, x \in \{0, 1\}^* \text{ и } x \text{ съдържа } \overline{w}^R \text{ като поддума}\}$$

Решение: В сила е, че:

$$L = \{w\#u\overline{w}^R v \colon w, u, v \in \{0, 1\}^*\} =$$
$$= \{w\#u\overline{w}^R \colon w, u \in \{0, 1\}^*\} \circ \{0, 1\}^* = L_1 \circ L_2$$

За правила на граматика, пораждаща езика L_2 можем да вземем: $S_2 \to 0S_2|1S_2|\varepsilon$. За да намерим правилата на граматика, пораждаща L_1 да разгледаме произволна дума λ от L_1. Щом $\lambda \in L_1$, то ще се намерят думи w и u такива, че $\lambda = w\#u\overline{w}^R$. Сега, ако $|w| = 0$, т.е. $w = \varepsilon$, то също имаме, че $\overline{w}^R = \varepsilon$ и тогава $\lambda = \#u$. Ако пък, $|w| > 0$, то има символ $a \in \{0,1\}$ и дума $v \in \{0,1\}^*$, за които $w = av$. Да забележим, че $\overline{w}^R = \overline{v}^R\overline{a}$ и, следователно, $\lambda = av\#u\overline{v}^R\overline{a} = a\mu\overline{a}$, където $\mu = v\#u\overline{v}^R$ и, значи, последната е дума от L_1.

Не е трудно да се види, че последните са и достатъчни условия една дума да принадлежи на езика L_1, т.е. че ако $\lambda = \#u$ за някое $u \in \{0,1\}^*$ или $\lambda = a\mu\overline{a}$ за някои $a \in \{0,1\}$ и $\mu \in L_1$, то тогава $\lambda \in L_1$.

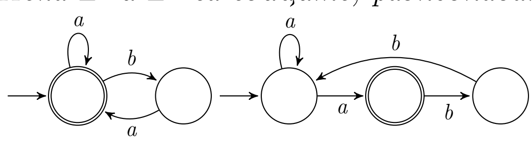
Следователно, като правила за граматика пораждаща езика L_1 можем да вземем:
$S_1 \to T|0S_11|1S_10$,
$T \to \#|T0|T1$

Накрая, за да получим правила за граматика, пораждаща $L = L_1 \circ L_2$, достатъчно е да добавим към правилата за L_1 и L_2 правилото $S \to S_1S_2$, където S е началната променлива за търсената граматика:
$S \to S_1S_2$,
$S_1 \to T|0S_11|1S_10$,
$T \to \#|T0|T1$,
$S_2 \to 0S_2|1S_2|\varepsilon$

3. Писмен изпит

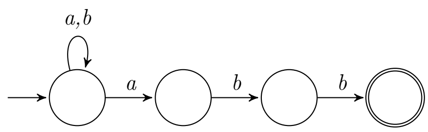
3.1. Първо контролно.

1. *Нека L' и L'' са езиците, разпознавани от автоматите*



Да се построят крайни автомати за $L' \cup L''$ и $L'.L''$.

2. *Да се детерминира автоматът*

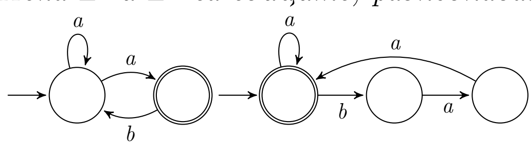


3. *Да се състави регулярен израз за езика*
$\{\xi w\colon \xi \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^*, \xi w$ *съдържа поддума* $\xi\xi\}$.

4. *Да се докаже, че не е регулярен езикът*
$\{w \in \{a,b\}^*\colon N_a(w) > N_b(w) + 2\}$.

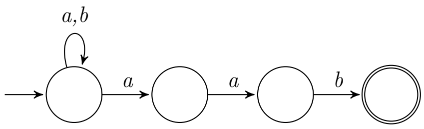
* * *

1. *Нека L' и L'' са езиците, разпознавани от автоматите*



Да се построят крайни автомати за $L' \cup L''$ и $L'.L''$.

2. *Да се детерминира автоматът*

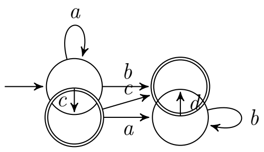


3. *Да се състави регулярен израз за езика*
$\{w\zeta\colon \zeta \in \{0,1\}, w \in \{0,1\}^*, \zeta w$ *съдържа поддума* $\zeta\zeta\}$.

4. *Да се докаже, че не е регулярен езикът*
$\{w \in \{a,b\}^*\colon N_a(w) + 2 > N_b(w)\}$.

3.2. Второ контролно.

1. *Намерете безконтекстна граматика, която разпознава същия език, както автомата:*



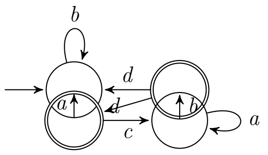
2. *Нека* L' *е езикът, разпознаван от граматиката с правила* $\{S \to a|bSSP, P \to PaS\}$ *и* L'' *е езикът, разпознаван от граматиката с правила* $\{S \to SP|aPS, P \to SbS|a\}$. *Да се построи граматика, чийто език е* $L'L''$.

3. *За произволна дума* w *от* $\{0,1\}^*$ *с* $\overline{w}$ *ще означаваме ЋпобитовотоY отрицание на* w. *Например* $\overline{01100010} = 10011101$. *Да се състави граматика, разпознаваща езика*

$$\{w\#x\colon w, x \in \{0,1\}^* \text{ и } w \text{ съдържа } \overline{x} \text{ като поддума}\}$$

* * *

1. *Намерете безконтекстна граматика, която разпознава същия език, както автомата:*



2. *Нека* L *е езикът, разпознаван от граматиката с правила* $\{S \to a|bSSP, P \to PaS\}$. *Да се построи граматика, чийто език е* L^*.

3. *За произволна дума* w *от* $\{0,1\}^*$ *с* $\overline{w}$ *ще означаваме ЋпобитовотоY отрицание на* w. *Например* $\overline{01100010} = 10011101$. *Да се състави граматика, разпознаваща езика*

$$\{w\#x\colon w, x \in \{0,1\}^* \text{ и } x \text{ съдържа } \overline{w} \text{ като поддума}\}$$

Глава 3

2015/2016

1. Първо контролно

1. *Използвайки обща конструкция намерете недетерминиран краен автомат без недостижими състояния, с език равен на този на регулярния израз:*

$$(ab^* \cup a^*b)^*$$

2. *Постройте краен детерминиран автомат с език:*

(1) $L_1 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ *завършва с* $ab\}$;
(2) $L_2 = \{w \in \{a,b\}^* \mid w$ *НЕ завършва с* $ab\}$.

Обосновете отговора си!

3. *Докажете, че езикът*

$$L = \{a^{n_1}ba^{n_2}\dots ba^{n_k} \mid k \geq 2 \text{ и } k \text{ е четно и } \forall i \in \{1,\dots,k\}(n_i \in \mathbb{N} \text{ и } n_i = n_{k+1-i})\}$$

не е регулярен.

* * *

1. *Използвайки обща конструкция намерете недетерминиран краен автомат без недостижими състояния, с език равен на този на регулярния израз:*

$$((a \cup b^*)(a^* \cup b))^*$$

2. *Постройте краен детерминиран автомат с език:*

(1) $L_1 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ *съдържа като поддума* $00\}$;
(2) $L_2 = \{w \in \{0,1\}^* \mid w$ *НЕ съдържа като поддума* $00\}$.

Обосновете отговора си!

3. *Докажете, че езикът*

$$L = \{a^{n_1}ba^{n_2}\dots ba^{n_k} \mid n \geq 3 \text{ и } n \text{ е нечетно и } \forall i \in \{1,\dots,k\}(n_i \in \mathbb{N} \text{ и } n_i = n_{k+1-i})\}$$

не е регулярен.

2. Второ контролно

1. (1) *Постройте безконтекстна граматика за всеки от следните езици:*
- $L_1 = \{a^nb^mc^k \mid 2m = n + 2k\}$;
- $L_2 = \{a^nb^mc^k \mid m \leq n + k\}$;

(2) *За всеки нетерминал* X *в граматиката за* L_2*, която сте дали, намерете езика* $L_X = \{\alpha \in \{a,b,c\}^* \mid X \Rightarrow^* \alpha\}$;

(3) *Преобразувайте граматиката, която сте дали за* L_1*, в нормална форма на Чомски.*

2. *Докажете, че* $L = \{a^{k+n}b^{k+n}c^k \mid k,n \in \mathbb{N}\}$ *не е безконтекстен език.*

* * *

1. (1) *Постройте безконтекстна граматика за всеки от следните езици:*

- $L_1 = \{a^n b^m c^k \mid 2m = 2n + k\}$;
- $L_2 = \{a^n b^m c^k \mid m \geq n + k\}$;

(2) *За всеки нетерминал X в граматиката за L_2, която сте дали, намерете езика $L_X = \{\alpha \in \{a,b,c\}^* \mid X \Rightarrow^* \alpha\}$;*

(3) *Преобразувайте граматиката, която сте дали за L_1 в нормална форма на Чомски.*

2. *Докажете, че $L = \{a^n b^{k+n} c^{k+n} \mid k, n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен език.*

3. Изпит

3.1. Първо контролно.

1. (1) *Постройте тотален краен детерминиран автомат с език равен на:*

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ започва или завършва с } a \text{ и } N_b(w) \equiv 0 \pmod 2\};$$

(2) *Минимизирайте построения от Вас автомат;*

(3) *Намерете контекстно-свободна граматика с език равен на този на получения от Вас минимален автомат.*

2. *Докажете, че $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid 3N_a(w) < 2N_b(w) + 1\}$ не е регулярен.*

* * *

1. (1) *Постройте тотален краен детерминиран автомат с език равен на:*

$$L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ започва или завършва с } b \text{ и } N_a(w) \equiv 1 \pmod 2\};$$

(2) *Минимизирайте построения от Вас автомат;*

(3) *Намерете контекстно-свободна граматика с език равен на този на получения от Вас минимален автомат.*

2. *Докажете, че $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid 3N_a(w) > 2N_b(w) + 1\}$ не е регулярен.*

3.2. Второ контролно.

1. *Нека Γ е безконтекстната граматика $(\{S, A\}, \{a, b\}, S, \{S \to AA \mid AS \mid b,\ A \to SA \mid AS \mid a\})$ и $\alpha = abaab$. Използвайки алгоритъма CYK, определете дали $\alpha \in L(\Gamma)$.*

2. (1) *Постройте безконтекстна граматика за езика L, състоящ се от всички думи над $\{a, b\}$, в които броят на поддумите ab е равен на броя на поддумите ba.*

(2) *За всеки нетерминал X в граматиката за L, която сте дали, намерете езика $L_X = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid X \Rightarrow^* \alpha\}$;*

3. *Докажете, че $L = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен език.*

* * *

1. *Нека Γ е безконтекстната граматика $(\{S, B\}, \{0, 1\}, S, \{S \to BB \mid SB \mid 0,\ B \to BS \mid SB \mid 1\})$ и $\alpha = 01101$. Използвайки алгоритъма CYK, определете дали $\alpha \in L(\Gamma)$.*

2. (1) *Постройте безконтекстна граматика за езика L, състоящ се от всички думи над $\{a, b\}$, в които броят на поддумите ab е различен от броя на поддумите ba.*

(2) *За всеки нетерминал X в граматиката за L, която сте дали, намерете езика $L_X = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid X \Rightarrow^* \alpha\}$;*

3. *Докажете, че $L = \{a^{3^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен език.*

4. Поправителен изпит

4.1. Първо контролно.

1. (1) *Постройте тотален детерминиран краен автомат с език*

$$L = \{w \in \{0,1\}^* \mid \exists k \geq 0 \text{ и } w \text{ е двоичен запис на } 2^k + 1\}.$$

(2) *Минимизирайте построения от Вас автомат;*

(3) *Намерете контекстно-свободна граматика с език равен на този на получения от Вас минимален автомат.*

2. *Докажете, че езикът $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid w \neq w^R\}$ не е регулярен.*

4.2. Второ контролно.

1. (1) *Постройте безконтекстна граматика за езика*

$$L = \{a^n b^m c^p d^q \mid n,m,p,q \in \mathbb{N} \text{ и } n+p = m+q\};$$

(2) *За всеки нетерминал X в граматиката за L, която сте дали, намерете езика $L_X = \{\alpha \in \{a,b\}^* \mid X \Rightarrow^* \alpha\}$;*

(3) *Преобразувайте граматиката, която сте дали за L_1, в нормална форма на Чомски.*

2. *Докажете, че езикът $L = \{(a^n b^n)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ не е безконтекстен.*

Глава 4

2016/2017

1. Първо контролно

1. *Използвайки обща конструкция намерете недетерминиран краен автомат без недостижими състояния, с език равен на този на регулярния израз:* $b(ab \cup a^*)^*$

2. *Детерминирайте автомата:*

Δ	a	b
$\to A$	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$
B	$\{B, D\}$	$\{C\}$
C	$\{B\}$	$\{C, D\}$
$^*D$	$\emptyset$	$\emptyset$

3. *Представете чрез регулярен израз езика* $L =$

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid w \textit{ завършва с буква, която се е срещала по-рано}\}.$$

4. *Докажете, че езикът* $L = \{b^n aab^{n+2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не е регулярен.*

* * *

1. *Използвайки обща конструкция намерете недетерминиран краен автомат без недостижими състояния, с език равен на този на регулярния израз:* $(b^* \cup ba)^*a$

2. *Детерминирайте автомата:*

Δ	a	b
$\to A$	$\{A, B\}$	$\{A, C\}$
B	$\{C, D\}$	$\{B\}$
C	$\{A\}$	$\{B, D\}$
$^*D$	$\emptyset$	$\emptyset$

3. *Представете чрез регулярен израз езика* $L =$

$$\{w \in \{a, b\}^* \mid w \textit{ започва с буква, която се среща след това}\}.$$

4. *Докажете, че езикът* $L = \{a^{n+1}ba^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *не е регулярен.*

2. Второ контролно

1. *Намерете безконтекстна граматика* Γ' *в нормална форма на Чомски такава, че* $L(\Gamma') = L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$*, където* Γ *е безконтекстната граматика* $(\{u, v, x, y\}, \{S, A, B\}, S,$

$$\{S \to Sxy|A|B,\ A \to B|uAv|\varepsilon,\ B \to A|vBu\}).$$

2. *Постройте безконтекстна граматика с език равен на:*

(1) $L = \{a^n b^m \mid m = 2n \textit{ или } m = 3n\}$;
(2) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n\}$;

За всеки един от използваните нетерминали, посочете породения от него език.

3. *Докажете, че* $L = \{a^n b^m c^n \mid 2n \leq m \leq 3n\}$ *не е безконтекстен език.*

* * *

1. *Намерете безконтекстна граматика Γ' в нормална форма на Чомски такава, че $L(\Gamma') = L(\Gamma) \setminus \{\varepsilon\}$, където Γ е безконтекстната граматика* $(\{a, b, u, v\}, \{S, X, Y\}, S,$

$$\{S \to uvS|X|Y,\ X \to Y|aaX,\ Y \to X|Ybb|\varepsilon\}).$$

2. *Постройте безконтекстна граматика с език равен на:*

(1) $L = \{a^n b^m \mid m = n$ *или* $m = 2n\}$;

(2) $L = \{a^n b^m \mid 2n \leq m \leq 3n\}$;

За всеки един от използваните нетерминали, посочете породения от него език.

3. *Докажете, че* $L = \{a^m b^n c^n \mid n \leq m \leq 2n\}$ *не е безконтекстен език.*

3. Изпит

3.1. Първо контролно.

1. *Минимизирайте автомата, представен със следната таблица:*

δ	a	b
$\to^* A$	F	B
B	E	D
C	C	F
D	D	A
E	B	C
$^*F$	F	E

2. (1) *Постройте краен автомат с език L, състоящ се от всички думи над азбуката $\{a, b, c\}$, имащи първи символ различен от последния;*

(2) *Постройте краен детерминиран автомат със същия език.*

3. *Докажете, че не е регулярен езикът*

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ не дели } |w|_b\}.$$

3.2. Второ контролно.

1. *Нека* $\Gamma_1 = (\{a, b\}, \{S_1, P_1, P_2\}, S_1, \{S_1 \to aP_1P_2|b, P_1 \to aP_1|\varepsilon, P_2 \to P_2b|\varepsilon\})$ *и* $\Gamma_2 = (\{a, b\}, \{S_2, T_1, T_2\}, S_2, \{S_2 \to T_1|T_2, T_1 \to T_1T_1|a, T_2 \to T_1|bT_2b\})$ *са безконтекстни граматики, а* $\mathcal{A} = (\{a, b\}, \{A, B, C\}, A, \{A, B\}, \Delta)$ *е недетерминиран краен автомат с функция на преходите Δ, определена с* $\Delta(A, a) = \{B, C\}$, $\Delta(A, b) = \emptyset$, $\Delta(B, a) = \{B\}$, $\Delta(B, b) = \{A\}$, $\Delta(C, a) = \emptyset$ *и* $\Delta(C, b) = \{B, C\}$. *Намерете безконтекстна граматика с език*

$$(L(\mathcal{A}) \circ L(\Gamma_1)) \cup (L(\Gamma_2))^*.$$

2. (1) *Постройте безконтекстна граматика за езика*

$$L = \{a^{n_1} b a^{n_2} b \ldots b a^{n_{2k-1}} b a^{n_{2k}} \mid k \geq 1 \text{ и } (\forall i \leq k)[n_{2i-1} < n_{2i}]\};$$

(2) *За всеки използван нетерминал X в граматиката за L, която сте дали, посочете езика, който поражда;*

3. *Докажете, че не е безконтекстен езикът*

$$L = \{a^{n_1} b a^{n_2} b \ldots b a^{n_k} \mid k \geq 3 \text{ и } n_1 < n_2 < \ldots < n_k\}.$$

* * *