Задача 27. Даден е граф $G(V, E)$. Да се докаже, че броят на върховете от нечетна степен е четно число.

Доказателство:

Ще използваме формулата на Ойлер: $2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u)$.

$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = \sum_{u \in V_0^2} \deg(u) + \sum_{u \in V_1^2} \deg(u)$, където $\{V_k^m\}, k \leq m-1$ е множеството от върхове със степен даваща остатък k по модулно деление на m.

Това което сме направили е да разбием върховете V на графа G на такива от четна и такива от нечетна степен.

Имаме, че $V_0^2 \cup V_1^2 = V$; $V_0^2, V_1^2 \subseteq V$ и $V_0^2 \cap V_1^2 = \emptyset$, следователно V_0^2 и V_1^2 в действителност е разбиване на V.

Но, $\sum_{u \in V_0^2} \deg(u)$ е сума от четни числа, от където следва, че $\sum_{u \in V_0^2} \deg(u) \equiv 0 \mod 2$.

От друга страна $2|E|$ очевидно също е четно число.

Следователно и $\sum_{u \in V_1^2} \deg(u)$ също е четно число като разлика на две четни числа. Но в тази сума всяко събираемо е от нечетно (следствие от разбиването), от където следва че броят им е четно число. Но броят на тези събираеми е равен точно на броя на върховете от нечетна степен, който е четен. Това е резултатът, който искахме да докажем.

$\square$