Задача 12. Определете кои от свойствата рефлексивност, симетричност, антисиметричност и транзитивност притежава релацията R върху множеството $\mathbb{N} \times \mathscr{P}(\mathbb{N})$, определена по следния начин: $(a, A)R(b, B) \Leftrightarrow a \,|\, b \vee B \subseteq A$.

Решение:

R е релация между естествено число и множество от естествени числа.

a) Рефлексивност.

Да разгледаме наредената двойка (a, A). Трябва да проверим дали $(a, A)R(a, A) \Leftrightarrow a \,|\, a \vee A \subseteq A$, което очевидно е изпълнено тъй като $a \,|\, a$ и $A \subseteq A$ за всяко естествено число $a \in \mathbb{N}$ и за всяко множество от естествени числа $A \subseteq \mathbb{N}$. Следователно R е рефлексивна.

b) Симетричност.

Да разгледаме наредените двоики (a, A) и (b, B). Трябва да проверим дали за всеки две естествени числа a и b и за всеки две множества от естествени числа A и B: ако $(a, A)R(b, B)$, то $(b, B)R(a, A)$. Тоест, ако (a дели b или $B \subseteq A$), то (b дели a или $A \subseteq B$). Но това не винаги е изпълнено. Свидетел за това е следният контрапример:

$$a = 2$$
$$b = 4$$
$$A = \{1,2\}$$
$$B = \{1\}$$

c) Антисиметричност.

Трябва да проверим дали, ако $(a, A)R(b, B)$, то $(b, B)\not R(a, A)$. Това не винаги е изпълнено и свидетел за това е следният контрапример:

$$a = 2$$
$$b = 4$$
$$A = \{1\}$$
$$B = \{1,2\}$$

Тъй като $\big(2,\{1\}\big)\, R\, \big(4,\{1,2\}\big)$, защото $\underbrace{\underbrace{2|4}_{\text{true}} \vee \underbrace{\{1,2\} \subseteq \{1\}}_{\text{false}}}_{\text{true}}$ и

$\big(4,\{1,2\}\big)\, R\, \big(2,\{1\}\big)$, защото $\underbrace{\underbrace{4|2}_{\text{false}} \vee \underbrace{\{1\} \subseteq \{1,2\}}_{\text{true}}}_{\text{true}}$. Но $\big(2,\{1\}\big) \neq \big(4,\{1,2\}\big)$ и следователно R НЕ е и антисиметрична.

От b) и c) следва, че R не е нито релация на еквивалентност, нито частична наредба.

d) Транзитивност.

Трябва да проверим дали, ако $(a \,|\, b) \vee (B \subseteq A)$ и $(b \,|\, c) \vee (C \subseteq B)$, то $(a \,|\, c) \vee (C \subseteq A)$.

Това не е изпълнено винаги и ще намерим контрапример, за да докажем това твърдение. За контраптимера е достатъчно: $a \nmid b$ и $B \subseteq A$ от една страна и от друга $b \mid c$ и $C \nsubseteq B$.

Нека $a = 3$, $b = 2$ и $c = 4$. $A = \{1,2\}$, $B = \{1\}$ и $C = \{4,5\}$.

$\left(3,\{1,2\}\right) R \left(2,\{1\}\right)$, тъй като $\left(\underbrace{(3 \mid 2)}_{\text{false}} \vee \underbrace{(\{1\} \subseteq \{1,2\})}_{\text{true}}\right)$ е винаги истина и $\left(2,\{1\}\right) R \left(4,\{4,5\}\right)$, тъй като $\left(\underbrace{(2 \mid 4)}_{\text{true}} \vee \underbrace{(\{4,5\} \subseteq \{1,2\})}_{\text{false}}\right)$ е винаги лъжа. Следователно, $(a, A) \not R (c, C) \Rightarrow R$ НЕ е и транзитивна.

$\square$