ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 1
ТЕОРИЯ 1

1. $A \subseteq B$. Нека A и B са две множества. Казваме, че A е подмножество на B и бележим с $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент от A принадлежи и на B.

2. $A = B$. Нека A и B са две множества. Казваме, че A е равно на B и бележим $A = B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент от A принадлежи и на B $(A \subseteq B)$ и обратно - всеки елемент от B принадлежи и на B $(A \subseteq B)$.

3. Разбиване на множество. Нека A е множество и за произволно $i \in I$, A_i също е множество. Фамилията $\{A_i\}_{i \in I}$ наричаме разбиване на A , ако:

- $\forall i \in I \ : \ A_i \neq \emptyset, A_i \in A$
- $A_i \cap A_j = \emptyset$, за всяко $i \neq j, i, j \in I$;
- $\bigcup_{i \in I} A_i = A$

4. $x \in \bigcup_{i=0}^{n} A_i$. Елементът x принадлежи на обединението на множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$ тогава и само тогава, когато x принадлежи на *поне* едно от множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

5. $x \in \bigcap_{i=0}^{n} A_i$. Елементът x принадлежи на сечението на множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$ тогава и само тогава, когато x принадлежи на *всяко* едно от множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

6. $x \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n$. $\exists a_o \in A_0, a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$ такива, че $x = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ е наредена $n + 1$-орка.

7. Бинарна релация в A. n-местна релация в A се нарича всяко подмножество R на декартовото произведение $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} = A^n$, т.е. $R \subseteq A^n$. В частност, ако $n = 2$, релацията R наричаме бинарна (двуместна) релация и бележим $R \subseteq A \times A$.

8. Рефлексивна релация. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е рефлексивна, ако за произволно $a \in A$ е изпълнено $(a, a) \in R$.

9. Антирефлексивна релация. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че E е антирефлексивна, ако за произволно $a \in A$ е изпълнено $(a, a) \notin R$.

10. Симетрична релация. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е симетрична, ако за всеки два *различни* елемента $b \in A$ е изпълнено: ако $(a, b) \in R$ и $(b, a) \in R$, то $a = b$.

11. Антисиметрична релация. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е антисиметрична, ако за всеки два *различни* елемента $a, b \in A$ е изпълнено: ако $(a, b) \in R$, то $(b, a) \in R$.

12. Транзитивна релация. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е транзитивна, ако за всеки три елемента $a, b, c \in A$ е изпълнено: ако $(a, b) \in R$ и $(b, c) \in R$, то $(a, c) \in R$. При проверка за транзитивност взимаме произволни *различни* a, b, c.

13. Релация на еквивалентност. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е релация на еквивалентност, ако R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна.

14. Частична наредба. Нека R е бинарна релация в $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е частична наредба, ако R е едновременно рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

15. Инективно изображение. Нека $f : A \to B$. Казваме, че функцията f е инективна (*инекция*), ако образите на всеки два различни елемента $a, b \in A$ са различни, т.е. $\forall a \neq b(f(a) \neq f(b))$.

16. Сюрективно изображение. Нека $f : A \to B$. Казваме, че функцията f е сюрективна (*сюрекция*), ако за всеки елемент $b \in B$, съществува $a \in A$, такъв че $f(a) = b$.

17. Изброимо множество. Всяко крайно множество, както и всяко *безкрайно* множество, от което съществува *биекция* в множеството на *естествените* числа е изброимо.

18. Най-много изброимо множество. Казваме, че множеството A е най-много изброимо, ако A е крайно или ако A е изброимо.

19. Крайно множество и брой на елементите му. Множеството A е крайно, ако $A \neq \emptyset$ или $\exists n \in N, n \geq 1$ и биекция $f : A \rightarrow I_n$. Естественото число $|A| = 0$, ако $A = \emptyset$ и $|A| = n$, в противен случай, наричаме брой на елементите на A.

20. Клас на еквивалентност породен от елемент. Нека A е непразни множество и R е релация на еквивалентност в A. Клас на еквивалентност относно R, съдържащ елемента a се нарича следното множество:
$[a]_R = \{b | b \in A \ \& \ bRa\}$

21. Верига в ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.) и $B \subseteq A$. Казваме, че B е верига (<u>линейно наредено</u>), ако за всеки два елемента $a, b \in B$ е изпълнено, че a и b са <u>сравними</u> относно R.

22. Антиверига в ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.) и $B \subseteq A$. Казваме, че B е антиверига (<u>линейно наредено</u>), ако за всеки два <u>различни</u> (<u>*важно е да се отбележи, че са различни, защото все пак са несравними*</u>) елемента $a, b \in B$ е изпълнено, че a и b са <u>несравними</u> относно R.

23. Най-малък елемент на ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е най-малък, т.т.к. за всяко $b \in A$ е изпълнено $a \leq b$.

24. Най-голям елемент на ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е най-голям, т.т.к. за всяко $b \in A$ е изпълнено $a \geq b$.

25. Минимален елемент на ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е минимален, т.т.к. не съществува елемент $b \in A$ такъв, че $b < a$.

26. Максимален елемент на ч.н.м. Нека $< A, R >$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е максимален, т.т.к. не съществува елемент $b \in A$ такъв, че $b > a$.

27. Твърденията за класовете на еквивалентност, свързани с разбиване на множеството. Нека A е непразно множество и R е релация на еквивалентност в A. Тогава $\{[a]_R | a \in A\}$ е разбиване на множеството A.

$\{[a_i]\}_{i} \in I$:

- $a_i \in [a_i]_R \neq \emptyset$
- ако $a_i \not R a_j$, то $[a_i] \cap [a_j] = \emptyset$;
- $\bigcup_{i \in I} [a_i]_R = A.$

28. Твърденията за класовете на еквивалентност, свързани с това дали два елемента са в релация или не. Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава за всеки два елемента $a, b \in A$ е изпълнено:

- ако aRb, то $[a]_R = [b]_R$;
- ако $a \not R b$, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$.

29. Свойства на изброимите множества.

- Едно множество A е изброимо, ако елементите му могат да се подредят в безкрайна редица без повторения;
- Ако A е НМИ и A не е крайно, то A е изброимо;
- Ако A е изброимо, то $A \times A = A^2$ също е изброимо;
- Декартовото произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, както и множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ са изброими множества, но множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ и множеството $2^{\mathbb{N}}$ не са изброими множества.

30. Свойства на най-много изброимите множества.

- Едно множество е НМИ, т.т.к. е празно или елементите му могат да се подредят в безкрайна редица (може и с повторения);
- Ако едно множество B е НМИ и $A \subseteq B$, то множеството Aсъщо е НМИ;
- Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са НМИ, то $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ е НМИ;
- Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ е безкрайна редица от НМИ, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ също е НМИ.

31. твърдението за съществуване на минимален/максимален елемент. Нека $< A, R >$ е ч.н.м. и A е крайно. Тогава A притежава минимален и максимален елемент.

32. Твърденията за топологична сортировка (влагане на ч.н.м. в линейно наредено множество). Нека $< A, R >$ е ч.н.м. и A е крайно. Тогава съществува продължение R_1 на R, такова че $< A, R_1 >$ е линейно ч.н.м.