Задача 11. Нека $\trianglelefteq$ е релация над $\mathbb{Z}$, определена чрез $x \trianglelefteq y \Leftrightarrow x = y \vee x + 1 < y$. Проверете дали тази релация е частична наредба.

Решение:

a) Рефлексивност.

Нека $x \in \mathbb{Z}$. Тогава $x = x$, откъдето следва, че $[x = x \vee x + 1 < x]$ е винаги истина. Следователно $x \trianglelefteq x$, тоест релацията $\trianglelefteq$ е рефлексивна.

b) Антисиметричност.

Нека $x \trianglelefteq y$. Тогава $[x = y \vee x + 1 < y]$. Искаме да докажем, че . За целта допускаме, че $y \trianglelefteq x$. Тогава от допускането и $[y = x \vee y + 1 < x]$ също ще е истина. Но във всеки друг сценарии различен от $x = y$ това ще доведе до тривиално противоречие и следователно $x = y$. Но x и y са произволни, което е противоречие с допускането, че и $y \trianglelefteq x$. Следователно релацията $\trianglelefteq$ е антисиметрична.

c) Транзитивност.

Нека $x \trianglelefteq y$ и $y \trianglelefteq z$. Тогава $[x = y \vee x + 1 < y]$ и $[y = z \vee y + 1 < z]$ са истина. Ще докажем, че $x \trianglelefteq z$, тоест ще докажем, че $[x = z \vee x + 1 < z]$.

(1) $x = y, y = z \Rightarrow x = z \Rightarrow x \trianglelefteq z$;
(2) $x = y, y + 1 < z \Rightarrow x + 1 < z \Rightarrow x \trianglelefteq z$;
(3) $x + 1 < y, y = z \Rightarrow x + 1 < z \Rightarrow x \trianglelefteq z$;
(4) $y + 1 < z, x + 1 < y \Rightarrow x + 1 < y < z - 1 \Leftrightarrow x + 2 < z$, но $x + 1 < x + 2 < z$ $\Rightarrow x + 1 < z$ и така $x \trianglelefteq z$.

Тъй като $\trianglelefteq$ е рефлексивна, антисиметрична и транзитивна (във всеки един от 4-те случая), то $\trianglelefteq$ е частична наредба над $\mathbb{Z}$.

$\square$