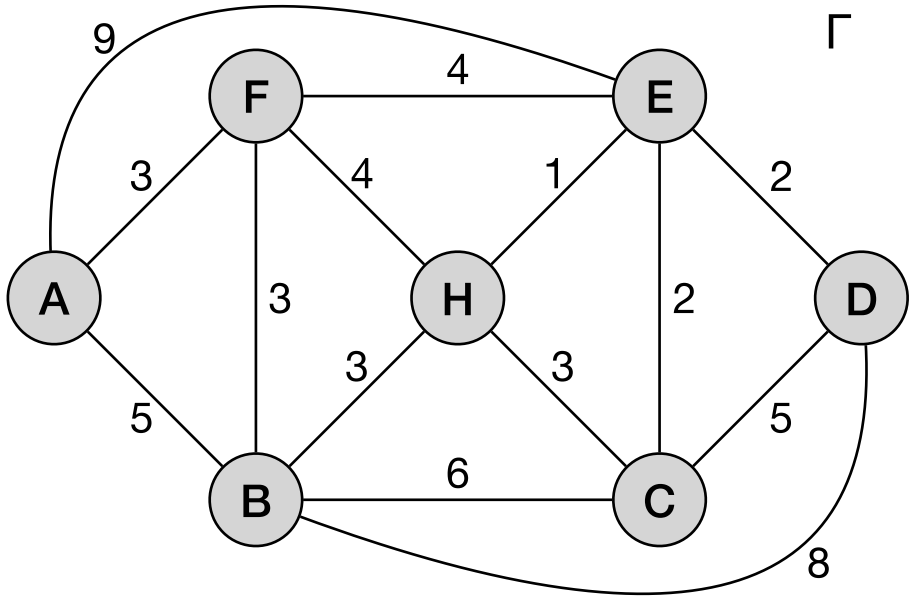
**ДС-1 второ контролно**
(2019-01-13)

**Задача 1**. (1.5 т.) Даден е графът $\Gamma$ от фигурата по-долу.




a) (0.75 т.) Намерете теглата на най-леките пътища от върха $D$ до всички останали върхове на $\Gamma$, като използвате алгоритъма на Дейкстра;

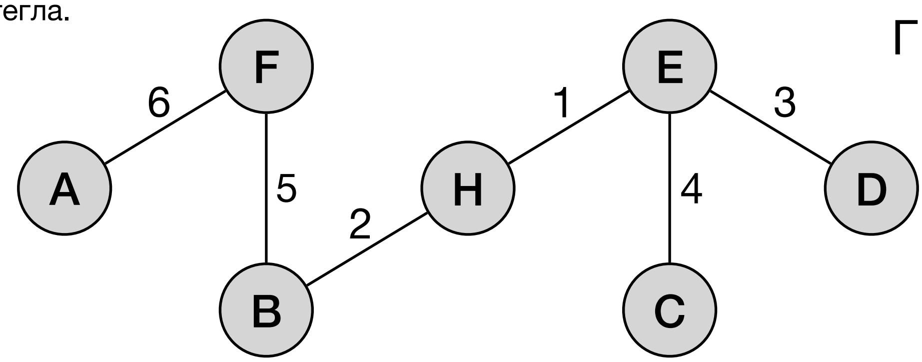
b) (0.75 т.) Намерете минималното покриващо дърво на $\Gamma$, като използвате алгоритъма на Крускал.

**Решение**:

a)

| A | B | C | D | E | F | H | непосетени |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ∞ | ∞ | ∞ | 0 | ∞ | ∞ | ∞ | A,B,C,D,E,F,H |
| ∞ | 8 | 5 | – | 2 | ∞ | ∞ | A,B,C,E,F,H |
| ∞ | 8 | 4 | – | – | 6 | 3 | A,B,C,F,H |
| ∞ | 5 | 4 | – | – | 6 | – | A,B,C,F |
| ∞ | 5 | – | – | – | 6 | – | A,B,F |
| 10 | – | – | – | – | 6 | – | A,F |
| 9 | – | – | – | – | – | – | A |
| – | – | – | – | – | – | – | ∅ |

b) Тук числата по ребрата на графа репрезентират последователността на избиране, а не техните тегла.




□

**Задача 2**. (1.5 т.) Нека $\Gamma$ е граф с $2n$ на брой върхове ($n \geq 2$), в който има точно един връх от степен $n-1$, а всички останали върхове са от степен поне $n$. Докажете, че $\Gamma$ е свързан.

**Доказателство**:

Допускаме, че $\Gamma$ не е свързан. Тогава той ще има поне две компоненти на свързаност, като в едната ще има точно един връх от степен $n-1$. В тази компонента с този връх от степен $n-1$ ще има и други върхове, които ще са поне $n$ на брой, а в другите компоненти на свързаност ще има по поне $n+1$ на брой върхове. Тоест $\Gamma$ има поне $n+(n+1)=2n+1$ върхове, което е противоречие с условието, че $\Gamma$ има точно $2n$ на брой върхове. Това противоречие е породено от допускането, че $\Gamma$ не е свързан. Следователно $\Gamma$ е свързан граф.

$\square$

**Задача 3**. (1.5 т.) Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Намерете броя на елементите на множеството $\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| \geq 2\}$.

**Решение**:

Нека $T = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| \geq 2\}$, $S = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| < 2\}$.

Тъй като $T, K \subseteq S$, $T \cap K = \emptyset$ и $T \cup K = S$, то $T$ и $K$ са разбиване на $S$ и от прицнипа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

На всяка наредена двойка $(A,B)$ съпоставяме думата $\beta$.
$(A,B) \longmapsto \beta = u_1 u_2 \ldots u_n$. Конструираме следната азбука: $\Sigma = \{XX, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{X}\,\overline{Y}\}$, където за всяка буква $u_k$, $k \leq n$ имаме:

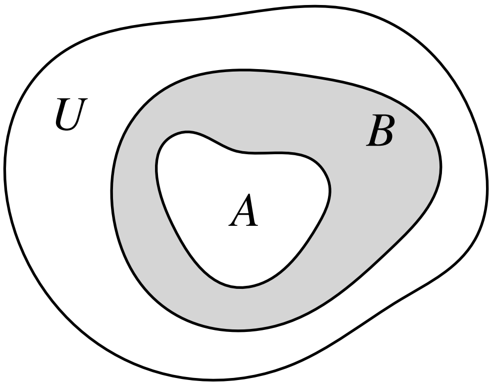
$$u_k = \begin{cases} XY, \text{ ако } u_k \in A, u_k \in B, \\ X\overline{Y}, \text{ ако } u_k \in A, u_k \notin B, \\ \overline{X}X, \text{ ако } u_k \notin A, u_k \in B, \\ \overline{X}\,\overline{Y}, \text{ ако } u_k \notin A, u_k \notin B. \end{cases}$$

Съществува биекция между множеството на думите $\alpha$ и множеството на наредените двойки $(A,B)$ (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне). Всяка дума $\beta$ ще е над азбуката $\Sigma$. Следователно ще броим възможните думи.

$S : S = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$
$(A,B) \in S \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq U \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})\neg[u_k \in A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})\neg[u_k = X\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow X\overline{Y}$ не участва в думата $\beta_{(A,B)}$, тоест $\beta_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\Sigma \backslash \{X\overline{Y}\}$. Следователно $|S| = 3^n$.

$$K : K = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| < 2\} =$$
$$= \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |(U \backslash A) \cap B| = 1\}}_{K_1}$$

$K_0$ :




$$\begin{cases} |(U \setminus A) \cap B| = 0 \Rightarrow A = B \\ \Rightarrow \overline{X}Y \text{ и } X\overline{Y} \text{ не може да участват в думата} \\ \beta_{(A,B)} \Rightarrow \beta_{(A,B)} \text{ е дума над азбука от два} \\ \text{типа букви и } |K_0| = 2^n. \end{cases}$$

$K_1$ : $B$ има точно един елемент повече от $A$. Буква от тип $X\overline{Y}$ участва точно веднъж.

$\binom{n}{1} \times 2^{n-1} = n \times 2^{n-1}$.

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n \times 2^{n-1}$.

$\square$