

Задача 32. Даден е свързан граф G с $2n$ върха, като n от тях имат степен равна на 3. Да се докаже, че в G има цикъл.

Доказателство:

Искаме да докажем, че G не е дърво. Допускаме, че G е дърво, тоест че в G няма цикъл. Тогава броя на ребрата на G ще е $2n - 1$. От формулата на Ойлер имаме, че:

$$2(2n - 1) = 2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) \geq n \times 3 + n \times 1 \geq 4n \Rightarrow 4n - 2 \geq 4n,$$

което е противоречие с допускането. Следователно в G има поне един цикъл.

□