ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ II
ТЕОРИЯ I

1. Регулярен израз.
   Регулярен израз над азбуката Σ е стринг над азбуката $\Sigma \cup \{\emptyset, \cdot, \cup, ^*\}$, който може да се дефинира индуктивно както следва:
   - $\emptyset$ и всеки елемент от Σ е регулярен израз;
   - Ако α и β са регулярни изрази, то $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \cup \beta$ и α^* са регулярни изрази;
   - Нищо друго не е регулярен израз, освен ако не следва от първите две условия.

2. Регулярен език $\mathscr{L}(\alpha)$ за регулярен израз α.
   $\mathscr{L}$ е функцията, която описва връзката между регулярен израз и езика, който той задава. $\mathscr{L}$ е дефинирана индуктивно както следва:
   - $\mathscr{L}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathscr{L}(\alpha) = \{\alpha\}$, за всяко $\alpha \in \Sigma$ (дори за $\alpha = \varepsilon$);
   - Ако α и β са регулярни изрази, то $\mathscr{L}(\alpha \cdot \beta) = \mathscr{L}(\alpha) \cdot \mathscr{L}(\beta)$, $\mathscr{L}(\alpha \cup \beta) = \mathscr{L}(\alpha) \cup \mathscr{L}(\beta)$, $\mathscr{L}(\alpha^*) = \left(\mathscr{L}(\alpha)\right)^*$.

3. Рефлексивно и транзитивно затваряне на бинарна релация.
   Нека релацията $R \subseteq A^2$ задава ориентиран граф над множеството от върхове A. Рефлексивно и транзитивно затваряне на R е релацията:
   $R^* = \left\{(a, b) : a, b \in A \text{ и съществува път от } a \text{ до } b \text{ в } R\right\}$.
   Индуктивна дефиниция на R^*:
   - $\forall a \in A : (a, a) \in R^*$;
   - $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R^*$;
   - $(a, b) \in R^* \wedge (b, c) \in R^* \Rightarrow (a, c) \in R^*$.

4. Затваряне на множеството $B \subseteq A$ относно релацията $B \subseteq A^2$.
   Нека A е непразно множество и нека $R \subseteq A^2$ е бинарна релация в A. Тогава подмножеството B на A е затворено относно R, ако $b_2 \in B$ всеки път когато $b_1 \in B$ и $(b_1, b_2) \in R$.

5. Краен детерминиран автомат.
   Краен детерминиран автомат (КДА) наричаме наредената петорка $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \delta, s, F\right)$, където Q е крайно множество от състояния, Σ е крайна азбука, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ е функция на преходите, $s \in Q$ е начално състояние, $F \subseteq Q$ е множество от заключителни (финални) състояния.

6. Краен недетерминиран автомат.
   Краен недетерминиран автомат (КНДА) наричаме наредената петорка $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \Delta, s, F\right)$, където Q е крайно множество от състояния, Σ е крайна азбука, $\Delta \subseteq Q \times \left(\Sigma \cup \{\varepsilon\}\right) \times Q$ е релация на преходите, $s \in Q$ е начално състояние, $F \subseteq Q$ е множество от заключителни (финални) състояния.

7. $\vdash_{\mathscr{A}}$ за краен детерминиран автомат.
   За краен детерминиран автомат $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \delta, s, F\right)$, релацията $\vdash_{\mathscr{A}}$ дефинираме по следния начин: $(q, \omega) \vdash_{\mathscr{A}} (q', \omega') \Leftrightarrow \omega = a\omega'$ и $a \in \Sigma; q, q' \in Q; \omega, \omega' \in \Sigma^*$.

8. $\vdash_{\mathscr{A}}$ за краен недетерминиран автомат.
   За краен детерминиран автомат $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \Delta, s, F\right)$, релацията $\vdash_{\mathscr{A}}$ дефинираме по

следния начин: $(q, \omega) \vdash_{\mathscr{A}} (q', \omega') \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, такава че $\omega = u\omega'$ и $(q, u, q') \in \Delta$. $q, q' \in Q; \omega, \omega' \in \Sigma^*$.

9. $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ за краен детерминиран (недетерминиран) автомат $\mathscr{A}$.
За крайния детерминиран (недетерминиран) автомат $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \underset{\Delta}{\delta}, s, F\right)$, езикът $\mathscr{L}(\mathscr{A})$ дефинираме по следния начин: $\mathscr{L}(\mathscr{A}) = \{\omega \,|\, \omega \in \Sigma^*$ и $(s, \omega) \vdash^*_{\mathscr{A}} (q, \varepsilon), q \in F\}$, където $\vdash^*_{\mathscr{A}}$ е рефлексивното и транзитивното затваряне на релацията $\vdash_{\mathscr{A}}$.

10. Кога една дума се разпознава (приема) от даден краен детерминиран автомат $\mathscr{A}$.
Казваме, че $\omega \in \Sigma^*$ се разпознава (приема) от автомата $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \delta, s, F\right) \Leftrightarrow$ $(s, \omega) \vdash^*_{\mathscr{A}} (f, \varepsilon)$, където $\omega \in \Sigma$ и $f \in F$.

11. Релация на еквивалентност $\approx_L$ за даден език L.
Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е език и $x, y \in \Sigma^*$. Казваме, че x и y са еквивалентни спрямо L и бележим $x \approx_L y$, ако за всяка дума $z \in \Sigma$, е изпълнено $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. Лесно се проверява, че $\approx_L$ е релация на еквивалентност.

12. $E(q)$ за краен недетерминиран автомат $\mathscr{A} = \left(Q, \Sigma, \Delta, s, F\right)$.
За всяко състояние $q \in Q$, нека $E(q)$ е множеството от всички състояния на $\mathscr{A}$, които могат да се достигнат от q без да се четат каквито и да е букви:
$E(q) = \{p \in Q \,|\, (q, \varepsilon \vdash^*_{\mathscr{A}} (p, \varepsilon)\}$.

13. Лемата за разрастването на регулярни езици.
ЗА ВСЕКИ регулярен език L,
СЪЩЕСТВУВА естествено число $n > 0$, зависещо само от L, такова че
ЗА ВСЯКА дума $\omega \in L$ с дължина НЕ по-малка от $n : |\omega| \geq n$,
СЪЩЕСТВУВАТ думи x, y и z, за които $x \cdot y \cdot z = \omega$, $y \neq \varepsilon$ и $|x \cdot y| \leq n$ такива, че
ЗА ВСЯКО $i > 0 : x \cdot y^i \cdot z \in L$.

14. Теоремата и следствието на Майхил-Нероуд за регулярни езици.
Нека $L \subset \Sigma^*$ е регулярен език. Тогава съществува краен детерминиран автомат $\mathscr{A}$, който разпознава L с точно толкова състояния, колкото са класовете на еквивалентност относно релацията $\approx_L$. Следствие: езикът L е регулярен $\Leftrightarrow$ индексът на релацията $\approx_L$ е краен, тоест $|I_{\approx_L}| = n \in \mathbb{N}$.

15. Каква е сложността на изучените алгоритми за:
   - Построяване на съответен регулярен израз по краен автомат – експоненциална $\sigma\left(3^{|k|}\right)$.
   - Детерминизация на недетерминиран автомат – експоненциална $\sigma\left(2^{|k|} \times |k|^2 \times |\Sigma| \times |\Delta| \times |k|^3\right)$.
   - Проверка дали два крайни недетерминирани автомата са еквивалентни – експоненциална.
   - Проверка дали $\mathscr{L}(\alpha) = \mathscr{L}(\beta)$ по дадени два регулярни израза α и β – експоненциална.
   - Минимизация на краен детерминиран автомат – полиномиална $\sigma\left(|k|^3 \times |\Sigma|\right)$.

- Съответен краен недетерминиран автомат по регулярен израз – полиномиална $\sigma(2|\alpha| + 1)$.
- Проверка дали два крайни детерминирани автомата са еквивалентни или не – полиномиална.

16. Регулярни операции:

Регулярни операции ($\cup$, $\cdot$, $*$) над езици, рапознавани от НДКА.

Нека $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ са НДКА (недетерминирани крайни автомати):

- Автомат $\mathscr{A}_\cup$ с език равен на $\mathscr{L}(\mathscr{A}_1) \cup \mathscr{L}(\mathscr{A}_2)$:
  1) Състояния: състоянията на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ и ново състояние q;
  2) Начално състояние: новото състояние q;
  3) Финални състояния: финалните състояния на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ се запазват. Новото състояние q е финално тогава и само тогава, когато поне едно от началните състояния на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ е финално;
  4) Преходи: преходите в $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ се запазват. Новото състояние q повтаря преходите на началните състояния на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$.

- Автомат $\mathscr{A}_\bullet$ с език равен на $\mathscr{L}(\mathscr{A}_1) \cdot \mathscr{L}(\mathscr{A}_2)$:
  1) Състояния: състоянията на $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$;
  2) Начално състояние: началното състояние на левия автомат $\mathscr{A}_1$;
  3) Финални състояния: финалните състояния на десния автомат $\mathscr{A}_2$. Добавяме финалните състояния на $\mathscr{A}_1$ тогава и само тогава, когато началното състояние на десния автомат $\mathscr{A}_2$ е финално;
  4) Преходи: преходите в $\mathscr{A}_1$ и $\mathscr{A}_2$ се запазват. Всяко финално състояние на левия автомат $\mathscr{A}_1$ повтаря преходите на началното състояние на десния автомат $\mathscr{A}_2$.

- Автомат $\mathscr{A}^*$ с език равен на $\left(\mathscr{L}(\mathscr{A}_1)\right)^*$:
  1) Състояния: състоянията на $\mathscr{A}_1$ и ново състояние q;
  2) Начално състояние: новото състояние q;
  3) Финални състояния: финалните състояния на $\mathscr{A}_1$ и q.
  4) Преходи: преходите в $\mathscr{A}_1$. Всички финални състояния на $\mathscr{A}^*$ повтарят преходите на анчалното състояние на $\mathscr{A}_1$.