ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ II
ТЕОРИЯ II

37. Краен ориентиран (мулти)граф.
Нека $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ е крайно множество, елементите на което ще наричаме върхове, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ е крайно множество, елементите на което ще наричаме ребра. Функцията $f_G : E \to V \times V$, съпоставяща на всяко ребро – **наредена** двойка от върхове, наричаме краен ориентиран (мулти)граф. Записваме $G(V, E, f_G)$ и четем: „краен ориентиран (мулти)граф G с върхове V, ребра E и свързваща функция f_G“.

38. Краен ориентиран граф.
Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф и функцията f_G е инекгтивна. Тогава $G(V, E, f_G)$ наричаме краен ориентиран граф и бележим само с $G(V, E)$, където $E \subseteq V \times V$.

39. Краен неориентиран граф (или само граф).
Нека $G(V, E)$ е краен ориентиран граф, такъв че релацията $E \subseteq V \times V$ е антирефлексивна и симетрична. Тогава $G(V, E)$ наричаме краен неориентиран граф илои просто граф.

40. Краен неориентиран мултиграф.
Крайният неориентиран граф $G(V, E)$ може да превърнем в краен неориентиран мултиграф, ако позволим повече от едно неориентирано ребро да свързва два върха от V, както и наличието на примки. Тоест ако вместо множеството $E \subseteq V \times V$ вземем мултимножеството от елементите на $V \times V$.

41. Подмултиграф на краен мултиграф.
Нека $G(V, E, f_G)$ е краен мултиграф и $V' \subseteq V$. Тогава подмултиграф $G'(V', E', f'_G)$ породен от V' се нарича мултиграфът G', за който E' се състои от всички ребра от E, на които краищата им са във V'. Функцията f'_G е рестрикцията на f_G върху E'.

42. Път в краен ориентиран граф.
Нека $G(V, E)$ е краен ориентиран граф. Път в G се нарича всяка крайна редица $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ от върхове, такава че $(v_{i_{p-1}}, v_{i_p}) \in E, v_{i_{p-1}} \neq v_{i_{p+1}}, v_{i_p} \neq v_{i_{p-1}}, i = \overline{1, n}.$
n е дължината на пътя, а v_{i_0} и v_{i_n} са съответно началото и края му.

43. Маршрут в краен (мулти)граф.
Нека $G(V, E, f_G)$ е краен (мулти)граф. Редицата от редуващи се върхове и ребра на G: $v_{i_0}, e_{l_1}, v_{i_1}, e_{l_2}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k-1}}, e_{l_k}, v_{i_k}$, в която $f_G(e_{l_j}) = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j}), j = \overline{1, k}$ наричаме маршрут в G от v_{i_0} до v_{i_k}. Числото k наричаме дължина на маршрута. Ако $v_{i_0} = v_{i_k}$, редицата (маршрута) наричаме контур.

44. Матрица на съседства.
Матрицата на съседства на крайния ориентиран мултиграф $G(V, E, f_G)$, наричаме матрицата $M = \|a_{ij}\|$ с размери $|V| \times |V|$, ако за всеки врък $v_i, v_j \in V$ е в сила равенството: $a_{ij} = |\{e \,|\, e \in E, f_G(e) = (v_i, v_j)\}|$.

45. Теоремата за броя на маршрутите между два върха чрез матрица на съседство.
Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф и нека $M = \|a_{ij}\|$ е матрицата му на

съседства. Нека $M^k = \|a_{ij}^{(k)}\|$ е k-та степен на M при целочислено умножение на матрици. Тогава $a_{ij}^{(k)}$ е равно на броят на маршрутите с дължина k от v_i до v_j в G.

46. Кореново дърво (индуктивна дефиниция).
$T(\{r\}, \emptyset)$ е дърво с корен r и единствено листо r. Нека $T(V, E)$ е дърво с корен r и листа $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Нека $v \in V$ и $u \notin V$. Тогава $T'(V \cup \{u\}, E \cup \{(v, u)\})$ е дърво с корен r. Ако $v = l_i$ за някое $i = \overline{1, n}$, то листата на T' са $l_1, \ldots, l_{i-1}, u, l_{i+1}, \ldots, l_n$. Ако $v \neq l_i$ за всяко $i = \overline{1, n}$, то листата на T' са $l_1, \ldots, l_n, u$.

47. Дърво чрез граф. **Характеризация на дърветата**.
Следните твърдения са еквивалентни:
- Графът G е дърво.
- Дървото е свързан граф без цикли.
- Всеки два върха на графа G са свързани с точно един прост път (прост или нормален път е този път, в който не се повтарят нито ребра нито върхове).
- Графът G е свързан (има точно една компонента на свързаност) и броя на ребрата му е с единица по-малък от броя на върховете му: $|E| = |V| - 1$.
- Графът G е свързан и минимален относно свързаността. Тоест ако махнем някое ребто от G – той ще престане да бъде свързан и ще се разбие на две компоненти на свързаност.
- Графът G е ацикличен и максимален относно ацикличността. Тоест ако добавим каквото и да е ново ребро в G – ще се образува цикъл.

48. Височина на кореново дърво.
Нека $T(V, E)$ е кореново дърво и $v \in V$. Височината на върха v се нарича дължината на единствения път от корена на дървото T до върха v. Височината на дървото T се нарича максимума от височините на всички върхове на T.

49. Разклоненост на кореново дърво.
Нека $T(V, E)$ е кореново дърво и $v \in V$. Разклоненост на върха v се нарича броя на синовете на върха v (броя на съседите на върха vv минус 1 – бащата на върха v). Разклоненост на дървото T наричаме максимума от разклоненостите на всички върхове на T.

50. Твърдението кога един граф има покриващо дърво.
Всеки свързан граф $G(V, E)$ притежава поне едно покриващо дърво $G'(V, E')$, където $E' \subseteq E$.

51. Ойлеров път в граф.
Път в сързания граф G, който минава през всяко ребро на G, но ТОЧНО ВЕДНЪЖ, наричаме Ойлеров път.

52. Твърденията за Ойлеров път.
В един свързан граф G има Ойлеров път, който не е Ойлеров цикъл тогава и само тогава, когато G има точно два върха от нечетна степен.

53. Теорема за Ойлеров граф.
Един граф G е Ойлеров, тоест има Ойлеров път, който е цикъл тогава и само тогава, когато G е свързан и всеки негов връх е от четна степен.

54. Хамилтонов път в граф.

Път в свързания граф G, който минава през всеки връх на G, но ТОЧНО ВЕДНЪЖ, наричаме Хамилтонов път.

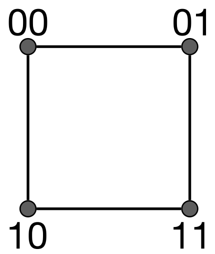
55. Хамилтонов граф.

графът G е Хамилтонов, когато G е свързан и в него има Хамилтонов път, който е цикъл. Тоест път в който само началото и краят учатват повече от един път (точно два пъти), тъй като съвпадат.

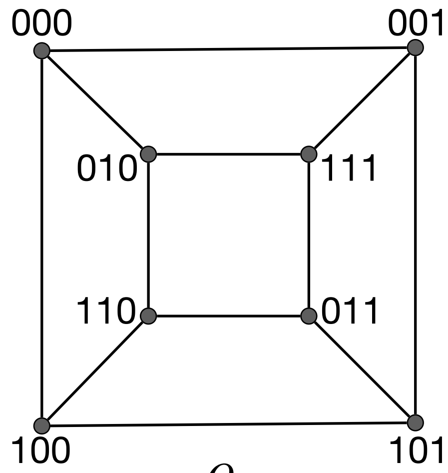
56. Твърдението за Хамилтонови графи.

Графът $B_n(J_2^n, E_n), n \geq 1$, с върхове n-мерните двоични вектори (J_2^n) и ребра $E_n = \{(\alpha_i, \alpha_j) \,|\, \rho(\alpha_i, \alpha_j) = 1\}$ е Хамилтонов. Тоест n-мерните двойчни кубове са Хамилтонови графи.

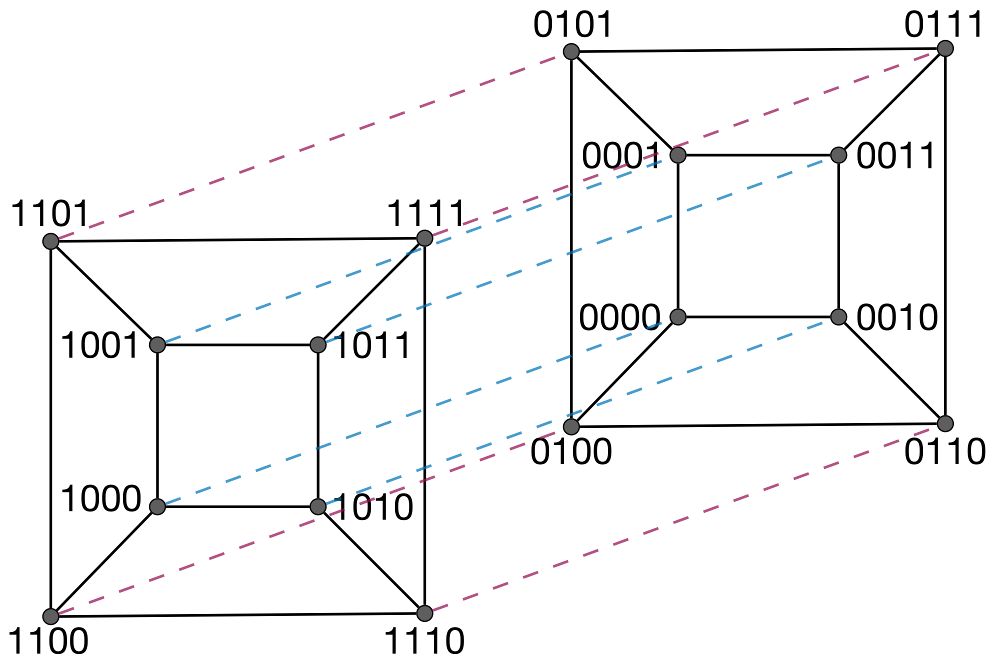
Q_1



Q_2



Q_3



Q_4

57. Линейна булева функция и полином на Жегалкин.

Полином на Жегалкин за n променливи:

$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_3, \ldots, x_n) = & \; a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus \ldots \oplus a_n x_n \oplus \\
& \oplus a_{12} x_1 x_2 \oplus a_{13} x_1 x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-1,n} x_{n-1} x_n \oplus \\
& \oplus a_{123} x_1 x_2 x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-2,n-1,n} x_{n-2} x_{n-1} x_n \oplus \\
& \oplus a_{1,2,\ldots,n} x_1 x_2 \ldots x_n = \\
& = a_0 \oplus \bigoplus_{1 \le i \le n} a_i x_i \bigoplus_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x)j \oplus \ldots \oplus a_{1,2,\ldots,n} x_1 x_2 \ldots x_n, \text{ където } a_i \in \{0,1\}
\end{aligned}
$$

Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин. казваме, че една булева функция е линейна, ако нейният полином на Жегалкин е линеен: $a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \ldots \oplus a_n x_n$.

58. Монотонна булева функция и подходящата наредба за тази дефиниция.
    Булевата функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наричаме монотонна, ако $\forall \alpha, \beta \in J_n^2, \alpha \preceq \beta$ (където с $\preceq$ означаваме лексикографска наредба) е в сила $f(\alpha) \le f(\beta)$.

59. Шеферова булева функция.
    Булевата функция f наричаме Шеферова, ако $\left[\{f\}\right] = \mathscr{F}_2$. Тоест f сама образува пълно множество от двоични функции ($\mathscr{F}_2 = \{f \mid f$ е двоична функция$\}$). Съгласно теоремата на Пост, това означава, че $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S \cup M \cup L$.

60. Предпълно множество от функции.
    Казваме, че едно множество от двоични функции е предпълно, ако не е пълно, но добавяйки към него произволна двоична функция, която не е от това множество, то множеството ще стане пълно.
    Тоест $F \in \mathscr{F}_2 : [F] \ne \mathscr{F}_2 \wedge (\forall f \notin F \wedge f \in \mathscr{F}_2) \Rightarrow \left[F \cup \{f\}\right] = \mathscr{F}_2$.

61. Принцип на Дирихле.
    Нека A и B са крайни множества и $|A| > B$. Тогава за всяко изображение $f : A \to B$ (за всяка тотална функция) съществуват елементи $a, b \in A, a \ne b$ и $f(a) = f(b)$.

62. Принцип на чекмеджетата (Pigeonhole principle).
    Нека имаме p на брой предмета и r на брой чекмеджета. Ако $r < p$, то както и да поставим всички предмети в чекмеджетата, ПОНЕ в едно чекмедже ще има ПОНЕ два предмета.

63. Принцип на биекцията.
    Нека A и B са крайни множества. Съществува биекция $f : A \to B$ тогава и само тогава, когато $|A| = |B|$.

64. Принцип на събирането (Принцип на разбиването).
    Нека A е крайно множество, а $R = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ е разбиване на A. Тогава $|A| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$.

65. Принцип на разликата.
    Нека A и B са крайни множества и $A \in B$. Тогава $|B \backslash A| = |B| - |A|$.

66. Принцип на умножението (принцип на декартовото произведение). Нека A и B са крайни множества. Тогава $|A \times B| = |A| \times |B|$.

67. Принцип на делението.
Нека A е крайно множество е $B = A \times C$, където C също е крайно и $C \neq \emptyset$. Тогава $|A| = |B| \div |C|$.

68. Принцип на включването и изключването.
Нека A е крайно и $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$. С $\overline{A}_i^A$ отбелязваме допълнението на множеството A_i спрямо множеството A.

- за $n = 3$:
$$\left|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap \overline{A}_3^A\right| =$$
$$= |A| - \big(|A_1| + |A|_2| + |A_3|\big) + |A_1 \cap A_2| + |A_2 \cap A_3| +$$
$$+ |A_3 \cap A_1| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

- за $n = 4$:
$$\left|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap \overline{A}_3^A \cap \overline{A}_4^A\right| = |A| - \big(|A_1| + |A|_2| + |A_3| + |A_4|\big) +$$
$$+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| -$$
$$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 + A_3 + A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| +$$
$$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|.$$

- Обобщено:
$$\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i^A\right| = \left|S - \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$$
$$= |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap \ldots \cap A_n|.$$

69. Критерият за затвореност на едно множество от двоични булеви функции.
Нека $F \subseteq \mathscr{F}_2$ е такова, че:
- $f(x) = x, f \in F$
- $\forall f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in F \Rightarrow h = f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in F$

Тогава F е затворено.

70. Критерият (теоремата) за пълнота на Пост-Яблонски за множество от булеви функции.
Нека $F \in \mathscr{F}_2$. Тогава F е пълно тогава и само тогава, когато $F \nsubseteq T_0$, $F \nsubseteq T_1$, $F \nsubseteq L$, $F \nsubseteq S$ и $F \nsubseteq M$. Казано по друг еквивалентен начин, $F \nsubseteq T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M$.

71. Критерий за шеферовост на една булева функция.
Ако $f \in \mathscr{F}_2, f \notin T_0, f \notin T_1, f \notin S$, то f е шеферова.

72. Пълно множество от двоични функции.
Казваме, че едно множество от двоични функции е пълно, ако затварянето му съвпада с всички двоични функции: $[F] = \mathscr{F}_2$.

73. Суперпозиция.
Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{F}_q^n$ и $g_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathscr{F}_q^m$, $i = \overline{1, n}$.
Функцията $h(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f\left(g_1(y_1, \ldots, y_m), g_2(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m)\right)$

наричаме суперпозиция на $g_1, g_2, \ldots, g_n$ във f.

74. Предпълни множества и твърденията за тях.
    Множествата T_0, T_1, S, M, L и само те са предпълни в $\mathscr{F}_2$.

75. Теорема на Бул.
    Множеството $\{x \vee y, xy, \overline{x}\}$ е пълно.