Задача 40. Да се намери броя на решенията в естествени числа $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ на системата:

$$A : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ x_1 < 10 \\ 1- \leq x_2 < 30 \\ x_4 > 20 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

github.com/andy489

Решение:

Първо се освобождаваме от условията $x_i \geq a$. Това става със смяна на променливите:

$$\underbrace{A \equiv}_{\begin{cases} x_2 = 10 + y_2 \\ x_4 = 21 + y_4 \end{cases}} \begin{cases} x_1 + (10 + y_2) + x_3 + (21 + y_4) + x_5 = 100 \\ x_1 < 10 \\ 10 \leq 10 + y_2 < 30 \\ 21 + y_4 \geq 21 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

$$A \equiv A' \equiv \begin{cases} x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 100 - 10 - 21 = 69 \\ x_1 < 10 \\ y_2 < 20 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

Нека $\{B\}$ е множеството от решенията на системата $B : | x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$.
Аналогично определяме и:
$C_1 : | x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$ и $x_1 \geq 10$;
$C_2 : | x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$ и $y_2 \geq 20$;
$C_3 : | x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$ и $x_5 \geq 30$.
Тъй като $A = A' = B \backslash (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ и $C_1, C_2, C_3 \subseteq B$, то от принципа на включването и изключването имаме, че: $|A| = |A'| = |B| - |C_1 \cup C_2 \cup C_3| =$
$= |B| - |C_1| - |C_2| - |C_3| + |C_1 \cap C_2| + |C_2 \cap C_3| + |C_3 \cap C_1| - |C_1 + C_2 + C_3|$.

Но, $|B| = \binom{5 + 69 - 1}{5 - 1}$; $|C_1| = \binom{5 + (69 - 10) - 1}{5 - 1}$; $|C_2| = \binom{5 + (69 - 20) - 1}{5 - 1}$;

$|C_3| = \binom{5 + (69 - 30) - 1}{5 - 1}$; $|C_1 \cap C_2| = \binom{5 + (69 - 10 - 20) - 1}{5 - 1}$; $|C_2 \cap C_3| = \binom{5 + (69 - 20 - 30) - 1}{5 - 1}$;

$|C_3 \cap C_1| = \binom{5 + (69 - 10 - 30) - 1}{5 - 1}$; $|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = \binom{5 + (69 - 10 - 20 - 30) - 1}{5 - 1}$.
$|C_1|$ - чрез смяната (1) $x_1 = 10 + z_1$; $|C_2|$ - чрез смяната (2) $y_2 = 20 + z_2$;
$|C_3|$ - чрез смяната (3) $X_5 = 30 + z_3$; $|C_1 \cap C_2|$ - чрез смените (1) и (2).
$|C_2 \cap C_3|$ - чрез смените (2) и (3); $|C_3 \cap C_1|$ - чрез смените (3) и (1);
$|C_1 \cap C_2 \cap C_3|$ - чрез смените (1), (2) и (3).