Задача 17. (Писмен изпит 2016-02-05) Дадена е рекурентната зависимост $a_{n+1} = -7a_n + n + 1$ и $a_0 = 0$. Намерете редицата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, която удовлетворява тази зависимост и началното условие.

Решение:

Първо трябва да намерим хомогенната зависимост еквивалентна на дадената. Прилагаме дадената зависимост за n и $n-1$:

$$\begin{cases} a_{n+1} + 7a_n = n + 1 \\ a_n + 7a_{n-1} = n \end{cases}$$

Изваждаме второто уравнение от първото и получаваме:

$a_{n+1} + 6a_n - 7a_{n-1} = 1$, тогава $a_n + 6_{n-1} - 7a_{n-2} = 1$. Отново изваждаме второто от първото новополучени уравнения и получаваме:

$$a_{n+1} + 5a_n - 13a_{n-1} + 7a_{n-2} = 0.$$

За да намерим характеристичното уравнение прилагаме полагането $a_n = x^n$, $x \neq 0$. Получаваме: $x^{n+1} + 5x^n - 13x^{n-1} + 7x^{n-2} = 0 \Rightarrow x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = 0.$

За да намерим рационалните корени на уравнението прилагаме схемата на Хорнер:

X	1	5	-13	7	корен
1	1	6	-7	0	да
1	1	7	0		да
-7	-7	0			да

Следователно $x^3 + 5x^2 - 13x + 7 = (x-1)^2(x+7) = 0$. Характеристичното уравнение има двоен корен равен на 1 и единичен корен равен на -7. Общият вид на характеристичното уравнение е:

$$a_n = (A \times n + B) \times 1^n + C \times (-7)^n.$$

Имаме само първи член на редицата, но ще ни трябват поне още два (общо три – колкото е броя на неизвестните коефициенти A, B и C).

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -7a_0 + 1 = 1 \\ a_2 = -7a_1 + 1 = -6 \end{cases}$$

За да намерим явният вид на уравнението ще използваме общия вид на първите три елемента от редицата:

$$\begin{cases} a_0 = (0A + B) \times 1^0 + C \times (-7)^0 = 0 \\ a_1 = (A + B) \times 1^1 + C \times (-7)^1 = 1 \\ a_2 = (2A + B) \times 1^2 + C \times (-7)^2 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B + C = 0 \\ A + B - 7C = 1 \\ 2A + B + 49C = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{1}{8} \\ C = -\frac{1}{8} \end{cases}.$$

Следовательно, $a_n = \dfrac{1 - (-7)^n}{8}$.

□