Задача 31. Дадено е дърво G с n на брой върхове, в което всеки връх е от степен 1 или 4. Да се намери броя на върховете от степен 1 и да се докаже, че $3 \mid n + 1$.

Решение:

Нека броа на върховете от степен 1 е равен на x. Тогава броя на върховете от степен 4 е равен на $n - x$. От това, че G е дърво следва, че $|E| = |V| - 1 = n - 1$. От формулата на Ойлер имаме, че:

$$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = x \times 1 + (n - x) \times 4$$

Следователно, $2(n-1) = x + 4(n-x)$ или $3x = 2n + 2 = 2(n+1)$ и тъй като $\gcd(2, 3) = 1$, то $3 \mid n + 1$, защото x е естествено число.

$\square$