Задача 40. Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Да се намери броят на елементите на множеството T, където T е равно на:

a) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge A, B \in \rho(U)\}$, където с $\rho(X)$ бележим степенното множество на множеството X;
b) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge |A| = 1\}$;
c) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge |A| = k \wedge |B| = l \wedge k, l \leq n\}$;
d) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge A \cap B = \emptyset\}$;
e) $\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$;
f) $\{(A,B) \mid A \cup B = U\}$;
g) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge A \cup B = U \wedge |A \cap B| \geq 2\}$;
h) $\{(A,B) \mid B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \backslash (A \backslash B)| \geq 2\}$;
i) $\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| \geq 2\}$;
j) $\{(A,B) \mid A \subseteq B \subseteq U \wedge |B \backslash A| \geq 2\}$;
k) $\{(A,B) \mid A, B \subseteq U \wedge |A \cap B| \leq 2\}$.

($\wedge$ - логическо И, $\vee$ - логическо ИЛИ, $\neg$ - логическо ОТРИЦАНИЕ)

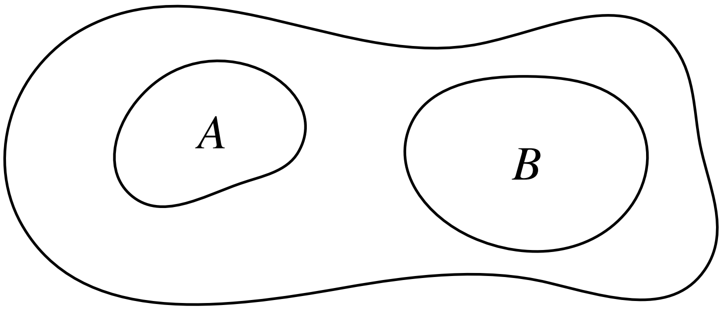
Решение:

a) Тъй като броя на елементите на степенното множество на дадено изходно множество е равен на 2 повдигнато на степен броя на елементите на изходното множество (участва или не), то $|\rho(U)| = 2^n$. В случая, ние избираме наредена двойка от $\rho(U)$ като редът им има значение и са възможни повторения. $|T| = |\rho(U)| \times |\rho(U)| = (2^n)^2 = 4^n$.

b) Броя на начините, по които може да изберем A са равни на броя на начините, по които може да изберем един елемент от U, което е равно на $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$. Начините, по които може да изберем множеството B са 2^n (за всеки елемент от U има два варианта - или е в B или не е в B). Окончателно $|T| = C_n^1 \times 2^n = n \times 2^n$.

c) Броя на начините, по които може да изберем множеството A са равни на $C_n^k = \binom{n}{k}$, а броя на начините, по които може да изберем множеството B са равни на $C_n^l = \binom{n}{l}$.
Следователно, $|T| = C_n^k \times C_n^l = \binom{n}{k} \times \binom{n}{l} = \dfrac{(n!)^2}{k! \times (n-k)! \times l! \times (n-l)!}$.

d) Множествата A и B са непресичащи се и са подмножества на U, както е изобразено на фигурата по-долу.



Начините, по които може да изберем множеството A са $C_k^n = \binom{n}{k}$, където $k \leq n$ са броя на елементите на множеството A, тоест $|A| = k$. За множеството B ще избираме от останалите $n-k$ елемента от множеството U, тоест това са $|\rho(U \backslash A)| = 2^{n-k}$ начина, по които може да го изберем. Следователно ще имаме общо $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times 1^k \times 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ възможни избора. Тук използвахме бинома на Нютон: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, за $0 \leq k \leq n$, $x = 1$ и $y = 2$. Окончателно, $|T| = 3^n$.

За следващите подточки от задачата ще използваме следното фундаментално разбиване:

На всяка наредена двойка (A, B) съпоставяме думата β.

$(A, B) \longmapsto \beta = u_1 u_2 \ldots u_n$. Конструираме следната азбука: $\Sigma = \{XX, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{X}\,\overline{Y}\}$, където за всяка буква u_k, $k \leq n$ имаме:

$$u_k = \begin{cases} XY, \text{ако } u_k \in A, u_k \in B, \\ X\overline{Y}, \text{ако } u_k \in A, u_k \notin B, \\ \overline{X}X, \text{ако } u_k \notin A, u_k \in B, \\ \overline{X}\,\overline{Y}, \text{ако } u_k \notin A, u_k \notin B. \end{cases}$$

Съществува биекция между множеството на думите β и множеството на наредените двойки (A, B) (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне/съответствие). Всяка дума β ще е над азбуката Σ. Следователно може да броим възможните думи.

e) $T = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$.
$(A, B) \in T \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq U \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})\neg[u_k \in A \wedge u_k \in B] \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})\neg[u_k = X\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow X\overline{Y}$ не участва в думата $\beta_{(A,B)}$, тоест $\beta_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\Sigma \backslash \{X\overline{Y}\} \Rightarrow |T| = 3^n$.

Чрез същия този подход може да се върнем на подточка d) и да направим следното:
$T = \{(A, B) \,|\, A, B \in U \wedge A \cap B = \emptyset\}$.
$(A, B) \in T \Rightarrow A, B \subseteq U \wedge A \cup B = \emptyset$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[(u_k \in A \wedge u_k \notin B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \in B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \notin B)]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[u_k = X\overline{Y} \,|\, \overline{X}Y \,|\, \overline{X}\,\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})\neg[u_k = XY]$
$\Leftrightarrow XY$ не участва в думата $\beta_{(A,B)}$, тоест $\beta_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\Sigma \backslash \{XY\} \Rightarrow |T| = 3^n$. Именно за това този подход е фундаментален.

f) $T = \{(A, B) \,|\, A \cup B = U\}$.
$(A, B) \in T \Leftrightarrow A \cup B = U \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[u_k \in A \vee u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \leq n}) \neq [u_k \notin A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k \leq n})[u_k \neq \overline{X}\,\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow$ в $\beta_{(A,B)}$ не се среща буквата $\overline{X}\,\overline{Y}$ от азбуката Σ.

$|T| = |\{\beta \,|\, \beta$ е дума над Σ , в която не се среща $\overline{X}\,\overline{Y}\}| = \Big|\{\beta \,|\, \beta$ е дума над азбука от три типа букви $XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y\}\Big| = 3^n.$

g) Нека $S = \{(A, B) \,|\, A, B \subseteq U \wedge A \cup B = U\}$ и
$K = \{(A, B) \,|\, A, B \subset U,\ A \cup B = U \vee |A \cap B| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$; $T, K \subseteq S$ и $T \cup K = \emptyset$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $T = |S| - |K|$.

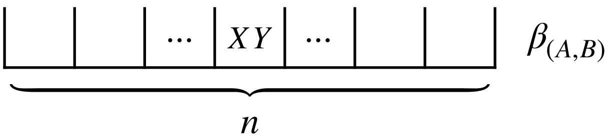
S : От f) знаем, че $|S| = 3^n$.

$$K: \ K = \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}.$$

Тъй като $K_0, K_1 \subseteq K$, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K = K_0 \cup K_1$, то K_0 и K_1 са разбиване на K. Следователно $|K| = |K_0| + |K_1|$.

$K_0 : K_0 = \{(A, B) \,|\, A \cup B = U \wedge \ A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B) \,|\, B = U \backslash A\} =$
$= \{(A, U \backslash A) \,|\, A \subseteq U\} \Leftrightarrow$ в $\beta_{(A,B)} = \beta_{(A,U\backslash A)}$ не се срещат букви от типа $\overline{X}\,\overline{Y}$ и XY от Σ.
Следователно $|K_0| = 2^n$.

$K_1 : K_1 = \{(A, B) \,|\, A \cup B = U,\ |A \cap B| = 1\} \Rightarrow \overline{X}\,\overline{Y}$ не участва в $\beta_{(A,B)}$ и XY се среща точно веднъж в $\beta_{(A,B)}$.



избирама позиция за буквата от тип XY

$$|K_1| = \binom{n}{1} \times 2^{n-1} = n \times 2^{n-1}.$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$

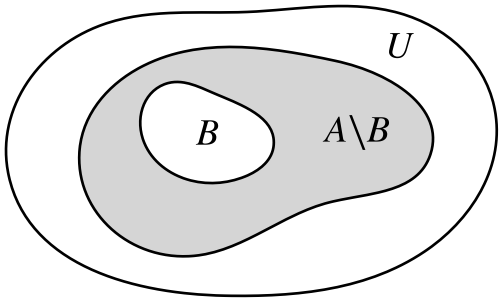
Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n \times 2^{n-1}$.

h) Нека $S = \{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U\}$ и $K = \{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U$ и $|U \backslash (A \backslash B)| < 2\}$.
Имаме, че $T \cup K = S$, $T \cap K = \emptyset$ и $T, K \subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

S : аналогично на e) $\beta_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\Sigma \backslash \overline{X}Y \Rightarrow |S| = 3^n$.

$$K : K = \underbrace{\{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \backslash (A \backslash B)| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U \wedge |U \backslash (A \backslash B)| = 1\}}_{K_1}$$

Тъй като $K_0 \cup K_1 = K$; $K_0, K_1 \subseteq K$ и $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, то K_0 и K_1 са разбиване на K. Следователно $|K| = |K_0| + |K_1|$.
$K_0 : K_0 = \{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U \wedge U \backslash (A \backslash B) = \emptyset\}$.



$$\begin{cases} A\backslash B \subseteq U \\ U\backslash(A\backslash B) = \emptyset \\ \Rightarrow A\backslash B = U \\ \Rightarrow A = U,\ A\backslash B = U,\ B \subseteq A \\ \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$$

$K_0 = \{(U, \emptyset)\}$, $|K_0| = \binom{n}{0} = 1$.

$K_1 : K_1 = \{(A,B) \mid B \subseteq A \subseteq U \wedge |U\backslash(A\backslash B)| = 1\}$, $U\backslash(A\backslash B) = (U\backslash A) \cup B$
$1 = |U\backslash(A\backslash B)| = |(U\backslash A)\backslash B| = \underbrace{|U\backslash A| + |B|}_{=1 \text{ елемент}} - \underbrace{|(U\backslash A) \cap B|}_{=0 \text{ елемента}}$. Следователно има два случая за този елемент.

I сл.) Единственият елемент е в $\{U\backslash A\}$ и тогава $B = \emptyset$. Тоест $|U\backslash A| = 1$ и $|B| = 0$. Следователно A не съдържа този 1 елемент.

$$\begin{cases} XY : 0 \text{ пъти} \\ X\overline{Y} : n-1 \text{ пъти} \\ \overline{X}Y : 0 \text{ пъти} \\ \overline{X}\,\overline{Y} : 1 \text{ път} \end{cases}$$

избирама позиция за буквата от тип $\overline{X}\,\overline{Y}$

$$\binom{n}{1} \times 1^{n-1} = n$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $X\overline{Y}$

II сл.) ВЕдинственият елемент е в $\{B\}$ и тогава $U\backslash A = \emptyset$. Тоест $|U\backslash A| = 0$ и $|B| = 1$. Следователно $U = A \Rightarrow \overline{X}Y = 0, \overline{X}\,\overline{Y} = 0$.
$|B| = 1 :\ XY, \overline{X}Y$ - участват общо точно веднъж. $B \subseteq A \Rightarrow \overline{X}Y = 0$.

$$\begin{cases} XY : 1 \text{ път} \\ X\overline{Y} : 0 \text{ пъти} \\ \overline{X}Y : n-1 \text{ пъти} \\ \overline{X}\,\overline{Y} : 0 \text{ пъти} \end{cases}$$

избирама позиция за буквата от тип XY

$$\binom{n}{1} \times 1^{n-1} = n$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$

Окончателно от I и II случай:
$|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 1 - n - n = 3^n - 2n - 1.$

i) Нека $S = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |A \cup B| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$, $T \cap K = \emptyset$ и $K, T \subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

S : От е) знаем, че $|S| = 3^n$.

$$K : K = \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$$

Тъй като K_0, $K_1 \subseteq K$, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K_0 \cap K_1 = K$, то K_0 и K_1 са разбиване на K. Следователно $|K| = |K_0| + |K_1|$.

$K_0 : K_0 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land A \cap B = \emptyset\} = \{(\emptyset, B) \,|\, B \subseteq U\}$. Следователно в думата $\alpha_{(A,B)}$ могат да участват само буквите $\overline{X}Y$ и $\overline{X}\,\overline{Y} \Rightarrow |K_0| = 2^n$.

$$K_1 : K_1 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |A \cap B| = 1\} = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |A| = 1\}$$

$(A,B) \in K_1 \Leftrightarrow \underbrace{A \subseteq B \subseteq U}_{X\overline{Y} \notin \beta_{(A,B)}}$ и $\underbrace{|A| = 1}_{X\overline{Y} \text{ и } XY \text{ участват точно веднъж в } \beta_{(A,B)}}$

избирама позиция за буквата от тип XY

$$\binom{n}{1} \times 2^{n-1} = n \times 2^{n-1}$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n \times 2^{n-1}$.

j) Нека $S = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |B \backslash A| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$, $T \cap K = \emptyset$ и $K, T \subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

S : от е) знаем, че $|S| = 3^n$.

$$K : K = \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |B \backslash A| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |B \backslash A| = 1\}}_{K_1}.$$

Тъй като $K_0 \cup K_1 = K$, $K_0, K_1 \subseteq K$ и $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, то K_0 и K_1 са разбиване на K и $|K| = |K_0| + |K_1|$.

$K_0 : K_0 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |B \backslash A| = 0\} = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land A = B\}$. Следователно в думата $\beta_{(A,B)} = \beta_{(A,A)}$ частват само букви от вида XY и $\overline{X}\,\overline{Y}$, т.е. не могат да участват букви от вида $X\overline{Y}$ и $\overline{X}Y$. Следователно $\beta_{(A,A)}$ е дума над азбуката съставена от два типа букви $\Rightarrow |K_0| = 2^n$.

$K_1 : K_1 = \{(A,B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \land |B \backslash A| = 1\}$, следователно във B ще има точно един елемент повече от A, тоест в думата $\beta_{(A,B)}$ ще има точно веднъж буква от тип $\overline{X}Y$, а останалите ще са от типа XY или $\overline{X}\,\overline{Y}$.

избирама позиция за буквата от тип XY

$$\binom{n}{1} \times 2^{n-1} = n \times 2^{n-1}$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n \times 2^{n-1}$.

k) Нека $T_0 = \{(A,B) \mid A,B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}$, $T_1 = \{(A,B) \mid A,B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}$ и $T_2 = \{(A,B) \mid A,B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 2\}$.

Имаме, че $T = T_0 \cup T_1 \cup T_2$ и $T_0 \cap T_1 = \emptyset$, $T_1 \cap T_2 = \emptyset$, $T_2 \cap T_0 = \emptyset$, $T_0, T_1, T_2 \subseteq T$. Следователно $|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2|$.

$T_0 : (A,B) \in T_0 \Leftrightarrow A,B \subseteq U$ и $A \cap B = \emptyset$, което е точно d) и от нея знаем, че $|T_0| = 3^n$.

$T_1 : (A,B) \subseteq T_1 \Leftrightarrow A,B \subseteq U$ и $(A \cap B) = 1 \Leftrightarrow$ точно един елемент е едновременно и в A и в B.

XY участва в $\beta_{(A,B)}$ $!1$ (точно веднъж). $|T_1| = \binom{n}{1} \times 3^{n-1}$.

$T_2 : XY$ участва два пъти в $\beta_{(A,B)} : |T_2| = \binom{n}{2} \times 3^{n-2}$.

Окончателно:

$$|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2| = 3^n + \binom{n}{1} \times 3^{n-1} + \binom{n}{2} \times 3^{n-2} = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} \times 3^{n-i}.$$

$\square$