Задача 9. (Писмен изпит 2016-02-05)

a) Докажете, че $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$.

b) Напишете всички подмножества на множеството $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\right\}$

Доказателство:

Задачата е подобна на задача 7., за това тук ще покажем едно малко по-неформално и различно решение.

a) $(\Rightarrow)$ Нека $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$.

$$(A \cap B) \cup C = \{a \,|\, (a \in A \wedge a \in B) \vee a \in C\}$$
$$A \cap (B \cup C) = \{a \,|\, a \in A \wedge (a \in B \vee a \in C)\} = \{a \,|\, (a \in A \wedge a \in B) \vee (a \in A \wedge a \in C)\}$$

Условието от лявата страна на логическото ИЛИ ($\wedge$) е еднавко и в двете множества, тоест равенството в този случай е ипълнено винаги. Остава да разгледаме случая за елементите от C. За да имаме равенство трябва тези елементи да се припокриват с елементите, които отговарят на условието ($a \in A$ и $a \in C$). Тоест от присъствието на елемента в C трябва да следва присъствието на елемента в A, което означава точно $C \subseteq A$.

$(\Leftarrow)$ Доказателството в обратната посока е аналогично. От това, че $C \subseteq A$ ще следва, че ако един елемент принадлежи на C, то той ще принадлежи и на A. Тоест имаме $a \in C \Rightarrow a \in A$ и $a \in C$ и като заместим в условията за $(A \cap B) \cup C$ и $A \cap (B \cup C)$ ще получим равенството.

b) Да разделим подмножествата на база брой елементи:

- нула елементи: $\emptyset$
- един елемент: $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}$
- два елемента: $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}\right\}, \left\{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\right\}, \left\{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\right\}$
- три елемента: $\left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\right\}$

$\square$