Задача 30. Даден е граф $G(V, E)$ без цикли с $|V| = n$ и k на брой компоненти на свързаност. Намерете $|E|$.

Решение:

Нека означим с $G_i(V_i, E_i)$, $i = \overline{1, k}$ компонентите на свъраност на G. Тогава са в сила следните твърдения:

- $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = V$;
- $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = E$;
- за $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = E_i \cap E_j = \emptyset$.

Следователно броя на върховете $|V| = |V_1| + |V_2| + \ldots + |V_k| = \sum_{i=1}^{k} |V_i|$ и броя на ребрата $|E| = |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_k| = \sum_{i=1}^{k} |E_i|$. Казано по друг начин, всеки връх и всяко ребро участват в точно една компонента на свързаност от G. Всяка компонента на свързаност е свързан граф. В G няма цикли и следователно във всяка негова компонента на свързаност няма цикли. Тогава, $\forall_{i,\, i=\overline{1, k}} : G_i$ е дърво. Следователно $|E_i| = |V_i| - 1$. От тук получаваме, че:

$$
\begin{aligned}
|E| &= |E_1| + |E_2| + \ldots + |E_k| = \\
&= \sum_{i=1}^{k} |E_i| = \sum_{i=1}^{k} \big(|V_i| - 1\big) = \\
&= \sum_{i=1}^{k} |V_i| - \sum_{i=1}^{k} 1 = |V| - k = \\
&= n - k\,.
\end{aligned}
$$

$\square$