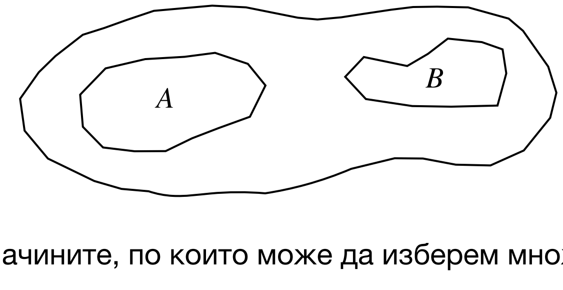
Задача 39. Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Да се намери броя на елементите на множеството T, където T е равно на:

a) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ A, B \in \rho(U)\}$, където с $\rho(X)$ бележим степенното множество на множеството X;
b) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ |A| = 1\}$;
c) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ |A| = k, |B| = l; k, l \leq n\}$;
d) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U,\ A \cap B = \emptyset\}$;
e) $\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$;
f) $\{(A, B) \mid A \cup B = U\}$;
g) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U, A \cup B = U\ \&\ |A \cap B| \geq 2\}$;
h) $\{(A, B) \mid B \subseteq A \subseteq U\ \&\ |U \backslash (A \backslash B)| \geq 2\}$
i) $\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\ \&\ |A \cap B| \geq 2\}$;
j) $\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\ \&\ |B \backslash A| \geq 2\}$;
k) $\{(A, B) \mid A, B \subseteq U\ \&\ |A \cap B| \leq 2\}$.

Решение: ($\wedge$ *- логическо И,* $\vee$ *- логическо ИЛИ*)

a) Тъй като броя на елементите на степенното множество на дадено изходно множество е равен на две на степен броя на елементите на изходното множество, то $|\rho(U)| = 2^n$. В случая ние избираме два елемента от $\rho(U)$ като редът има значение и са възможни повторения. $|T| = |\rho(U)| \,.\, |\rho(U)| = (2^n)^2 = 4^n$.
b) Начините, по които може да изберем A са равни на броя на начините, по които може да изберем един елемент от U, което е $C_n^1 = \binom{n}{1} = n$. Начините, по които може да изберем множеството B са 2^n (за всеки елемент от U има два варианта - или е в B или не е в B). Окончателно $|T| = C_n^1 2^n = n2^n$.
c) Начините, по които може да изберем множеството A са $C_n^k = \binom{n}{k}$, а начините по които може да изберем множеството B са $C_n^l = \binom{n}{l}$. Следователно $|T| = C_n^k C_n^l = \binom{n}{k}\binom{n}{l} = \dfrac{(n!)^2}{k!(n-k)!l!(n-l)!}$.
d) Множествата A и B са непресичащи се и са подмножества на U, както е показано на



картинката по-горе. Начините, по които може да изберем множеството A са $C_k^n = \binom{n}{k}$, където $k \leq n$ са броя на елементите на множеството A, т.е. $|A| = k$. За множеството B ще избираме от останалите $n - k$ елемента от множеството U, т.е. това са $|\rho(U \backslash A)| = 2^{n-k}$ начина, по които може да го изберем. Следователно ще имаме общо $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.1^k.2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n$ възможни избора. Тук използвахме бинома на Нютон: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$ за $0 \leq k \leq n,\ x=1,\ y=2.$

Окончателно, $|T| = 3^n$.

За следващите подточки ще използваме следното фундаментално разбиване:
На всяка наредена двойка (A,B) съпоставяме думата α.
$(A,B) \longmapsto \alpha = a_1a_2\ldots a_n$. Конструираме следната азбука:
$\sum = \{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{X}\overline{Y}\}$, където за всяка буква $a_k, k \leq n$ имаме:

$$a_k = \begin{cases} XY,\ ako\ u_k \in A, u_k \in B, \\ X\overline{Y},\ ako\ u_k \in A, u_k \notin B, \\ \overline{X}Y,\ ako\ u_k \notin A, u_k \in B, \\ \overline{X}\overline{Y},\ ako\ u_k \notin A, u_k \notin B \end{cases}$$

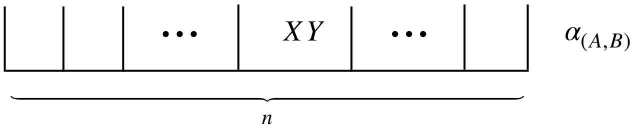
Съществува биекция между множеството на думите α и множеството на наредените двойки (A,B) (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне). Всяка дума α ще е над ачбуката $\sum$.

e) $T = \{(A,B)\,|\,A \subseteq B \subseteq U\}$.
$(A,B) \in T \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq U \Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})[u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})\neg[u_k \in A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})\neg[a_k = X\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow X\overline{Y}$ не участва в думата $\alpha_{(A,B)}$, т.е. $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\sum \setminus \{X\overline{Y}\} \Rightarrow |T| = 3^n$.

Чрез същия подход може да се върнем на подточка d) и да направим следното:
$T = \{(A,B)\,|\,A,B \in U \wedge A \cup B = \emptyset\}$.
$(A,B) \in T \Rightarrow A,B \subseteq U \wedge A \cup B = \emptyset$
$\Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})[(u_k \in A \wedge u_k \notin B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \in B) \vee (u_k \notin A \wedge u_k \notin B)]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})[a_k = X\overline{Y}\,|\,\overline{X}Y\,|\,\overline{X}\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})\neg[a_k = XY]$
$\Leftrightarrow XY$ не участва в думата $\alpha_{(A,B)}$, т.е. $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви $\sum \setminus \{XY\} \Rightarrow |T| = 3^n$. Именно за това този подход е фундаментален.

f) $T = \{(A,B)\,|\,A \cup B = U\}$
$(A,B) \in T \Leftrightarrow A \cup B = U \Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})[u_k \in A \vee u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k\leq n}) \neq [u_k \notin A \wedge u_k \notin B] \Leftrightarrow (\forall_{k\leq n})[a_k \neq \overline{X}\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow$ в $\alpha_{(A,B)}$ не се среща буквата $\overline{X}\overline{Y}$ от азбуката $\sum$.
$|T| = |\{\alpha\,|\,\alpha$ е дума над $\sum$, в която не се среща $\overline{X}\overline{Y}\}| = |\big\{\alpha\,|\,\alpha$ е дума над азбука от три типа букви $\{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y\}\big\}| = 3^n$.

g) Нека $S = \{(A, B)\,|\,A, B \subseteq U,\ A \cup B = U\}$ и
$K = \{(A, B)\,|\,A, B \subseteq U,\ A \cup B = U \wedge |A \cap B| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K;\ T, K \subseteq S$ и $T \cup K = \emptyset$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.
S : От f) знаем, че $|S| = 3^n$.
K : $K = \underbrace{\{(A, B)\,|\,A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B)\,|\,A \cup B = U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$.
Тъй като $K_0, K_1 \subseteq K,\ K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K = K_0 \cup K_1$, то K_0 и K_1 са разбиване на
$\Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.
K_0 : $K_0 = \{(A, B)\,|\,A \cup B = U, A \cap B = \emptyset\} = \{(A, B)\,|\,B = U\backslash A\} =$
$= \{(A, U\backslash A)\,|\,A \subseteq U\} \Leftrightarrow$ в $\alpha_{(A,B)} = \alpha_{(A,U\backslash A)}$ не се срещат букви от типа $\overline{X}\,\overline{Y}$ и XY от $\sum$. Следователно $|K_0| = 2^n$.
K_1 : $K_1 = \{(A, B)\,|\,A \cup B = U,\ |A \cap B| = 1\} \Rightarrow \overline{X}\,\overline{Y}$ не участва в $\alpha_{(A,B)}$ и XY се среща точно веднъж в $\alpha_{(A,B)}$.

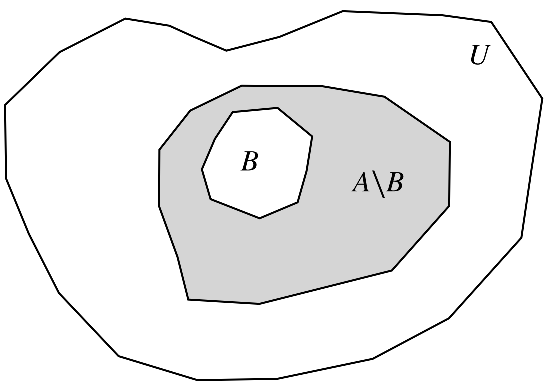


избираме позиция за буквата XY

$$|K_1| = \binom{n}{1}.2^{n-1} = n2^{n-1}.$$

запълваме останалите $n-1$ свободни позиции с букви от типа $\overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$
Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.

h) Нека $S = \{(A, B)\,|\,B \subseteq A \subseteq U\}$ и $K = \{(A, B)\,|\,B \subseteq A \subseteq U$ и $|U\backslash(A\backslash B)| < 2\}$.
Имаме, че $T \cup K = S,\ T \cap K = \emptyset$ и $T, K \subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането следва, че $|S| = |T| + |K|$, т.е. $|T| = |S| - |K|$.
S : Аналогично на g) $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбуката от три типа букви $\sum \backslash \overline{X}Y \Rightarrow |S| = 3^n$.
K : $K = \underbrace{\{(A, B)\,|\,B \subseteq A \subseteq U \wedge |U\backslash(A\backslash B)| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B)\,|\,B \subseteq A \subseteq U \wedge |U\backslash(A\backslash B)| = 1\}}_{K_1}$
Тъй като $K_0 \cup K_1 = K,\ K_0, K_1 \subseteq K$ и $K_0 \cap K_1 = \emptyset$, то K_0 и K_1 са разбиване на $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.
K_0 : $K_0 = \{(A, B)\,|\,B \subseteq A \subseteq U \wedge\ U\backslash(A\backslash B) = \emptyset\}$.



$$\begin{cases} A\backslash B \subseteq U \\ U\backslash(A\backslash B) = \emptyset \\ \Rightarrow A\backslash B = U \\ \Rightarrow A = U, A\backslash B = U, B \subseteq A \\ \Rightarrow B = \emptyset \end{cases}$$

$K_0 = \{(U, \emptyset)\}$, $K_0 = \binom{n}{0} = 1$.

$K_1: \ K_1 = \{(A, B) \,|\, B \subseteq A \subseteq U, \,|U \backslash (A \backslash B)| = 1\}$; $U \backslash (A \backslash B) = (U \backslash A) \cup B$

$1 = |U \backslash (A \backslash B)| = \underbrace{|(U \backslash A) \backslash B| = |U \backslash A| + |B|}_{=1 \ element} - |\underbrace{(U \backslash A) \cap B}_{=0}|$. Следователно има два случая за този елемент.

I сл.) единственият елемент е в $\{U \backslash A\}$, тогава $B = \emptyset$, т.е. $|U \backslash A| = 1$ и $|B| = 0$. Т.е. A не съдържа този 1 елемент.

XY: 0 пъти

$X\overline{Y}$: $n - 1$ пъти

$\overline{X}Y$: 0 пъти

$\overline{X}\,\overline{Y}$: 1 път

$\binom{n}{1} . 1^{n-1} = n$ избираме позицията за $\overline{X}\,\overline{Y}$

запълваме останалите позиции с $X\overline{Y}$

II сл.) единственият елемент е в $\{B\}$, тогава $U \backslash A = \emptyset$, т.е. $|U \backslash A| = 0$ и $B = 1$. Т.е. $U = A \Rightarrow \overline{X}Y = 0, \overline{X}\,\overline{Y} = 0$.

$|B| = 1: \quad XY, \overline{X}Y$ - участват общо точно веднъж. $B \subseteq A \Rightarrow \overline{X}Y = 0$.

XY: 1 път

$X\overline{Y}$: 0 пъти

$\overline{X}Y$: $n - 1$ пъти

$\overline{X}\,\overline{Y}$: 0 пъти

$\binom{n}{1} . 1^{n-1} = n$ избираме позицията за XY

запълваме останалите позиции с $\overline{X}Y$

Окончателно от I и II сл. :

$|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 1 - n - n = 3^n - 2n - 1$.

i) Нека $S = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$ и $K = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U$ и $|A \cap B| < 2\}$.
Имаме, че $S = T \cup K$, $T \cap K = \emptyset$ и $K, T \subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.
$S:$ от е) знаем, че $|S| = 3^n$.
$K: \ K = \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\}}_{K_1}$
Тъй като $K_0, K_1 \subseteq K$, $K_0 \cap K_1 = \emptyset$ и $K_0 \cup K_1 = K$, то K_0 и K_1 са разбиване на $K \Rightarrow |K| = |K_0| + |K_1|$.
$K_0: \ K_0 = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge A \cap B = \emptyset\} = \{(\emptyset, B) \,|\, B \subseteq U\}$
$\Rightarrow$ в думата $\alpha_{(A,B)}$ могат да участват само буквите $\overline{X}Y$ и $\overline{X}\,\overline{Y} \Rightarrow |K_0| = 2^n$.
$K_1: \ K_1 = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A \cap B| = 1\} = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \wedge |A| = 1\}$

$(A,B)\in K_1 \Leftrightarrow \underbrace{A\subseteq B\subseteq U}_{X\overline{Y}\notin\alpha_{(A,B)}}$ и $\underbrace{|A|=1}$ $\quad$ $X\overline{Y}$ и XY участват точно веднъж в $\alpha_{(A,B)}$.

избираме позицията, на която участва XY

$$\binom{n}{1}.2^{n-1}=n2^{n-1}$$

останалите $n-1$ позиции след XY, в които може да слагаме $\overline{X}Y, X\overline{Y}$.

Окончателно: $|T|=|S|-|K|=|S|-|K_0|-|K_1|=3^n-2^n-n2^{n-1}$.

j) Нека $S=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\}$ и $K=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge|B\backslash A|<2\}$.
Имаме, че $S=T\cup K$, $T\cap K=\emptyset$ и $K,T\subseteq S$. Следователно T и K са разбиване на S и от принципа на събирането имаме, че $|S|=|T|+|K|$ или $|T|=|S|-|K|$.
S : от е) знаем, че $|S|=3^n$.
$K:\ K=\underbrace{\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge|B\backslash A|=0\}}_{K_0}\cup\underbrace{\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge|B\backslash A|=1\}}_{K_1}$
Тъй като $K_0\cup K_1=K$, $K_0,K_1\subseteq K$ и $K_0\cap K_1=\emptyset$, то K_0 и K_1 са разбиване на K и $|K|=|K_0|+|K_1|$.
$K_0:\ K_0=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge|B\backslash A|=0\}=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge A=B\}$
$\Rightarrow$ в думата $\alpha_{(A,B)}=\alpha_{(A,A)}$ участват само буквите XY и $\overline{X}\overline{Y}$, т.е. не могат да участват $X\overline{Y}$ и $\overline{X}Y$. Следователно $\alpha_{(A,A)}$ е дума над азбуката съставена от два типа букви
$\Rightarrow |K_0|=2^n$.
$K_1:\ K_1=\{(A,B)\,|\,A\subseteq B\subseteq U\wedge|B\backslash A|=1\}$, следователно в B ще има точно един елемент повече от A, т.е. в думата $\alpha_{(A,B)}$ ще има точно веднъж буква от типа $\overline{X}Y$, а останалите ще са от типа XY и $\overline{X}\overline{Y}$.

разпределяме буквата от тип $\overline{X}Y$

$$\binom{n}{1}.2^{n-1}=n2^{n-1}$$

поставяме на останалите позиции букви от типа XY и $\overline{X}\overline{Y}$

Окончателно: $|T|=|S|-|K|=|S|-|K_0|-|K_1|=3^n-2^n-n2^{n-1}$.

k) Нека $T_0=\{(A,B)\,|\,A,B\subseteq U\wedge|A\cap B|=0\}$, $T_1=\{(A,B)\,|\,A,B\subseteq U\wedge|A\cap B|=1\}$ и $T_2=\{(A,B)\,|\,A,B\subseteq U\wedge|A\cap B|=2\}$.
Имаме, че $T=T_0\cup T_1\cup T_2$ и $T_0\cap T_1=\emptyset$, $T_1\cap T_2=\emptyset$, $T_2\cap T_0=\emptyset$, $T_1,T_1,T_2\subseteq T$, следователно $|T|=|T_0|+|T_1|+|T_2|$.
$T_0:\ (A,B)\in T_0\Leftrightarrow A,B\subseteq U$ и $A\cap B=\emptyset$, което е точно d) и от нея знаем че $|T_0|=3^n$.
$T_1:\ (A,B)T_1\Leftrightarrow A,B\subseteq U$ и $(A\cap B)=1\Leftrightarrow$ точно един елемент е едновременно и в A и в B. XY участва в $\alpha_{(A,B)}$!1 (точно веднъж). $|T_1|=\binom{n}{1}3^{n-1}$.
$T_2:\ XY$ участва два пъти в $\alpha_{(A,B)}$: $|T_2|=\binom{n}{2}3^{n-2}$.

Окончателно:

$$|T| = |T_0| + |T_1| + |T_2| = 3^n + \binom{n}{1} 3^{n-1} + \binom{n}{2} 3^{n-2} = \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} 3^{n-i}.$$