ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 1
ТЕОРИЯ 2

1. Максимална верига/антиверига. Нека $< A, R >$ е ч.н.м. и S е негова верига/антиверига. Казваме, че S е максимална верига/антиверига, ако за сяка друга верига/антиверига S' на A е изпълнено: $|S| \geq |S'|$.

2. Верижно/антиверижно разбиване. Нека $< A, R >$ е ч.н.м. Една фамилия $A_1, A_2, \ldots, A_n$ от подмножества на A ще наричаме верижно/антиверижно разбиване, ако е изпълнено:

- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е разбиване на A;
- $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са вериги/антивериги.

3. Минимално верижно/антиверижно разбиване. Нека $< A, R >$ е ч.н.м. Казваме, че фамилията $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ от подмножества на A е минимално верижно/антиверижно разбиване на A, ако:
– $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е верижно/антиверижно разбиване на A;
– За всяко верижно/антиверижно разбиване S' на A имаме $|S| \leq |S'|$.

4. Краен ориентиран мултиграф. Нека $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ е крайно множество, елементите на което са върхове, а $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ е крайно множество, елементите на което са ребра. Функцията $f_G : E \to V \times V$, съпоставяща на всяко ребро наредена двойка от върхове, наричаме краен ориентиран граф.

5. Краен ориентиран граф. Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф и функцията f_G е инективна. Тогава $G(V, E, f_G)$ наричаме краен ориентиран граф и бележим само с $G(V, E)$, където $E \subseteq V \times V$.

6. Краен неориентиран граф (*граф*). Нека $G(V, E)$ е краен ориентиран граф, такъв че релацията $E \subseteq V \times V$ е антирефлексивна и симетрична. Тогава $G(V, E)$ наричаме краен неориентиран граф или просто *граф*.

7. Краен неориентиран мултиграф. Крайният неориентиран граф $G(V, E)$ може да превърнем в краен неориентиран мултиграф, ако позволим повече от едно неориентирано ребро да свързва два върха от V, както и наличието на примки, т.е. ако вместо множеството $E \subseteq V \times V$ вземем мултимножество от елементите на $V \times V$.

8. Подмултиграф на краен мултиграф. Нека $G(V, E, f_G)$ е краен мултиграф и $V' \subseteq V$. Тогава подмултиграф $G'(V', E', f'_G)$ породен от V', се нарича мултиграфът G', за който E' се състои от всички ребра от E, на които краищата им са във V'. f'_G е рестрикцията на f_G върху E'.

9. Път в краен ориентиран граф. Нека $G(V, E)$ е краен ориентиран граф. Път в G се нарича всяка крайна редица $v_{i_0}, v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ от върхове, такава че $(v_{i_{p-1}}, v_{i_p}) \in E, v_{i_{p-1}} \neq v_{i_{p+1}}, v_{i_p} \neq v_{i_{p-1}}, i = \overline{1,n}$. n – дължина на пътя; v_{i_0} – начало на пътя; v_{i_n} – край на пътя.

10. Маршрут в краен мултиграф. Нека $G(V, E, f_G)$ е краен мултиграф. Редицата от редуващи се върхове и ребра на G : $v_{i_0}, e_{l_1}, v_{i_1}, e_{l_2}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_{k-1}}, e_{l_k}, v_{i_k}$, в която $f_G(e_{l+j}) = (v_{i_{j-1}}, v_{i_j}), j = 1,2,...,k$ наричаме маршрут в G от v_{i_0} до v_{i_k}. Числото k наричаме дължина на марпрута. Ако $v_{i_0} = v_{i_k}$, редицата (маршрута) наричаме контур.

11. Матрица на съсдства. На крайния ориентиран мултиграф $G(V, E, f_G)$, матрица на съседства наричаме матрицата $M = ||a_{ij}||$ с размери $|V| \times |V|$, ако за $\forall v_i, v_j \in V$ е в сила: $a_{ij} = |\{e | e \in E, f_G(e) = (v_i, v_j)\}|$.

12. Кореново дърво (<u>*индуктивна дефиниция*</u>). $D(\{r\}, \emptyset)$ е дърво с корен r и единствено листо r. Нека $D(V, E)$ е дърво с корен r и листа $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Нека $v \in V$ и $u \notin V$. Тогава $D'(V \cup \{u\}, E \cup \{(v, u)\}$ е дърво с корен r. Ако $v = l_i$ за някое $i = \overline{1,n}$, листата на D' са $l_1, \ldots, l_{i-1}, u, l_{i+1}, \ldots, l_n$. Ако $v \neq l_i$ за всяко $i = \overline{1,n}$, то листата на D' са $l_1, \ldots, l_n, u$.

13. Дърво чрес граф. *Характеризация на дървета*. Следните твърдения са еквивалентни:

- G е дърво;
- Дървото е свързан граф без цикли;
- Всеки два върха на G са свързани с точно един прост път (прост или нормален път е този, в който не се повтарят нито ребра нито върхове);
- G е свързан (има точно една компонента на свързаност) и броя на ребрата е с единица по малък от броя на върховете $|E| = |V| - 1$.
- G е свързан и минимален относно свързаност (т.е. ако махнем някое ребто от G, то той престава да бъде свързан – има две компоненти на свързаност)

- G е ацикличен и е максимален относно ацикличност (т.е. ако добавим каквото и да е ребро в G, то ще се появи цикъл)

14. Височина на кореново дърво. Нека $D(V,E)$ е кореново дърво и $v \in V$. Височината на върха v се нарича дължината на единствения път от корена до v. Височината на дървото D се нарича максимума от височините на всички върхове.

15. Разклоненост на кореново дърво. Нека $D(V,E)$ е кореново дърво и $v \in V$. Разклоненост на върха v наричаме броя на синовете на върха v. Разклоненост на дървото D наричаме максимума от разклоненостите на всички върхове на D.

16. Ойлеров път в граф. Път в свързания граф G, който минава през всяко ребро на G, но *__точно веднъж__*, наричаме Ойлеров път.

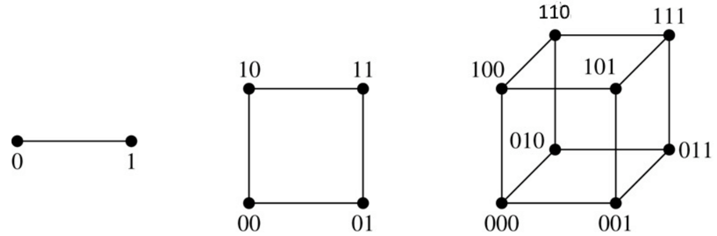
17. Твърдението за Ойлеров път. В един свързан граф Gима Ойлеров път, който не е Ойлеров цикъл $\Leftrightarrow G$ има точно два върха от нечетна степен.

18. Теорема за Ойлеров граф. Един граф G е Ойлеров, т.е. има Ойлеров път, който е цикъл $\Leftrightarrow G$ е свързан и всеки негов връх е от четна степен.

19. Хамилтонов път в граф. Път в свързания граф G, който минава през всеки връх на G, но *__точно веднъж__*, наричаме Хамилтонов път.

20. Хамилтонов граф. Графът G е Хамилтонов, когато G е свързан и в G има Хамилтонов път, който е цикъл, т.е. път в който само началото и края участват повече от един път (два пъти), тъй като съвпадат.

21. Твърдението за Хамилтонови графи. Графът $B_n, n \geq 1$ е Хамилтонов, където $B_n(J_2^n, E_n)$ с върхове n – мерните двоични вектори и ребра $E_n = \{(\alpha_i, \alpha_j) | \rho(\alpha_i, \alpha_j) = 1\}$ е n – мерен двоичен куб:



Q_1 Q_2 Q_3

22. Линейна булева функция и полином на Жегалкин. Полином на Жегалкин за n променливи:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus a_2x_2 \oplus \ldots \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$
$$\oplus a_{123}x_1x_2x_3 \oplus \ldots \oplus a_{n-2,n-1,n}x_{n-2}x_{n-1}x_n \oplus \ldots \oplus a_{1,2,\ldots,n}x_1x_2\ldots x_n =$$
$$= a_0 \oplus \bigoplus_{1\le i\le n} a_ix_i \bigoplus_{1\le i<j\le n} a_{ij}x_ix_j \oplus \ldots \oplus a_{1,2,\ldots,n}x_1x_2\ldots x_n,$$ където $a_i \in \{0,1\}$.

Всяка булева функция има единствен полином на Жегалкин. Казваме, че една булева функция е линейна, ако нейният полином на Жегалкин има линеен вид: $a_0 \oplus a_1x_1 \oplus \ldots \oplus a_nx_n$.

23. Монотонна булева функция и подходящата наредба за тази дефиниция. Булевата функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ наричаме монотонна, ако $\forall \alpha, \beta \in J_2^n, \alpha \preceq \beta$ (където с $\preceq$ означаваме лексикографска наредба) е в сила $f(\alpha) \preceq f(\beta)$.

24. Шеферова булева функция. Булевата функция f наричаме Шеферова, ако $\left[\{f\}\right] = \mathbb{F}_2$, т.е. f сама образува пълно множество от двоични функции. Съгласно теоремата на Пост, това означава че $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S \cup M \cup L$.

25. Предпълно множество от функции. Казваме, че едно множество от двоични функции е предпълно, ако не е пълно, но добавяйки към него произволна двойчна функция, която не е от това множество, то множеството ще стане пълно, т.е. $F \subset \mathbb{F}_2$: $[F] \neq \mathbb{F}_2$ и за всяка $f \notin F \,\&\, f \in \mathbb{F}_2$: $\left[F \cup \{f\}\right] = \mathbb{F}_2$.

26. Принцип на Дирихле. Нека A и B са крайни множества и $|A| > |B|$. Тогава за всяко изображение $f : A \to B$(за всяка тотална функция) съществуват елементи $a, b \in A, a \neq b$ и $f(a) = f(b)$.

27. Принцип на чекмеджетата. Нека имаме p на брой предмета и r на брой чекмеджета. Ако r, то както и да поставим всички предмети в чекмеджетата, *поне* в едно чекмедже ще има *поне* два предмета.

28. Принцип на биекцията. Нека A и B са крайни множества. Съществува биекция $f : A \to B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

29. Принцип на събирането (*принцип на разбиването*). Нека A е крайно множество, а $R = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ е разбиване на A. Тогава $|A| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$.

30. Принцип на разликата. Нека A и B са крайни множества и $A \in B$. Тогава $|B \backslash A| = |B| - |A|$.

31. Принцип на умножението (*принцип на декартовото произведение*). Нека A и B са крайни множества. Тогава $A \times B = |A|.|B|$. *Следствие:* $A \times B = |A|.|B|$.

32. Принцип на делението. Нека A е крайно множество и $B = A \times C$, където C също е крайно и $C \neq \emptyset$. Тогава $|A| = |B|/|C|$.

33. Принцип на включването и изключването. Нека A е крайно и $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq A$.

- за $n = 3$: $|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap \overline{A}_3^A| =$
  $= |A| - \big(|A_1| + |A_2| + |A_3|\big) + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$
- за $n = 4$: $|\overline{A}_1^A \cap \overline{A}_2^A \cap \overline{A}_3^A \cap \overline{A}_4^A| = |A| - \big(|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|\big) +$
  $+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| + |A_3 \cap A_4| -$
  $- \big(|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 + A_3 + A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|\big) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

34. Теорема за броя на маршрутите между два върха чрез матрица на съседство. Нека $G(V, E, f_G)$ е краен ориентиран мултиграф и нека $M = ||a_{ij}||$ е матрицата му на съседства. Нека $M^k = ||a_{ij}^{(k)}||$ е k – та степен на M при целочисленото умножение на матрици. Тогава $a_{ij}^{(k)}$ е броят на маршрутите с дължина <img src="https://latex.codecogs.com/svg.latex?\Large&space;k"> от v_i до v_j в крайния ориентиран мултиграф G.

35. Твърдението кога един граф им покриващо дърво. Всеки свързан граф $G(V, E)$ притежава покриващо дърво $G'(V, E')$, където $E' \subseteq E$.

36. Критерият за затвореност на едно множество от двойчни (булеви) функции. Нека $F \subseteq \mathbb{F}_q(q = 2)$ е такова, че:

- $f(x) = x \in F$;
- $\forall f, g_1, g_2, \ldots, g_n \in F \Rightarrow h = f(g_1, g_2, \ldots, g_n) \in F$.

Тогава F е затворено.

37. Критерият (*теоремата*) за пълнота на Пост за множество от булеви функции. Нека $F \in \mathbb{F}_2$. Тогава F е пълно т.с.т.к. ($\Leftrightarrow$) $F \nsubseteq T_0, F \nsubseteq T_1, F \nsubseteq L, F \nsubseteq S, F \nsubseteq M$ $(F \nsubseteq T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)$.

38. Критерий за шеферовост на една булева функция. Ако $f \in \mathbb{F}_2, f \notin T_0, f \notin T_1, f \notin S$, то f е шеферова.

39. Пълно множество от двоични функции. Казваме, че едно множество от двоични функции е пълно, ако затварянето мъ съвпада с всички двоични функции: $[F] = \mathbb{F}_2$. $\mathbb{F}_2 = \{f \,|\, f$ е двойчна функция$\}$

40. Суперпозиция. Нека $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in {\mathbb{F}_q}^n$ и $g_i(y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{F}_q^m, i = \overline{1,n}$. Функцията $h(y_1, y_2, \ldots, y_m) = f(g_1(y_1, \ldots, y_m), g_2(y_1, \ldots, y_m), \ldots, g_n(y_1, \ldots, y_m))$ наричаме суперпозиция на $g_1, g_2, \ldots, g_n$ в f.

41. Предпълни множества и твърдението за тях. Множествата T_0, T_1, S, M, L и само те са предпълни в $\mathbb{F}^2$.

42. Теорема на Бул. Множеството $\{x \vee y, xy, \overline{x}\}$ е пълно.

43. Теорема на Р. Дилуорт. Нека R е частична наредба в крайното множество A, C е минимално верижно разбиване на A, а S е максимална антиверига на R. Тогава $|S| = |C|$.

github.com/andy489