Задача 38. Даден е граф G с n върха, от които 7 върха са от степен равна на $n-1$, 3 върха са от степен равна на $n-2$ и 13 върха са от степен равна на $n-3$. Всеки връх от степен по-малка от $n-3$ е с четна степен. Да се докаже, че графът G има четен брой върхове.

Доказателство:

<u>I начин</u>. От формулата на Ойлер имаме, че броят на върховете с нечетна степен е равен на четно число (Задача 26). Да допуснем, че броят n на върховете на графа G е нечетно число. Тогава $n-1$ и $n-3$ са четни, а $n-2$ е нечетно. Следователно единствените върхове от нечетна степен са тези със степен равна на $n-2$. Техният брой, обаче е равен на 3, което е нечетно. Това води до противоречие с допускането, че n е нечетно и следователно n е четно.

<u>II начин</u>. Отново от формулата на Ойлер:

$2|E| = 7(n-1) + 3(n-2) + 13(n-3) + 2N(k)_{k<n-3} \equiv 0 \mod 2.$
$2|E| = 23n - 52 + 2N(k)_{k<n-3}$. Тъй като $\gcd(2, 23) = 0$, то $2|n$, което искахме да докажем.