Задача 37. Даден е ацикличен граф G с $2n + 2$ броя върхове. Броят на върховете от степен равна на 3 е равен на n, а броят на върховете от степен равна на 1 е равен на $n + 2$. Да се докаже, че графът G е свързан.

Доказателство:

Тъй като по условие G е ацикличен, то G може да се разбие на k компоненти на свързаност, които също са ациклични, но за разлика от G – за тях може да кажем, че са свързани. Следователно, тези D_k компоненти на свързаност са дървета. За всяка компонента на свързаност D_k имаме, че $|E_D| = |V_D| - 1$. Тоест,

$$|E| = \sum^{k} |E_D| = \sum^{k} \left(|V_D - 1| \right) = |V| - k = 2n + 2 - k \text{ (Задача 29)}$$

От формулата на Ойлер имаме, че:

$$2|E| = \sum_{u \in V} \deg(u) = n \times 3 + (n + 2) \times 1 = 4n + 2.$$

От тук следва, че $2(2n + 2 - k) = 4n + 2$ или $k = 1$, което искахме да докажем, тъй като k е броя на компонентите на свързаност.

$\square$