

Задача 34. Дадено е дърво G , в което нито един връх не е от степен по-висока от 3. Да се докаже, че броя на върховете от степен 1 е с 2 по-голям от този на върховете от степен 3.

Доказателство:

Нека с $N(i)$ означим броя на върховете от степен i . В конкретната задача, ако $i \geq 4 \Rightarrow N(i) = 0$.

G е дърво $\Rightarrow |E| = |V| - 1 = N(1) + N(2) + N(3) - 1$.

От формулата на Ойлер имаме:

$$\begin{aligned} |E| &= 2(N(1) + N(2) + N(3) - 1) \\ &= \sum_{u \in V} \deg(u) = \\ &= N(1) \times 1 + N(2) \times 2 + N(3) \times 3 \end{aligned}$$

Следователно $N(1) = 2 + N(3)$, което искахме да докажем.

□