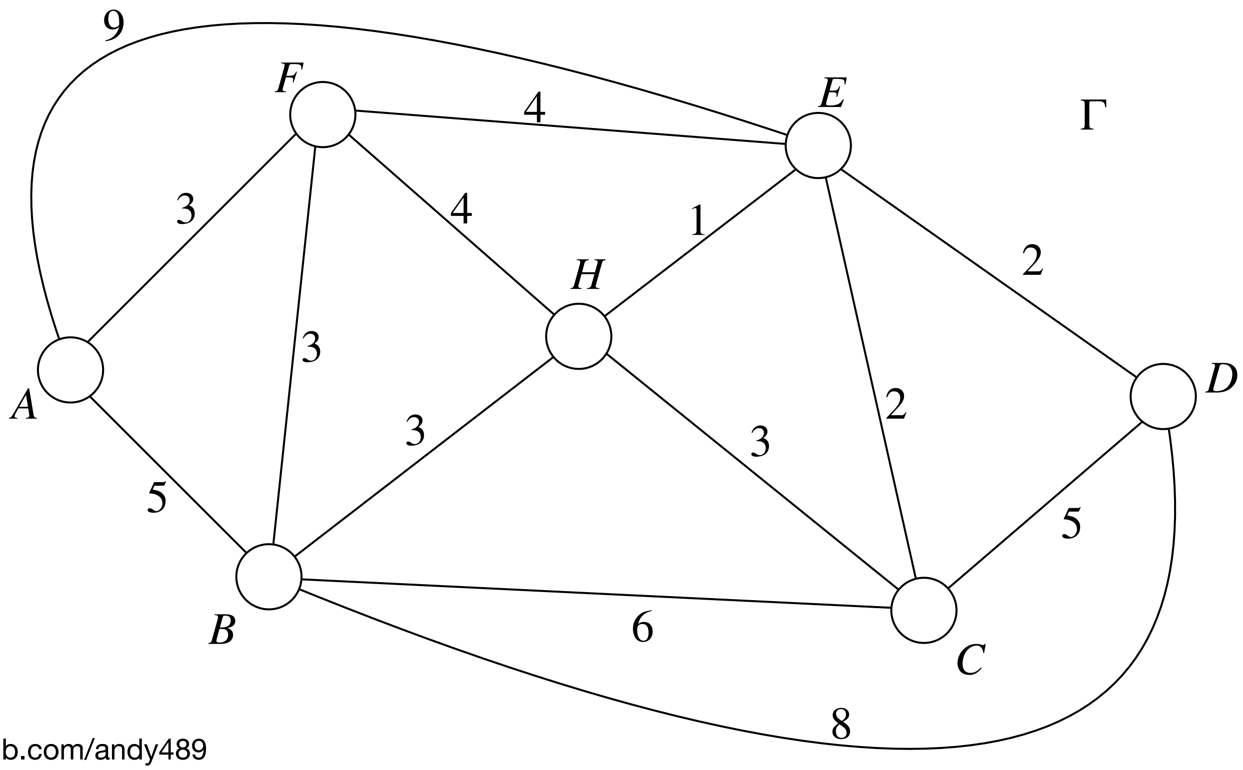
Второ контролно по ДС1
13.01.2019г.



github.com/andy489

1. Нека Γ е графът.

a) (0.75т.) Използвайки алгоритъма на Дейкстра, намерете теглата на най-леките пътища от върха D до всички останали върхове на Γ;
b) (0.75т.) Използвайки лгоритъма на Крускал, намерете минимално покриващо дърво на Γ.

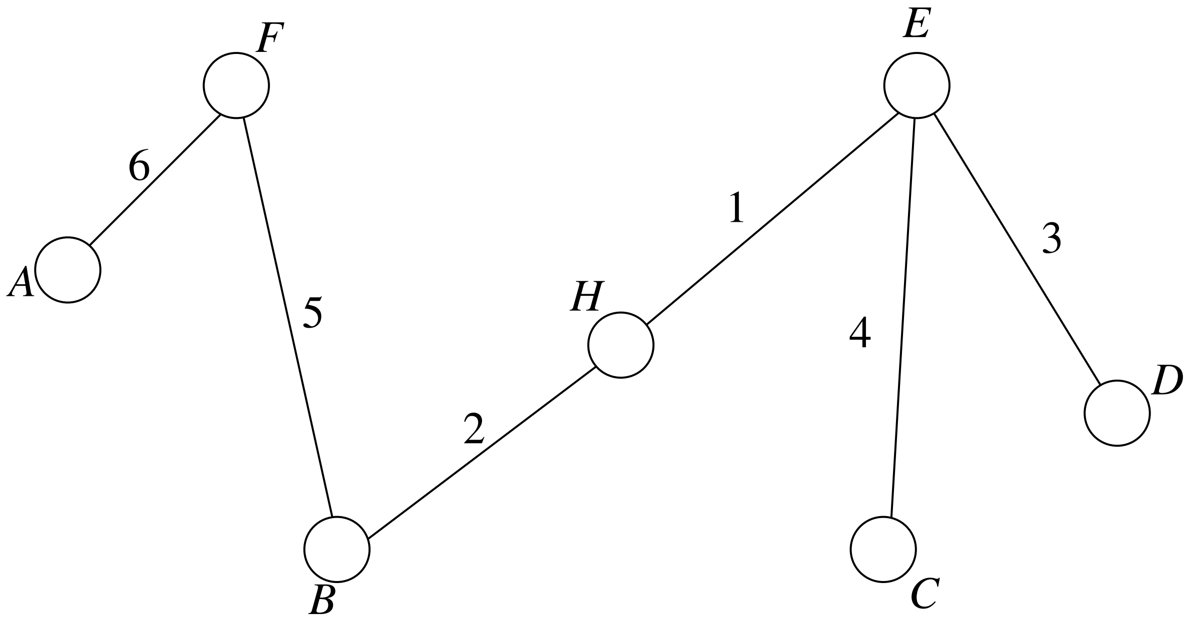
Решение:

a)

начало

A	B	C	D	E	F	H	непосетени
∞	∞	∞	0	∞	∞	∞	A, B, C, D, E, F, H
∞	8	5	–	2	∞	∞	A, B, C, E, F, H
∞	8	4	–	–	6	3	A, B, C, F, H
∞	5	4	–	–	6	–	A, B, C, F
∞	5	–	–	–	6	–	A, B, F
10	–	–	–	–	6	–	A, F
9	–	–	–	–	–	–	A
–	–	–	–	–	–	–	$\varnothing$

b) Тук номерата репрезентират последователността на избиране, а не тегла.



2. (1.5т.) Нека G е граф с $2n$ върха $(n \geq 2)$, в който има точно един връх от степен $n-1$, а всички останали върхове са от степен поне n. Докажете, че G е свързан.

Решение:

Нека G не е свързан. Тогава той ще има поне две компоненти на свързаност, като в едната ще има точно един връх от степен $n-1$. В тази компонента с този връх (по условие) ще има и други върхове, които ще са пооне n на брой, а в другите ще има поне $n+1$ върха, което е противоречие с допускането, че G не е свързан. Следователно G е свързан граф.

3. (1.5т.) Нека $n \geq 3$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Намерете броя на (думите) елементите на множеството $\{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |(U \backslash A) \cap B| \geq 2\}$.

Решение:

Нека $T = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |(U \backslash A) \cap B| \geq 2\}$, $S = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U\}$ и
$K = \{(A, B) \mid A \subseteq B \subseteq U \ \& \ |(U \backslash A) \cap B| < 2\}$.
Тъй като $T, K \subseteq S$, $T \cap K = \emptyset$ и $T \cup K = S$, то T и K са разбиване на S и от принципа на разбиването имаме, че $|S| = |T| + |K|$ или $|T| = |S| - |K|$.

На всяка наредена двойка (A, B) съпоставяме думата α.
$(A, B) \longmapsto \alpha = a_1 a_2 \ldots a_n$. Конструираме следната азбука:
$\sum = \{XY, X\overline{Y}, \overline{X}Y, \overline{X}\,\overline{Y}\}$, където за всяка буква $a_k, k \leq n$ имаме:

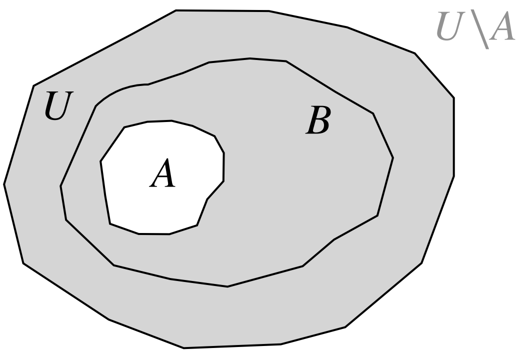
$$a_k = \begin{cases} XY, \ ako\ u_k \in A, u_k \in B, \\ X\overline{Y}, \ ako\ u_k \in A, u_k \notin B, \\ \overline{X}Y, \ ako\ u_k \notin A, u_k \in B, \\ \overline{X}\,\overline{Y}, \ ako\ u_k \notin A, u_k \notin B \end{cases}$$

Съществува биекция между множеството на думите α и множеството на наредените двойки (A, B) (принцип на взаимното еднозначно съпоставяне). Всяка дума α ще е над азбуката $\sum$. Следователно ще броим възможните думи.

$S:\ S = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U\}$
$(A, B) \in S \Leftrightarrow A \subseteq B \subseteq U \Leftrightarrow (\forall_{k \le n})[u_k \in A \Rightarrow u_k \in B]$
$\Leftrightarrow (\forall_{k \le n})\neg[u_k \in A \ \&\ u_k \in B] \Leftrightarrow (\forall_{k \le n})\neg[a_k = X\overline{Y}]$
$\Leftrightarrow X\overline{Y}$ не участва в думата $\alpha_{(A,B)}$, т.е. $\alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от три типа букви
$\sum \setminus \{X\overline{Y}\} \Rightarrow |S| = 3^n$.

$$K:\ K = \{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \ \&\ |(U \setminus A) \cap B| < 2\} =$$
$$= \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \ \&\ |(U \setminus A) \cap B| = 0\}}_{K_0} \cup \underbrace{\{(A, B) \,|\, A \subseteq B \subseteq U \ \&\ |(U \setminus A) \cap B| = 1\}}_{K_1}.$$

K_0 :



$|(U \setminus A) \cap B| = 0 \Rightarrow A = B$
$\Rightarrow \overline{X}Y$ и $X\overline{Y}$ не може да участват в думата $\alpha_{(A,B)} \Rightarrow \alpha_{(A,B)}$ е дума над азбука от два типа букви и $|K_0| = 2^n$.

K_1 : B има точно един елемент повече от A; $\overline{X}Y$ участва точно веднъж.
$\binom{n}{1}.2^{n-1} = n2^{n-1}$;

Окончателно: $|T| = |S| - |K| = |S| - |K_0| - |K_1| = 3^n - 2^n - n2^{n-1}$.