Задача 28. Даден е граф $G(V, E)$ с $|V| = n$ и $|E| > \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$. Да се докаже, че G е свързан.

Доказателство:

Ще приложим техника, която включва вложено допускане.

Допускаме, че G не е свързан. От допускането следва, че в G няма връх от степен равна на $n-1$. Допускаме, че в G има поне един връх от степен равна на $n-2$. Без ограничение на общността нека v_1 е един такъв връх и той е свързан чрез ребра с върховете $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ ($n-2$ на брой върхове) и между v_1 и v_n няма свързващо ребро. Тъй като сме допуснали, че G не е свързан, то между v_n и никои от върховете $v_2, v_3, \ldots, v_{n-1}$ не може да има свързващо ребро. Следователно $\deg(v_n) = 0$. Тогава имаме, че

$2 \times \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} \overset{\text{по усл.}}{<} 2|E| = \sum\limits_{u \in V} \deg(u) \leq (n-1)(n-2) + 0$, тъй като $\forall_{k<n} : \deg(v_k) \leq n-2$ и $\deg(v_n) = 0$. Следователно $(n-1)(n-2) < (n-1)(n-2)$, което е противоречие с това, че има връх от степен $n-2$. Следователно $\forall u \in V$, $\deg(u) \leq n-3$. Тогава, $2 \times \dfrac{(n-1)(n-2)}{2} < 2|E| = \sum\limits_{u \in V} \deg(u) \leq n(n-3)$, тоест $n^2 - 3n + 2 < n^2 - 3n$, което вече е противоречие с допускането, че G не е свързан. Следователно G е свързан граф.

$\square$