

ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ II ТЕОРИЯ I

1. Регулярен израз.

Регулярен израз над азбуката Σ е стринг над азбуката $\Sigma \cup \{\emptyset, \cdot, \cup, *\}$, който може да се дефинира индуктивно както следва:

- \emptyset и всеки елемент от Σ е регулярен израз;
- Ако α и β са регулярни изрази, то $\alpha \cdot \beta$, $\alpha \cup \beta$ и α^* са регулярни изрази;
- Нищо друго не е регулярен израз, освен ако не следва от първите две условия.

2. Регулярен език $\mathcal{L}(\alpha)$ за регулярен израз α .

\mathcal{L} е функцията, която описва връзката между регулярен израз и езика, който той задава. \mathcal{L} е дефинирана индуктивно както следва:

- $\mathcal{L}(\emptyset) = \emptyset$, $\mathcal{L}(\alpha) = \{\alpha\}$, за всяко $\alpha \in \Sigma$ (дори за $\alpha = \varepsilon$);
- Ако α и β са регулярни изрази, то $\mathcal{L}(\alpha \cdot \beta) = \mathcal{L}(\alpha) \cdot \mathcal{L}(\beta)$, $\mathcal{L}(\alpha \cup \beta) = \mathcal{L}(\alpha) \cup \mathcal{L}(\beta)$, $\mathcal{L}(\alpha^*) = (\mathcal{L}(\alpha))^*$.

3. Рефлексивно и транзитивно затваряне на бинарна релация.

Нека релацията $R \subseteq A^2$ задава ориентиран граф над множеството от върхове A . Рефлексивно и транзитивно затваряне на R е релацията:

$$R^* = \{(a, b) : a, b \in A \text{ и съществува път от } a \text{ до } b \text{ в } R\}.$$

Индуктивна дефиниция на R^* :

- $\forall a \in A : (a, a) \in R^*$;
- $(a, b) \in R \Rightarrow (a, b) \in R^*$;
- $(a, b) \in R^* \wedge (b, c) \in R^* \Rightarrow (a, c) \in R^*$.

4. Затваряне на множеството $B \subseteq A$ относно релацията $R \subseteq A^2$.

Нека A е непразно множество и нека $R \subseteq A^2$ е бинарна релация в A . Тогава подмножеството B на A е затворено относно R , ако $b_2 \in B$ всеки път когато $b_1 \in B$ и $(b_1, b_2) \in R$.

5. Краен детерминиран автомат.

Краен детерминиран автомат (КДА) наричаме наредената петорка $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, където Q е крайно множество от състояния, Σ е крайна азбука, $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ е функция на преходите, $s \in Q$ е начално състояние, $F \subseteq Q$ е множество от заключителни (финални) състояния.

6. Краен недетерминиран автомат.

Краен недетерминиран автомат (КНДА) наричаме наредената петорка $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$, където Q е крайно множество от състояния, Σ е крайна азбука, $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ е релация на преходите, $s \in Q$ е начално състояние, $F \subseteq Q$ е множество от заключителни (финални) състояния.

7. $\vdash_{\mathcal{A}}$ за краен детерминиран автомат.

За краен детерминиран автомат $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, релацията $\vdash_{\mathcal{A}}$ дефинираме по следния начин: $(q, \omega) \vdash_{\mathcal{A}} (q', \omega') \Leftrightarrow \omega = a\omega'$ и $a \in \Sigma; q, q' \in Q; \omega, \omega' \in \Sigma^*$.

8. $\vdash_{\mathcal{A}}$ за краен недетерминиран автомат.

За краен детерминиран автомат $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$, релацията $\vdash_{\mathcal{A}}$ дефинираме по

следния начин: $(q, \omega) \vdash_{\mathcal{A}} (q', \omega') \Leftrightarrow \exists u \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, такава че $\omega = u\omega'$ и $(q, u, q') \in \Delta$.
 $q, q' \in Q; \omega, \omega' \in \Sigma^*$.

9. $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ за краен детерминиран (недетерминиран) автомат \mathcal{A} .

За крайния детерминиран (недетерминиран) автомат $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F)$, езикът $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ дефинираме по следния начин: $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{\omega \mid \omega \in \Sigma^* \text{ и } (s, \omega) \vdash_{\mathcal{A}}^* (q, \varepsilon), q \in F\}$, където $\vdash_{\mathcal{A}}^*$ е рефлексивното и транзитивното затваряне на релацията $\vdash_{\mathcal{A}}$.

10. Кога една дума се разпознава (приема) от даден краен детерминиран автомат \mathcal{A} .

Казваме, че $\omega \in \Sigma^*$ се разпознава (приема) от автомата $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, s, F) \Leftrightarrow (s, \omega) \vdash_{\mathcal{A}}^* (f, \varepsilon)$, където $\omega \in \Sigma$ и $f \in F$.

11. Релация на еквивалентност \approx_L за даден език L .

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е език и $x, y \in \Sigma^*$. Казваме, че x и y са еквивалентни спрямо L и бележим $x \approx_L y$, ако за всяка дума $z \in \Sigma$, е изпълнено $xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. Лесно се проверява, че \approx_L е релация на еквивалентност.

12. $E(q)$ за краен недетерминиран автомат $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, s, F)$.

За всяко състояние $q \in Q$, нека $E(q)$ е множеството от всички състояния на \mathcal{A} , които могат да се достигнат от q без да се четат каквито и да е букви:

$$E(q) = \{p \in Q \mid (q, \varepsilon \vdash_{\mathcal{A}}^* (p, \varepsilon))\}.$$

13. Лемата за разрастването на регулярни езици.

ЗА ВСЕКИ регулярен език L ,

СЪЩЕСТВУВА естествено число $n > 0$, зависещо само от L , такова че

ЗА ВСЯКА дума $\omega \in L$ с дължина НЕ по-малка от n : $|\omega| \geq n$,

СЪЩЕСТВУВАТ думи x, y и z , за които $x \cdot y \cdot z = \omega$, $y \neq \varepsilon$ и $|x \cdot y| \leq n$ такива, че

ЗА ВСЯКО $i > 0$: $x \cdot y^i \cdot z \in L$.

14. Теоремата и следствието на Майхил-Нероуд за регулярни езици.

Нека $L \subseteq \Sigma^*$ е регулярен език. Тогава съществува краен детерминиран автомат \mathcal{A} , който разпознава L с точно толкова състояния, колкото са класовете на еквивалентност относно релацията \approx_L . Следствие: езикът L е регулярен \Leftrightarrow индексът на релацията \approx_L е краен, тоест $|I_{\approx_L}| = n \in \mathbb{N}$.

15. Каква е сложността на изучените алгоритми за:

- Построяване на съответен регулярен израз по краен автомат – експоненциална $\sigma(3^{|k|})$.
- Детерминизация на недетерминиран автомат – експоненциална $\sigma(2^{|k|} \times |k|^2 \times |\Sigma| \times |\Delta| \times |k|^3)$.
- Проверка дали два крайни недетерминирани автомата са еквивалентни – експоненциална.
- Проверка дали $\mathcal{L}(\alpha) = \mathcal{L}(\beta)$ по дадени два регулярни изрази α и β – експоненциална.
- Минимизация на краен детерминиран автомат – полиномиална $\sigma(|k|^3 \times |\Sigma|)$.

- Съответен краен недетерминиран автомат по регулярен израз – полиномиална $\sigma(2|\alpha| + 1)$.
- Проверка дали два крайни детерминирани автомата са еквивалентни или не – полиномиална.

16. Регулярни операции:

Регулярни операции (\cup , \cdot , $*$) над езици, разпознавани от НДКА.

Нека \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 са НДКА (недетерминирани крайни автомати):

- Автомат \mathcal{A}_\cup с език равен на $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cup \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$:
 - 1) Състояния: състоянията на \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 и ново състояние q ;
 - 2) Начално състояние: новото състояние q ;
 - 3) Финални състояния: финалните състояния на \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 се запазват. Новото състояние q е финално тогава и само тогава, когато поне едно от началните състояния на \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 е финално;
 - 4) Преходи: преходите в \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 се запазват. Новото състояние q повтаря преходите на началните състояния на \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 .
- Автомат \mathcal{A}_\cdot с език равен на $\mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cdot \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$:
 - 1) Състояния: състоянията на \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 ;
 - 2) Начално състояние: началното състояние на левия автомат \mathcal{A}_1 ;
 - 3) Финални състояния: финалните състояния на десния автомат \mathcal{A}_2 . Добавяме финалните състояния на \mathcal{A}_1 тогава и само тогава, когато началното състояние на десния автомат \mathcal{A}_2 е финално;
 - 4) Преходи: преходите в \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_2 се запазват. Всяко финално състояние на левия автомат \mathcal{A}_1 повтаря преходите на началното състояние на десния автомат \mathcal{A}_2 .
- Автомат \mathcal{A}^* с език равен на $(\mathcal{L}(\mathcal{A}_1))^*$:
 - 1) Състояния: състоянията на \mathcal{A}_1 и ново състояние q ;
 - 2) Начално състояние: новото състояние q ;
 - 3) Финални състояния: финалните състояния на \mathcal{A}_1 и q .
 - 4) Преходи: преходите в \mathcal{A}_1 . Всички финални състояния на \mathcal{A}^* повтарят преходите на началното състояние на \mathcal{A}_1 .