

**Задача 41.** Да се намери броят на решенията на системата  $A$  в естествени числа  $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ .

$$A : \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 100 \\ x_1 < 10 \\ 10 \leq x_2 < 30 \\ x_4 > 20 \\ x_5 < 30 \end{cases}$$

**Решение:**

Първо се освобождаваме от условията от тип  $x_i \geq a$ . Това става със замяна на променливите:

$$\underline{A \equiv} \begin{cases} x_1 + (10 + y_2) + x_3 + (21 + y_4) + x_5 = 100 \\ x_1 < 10 \\ 10 \leq 10 + y_2 < 30 \\ 21 + y_4 \geq 21 \\ x_5 < 30 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 10 + y_2 \\ x_4 = 21 + y_4 \end{cases}$$

$$A \equiv A' \equiv \begin{cases} x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 100 - 10 - 21 = 69 \\ x_1 < 10 \\ y_2 < 20 \\ x_5 < 30 \end{cases},$$

където  $x_1, x_3, x_5, y_2$  и  $y_4$  са естествени числа естествени числа  $(\mathbb{N} \cup \{0\})$ .

Нека  $\{B\}$  е множеството от решения на системата  $B : |x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$ .

Аналогично определяме и:

$C_1 : |x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$  и  $x_1 \geq 10$ ;

$C_2 : |x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$  и  $y_2 \geq 20$ ;

$C_3 : |x_1 + y_2 + x_3 + y_4 + x_5 = 69$  и  $x_5 \geq 30$ .

Тъй като  $A = A' = B \setminus \{C_1 \cup C_2 \cup C_3\}$  и  $C_1, C_2, C_3 \subseteq B$ , то от принципа на включването и изключването имаме, че:

$$\begin{aligned} |A| &= |A'| = |B| - |C_1 \cup C_2 \cup C_3| \\ &= |B| - |C_1| - |C_2| - |C_3| + |C_1 \cap C_2| + |C_2 \cap C_3| + |C_3 \cap C_1| - |C_1 + C_2 + C_3|. \end{aligned}$$

$$\text{Но, } |B| = \binom{5 + 69 - 1}{5 - 1}, |C_1| = \binom{5 + (69 - 10) - 1}{5 - 1}, |C_2| = \binom{5 + (69 - 20) - 1}{5 - 1},$$

$$|C_3| = \binom{5 + (69 - 30) - 1}{5 - 1}, |C_1 \cap C_2| = \binom{5 + (69 - 10 - 20) - 1}{5 - 1},$$

$$|C_2 \cap C_3| = \binom{5 + (69 - 20 - 30) - 1}{5 - 1}, |C_3 \cap C_1| = \binom{5 + (69 - 10 - 30) - 1}{5 - 1},$$

$$|C_1 \cap C_2 \cap C_3| = \binom{5 + (69 - 10 - 20 - 30) - 1}{5 - 1}.$$

$|C_1|$  – чрез смяната (1)  $x_1 = 10 + z_1$ ;  $|C_2|$  – чрез смяната (2)  $y_2 = 20 + z_2$ ;  $|C_3|$  – чрез смяната (3)  $x_5 = 30 + z_3$ ;  $|C_1 \cap C_2|$  – чрез смените (1) и (2).  $|C_2 \cap C_3|$  – чрез смените (2) и (3);  $|C_3 \cap C_1|$  – чрез смените (3) и (1);  $|C_1 \cap C_2 \cap C_3|$  – чрез смените (1), (2) и (3).

□