ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ I
ТЕОРИЯ I

1. $A \subseteq B$.
   За множествата A и B, казваме че A е подмножество на B и бележим с $A \subseteq B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент от A принадлежи и на B.

2. $A = B$.
   За множествата A и B, казваме че A е равно или еквивалентно на B и бележим с $A = B$ тогава и само тогава, когато всеки елемент от A принадлежи и на B $(A \subseteq B)$ и обратно – всеки елемент от B принадлежи и на A $(B \subseteq A)$.

3. Разбиване на множество.
   Нека A е множество и за произволно $i \in I : A_i$ също е множество. Фамилията $\{A_i\}_{i \in I}$ наричаме разбиване на A, ако:
   - $\forall i \in I : A_i \neq \emptyset,\ A_i \subseteq A$
   - $\forall i, j \in I \wedge i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset$
   - $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = A$

4. $x \in \bigcup\limits_{i=0}^{n} A_i$.
   Елементът x принадлежи на ОБЕДИНЕНИЕТО на множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$, тогава и само тогавам, когато x принадлежи на ПОНЕ едно от множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

5. $x \in \bigcap\limits_{i=0}^{n} A_i$.
   Елементът x принадлежи на СЕЧЕНИЕТО на множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$, тогава и само тогава, когато x принадлежи на ВСЯКО едно от множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$.

6. $x \in A_0 \times A_1 \times \ldots \times A_n$.
   Елементът x принадлежи на декартовото произведение на множествата $A_0, A_1, \ldots, A_n$, тогава и само тогава, когато съществуват елементи $a_i \in A_i$, за $i = \overline{0, n}$ и $x = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ е наредена $n + 1$-орка.

7. Бинарна релация в A.
   n-местна релация в A наричаме всяко подмножество R на декартовото произведение $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n} = A^n$, тоест $R \subseteq A^n$. В частност, ако $n = 2$, релацията R наричаме бинарна (двуместна) релация и бележим с $R \subseteq A \times A$ или $R \subseteq A^2$.

8. Рефлексивна релация.
   Нека R е бинарна релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е рефлексивна, ако за произволен елемент $a \in A : (a, a) \in R$.

9. Антирефлексивна релация.
   Нека R е бинарна релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е антирефлексивна,

ако за произволен елемент $a \in A : (a, a) \notin R$.

10. Симетрична релация.
    Нека R е бинарна релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е симетрична, ако за всеки два различни елемента $a, b \in A : (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.

11. Антисиметрична релация.
    Нека R е бинарна релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е антисиметрична, ако за всеки два произволни елемента $a, b \in A : (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$.

12. Транзитивна релация.
    Нека R е бинарна релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е транзитивна, ако за всеки три произволни различни елемента $a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.

13. Релация на еквивалентност.
    Нека R е релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е релация на еквивалентност, ако R е едновременно рефлексивна, симетрична и транзитивна.

14. Частична наредба.
    Нека R е релация над множеството $A \neq \emptyset$. Казваме, че R е частична наредба, ако R е едновременно рефлексивна, антисиметрична и транзитивна.

15. Инективно изображение (Инекция).
    Нека $f : A \longrightarrow B$. Казваме, че функцията f е инективна (инекция), ако образите на всеки два различни елемента $a, b \in A$ са различни, тоест $\forall a \neq b : f(a) \neq f(b)$.

16. Сюрективно изображение (Сюрекция).
    Нека $f : A \longrightarrow B$. Казваме, че функцията f е сюрективна (сюрекция), ако за всеки елемент $b \in B$ съществува елемент $a \in A$, за който $f(a) = b$.

17. Биекция.
    Нека $f : A \longrightarrow B$. Казваме, че функцията f е биекция, ако f е едновременно инекция и сюрекция. В този случай казваме, че f е функция на взаимно еднозначно съответствие.

18. Изброимо множество.
    Всяко крайно множество, както и всяко безкрайно множество, от което съществува биекция в множеството на естествените числа е изброимо.

19. Най-много изброимо множество.
    Казваме, че множеството A е най-много изброимо, ако A е крайно или ако A е изброимо.

20. Крайно множество и брой на елементите му.
    Множеството A е крайно, ако $A = \emptyset$ или $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ и биекция $f : A \longrightarrow I_n$. Ако $A = \emptyset$, то $|A| = 0$, в противен случай естественото число $n = |A|$ наричаме брой на елементите на множеството A.

21. Клас на еквивалентност породен от елемент.
    Нека A е непразно множество и R е релация на еквивалентност в A. Клас на еквивалентност относно R, съдържащ елемента a се нарича следното множество: $[a]_R = \{b \,|\, b \in A \wedge bRa\}$

22. Твърденията за класовете на еквивалентност, свързани с това дали елементите са в релация или не.

    Нека R е релация на еквивалентност в A. Тогава за всеки два елемента $a, b \in A$ е изпълнено:

    - ако aRb, то $[a]_R = [b]_R$
    - ако $a\not R b$, то $[a]_R \cap [b]_R = \emptyset$

23. Верига в частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.) и $B \subseteq A$. Казваме, че B е ВЕРИГА (линейно наредено множество), ако за всеки два елемента $a, b \in B$ е изпълненот, че a и b са СРАВНИМИ относно R.

24. Антиверига в частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.) и $B \subseteq A$. Казваме, че B е АНТИВЕРИГА, ако за всеки два различни елемента $a, b \in B$ е изпълненот, че a и b са НЕСРАВНИМИ относно R. Важно е да се отбележи, че елементите a и b са различни, тъй като все пак са несравними.

25. Най-малък елемент на частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е най-малък, тогава и само тогава, когато за всеки елемент $b \in A$ е изпълнено $a \leq b$.

26. Най-голям елемент на частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е най-голям, тогава и само тогава, когато за всеки елемент $b \in A$ е изпълнено $a \geq b$

27. Минимален елемент на частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е минимален, тогава и само тогава, когато НЕ съществува елемент $b \in B$, такъв че $b < a$.

28. Максимален елемент на частично наредено множество.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.). Казваме, че елементът $a \in A$ е максимален, тогава и само тогава, когато НЕ съществува елемент $b \in B$, такъв че $b > a$.

29. Свойства на изброимите множества.

    - Едно множество е изброим, ако елементите му могат да се подредят в крайна или безкрайна редица без повторения;
    - Ако A е най-много изброимо множество и A НЕ е крайно, то A е изброимо;
    - Ако A е изброимо множество, то $A \times A = A^2$ също е изброимо множество;
    - Декартовото произведение $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, както и множеството на рационалните числа $\mathbb{Q}$ са изброими множества, но множеството на реалните числа $\mathbb{R}$ и множеството $2^{\mathbb{N}}$ не са изброими множества.

30. Свойства на най-много изброимите множества.

    - Едно множество е най-много изброимо (НМИ) тогава и само тогава когато е празно или елементите му могат да се подредят в безкрайна редица, в която може да има и повторения;
    - Ако едно множество B е НМИ и $A \subseteq B$, то множеството A също е НМИ. Казано по друг начин – всяко подмножество на НМИ множество е НМИ множество;

- Обединението на всяка крайна или безкрайна редица от НМИ множества е НМИ множество. Тоест НМИ множествата са затворени относно операцията обединение.

31. Твърдението за съществуване на минимален/максимален елемент.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество (ч.н.м.) и A е крайно множество. Тогава A притежава минимален и максимален елемент.

32. Твърденията за топологична сортировка (влагане на частично наредено множество в линейно наредено множество).

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество и A е крайно множество. Тогава съществува продължение R_1 на R, такова че $\langle A, R_1 \rangle$ е линейно частично наредено множество.

33. Максимална верига/антиверига.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество и S е негова верига/антиверига. Казваме, че S е максимална верига.антиверига, ако за всяка друга верига/антиверига S' на A е изпълнено: $|S| \geq |S'|$.

34. Верижно/антиверижно разбиване.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество. Една фамилия $A_1, A_2, \ldots, A_n$ от подмножества на A ще наричаме верижно/антиверижно разбиване, ако са изпълени условията:

    - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е разбиване на A;
    - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са вериги/антивериги.

35. Минимално/максимално верижно/антиверижно разбиване.

    Нека $\langle A, R \rangle$ е частично наредено множество. Една фамилия $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ от подмножества на A ще наричаме минимално/максимално верижно/антиверижно разбиване, ако са изпълени условията:

    - $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е разбиване на A;
    - За всяко верижно/антиверижно разбиване S' на A имаме $|S| \underset{\geq}{\leq} |S'|$.

36. Теорема на Робърт Дилуорт.

    Нека R е частична наредба в краното множество A. Нека C е минимално верижно разбиване на A, а S е максимална антиверига на R. Тогава $|S| = |C|$.