

ДИСКРЕТНИ СТРУКТУРИ 2

ТЕОРИЯ 2

КСГ

1. Контекстно-свободна граматика. КСГ наричаме следната наредена четворка $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$, където:

- V - азбука;
- $\Sigma \subseteq V$ - множество на терминалните символи. $V \setminus \Sigma$ - множество на нетерминалните символи;
- $R \subseteq (V \setminus \Sigma)^* \times V^*$ - крайно множество от правила;
- $S \in V \setminus \Sigma$ - начален символ.

2. Релацията \Rightarrow_G за дадена контекстно-свободна граматика (КСГ) G .

Нека $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ е КСГ. За всеки две думи $u, v \in V^*$: $u \Rightarrow_G v$ (за една стъпка) $\stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists x, y \in V^* \text{ и } A \in V \setminus \Sigma : v = xv'y, u = xAy \text{ и правило } A \rightarrow_G v'$.

3. Кога една дума се приема от КСГ ($w \in L(G)$). Казваме, че $w \in L(G)$ т.т.к. от началния символ S за краен брой стъпки се извежда $w : S \Rightarrow_G^* w$, където \Rightarrow_G^* е рефлексивно и транзитивно затваряне на \Rightarrow_G . ($L(G) = \{w \mid S \Rightarrow_G^* w \text{ и } w \in \Sigma^*\}$).

4. Граматика в нормална форма на Чомски. Казваме, че КСГ $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ е в нормална форма на Чомски, ако $R \subseteq (V \setminus \Sigma)^* \times V^2$ (G не може да породии дума с дължина по малка от 2).

5. Лемата за разрастването на граматични дървета. Нека $G = \langle V, \Sigma, R, S \rangle$ е КСГ. За всяка дума $w \in L(G)$, т.ч. $|w| > \Phi(G)^{|V \setminus \Sigma|}$, съществуват думи u, v, x, y, z , такива че $w = u \cdot v \cdot x \cdot y \cdot z$, $v \cdot y \neq \epsilon$ и за всяко $i \in \mathbb{N}_0 : u \cdot v^i \cdot x \cdot y^i \cdot z \in L(G)$.

СТЕКОВ АВТОМАТ

6. Стекков автомат. Стекков автомат наричаме следната наредена шесторка $M = \langle K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F \rangle$, където:

- K - крайно множество от състояния;
- Σ - азбука от входните символи;
- Γ - азбука от стековите символи;
- $s \in K$ - начално състояние;
- $F \subseteq K$ - множество от финалните състояния;

- Δ - релация на преходите: крайно подмножество на

$$\left(K \times \left(\sum \cup \{\epsilon\} \right) \times \Gamma^* \right) \times (K \times \Gamma^*).$$

7. \vdash_M за стеков автомат M . Елементите на $K \times \sum^* \times \Gamma^*$ ще наричаме конфигурации на M , където $M = \langle K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F \rangle$. Нека (p, u, α) и (q, v, γ) са две конфигурации на M . Дефинираме релацията \vdash_M по следния начин:

$(p, u, \alpha) \vdash (q, v, \gamma) \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists ((p, a, \beta), (q, \delta)) \in \Delta, \text{ т.ч. } u = a \cdot v, \alpha = \beta \cdot \eta, \gamma = \delta \cdot \eta,$
за някое $\eta \in \Gamma^*$

8. Кога една дума се приема от стеков автомат. Казваме, че стековият автомат $M = \langle K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F \rangle$ приема думата w , ако е изпълнено

$(s, w, \epsilon) \vdash_M^* (f, \epsilon, \epsilon), f \in F, \vdash_M^*$ е рефлексивно и транзитивно затваряне на \vdash_M .

9. Прост стеков автомат. Казваме, че стековия автомат $M = \langle K, \sum, \Gamma, \Delta, s, F \rangle$ е прост, ако за всяко правило $((q, a, \beta), (p, \gamma)) \in \Delta$, такова че $q \neq s$ е изпълнено, че $\beta \in \Gamma$ и $|\gamma| \leq 2$.

МАШИНА НА ТЮРИНГ

10. Машина на Тюринг. МТ наричаме следната наредена петорка

$M = \langle K, \sum, \delta, s, H \rangle$, където:

- K - крайно множество от състояния;
- \sum - азбука, която съдържа символ за празна клетка \sqcup и символ за ляв ограничител \triangleright , но не съдържа \leftarrow и \rightarrow ;
- $s \in K$ - начално състояние;
- $H \in K$ - множество от стоп състояния;
- δ - функция на преходите: $(K \setminus H) \times \sum \rightarrow K \times (\sum \cup \{ \leftarrow, \rightarrow \})$, за която за всяко $q \in K \setminus H$:
 - ако $\delta(q, \triangleright) = (p, b)$, то $b = \rightarrow$;
 - $\forall a \in \sum$, ако $\delta(q, a) = (p, b)$ то $b \neq \triangleright$.

11. Кога една машина на Тюринг разпознава един език. Езикът L се разпознава от машина на Тюринг $M = \langle K, \sum, \delta, s, H \rangle$ с $y, n \in H$, ако за всяка дума

$w \in \sum^*$ (азбука с допълнителен символ) е изпълнено:

- ако $w \in L$, то M приема w $((s, \triangleright \sqcup w)$ спира на приемаща конфигурация (такава с y));
- ако $w \notin L$, то M отхвърля w $((s, \triangleright \sqcup w)$ спира на отхвърляща конфигурация (такава с n));

12. Какво и в какво преобразува простата машина на Тюринг R_{\sqcup} .

$\triangleright w_1 \sqcup w_2 \rightarrow_{R_{\sqcup}} \triangleright w_1 \sqcup w_2 \sqcup$, $w_2 \in (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$ - обхожда (сканира) лентата надясно докато не намери символ за празната клетка.

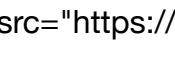
13. Какво и в какво преобразува простата машина на Тюринг L_{\sqcup} .

$\triangleright w_1 \sqcup w_2 \sqcup \rightarrow_{L_{\sqcup}} \triangleright w_1 \sqcup w_2$, $w_2 \in (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$

- обхожда (сканира) лентата наляво докато не намери символ за празната клетка.

14. Какво и в какво преобразува машината (копи-машината) C на Тюринг.

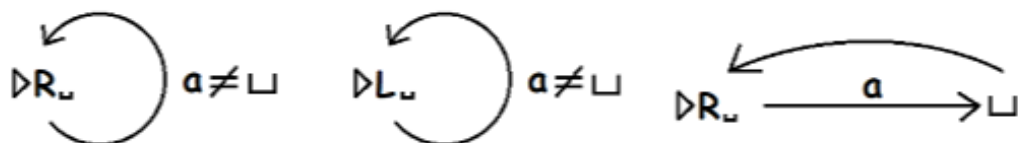
$\sqcup w \sqcup \xrightarrow{C} \sqcup w \sqcup w \sqcup$, $w_2 \in (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$

15. Какво и в какво преобразува машината (*шифт-машината*)  на Тюринг.

$\sqcup w \sqcup \xrightarrow{S} \sqcup \sqcup w \sqcup$, $w_2 \in (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$

16. Какво и в какво преобразува *delete* машината на Тюринг.

Заменя непразните символи от лентата с празни (изтриване).



17. Твърденията за разрешимите (рекурсивните) и полуразрешимите (рекурсивно номеруемите) езици:

- всеки разрешим език е полуразрешим;

- ако $\bar{L} = (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$ е разрешим език, то и допълнението му

$\bar{L} = (\sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \})^*$ също е разрешим език;

- съществува полуразрешим език, който не е разрешим.

****18.**** Кога една функция $f : \sum o^* \rightarrow \sum o^*$ се изчислява с помощта на машина на Тюринг $M = \langle K, \sum, \delta, s, H \rangle$, $\sum o \subseteq \sum \setminus \{ \triangleright, \sqcup \}$.
Тогава, когато за всяка дума $w \in \sum o^*$ са изпълнени условията:

- $(s, \triangleright \sqcup w) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup y)$, за $y \in \sum o^* \Leftrightarrow f(w) = y$;

- $f(w)$ е определена $\Leftrightarrow M$ спира работа върху $(s, \triangleright \sqcup w)$, т.е. $M(w) = y$.

19. Кога една машина на Тюринг изчислява една функция $F : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ на k променливи. Нека $F : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че машината на Тюринг $M = \langle K, \Sigma, \delta, s, H \rangle$ изчислява функцията F точно тогава, когато са изпълнени следните условия:

- $[F](n_1, \dots, n_k)$ е дефинирана $\Leftrightarrow M(1^{n_1} \sqcup \dots \sqcup 1^{n_k}) \searrow$ спира работа:
- $(s, \triangleright \sqcup 1^{n_1} \sqcup \dots \sqcup 1^{n_k}) \vdash_M^* (h, \triangleright \sqcup 1^{f(n_1, \dots, n_k)})$;
- ако $F(n_1, \dots, n_k) = m$, то $M(1^{n_1} \sqcup \dots \sqcup 1^{n_k}) = 1^m$.

20. Теоремата за неразрешимите проблеми на машина на Тюринг свързани с:

- а) празната дума;
- б) съществуването на вход;
- в) стоп-проблема;
- г) всеки вход;
- д) две машини на Тюринг;
- е) регулярните езици;
- Следните проблеми на машината на Тюринг M са неразрешими:
- дали M спира върху празната дума;
- дали M спира върху поне един вход (т.е. дали $\exists w : M(w) \searrow$);
- дали M спира при вход w , $M \searrow$;
- дали M спира за всеки вход (т.е. дали $M(w) \searrow$ за всяко w);
- дали за дадени машини на Тюринг M_1 и M_2 , M_1 и M_2 спират върху един и същ вход;
- дали $L(M)$ е регулярен език.

ФОРМАЛИЗИРАНЕ НА ОПЕРАЦИИТЕ

21. Операцията минимизация. Нека $f : \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че $g : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ се получава от f с помощта на операцията минимизация (μ -операция), ако за произволни x_1, \dots, x_n, y е изпълнена еквивалентността:

$$g(x_1, \dots, x_n) = y \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \ \& \ \forall z < y : f(x_1, \dots, x_n, z) \text{ е дефинирана и } f(x_1, \dots, x_n, z) > 0.$$

22. Операцията примитивна рекурсия. Нека $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N}^3 \rightarrow \mathbb{N}$. Казваме, че $h : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ се определя с помощта на операцията примитивна рекурсия от f и g , ако за $\forall x, y \in \mathbb{N}$ е в сила:

$$\begin{cases} h(x, 0) = f(x) \\ h(x, y + 1) = g(x, y, h(x, y)) \end{cases}$$

23. Примитивно рекурсивна функция. Индуктивна дефиниция:

- а) всички изходни ПРФ $(\{O, S, I_i^n\})$ са ПРФ;
- б) ако f, g_1, \dots, g_n са ПРФ, то и функцията h , която се получава от тях с помощта на операцията суперпозиция, също е ПРФ;

в) ако f и g са ПРФ, то и функцията h , която се получава от f и g с помощта на операцията примитивна рекурсия, също е ПРФ.

24. Частично рекурсивна функция. Индуктивна дефиниция:

а) всички изходни ПРФ $(\{O, S, I_i^n\})$ са ЧРФ;

б) ако f, g_1, \dots, g_n са ЧРФ, то и функцията h , която се получава от тях с помощта на операцията суперпозиция, също е ЧРФ;

в) ако f и g са ЧРФ, то и функцията h , която се получава от f и g с помощта на операцията примитивна рекурсия, също е ЧРФ.

г) ако f е ЧРФ, то и g , която се получава от f с μ -операция (минимизация), също е ЧРФ.

github.com/andy489