

Задача R07. Дадена е релацията на еквивалентност Ξ над множеството $\{a, b, c\}$. Дадено е още, че $a \Xi b$ и $|\{a, b, c\}/\Xi| > 1$. Да се намерят елементите на $\{a, b, c\}/\Xi$.

Решение:

За всяко множество от три елемента имаме, че:

$1 \leq |\{a, b, c\}/\sim| \leq |\{a, b, c\}| = 3$, където \sim е произволна релация на еквивалентност над него.

Но по условие имаме, че $a \Xi b$, откъдето следва, че $[a]_{\Xi} = [b]_{\Xi}$. Ако $[c]_{\Xi} = [a]_{\Xi} = [b]_{\Xi}$, то тогава ще следва, че фактор множеството ще има един елемент, тоест $\{a, b, c\}/\Xi = \{[a]_{\Xi}\}$ и така ще имаме, че $|\{a, b, c\}/\Xi| = 1$, което е противоречие с условието. Следователно $[c]_{\Xi} \neq [a]_{\Xi} = [b]_{\Xi}$. Тогава имаме точно два класа на еквивалентност:

$$[c]_{\Xi} = \{c\} \text{ и } [a]_{\Xi} = [b]_{\Xi} = \{a, b\}.$$

Окончателно, $\{a, b, c\}/\Xi = \{\{a, b\}, \{c\}\}$.

□