

**Задача S02.** Да се докаже, че за всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е изпълнено, че  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

**Доказателство:**

(  $\subseteq$  ) Нека  $x \in (A \cup B) \cap C$  е произволен елемент. Следователно  $x \in A \cup B$  и  $x \in C$ .

I-ви случай:

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap C$ . Но  $A \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ . Следователно  $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

II-ри случай:

$x \notin A \Rightarrow x \in B$  (тъй като  $x \in (A \cup B)$ )  $A \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

(  $\supseteq$  ) Нека  $y \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$  е произволен елемент. Следователно  $y \in A \cap C$  или  $y \in B \cap C$  ( $y$  принадлежи на поне едно от двете множества). И в двете множества са сечения с  $C$ , тоест на което и да принадлежи - ще доведе до това, че  $y \in C$ . Но  $C \subseteq (A \cup B) \cap C$ . Следователно  $y \in (A \cup B) \cap C$ .

Тъй като  $x$  и  $y$  бяха произволни елементи, то  $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$  и  $(A \cup B) \cap C \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

Следователно от (  $\subseteq$  ) и (  $\supseteq$  ) следва, че за всеки три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  е изпълнено, че  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

□