**Задача S04**. Да се докаже, че за всеки три множества $A$, $B$ и $C$ е изпълнено, че $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \backslash B \subseteq C$.

**Доказателство**:

Нека $A$, $B$ и $C$ са произволни множества.

( $\subseteq$ ) Нека $A \subseteq B \cup C$. Ще докажем, че $A \backslash B \subseteq C$. За целта нека $x \in A \backslash B$ е произволен елемент. Тогава $x \in A \backslash B \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x \in A$ и $x \notin B$. Но $A \subseteq B \cup C \Rightarrow x \in B \cup C$. Но $x \notin B \Rightarrow x \in C$. Тъй като $x$ беше произволно избран елемент, то с това доказахме, че ако $x \in A \backslash B$, то $x \in C$ ( в случая когато $A \subseteq B \cup C$ ) $\Rightarrow A \backslash B \subseteq C$.

( $\supseteq$ ) Нека $A \backslash B \subseteq C$. Ще докажем, че $A \subseteq B \cup C$. Нека $x \in A$ е произволен елемент. Ако $x \in B$, то твърдението $x \in B \cup C$ е тривиално, но ако $x \notin B$, то тъй като $x \in A$ ще имаме, че $x \in A \backslash B$. От друга страна сме в случая, в който $A \backslash B \subseteq C$ и следователно $x \in C \subseteq B \cup C$.

Следователно от ( $\subseteq$ ) и ( $\supseteq$ ) следва, че за всеки три множества $A$, $B$ и $C$ е изпълнено, че $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow A \backslash B \subseteq C$.

$\square$