Задача S05. Да се докаже, че за всеки n на брой множества $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е изпълнено, че $\mathscr{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}\left(A_i\right)$.

Доказателство:

($\subseteq$) Нека $X \in \mathscr{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Тогава $X \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \forall i, x \in A_i$, където $x \in X$, тоест $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_k$ за всяко k. Но за всяко $k \in \mathbb{N}$: $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A_k$, откъдето $X \in A_k$ за всяко $k \in \mathbb{N}$. Следователно $\forall k \in \mathbb{N} : x \in \mathscr{P}(A_k)$.

($\supseteq$) Нека $Y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathscr{P}\left(A_i\right) \Rightarrow Y \in \mathscr{P}\left(A_1\right) \wedge Y \in \mathscr{P}(A_2) \wedge \ldots$ за всяко $i \in \mathbb{N}$ и $Y \in \mathscr{P}(A_i)$. Тоест $Y \subseteq A_i$. Ще докажем, че $Y \subseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Нека $y \in Y$, но за всяко $i \in \mathbb{N}$: $Y \subseteq A_i \Rightarrow y \in A_i \Rightarrow y \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Rightarrow y \subseteq \mathscr{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)$.

$\square$