Задача RR03. Да се намери явния вид на рецицата $\{a_n\}_0^\infty$, която е зададена чрез следното рекурентно уравнение: $a_{n+1} = -3a_n + (2n+1) \times 5^n$ и началното условие $a_0 = 0$.

Решение:

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = -3a_0 + (2 \times 0 + 1) \times 5^0 = 1 \\ a_2 = -3a_1 + (2 \times 1 + 1) \times 5^1 = -3 + 3 \times 5 = 12 \end{cases}$$

Хомогенна част на рекурентната зависимост: $p \times (-3)^n$.
Нехомогенна част на рекурантната зависимост: $(q \times n + r) \times 5^n$.

Следователно общия вид на рекурентното уравнение е:

$$a_n = p \times (-3)^n + (qn + r) \times 5^n$$

$$\begin{cases} 0 = a_0 = p + r \\ 1 = a_1 = -3p + 5q + 5r \\ 12 = a_2 = 9p + (2q + r) \times 25 = 9p + 50q + 25r \end{cases}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 5 & 1 \\ 9 & 50 & 25 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \\ -16 & 50 & 0 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 40 & 0 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & \frac{1}{32} \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & -\frac{1}{32} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} p = \frac{1}{32} \\ q = \frac{1}{4} \\ r = -\frac{1}{32} \end{cases} \Rightarrow a_n = \frac{1}{32} \times (-3)^n + \left(\frac{1}{4} \times n - \frac{1}{32}\right) \times 5^n.$$