Упражнение 4 по СЕМ. Условна вероятност. Независимост

26 октомври 2020 г. / групи 4,5

Задача 5. Дадени са две партиди от съответно 12 и 10 изделия. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Каква е вероятността то да е дефектно?

Решение:
Ще използваме формулата за пълна вероятност и за това ще дефинираме няколко събития. Нека
A={избираме дефектно изделие от първата партида}
B={избираме дефектно от втората партида}

Следователно $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A}) = \dfrac{2}{11}.\dfrac{1}{12} + \dfrac{11}{12}.\dfrac{1}{11} = 0{,}0(95)\ldots$

Задача 6. Разполагаме с три стандартни зара и един, чийто страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат

1. **три шестици;**
2. **различни цифри;**
3. **последователни цифри?**

Решение:

Нека $H = \{$изтеглили сме трите стандартни зара$\}$, тогава
$\overline{H} = \{$изтеглили сме два стандартни + суперзара (само с 6-ци)$\}$.

Нека означим с A, B, C множествата от $1.$, $2.$, $3.$ съответно.

Вероятността да изтеглим трите стандартни зара е $\mathbb{P}(H) = \dfrac{1}{\binom{4}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

Разбиваме по първото теглене и прилагаме формулата за пълна вероятност:
1. $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(A|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \dfrac{1}{6^3}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6^2}.\dfrac{3}{4}$;

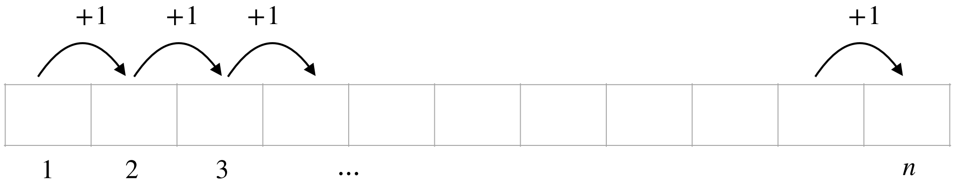
2. $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(B|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \dfrac{6.5.4}{6^3}\dfrac{1}{4} + \dfrac{5.4}{6^2}.\dfrac{3}{4}$;

3. $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \dfrac{4.3!}{6^3}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{2!}{6^2}.\dfrac{3}{4}$,

Пояснение за 3. :
Ако сме изтеглили трите обикновени зара възможностите да изтеглим три последователни числа са $\{1,2,3\}$, $\{2,3,4\}$, $\{3,4,5\}$, $\{4,5,6\}$ и техните пермутации. А ако сме изтеглили два обикновени зара и суперзара, тогава възможностите са само $\{4,5\}$, $\{5,4\}$.

Задача 7. Дадени са n урни, всяка от тях има m бели и k черни топки. От първата урна се тегли топка и се прехвърля във втората, след това от втората урна една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Решение:



m-бели
k-черни

- във всяка урна имаме m-бели и k-черни топки

Нека $U_i = \{$избрали сме бяла топка от i-тата урна$\}$. Търси се U_n.
$\mathbb{P}(U_1) = \dfrac{m}{m+k} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{U_1}) = \dfrac{k}{m+k}$.

Разбиваме по първото вадене на топка от първата урна и прилагаме формулата за пълна вероятност:

$$\mathbb{P}(U_2) = \mathbb{P}(U_2 \,|\, U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(U_2 \,|\, \overline{U_1})\mathbb{P}(\overline{U_1}) = \frac{m+1}{m+k+1} \cdot \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+k+1} \cdot \frac{k}{m+k} =$$
$$= \frac{m\cancel{(m+k+1)}}{\cancel{(m+k+1)}(m+k)} = \frac{m}{m+k}$$

Полученият резултат $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2)$ ни навежда на мисълта, че $\mathbb{P}(U_i) = \dfrac{m}{m+k}$ за всяко $i = \overline{1,n}$.

Това може да се докаже с математическа индукция:

1. Индукционна база: За U_1 и U_2 е изпълнено: $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \dfrac{m}{m+k}$;
2. Индукционна хипотеза: Нека допуснем, че е изпълнено и за U_p, $p \in \mathbb{N}$;
3. Индукционен преход/стъпка: Ще покажем, че е изпулнено и за U_{p+1}. Разбиваме по ваденето на топка от предходната урна:

$$\mathbb{P}(U_{p+1}) = \mathbb{P}(U_{p+1} \,|\, U_p)\mathbb{P}(U_p) + \mathbb{P}(U_{p+1} \,|\, \overline{U_p})\mathbb{P}(\overline{U_p}) =$$
$$= \frac{m+1}{m+k+1} \cdot \mathbb{P}(U_p) + \frac{m}{m+k+1}(1 - \mathbb{P}(U_p)) = \frac{m}{m+k}.$$

Задача 8. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Решение:

Нека $\underset{i=\overline{0,3}}{A_i} = \{$изтеглили сме i нови топки от първото теглене$\}$.
Нека $B = \{$и трите топки изтеглени от втория път са нови$\}$.

Вероятността да изтеглим 3 топки от 7 е $\dbinom{7}{3}$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B \,|\, A_1)\mathbb{P}(A_1) + \ldots = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(B \,|\, A_i)\mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\cdot\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} = \frac{4+4.3}{\binom{7}{3}^2} = \frac{16}{35^2}.$$

Задача 10 (Kahneman, Thinking Fast and Slow). В град с две фирми за таксита, синя и зелена, през нощта се случва катастрофа с участието на такси, от която шофьорът на таксито бяга. Разполагате със следните данни:

- $85\,\%$ от всички таксита са зелени и $15\,\%$ са сини;
- свидетел дава показания, че таксито е било синьо;
- експертиза установява, че свидетелят определя правилно синьо/зелено в $80\,\%$ от случаите и греши в останалите $20\,\%$.

Каква е вероятността колата наистина да е била синя?

Решение:

Нека B={таксито от катастрофата е синьо},
S={свидетеля определя че таксито е синьо}.

Имаме, че:

$\mathbb{P}(B) = 15\,\%$
$\mathbb{P}(\overline{B}) = 85\,\%$
$\mathbb{P}(S\,|\,B) = 80\,\%$
$\mathbb{P}(S\,|\,\overline{B}) = 20\,\%$

Търси се $\mathbb{P}(B\,|\,S)$.

Имаме, че $\mathbb{P}(B\,|\,S) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(S)}$, но от друга страна $\mathbb{P}(S\,|\,B) = \dfrac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(S\cap B) = \mathbb{P}(S\,|\,B)\,.\,\mathbb{P}(B)$. Заместваме втория резултат в първия и получаваме, че:

$$\mathbb{P}(B\,|\,S) = \frac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S\,|\,B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S\,|\,B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(S\,|\,B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(S\,|\,\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{80\,\%\,.15\,\%}{80\,\%\,.15\% + 20\,\%\,.85\,\%} = \frac{8.15}{8.15 + 2.85} = \frac{4.3}{4.3 + 17} = \frac{12}{29} < \frac{1}{2}.$$