

Първо контролно по статистика и емпирични методи
специалност - софтуерно инженерство

Вариант 1
ф.н. 62369

Задача 1. Три зара се хвърлят последователно 5 пъти. Каква е вероятността, броят на хвърлянията, при които се падат само нечетни точки да бъде четен? Да се намери средната стойност на този брой.

Решение:

Дефинираме случайните величини $A = \{\text{брой паднали се нечетни точки при хвърлянето на 3 зара}\}$, а $A_i = \{\text{на } i\text{-тия зар се пада нечетен брой точки}\}$, за $i = 1, 2, 3$.

A_i е бернулиево разпределена случайна величина с вероятност за успех $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

A е биномно разпределена случайна величина.

$A \in \text{Bin} \left(n = 3, p_A = \frac{1}{2} \right)$. Вероятността и на трите зара да се падне

нечетен брой точки е равна на $\mathbb{P}(A = 3) = \binom{3}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{2} \right)^{3-3} = \frac{1}{8}$.

Нека дефинираме още $X = \{\text{брой паднали се само нечетни цифри при } n \text{ хвърляния на 3 зара}\}$. В нашия експеримент имаме, че $n = 5$.

Тъй като случайната величина X брой успехите на бернулиеви събития с вероятност за успех $p_X = \frac{1}{8}$, то $X \in \text{Bin} \left(n = 5, p_X = \frac{1}{8} \right)$.

В задачата се търси:

$$\mathbb{P}_{\substack{2k \leq 5 \\ k \in \mathbb{N}_0}}(X = 2k) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 4) =$$

$$\begin{aligned} &= \binom{5}{0} p_X^0 (1 - p_X)^5 + \binom{5}{2} p_X^2 (1 - p_X)^3 + \binom{5}{4} p_X^4 (1 - p_X)^1 = \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^5 + \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^3 + \frac{5!}{4!1!} \left(\frac{1}{8}\right)^4 \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \\ &= \left(\frac{7}{8}\right)^5 + 10 \left(\frac{1}{8}\right)^2 \left(\frac{7}{8}\right)^3 + 5 \left(\frac{1}{8}\right)^4 \frac{7}{8} = \\ &= \frac{7^5 + 10 \times 7^3 + 5 \times 7}{8^5} = \frac{16807 + 3430 + 35}{32768} = \\ &= \frac{20272}{32768} = 0.61865234375 \approx 0.618 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ където}$$

$$n = 5, p := p_X = \frac{1}{8}, q := q_X = 1 - p_X = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ще го смятаме в общия случай:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \times \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = \\ &= np \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \stackrel{\substack{m:=n-1 \\ j:=k-1}}{=} np \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} p^j q^{m-j} = \\ &= np(p+q)^m = np \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = np = 5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0.625.$$

□

Задача 2. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Дадени са n независими събития A_1, A_2, \dots, A_n . Да се докаже, че събитията $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \dots, \overline{A}_n$ също са независими.

Доказателство:

Да вземем $n = 2$ и да проверим верността на Лемата от условието на задачата за две независими събития A_1 и A_2 .

От дефиницията за независимост имаме, че $\mathbb{P}(A_1 A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$, където $A_1 A_2 := A_1 \cap A_2$ за краткост.

Сега, A_2 и \overline{A}_2 ни дават тривиалната пълна група от събития ($A_2 \cap \overline{A}_2 = \emptyset$ и $A_2 \cup \overline{A}_2 = \Omega$). Следователно, от формулата за пълната вероятност имаме, че: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1 A_2) + \mathbb{P}(A_1 \overline{A}_2)$.

Тогава,

$$\mathbb{P}(A_1 \overline{A}_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1 A_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1) \underbrace{\mathbb{P}(A_2)}_{\mathbb{P}(\overline{A}_2)} = \mathbb{P}(A_1)(1 - \mathbb{P}(A_2)) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2),$$

което по дефиниция означава, че A_1 и \overline{A}_2 са независими събития.

Дуално, ако разбием Ω на A_1 и \overline{A}_1 и отново приложим формулата за пълната вероятност, ще получим: $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2 A_1) + \mathbb{P}(A_2 \overline{A}_1) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}_1 A_2) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1 A_2) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2)(1 - \mathbb{P}(A_1)) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A}_1)$, което отново по дефиниция показва, че и събитията \overline{A}_1 и A_2 също са независими.

Остана да докажем, че \overline{A}_1 и \overline{A}_2 също са независими събития.

За $\mathbb{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2)$ може да използваме същата техника както до сега.

$$\mathbb{P}(\overline{A}_1) = \mathbb{P}(\overline{A}_1 A_2) + \mathbb{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1) - \mathbb{P}(\overline{A}_1 A_2), \text{ но ние вече сме доказали, че } \overline{A}_1 \text{ и } A_2 \text{ са независими събития, откъдето следва, че } \mathbb{P}(\overline{A}_1 \overline{A}_2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1) - \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)(1 - \mathbb{P}(A_2)) = \mathbb{P}(\overline{A}_1)\mathbb{P}(\overline{A}_2).$$

Този резултат ще ни послужи за база на пълната математическа индукция (пълна, защото използва всички резултати преди нея, а не

само предходния). Правим хипотезата, че Лемата е изпълнена за някое $n = k \geq 2$. Ще докажем, че е изпълнена и за $n = k + 1$.

Индукционна стъпка (индукционен преход):

От индукционната хипотезата следва, че $A_1^*, A_2^*, \dots, A_k^*$ са независими събития и искаме да докажем, че и $A_1^*, A_2^*, \dots, A_k^*, A_{k+1}^*$ са независими, като знаем, че $A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ са независими. (A_j^* е някое от събитията: A_j, \bar{A}_j)

Твърдение: Двете събития $A_1 A_2 \dots A_k = \bigcap_{i=1}^k A_i$ и A_{k+1} са независими

т.с.т.к $\Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1}$ са независими.

Това е така, защото твърденията от двете страни са еквивалентни на $\mathbb{P}(A_1 A_2 \dots A_k) \mathbb{P}(A_{k+1})$ (тъй като по дефиниция

$$\mathbb{P}(A_1) \mathbb{P}(A_2) \dots \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \cap A_{k+1}\right).$$

Отново прилагаме аналогична техника, както в индукционната база – разбиваме по новото събитие:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) &= \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1}}\right) + \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^k A_i \cap \bar{A}_{k+1}}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i \cap \bar{A}_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i \cap A_{k+1}\right) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) - \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) \mathbb{P}(A_{k+1})}_{\substack{\text{тъй като } A_1, A_2, \dots, A_k, A_{k+1} \\ \text{са независими по условие}}} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) (1 - \mathbb{P}(A_{k+1})) = \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^k A_i\right) (\bar{A}_{k+1}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^k A_i \text{ и } \overline{A_{k+1}} \text{ са независими} \Rightarrow A_1, A_2, \dots, A_k, \overline{A_{k+1}} \text{ са независими.}$$

Аналогично, ако означим $\bigcap_{i=1}^k A_i = B$ за улеснение, то ще получим, че

$$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(BA_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1}) \text{ или}$$

$$\mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}(BA_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1})(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A_{k+1})\mathbb{P}(\overline{B})$$

$$\Rightarrow A_{k+1} \text{ и } \overline{B} \text{ са независими.}$$

Остана само да докажем, че и събитията \overline{B} и $\overline{A_{k+1}}$ са независими:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{B}\overline{A_{k+1}}) &= \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1}) = \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A_{k+1}) = \\ &= \mathbb{P}(\overline{B})(1 - \mathbb{P}(A_{k+1})) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A_{k+1}}), \text{ което искахме да докажем.} \end{aligned}$$

Очевидно резултата, който искахме да докажем в задача 2 е частен случай на доказаната Лема. □

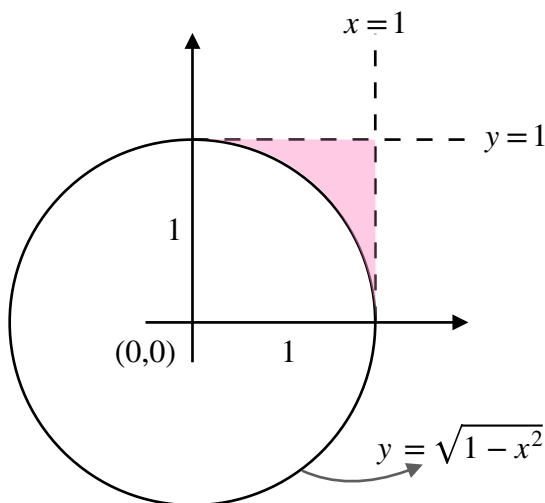
Задача 3. По случаен начин се избират две числа в интервала $[0,1]$. Каква е вероятността сумата от квадратите им да бъде по-голяма от 1?

Решение:

Нека с x и y бележим двете случайно избрани числа. В задачата се търси:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{x^2 + y^2 > 1\} | \{0 \leq x, y, \leq 1\}) &= \frac{\mathbb{P}(\{x^2 + y^2 > 1\} \cap \{0 \leq x, y, \leq 1\})}{\mathbb{P}(\{0 \leq x, y \leq 1\})} = \\ &= \frac{\mu(\{x^2 + y^2 > 1\} \cap \{0 \leq x, y \leq 1\})}{\mu(\{0 \leq x, y \leq 1\})} = \mu(\{x^2 + y^2 > 1\} \cap \{0 \leq x, y \leq 1\}) = \\ &= M. \end{aligned}$$

$x^2 + y^2 = 1$ е уравнение на окръжност с радиус 1 и център точката $(0,0)$. А пък другите две ограничения отсичат от $O \overrightarrow{xy}$ квадрат със страна 1.



Вероятността, която търсим се свежда до геометрична вероятност и е равна на лицето (мярката) на розовата част от чертежа по-горе.

Лицето на тази част може да пресметнем по два начина:

I-ви н/н: (Чрез съображения и наблюдения по чертежа).

Съобразяваме, че лицето на розовата част е равно на лицето на квадрата заключен между положителните посоки на абсцисата и

ординатата минус $\frac{1}{4}$ от лицето на окръжността. Следователно

$$M = 1 - \frac{\pi r^2}{4} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146018366.$$

II-ри н/н: Чрез груба сила и директно интегриране без мислене (универсален начин):

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \\ &= x \Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx \stackrel{\text{полагания}}{=} \begin{cases} x = \sin(u) \\ dx = \cos(u) du \\ x \in [0, 1] \rightarrow u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \\ &= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \sqrt{1 - \sin^2(u)} du = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2} du = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) d 2u - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \\ &= 1 - \frac{1}{4} \sin(2u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146018366. \end{aligned}$$

□

Задача 4. На състезание участват 25 отбора: 8 отбора в категория джипове, 10 при камиони и 7 при мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите с 0.7, а моторите с вероятност 0.6. След състезанието на случаен принцип се избират три отбора, за провеждане на технически контрол. Известно е че един от избраните три отбора е завършил състезанието, а другите два не. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

Решение:

Означаваме следните събития:

$\mathcal{D} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „джипове“}\}$

$\mathcal{K} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „камиони“}\}$

$\mathcal{M} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „мотоциклети“}\}$

Тъй като $\mathcal{D} \cap \mathcal{K} = \mathcal{K} \cap \mathcal{M} = \mathcal{M} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ и $\mathcal{D} \cup \mathcal{K} \cup \mathcal{M} = \Omega$, то \mathcal{D} , \mathcal{K} и \mathcal{M} са разбиване на Ω (пълна група от събития). Имаме, че

$$\mathbb{P}(\mathcal{D}) = \frac{8}{25}; \mathbb{P}(\mathcal{K}) = \frac{10}{25} \text{ и } \mathbb{P}(\mathcal{M}) = \frac{7}{25}.$$

сумират се до 1, тъй като са разбиване

Нека Φ е събитието {отбор финишира}. От условието ще паднат следните условни вероятности:

$$\mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) = 0.9, \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) = 0.7 \text{ и } \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) = 0.6.$$

Нека A е събитието {**точно 1** от отборите, на които се провежда технически преглед е **финиширал**}

От формулата за пълната вероятност ще имаме, че

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(A | H_k) \mathbb{P}(H_k), \text{ където } I = \{\text{множеството от всички}$$

възможни сценарии за това с какво са участвали 3 отбора}

Питаме се кое е това множество I ? Ще го изброим с груба сила, но все пак ще очакваме, то да е от кардиналност $|I| = 10$.

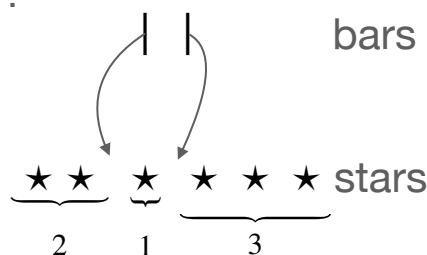
Ще очакваме тази кардиналност за множеството I , тъй като дефинираме $I = \{H_{ijk}, \text{ където } H_{ijk} = \{i \times \mathcal{D} + j \times K + k \times \mathcal{M} \text{ за } i + j + k = 3 \text{ и } 0 \leq i, j, k \leq 3\}\}$.

Как пресмятаме кардиналността без грубо изброяване? Ами много лесно:

$|I|$ е равно на броя на решенията на уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ в цели неотрицателни числа. Последното е равно на броя на решенията на уравнението $y_1 + y_2 + y_3 = 6$ в цели положителни числа (положихме $x_i = y_i + 1$ за да премахнем възможните нули от събираемите). Сега прилагайки трика – „stars and bars“, получаваме, че

$$|I| = \binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10.$$

Пояснение на „stars and bars“:



Така поставените "bars" между "stars", дават решението:

$2 + 1 + 3 = y_1 + y_2 + y_3 = 6$. Може да поставим 2 "bars" измежду 6 "stars" като изберем двете позиции измежду пет (без най-отпред и най-отзад) възможни.

В крайна сметка, с така въведената нотация, търсим:

$$\mathbb{P}(H_{111} | A) \xrightarrow{\{1 \times \mathcal{D} + 1 \times K + 1 \times \mathcal{M}\}} \text{точно един отбор е завършил състезанието}$$

Това е:

$$\mathbb{P}(H_{111} | A) = \frac{\mathbb{P}(H_{111} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A | H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A | H_k)\mathbb{P}(H_k)}$$

имаме го разбито

Всъщност, ние просто доказахме формулата на Бейс, чрез формулата за условна и пълна вероятности.

Грубо изброяване и пресмятане:

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{P}(H_{ijk}) = \frac{\binom{8}{i} \binom{10}{j} \binom{7}{k}}{\binom{25}{3}} : \\ i, j, k \in \mathbb{N}_0 \\ i + j + k = 3 \end{array} \right)$$

$$\mathbb{P}(H_{012}) = \frac{\binom{8}{0} \binom{10}{1} \binom{7}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{350}{2300}; \mathbb{P}(H_{003}) = \frac{\binom{8}{0} \binom{10}{0} \binom{7}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{35}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{030}) = \frac{\binom{8}{0} \binom{10}{3} \binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{120}{2300}; \mathbb{P}(H_{021}) = \frac{\binom{8}{0} \binom{10}{2} \binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{315}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{120}) = \frac{\binom{8}{1} \binom{10}{2} \binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{320}{2300}; \mathbb{P}(H_{102}) = \frac{\binom{8}{1} \binom{10}{0} \binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{111}) = \frac{\binom{8}{1} \binom{10}{1} \binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{560}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{201}) = \frac{\binom{8}{2} \binom{10}{0} \binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300}; \mathbb{P}(H_{210}) = \frac{\binom{8}{2} \binom{10}{1} \binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{280}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{300}) = \frac{\binom{8}{3} \binom{10}{0} \binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300}.$$

Припомниме означенията:

$\mathcal{D} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „джипове“}\} \rightarrow 8; 0.9$

$\mathcal{K} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „камиони“}\} \rightarrow 10; 0.7$

$\mathcal{M} = \{\text{случайно избран отбор е в категория „мотоциклети“}\} \rightarrow 7; 0.6$

$$\mathbb{P}(A | H_{012}) = \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}))^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) =$$

$$= 0.7 \times 0.4^2 + 0.3 \times 2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.112 + 0.144 = 0.256$$

$$\mathbb{P}(A | H_{003}) = \binom{3}{2} (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) = 3 \times 0.4^2 \times 0.6 = 0.288$$

$$\mathbb{P}(A | H_{030}) = \binom{3}{2} (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) = 3 \times 0.3^2 \times 0.7 = 0.189$$

$$\mathbb{P}(A | H_{021}) = \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) + (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) =$$

$$= 2 \times 0.7 \times 0.3 \times 0.4 + 0.3^2 \times 0.6 = 0.168 + 0.054 = 0.222$$

$$\mathbb{P}(A | H_{120}) = \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}))^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) =$$

$$= 0.9 \times 0.3^2 + 0.1 \times 2 \times 0.7 \times 0.3 = 0.081 + 0.042 = 0.123$$

$$\mathbb{P}(A | H_{102}) = \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}))^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) =$$

$$= 0.9 \times 0.4^2 + 0.1 \times 2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144 + 0.048 = 0.192$$

$$\mathbb{P}(A | H_{111}) = \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) + \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) +$$

$$+ \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) =$$

$$= 0.1 \times 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.7 \times 0.4 + 0.9 \times 0.3 \times 0.4 =$$

$$= 0.018 + 0.028 + 0.108 = 0.154$$

$$\mathbb{P}(A | H_{201}) = (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{M}) + \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{M}) =$$

$$= 0.1^2 \times 0.6 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.4 = 0.006 + 0.108 = 0.078$$

$$\mathbb{P}(A | H_{210}) = (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{K}) + \binom{2}{1} \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}) \mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{K}) =$$

$$= 0.1^2 \times 0.7 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.3 = 0.007 + 0.054 = 0.061$$

$$\mathbb{P}(A | H_{300}) = \binom{3}{2} (\mathbb{P}(\overline{\Phi} | \mathcal{D}))^2 \mathbb{P}(\Phi | \mathcal{D}) = 3 \times 0.1^2 \times 0.9 = 0.027$$

Сега вече имаме всичко необходимо пресметнато. Следователно,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_{111} | A) &= \frac{\mathbb{P}(A | H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A | H_k)\mathbb{P}(H_k)} = \\ &= \frac{0.154 \times \frac{560}{2300}}{\frac{1}{2300} \times \left(\underbrace{0.256 \times 350 + 0.288 \times 35 + 0.189 \times 120 + 0.222 \times 315}_{89.6 + 10.08 + 22.68 + 69.93} + \underbrace{0.123 \times 320 + 0.192 \times 56 + 0.154 \times 560}_{39.36 + 10.752 + 86.24} + \underbrace{0.078 \times 56 + 0.061 \times 280 + 0.027 \times 56}_{4.368 + 17.08 + 1.512} \right)} = \\ &= \frac{1.54 \times 56}{\underbrace{2.56 \times 35 + 0.288 \times 35 + 1.89 \times 12 + 0.222 \times 315}_{89.6 + 10.08 + 22.68 + 69.93} + \underbrace{1.23 \times 32 + 0.192 \times 56 + 1.54 \times 56}_{39.36 + 10.752 + 86.24} + \underbrace{0.078 \times 56 + 0.61 \times 28 + 0.027 \times 56}_{4.368 + 17.08 + 1.512}} = \\ &= \frac{86.24}{\underbrace{89.6 + 10.08 + 22.68 + 69.93}_{86.24} + \underbrace{39.36 + 10.752 + 86.24}_{86.24} + \underbrace{4.368 + 17.08 + 1.512}_{86.24}} = \\ &= \frac{86.24}{192.29 + 136.352 + 21.448 + 1.512} = \frac{86.24}{351.602} \approx 0.24527733061 \approx 0.245 \end{aligned}$$