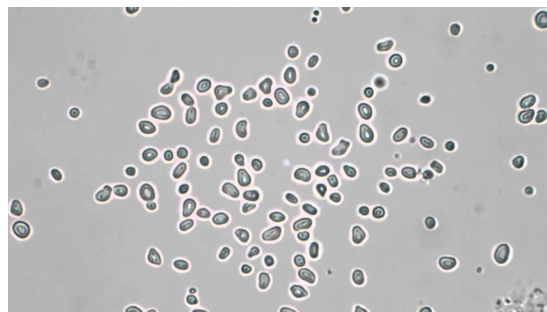
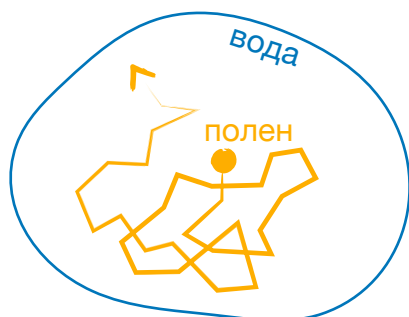


В началото на 18-ти век, шотландския ботаник Браун (Робърт Браун (1773 – 1858), Шотландия), наблюдавал прашец от растението Clarkia pulchella във вода под микроскоп ① ② ③. Той видял, че не самите зърна прашец, а по-дребни частици в тях изпълняват „треперещо“, непрекъснато и хаотично движение



Въпреки че първоначално предположил, че движението се дължи на живот, Браун провел систематични експерименти, за да го провери. Той повторил наблюденията с:

- Прашец от други растения.
- Неорганични вещества като прах от въглища, стъкло и метали. Тъй като хаотичното движение се наблюдавало при всички тези неживи материали, той отхвърлил хипотезата, че причината е биологична, и заключил, че принадлежи към самата частица. Браун обаче не успял да намери точната физическа причина за това явление.

Много години по-късно, през 1905 г., Алберт Айнщайн публикувал първата теоретична обяснителна работа ④. Той предположил, че движението (наречено „брауново движение“) е резултат от непрекъснатите и случайни удари на водните молекули върху по-големите видими частици.

Брауновото движение възниква от постоянния „обстрел“ на видимата частица от невидимите водни молекули. Във всеки миг частицата получава удари от трилиони молекули от всички посоки. Теоретично тези сили се балансират, но поради чисто статистически отклонения в техния брой и интензивност, винаги възниква една минимална, но измерима несбалансирана сила. Тази сила тласка частицата в една произволна посока. Следващият миг балансът отново се нарушава, но в друга посока, което води до характерното хаотично/стохастично „танцуване“ на частицата.

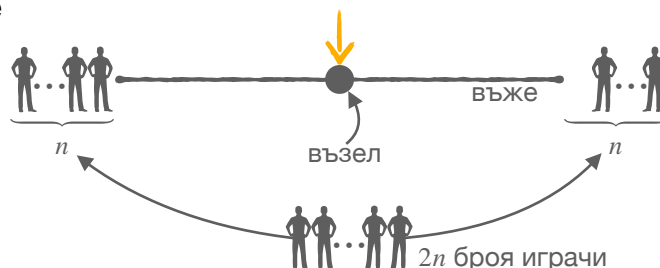
Френският физик Жан Батист Перен (1870–1942) използва прецизни експерименти с брауновото движение, за да определи стойността на числото на Авогадро [1]. Успехът на Перен да измери тази константа чрез наблюдение на видими частици предостави окончателно и неоспоримо доказателство за съществуването на атоми и молекули — факт, за който той получи Нобелова награда по физика през 1926 г. На пръв поглед може да изглежда парадоксално, че такъв хаотичен и сложен процес може да се опише математически. На микроскопско ниво всяка молекула има конкретна скорост и посока. Обаче, когато разглеждаме колективното поведение на трилиони случайни сблъсъка, индивидуалните детайли стават незначителни. Математическият гений се състои в това да се заменят всички тези

сложни взаимодействия с един ефективен стохастичен (случаен) модел. Този модел — чистото брауново движение или Винеров [2] процес — не претендира да описва пълната физическа реалност на всеки отделен удар. Вместо това, той улавя съвършено статистическите свойства на системата.

И точно тази способност да предвижда и описва средното поведение прави модела изключително мощен. Той не е „реалният“ процес, но е толкова добро приближение на реалността, че позволява не само точно изчисление на числото на Авогадро, но и става основа за моделиране в безброй други области — от финанси до биология.

Примери (За да разпознаваме по-лесно примерите, те ще бъдат маркирани с \oplus):

\oplus Дърпане на въже



Представете си игра на дърпане на въже, където два отбора са с равен брой хора, а всеки дърпа с еднаква средна сила. На хартия, силите се уравновесяват и възелът в средата би трябвало да стои неподвижен. Но в реалността, моментната сила на всеки играч леко се колебае — някой дърпва малко по-силно, друг за момент отпуска. Сумата от тези микрофлуктуации в един момент се наслагва в една посока, в следващия — в друга. Така възелът започва да извършва малко, непредсказуемо „танцуване“ около теоретичната точка на равновесие. Това е брауновото движение на въжето.

\oplus Застрахователна система „Бонус-Малус“

Системата „Бонус-Малус“ (или система за отстъпка при липса на щети) е широко разпространен застрахователен модел, при който годишната премия на водача се коригира въз основа на историята му със застрахователни събития (нарушения или щети). Целта е двойка: да се намали моралният риск чрез финансов стимул за безопасно шофиране и да се прехвърли по-голяма част от риска към по-рисковите водачи.

Пример: Нека базовата годишна премия за определен клас водачи е 2000 евро.

Водач без застрахователни събития през предходната година получава „бонус“ (отстъпка) и плаща $0.9 \times 2000 = 1800$ евро. (т.нар. „клас 1“).

Водач с 1 застрахователно събитие губи отстъпката и плаща базовата 2000 евро. („клас 2“).

Водач с 2 или повече събития получава „малус“ (надбавка) и плаща $1.5 \times 2000 = 3000$ евро. („клас 3“).

Актьорският проблем (казусът), пред който стои застрахователят, е следният:

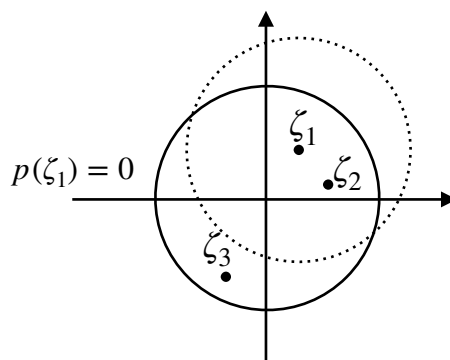
Как да определим оптимално тези коефициенти (0.9, 1.0, 1.5, ...), така че очакваната стойност на събраните премии от цялата популация водачи да покрива очакваната стойност на изплатените обезщетения + оперативните разходи, но същевременно системата да остане чувствителна и справедлива, наказвайки рисковите поведение и възнаграждавайки безопасното?

⊕ Комплексен анализ

През 1959 г. българският математик Блавест Сендов (1932–2020) ⁵ формулира една изтънчена хипотеза, свързана с нулите на полиноми в комплексната равнина.

Хипотеза на Сендов: Нека $p(z)$ е полином, чиито всички нули лежат в единичния кръг (т.е. $|z| \leq 1$). Сендов предположил, че за която и да е нула ζ на този полином, в единичния кръг с център тази нула (т.е. в областта $|z - \zeta| \leq 1$) ще се намира поне една нула на производната $p'(z)$.

Геометрично, това означава, че ако „поставим“ единичен кръг върху всяка нула на полинома, то във всеки такъв кръг непременно ще „попадне“ поне една критична точка (нула на производната) на полинома.



През 2020 г. известният математик Терънс Тао ⁶ доказва хипотезата, но с едно важно ограничение: за всички полиноми с достатъчно висока степен $n \geq n_0$. Стойността n_0 в неговото доказателство е огромна, но крайна. Останалите, неизброимо много полиноми с ниска степен, не са покрити от това доказателство. Пълното доказателство за всички степени n все още остава отворен проблем.

Доказателството на Тао е забележително, защото внася мощни вероятностни и комбинаторни аргументи в област, традиционно считана за чисто аналитична. Той третира нулите като случайни точки, прилагайки техники от геометричната вероятност и случайните матрици, за да установи тяхното типично поведение, което в граничен случай става детерминирано.

Дефиниция (Случаен експеримент). Случаен експеримент наричаме опит или наблюдение, чийто изход не може да бъде предсказан предварително. Всеки възможен елементарен резултат от този експеримент наричаме **елементарно събитие** и го означаваме с малка буква (обикновено малката гръцка буква ω (омега)).

Дефиниция (Пространство на елементарните събития). Множеството от всички елементарни събития за даден случаен експеримент наричаме пространство на елементарните събития (или извадково пространство) и го означаваме с главна буква (обикновено с главната гръцка буква Ω (омега)).

\oplus Експеримент: Хвърляне на честна монета.

Ω (пространството) = $\{E, T\}$ (където T = „ези“, E = „тура“).

◦ ω (елементарни събития): $\omega_1 = E, \omega_2 = T$

\oplus Експеримент: Хвърляне на стандартен шестстранен зар.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

◦ Примерно елементарно събитие: $\omega_6 = 6$.

\oplus Експеримент: Две последователни хвърляния на монета.

$\Omega = \{(E, E), (E, T), (T, E), (T, T)\}$. Това са всички възможни наредени двойки.

◦ $\omega_1 = (E, E)$ (и на двете хвърляния е ези),

◦ $\omega_2 = (E, T)$ (първо ези, после тура),

◦ $\omega_3 = (T, E)$ (първо тура, после ези),

◦ $\omega_4 = (T, T)$ (и на двете хвърляния е тура).

\oplus Експеримент: Измерване на продължителността (в минути) на телефонен разговор.

$\Omega = [0, \infty)$ или $\Omega = \{t \mid t \geq 0\}$. Това е интервал от неотрицателни реални числа (теоретично разговорът може да трае произволно дълго).

◦ $\omega_1 = 2.5$ (разговор, продължил точно 2.5 минути)

◦ $\omega_2 = 7.0$ (разговор, продължил точно 7 минути)

Тук ω е конкретна точка от интервала Ω .

\oplus Наблюдение: Крива от равнината, която минава през $(0, 0)$.

$\Omega = \{f : f(0) = 0\}$

$\omega_k : f(x) = \sin(x)$

\oplus Наблюдение: Тото „6 от 49“. Броят на всички елементарни изходи е равен на $\binom{49}{6}$, тоест $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13,983,816}\}$.

Дефиниция (Събитие). Нека Ω е пространство на елементарните събития за даден случаен експеримент. Всяко подмножество $A \subseteq \Omega$ наричаме събитие. Едно

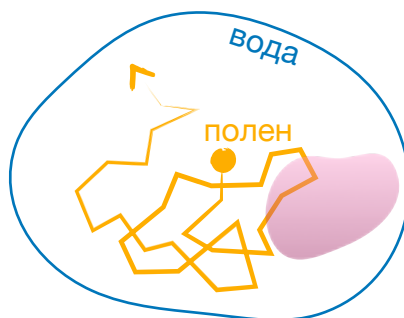
събитие настъпва (или се сбъдва), ако резултатът ω от експеримента е елемент на това подмножество ($\omega \in A$).

\oplus Наблюдение: Клиентите, които са посетили даден магазин. $\Omega = \{\text{клиенти}\}$.
 $A_1 = \{\text{клиентите, които са жени}\}$, $A_2 = \{\text{клиентите, които са християни}\}$.

\oplus Експеримент: Хвърляне на стандартен шестстранен зар. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
 $A = \{1, 3, 5\}$, признакът по групиране е нечетност.

\oplus Наблюдение: Кривата, която частица полен образува след 5 минутно блуждаене, стартрайки от точка x от повърхостта на съд с вода.

$A = \{\text{всички криви, чиито траектории достигат розовия регион}\}$



Операции с множества

◦ Обединение

Съдържа всички елементи, които са в A , в B или в двете.

Формула: $A \cup B = \{x | x \in A \text{ или } x \in B\}$

Забележка: В теорията на вероятностите е прието елементарните събития да се означават с малки букви. Затова в горното изложение използвахме x .

◦ Сечение

Съдържа само елементите, които са едновременно в A и B .

Формула: $A \cap B = \{x | x \in A \text{ и } x \in B\}$

◦ Разлика

Съдържа елементите, които са в A , но не са в B .

Формула: $A \setminus B = \{x | x \in A \text{ и } x \notin B\}$

◦ Симетрична разлика

Съдържа елементите, които са само в едното от множествата.

Формула: $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

◦ Допълнение

Съдържа всички елементи, които не са в A , но са в универсалното множество U .

В нашия случай $U = \Omega$.

Формула: $A^c = \bar{A} = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$

◦ **Декартово произведение**

Множество от всички наредени двойки (a, b) , където $a \in A$ и $b \in B$.

Формула: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B\}$

◦ **Подмножество**

A е подмножество на B , ако всички елементи на A са и в B

Означение: $A \subseteq B$. Формално: $\{x \in A \Rightarrow x \in B\}$

$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ и } B \subseteq A)$

Основни свойства

- Комутативност: $A \cup B = B \cup A$ и $A \cap B = B \cap A$
- Асоциативност: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Дистрибутивност: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Закони на **де Морган** (Огъстен дьо Морган (1806–1871), Великобритания):
 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Други полезни означения

$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за някое (поне едно) } i\}$, където $A_i \in \Omega$, $\forall i \geq 1$

$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за всяко } i\}$, където $A_i \in \Omega$, $\forall i \geq 1$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c.$$

Дефиниция (σ -алгебра). Нека Ω е произволно множество (наричано **пространство** или **универсум**) от **елементарни събития** (множество от всички възможни изходи). Нека \mathcal{A} е система от подмножества на Ω (тоест $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, където $\mathcal{P}(\Omega)$ (или 2^Ω) е степенното множество на Ω). \mathcal{A} се нарича σ -алгебра на Ω , ако са изпълнени следните три условия:

- **Съдържа пространството:** $\Omega \in \mathcal{A}$.
- **Затвореност относно допълнение:** Ако $A \in \mathcal{A}$, то $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$.
- **Затвореност относно изброимо обединение:** Ако $A_1, A_2, A_3, \dots \in \mathcal{A}$, то $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Ако премахнем „безкрайно“ обединения и оставим само „крайно“, то ще останем само с алгебра без σ .

Следствие: Ако \mathcal{A} е σ -алгебра, то:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_i \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$ (тоест имаме и затвореност относно крайно/безкрайно сечение)

Доказателство:

- $\emptyset^c = \Omega$, но $\emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$, тъй като имаме затвореност относно допълнение.
- $A_i \in \mathcal{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1 \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathcal{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \right)^c \in \mathcal{A} \xrightarrow{\text{де Морган}} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}.$$

\oplus Тривиална σ -алгебра: $\Sigma = \{\emptyset, X\}$. Проверка: $\emptyset \in \Sigma, X \in \Sigma$. Затворена спрямо допълнение: $\emptyset^c = X \in \Sigma, X^c = \emptyset \in \Sigma$. Затворена спрямо изборимо обединение.

\oplus Дискретна σ -алгебра: За $X = \{a, b\}$: $\Sigma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Това са всички подмножества на X (степенното множество $\mathcal{P}(X)$ или 2^X).

Дефиниция (Система от отворени множества (топология)).

Нека X е произволно множество. Система от отворени множества (или топология) върху X е съвкупност $\tau \subseteq 2^X$, която удовлетворява аксиомите на топологията:

- Празното множество и цялото пространство са отворени: $\emptyset \in \tau$ и $X \in \tau$
- Обединението на произволно семейство от отворени множества е отворено: Ако $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau$, то $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ (тук I може да бъде произволен индексен набор, не непременно изборимо)
- Сечението на крайно много отворени множества е отворено: Ако $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$, то $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ (Важно: само крайни сечения, не и безкрайни!)

Дефиниция (Борелова σ -алгебра). Нека (X, τ) е топологично пространство, където:

- X е произволно множество
- $\tau \subseteq 2^X$ е топология (система от отворени множества)

Бореловата σ -алгебра $\mathcal{B}(X)$ е най-малката σ -алгебра на X , съдържаща всички отворени множества на τ . Символично: $\mathcal{B}(X) := \sigma(\tau)$, където $\sigma(\tau)$ означава σ -алгебрата, породена от τ .

Алтернативна дефиниция (Борелова σ -алгебра). $\mathcal{B}(X)$ е пресечението на всички σ -алгебри на X , които съдържат τ : $\mathcal{B}(X) = \bigcap \{\Sigma \subseteq 2^X \mid \Sigma \text{ е } \sigma\text{-алгебра и } \tau \subseteq \Sigma\}$.

Това е най-малката по отношение на включване σ -алгебра, съдържаща отворените множества.

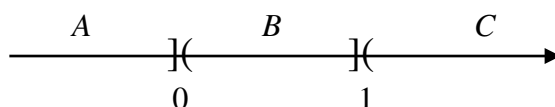
Бореловата алгебра за реалните числа $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ е най-малката σ -алгебра на \mathbb{R} , съдържаща всички отворени множества в стандартната топология на \mathbb{R} . $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ може да се генерира от различни семейства. Най-често използваните са:
 $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\})$.

⊕ Очевидно по така дефинираната алгебра в $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ се съдържат (a, b) , (a, ∞) , $(-\infty, a)$, за всички реални $a < b$, но съдържа ли се самото число $\{a\}$? Отговорът е „ДА“, тъй като може точката $\{a\}$ да се представи по следния начин:

$$\{a\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \left(a - \frac{1}{i}, a + \frac{1}{i}\right) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \text{ Също така } [a, b] = \{a\} \cup (a, b) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \text{ и т.н.}$$

Естествено, ако ни интересува само трихотомията,



то може да се ограничим само до σ -алгебрата $\mathcal{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B, B \cup C, C \cup A\}$, която има кардиналност $|\mathcal{A}| = 8$.

Дефиниция (Атом). Нека (Ω, \mathcal{F}) е измеримо пространство, където \mathcal{F} е σ -алгебра на Ω . Атом на \mathcal{F} е множеството $A \in \mathcal{F}$, $A \neq \emptyset$, което няма собствено нетривиално измеримо подмножество в \mathcal{F} .

Формално: $A \in \mathcal{F}$ е атом, ако:

$$1. A \neq \emptyset$$

$$2. \text{ За всяко } B \in \mathcal{F} \text{ с } B \subseteq A \text{ имаме: или } B = \emptyset \text{ или } B = A$$

Тоест: няма собствено нетривиално измеримо подмножество.

⊕ За $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ атомите са $\{x\}$, т.е. всяка една точка от реалната права.

Примерни задачи за размисъл

⊕ Нека събитието $A = \{\text{паднали са се две еднакви (ненаредени) шесторки в } T \text{ тиража на тото „6 от 49“}\}$. Формално: $A = \bigcup_{i=1}^T A_i$, където

$A_i = \{\omega \in \Omega : \omega^{(i)} = \omega^{(i+1)}\}$. Да се пресметне каква е вероятността да настъпи събитието A за $T = 10,000$.

⊕ Парадоксът с двата плика (Two Envelope Problem). Имаме два пощенски плика A и B . Във всеки плик има определена сума пари. Известно е, че сумите са различни; нека по-малката сума е a , а по-голямата е b , така че $a < b$. Вие не знаете нито a нито b , нито кой плик съдържа коя сума. Човекът, поставил парите в пликовете, знае всичко това, но вие сте в пълна несигурност.

Ход на играта:

1. Избирате случаен плик (с вероятност $1/2$ за всеки).

2. Отваряте избрания плик и виждате сумата в него. Означаваме я с x . (Така, че x е или a , или b , но вие не знаете кое от двете).
3. След като видяхте x , ви се предлага опция: да смените с другия плик.
 - Ако смените, вземате парите от другия плик
 - Ако не смените, вземате x
4. Целта ви е да вземете по-голямата сума b .

Въпрос: Съществува ли стратегия за смяна/не-смяна (въз основа на видяното x), такава че вероятността в крайна сметка да вземете по-голямата сума b да е **строго** по-голяма от $1/2$?

Интуицията подсказва, че смяната не променя шанса (остава 50%), но математически се оказва, че **има стратегия**, която дава шанс над 50%.

Терминологичен речник

[1] Число на Авогадро. Това фундаментално число, кръстено на италианския учен Амедео Авогадро (1776–1856), свързва макросвета с микросвета: то определя броя на елементарните частици в един мол вещество.

[2] Винеров процес. Винеровият процес (наричан още стандартно брауново движение) е фундаментален математически модел, който формализира концепцията за непрекъснато случайно блуждание с независими нараствания. Той е идеализираната и математически прецизна версия на физическото брауново движение. Моделът е кръстен на американския математик и философ Норберт Винер, който дава пълна и строга математическа му дефиниция през 20-те години на XX век.