

Ако не е споменато друго, ще считаме, че  $n$  и  $k$  са естествени числа

**Задача 1.** Припомнете принципа за включването и изключването.

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right|$$

**Задача 2.** Нека  $M$  е множество с  $n$  елемента (ще пишем  $|M| = n$ ) и  $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ . Припомнете по колко начина може да изберем

- (a)  $k$  различни елемента от  $M$ , т.е.  $\{a_1, \dots, a_k\}$ ;
- (b)  $k$ -орка от различни елементи на  $M$ , т.е.  $(a_1, \dots, a_k)$ ,  $a_i \neq a_j$  при  $i \neq j$ ;
- (c)  $k$ -орка от елементи на  $M$ , т.е.  $(a_1, \dots, a_k)$ .

Решение:

- (a)  $(C_n^k)$ ; (b)  $(V_n^k)$ ; (c)  $V(n; k) = n^k$ .

**Задача 3.** Колко решения има уравнението  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ , ако

- (a)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са естествени числа;
- (b)  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са неотрицателни цели числа?

По колко начина може да изберем  $k$  елемента от множество с  $n$  елемента, ако допускаме и повторения, т.е.  $k$ -елементно мултиподмножество?

Решение: Виж Задача 4.

**Задача 4.** По колко начина може да разпределим  $k$  различни частици в  $n$  различни клетки, ако

- (a) всяка клетка може да съдържа точно една частица;
- (b) клетките могат да съдържат произволен брой частици;
- (c) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Решение:

- (a) Тъй като всяка клетка може да съдържа точно една частица, то за първата частица ще може да изберем от  $n$  клетки, за втората - от  $n - 1$  клетки и т.н. докато за  $k$ -тата частица ще нице да изберем от останалите  $n - k + 1$  клетки. Следователно отговора е

$$n \cdot (n - 1) \dots (n - k + 1) = \prod_{i=0}^{k-1} = V_n^k = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

- (b)  $\underbrace{n \cdot n \dots n}_k = V(n; k) = n^k$ .

- (c) Очевидно, ако  $k < n$  това не е възможно и следователно отговора ще е 0. Нека  $k > n$ . Нека  $A_i$ ,  $i = \overline{1, n}$  е множеството от всички разпределения, при които  $i$ -тата клетка е празна. Означаваме с  $A$  множеството от всички разпределения, при които поне една клетка е празна. Следователно  $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$  и от принципа на включването и изключването имаме, че:

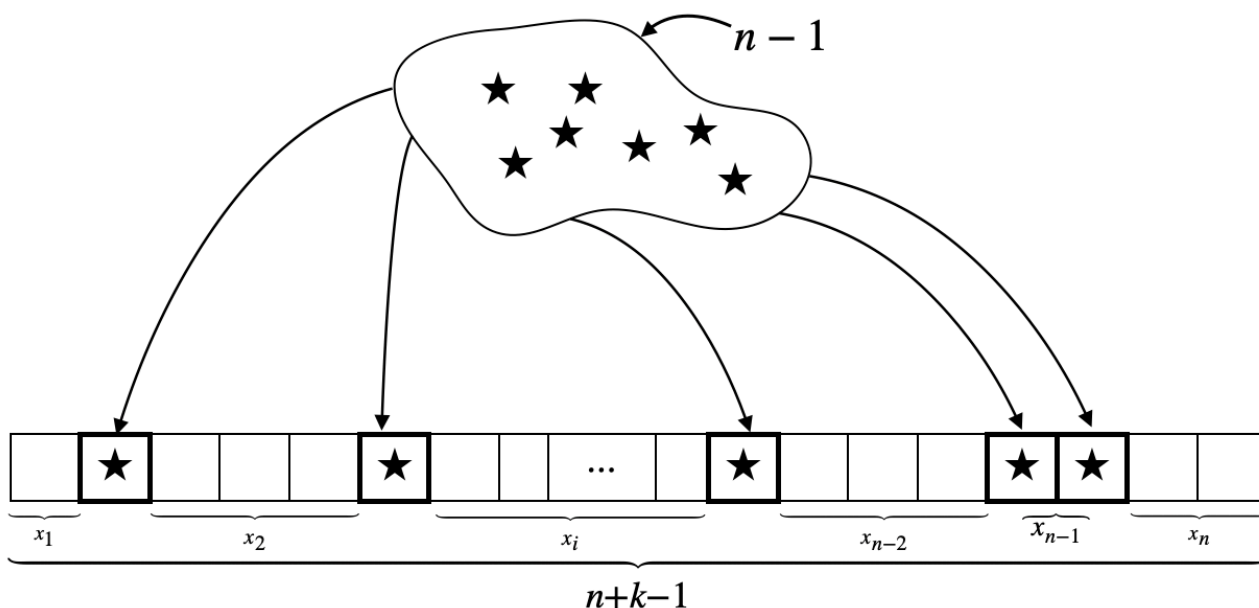
$$\begin{aligned}
 |A| &= \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \dots + (-1)^{n-1} \left| \bigcap_{i=1}^n A_i \right| = \\
 &= \binom{n}{1} (n-1)^k - \binom{n}{2} (n-2)^k + \binom{n}{3} (n-3)^k \dots + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} (n-n)^k = \\
 &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)^k.
 \end{aligned}$$

Следователно за да намерим търсения брой, ще извадим от броя всички възможни разпределения без ограничения - броя на тези, за които има поне една празна клетка:

$$|V(n; k) \setminus A| = |V(n; k)| - |A| = n^k - \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} (n-i)^k = \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} (n-i)^k$$

Нека сега частиците са неразличими:

- (a) Без наредба (неразличими) и без повторения. От тук директно може да заявим, че това са комбинации, тъй като ибираме  $k$ -елементни подмножества от  $n$ -елементно множество. Следователно отговора е  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .
- (b) Нека  $x_1, x_2, \dots, x_n$  са  $n$ -те клетки и имаме  $k$ -частици. Ако намерим едно решение на диофантовото уравнение  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ , в цели неотрицателни числа, то същото това решение ще е и решение на изходната задача. Т.е. имаме инекция, а освен това имаме и сюрекция и следователно биекция. Нека имаме масив от  $n + k - 1$  клетки и  $n - 1$  звездички (звездичките са еднакви).



След като поставим всички  $n - 1$  звездички (без повторения) в масива, заедно с началото и края на масива ще образуват точно  $n$  прегради/интервала, като между началото и първата звездичка - броя на свободните клетки ще е равен на  $x_1$ , броя на празните клетки между първата и втората звездичка ще е равен на  $x_2$  и т.н. докато не стигнем между последната звездичка и края на масива, които образуват интервал от празни клетки с дължина равна на  $x_n$ .

По този начин избирайки позициите и разпределяйки  $n - 1$  звездички - изброяваме всички възможни разпределения на  $k$ . Т.е. между избирането на  $n - 1$  звездички от

$n + k - 1$  клетки без повторения и без наредба и броя на репения на задачата има биекция. Следователно търсеният брой е  $C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ .

- (с) Аналогично на (b), но с тази разлика, че тук  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$  и  $x_i \geq 1$  за  $i = \overline{1, n}$ . Ами нека положим  $x_i - 1 = y_i$ , тогава  $y_1 + y_2 + \dots + y_n = k - n$  и  $y_i \geq 0$ , за  $i = \overline{1, n}$ , което е същото като (b)  $\Rightarrow$  търсения отговор е:  $\binom{k-n+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1} = C_{k-1}^{n-1}$ .

**Задача 5.** Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, ако

- (a) не се допуска повторение на цифри;  
 (b) допуска се повторение на цифри;  
 (с) не се допускат повторения и числото е нечетно?

*Решение:*

(a) Без повторения и наредбата има значение:  $5.4.3.2 = |V_5^4| = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$ .

(b)  $5.5.5.5 = V(5; 4) = 5^4$ .

(с) За да бъде нечетно числото трябва на последната позиция да изберем една от 3 нечетни цифри след което остават 4 числа за 3 позиции:  $3 \times V_4^3 = 3.4.3.2 = 72$ .

**Задача 6.** По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако

- (a) няма ограничение за участие в нея;  
 (b)  $A$  и  $B$  не трябва да участват заедно;  
 (с)  $C$  и  $D$  могат да участват заедно.

*Решение:*

(a) Избираме 4 елементно подмножество от 12 елементно множество, без наредба и без повторения. Това са комбинации!  $C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9.10.11.12}{2.3.4} = 495$ .

(b) От броя на всички възможности 4 елементни подмножества от 12 елементно множество изваждаме броя на тези подмножества, при които  $A$  и  $B$  са избрани заедно. Това са  $\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 495 - 45 = 450$ .

Или може да подходим и по следния начин: от 10 (без  $A$  и без  $B$ ) избираме четирима, от 10 (избрали сме  $A$  и нямаме право да избираме  $B$ ) избираме трима и от 10 (избрали сме  $B$  и нямаме право да избираме  $A$ ) избираме трима. Общо  $\binom{10}{4} + 2 \binom{10}{3}$ , което трябва да е същото като горното.

(с) От 10 елементно множество (без  $C$  и  $D$ ) избираме 4 елементно подмножество и от 10 елементно множество избираме 2 елементно подмножество (вече сме избрали  $C$  и  $D$ ).  $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} = 255$ .

Или може да подходим и по следния начин: от всички 4 елементни подмножества от 12 елементно множество изваждаме броя на тези в който  $C$  и  $D$  не са заедно:

$$\binom{12}{4} - 2 \binom{10}{3}.$$

**Задача 7.** Пет различни топки се разпределят в три различни кутии  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Да се намери броя на всички различни разпределения, за които:

- (d) кутията  $A$  е празна;
- (e) само кутията  $A$  е празна;
- (f) точно една кутия е празна;
- (g) поне една кутия е празна;
- (h) няма празна кутия.

*Решение:*

- (a) Всяка топка може да отиде или в кутия  $B$  или в кутия  $C$ . Тоест имаме общо  $2^5 = 32$  разпределения за топките, при положение че кутията  $A$  е празна.
- (b) От резултата в (a) трябва да извадим броя на разпределенията, при които кутията  $B$  е празна и тези, при които кутията  $C$  е празна. Ние вече знаем, че кутията  $A$  е празна, следователно ако още една от кутиите  $B$  или  $C$  е празна, топките ще имат само една възможност. Тоест търсения отговор тук е  $2^5 - 1 - 1 = 30$ .
- (c)  $3 \times (b) = 3 \times (2^5 - 2) = 90$
- (d) Това е броя на разпределенията, при които точно една кутия е празна събран с броя тези при които две кутии са празни:  $(c) + |\text{две кутии са празни}| = 90 + \binom{3}{2} = 93$ .
- (e) От броя на всички възможни разпределения без ограничения изваждаме броя на тези разпределения, при които поне една кутия е празна:  

$$3^5 - (d) = 3^5 - \left( 3 \times (2^5 - 2) + \binom{3}{2} \right) = 243 - 93 = 150.$$

**Задача 8.** Колко е броят на думите с дължина  $n$  и съдържащи символите  $a$ ,  $b$  и  $c$ , такива, че

- (a) започват с  $a$ ;
- (b) съдържа точно  $k$  пъти символа  $a$ ;
- (c) съдържа точно  $k$  пъти символа  $a$ , при което започва и завършва със символа  $a$ ;
- (d) съдържа съответно  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  пъти,  $k_1 + k_2 + k_3 = n$ , от символите  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

*Решение:*

- (a) Остават  $n - 1$  позиции, на които може да разпределим три букви, тъй като на първата позиция вече сме поставили  $a$ . За втората ще имаме три възможности, за третата отново три и т.н. до последната. Следователно отговора е  $3^{n-1}$ .
- (b) Остават  $n - k$  позиции, на които може да разпределим две букви (тъй като буквата  $a$  вече е разпределена точно  $k$  пъти и е изчерпана). Следователно отговора е  $\binom{n}{k} 2^{n-k}$ , тъй като  $\binom{n}{k}$  са начините, по които може да изберем  $k$ -те позиции за  $a$  от  $n$ .
- (c) Остават  $n - 2$  позиции, от които може да изберем за да поставим останалите  $k - 2$  букви  $a$ . След което за останалите  $n - k$  позиции може да разпределим само две букви (без  $a$ ). Следователно отговора е  $\binom{n-2}{k-2} 2^{n-k}$ .

(d) Имаме  $\binom{n}{k_1}$  начина, по които може да изберем буквата  $a$ ,  $\binom{n-k_1}{k_2}$  начина, по които може да изберем буквата  $b$  и  $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$  начина, по които може да изберем буквата  $c$ . Следователно търсеният отговор е  $\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} \cdot \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} \cdot \frac{(n-k_1-k_2)!}{k_3!(n-k_1-k_2-k_3)!} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0!=1}$

**Задача 9.** Нека  $A = \{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k\}$ . Колко са подмножествата на  $A$ , които съдържат поне един елемент  $a_i$  и поне един елемент  $b_j$ ?

*Решение:*

Знаем, че  $|P(A)| = 2^{n+k}$  е броя на всички подмножества на  $A$ .

Нека въведем следните означения:

$AB$ : всички подмножества на  $A$ , които съдържат елемент  $a$  и елемент  $b$

$\overline{A}B$ : всички подмножества на  $A$ , които не съдържат елемент  $a$

$A\overline{B}$ : всички подмножества на  $A$ , които не съдържат елемент  $b$

$\overline{A}\overline{B}$ : всички подмножества на  $A$ , които не съдържат нито един елемент  $a$  и нито един елемент  $b$

Очевидно  $|AB|$  е търсения брой, а  $\overline{A}\overline{B} = \emptyset$ , което е подмножество на  $A$ .

Имаме, че  $A = AB \cup \overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\overline{B}$ , и множествата от дясната страна са две по две непресичащи се. Следователно  $AB, \overline{A}B, A\overline{B}$  и  $\overline{A}\overline{B}$  са разбиване на  $A$ .

Тогава търсеното множество  $AB = P(A) \setminus (\overline{A}B \cup A\overline{B})$  и от принципа на изваждането имаме, че:

$$|AB| = |P(A)| - |\overline{A}B \cup A\overline{B}| = 2^{n+k} - |\overline{A}B| - |A\overline{B}| + |\overline{A}B \cap A\overline{B}| = 2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$$