Упражнение 8 по СЕМ - Теория, Задачи, Решения

26.11.2020

1 Пораждащи функции

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}$ е множеството на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$.

Дефиниция 1.1. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е случайна величина, приемаща цели неотрицателни стойности и нека $p_k = P(X = k),\ k = 0, 1, \dots$ Функцията*

$$h_X(s) = \mathbf{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| \leq 1,$$

се нарича пораждаща функция на X.

Редът дефиниращ $h_X(s)$ е абсолютно и равномерно сходящ в единичния кръг $|s| < 1,\ s \in \mathbb{C}$, понеже

$$|\sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k |s^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

При предположенията и означенията на горната дефиниция, пресмятаме

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = h'_X(1), \quad \mathbf{D}X = h''_X(1) + h'_X(1) - (h'_X(1))^2.$$

Теорема 1.2. *Ако $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$ са независими случайни величини с пораждащи функции $h_1, h_2, \dots, h_n$, то за пораждащата функция h на $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ е в сила $h = \prod_{k=1}^{n} h_k$.*

Доказателство: Понеже $X_1, X_2, \dots, X_n$, то независими са и $s^{X_1}, s^{X_2}, \dots, s^{X_n}$, откъдето

$$h(s) = \mathbf{E}s^X = \mathbf{E}s^{X_1} s^{X_2} \cdots s^{X_n} = \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}s^{X_k} = \prod_{k=1}^{n} h_k(s).$$

□

Теорема 1.3. *Съществува биективно съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции.*

Доказателство: Две неотрицателните целочислени разпределения $p_k,\ q_k,\ k = 0, 1, \dots$ имащи една и съща пораждаща функция съвпадат, понеже $p_k = \frac{h_X^{(k)}(0)}{k!}$. Обратно, ако разпределенията съвпадат, то пораждащите им функции съвпадат. □

1.1 Задачи

Задача 1 Да се определи пораждащата функция на случайна величина X, ако
а) $X \in Ge(p)$;
б) $X \in \mathrm{Po}(\lambda)$;
в) $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$.

Задача 2 Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение, като $X_k \in Po(\lambda_k)$. Да се докаже, че $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \in Po(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$.

Задача 3 Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими случайни величини с Биномно разпределение, като $X_k \in Bi(m_k, p)$. Да се докаже, че $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \in Bi(\sum_{k=1}^{n} m_k, p)$.

Задача 4 80% от принтерите за домашна употреба работят добре при инсталирането им, а останалите имат нужда от допълнителни настройки. Фирма продава 10 принтера за една седмица. Намерете вероятността поне 9 от тях да работят без нужда от допълнителни настройки. Каква е съответната вероятност това да се случи за пет поредни месеца? Каква е вероятността, първата седмица за която това не се случва да е точно 21-та?

Задача 5 Двама умници стрелят по мишена. Първият улучва с вероятност 0.2, а вторият с вероятност 0.3. Умниците стрелят едновременно, ако никой не улучи - стрелят пак. Да се пресметне вероятността първия да улучи, а втория не. Какъв е средния брой изстрели необходими за уцелване на мишената?

Задача 6 A и B играят последователно партии, A печели една партия с вероятност 2/3, а B с вероятност 1/3. Равни партии не са възможни. Играта продължава докато някой спечели две последователни партии. Нека X е случайната величина "брой на изиграните парти". Да се определи разпределението и математическото очакване на X.

Задача 7 В урна има 5 бели, 7 зелени и 3 червени топки. На всеки опит вадим от урната едновременно две топки, записваме цвета им, след което връщаме топките обратно в урната. Дефинираме събитие $A = \{$Изтеглени са една бяла и една зелена топка$\}$.

а) Да се определи вероятността на A при извършване на един опит. Каква е вероятността на A, ако топките се вадят последователно, без връщане?

б) Нека X е броят на сбъдванията на събитието A при провеждане на 5 опита. Да се пресметнат $\mathbf{P}(X = 3)$, математическото очакване $\mathbf{E}X$ и дисперсията $\mathbf{D}X$.

в) Нека белите топки са 5, зелените 7, но броят на червените е Z. Каква трябва да бъде стойността на Z, така че средният брой на неуспешните опити до първото сбъдване на събитието да бъде точно пет? Отговорът да се обоснове.

1.2 Решения

Задача 1
а) Нека $X \in Ge(p)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = (1-p)^{k-1}p$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}px^k = px\sum_{k=1}^{\infty}[(1-p)x]^{k-1} = \frac{px}{1-(1-p)x},\ |x| < 1.$$

б) Нека $X \in Po(\lambda)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}x^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{x\lambda} = e^{\lambda(x-1)},\ |x| < 1.$$

в) Нека $X \in Bi(n,p)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(px)^k(1-p)^{n-k} = (px+1-p)^n,\ |x| < 1.$$

Задача 2 Нека h_{X_k} е пораждащата фунцкия на X_k. От задача 1 б) следва $h_{X_k}(x) = e^{\lambda_k(x-1)}$ и от теорема 1.2 следва, че за пораждащата функция h на $\sum_{k=1}^n X_k$ е изпълнено

$$h(x) = \prod_{k=1}^{n} h_{X_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(x-1)} = e^{(x-1)\sum_{k=1}^n \lambda_k}.$$

Отново по задача 1 б) следва, че h е пораждаща функция на $Po(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$ и предвид теорема 1.3 получаваме $\sum_{k=1}^n X_k \in Po(\sum_{k=1}^n \lambda_k)$.

Задача 3 Нека h_{X_k} е пораждащата фунцкия на X_k. От задача 1 в) следва $h_{X_k}(x) = (px+1-p)^{m_k}$ и от теорема 1.2 следва, че за пораждащата функция h на $\sum_{k=1}^n X_k$ е изпълнено

$$h(x) = \prod_{k=1}^{n} h_{X_k} = \prod_{k=1}^{n}(px+1-p)^{m_k} = (px+1-p)^{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

От задача 1 в) следва, че h е пораждаща функция на $Bi(\sum_{k=1}^n m_k, p)$ и предвид теорема 1.3 получаваме $\sum_{k=1}^n X_k \in Bi(\sum_{k=1}^n m_k, p)$.

Задача 4 Нека $X \in \mathrm{Bi}(10, \frac{4}{5})$ и $A_i,\ i = 1,\ldots,20$ са събитията - поне 9 от 10-те продадени принтера за $i-$тата седмица работят. Тогава $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(X \geq 9) = \mathbf{P}(\{X=9\}\cup\{X=10\}) = \mathbf{P}(X=9) + \mathbf{P}(X=10) = \binom{10}{9}\left(\frac{4}{5}\right)^9 \times \frac{1}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0.3758$
Ще приемем, че разглежданите 5 месеца се състоят от точно 20 седмици. Тогава търсената вероятност е $\mathbf{P}(\cap_{i=1}^{20} A_i) = \prod_{i=1}^{20}\mathbf{P}(A_i) = \mathbf{P}(A_1)^{20} \approx 0.3758^{20}$.

Задача 5 Нека $A_k,\ k=1,2,\dots$ са съответно събитията - първия успява (за първи път) на $k-$ти ход, а втория не успява във всичките k хода. Считаме че всички ходове преди k-тия са неуспешни. Нека $X \in \mathrm{Ge}(0.2),\ Y_k = \{\text{брой неуспехи на втория за } k \text{ хода}\}$. Тогава $A_k = \{X = k-1,\ Y = k\} = \{X = k-1\} \cap \{Y_k = k\}$. Вероятността първия да успее, а втория не е

$$\mathbf{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{X = k-1\} \cap \{Y_k = k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}(\{X = k-1\})\mathbf{P}(\{Y_k = k\})$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (0.8)^{k-1} \times 0.2 \times (0.7)^k = \sum_{k=1}^{\infty} (0.56)^{k-1} \times 0.14 = \frac{7}{22} \approx 0.318$$

Вероятността за неуспех при един опит (това са 2 хода - един за първия и един за втория) на двамата играчи е $0.8 \times 0.7 = 0.56$ Нека $Z \in \mathrm{Ge}(0.44)$ с теглова функция $k \longmapsto (1-p)^{k-1}p$, тогава очаквания брой ходове е $\mathrm{E}2Z = 2\mathrm{E}Z = 2 \times \frac{1}{p} = 2 \times \frac{1}{0.44} = \frac{50}{11} \approx 4.54$

Задача 6 Нека $A_i,\ A(i),\ i = 1,2,\dots$ са събитията - $i-$тата партия е спечелена от първия играч (съответно $\overline{A_i}$ за победа на втория играч); играта е приключила след точно i партии. По условие $\mathbf{P}(A_i) = \frac{2}{3},\ \mathbf{P}(\overline{A_i}) = \frac{1}{3}$. Събитията $A_1,\ A_2,\dots,A_n,\dots$ са независими и

$$A(2k+1) = (A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\dots A_{2k-1}\overline{A_{2k}})\overline{A_{2k+1}} \cup \overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\dots\overline{A_{2k-1}}A_{2k}A_{2k+1},\ k \geq 1$$

$$A(2k+2) = A_1\overline{A_2}A_3\overline{A_4}\dots A_{2k-1}\overline{A_{2k}}A_{2k+1}A_{2k+2} \cup (\overline{A_1}A_2\overline{A_3}A_4\dots A_{2k}\overline{A_{2k+1}})\overline{A_{2k+2}},\ k \geq 0.$$

Следователно $\mathbf{P}(A(2k+1)) = (\frac{2}{9})^k,\ \mathbf{P}(A(2k+2)) = \frac{5}{9}(\frac{2}{9})^k$ и тегловата функция $k \longmapsto p_k$ на X има вида $p_1 = 0,\ p_{2k+1} = (\frac{2}{9})^k\ k \geq 1,\quad p_{2k+2} = \frac{5}{9}(\frac{2}{9})^k\quad k \geq 0$. Пресмятаме $\mathrm{E}X = \sum_{i\geq 0} ip_i = \sum_{k\geq 1}(2k+1)(\frac{2}{9})^k + \frac{5}{9}\sum_{k\geq 0}(2k+2)(\frac{2}{9})^k = \frac{10}{9} + \frac{19}{9}\sum_{k\geq 1}(\frac{2}{9})^k + \frac{28}{9}\sum_{k\geq 1}k(\frac{2}{9})^k = \frac{20}{7} \approx 2.857$

Задача 7 Ако изтеглянето на 2-те топки е последователно, то $A = A_1 \cup A_2$, където $A_1 = \{(w,g)\}$ и $A_2 = \{(g,w)\}$, тоест:

$$A_1 = \{\text{първо е извадена бяла, след това зелена топка}\},$$

$$A_2 = \{\text{първо е извадена зелена, след това бяла топка}\}.$$

Ако изтеглянето на 2-те топки е едновременно, то $A = \{g,w\}$.

а) При последователно теглене без връщане, получаваме

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = \frac{5}{15} \times \frac{7}{14} + \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{3}.$$

При едновременно теглене намираме $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}\binom{3}{0}}{\binom{15}{2}} = \frac{1}{3}$.

б) По условие $X \in \mathrm{Bi}\left(5, \frac{1}{3}\right)$. Следователно $\mathbf{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2$ и намираме $\mathbf{E}X = \frac{5}{3},\ \mathbf{D}X = \frac{10}{9}$.

в) Нека Y е случайната величина: брой неуспешни опити до първи успех (тоест до първото настъпване на събитието A). Следователно $Y \in \mathrm{Ge}(p)$ с теглова функция $k \longmapsto (1-p)^k p$, където

$$p = \mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = \frac{5}{12+Z} \times \frac{7}{11+Z} + \frac{7}{12+Z} \times \frac{5}{11+Z} = \frac{70}{(11+Z)(12+Z)},$$

или еквивалентно (за случая на едновременно теглене на 2-те топки)

$$p = \mathbf{P}(A) = \frac{\binom{5}{1}\binom{7}{1}}{\binom{12+Z}{2}} = \frac{70}{(11+Z)(12+Z)}.$$

По условие $\mathbf{E}Y = 5$ и намираме

$$5 = \mathbf{E}Y = \frac{1}{p} - 1 = \frac{(11+z)(12+z)}{70} - 1 \Rightarrow Z = 9.$$