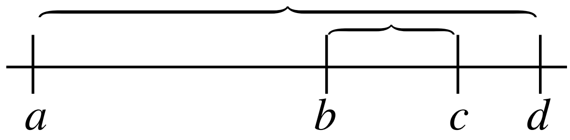
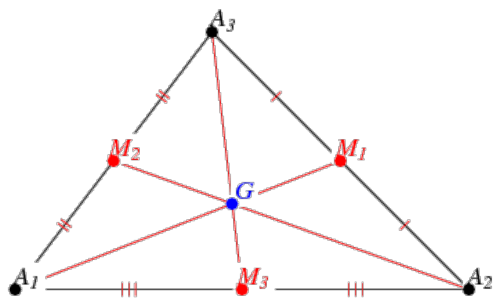
Пример 5.2. Нека $a < b < c < d$ са реални числа. Каква е вероятността случайно избрано реално число в интервала (a, d) да принадлежи на (b, c).



$$\mathbb{P}\big((b,c)\,|\,(a,d)\big) \overset{def.}{=} \frac{\mu(d-a)}{\mu(c-b)} = \frac{d-a}{c-b}.$$

Пример 5.3. Точка попада по случаен начин във вътрешността на $\triangle A_1A_2A_3$. Каква е вероятността точката да се намира във вътрешността на триъгълника с върхове - средите на страните на $\triangle A_1A_2A_3$.



$$\mathbb{P}(S_{\triangle A_1B_1C_1}\,|\,S_{\triangle ABC}) = \frac{\mu(S_{\triangle A_1B_1C_1})}{\mu(S_{\triangle ABC})}.$$

$$M_1M_2 \overset{||}{=} \frac{1}{2}A_1A_2,\ M_2M_3 \overset{||}{=} \frac{1}{2}A_2A_3,\ M_3M_1 \overset{||}{=} \frac{1}{2}A_3A_1$$

$A_2A_3 = a,\ A_3A_1 = b,\ A_1A_2 = c$ и $p = \dfrac{a+b+c}{2}$. Тогава
$M_2M_3 = \dfrac{a}{2},\ M_3M_1 = \dfrac{b}{2},\ M_1M_2 = \dfrac{c}{2}$ и $p_1 = \dfrac{p}{2}$.

От хероновата формула за лице на гтриъгълник следва, че

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 4\sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{b}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{c}{2}\right)} = 4S_{\triangle A_1B_1C_1}$$

$$\mathbb{P}(S_{\triangle M_1M_1M_1}\,|\,S_{\triangle A_1A_2A_3}) = \frac{\mu(\triangle M_1M_1M_1)}{\mu(\triangle A_1A_2A_3)} = \frac{\frac{1}{4}S_{\triangle A_1A_2A_3}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}} = 0.25$$

II н/н: Тъй като медицентъра дели медианите в съотношение $2:1$, то $\triangle M_1M_2M_3$ се изобразява в $\triangle A_1A_2A_3$ с хомотетия с коефициент $k = \dfrac{1}{2}$ и център $G\left(\text{или } \triangle A_1A_2A_3 \text{ се изобразява в } \triangle M_1M_2M_3 \text{ със същия център и коефициент } k = \dfrac{1}{2}\right)$. Следователно

$$S_{\triangle M_1M_2M_3} = \left(\frac{1}{k}\right)^2 S_{\triangle A_1A_2A_3} = \frac{1}{4}S_{\triangle A_1A_2A_3}$$

Пример 5.4. Точка попада по случаен начин във вътрешността на $ABCD$ каква е вероятността точката да се намира във вътрешността на тетраедъра с върхове медицентровете на стените на $ABCD$.

Аналогично на предишния пример, може да подходим с хомотерия , която изпраща малкия тетраедър в големия. Тази хомотетия ще е с център тежестта на малкия тетраедър, но този път коефициента ще е 3, тъй като всеки ръб на малкия тетраедър ще е успореден на съответен ръб от големия тетраедър и от теорема на Талес ще бъде равен на $\frac{1}{3}$ от него. Следователно търсената вероятност ще е

$$\mathbb{P}(V_{A_1B_1C_1D_1} | V_{ABCD}) = \frac{\mu(A_1B_1C_1D_1)}{\mu(ABCD)} = \frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V_{ABCD}} = \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^3 V_{ABCD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{27}.$$

Задача 1. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа?

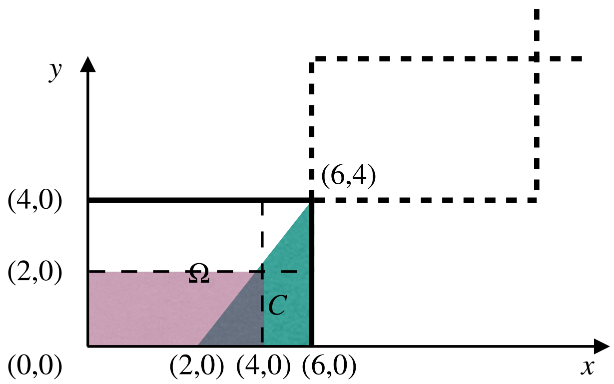
Разбира се тук може да подходим чисто алгебрично към решението, тъй като вече сме разгледали геометричното моделиране на проблема. В крайна сметка алгебричното моделиране също се базира на геометрия.

Нека x е часа на пристигане на първия параход, а y часа на пристигане на втория параход. Тогава за да изпълняват условието на задачата е необходимо да е изпълнена следната система от неравенства $\begin{cases} 0 \le x \le 24 \\ 0 \le y \le 24 \\ x - y \ge 6 \\ y - x \ge 4 \end{cases}$. Първите две неравенства рамкират вселената от всички случай, докато вторите две отрязват от нея благоприятните слузай. Тези отрези се определят от правите $x = y + 6$ и $y = x + 4$. Те имат ъглов коефициент от $\frac{\pi}{4}$ и отсичат от вселената два равнобедрени и правоъгълни триъгълници. Следователно

$$\mathbb{P}(non - overlapping) = \frac{\mu(two\ good \triangle)}{\mu(Universe)} = \frac{\frac{18 \times 18}{2} + \frac{20 \times 20}{2}}{24 \times 24} = \frac{181}{288}.$$

Задача 2. Автобусите от линия A се движат на интервали от 6 минути, а от линия B на 4 минути, независимо от автобусите от линия A. Каква е вероятността

1. автобусът A да дойде преди автобус B
2. пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути?



1. Очевидно сценария на пристигане на автобусите ще се повтаря на веки десет минути, за това може да моделираме вселената от всички елементарни събития с горната координатна система, като от нея разглеждаме само правоъгълника заключено между правите $\begin{cases} 0 \le x < 6 \\ 0 \le y < 4 \end{cases}$.

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x < 6;\ 0 \le y < 4\} = [0,6] \times [0,4]$, т.е. Ω е правоъгълник

На координатната система отбелязваме колко минути са изминали от последното идване на даден автобус. По x за автобусите от линия A. Например ако саи изминали x минути от последното пристигане на автобус от линия A, то следващия автобус от същата линия ще пристигне в $6 - x$ минути. Тогава:

а) $C = \{(x, y) \in \Omega \,|\, 6 - x < 4 - y\} = \{(x, y) \in \Omega \,|\, x - y > 2\}$.

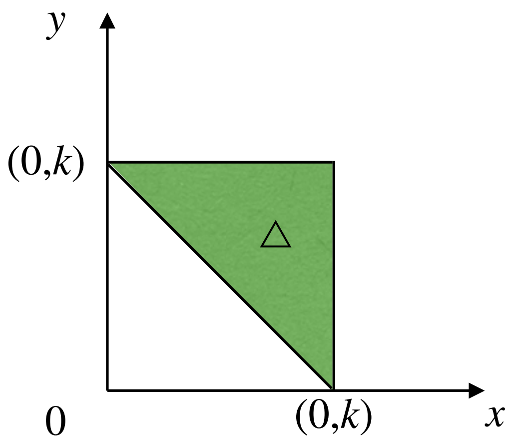
$$\mathbb{P}(C) = \frac{S_C}{S_\Omega} = \frac{\frac{4 \times 4}{2}}{6 \times 4} = \frac{1}{3}.$$

б) $\overline{D} = \{(x, y) \in \Omega \,|\, 6 - x > 2, 4 - y > 2\} = \{(x, y) \in \Omega \,|\, x < 4, y < 2\}$

$$\mathbb{P}(D) = 1 - \mathbb{P}(\overline{D}) = 1 - \frac{S_{\overline{D}}}{S_\Omega} = 1 - \frac{2 \times 4}{6 \times 4} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}.$$

Задача 3. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от k да може да се построи триъгълник?

По условие имаме, че k ще е страната на триъгълника с максимални размери. Следователно, ако другите две страни са x, y тогава ще имаме, че $0 < x, y < k$ и $x < k + y,\ y < k + x$. За да може да построим валиден триъгълник от отсечките x, y, k остана само да е изпълнено $x + y < k$. Тоест търсената вероятност се свежда до това каква е вероятността $x + y < k$.



$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x, y < k\} = (0,k) \times (0,k)$$

$$\triangle = \{(x, y) \in \Omega \,|\, x + y > k\}$$

$$\mathbb{P}(\triangle) == \frac{S_\triangle}{S_\Omega} = \frac{\frac{k^2}{2}}{k^2} = \frac{1}{2}.$$

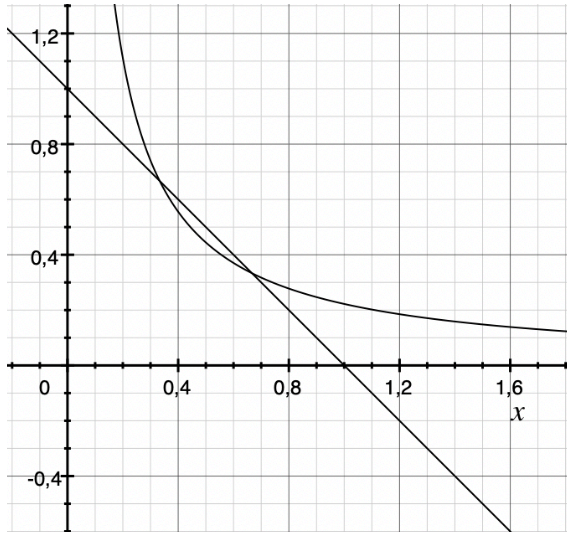
Задача 4. Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от k да може да се построи триъгълник?

Нека $0 < x, y, z < k$ са дължините на 3-те случайно избрани отсечки. Търсената вероятност е

$$\mathbb{P}(\{x + y > z\} \cap \{y + z > x\} \cap \{z + x > y\}) \,|\, \{0 < x, y, z < k\}) = \frac{k^3 - 3 \times \frac{k^3}{6}}{k^3} = \frac{1}{2}$$

II н/н: Нека $A,\ H_k,\ k = 1,2,3$ са съответно събитията: от трите отсечки може да се построи триъгълник; максималната по дължина от трите отсечки е x за $k = 1$, y за $k = 2$, z за $k = 3$. Тогава събитията H_k образуват пълна група, $\mathbb{P}(H_k) = \dfrac{1}{3}$ и съгласно предходната задача $\mathbb{P}(A \,|\, H_k) = \dfrac{1}{2}$. От формулата за пълна вероятност получаваме, че $\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \mathbb{P}(A \,|\, H_k)\mathbb{P}(H_k) = \frac{1}{2}$.

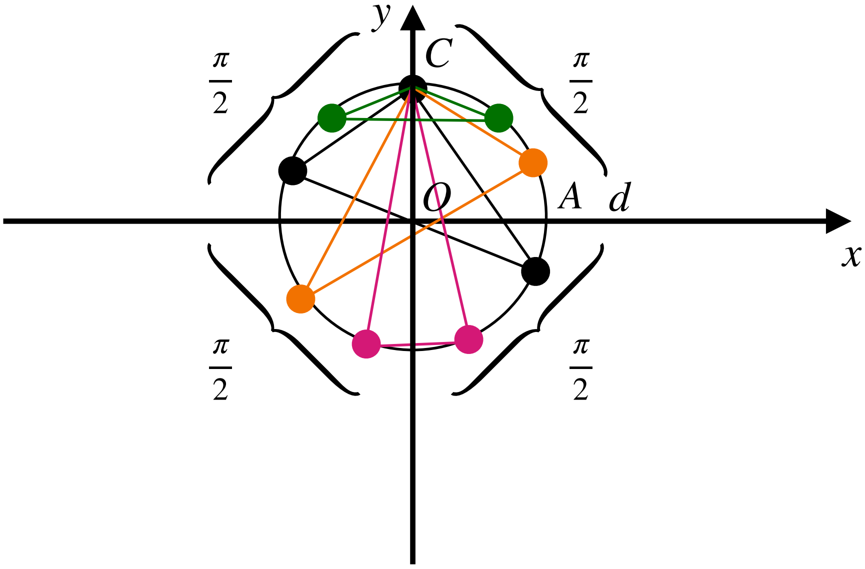
Задача 5. Каква е вероятността сумата на две случайно избрани положителни числа, всяко от които е по-малко от 1, да бъде по малка от 1, а произведението им по-малко от $\dfrac{2}{9}$.



$$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\{x + y < 1\} \cap \{xy \le \frac{9}{2}\} \,|\, \{0 < x, y < 1\}) = \frac{\mu(\{x + y < 1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\} \cap \{0 < x, y < 1\})}{\mu(\{0 < x, y < 1\})} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (1 - x - \frac{2}{9x})dx}{1^2} = \frac{1}{2} - \left(x - \frac{x^2}{2} - \frac{2}{9} \ln x \right) \Bigg|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} \ln 2 \approx 0.487.$$

Задача 6. Върху окръжност по случаен начин са избрани 3 точки. Да се определи вероятността, триъгълникът с върхове в избраните точки да бъде остроъгълен.



Може да фиксираме една от точките на вписания в окръжността $\triangle$. Нека например тази точка е C. Това е така, защото ако точката не се случи да е на това място, то с ротация бихме могли да направим така, че да е точно на фиксираното място.

Нека имаме координатна система $Oxy^{\rightarrow}$, такава, че центъра на окръжността съвпада с центъра на координатната система.

За благоприятните случай, разпределението на другите две точки A и B лежащи на окръжността ще е следното:

- ако $A \in I$ кв. или IV кв., то $B \in II, III$ кв.
- ако $A \in II$ кв. или III кв., то $B \in I, IV$ кв.

А пък всички случай ще са $A, B \in I, II, II, IV$ кв.

Следователно $\mathbb{P}(acute - angled \triangle) = \dfrac{\pi \times \pi}{2\pi \times 2\pi} = \dfrac{1}{4}$.

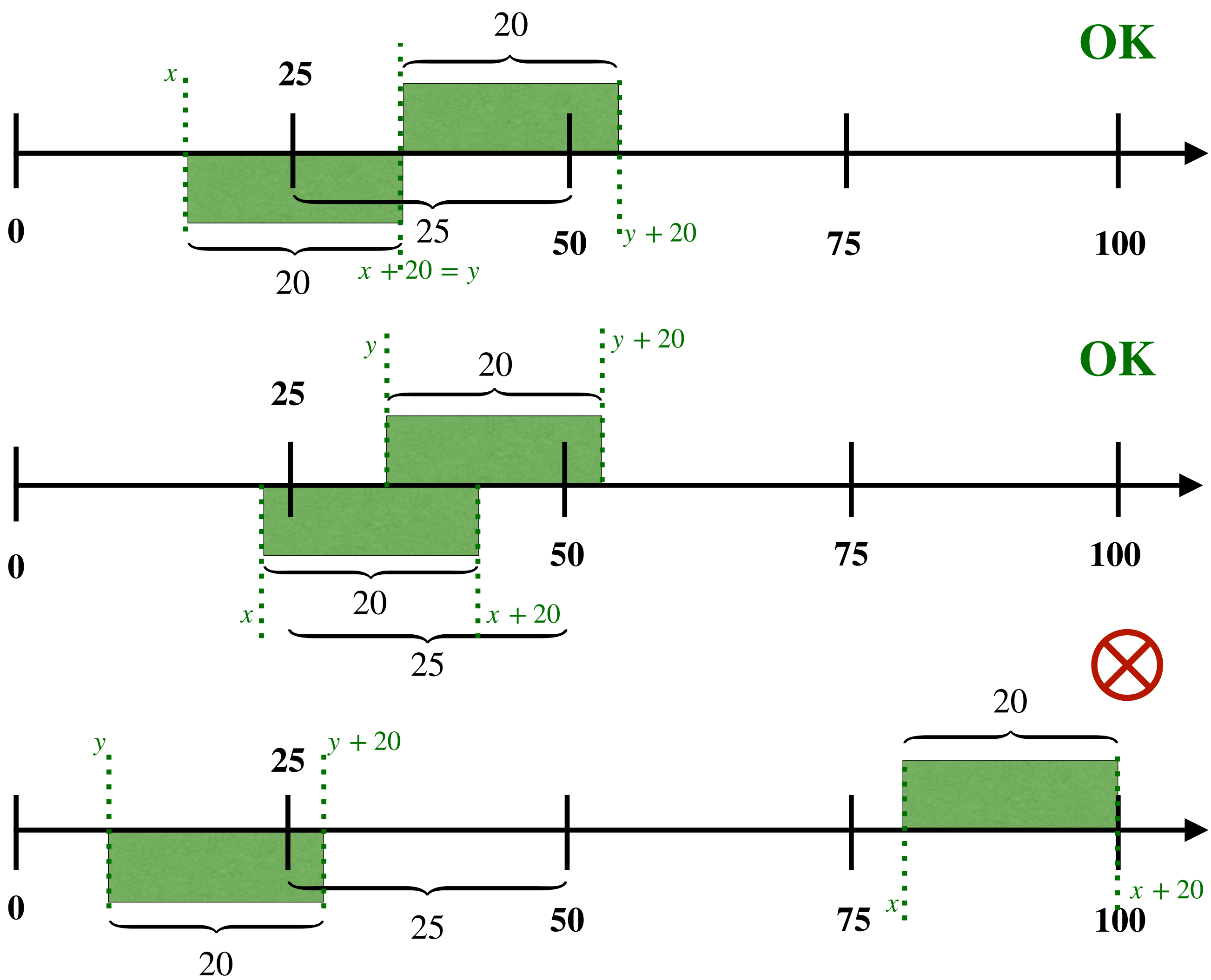
Задача 7. По случаен начин три точки попадат върху три различни страни на квадрат. Каква е вероятността центърът на квадрата да се съдържа във вътрешността на триъгълника с върхове избраните точки?

От принципа на Дирихле, имаме 3 точки и 4 страни, следователно две от точките ще лежат на срещуположни страни на квадрата. Нека тези две точки са X и Y. Фиксираме тази отсечка XY. За нея ще имаме следните възможности:

- третата точка от квадрата Z и центъра на квадрата O са **над** XY
- третата точка от квадрата Z и центъра на квадрата O са **под** XY
- третата точка от квадрата Z е **над**, а центъра на квадрата O е **под** XY
- третата точка от квадрата Z е **под**, а центъра на квадрата O е **над** XY

Благоприятните събития са първите два случая. Освен това за всяка права XY ще имаме същите слузай. Следователно $\mathbb{P}(O \in \triangle XYZ) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

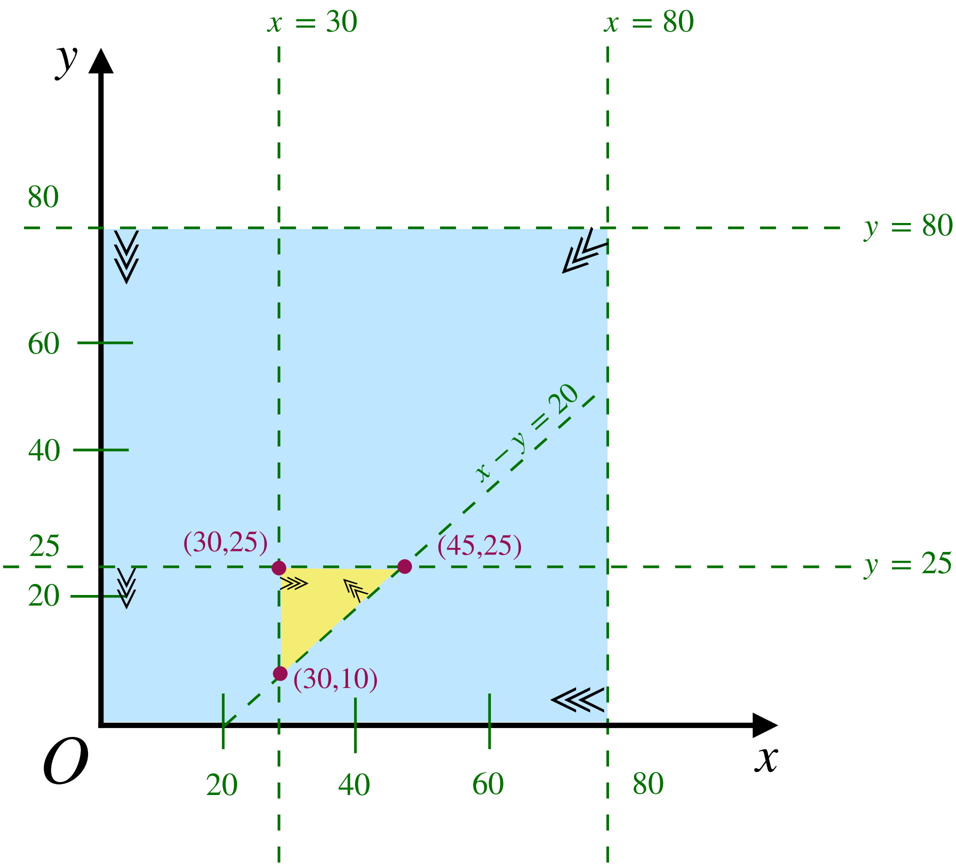
Задача 13. Дадена е магнетофонна лента с дължина 100м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснато съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 20 и 50м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?



Избираме по случаен начин две точки x и y, такива че $x, y \in [0, 80]$. С тях ще отбелязваме началата на двете непрекъснати съобщения: x за горното и y за долното. Интервала на допустимите стойности и за двете променливи е до 80, тъй като и двете се съдържат в магнетофонната лента по условие и също така имат дължина от 20м. Тогава двете записани съобщения ще представляват интервалите $[x, x+20]$ и $[y, y+20]$. Б.о.о. (без ограничение на общността) нека $x \geq y$, т.е. y да бъде първия интервал (първото записано съобщение). Първия интервал трябва да е започнал най-късно в началото на интврвала $[25, 50]$ (за да може да няма непокрита част от него), т.е. ще имаме, че $\mathbf{y \leq 25}$, а втория интервал трябва да започва най-късно веднага след края на първия (не по-късно от края на първия), тъй като първия не е достатъчен за да покрие целия интервал от $[25, 50]$. Следователно ще имаме, че $\mathbf{x \leq y + 20}$. От друга страна, втория интервал, трябва да покрива всичко до края на интервала $[25, 50]$ и следователно ще имаме още, че края му е не по рано от 50, т.е. $\mathbf{x + 20 \geq 50}$.

Получихме **пет** ограничения за променливите x и y, които въведохме:
$\begin{cases} 0 \leq x \leq 80 \\ 0 \leq y \leq 80 \\ y \leq 25 \\ x \leq y + 20 \\ x + 20 \geq 50 \end{cases}$. Нека ги нанесем на координатна система $\overrightarrow{Oxy}$, по такъв начин, че

началото на горния интервал се изобразява по y, а началото на долния - по x (те са независими случайни събития).



Жълтото триъгълниче е сечението на всички неравенства от условието, а вселената от допустимите ни стойности е голямото квадратче в синьо.

$$S_{\triangle} = \frac{(45 - 30) \times (25 - 10)}{2} = \frac{15 \times 15}{2} = \frac{225}{2};$$
$$S_{\square} = 80 \times 80 = 6400.$$

Следователно,

$$\mathbb{P}(\{x - y \leq 20\} \cap \{0 \leq x \leq 30\} \cap \{0 \leq y \leq 25\} \,|\, \{0 \leq x, y \leq 80\}) =$$

$$= \frac{\mu(\{x - y \leq 20\} \cap \{0 \leq x \leq 30\})}{\mu(\{0 \leq x, y \leq 80\})} = \frac{\frac{225}{2}}{6400} = \frac{225}{12800} \approx 0.0175$$

Тук използвахме факта, че жълтото множество е подмножество на синьото: $\triangle \subset \square$.