Упражнение 4 по СЕМ - Решения

30 октомври 2020 г.

Задача 1 Известни са вероятностите на събитията $A,\ B,\ AB$. Да се определят $\mathbf{P}(A\overline{B})$ и $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A})$.

Решение: $\mathbf{P}(A\overline{B}) = \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(AB)$, и $\mathbf{P}(\overline{B}|\overline{A}) = \frac{\mathbf{P}(\overline{B}\cap\overline{A})}{\mathbf{P}(\overline{A})} = \frac{\mathbf{P}(\overline{B})-\mathbf{P}(\overline{B}A)}{\mathbf{P}(\overline{A})} = \frac{1-\mathbf{P}(A)-\mathbf{P}(B)+\mathbf{P}(AB)}{1-\mathbf{P}(A)}$.

Задача 2 Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието A ще настъпи поне веднъж е равна на 1/2. Да се определи вероятността за настъпване на A при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.

Решение Нека A_i е събитието - A настъпва при $i-$тия опит, $i = 1, 2, 3, 4$. По условие A_i са независими и съгласно 0.1 независими са и събитията $\overline{A_i}$. По условие $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \mathbf{P}(A_3) = \mathbf{P}(A_4)$ и $\frac{1}{2} = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^4 A_i) = 1 - \mathbf{P}(\overline{\cup_{i=1}^4 A_i}) = 1 - \mathbf{P}(\cap_{i=1}^4 \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^4 \mathbf{P}(\overline{A_i}) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1})^4$, откъдето $\mathbf{P}(A_1) = 1 - \mathbf{P}(\overline{A_1}) = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

Забележка 0.1. *Ако A и B са независими съcбития, то:*
a) A *и* $\overline{B}$
b) $\overline{A}$ *и* $\overline{B}$
също са независими. Твърдението на задачата се обобщава по индукция за $n \geq 3$ *събития.*

Задача 3 Имаме три нормални зара и един, на който върху всичките страни има шестици. По случаен начин избираме един от тези четири зара и го отделяме, а след това хвърляме останалите три. Да се определи вероятността да се паднат:
а) три шестици; б) различни цифри; в) последователни цифри.

Решение Нека A е събитието премахнатият зар е обикновен (върху стените му са числата 1,2,...,6). Тогава събитията $A, \overline{A}$ образуват пълна група.

а) Ако B е събитието - падат се три шестици при хвърляне на 3-те зара, то прилагаме формулата за пълната вероятност:

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{1}{36} \times \frac{\binom{3}{1}}{4} + \frac{1}{6^3} \times \frac{1}{4} = \frac{19}{864} \approx 0,02199.$$

b) Ако B е събитието - падат се три различни цифри при хвърляне на 3-те зара, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{|V_5^2|}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{|V_6^3|}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{9} \approx 0,555.$$

c) Ако B е събитието - падат се три последователни цифри при хвърляне на 3-те зара, то

$$\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(B|A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B|\overline{A})\mathbf{P}(\overline{A}) = \frac{2}{|V(6;2)|} \times \frac{3}{4} + \frac{4.(3!)}{|V(6;3)|} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{72} \approx 0,069444.$$

Задача 4 В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират 3 топки, които след игра се връщат обратно в кутията. За втората игра също се избират 3 топки, каква е вероятността те да са нови?

Решение Нека $H_i,\ i = 0,1,2,3$ са съответно събитията - избрани са i на брой нови топки за първата игра. Нека A е събитието - избрани са 3 нови топки за втората игра. Тогава събитията H_i са пълна група и съгласно формулата за пълната вероятност получаваме $\mathbf{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i) = \mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0) + \mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} \times \frac{1}{\binom{7}{3}} + \frac{1}{\binom{7}{3}} \times \frac{\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{16}{1225} \approx 0.01306122$

Задача 5 В компютърен център има три принтера А, Б и В, които работят с различна скорост. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да се задави и да провали печатането е 0.01, 0.05 и 0.04 съответно. Ако печатането на даден документ се прекрати, каква е вероятността това да е по вина на първия принтер?

Решение Нека $H_i,\ i = 1,2,3$ и A са съответно събитията - документа се печата на i-тия принтер, печатането на документа е провалено. По условие $\mathbf{P}(H_1) = 0.6;\ \mathbf{P}(H_2) = 0.3;\ \mathbf{P}(H_3) = 0.1;\ \mathbf{P}(A|H_1) = 0.01;\ \mathbf{P}(A|H_2) = 0.05;\ \mathbf{P}(A|H_3) = 0.04$. Понеже H_i са две по две непресичащи се и $\sum_{i=0}^{3} \mathbf{P}(H_i) = 1$, то $H_i,\ i = 1,2,3$ образуват пълна група. Търсим $\mathbf{P}(H_1|A)$. Прилагаме формулата на Бейс: $\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)}{\sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k)} = \frac{6}{25}$.

Задача 6 Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студентът знае 90% от въпросите, ако не знае верния отговор той налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верния отговор?

Решение Нека H и A са съответно събитията - студентът знае случайно избран въпрос, студентът отговаря правилно на случайно избран въпрос. Търсим $\mathbf{P}(\overline{H}|A)$. Прилагаме Бейс: $\mathbf{P}(\overline{H}|A) = \frac{\mathbf{P}(A|\overline{H})\mathbf{P}(\overline{H})}{\mathbf{P}(A|\overline{H})\mathbf{P}(\overline{H}) + \mathbf{P}(A|H)\mathbf{P}(H)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{9}{10}} = \frac{1}{37}$.

Задача 7 На изпит се явяват 100 студента, 60 момчета и 40 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.5, а момчетата с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Решение Нека $H_i,\ i = 0,1,2,3$ и A са съответно събитията - при случаен избор на 3 изпитни работи, точно i от тях са на момичета; при случаен избор на 3 изпитни работи, точно две са успешни. Търсим $\mathbf{P}(H_3|A)$. Понеже събитията $H_i,\ i = 0,1,2,3$ образуват пълна група, то прилагаме Бейс: $\mathbf{P}(H_3|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_3)\mathbf{P}(H_3)}{\sum_{i=0}^{3}\mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}$. Пресмятаме:

$$\mathbf{P}(H_0) = \frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.21162647, \quad \mathbf{P}(A|H_0) = 3 \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6 = 0.288;$$

$$\mathbf{P}(H_1) = \frac{\binom{40}{1} \times \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}} = 0.43784787, \quad \mathbf{P}(A|H_1) = 2 \times 0.5 \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4 = 0.32;$$

$$\mathbf{P}(H_2) = \frac{\binom{40}{2} \times \binom{60}{1}}{\binom{100}{3}} = 0.28942486, \quad \mathbf{P}(A|H_2) = 2 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.4 + 0.5 \times 0.5 \times 0.6 = 0.35;$$

$$\mathbf{P}(H_3) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = 0.0611008, \quad \mathbf{P}(A|H_3) = 3 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.375;$$

Следователно $\mathbf{P}(H_3|A) \approx 0.07$.

Задача 8 Дадени са $n \geq 3$ събития, които са равновероятни, две по две независими, като всеки три от тях са несъвместими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

Решение Нека $A_k,\ k = 1, 2, \ldots, n$ са събития, удовлетворяващи условията на задачата, тоест две по две независими и всеки три са несъвместими. Нека $\mathbf{P}(A_k) = x \in (0, 1)$. Събитията

$$\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n = \prod_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\ A_iA_j,\ 1 \leq i < j \leq n,$$

са две по две несъвместими, следователно за събитието $A = \overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n \cup_{1\leq i<j\leq n} A_iA_j$

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\overline{A}_1\overline{A}_2\ldots\overline{A}_n \cup_{1\leq i<j\leq n} A_iA_j) = \mathbf{P}\left(\prod_{k=1}^{n}\overline{A}_k\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_iA_j)$$

$$= \mathbf{P}\left(\overline{\cup_{k=1}^{n}A_k}\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

$$= 1 - \mathbf{P}\left(\cup_{k=1}^{n}A_k\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j)$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_i)\mathbf{P}(A_j) + 1 - \sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(A_k) + \sum_{1\leq i<j\leq n}\mathbf{P}(A_iA_j) - \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\mathbf{P}(A_iA_jA_k) + \cdots$$

$$= \binom{n}{2}x^2 + 1 - nx + \binom{n}{2}x^2 = 1 + nx\left((n-1)x - 1\right).$$

Понеже $\mathbf{P}(A) \leq 1$, то $x \leq \frac{1}{n-1}$. Следният пример показва, че $\max x = \frac{1}{n-1}$.
Да разгледаме следният експеримент $\mathcal{E}_n$: по случаен начин от множеството на първите $(n-1)^2$ естествени числа S се избира число m . Дефинираме редица $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ от събития индуктивно:

A_1 е събитието $m = a_{1l}$, където $a_{1l},\ l = 1, \dots, n-1$ са различни елементи на S. Нека $a_{2l},\ l = 1, \dots, n-2$ са различни елементи на S, принадлежащи на

$$S - \{a_{1l} \mid l = 1, \dots, n-1\}.$$

Дефинираме A_2 да бъде събитието $m = a_{11}$ или $m = a_{2l},\ l = 1, 2, \dots, n-2$. Аналогично дефинираме $A_3, \dots, A_n$. Получваме $\mathbf{P}(A_k) = \frac{n-1}{(n-1)^2} = \frac{1}{n-1}$, всеки две събития от редицата $\{A_k\}_{k=1}^n$ са независими и всеки три са несъвместими.