1 Дискретни случайни величини и Биномно разпределение

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$, като $\mathfrak{A}$ е σ-алгебра от събития за $\mathcal{E}$.

Дефиниция 1.1. *Изображението $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяващо условията:*
1) образът на X е изброимо подмножество на $\mathbb{R}$, което ще означим с $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$,
2) за всяко $x \in X(\Omega)$, множеството $X^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ е елемент на $\mathfrak{A}$,
се нарича дискретна случайна величина във $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Нека $p_i = P(X^{-1}(x_i)) = P(X = x_i)$, то $1 = P(\Omega) = P(\cup_i X^{-1}(x_i)) = \sum_i P(X^{-1}(x_i)) = \sum_i p_i$. Задаването на дискретна случайна величина $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е еквивалентно на задаване на изброима пълна група от събития в $\mathfrak{A}$: това са събитията

$$H_i = X^{-1}(x_i) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i\},\ i = 1, 2, \ldots$$

Нека $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ е случайна величина. Функцията $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$ $\;x \longmapsto P(X^{-1}(x))$ се нарича теглова функция на X. На дискретна случайна величина еднозначно се съпоставя теглова функция: тоест неотрицателна функция с дискретна дефиниционна област(дискретно подмножество на $\mathbb{R}$) и сума на функционалните стойности равна на 1. Обратно, на теглова функция (в общия случай) съответства множество от дискретни случайни величини, чиито теглови функции съвпадат с дадената. Множеството от случайни величини със зададена теглова функция се нарича *разпределение*. Ще използваме следното означение $\{X = x\} := X^{-1}(x)$.

Нека n е стествено число, $p \in [0, 1]$.

Дефиниция 1.2. *Ще казваме, че случайната величина X е биномно разпределена с параметри n и p, което ще записваме чрез $X \in Bi(n, p)$, ако $X(\Omega) = \{0, 1, \ldots, n\}$ и тегловата функция на X има вида $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ за $k = 0, 1, \ldots, n$.*

Нека $n \in \mathbb{N},\ p \in (0, 1)$.

- Биномна схема : биномна схема с параметри n и p се нарича последователност от n независими опита, във всеки от които настъпва събитието A или $\overline{A}$, съответно с вероятност p и $q = 1 - p$. Събитията A и $\overline{A}$ се интепретират като успех и неуспех при съответен опит.

Интерпретация на биномно разпределена случайна величина с параметри (n, p), дава биномна схема със същите параметри, като вероятността на събитието - "да настъпят точно k успеха от n опита" е равна на $\mathbf{P}(X = k)$.

Дефиниция 1.3. *Нека X е дискретна случайната величина с множество от стойности $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и нека $p_i = P(X = x_i)$. Ако редът $\sum_i p_i x_i$ е абсолютно сходящ, то сумата му се нарича средна стойност на X (или математическо очакване на X) и се означава с*

$$\mathbf{E}X = \sum_i p_i x_i.$$

Забележка 1.4. *Условието за абсолютна сходимост на редът $\sum_i p_i x_i$ дефиниращ математическото очакване на случайна величина X е напълно естествено. Наистина, ако един ред е условно сходящ (тоест сходящ, но не абсолютно), то по теоремата на Риман следва, че съществува пренареждане на членовете на разглеждания ред така, че всяко отнапред фиксирано реално число да бъде граница на новополучения ред. Ако редът е абсолютно сходящ, то разместването на членовете не променя сумата. Следователно условието за абсолютна сходимост е необходимо и достатъчно, за да осигури независимост на числовата характеристика $EX = \sum_i p_i x_i$ от начина, по който сме подредили събираемите.*

Пример 1.5. *Нека $X \in Bi(n,p)$. Да се докаже, че $\mathbf{E}X = np$ и $\mathbf{D}X = npq$, където $q = 1 - p$ и $\mathbf{D}X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$.*

1.1 Условия на задачите от упражнение 6

Задача 1 Студент чака своя приятелка, която закъснява. За да разнообрази чакането той решава да се поразходи, като хвърля монета и ако се падне герб прави 10 крачки в една посока, а при лице прави 10 крачки в противоположна посока. На новото място повтаря тази операция и т.н. Каква е вероятността след 100 извършени крачки студентът да се намира:
а) на мястото от където е тръгнал;
б) на разстояние 20 крачки;
в) на разстояние 50 крачки от мястото на срещата.

Задача 2 Игра се провежда при следните правила. Играчът залага 5лв и има право да хвърли два зара. Ако хвърли две шестици печели 100лв, ако хвърли една шестица печели 5лв. Да се пресметне математическото очакване на печалбата на играча. Справедлива ли е играта?

Задача 3 Два зара се хвърлят последователно пет пъти. Каква е вероятността броят на хвърлянията, при които сумата от точките е шест, да бъде точно 2? Да се намери средната стойност на този брой.

Задача 4 Първият играч хвърля 3 монети, а вторият 2. Играта печели този, който хвърли повече гербове и взима всичките 5 монети. В случай на равен брой печели вторият. Каква е вероятността първият играч да спечели? Ако е спечелил първия каква е вероятността втория да е хвърлил точно един герб? Каква е средната печалба на играчите?

Задача 5 Извършва се серия от бернулиеви опити с вероятност за успех при всеки опит равна на p. Да се пресметне вероятността r-тия успех да настъпи точно на $(k+r)$-тия опит.

Задача 6 Пушач носи в джоба си две кутии кибрит. Всеки път когато иска да запали, той избира произволна кутия и вади една клечка. След известно време той забелязва, че едната кутия е празна. Каква е вероятността в този момент в другата да са останали точно k клечки, ако първоначално във всяка кутия е имало n клечки.

Задача 7 Нека преди опита съществуват две равно вероятни и единствено възможни хипотези относно вероятността за успех при един опит: $H_0: \ p_0 = 1/2$ и $H_1: \ p_1 = 2/3$. Коя от двете хипотези има по-голяма апостериорна вероятност, ако при провеждането на 200 опита са настъпили 120 успеха.

1.2 Решения на задачите от упражнение 6

Задача 1 Имаме бернулиева схема с 10 независими опита, при всеки от които се хвърлят монета с вероятност за падане на герб p. Нека $X \in \mathrm{Bi}(10, p)$. Тук интерпретираме падането на герб като успех. Нека x и y са съответно брой успехи и неуспехи. Тогава $x + y = 10$ и за търсената вероятност $\mathbf{P}$ имаме:
а) $x = y = 5$, следователно $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X = 5) = \binom{10}{5} p^5 (1-p)^5$
б) $|x - y| = 2$, следователно $x = 6,\ y = 4$ или $x = 4,\ y = 6$. Нека $A,\ B$ са съответно събитията - при 10 бернулиеви опита получаваме 6 успеха; 4 успеха. Тогава A и B са непресичащи се събития, откъдето $\mathbf{P} = \mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6 = \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2]$.

Забележка 1.6. *Еквивалентно, за търсената вероятност* $\mathbf{P}$ *намираме:*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{X = 4\} \cup \{X = 6\}) = \mathbf{P}(\{X = 4\}) + \mathbf{P}(\{X = 6\}) = \binom{10}{6} p^6 (1-p)^4 + \binom{10}{4} p^4 (1-p)^6$$

$$= \binom{10}{4} p^4 (1-p)^4 [p^2 + (1-p)^2].$$

в) $|x - y| = 5$ е невъзможно, следователно $\mathbf{P} = 0$.

Задача 2 Нека $A_i,\ i = 0, 1, 2$ са събиията - при хвърляне на 2 зара се падат точно i на брой шестици. Нека X е случайна величина с теглова функция: $x_i \longmapsto p_i,\ i = 0, 1, 2$ където $p_0 = \mathbf{P}(A_0) = \frac{25}{36},\ p_1 = \mathbf{P}(A_1) = \frac{10}{36},\ p_2 = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{36};\ x_0 = -5,\ x_1 = 0,\ x_2 = 95$. Очакваната чиста печалба на играча е $\mathrm{E}X = \sum_{i=0}^{2} p_i x_i = -5 \times \frac{25}{36} + 0 \times \frac{10}{36} + 95 \times \frac{1}{36} = -\frac{5}{6}$ и следователно играта не е справедлива.

Забележка 1.7. *Събитията* $A_i,\ i = 0, 1, 2$ *образуват пълна група, следователно можем да въведем (за краткост, вместо разглеждане на пълна група от събития) случайна величина* Y*, дефинирана като брой шестици при хвърляне на 2 зара. Тогава* $p_0 = \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{25}{36},\ p_1 = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{10}{36},\ p_2 = \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{36}$.

Задача 3 Имаме бернулиева схема с 5 независими опита, при всеки от които се хвърлят 2 зара. Нека X е случайната величина - брой хвърляния при които сумата от падналите се числа е равна на 6. Тогава X е биномно разпределена случайна величина: $X \in \mathrm{Bi}(5, \frac{5}{36})$. Търсим $\mathbf{P}(X = 2) = \binom{5}{2} p^2 (1-p)^3 = 10 p^2 (1-p)^3,\ p = \frac{5}{36}$. Търсеният среден брой е $\mathrm{E}X = 5 \times \frac{5}{36} = \frac{25}{36}$, понеже по-общо за $X \in \mathrm{Bi}(n, p)$ имаме $\mathrm{E}X = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np$.

Задача 4 Нека $X,\ Y$ са случайни величини, дефинирани чрез - брой гербове при хвърляне на 3 монети; при хвърляне на 2 монети. Без ограничение, нека вероятността за падане на

герб при хвърляне всяка от монетите е $p=\frac{1}{2}$. Тогава $X \in \mathrm{Bi}(3, \frac{1}{2}),\ Y \in \mathrm{Bi}(2, \frac{1}{2})$. Събитието $A = \{X > Y\}$ се представя като обединение на 4 непресичащи се събития: $A = \{X = 3\} \cup \{X = 2,\ Y = 1\} \cup \{X = 2,\ Y = 0\} \cup \{X = 1,\ Y = 0\}$, като събитията $\{X = i\},\ \{Y = j\}$ са независими. Вероятността за победа на първия играч е $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X > Y) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 2,\ Y = 1) + \mathbf{P}(X = 2,\ Y = 0) + \mathbf{P}(X = 1,\ Y = 0) = \mathbf{P}(X = 3) + \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 1) + \mathbf{P}(X = 2)\mathbf{P}(Y = 0) + \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{2}$.
Ако е спечелил първия, вероятността втория да е има точно един герб е $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{Y = 1\}|\{X > Y\}) = \frac{\mathbf{P}(\{Y=1\}\cap\{X>Y\})}{\mathbf{P}(\{X>Y\})} = \frac{\mathbf{P}(X=3,Y=1)+\mathbf{P}(X=2,Y=1)}{\mathbf{P}(X>Y)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.
Означаваме с $Z_i,\ i = 1, 2$ печалбата на $i-$тия играч, следователно средната печалба на играчите е $\mathrm{E}Z_1 = 2 \times \mathbf{P}(A) + (-3) \times \mathbf{P}(\overline{A}) = -\frac{1}{2};\ \ \mathrm{E}Z_2 = \frac{1}{2}$.

Задача 5 Нека A е събитието - r-тия успех настъпва на $(k + r)$-тия бернулиев опит. Нека $X \in \mathrm{Bi}(k + r - 1, p),\ Y \in \mathrm{Bi}(1, p)$. Понеже $A = \{X = r - 1\} \cap \{Y = 1\}$ е сечение на независими събития, то

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(X = r - 1, Y = 1) = \mathbf{P}(X = r - 1)\mathbf{P}(Y = 1) = \binom{k + r - 1}{r - 1} p^r (1 - p)^k.$$

Задача 6 Нека $A_i,\ i = 1, 2$ са съответно събитията - при случаен избор на клечки от кутия 1 и кутия 2, за $(n+1)-$път отваряме кутия i на $(2n-k+1)-$вия ход. Съгласно предходната задача $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n-k}{n}$. Понеже A_1 и A_2 са несъвместими, то търсената вероятност е

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) = 2 \times \frac{1}{2^{2n-k+1}}\binom{2n - k}{n} = \frac{1}{2^{2n-k}}\binom{2n - k}{n}.$$

Задача 7 Нека A е събитието - от 200 бернулиеви опита (с вероятност за успех в единичен опит p) да имаме 120 успеха. По условие $\mathbf{P}(H_0) = \mathbf{P}(H_1) = \frac{1}{2}$. Трябва да определим кое от числата $\mathbf{P}(H_0|A)$ и $\mathbf{P}(H_1|A)$ е по-голямо. Нека $X_i \in \mathrm{Bi}(200, p_i),\ i = 0, 1;\ p_0 = \frac{1}{2},\ p_1 = \frac{2}{3}$.
Тогава $\mathbf{P}(H_0|A) = \frac{\mathbf{P}(H_0\cap A)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0)}{\mathbf{P}(A|H_0)\mathbf{P}(H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)\mathbf{P}(H_1)} = \frac{\mathbf{P}(A|H_0)}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} = \frac{\mathbf{P}(X_0=120)}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} = \frac{1}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} \times \binom{200}{120} 2^{-200}$.
$\mathbf{P}(H_1|A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A|H_0)+\mathbf{P}(A|H_1)} \times \binom{200}{120}\frac{2^{120}}{3^{200}}$. Следователно $\mathbf{P}(H_1|A) = \mathbf{P}(H_0|A)\frac{2^{320}}{3^{200}}$
$= \mathbf{P}(H_0|A)\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^{40} > \mathbf{P}(H_0|A)$.