СЕМ, лекция 11
(2020-12-10)

Дефиниция. Две случайни величини са равни тогава и само тогава, когато имат еднакви функции на разпределение $X = Y \Leftrightarrow F_X = F_Y$. Ако X, Y са непрекъснати случайни величини, то от дясната страна на $\Leftrightarrow$ може да сложим и равенство на плътностите $f_X = f_Y$.

Твърдение. Нека $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ са независими в съвкупност, стандартно нормално разпределени, случайни величини. $Z_i \in \mathcal{N}(0,1), \forall 1 \le i \le n$. Тогава $X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \in \mathcal{X}^2(n)$.

Доказателство. Ще докажем, че $Z_1^2 \in \mathcal{X}^2(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Понеже Z_i^2 са независими и еднакво разпределени, то от предишната лекция

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \in \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ което по дефиниция е } \mathcal{X}^2(n).$$

Т.е. трябва да докажем само, че $Z_1^2 = \mathcal{X}^2(1)$. Този факт не може да се докаже директно със смяна, защото функцията, която имаме $Y_1 = Z_1^2 = g(Z_1), g(x) = x^2$, която функция g не е монотонна и еднозначна. Ще трябва да използваме директен подход.

Ще се опитаме да пресметнем плътността на Y_1 и от нейната производна да намерим функцията на разпределението.

$$x \ge 0, \mathbb{P}(Y_1 < x) = \mathbb{P}(Z_1^2 < x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < Z_1 < \sqrt{x}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

$$f_{Y_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},$$

което е плътността на $\mathcal{X}^2(1)$.

E. t-разпределение

Случайна величина $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S}{n}}}$, където $Z \in \mathcal{N}(0,1)$, $Z \perp\!\!\!\perp S$ и $S \in \mathcal{X}^2(n)$, се нарича t-разпределена случайна величина с n степени на свобода.

$\oplus\ X_1, \ldots, X_n \in N(0,1)$ независими. Означаваме $\overline{X} = \frac{1}{n},\ \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,\ \underbrace{S \perp\!\!\!\perp \overline{X}},\ nS \in \mathscr{X}^2(n).$$

Видове сходимост на случайни величини

$X_n : \Omega \to \mathbb{R}, n \geq 1$ и $X : \Omega \to \mathbb{R}$ са случайни величини във вероятностното пространство $V = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ (т.е. имаме едно единствено вероятностно пространство и $X_i,\ i = \overline{1, n},\ X$ са функции на елементарни събития в реалните числа)

Дефиниция (Сходимост почти сигурно (п.с.)). Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X \Leftrightarrow \mathbb{P}(L) = 1$, където събитието $\underset{\in\mathscr{A}}{L} = \{\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\} = \{w \in \Omega : \lim\limits_{n\to\infty} X_n(w) = X(w)\}$.

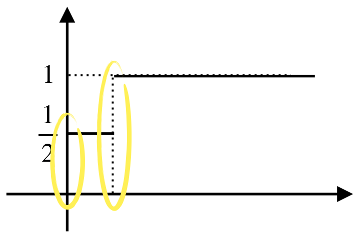
Дефиниция (Сходимост по вероятност). Казваме, че $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 :$ $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n, \varepsilon) = 0$, където $A_{n,\varepsilon} = \{\,|X_n - X| > \varepsilon\} = \{w \in \Omega : |X_n(w) - X(w)| > \varepsilon\}$

Дефиниция. Ако F_X е функция на разпределение, то с C_{F_X} означаваме всички точки x, за които F е непрекъсната в x. $C_{F_X} = \{x \in \mathbb{R} :\ F_X$ е непрекъсната в $x\}$ и $x \in C_{F_X} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x) = 0$.

$\oplus$ Ако X е непрекъсната случайна величина, то $\mathbb{P}(X = x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_{F_X} = \mathbb{R}$

Дефиниция (Сходимост по разпределение). Казваме, че $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x),\ \forall x \in C_{F_X}$ (тук никъде не споменаваме вероятностно пространство).

$$X = \begin{cases} 1, & p = \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Твърдение. Нека $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Нека $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Теорема. Нека $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини и X е случайна величина.

a) Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} X$

b) Ако $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$

c) Обратните индикации на a) и b) не са верни.

Доказателство.

a) Знаем, че $1 = \mathbb{P}(L)$, където $L = \{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} \stackrel{?}{=} \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k\geq n} A^c_{k,\frac{1}{r}}$, където

$\Pi_{k,r} = A^c_{k,\frac{1}{r}} = \{|X_k - X| \leq \frac{1}{r}\}$

За фиксирано k: $\quad \dots \supseteq \Pi_{k,r-1} \supseteq \Pi_{k,r} \supseteq \Pi_{k,r+1} \supseteq \dots$

Въвеждаме $B_{n,r} = \bigcap_{k\geq n} \Pi_{k,r}:\quad \dots \supseteq B_{k,r-1} \supseteq B_{k,r} \supseteq B_{k,r+1} \supseteq \dots$ за фиксирано k.

Но при фиксирано r имаме следното: $\dots \subseteq B_{k-1,r} \subseteq B_{k,r} \subseteq B_{k+1,r} \subseteq \dots$

$L \stackrel{?}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r}$.

Въвеждаме още един запис $C_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} \Rightarrow L \stackrel{?}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$

За фиксирано r: $\quad \dots \supseteq C_{r-1} \supseteq C_r \supseteq C_{r+1} \supseteq \dots$

Следователно $L \stackrel{?}{=} C = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$

Нека $\overline{w} \in L$ ще докажем, че то принадлежи и на C.

От допускането $\Rightarrow \forall r \geq 1, \exists n_r L n > n_r, |X_n(\overline{w}) - X(\overline{w})| \leq \frac{1}{r} \Rightarrow$

$\overline{w} \in \Pi_{n,r}, \forall n \geq n_r \Rightarrow \overline{w} \in B_{n_r,r} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} = C_r, \forall r \Rightarrow w \in C = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$

Нека $\overline{w} \in C \Rightarrow \overline{w} \in C_r, \forall r \geq 1 \Rightarrow \exists n_r: \ \overline{w} \in B_{n_r, r}, \forall n \geq n_r \Rightarrow \overline{w} \in B_{n,r}, \forall n \geq n_r$

$\Rightarrow \overline{w} \in \Pi_{k,r}, \forall k \geq n_r$

$|X_k(\overline{w}) - X(\overline{w})| \leq \dfrac{1}{r}, \forall k \geq n_r$. Успяхме да покажем, че $L = C$.

$1 = \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(C) \Rightarrow \mathbb{P}(C_r) = 1, \forall r; \quad C \subseteq C_r, \forall r \geq 1$

$$1 = \mathbb{P}(C_r) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r}\right) = \qquad \ldots \subseteq B_{n,r} \subseteq B_{n+1,r} \subseteq \ldots$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_{n,r}) \leq \qquad \ldots B_{n,r} \subseteq \Pi_{n,r}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Pi_{n,r}) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(\Pi_{n,r}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \leq \frac{1}{r}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,r}) = 0 \qquad \square$$

b) $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \overset{?}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X$.

От първата сходимост $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0: \ \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0, A_{n,\varepsilon} = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$

$\varepsilon = \dfrac{1}{r}$, достатъчно е да разгледаме само тези ε, тъй като ако $\varepsilon \in \left(\dfrac{1}{r}, \dfrac{1}{r-1}\right)$, то $A_{n, \frac{1}{r-1}} \subseteq A_{n,\varepsilon} \subseteq A_{n, \frac{1}{r}}$.

Втората сходимост (по разпределение) означава, че $F_{X_n} \to F_X$, за $\forall x \in C_{F_X}$. Т.е. избираме $x \in C_{F_X}$ и целим да докажем, че $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < x) = \mathbb{P}(X < x)$

Фиксираме $\varepsilon > 0$.

$$\{X < x - \varepsilon\} \cap A_{n,\varepsilon} \subseteq \{X_n < x\} \cap A^c_{n,\varepsilon} \subseteq \{X_n < x\} = \{X_n < x\} \cap \overbrace{(A_{n,\varepsilon} \cup A^c_{n,\varepsilon})}^{=\Omega} =$$

$$= \{X_n < x\} \cap A^c_{n,\varepsilon} \cup \{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon} \subseteq \{X < x + \varepsilon\} \cup A_{n,\varepsilon}$$

$$\underbrace{\underbrace{\mathbb{P}(X < x - \varepsilon \cap A^c_{n,\varepsilon})}_{=\mathbb{P}(X<x-\varepsilon)-\mathbb{P}(X<x-\varepsilon\cap A_{n,\varepsilon})}}_{\geq \mathbb{P}(X<x-\varepsilon)-\mathbb{P}(A_n,e)} \leq \mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x + \varepsilon) + \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X < x - \varepsilon)}_{F_X(x-\varepsilon)} - \underbrace{\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X_n < x)}_{F_{X_n}} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X < x + \varepsilon)}_{F_X(x+\varepsilon)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

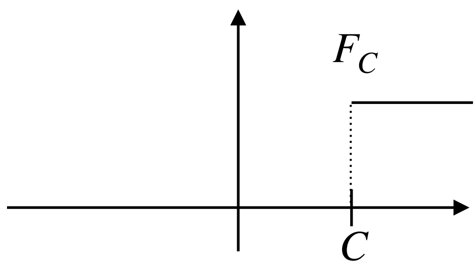
$$\Rightarrow F_X(x - \varepsilon) = \mathbb{P}(X > x - \varepsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x + \varepsilon) = F_X(X + \varepsilon)$$

$\Rightarrow$ При $\varepsilon \to 0$: $F_X(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n < x) \leq F_X(x) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (X_n < x) = F_X(x)$

$F_{X_n}(x) \to F_X(x)$ $\square$

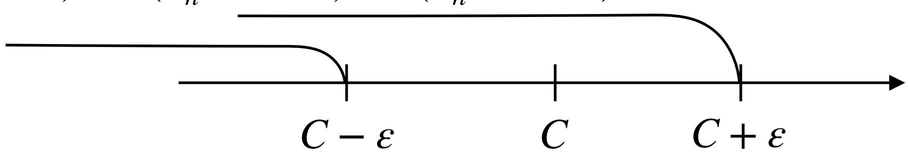
Твърдение. Ако $X_n \xrightarrow{d} \underset{const.}{C}$, то и $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} C$.

Доказателство. $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_C(x), \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{C\}$



Цел: $\forall \varepsilon > 0: \ \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon) - \mathbb{P}(X_n \leq C - \varepsilon)$



Но $\mathbb{P}(X_n \leq C - \varepsilon) = F_C(x - \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon)$

$$1 \geq \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon) \geq \mathbb{P}(X_n < C + \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 = F_C(C + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon).$$

Неравенство на Чебишев

Твърдение (Неравенство на Чебишев). Нека X е случайна величина с очакванр $\mathbb{E}X$ и дисперсия $\mathbb{D}X$. Нека $a > 0$. Тогава $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leq \dfrac{\mathbb{D}X}{a^2}$

<u>**Доказателство.**</u> $A = \{|X - \mathbb{E}X| > a\} = \{(X - \mathbb{E}X)^2 > a^2\}$
$\mathbb{P}(A) \leq ?$

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_A + \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_{A^c} \geq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_A \geq$$

$$\geq a^2 \mathbb{E}1_A = a^2 \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathbb{D}X}{a^2}.$$

$\square$

$\oplus$ $a = b\sqrt{DX} \Rightarrow \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > b\sqrt{DX}) \leq \dfrac{1}{b^2}$

Закон за големите числа (ЗГЧ)

Дефиниция. Нека имаме редица от еднакво разпределени и независими (i.i.d.) случайни величини $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ с очаквания съответно $\mathbb{E}X_i$. Казваме, че за X е изпълнено (слаб) ЗГЧ, ако

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Казваме, че за X е изпълнено (усилен) ЗГЧ, ако $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} 0.$

$\oplus$ Ако $\mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 = c, \forall i \geq 1$, тогава $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}(\text{п.с.})} \mathbb{E}X_1 = c$

Дефиниция. Наричаме $X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ редица от независими в съвкупност и еднакво разпределени (НЕР) случайни величини, ако $X_i \stackrel{d}{=} X_1, \forall i$ и всички случайни величини са независими. $(F_{X_i} = F_{X_1}, \mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1, \ldots)$

Теорема. Нека $X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ от НЕР случайни величини. Нека в допълнение

$\mathbb{E}|X_1| < \infty$ и $\mathbb{E}X_1 = \mu \in (-\infty, \infty)$.

Тогава $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}(\text{п.с.})} \mu = \mathbb{E}X_1.$