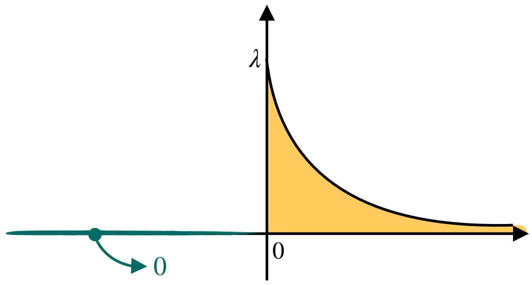
(B) Експоненциално разпределение

Дефиниция (Експоненциално разпределена случайна величина). Непрекъсната случайна величина X се разпределя експоненциално с параметър $\lambda > 0$ и се означава с $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, ако нейната функция на плътността (PDF) е:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Първо нека проверим, дали функцията на плътността в действителност може да бъде плътност на X. Проверка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathrm{d}\, x = \int_0^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x =$$

Полагаме: $\begin{cases} y = -\lambda x; \ \mathrm{d}\, y = -\lambda \, \mathrm{d}\, x \\ \Rightarrow \mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{d}\, y}{-\lambda}; \ \lambda > 0 \Rightarrow y \in (0, -\infty) \end{cases}$

$$= \int_0^{-\infty} \lambda \cdot e^y \frac{\mathrm{d}\, y}{-\lambda} = -\int_{-\infty}^{0} -1 \cdot e^y \, \mathrm{d}\, y$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^y \, \mathrm{d}\, y = e^y \Big|_{-\infty}^{0} = 1 - 0 = 1.$$

Следователно плътността е добре дефинирана и X съществува.

Функция на разпределение (CDF):

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} \, \mathrm{d}\, t = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$$

(За $x < 0$, $F_X(x) = 0$).

$\overline{F}_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, където $\overline{F}_X(x)$ се нарича „опашка“ на X.

<u>Математическо очакване</u>:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Доказателство:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x$$

Ще интегрираме по части:

Нека $u = x$, $\mathrm{d}\, v = \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x$. Тогава: $\mathrm{d}\, u = \mathrm{d}\, x$, $v = \int \lambda e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x = -\, e^{-\lambda x}$.
Заместваме във формулата за интегриране по части: $\int u \, \mathrm{d}\, v = uv\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} v \, \mathrm{d}\, u$.

$\mathbb{E}[X] = x \cdot (-e^{-\lambda x})\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x}) \mathrm{d}\, x.$

Изчисляваме границите за $x \cdot (-e^{-\lambda x})$:

За $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot (-e^{-\lambda x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{e^{\lambda x}}, \text{ което е неопределеност от вида } \frac{\infty}{\infty}.$$

Използваме правилото на Лопитал (по x):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Значи горната граница е 0.

За $x = 0$:

$$0 \cdot (-e^0) = 0.$$

Така $x \cdot (-e^{-\lambda x})\Big|_0^{\infty} = 0 - 0 = 0.$

Следователно оставащият интеграл е:

$$\mathbb{E}[X] = 0 - \int_0^{\infty} (-e^{-\lambda x}) \mathrm{d}\, x = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, \mathrm{d}\, x.$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\Big|_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-\lambda b}}{-\lambda}\right) - \left(\frac{e^0}{-\lambda}\right).$$

При $b \to \infty$, $e^{-\lambda b} \to 0$ и следователно:

$$= 0 - \left(\frac{1}{-\lambda}\right) = 0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}.$$

$\square$

Втори подход (на Ричард Файнман):

От функцията на плътността знаем, че:

$$1 = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x, \forall\lambda > 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} = \lambda^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\lambda} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty -xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty \lambda\cdot xe^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \mathbb{E}[X].$$

$\square$

<u>Дисперсия</u>:

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty (-\lambda x)^2\cdot e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}(-\lambda x) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,2(-\lambda x) = -\frac{2}{\lambda^2}\left(e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty\right) = -\frac{2}{\lambda^2}\cdot(0-1) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$\square$

Окончателно, ако $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, то $\mathbb{E}[X] = \sigma_X = \dfrac{1}{\lambda}$.

Експоненциалното разпределение е непрекъснат аналог на геометричното разпределение в смисъла на свойството безпаметност (memoryless). Ако вземем $t > 0$, $s > 0$, то $\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

Доказателство:

$$\frac{\mathbb{P}(\{X > t + s\} \cap \{X > t\})}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s).$$

$\square$

За по-голяма яснота, нека първо дефинираме някои означения, които ще използваме в продължението.

$X = (X_1, X_2), f_X$: плътност на X, $x = (x_1, x_2)$
$Y = (Y_1, Y_2), f_Y$: плътност на Y, $y = (y_1, y_2)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Под $y = g(x)$ се разбира $(y_1, y_2) = \big(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)\big) = g(x)$.

Двумерна непрекъсната случайна величина

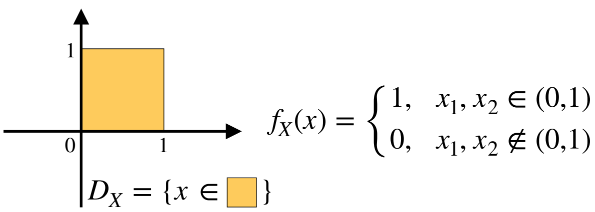
Двумерна непрекъсната случайна величина (ДНСВ) се означава с (X, Y) и представлява функция, която на всеки изход от вероятностното пространство съпоставя наредена двойка реални числа $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ключовата характеристика е, че съществува съвместна плътност на разпределението.

Дефиниция (Вектор от НСВ). $X = (X_1, X_2)$ е вектор от НСВ с плътност f_X, ако е изпълнено:

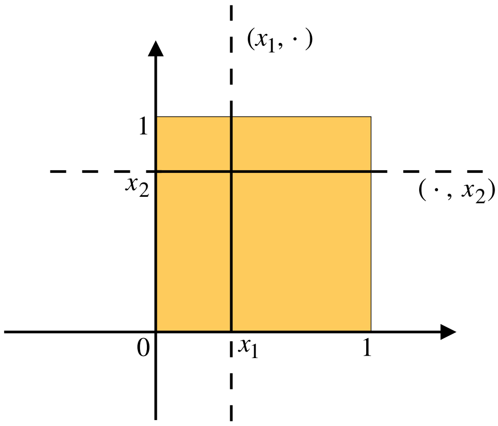
- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2) \underbrace{\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2}_{\mathrm{d}\, x} = \int_{\mathbb{R}^2} f_X(x) \mathrm{d}\, x = 1.$
- $\displaystyle\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f_X(x) \mathrm{d}\, x$, за всички отворени или затворени множества $D \subseteq \mathbb{R}^2$

Дефиниция (Носител на случайна величина).
Нека f_X е плътността на X. Тогава $D_X = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_X(x) > 0\}$ и D_X се нарича носител на X.

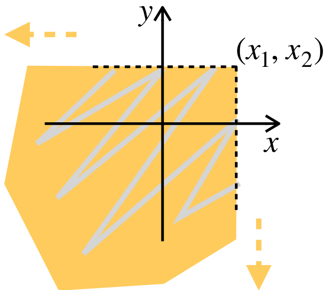
Смисъла на D_X е да показва какви са възможните стойности на случайния вектор.



Дефиниция (Маргинални разпределения). Нека X е вектор от НСВ с плътност f_X. Тогава $f_{X_1}(x_1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}\, x_2$ е маргиналното разпределение на X_1 и $f_{X_2}(x_2) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2) \mathrm{d}\, x_1$ е маргиналното разпределение на X_2



Дефиниция (Функция на разпределение). X е вектор от случайни величини. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2$ се нарича функция на разпределение на X.



Ако X е вектор от НСВ, то X има следната функция на разпределение:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(v_1, v_2) \mathrm{d}\, v_1 \, \mathrm{d}\, v_2$$

Плътността на X в точката x е равна на $f_X(x) = \left.\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X \right|_{x = x_1 + x_2}$

Дефиниция (Независимост на две непрекъснати случайни величини).
Нека $X = (X_1, X_2)$. Тогава X_1 и X_2 са независими (бележим с $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$), когато $F_X(x) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)$ или $\mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \mathbb{P}(X_1 < x_1) \cdot \mathbb{P}(X_2 < x_2)$ за всяко $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ако X е вектор от НСВ, то независимостта е еквивалентна на

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2), \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Тоест двумерната плътност на X се разпада на произведението на двете маргинални плътности на X_1 и $X_2 \Leftrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

Обобщение за n мерен случай:

Дефиниция (Съвкупна независимост). Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са случайни величини, такива, че $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ има плътност f_X. Тоест са изпълнени условията:

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) \mathrm{d}\, x = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n : \ \mathbb{P}(X \in D) = \displaystyle\int_D f_X(x) \underbrace{\mathrm{d}\, x}_{\mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_n}$

Тогава $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими в съвкупност тогава и само тогава, когато:

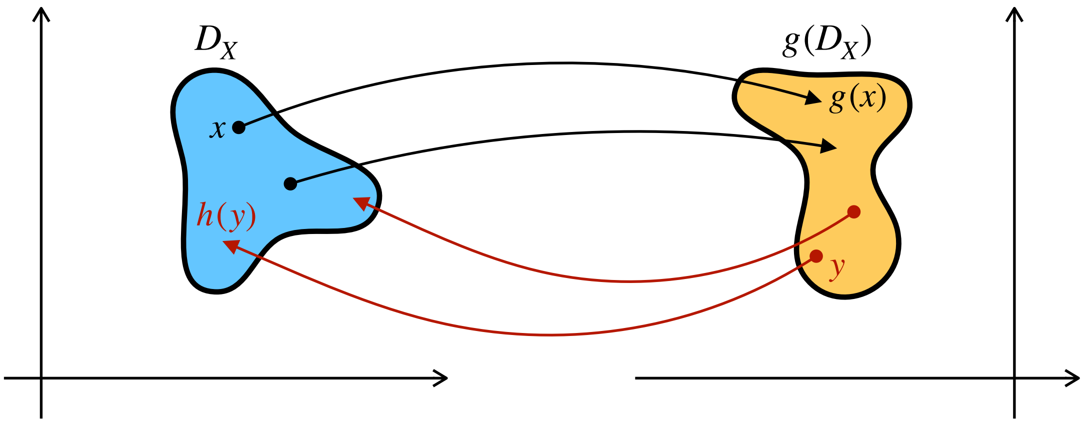
$$f_{X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} f_{X_{i_j}}(x_{i_j})$$

Смяна на променливите

Имаме $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Y = g(X)$ и знаем плътността f_X. Въпросът е: кога и как ще може да изчислим f_Y?

$D_X = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_X(x) > 0\}$,

$g(D_X) = \{y \in \mathbb{R}^2, \exists x \in D_X : y = g(x)\}$



Ако g е взаимно еднозначна определена върху D_X, то може да дефинираме и $h(y) = g^{-1}(y)$, $y \in g(D_X)$.

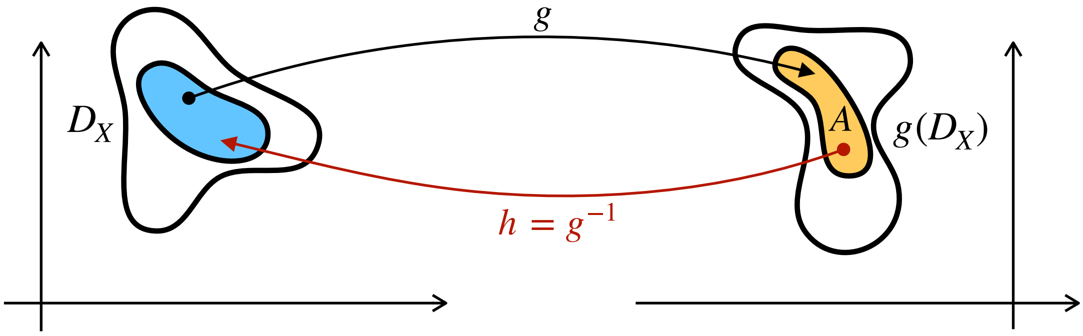
Теорема (Смяна на променливите). Нека X е вектор от НСВ(2) (две непрекъснати случайни величини) и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е функция. Нека $Y = g(X)$. Ако $g : D_X \to g(D_X)$ е взаимно еднозначно с обратна функция $h = g^{-1}$, h, g са непрекъснати, h има непрекъснати производни и $\forall y \in g(D_X)$ е изпълнено:

$$0 \neq \left| \det \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{vmatrix} \right| =: |J(y)|,$$

то Y е вектор от НСВ с плътност:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\left(h(y)\right) \underbrace{|J(y)|}_{\text{Якобиан на смяната}}, & y \in g(D_X) \\ 0, & y \notin g(D_X) \end{cases} \quad \text{и } D_Y = g(D_X).$$

Доказателство: Ще покажем, че за $\forall A \subseteq g(D_X) : \mathbb{P}(Y \in A) = \int_A f_Y(y) \mathrm{d}\, y$.



$$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}\left(g(x) \in A\right) = \mathbb{P}\left(X \in h(A)\right) =$$

$$= \int_{x \in h(A)} f_X(x) \mathrm{d}\, x \underbrace{=}_{\substack{x = (x_1, x_2) = h(y) \\ = \left(h_1(y),\, h_2(y)\right)}} = \int_{y \in A} \underbrace{f_X\left(h(y)\right)|J(y)|}\mathrm{d}\, y$$

$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(h(y)\right)|J(y)|$ е плътността на Y.

$\square$

Еквивалентен, но по-компактен запис:
Постановка на задачата: Нека имаме двумерна случайна величина (X, Y) с известна съвместна плътност $f_{X,Y}(x, y)$. Дефинираме две нови случайни величини (U, V) чрез обратима трансформация:

$$U = g_1(X, Y),\ V = g_2(X, Y)$$

Целта е да намерим съвместната плътност $f_{U,V}(u, v)$ на новите величини.

Основна формула (Теорема за смяна на променливите)

Нека трансформацията $T : (x, y) \mapsto (u, v)$ е обратима в областта, където $f_{X,Y} > 0$. Тогава:

$$f_{U,V}(u, v) = f_{X,Y}\big((x(u, v), y(u, v))\big) \cdot |J|$$

Където:

- $x(u, v)$, $y(u, v)$ са обратните функции, изразяващи старите променливи чрез новите.
- J е Якобианът на обратната трансформация $T^{-1} : (u, v) \mapsto (x, y)$, дефиноран като детерминантата:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Стъпки за прилагане на метода

1. **Дефиниране на трансформацията:**
   Задаваме $U = g_1(X, Y)$, $V = g_2(X, Y)$.

2. **Намиране на обратната трансформация:**
   Това е най-критичната стъпка. Трябва да изразим X и Y чрез U и V:

   $$X = h_1(U, V), Y = h_2(U, V).$$

   Трансформацията трябва да е взаимно-еднозначна в областта на ненулева плътност.

3. **Изчисляване на Якобиана J:**
   Намираме частните производни на обратните функции и изчисляваме детерминантата:

   $$J = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}$$

4. **Прилагаме формулата:**
   Заместваме $x(u, v)$ и $y(u, v)$ в оригиналната плътност $f_{X,Y}$ и умножаваме по абсолютната стойност на Якобиана $|J|$.

5. **Определяне на новата област:**
   Намираме областта в (u, v)-равнината, в която новата плътност $f_{U,V}(u, v)$ е различна от нула. Това е образът на оригиналната област чрез трансформацията T.

$\oplus$ Нека $V_1, V_2, \ldots, V_n$ са независими в съвкупност НСВ, тоест $V_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Тогава $\sum_{i=1}^{n} V_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$.

Ще покажем, че е изпълнено за $n = 2$. От принципа на математическата индукция ще следва за всяко $n \in \mathbb{N}$.

$n = 2$:

$$V_1 + V_2 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1 + \mu_2 + \sigma_2 Z_2, \text{ където } Z_1, Z_2 \in \mathcal{N}(0, 1) \text{ и } Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2 \Rightarrow$$

$$V_1 + V_2 = (\mu_1 + \mu_2) + \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$$

Поставяме:

$$X_1 = \sigma_1 Z_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2) \text{ и } X_2 = \sigma_2 Z_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$$

От къдети следва, че $V_1 + V_2 = \mu_1 + \mu_2 + X_1 + X_2$.

Ако $X_1 + X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, то $V_1 + V_2 \in (\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Оттук нататък се интересуваме от $X_1 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ и тяхната сума, където $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

$$f_X(x) = f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}}_{f_{X_1}(x_1)} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}}}_{f_{X_2}(x_2)}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \times e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}} > 0, \text{ което е новата съвместна плътност}$$

$D_X = \mathbb{R}^2$ (диапазона на X).

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}}, D_X = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \Rightarrow Y = g(X) \text{ (линейно неизродено изображение)}$$

$$\Rightarrow g(D_X) = g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2, X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = h(y) = \begin{vmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & 0 \end{vmatrix}, \ |J(y)| = \left| \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right| = 1,$$

$$f_Y(y) = f_X\left(h(y)\right) \cdot 1 = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \cdot 2\pi} \cdot e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_2^2}}, \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$Y_1 = X_1 + X_2, \ Y_2 = X_2$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_2^2}} \,\mathrm{d}\, y^2 \overset{(*)}{=} \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sigma_1\sigma_2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(by_2 - ay_1)^2} \,\mathrm{d}\, y_2 \overset{by_2 = w}{=}$$

$$= \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sigma_1\sigma_2 \cdot 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w - ay_1)^2} \,\mathrm{d}\, w \overset{v = w - ay_1}{=} \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2 b} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \,\mathrm{d}\, v}_{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sigma_1\sigma_2 b\sqrt{2\pi}}.$$

Като $(*)$ е следното допускане: $\dfrac{(y_1 - y_2)^2}{\sigma_1^2} + \dfrac{y_2^2}{\sigma_2^2} \overset{(*)}{=} c y_1^2 + (b y_2 - a y_1)^2$, тоест допускаме, че левия израз може да се представи като десния за някой $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Остава да намерим тези параметри a, b и c.

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sigma_1\sigma_2 b\sqrt{2\pi}}.$$

Връщаме се в $(*)$, за да намерим b и c.

$$\frac{(y_1 - y_2)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = c y_1^2 + (b y_2 - a y_1)^2 = c y_1^2 + b^2 y_2^2 - 2ab y_1 y_2 + a^2 y_1^2$$

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = y_2^2 \underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}_{b^2} - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2} + y_1^2 + \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} =$$

$$= \left(y_2^2 b^2 - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2} . \frac{b}{b} + \frac{y_1^2}{\sigma_1^4 b^2}\right) - \frac{y_1^2}{\sigma_1^4 b^2} + \frac{y_1^2}{\sigma_1^2}.$$

$$b^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{\sigma_1^4} \cdot \frac{1}{b^2} = \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\sigma_1^2}$$

$$c = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$f_Y(y_1) = \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2 b} = \frac{e^{-\frac{y_1^2}{2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma_1\sigma_2}\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\cancel{\sigma_1\sigma_2}}} = \frac{e^{-\frac{y_1^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}},$$

което е плътността на $\mathcal{N}(0,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \in \mathcal{N}(0,\, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

$\square$

Важен частен случай: Линейна трансформация

Нека трансформацията е линейна:

$$\begin{cases} U = aX + bY \\ V = cX + dY \end{cases} \text{или в матричен вид } \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}.$$

Тогава обратната трансформация също е линейна и нейният Якобиан J е константа, равна на обратната детерминанта на матрицата на трансформацията.

По-точно, ако детерминантата на коефициентите $\Delta = ad - bc \neq 0$, то:

$$J = \frac{1}{\Delta}.$$

Следователно:

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}\big(x(u,v), y(u,v)\big) \cdot \frac{1}{|\Delta|}.$$

⨁ Преход към полярни координати. Това е много често срещан пример.

Нека (X, Y) са декартови координати. Дефинираме полярни координати (R, Θ):

$$U = E = \sqrt{X^2 + Y^2},\ V = \Theta = \arctan\left(\frac{Y}{X}\right)$$

Обратната трансформация е:

$$X = R\cos\Theta,\ Y = R\sin\Theta$$

Изчисляваме Якобиана:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Формулата за смяна става:

$$f_{R,\Theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r$$

Важно: Областта се променя. Ако (X, Y) са дефинирани в цялата равнина, то $r \geq 0$ и $\theta \in [0, 2\pi)$. Множителят r е много важен и често се забравя.

Доказателство (схематично):

Доказателството следва от теоремата за смяна на променливите при многократно интегриране.

1. Разглеждаме съвместната функция на разпределение на U, V:

$$F_{U,V}(u,v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \iint_D f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y,$$

Където $D = \{(x,y) : g_1(x,y) \leq u, g_2(x,y) \leq v\}$.

2. Извършваме смяна на променливите в двойния интеграл: $(x,y) \mapsto (u', v')$, където $u' = g_1(x,y)$, $v' = g_2(x,y)$. Това е стандартна техника от математическия анализ.

3. Според теоремата за смяна, $\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = |J|\,\mathrm{d}\,u'\,\mathrm{d}\,v'$, където J е Якобианът на обратната трансформация.

4. Получаваме:

$$F_{U,V}(u,v) = \int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} f_{X,Y}\big(x(u',v'), y(u',v')\big)\cdot|J|\,\mathrm{d}\,v'\,\mathrm{d}\,u'.$$

5. За да намерим плътността, диференцираме функцията на разпределение:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2 F_{U,V}(u,v)}{\partial u \partial v} = f_{X,Y}\big(x(u,v), y(u,v)\big)\cdot|J|.$$

Краен коментар

Смяната на променливите е мощен инструмент, използван за:

- Намиране на разпределението на функция на случайни величини (напр. $Z = X/Y$, $W = XY$).

- Опростяване на проблеми (преход към полярни координати при ротационно-симетрични разпределения).
- Генериране на случайни величини с желано разпределение в компютърни симулации (метод на обратната трансформация или Якобиан).
- Винаги проверявайте дали трансформацията е обратима в дадената област и не забравяйте абсолютната стойност на Якобиана.

Карл Густав Якоб Якоби (1804–1851) е германски математик, на чийто труд дължим математическия термин „Якобиан“ от теоремата за смяна на променливите.

(Г) Гама разпределение

Дефиниция (Гама разпределена случайна величина). Казваме, че случайната величина X е с непрекъснато гама разпределение и бележим с $X \sim \Gamma(k;\theta)$, ако има плътност:

$$f_X(x;k,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \cdot x^{k-1} e^{-\frac{x}{\theta}}, x > 0, k > 0, \theta > 0 \end{cases}$$

Където $\Gamma(k)$ е гама функцията:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty t^{k-1} e^{-t} \, \mathrm{d}\, t$$

Алтернативна параметризация с параметър скорост $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$:

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$$

Адитивност на Гама разпределението:

Теорема (Адитивност). Ако $X_1 \sim \mathrm{Gamma}(k_1, \theta)$ и $X_2 \sim \mathrm{Gamma}(k_2, \theta)$ са независими ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$), то:

$$X_1 + X_2 \sim \mathrm{Gamma}(k_1 + k_2, \theta)$$

Доказателство (чрез плътности):

Стъпка 1: Записваме съвместната плътност.
Поради независимост:

$$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{\theta^{k_1}\Gamma(k_1)} x_1^{k_1-1} e^{-x_1/\theta} \cdot \frac{1}{\theta^{k_2}\Gamma(k_2)} x_2^{k_2-1} e^{-x_2/\theta}, x_1, x_2 > 0$$

Стъпка 2: Променяме променливите.

Нека $Y = X_1 + X_2$ и $W = X_1$. Обратните трансформации са $X_1 = W, X_2 = Y - W$. Якобианът на преобразуването е $|J| = 1$.

Съвместната плътност на (Y, W) е:

$$f_{Y,W}(y, w) = f_{X_1,X_2}(w, y - w) = \frac{1}{\theta^{k_1+k_2}\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} w^{k_1-1}(y - w)^{k_2-1}e^{-y/\theta}$$

за $y > 0$ и $0 < w < y$ (във всички останали случай е 0).

Стъпка 3: Намираме маргиналната плътност на Y (сумата).

Интегрираме по w:

$$f_Y(y) = \int_0^y f_{Y,W}(y, w)\mathrm{d}\,w = \frac{e^{-y/\theta}}{\theta^{k_1+k_2}\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \int_0^y w^{k_1-1}(y - w)^{k_2-1}\mathrm{d}\,w$$

Стъпка 4: Решаваме интеграла.

Правим субституция $w = y \cdot u$, където $u \in (0,1)$. Тогава $\mathrm{d}\,w = \mathrm{d}\,u$.

$$\begin{aligned}\int_0^y w^{k_1-1}(y - w)^{k_2-1}\mathrm{d}\,w &= \int 1 \cdot (yu)^{k_1-1}(y - yu)^{k_2-1} \cdot y\,\mathrm{d}\,u \\ &= y^{k_1-1}y^{k_2-1}y\int_0^1 u^{k_1-1}(1 - u)^{k_2-1}\mathrm{d}\,u \\ &= y^{k_1+k_2-1} \cdot B(k_1, k_2)\,.\end{aligned}$$

Където $B(k_1, k_2) = \dfrac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1 + k_2)}$ е Бета функцията.

Стъпка 5: Заместваме и опростяваме.

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{e^{-y/\theta}}{\theta^{k_1+k_2}\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)} \cdot \left[y^{k_1+k_2-1} \cdot \frac{\Gamma(k_1)\Gamma(k_2)}{\Gamma(k_1 + k_2)}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^{k_1+k_2}\Gamma(k_1 + k_2)} y^{(k_1+k_2)-1}e^{-y/\theta},\ y > 0\end{aligned}$$

Това е точно плътността на гама разпределение $\Gamma(k_1 + k_2, \theta)$.

Доказателството може да се направи и чрез производяща функция на моментите / характеристична функция които още не сме взели.

Следствие. $X_i \sim \mathrm{Gamma}(k_i, \theta),\ i = 1, \ldots, n$ и $X_1, \ldots, X_n$ са независими в съвкупност, то $X_1 + \ldots + X_2 \sim \mathrm{Gamma}(k_1 + \ \ldots\ + k_n, \theta)$.

Упътване:

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases},$$

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{\beta^{k_1+k_2}}{\Gamma(k_1, \theta)\Gamma(k_2, \theta)} e^{-\theta(x_1+x_2)},\ x_1, x_2 \geq 0.$$

Скалиране на Гама разпределението:

Теорема (Скалиране). Ако $X \sim \mathrm{Gamma}(k, \theta)$, то за $c > 0$:

$$cX \sim \mathrm{Gamma}(k, c\theta)$$

Доказателство (CDF и PDF):

Нека $Y = cX$. Тогава за функцията на разпределението имаме:

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(cX \leq y) = \mathbb{P}\Big(X \leq \frac{y}{c}\Big) = F_X\Big(\frac{y}{c}\Big),$$

където F_X е функцията на разпределение на X.

За плътността диференцираме $F_Y(y)$ по y, използвайки правилото за диференциране на съставна функция:

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_X\left(\frac{y}{c}\right) = f_X\left(\frac{y}{c}\right) \cdot \frac{1}{c}.$$

Знаем, че $f_X(x) = \dfrac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/\theta}$ за $x > 0$.

Заместваме $x = y/c$:

$$f_X\left(\frac{y}{c}\right) = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \left(\frac{y}{c}\right)^{k-1} e^{-(y/c)/\theta} = \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \cdot \frac{y^{k-1}}{c^{k-1}} \cdot e^{-y/(c\theta)}.$$

Окончателен вид на $f_Y(y)$:

$$f_Y(y) = \left[\frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} \cdot \frac{y^{k-1}}{c^{k-1}} \cdot e^{-y/(c\theta)}\right] \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{\theta^k c^k \Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y/(c\theta)},$$

Което е точно плътността на гама разпределение с параметри на форма k и мащаб $c\theta$, тоест $Y \sim \Gamma(k, c\theta)$.
Доказателството може да се направи и чрез производяща функция на моментите / характеристична функция които още не сме взели.

Рекурентно свойство на гама функцията:

Основното рекурентно свойство на гама функцията за положителни реални числа е следното:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ z > 0.$$

Доказателство:

Дефиницията на гама функцията за $z > 0$ е следната: $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,\mathrm{d}\,t.$

За да изчислим $\Gamma(z+1) = \displaystyle\int_0^\infty t^z e^{-t}\,\mathrm{d}\,t$ ще интегрираме по части. Взимаме:

- $u = t^z \Rightarrow \mathrm{d}\,u = zt^{z-1}\,\mathrm{d}\,t$
- $\mathrm{d}\,v = e^{-t}\,\mathrm{d}\,t \Rightarrow v = -\,e^{-t}$

Интегриране по части $\int u\,\mathrm{d}\,v = uv - \int v\,\mathrm{d}\,u$:

$$\Gamma(z+1) = -\,t^z e^{-t}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-t}) \cdot zt^{z-1}\,\mathrm{d}\,t.$$

Гранични стойности на $-t^z e^{-t}\Big|_0^\infty$:

При $t \to \infty$: e^{-t} клони към 0 по-бързо от всяка степен на t, така че $-t^z e^{-t} \to 0$.
При $t \to 0^+$: $t^z \to 0$, а $e^{-t} \to 1$, така че $-t^z e^{-t} \to 0$.

Следователно граничният член е $0 - 0 = 0$.

Оставащият интеграл $\Gamma(z+1) = 0 + z\displaystyle\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,\mathrm{d}\,t$ е всъщност $\Gamma(z+1)$. Така получаваме: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Математическо очакване:

$$\mathbb{E}[X] = k\theta$$

Доказателство:

Математическото очакване следва от:

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \cdot f(x; k, \theta) \mathrm{d}\, x = \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot x^{k-1} e^{-x/\theta} \mathrm{d}\, x =$$
$$= \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \int_0^\infty x^k e^{-x/\theta} \mathrm{d}\, x\,.$$

Нека $t = x/\theta \Rightarrow x = \theta t, \mathrm{d}\, x = \theta \,\mathrm{d}\, t$.

Тогава:

$$\int_0^\theta x^k e^{-x/\theta} \mathrm{d}\, x = \int_0^\infty (\theta t)^k e^{-t} \cdot \theta \,\mathrm{d}\, t = \theta^{k+1} \int_0^\infty t^k e^{-t} \mathrm{d}\, t$$

Но $\int_0^\infty t^k e^{-t} \mathrm{d}\, t = \Gamma(k+1)$. И по свойството на гама функцията $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot \theta^{k+1} \cdot \Gamma(k+1)$$
$$= \frac{1}{\cancel{\Gamma(k)}\theta^k} \cdot \theta^{k+1} \cdot k\cancel{\Gamma(k)} = k\theta\,.$$

<u>Дисперсия</u>:

$$\mathrm{Var}[X] = k\theta^2$$

Доказателство:

Трябва да намерим втория централен момент :

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 f(x; k, \theta) \mathrm{d}\, x = \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \int_0^\infty x^{k+1} e^{-x/\theta} \mathrm{d}\, x.$$

Заместваме: $t = x/\theta, x = \theta t, \mathrm{d}\, x = \theta \,\mathrm{d}\, t$:

$$\int_0^\infty x^{k+1} e^{-x/\theta} \mathrm{d}\, x = \int_0^\infty (\theta t)^{k+1} e^{-t} \theta \,\mathrm{d}\, t = \theta^{k+2} \int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}\, t.$$

Но,

$$\int_0^\infty t^{k+1} e^{-t} \mathrm{d}\, t = \Gamma(k+2)$$

А от свойството на гама функцията знаем, че:

$$\Gamma(k+2) = (k+1) \cdot \Gamma(k+1) = (k+1) \cdot k \cdot \Gamma(k).$$

Следователно:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot \theta^{k+2} \cdot \Gamma(k+2) \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)\theta^k} \cdot \theta^{k+2} \cdot k(k+1)\Gamma(k) \\ &= k(k+1)\theta^2 .\end{aligned}$$

Сега,

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \big(\mathbb{E}[X]\big)^2 \\ &= k(k+1)\theta^2 - (k\theta)^2 \\ &= k\theta^2 + k^2\theta^2 - k^2\theta^2 = k\theta^2 .\end{aligned}$$

$\square$

<u>Стандартно отклонение</u>:

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]} = \theta\sqrt{k}.$$

<u>Връзка между сумата на независими експоненциално разпределени случайни величини и гама разпределението</u>:

Сумата от n независими, еднакво разпределени експоненциални случайни величнини (със същия параметър λ) следва гама разпределение (или ерлангово разпределение).

По-формално:

Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими случайни величини, всяка следваща експоненциално разпределение с параметър λ (често с мащаб $\beta = 1/\lambda$).

Тогава тяхната сума:

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

следва гама разпределение с параметър:

- Скорост: $k = n$ и $\theta = \lambda$

Или алтернативно: Форма (shape): $\alpha = n$; Мащаб (scale): $\beta = 1/\lambda$ (където $\alpha = k$ и $\beta = 1/\theta$).

Това специално гама разпределение с целочислен параметър на формата ($\alpha = n$) се нарича още Разпределение на Ерланг. Агнер Краруп Ерланг (1878-1929), датски математик, статистик и инженер.

Доказателство (чрез индукция):

База: $n = 1$

За $n = 1$: $S_1 = X_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

Плътност на $\mathrm{Gamma}(1,\lambda)$ (форма 1, скорост λ) е:

$$f(y) = \frac{\lambda^1}{\Gamma(1)} \cdot y^0 e^{-\lambda y} = \lambda e^{-\lambda y}, y \geq 0,$$

Което е точно експоненциално с параметър λ. Базата е вярна.

Индукционно предположение:

Да предположим, че за $n = k$ е вярно: $S_k \sim \Gamma(k, \lambda)$, с плътност:

$$f_{S_k}(y) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot y^{k-1} e^{-\lambda y}, y > 0.$$

Индукционна стъпка:

Нека $S_{k+1} = S_k + X_{k+1}$, където $X_{k+1} \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ и е независима от S_k. Трябва да докажемм, че $S_{k+1} \sim \mathrm{Exp}(k+1,\lambda)$.

Плътността на сумата на две независими неотрицателни случайни величини е свърта нето на техните плътности:

$$f_{S_{k+1}}(z) = (f_{S_k} * f_{X_{k+1}})(z) = \int_0^z f_{S_k}(y) f_{X_{k+1}}(z-y) \mathrm{d}y.$$

Заместваме:

$$f_{S_k}(y) = \frac{\lambda^k}{\Gamma(h)} \cdot y^{k-1} e^{-\lambda y}, y > 0$$

$$f_{X_{k+1}}(z-y) = \lambda e^{-\lambda(z-y)}, 0 < y < z.$$

Тогава:

$$F_{S_{k+1}(z)} = \int_0^z \frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} \cdot y^{k-1} e^{-\lambda y} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-y)} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k)} \cdot e^{-\lambda z} \int_0^z y^{k-1} \mathrm{d}y.$$

Интегралът е:

$$\int_0^z y^{k-1}\,\mathrm{d}\,y = \frac{z^k}{k}.$$

Следователно:

$$f_{S_{k+1}}(z) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(h)} \cdot e^{-\lambda z} \cdot \frac{z^k}{k}.$$

Знаем, че $\Gamma(k+1) = k\Gamma(k)$, тоест $\dfrac{1}{k\Gamma(k)} = \dfrac{1}{\Gamma(k+1)}$.

Така:

$$f_{S_{k+1}}(z) = \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(k+1)} \cdot z^k e^{-\lambda z}, z > 0.$$

Това е точно плътността на $\Gamma(k+1,\lambda)$.

$\square$

Има и алтернативно доказателство чрез производяща функция на моментите / характеристична функция които още не сме взели.

(Д) Хи-квадрат разпределение

Дефиниция (Хи-квадрат разпределена случайна величина). Нека $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$ са независими стандартно нормално разпределени случайни величини, тоест $Z_i \sim \mathcal{N}(0,1)$ за $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогава случайната величина:

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

се нарича хи-квадрат разпределена с k степени на свобода.

Плътност:

Плътността на хи-квадрат разпределение с k степени на свобода е:

$$f(x;k) = \begin{cases} \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(k/2)} \cdot x^{k/2-1}e^{-x/2}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

Където Γ е гама функцията.

Доказателство:

Нека $X = Z^2$, $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Плътност на Z:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}.$$

Търсим $f_X(x)$ за $x > 0$.

Функция на разпределение на X:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(Z^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) = F_Z(\sqrt{x}) - F_Z(-\sqrt{x}).$$

Диференцираме:

$$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,x} F_X(x) = f_Z(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - f_Z(-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$

Но $f_Z(\sqrt{x}) = f_Z(-\sqrt{x}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2}$.

Значи:

$$f_X(x) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2}.$$

При $n = 1$ общата формула дава:

$$\frac{1}{2^{1/2}\Gamma(1/2)} x^{1/2-1} e^{-x/2}.$$

Тъй като $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, става

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-1/2} e^{-x/2},$$

Което съвпада с плътността на χ_1^2.
За общия случай може да използваме индукция, функция на моментите или директно чрез връзка с Гама разпределение.

Директно чрез връзка с Гама разпределение:

Известно е, че ако $U \sim \Gamma(a, \lambda)$ и $V \sim \Gamma(b, \lambda)$ са независими, то $U + V \sim \Gamma(a + b, \lambda)$.

Вече показахме, че $Z_i^2 \sim \Gamma(1/2, 2)$. Тогава $X = \Sigma_{i=1}^n Z_i^2 \sim \Gamma(n/2, 2)$, което дава същата плътност. $\square$

Математическо очакване:
За χ_k^2 с k степени на свобода:

$$\mathbb{E}[\chi_k^2] = k$$

Доказателство:

$$\mathbb{E}[\chi_k^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k} Z_i^2\right] = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{k} 1 = k$$

Тъй като $\mathbb{E}[Z_i^2] = \mathrm{Var}[Z_i] = 1$ за $Z_i \sim \mathcal{N}(0,\,1)$.

Дисперсия:

$$\mathrm{Var}[\chi_k^2] = 2k$$

Доказателство:

За $Z \sim \mathcal{N}(0,\,1)$ имаме $\mathbb{E}[Z^4] = 3$ (четвърти момент на стандартно нормално разпределение). Тогава:

$$\mathrm{Var}[Z_i^2] = \mathbb{E}[Z_i^4] - \left(\mathbb{E}[Z_i^2]\right)^2 = 3 - 1 = 2$$

Следователно:

$$\mathrm{Var}[\chi_k^2] = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Var}[Z_i^2] = \sum_{i=1}^{k} 2 = 2k$$

тъй като Z_i^2 са независими.

Адитивност:

Ако $X \sim \chi_m^2$ и $Y \sim \chi_n^2$ са независими, то:

$$X + Y \sim \chi_{m+n}^2$$

Връзка с гама разпределение:

Хи-квадрат разпределението е частен случай на гама разпределение:

$$\chi_k^2 \sim \Gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

където $\Gamma(\alpha, \beta)$ има плътност:

$$f(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, x > 0$$

Теорема на Фишър (Роналд Айлмър Фишър (1890-1962), Великобритания):

Ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими, то:

$$\sum_{i=1}^{k} Z_i^2 \sim \chi_k^2(\lambda)$$

където $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \mu_i^2$ е параметър на нецентралност.

Това разпределение се използва при анализ на мощност на статистически тестове.

(Фридрих Роберт Хелмерт (1843-1917), Кралство Саксония (днес Германия). Той е този който извежда и доказва теоремата. Теоремата обаче е кръстена на Фишър тъй като именно той направил огромен, основен принос в теорията и употребата ѝ.)