Първо контролно по статистгика и емпирични методи
спец. софтуерно инженерство

Вариант 1
ф.н. 62369

Задача 1. Три зара се хвърлят последователно 5 пъти. Каква е вероятността, броят на хвърлянията, при които се падат само нечетни точки да бъде четен? Да се намери средната стойност на този брой.

<u>Решение</u>:

Дефинираме случайните величини $A = \{$брой паднали се нечетни точки при хвърлянето на 3 зара$\}$, а $A_i = \{$на i -тия зар се пада нечетен брой точки$\}$, за $i = 1, 2, 3$.

A_i е бернулиево разпределена случайна величина с вероятност за успех $p = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

A е биномно разпределена случайна величина.
$A \in Bin\left(n = 3, p_A = \dfrac{1}{2}\right)$. Вероятността и на трите зара да се падне нечетен брой точки е равна на $\mathbb{P}(A = 3) = \binom{3}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-3} = \dfrac{1}{8}$.

Нека дефинираме още $X = \{$брой паднали се само нечетни цифри при n хвърляния на 3 зара$\}$. В нашия експеримент имаме, че $n = 5$.

Тъй като случайната величина X брой успехите на бернулиеви събития с вероятност за успех $p_X = \dfrac{1}{8}$, то $X \in Bin\left(n = 5, p_X = \dfrac{1}{8}\right)$.

В задачата се търси:

$$\mathbb{P}_{\substack{2k \le 5 \\ k \in \mathbb{N}_0}}(X = 2k) = \mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=4) =$$

$$= \binom{5}{0} p_X^0 (1-p_X)^5 + \binom{5}{2} p_X^2 (1-p_X)^3 + \binom{5}{4} p_X^4 (1-p_X)^1 =$$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^5 + \frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^3 + \frac{5!}{4!1!}\left(\frac{1}{8}\right)^4\left(\frac{7}{8}\right)^1 =$$

$$= \left(\frac{7}{8}\right)^5 + 10\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{8}\right)^4 \frac{7}{8} =$$

$$= \frac{7^5 + 10 \times 7^3 + 5 \times 7}{8^5} = \frac{16807 + 3430 + 35}{32768} =$$

$$= \frac{20272}{32768} = 0.61865234375 \approx 0.618$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \text{ където}$$

$$n = 5,\ p := p_X = \frac{1}{8},\ q := q_X = 1 - p_X = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Ще го смятаме в общия случай:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k} \times \frac{n}{\cancel{k}} \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \overset{\substack{m := n-1 \\ j := k-1}}{=} np \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} p^j q^{m-j} =$$

$$= np(p+q)^m = np$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}X = np = 5 \times 18 = \frac{5}{8} = 0.625. \qquad \square$$

Задача 2. Нека $n \geq 2$ е естествено число. Дадени са n независими събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Да се докаже, че събитията $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_n}$ също са независими.

<u>Доказателство</u>:

Да вземем $n = 2$ и да проверим верността на Лемата от условието на задачата за две независими събития A_1 и A_2.

От дефиницията за независимост имаме, че $\mathbb{P}(A_1A_2) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2)$, където $A_1A_2 := A_1 \cap A_2$ за краткост.

Сега, A_2 и $\overline{A_2}$ ни дават тривиалната пълна група от събития ($A_2 \cap \overline{A_2} = \emptyset$ и $A_2 \cup \overline{A_2} = \Omega$). Следователно, от формулата за пълната вероятност имаме, че: $\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1A_2) + \mathbb{P}(A_1\overline{A_2})$.

Тогава,
$$\mathbb{P}(A_1\overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1A_2) = \mathbb{P}(A_1) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}) = \mathbb{P}(A_1)\underbrace{\big(1 - \mathbb{P}(A_2)\big)}_{\mathbb{P}(\overline{A_2})} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(\overline{A_2}),$$
което по дефиниция означава, че A_1 и $\overline{A_2}$ са независими събития.

Дуално, ако разбием Ω на A_1 и $\overline{A_1}$ и отново приложим формулата за пълната вероятност, ще получим: $\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2A_1) + \mathbb{P}(A_2\overline{A_1}) \Rightarrow$
$$\mathbb{P}(\overline{A_1}A_2) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1A_2) = \mathbb{P}(A_2) - \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_2)\big(1 - \mathbb{P}(A_1)\big) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(\overline{A_1}),$$
което отново по дефиниция показва, че и събитията $\overline{A_1}$ и A_2 също са независими.

Остана да докажем, че $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ също са независими събития.

За $\mathbb{P}(\overline{A_1}\overline{A_2})$ може да използваме същата техника както до сега.

$\mathbb{P}(\overline{A_1}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}A_2) + \mathbb{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) - \mathbb{P}(\overline{A_1}A_2)$, но ние вече сме доказали, че $\overline{A_1}$ и A_2 са независими събития, откъдето следва, че $\mathbb{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1}) - \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2}) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\big(1 - \mathbb{P}(A_2)\big) = \mathbb{P}(\overline{A_1})\mathbb{P}(\overline{A_2})$.

Този резултат ще ни послужи за база на пълната математическа индукция (пълна, защото използва всички резултати преди нея, а не само предходния). Правим хипотезата, че Лемата е изпълнена за някое $n = k \geq 2$. Ще докажем, че е изпълнена и за $n = k + 1$.

Индукционна стъпка (индукционен преход):

От индукционната хипотезата следва, че $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_k^*$ са независими събития и искаме да докежем, че и $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_k^*, A_{k+1}^*$ са независими, като знаем, че $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ са независими. (A_j^* е някое от събитията: $A_j, \overline{A_j}$)

<u>Твърдение</u>: Двете събития $A_1 A_2 \ldots A_k = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ и A_{k+1} са независими $\overset{\text{т.с.т.к}}{\Leftrightarrow}$ $A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}$ са независими.

Това е така, защото твърденията от двете страни са еквивалентни на $\mathbb{P}(A_1 A_2 \ldots A_k)\mathbb{P}(A_{k+1})$ (тъй като по дефиниция $\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_k)\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}\Big(\big(\cap_{i=1}^{k} A_i\big) \cap A_{k+1}\Big)$.

Отново прилагаме аналогична техника, както в индукционната база – разбиваме по новото събитие:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}_{} \cap A_{k+1}\right) + \mathbb{P}\left(\underbrace{\bigcap_{i=1}^{k} A_i}_{} \cap \overline{A}_{k+1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap \overline{A_{k+1}}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i \cap A_{k+1}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) - \underbrace{\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\mathbb{P}\big(A_{k+1}\big)}_{\substack{\text{тъй като } A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_k,\, A_{k+1} \\ \text{са незавивими по условие}}} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\Big(1 - \mathbb{P}\big(A_{k+1}\big)\Big) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)\left(\overline{A_{k+1}}\right)$$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} A_i$ и $\overline{A_{k+1}}$ са независими $\Rightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k, \overline{A_{k+1}}$ са независими.

Аналогично, ако означим $\bigcap_{i=1}^{k} A_i = B$ за улеснение, то ще получим, че

$\mathbb{P}(A_{k+1}) = \mathbb{P}(BA_{k+1}) + \mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1})$ или

$\mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1}) - \mathbb{P}(BA_{k+1}) = \mathbb{P}(A_{k+1})\big(1 - \mathbb{P}(B)\big) = \mathbb{P}(A_{k+1})\mathbb{P}(\overline{B})$

$\Rightarrow A_{k+1}$ и $\overline{B}$ са независими.

Остана само да докажем, че и събитията $\overline{B}$ и $\overline{A_{k+1}}$ са независими:

$\mathbb{P}(\overline{B}\,\overline{A_{k+1}}) = \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B}A_{k+1}) = \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(A_{k+1}) =$
$= \mathbb{P}(\overline{B})\big(1 - \mathbb{P}(A_{k+1})\big) = \mathbb{P}(\overline{B})\mathbb{P}(\overline{A_{k+1}})$, което искахме да докажем.

Очевидно резултата, който искахме да докажем в задача 2 е частен случай на доказаната Лема. $\square$

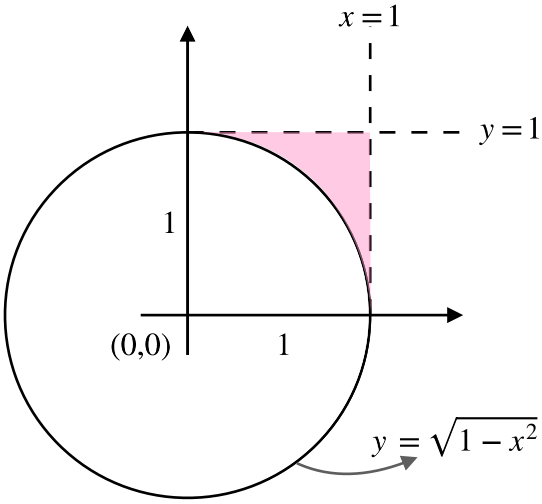
Задача 3. По случаен начин се избират две числа в интервала $[0,1]$. Каква е вероятността сумата от квадратите им да бъде по-голяма от 1?

<u>Решение</u>:

Нека с x и y бележим двете случайно избрани числа. В задачата се търси:

$$\mathbb{P}(\{x^2+y^2>1\}\,|\,\{0\le x,y,\le 1\}) = \frac{\mathbb{P}(\{x^2+y^2>1\}\cap\{0\le x,y,\le 1\})}{\mathbb{P}(\{0\le x,y\le 1\})} =$$
$$= \frac{\mu(\{x^2+y^2>1\}\cap\{0\le x,y\le 1\})}{\mu(\{0\le x,y\le 1\})} = \mu(\{x^2+y^2>1\}\cap\{0\le x,y\le 1\}) =$$
$$= M.$$

$x^2+y^2=1$ е уравнение на окръжност с радиус 1 и център точката $(0,0)$. А пък другите две ограничения отсичат от $O\overrightarrow{xy}$ квадрат със страна 1.



Вероятността, която търсим се свежда до геометрична вероятност и е равна на лицето (мярката) на розовата част от чертежа по-горе.

Лицето на тази част може да пресметнем по два начина:

I$^{\text{-ви}}$ н/н: (Чрез съображения и наблюдения по чертежа).

Съобразяваме, че лицето на розовата част е равно на лицето на квадрата заключен между положителните посоки на абсцисата и

ординатата минус $\dfrac{1}{4}$ от лицето на окръжността. Следователно
$M = 1 - \dfrac{\pi r^2}{4} = 1 - \dfrac{\pi}{4} \approx 0.2146018366.$

II$^{\text{-ри}}$ н/н: Чрез груба сила и директно интегриране без мислене (универсален начин):

$$M = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) \mathrm{d}\, x =$$

$$= x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}\, x \overset{\text{полагания}}{=} \begin{cases} x = \sin(u) \\ \mathrm{d}\, x = \cos(u) \mathrm{d}\, u \\ x \in [0,1] \to u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$= 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\sqrt{1 - \sin^2(u)}\, \mathrm{d}\, u = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2u) + 1}{2}\, \mathrm{d}\, u =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2u) \mathrm{d}\, 2u - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\, u =$$

$$= 1 - \frac{1}{4}\sin(2u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0.2146018366.$$

$\square$

Задача 4. На състезание участват 25 отбора: 8 отбора в категория джипове, 10 при камиони и 7 при мотоциклети. Джиповете завършват състезанието с вероятност 0.9, камионите с 0.7, а моторите с вероятност 0.6. След състезанието на случаен принцип се избират три отбора , за провеждане на технически контрол. Известно е че един от избраните три отбора е завършил състезанието, а другите два не. Каква е вероятността избраните три отбора да са от различни категории?

<u>Решение</u>:

Означаваме следните събития:

$\mathscr{D} = \{$случайно избран отбор е в категория „джипове"$\}$
$\mathscr{K} = \{$случайно избран отбор е в категория „камиони"$\}$
$\mathscr{M} = \{$случайно избран отбор е в категория „мотоциклети"$\}$

Тъй като $\mathscr{D} \cap \mathscr{K} = \mathscr{K} \cap \mathscr{M} = \mathscr{M} \cap \mathscr{D} = \emptyset$ и $\mathscr{D} \cup \mathscr{K} \cup \mathscr{M} = \Omega$, то $\mathscr{D}$, $\mathscr{K}$ и $\mathscr{M}$ са разбиване на Ω (пълна група от събития). Имаме, че

$$\underbrace{\mathbb{P}(\mathscr{D}) = \frac{8}{25}; \mathbb{P}(\mathscr{K}) = \frac{10}{25} \text{ и } \mathbb{P}(\mathscr{M}) = \frac{7}{25}.}_{\text{сумират се до 1, тъй като са разбиване}}$$

Нека Φ е събитието $\{$отбор финишира$\}$. От условието ще паднат следните условни вероятности:

$\mathbb{P}(\Phi \,|\, \mathscr{D}) = 0.9$, $\mathbb{P}(\Phi \,|\, \mathscr{K}) = 0.7$ и $\mathbb{P}(\Phi \,|\, \mathscr{M}) = 0.6$.

Нека A е събитието $\{$**точно 1** от отборите, на които се провежда технически преглед е **финиширал**$\}$

От формулата за пълната вероятност ще имаме, че $\mathbb{P}(A) = \sum_{k \in I} \mathbb{P}(A \,|\, H_k)\mathbb{P}(H_k)$, където $I = \{$множеството от всички възможни сценарии за това с какво са участвали 3 отбора$\}$

Питаме се кое е това множество I? Ще го изброим с груба сила, но все пак ще очакваме, то да е от кардиналност $|I| = 10$.

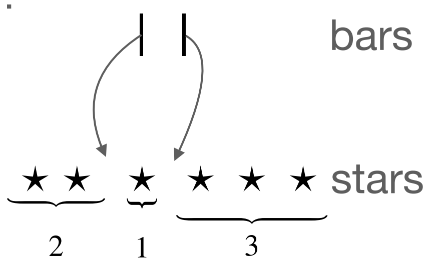
Ще очакваме тази кардиналност за множеството I, тъй като дефинираме $I = \Big\{H_{ijk}$, където $H_{ijk} = \{i \times \mathscr{D} + j \times K + k \times \mathscr{M}$ за $i + j + k = 3$ и $0 \leq u, j, k \leq 3\}\Big\}$.

Как пресмятаме кардиналността без грубо изброяване? Ами много лесно:

$|\,I\,|$ е равно на броя на решенията на уравнението $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ в цели неотрицателни числа. Последното е равно на броя на решенията на уравнението $y_1 + y_2 + y_3 = 6$ в цели положителни числа (положихме $x_i = y_i + 1$ за да премахнем възможните нули от събираемите). Сега прилагайки трика – „stars and bars“, получаваме, че

$$|\,I\,| = \binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10.$$

Пояснение на „stars and bars“:



Така поставените "bars" между "stars", дават решението: $2 + 1 + 3 = y_1 + y_2 + y_3 = 6$. Може да поставим 2 "bars" измежду 6 "stars" като изберем двете позиции измежду пет (без най-отпред и най-отзад) възможни.

В крайна сметка, с така въведената нотация, търсим:

$\{1 \times \mathscr{D} + 1 \times \mathscr{K} + 1 \times \mathscr{M}\}$

$\mathbb{P}(H_{111}\,|\,A)$

точно един отбор е завршил състезанието

Това е:

$$\mathbb{P}(H_{111}\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(H_{111} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\,|\,H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\,|\,H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\sum_{k\in I}\mathbb{P}(A\,|\,H_k)\mathbb{P}(H_k)}$$

имаме го разбито

Всъщност, ние просто доказахме формулата на Бейс, чрез формулата за усовна и пълна вероятности.

Грубо изброяване и пресмятане:

$$\left(\begin{array}{c} \mathbb{P}(H_{ijk}) \\ i,j,k \in \mathbb{N}_0 \\ i+j+k=3 \end{array} = \frac{\binom{8}{i}\binom{10}{j}\binom{7}{k}}{\binom{25}{3}} \right):$$

$$\mathbb{P}(H_{012}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{10}{1}\binom{7}{2}}{\binom{25}{3}} = \frac{350}{2300}; \mathbb{P}(H_{003}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{10}{0}\binom{7}{3}}{\binom{25}{3}} = \frac{35}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{030}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{10}{3}\binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{120}{2300}; \mathbb{P}(H_{021}) = \frac{\binom{8}{0}\binom{10}{2}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{315}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{120}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{10}{2}\binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{320}{2300}; \mathbb{P}(H_{102}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{10}{0}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{111}) = \frac{\binom{8}{1}\binom{10}{1}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{560}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{201}) = \frac{\binom{8}{2}\binom{10}{0}\binom{7}{1}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300}; \mathbb{P}(H_{210}) = \frac{\binom{8}{2}\binom{10}{1}\binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{280}{2300};$$

$$\mathbb{P}(H_{300}) = \frac{\binom{8}{3}\binom{10}{0}\binom{7}{0}}{\binom{25}{3}} = \frac{56}{2300}.$$

Припомняме означенията:

$\mathscr{D}$ = {случайно избран отбор е в категория „джипове“} $\to 8; 0.9$

$\mathscr{K}$ = {случайно избран отбор е в категория „камиони“} $\to 10; 0.7$

$\mathscr{M}$ = {случайно избран отбор е в категория „мотоциклети“} $\to 7; 0.6$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{012}) = \mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K})\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M})\big)^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) =$$
$$= 0.7 \times 0.4^2 + 0.3 \times 2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.112 + 0.144 = 0.256$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{003}) = \binom{3}{2}\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M}) = 3 \times 0.4^2 \times 0.6 = 0.288$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{030}) = \binom{3}{2}\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K}) = 3 \times 0.3^2 \times 0.7 = 0.189$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{021}) = \binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) + \big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M}) =$$
$$= 2 \times 0.7 \times 0.3 \times 0.4 + 0.3^2 \times 0.6 = 0.168 + 0.054 = 0.222$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{120}) = \mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D})\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\big)^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K}) =$$
$$= 0.9 \times 0.3^2 + 0.1 \times 2 \times 0.7 \times 0.3 = 0.081 + 0.042 = 0.123$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{102}) = \mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D})\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M})\big)^2 + \mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) =$$
$$= 0.9 \times 0.4^2 + 0.1 \times 2 \times 0.6 \times 0.4 = 0.144 + 0.048 = 0.192$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{111}) = \mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M}) + \mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) +$$
$$+ \mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) =$$
$$= 0.1 \times 0.3 \times 0.6 + 0.1 \times 0.7 \times 0.4 + 0.9 \times 0.3 \times 0.4 =$$
$$= 0.018 + 0.028 + 0.108 = 0.154$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{201}) = \big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{M}) + \binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{M}) =$$
$$= 0.1^2 \times 0.6 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.4 = 0.006 + 0.108 = 0.078$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{210}) = \big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{K}) + \binom{2}{1}\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{K}) =$$
$$= 0.1^2 \times 0.7 + 2 \times 0.9 \times 0.1 \times 0.3 = 0.007 + 0.054 = 0.061$$

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_{300}) = \binom{3}{2}\big(\mathbb{P}(\overline{\Phi}\,|\,\mathscr{D})\big)^2\mathbb{P}(\Phi\,|\,\mathscr{D}) = 3 \times 0.1^2 \times 0.9 = 0.027$$

Сега вече имаме всичко необходимо пресметнато. Следователно,

$$\mathbb{P}(H_{111} \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_{111})\mathbb{P}(H_{111})}{\sum_{k \in I} \mathbb{P}(A \mid H_k)\mathbb{P}(H_k)} =$$

$$= \frac{0.154 \times \frac{560}{2300}}{\frac{1}{2300} \times \left(\underbrace{0.256 \times 350 + 0.288 \times 35 + 0.189 \times 120 + 0.222 \times 315} + \underbrace{0.123 \times 320 + 0.192 \times 56 + 0.154 \times 560} + \underbrace{0.078 \times 56 + 0.061 \times 280} + \underbrace{0.027 \times 56} \right)} =$$

$$= \frac{1.54 \times 56}{\underbrace{2.56 \times 35 + 0.288 \times 35 + 1.89 \times 12 + 0.222 \times 315} + \underbrace{1.23 \times 32 + 0.192 \times 56 + 1.54 \times 56} + \underbrace{0.078 \times 56 + 0.61 \times 28} + \underbrace{0.027 \times 56}} =$$

$$= \frac{86.24}{\underbrace{89.6 + 10.08 + 22.68 + 69.93} + \underbrace{39.36 + 10.752 + 86.24} + \underbrace{4.368 + 17.08} + \underbrace{1.512}} =$$

$$= \frac{86.24}{192.29 + 136.352 + 21.448 + 1.512} = \frac{86.24}{351.602} \approx 0.24527733061 \approx 0.245$$