Второ контролно по статистика и емпирични методи
Софтуерно инженерство

Задача 1. Хвърлят се два червени и два сини зара. Нека X е броя на падналите се четни числа върху червените зарове, а Y е броя на падналите се петици върху четирите зара. Да се определи:

а) съвместното разпределение на X и Y;
б) разпределението на $Z = \min\{X, Y\}$ и средната стойност $\mathbb{E}(Z \mid Y = 2)$.

Решение:

$X = \{$брой четни числа върху червените зарове$\}$, $\Omega_X \in \{0,1,2\}$
$Y = \{$брой петици върху всички зарове$\}$, $\Omega_Y \in \{0,1,2,3,4\}$

а) съвместно разпределение:

Означаваме $\mathbb{P}(X = k \cup Y = l) = \mathbb{P}(X = k, Y = l) = p_{kl}$, за $k \in \{0,1,2\}$ и $l \in \{0,1,2,3,4\}$. Размерността на таблицата със съвместното разпределение ще е $k \times l = |\Omega_X| \times |\Omega_Y| = 3 \times 5 = 15$ клетки за попълване.

Нека с C_{kl} означаваме множеството, чиито елементи отговарят на условията наложени от p_{kl} (елементите, които са благоприятни изходи). Тогава ще имаме, че:

$$p_{kl} = \frac{\sum_{C_{k,l} \in \text{Good}} \prod_{A \in C_{kl}} |A|}{|\Omega|^4}.$$

Въвеждаме и неформалното означение:

$$\{\{A\}, \underbrace{\{B\}, \{C\}}_{\times 2}, \{D\}, \dots\} = \Big\{ \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \dots\}, \{\{A\}, \{C\}, \{B\}, \{D\}, \dots\} \Big\}$$

$C_{00} = \Big\{ {\color{red}\{1,3\}}, {\color{red}\{1,3\}}, {\color{blue}\{1,2,3,4,6\}}, {\color{blue}\{1,2,3,4,6\}} \Big\}$, следователно по формулата по-горе

ще имаме, че $p_{00} = \dfrac{2 \times 2 \times 5 \times 5}{6^4} = \dfrac{2^2 \times 5^2}{6^4} = \dfrac{100}{6^4}$

(т.е. имаме нула броя паднали се четни числа от червените зарове и нула броя паднали се петици общо върху всички зарове)

$$C_{01} = \Bigg\{ \Big\{ \underbrace{{\color{red}\{1,3\}}, {\color{red}\{5\}}}_{\times 2}, {\color{blue}\{1,2,3,4,6\}}, {\color{blue}\{1,2,3,4,6\}} \Big\}, \Big\{ {\color{red}\{1,3\}}, {\color{red}\{1,3\}}, \underbrace{{\color{blue}\{5\}}, {\color{blue}\{1,2,3,4,6\}}}_{\times 2} \Big\} \Bigg\},$$

$$p_{01} = \frac{2 \times 1 \times \mathbf{2} \times 5 \times 5 + 2 \times 2 \times 1 \times 5 \times \mathbf{2}}{6^4} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{6^4} = \frac{140}{6^4}$$

$$C_{02} = \Big\{ \{\underbrace{\{1,3\},\{5\}}_{\times 2},\underbrace{\{1,2,3,4,6\},\{5\}}_{\times 2}\},\{\{5\},\{5\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}\},$$
$$\{\{1,3\},\{1,3\},\{5\},\{5\}\} \Big\},$$

$$p_{02} = \frac{2 \times 1 \times \mathbf{2} \times 5 \times \mathbf{2} + 1 \times 1 \times 5 \times 5 + 2 \times 2 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2^2 \times 5^2 + 5^2 + 2^2}{6^4} = \frac{3 \times 23}{6^4} = \frac{69}{6^4}$$

$$C_{03} = \Big\{ \{\underbrace{\{1,3\},\{5\}}_{\times 2},\{5\},\{5\}\},\underbrace{\{\{5\},\{5\},\{5\},\{1,2,3,4,6\}\}}_{\times 2} \Big\},$$

$$p_{03} = \frac{2 \times 1 \times \mathbf{2} \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 5 \times \mathbf{2}}{6^4} = \frac{2 \times 7}{6^4} = \frac{14}{6^4}$$

$$C_{04} = \{\{5\},\{5\},\{5\},\{5\}\},\ p_{04} = \frac{1}{6^4}$$

$$C_{10} = \{\underbrace{\{2,4,6\},\{1,3\}}_{\times 2},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}\},$$

$$p_{10} = \frac{3 \times 2 \times \mathbf{2} \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{6^4} = \frac{300}{6^4}$$

$$C_{11} = \Big\{ \{\underbrace{\{2,4,6\},\{5\}}_{\times 2},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}\},\{\underbrace{\{2,4,6\},\{1,3\}}_{\times 2},\underbrace{\{5\},\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2}\} \Big\}$$

$$p_{11} = \frac{3 \times 1 \times \mathbf{2} \times 5 \times 5 + 3 \times 2 \times \mathbf{2} \times 1 \times 5 \times \mathbf{2}}{6^4} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{6^4} = \frac{270}{6^4}$$

$$C_{12} = \Big\{ \{\underbrace{\{2,4,6\},\{5\}}_{\times 2},\underbrace{\{5\},\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2}\},\{\underbrace{\{2,4,6\},\{1,3\}}_{\times 2},\{5\},\{5\}\} \Big\}$$

$$p_{12} = \frac{3 \times 1 \times \mathbf{2} \times 1 \times 5 \times \mathbf{2} + 3 \times 2 \times \mathbf{2} \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2^3 \times 3^2}{6^4} = \frac{72}{6^4}$$

$$C_{13} = \{\underbrace{\{2,4,6\},\{5\}}_{\times 2},\{5\},\{5\}\},\ p_{13} = \frac{3 \times 1 \times \mathbf{2} \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2 \times 3}{6^4} = \frac{6}{6^4}$$

$C_{14} = \varnothing$, $p_{14} = 0$ (няма как да се случи да се падне едно четно от червените зарчета и в същото време всички зарчета да са петици)

$C_{20} = \{\{2,4,6\},\{2,4,6\},\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}\}$,

$$p_{20} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{3^2 \times 5^2}{6^4} = \frac{225}{6^4}$$

$C_{21} = \{\{2,4,6\},\{2,4,6\},\underbrace{\{5\},\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2}\}$,

$$p_{21} = \frac{3 \times 3 \times 1 \times 5 \times \mathbf{2}}{6^4} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{6^4} = \frac{90}{6^4}$$

$C_{22} = \{\{2,4,6\},\{2,4,6\},\{5\},\{5\}\}$, $p_{22} = \dfrac{3 \times 3 \times 1 \times 1}{6^4} = \dfrac{3^2}{6^4} = \dfrac{9}{6^4}$

$C_{23} = C_{24} = \varnothing \Rightarrow p_{23} = p_{24} = 0$

Проверка:

$$100 + 140 + 69 + 14 + 1 + 300 + 270 + 72 + 6 + 225 + 90 + 9 =$$
$$= 309 + 315 + 348 + 324 = 624 + 672 = 1296 = 6^4$$

Таблица на съвместното разпределение:

$Y \setminus X$	**0**	**1**	**2**	$\mathbb{P}(Y = j)$
0	$\frac{100}{6^4}$	$\frac{300}{6^4}$	$\frac{225}{6^4}$	$\frac{625}{6^4}$
1	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{270}{6^4}$	$\frac{90}{6^4}$	$\frac{500}{6^4}$
2	$\frac{69}{6^4}$	$\frac{72}{6^4}$	$\frac{9}{6^4}$	$\frac{150}{6^4}$
3	$\frac{14}{6^4}$	$\frac{6}{6^4}$	0	$\frac{20}{6^4}$
4	$\frac{1}{6^4}$	0	0	$\frac{1}{6^4}$
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{324}{6^4}$	$\frac{648}{6^4}$	$\frac{324}{6^4}$	$\frac{1296}{6^4} = \mathbf{1}$

б) разпределението на $Z = \min\{X, Y\}$ и средната стойност $\mathbb{E}(Z \mid Y = 2)$.

$Z = \Omega_X \cap \Omega_Y = \{0,1,2\}$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 0) &= \sum_{i=0}^{4} p_{0i} + \sum_{i=1}^{2} p_{i0} = \\
&= p_{00} + p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} + p_{10} + p_{20} = \\
&= \frac{100 + 140 + 69 + 14 + 1 + 300 + 225}{6^4} = \\
&= \frac{849}{6^4} \approx 0.655
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 1) &= p_{00} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{21} = \\
&= \frac{270 + 72 + 6 + 0 + 90}{6^4} = \\
&= \frac{438}{6^4} \approx 0.338
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 2) &= p_{22} + p_{23} + p_{24} = \\
&= \frac{9 + 0 + 0}{6^4} = \\
&= \frac{438}{6^4} \approx 0.07
\end{aligned}
$$

Проверка: $\dfrac{\sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(Z = i)}{6^4} = \dfrac{849 + 438 + 9}{1296} = \dfrac{1296}{1296} = 1.$

Следователно Z има следното разпределение:

Z	**0**	**1**	**2**
$\mathbb{P}$	$\frac{849}{1296}$	$\frac{438}{1296}$	$\frac{9}{1296}$

Остава да намерим очакването на случайната величина Z при наличието на априорната информация, че $Y = 2$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z \,|\, Y = 2) &= \sum_{i=0}^{2} i \times \mathbb{P}(Z = i \,|\, Y = 2) \\
&= 0 \times \frac{p_{02}}{\mathbb{P}(Y = 2)} + 1 \times \frac{p_{12}}{\mathbb{P}(Y = 2)} + 2 \times \frac{p_{22}}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \\
&= 0 \times \frac{69}{\cancel{6^4}} \times \frac{\cancel{6^4}}{150} + 1 \times \frac{72}{\cancel{6^4}} \times \frac{\cancel{6^4}}{150} + 2 \times \frac{9}{\cancel{6^4}} \times \frac{\cancel{6^4}}{150} = \\
&= \frac{0 \times 69 + 1 \times 72 + 2 \times 9}{150} = \frac{72 + 18}{150} = \frac{3}{5} = 0.6
\end{aligned}
$$

□

Задача 2. Случайна величина $Z = (X, Y)$ има плътност

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x+y)^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се намерят:

а) константата c;

б) плътността на сумата $X + Y$ и средната стойност $\mathbb{E}\left(Y \,|\, X = \frac{1}{2}\right)$

Решение:

За да е дефинирана добре плътността е необходимо

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} c(x+y)^2 \mathrm{d}\,\mathbb{R}^2 = \int_0^1 \int_x^1 c(x+y)^2 \mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= c\int_0^1 \int_x^1 x^2 + 2xy + y^2\,\mathrm{d}\,y\,\mathrm{d}\,x = c\int_0^1 x^2 y + \frac{\cancel{2}xy^2}{\cancel{2}} + \frac{y^3}{3}\Bigg|_{y=x}^{y=1} \mathrm{d}\,x =$$

$$= c\int_0^1 x^2 + x + \frac{1}{3} - x^3 - x^3 - \frac{x^3}{3}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= c\int_0^1 \frac{1}{3} + x + x^2 - \frac{7}{3}x^3\,\mathrm{d}\,x = c\left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{7x^4}{12}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= c\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{12}\right) = c\left(\frac{4+4+6-7}{12}\right) =$$

$$= \frac{7}{12}c \Rightarrow c = \frac{12}{7}.$$

Естествено, може и да обърнем последователността на интегриране:

$$1 = \iint_{\mathbb{R}} = c(x+y)^2 \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y = c\int_0^1 \left(\int_0^y (x+y)^2 \mathrm{d}\,x\right) \mathrm{d}\,y =$$

$$= c\int_0^1 \left(\int_0^y \left(x^2 + 2xy + y^2\right) \mathrm{d}\,x\right) \mathrm{d}\,y =$$

$$= c\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{\cancel{2}x^2 y}{\cancel{2}} + y^2 x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=y} \mathrm{d}\,y = c\int_0^1 \frac{y^3}{3} + y^3 + y^3\,\mathrm{d}\,y =$$

$$= c\int_0^1 \frac{7}{3}y^3\,\mathrm{d}\,y = \frac{7}{3}c\int_0^1 y^3\,\mathrm{d}\,y = \frac{7}{3}c\,\frac{y^4}{4}\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{7}{3}c\,\frac{1}{4} = \frac{7}{12}c \Rightarrow c = \frac{12}{7}.$$

И в двата случая получаваме един и същ резултат за константата c.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{7}(x+y)^2, & 0<x<y<1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) Да се намери $f_{X+Y}(x,y)$ и средната стойност $\mathbb{E}\left(Y \,|\, X = \dfrac{1}{2}\right)$

Полагаме $\begin{cases} Z_1 = X+Y \\ Z_2 = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z_2 \\ Y = Z_1 - X = Z_1 - Z_2 \end{cases}$

$$\text{abs}\left(|J|\right) = \text{abs}\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X(z_1,z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial X(z_1,z_2)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial Y(z_1,z_2)}{\partial z_2} \end{vmatrix}\right) = \text{abs}\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = \text{abs}(0-1) = 1.$$

Съгласно теорема 1.7. , нека (X,Y) е двумерна непрекъсната случайна величина с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, f_{X,Y}(x,y) > 0\}$. Ако изображението $\psi : D \longrightarrow \psi(D),\ (x,y) \longmapsto \big(u(x,y),\, v(x,y)\big)$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U,V) = \big(u \circ (X,Y),\, v \circ (X,Y)\big)$ е непрекъсната с плътност:

$$f_{U,V}(u,v) = \begin{cases} f_{X,Y}\big(x(u,v),\, y(u,v)\big)\,|J_{\psi^{-1}}(u,v)|, & (u,v) \in \psi(D) \\ 0, & (u,v) \notin \psi(D) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{Z_1,Z_2}(z_1,z_2) = f_{X,Y}(z_2, z_1 - z_2)\text{asb}\left(|J|\right) = \frac{12}{7}(z_2 + z_1 - z_2)^2 \times 1 = \frac{12}{7}z_1^2.$$

Сега, да намерим $f_{Z_1}(z_1) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{12}{7} z_1^2 \,\mathrm{d}\, z_2$, където, тъй като $f_{X,Y}(u,v) \neq 0$ за $0 < u < v < 1$, то от $f_{X,Y}(z_2, z_1 - z_2)$ следва, че трябва да е изпълнено:

$0 < z_2 < z_1 - z_2 < 1.$

От $\begin{cases} Z_1 = X+Y \\ Z_2 = X \end{cases}$ и $x, y \in (0,1)$, като $0 < x < y < 1$ следва, че $\begin{cases} z_1 \in (0,2) \\ z_2 \in (0,1) \end{cases}$.

Знаем, че $z_2 < z_1 - z_2 < 1 \Rightarrow 2z_2 < z_1 < 1 + z_2 \Rightarrow 2z_2 < z_1$, т.е. $z_2 < \dfrac{z_1}{2}$ и $z_1 < 1 + z_2$, т.е. $z_2 > z_1 - 1$.

Следователно, $\begin{cases} z_2 < \frac{z_1}{2} \\ z_2 > z_1 - 1 \\ z_2 \in (0,1) \\ z_1 \in (0,2) \end{cases} \Rightarrow$ ако $z_1 \in [1,2)$, то $z_2 < \dfrac{z_1}{2}$ и също така $z_2 > z_1 - 1$,

т.е. $z_1 - 1 < z_2 < \dfrac{z_1}{2}$.

За $z_1 \in (0,1):\ z_2 < \dfrac{z_1}{2}$, но от $\begin{cases} z_2 > z_1 - 1 \\ z_1 \in (0,1) \\ z_2 \in (0,1) \end{cases} \Rightarrow z_2 > 0 \Rightarrow 0 < z_2 < \dfrac{z_1}{2}$.

Сега вече знаем границите на съответните интеграли и може да преминем към пресмятането им.

I сл. $z_1 \in [1,2)$:

$$f_{Z_1}(z_1) = \int_{z_1-1}^{\frac{z_1}{2}} \frac{12}{7} z_1^2 \,\mathrm{d}\, z_2 = \frac{12}{7} z_1^2 z_2 \Bigg|_{z_2=z_1-1}^{z_2=\frac{z_1}{2}} =$$

$$= \frac{12}{7} z_1^2 \left(\frac{z_1}{2} - z_1 + 1 \right) = \frac{12}{7} z_1^2 \left(1 - \frac{z_1}{2} \right)$$

II сл. $z_1 \in (0,1)$:

$$f_{Z_1}(z_1) = \int_{0}^{\frac{z_1}{2}} \frac{12}{7} z_1^2 \,\mathrm{d}\, z_2 = \frac{12}{7} z_1^2 z_2 \Bigg|_{z_2=0}^{z_2=\frac{z_1}{2}} =$$

$$= \frac{12}{7} z_1^2 \frac{z_1}{2} = \frac{12}{7} \frac{z^3}{2} = \frac{6z_1^3}{7}$$

Получихме, че:

$$f_{Z_1}(t) = f_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ \frac{6t^3}{7}, & \text{за } t \in (0,1) \\ \frac{12}{7} t^2 \left(1 - \frac{t}{2}\right), & \text{за } t \in [1,2) \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

Остана да намерим средната стойност $\mathbb{E}\left[Y \,|\, X = \frac{1}{2}\right]$.

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,v) \mathrm{d}\,v = \int_x^1 \frac{12}{7}(x+v)^2 \mathrm{d}\,v = \frac{12}{7}\int_x^1 x^2 + 2xv + v^2 \,\mathrm{d}\,v =$$

$$= \frac{12}{7}\left(x^2 v + x v^2 + \frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_x^1 = \frac{12}{7}\left(x^2 + x + \frac{1}{3} - x^3 - x^3 - \frac{x^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{12}{7}\left(x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x^3\right) = \frac{4}{7} + \frac{12}{7}x + \frac{12}{7}x^2 - 4x^3$$

Следователно $f_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{7} = \frac{19}{14}$.

$$\mathbb{E}\left[Y \,|\, X = \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{f_X\left(\frac{1}{2}\right)}\int_{\mathbb{R}} y \frac{12}{7}\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 \mathrm{d}\,y = \frac{14}{19}\int_{\frac{1}{2}}^1 y \frac{12}{7}\left(\frac{1}{2} + y\right)^2 \mathrm{d}\,y$$

$$= \frac{24}{19}\int_{\frac{1}{2}}^1 y\left(\frac{1}{4} + y + y^2\right)\mathrm{d}\,y = \frac{24}{19}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4}y + y^2 + y^3 \,\mathrm{d}\,y =$$

$$= \frac{24}{19}\left(\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{24}{19}\left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64}\right) =$$

$$= \frac{24}{19}\left(\frac{3+8+6-1}{24} - \frac{3}{64}\right) = \frac{24}{19}\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{64}\right) = \frac{24}{19} \times \frac{128-9}{192}$$

$$= \frac{24}{19} \times \frac{119}{192} = \frac{7 \times 17}{8 \times 19} \approx 0.7828$$

$\square$

Задача 3. Височината на студентите е нормално разпределена случайна величина с параметри $\mathcal{N}(170, 4^2)$ за момичетата и $\mathcal{N}(174, 4^2)$ за момчетата. Да се определи вероятността от двама случайно избрани студента, поне един от тях да има ръст между 160 см и 172 см. (Допълнително пояснение за задачата: $\sigma = 4$)

Решение:

Дефинираме събитията:
$M = \{$случайно избран студент е момче$\}$
$F = \{$случайно избран студент е момиче$\}$
$A = \{$от 2 случайно избрани студента, **поне един** от тях има ръст между 160 см и 172 см$\}$

Тогава,
$\overline{A} = \{$от 2 случайно избрани студента, **нито един** от тях не е с ръст между 160 см и 172 см$\}$

Дефинираме още,
$B_i = \{i$-тия студент е или под 160 см. височина или над 172 см. височина$\}$, за $i = 1,2$.

$\overline{A} = B_1 \cap B_2$.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \overset{\substack{B_1 \perp\!\!\!\perp B_2 \\ \mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2)}}{=} 1 - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) = 1 - \left[\mathbb{P}(B_1)\right]^2.$$

Тъй като избираме студентите на случаен принцип и нямаме априорна информация, то приемаме, че избираме момиче или момче с равна вероятност:
$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(F) = \dfrac{1}{2}$.

Нека X е случайна величина, отразяваща ръста на случайно избрания студент. Тогава:

$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X < 160 \cup X > 172) = \mathbb{P}(X < 160) + \mathbb{P}(X > 172)$, тук използвахме, че събитията $\{X < 160\}$ и $\{X > 172\}$ са непресичащи се.

$$\mathbb{P}(X < 160) = \mathbb{P}(X < 160 \,|\, F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(X < 160 \,|\, M)\mathbb{P}(M) = $$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X < 160 \,|\, F) + \mathbb{P}(X < 160 \,|\, M)\right)$$

По условие знаем, че ако студентът е момиче, то $X \in \mathcal{N}(170, 4^2)$, а ако е момче: $X \in \mathcal{N}(174, 4^2)$. Тогава:

$$\mathbb{P}(X < 160) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(170,4^2) < 160\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(174,4^2) < 160\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{160-170}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{160-174}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < -2.5\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < -3.5\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(-2.5) + \Phi(-3.5)\right) \approx \frac{1}{2}\left(0.0062 + 0.0001\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \times 0.0063 = 0.00315$$

$$\mathbb{P}(X > 172) = 1 - \mathbb{P}(X \le 172)$$

$$\mathbb{P}(X \le 172) = \mathbb{P}(X \le 172 \,|\, M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(X \le 172 \,|\, F)\mathbb{P}(F) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(X < 172 \,|\, M) + \mathbb{P}(X < 172 \,|\, F\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(174,4^2) < 172\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(170,4^2) < 172\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{172-174}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{172-170}{4}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < -0.5\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < 0.5\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\Phi(-0.5) + \Phi(0.5)\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi(-0.5) + 1 - \Phi(-0.5)\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \times 1 = 0.5$$

$$\mathbb{P}(X > 172) = 1 - \mathbb{P}(X \le 172) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Сега вече може да пресметнем:

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X < 160) + \mathbb{P}(X > 172) \approx 0.00315 + 0.5 = 0.50315.$$

Търсената вероятност е
$\mathbb{P}(A) = 1 - \left[\mathbb{P}(B_1)\right]^2 \approx 1 - (0.50315)^2 \approx 1 - 0.25315 = 0.74684$

$\square$

Задача 4. Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P. Правите през P, успоредни на две от страните на триъгълника, пресичат третата му страна в точките Q и R. Да се намери средната стойност на лицето на:

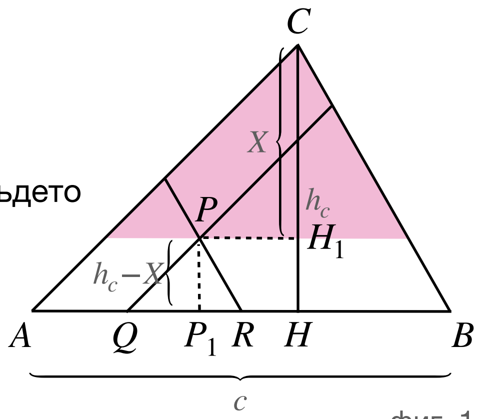
а) $\triangle PQR$;

б) шестоъгълника $QRSTVW$, където точките S, T, V и W се дефинират аналогично на точките Q и R.

Решение:

а) $PQ \parallel CA$, $PR \parallel CB$

Въвеждаме означенията: $AB = c$, $CH = h_c$ и случайната величина $X = \{$размера на $CH_1\}$, където H_1 е проекцията на точка P върху височината CH на $\triangle ABC$. По условие имаме $ch_c = 2$.



фиг. 1

Означаваме с P_1 проекцията на точка P върху страната AB на $\triangle ABC$.

Тогава ще имаме, че $PP_1 = CH - CH_1 = h_c - X$.

Тъй като $\triangle PQR \sim \triangle CAB$, то $\dfrac{PP_1}{CH} = \dfrac{QR}{AB}$. Следователно $\dfrac{h_c - X}{h_c} = \dfrac{QR}{c} \Rightarrow$

$\Rightarrow QR = \dfrac{c(h_c - X)}{h}$.

$$S_{\triangle PQR} = \frac{QR \times PP_1}{2} = \frac{\frac{c(h_c - X)}{h} \times (h_c - X)}{2} = \frac{c(h_c - X)^2}{2h_c}.$$

Необходимо е да намерим плътността на случайната величина X. Може лесно да намерим функцията и на разпределение:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \le t) = \frac{S_{\triangle}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{t}{h_c}\right)^2, \text{ но } f_X(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[F_X(t)\right] = \frac{2t}{h_c^2}\mathbb{1}_{\{t \in (0, h_c)\}}.$$

Сега вече имаме плътността на случайната величина X и лицето на $\triangle PQR$ изразено чрез две константи и същата тази случайна величина. Т.е. може да пресметнем:

$$\mathbb{E}\left[S_{\triangle PQR}\right] = \int_0^{h_c} S_{\triangle PQR}(t) \times f_X(t)\ \mathrm{d}\,t = \int_0^{h_c} \frac{c(h_c - t)^2}{2h_c} \times \frac{2t}{h_c^2}\,\mathrm{d}\,t =$$

$$= \frac{c}{h_c^3}\int_0^{h_c} th_c^2 - 2t^2h_c + t^3\,\mathrm{d}\,t = \frac{c}{h_c^3}\left(\frac{t^2h_c^2}{2} - \frac{2t^3h_c}{3} + \frac{t^4}{4}\right)\Bigg|_0^{h_c} =$$

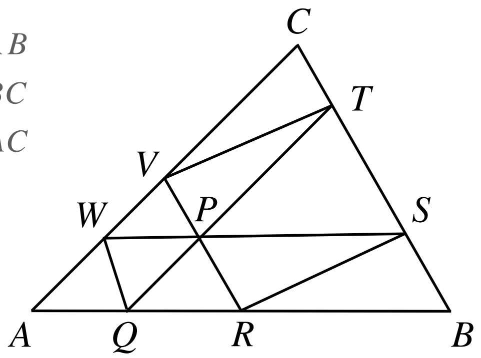
$$= \frac{c}{h_c^3} \times h_c^4\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = ch_c \times \frac{1}{12} = 2 \times \frac{1}{12} =$$

$$= \frac{1}{6}\,.$$

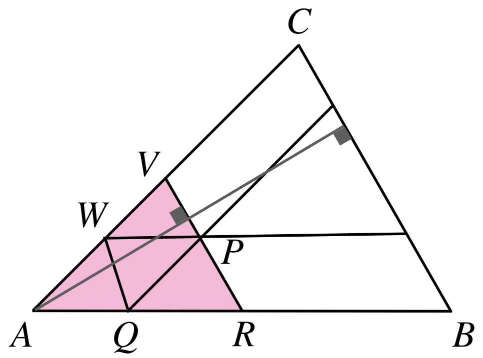
б) $WS \parallel AB$

$VR \parallel BC$

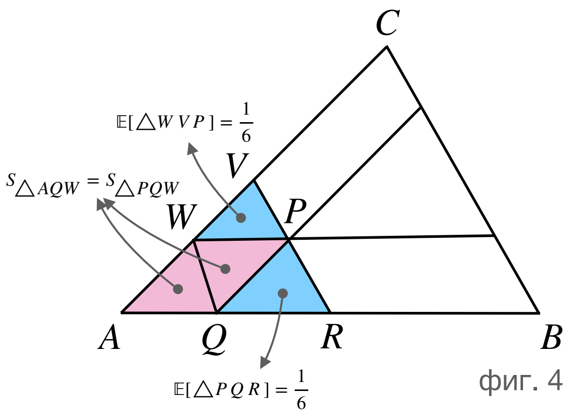
$QT \parallel AC$



фиг. 2



фиг. 3



фиг. 4

Първо разглеждаме фигура 1. Ние знаем, че очакването $\mathbb{E}$ е линеен функционал и може да заключим, че:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{QRSTVW}\right] &= \mathbb{E}\left[S_{\triangle PQR}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\triangle PST}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\triangle PVW}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\triangle PRS}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\triangle PTV}\right] + \mathbb{E}\left[S_{\triangle PWQ}\right] = \\
&= 3\mathbb{E}\left[S_{\triangle PQR}\right] + 3\mathbb{E}\left[S_{\triangle PWQ}\right] = 3 \times \frac{1}{6} + 3\mathbb{E}\left[\frac{S_{AQPW}}{2}\right] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E}\left[S_{AQPW}\right] = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV} - \left(S_{\triangle QPR} + S_{\triangle PWV}\right)\right] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV}\right] - \frac{3}{2}\mathbb{E}\left[S_{\triangle QPR}\right] - \frac{3}{2}\left[S_{\triangle PWV}\right] = \\
&= \frac{1}{2} + \mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV} = \right] - \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} = \\
&= \frac{1}{4} + \mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV}\right].
\end{aligned}
$$

Сведохме задачата от подточка б) до намиране на очакването на лицето на $\triangle ARV$, който е подобен на $\triangle ABC$.

Въвеждаме случайна величина $Y = \{$дължината на височината на $\triangle ARV$ през върха $A\}$ и означаваме височината на $\triangle ABC$ през върха A с h_a, а страната BC с a. По условие знаем, че $ah_a = 2$.

От друга страна $\triangle ARV \sim \triangle ABC \Rightarrow \dfrac{h_{\triangle ARV}}{h_{\triangle ABC}} = \dfrac{RV}{BC}, \dfrac{Y}{h_a} = \dfrac{RV}{a}$

$$
\Rightarrow RV = \frac{aY}{h_a} \Rightarrow S_{\triangle ARV} = \frac{Y \times RV}{2}, \text{ но } F_Y(t) = \left(\frac{t}{h_a}\right)^2 \Rightarrow f_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[F_Y(t)\right] = \frac{2t}{h_a^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV}\right] &= \int_0^{h_a} S_{\triangle ARV}(t) \times f_Y(t)\ \mathrm{d}\,t = \int_0^{h_a} \frac{at^2}{2h_a} \times \frac{2t}{h_a^2}\,\mathrm{d}\,t = \\
&= \frac{a}{h_a^3}\int_0^{h_a} t^3\,\mathrm{d}\,t = \frac{a}{h_a^3} \times \frac{t^4}{4}\bigg|_0^{h_a} = \frac{ah_a}{4} = \frac{2}{4} = \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathbb{E}\left[S_{QRSTVW}\right] = \frac{1}{4} + \mathbb{E}\left[S_{\triangle ARV}\right] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.
$$

$\square$