Упражнение 3 по СЕМ. Условна вероятност. Независимост

19 октомври 2020 г. / групи 4,5

Задача 1. Вероятността стрелец да улучи мишена е 2/3. Ако улучи, той получава право да стреля по друга мишена. Вероятността да уцели и двете мишени е 1/2. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Решение:
Нека A={стрелец улучва първата мишена}, B={стрелец улучва втората мишена}.
Имаме $\mathbb{P}(A) = \dfrac{2}{3}$ и $\mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$, както и $\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A}\,) = 0$. Търси се $\mathbb{P}(B\,|\,A)$.

I н/н. От формулата за пълна вероятност имаме, че

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\,|\,A)\,.\,\mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A}\,)}_{=0}\,.\,\mathbb{P}(\overline{A}\,) \Rightarrow \mathbb{P}(B\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\,.$$

II н/н. От формулата за основна вероятност имаме, че

$$\mathbb{P}(B\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Задача 2. Застрахователна компания води статистика за своите клиенти
- **всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;**
- $60\,\%$ **посещават повече от веднъж годишно лекар;**
- $17\,\%$ **посещават хирург;**
- $15\,\%$ **от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург.**

Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годипно лекар, да не е бил при хирург?

Решение:
Нека A={посещава лекар повече от веднъж годишно}, B={посещава хирург}.
Дадено е, че $\mathbb{P}(A) = 60\,\% \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}\,) = 1 - \mathbb{P}(B) = 40\,\%$, $\mathbb{P}(B) = 17\,\%$ и $\mathbb{P}(B\,|\,A) = 15\,\%$. Търси се $\mathbb{P}(\overline{B}\,|\,\overline{A}\,)$.

$$\mathbb{P}(\overline{B}\,|\,\overline{A}\,) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap \overline{A}\,)}{\mathbb{P}(\overline{A}\,)} = \frac{1 - \mathbb{P}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}})}{\mathbb{P}(\overline{A}\,)} \overset{de\ Morgan}{=} \frac{1 - \mathbb{P}(B \cup A)}{\mathbb{P}(\overline{A}\,)} = \frac{1 - (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))}{\mathbb{P}(\overline{A}\,)} =$$
$$= \frac{1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(B\,|\,A)\,.\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(\overline{A}\,)} = \frac{100\% - 60\% - 17\% + 15\,\%\,.60\,\%}{40\,\%} = \frac{23\% + 9\,\%}{40\,\%} = 80\,\%$$

Задача 3. Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите се числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Решение:
Всевъзможните суми, които двта зара могат да образуват при хвърляне са {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}. Ще разгледаме всеки от тях по отделно:

2: (1, 1) → **1** бр.
3: (1, 2), (2, 1) → **2** бр.
4: (1, 3), (2, 2), (3, 1) → **3** бр.
5: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) → **4** бр.
6: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) → **5** бр.
7: (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) → **6** бр.
8: (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) → **5** бр.

9: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) → **4** бр.
10: (4, 6), (5, 5), (6, 3) → **3** бр.
11: (5, 6), (6, 5) → **2** бр.
12: (6, 6) → **1** бр.

Знае се, че сумата е нечетна. Следотавелтно вселената от елементарни събития се смалява и броя от елементите и става равен на 2+4+6+4+2=18. От тях 2+4+6 са със сума по малка от 8.

Следователно търсената вероятност е $\mathbb{P}(< 8 \,|\, odd) = \dfrac{\mathbb{P}(< 8 \cap odd)}{\mathbb{P}(odd)} = \dfrac{\frac{12}{36}}{\frac{18}{36}} = \dfrac{2}{3}$.

$\mathbb{P}(< 8) = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} i}{36} = \dfrac{21}{36} = \dfrac{7}{12} \neq \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ събитията не са независими (т.е. са зависими).

Задача 4. Разполагаме с тесте от 36 карти (т.е. от шестица нагоре). Каква е вероятността да изтеглим дама, а пика? независими ли са двете събития? А ако колодата е от 52 карти?

Решение:

6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A общо 9.4=36 карти. Вероятността да изтеглим дама е $\mathbb{P}(Q) = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$.

Вероятността да изтеглим пика е $\mathbb{P}(\spadesuit) = \dfrac{9}{36} = \dfrac{1}{4}$. Вероятността да изтеглим дама пика е

$\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit) = \dfrac{1}{36}$. Но $\mathbb{P}(Q \,|\, \spadesuit) = \dfrac{\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit)}{\mathbb{P}(\spadesuit)} = \dfrac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{9}$, което е равно на $\mathbb{P}(Q)$, следователно

събитието не зависи от това дали сме изтеглили пика или не, т.е. събитията са независими.
Аналогично и ако тестето е от 52 карти:

$\mathbb{P}(Q \,|\, \spadesuit) = \dfrac{\mathbb{P}(Q \cap \spadesuit)}{\mathbb{P}(\spadesuit)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{13}$, каквато е и вероятността да сме изтеглили дама, тъй като ще

имаме картите 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A.

Задача 5. Около маса сядат 10 мъже и 10 жени. Каква е вероятността лица от еднакъв пол да не седят едно до друго?

Решение:
I н/н: Фиксираме б.о.о. някоя жена на масата. Останалите жени разполагат с 9 места и може да ги пермутираме по 9! начина. За мъжете има 10 места и може да ги пермутираме по 10! начина. Общо всички пермутации са 19!. Следователно отговорът е $\dfrac{9!10!}{19!}$.

II н/н: Отново фиксираме б.о.о някоя жена на масата. Вероятността да настаним мъж до нея е 10/19. След това вероятността да настаним жена до вече настатения мъж е 9/18. Седващото настаняване е с вероятност 9/17 да бъде правилно и т.н.
Следователно вероятността всички да бъдат настанени правилно според условието на задачата ще е $\dfrac{10}{19} \cdot \dfrac{9}{18} \cdot \dfrac{9}{17} \cdot \dfrac{8}{16} \cdot \dfrac{8}{15} \dots = \dfrac{10.(9!)^2}{19!}$.

Задача 6 (Birthday paradox). Какъв е най-малкият брой хора, които трябва да се изберат по случаен начин, така че вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по-голяма от 1/2 ?

Решение:
Нека броя на хората, за които вероятността поне двама от тях да имат един и същ рожден ден да е по-голяма от $\dfrac{1}{2}$ е k. Търсим $\min k$. Нека $\overline{A} = \{$вероятността никои двама да не са родени на една дата$\}$.

$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1.\frac{364}{365}.\frac{363}{365}\dots\frac{365-(k-1)}{365} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{365}\right)$. Очевидно полученото произведение за начални стойности е по-голямо от $\frac{1}{2}$ и колкото повече стойности взимаме (колкото повече расте k), толкова повече произведението намалява. Въпроса е кое е най-малкото k, за което полученото произведение е $< \frac{1}{2}$, тъй като $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$. За да оценим това произведение може да си напишем програма и да видим че търсеното условие за първи път се изпълнява при **23** или да използваме приближението $1 - x \sim e^{-x}$ за $x \in [0,1)$ и да правим оценки.

Задача 7. Двама играчи последователно хвърлят монета. Играта печели този, който първи хвърли ези. Каква е вероятността за спечелване на играта за всеки от играите? А ако печели този, който хвърли същото като падналото се непосредствено преди това?

Решение:
Нека А е събитието, в което първият който хвърля монетата печели, а В е събитието в което вторият, който хвърля монетат апечели. Очевидно ще спечели един от двамата когато рано или късно се падне ези. Следователно $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A)$. Ще пресметнем $\mathbb{P}(A)$. Тъй като хвърлянията на монетата са независими едно от друго ($E \cap T = \emptyset$), то от формулата за пълна вероятност ще имаме, че

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(TTE) + \mathbb{P}(TTTTE) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{TT\dots TT}_{2n}E) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^{2i+1}} = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.\frac{4}{3} = \frac{2}{3},$$ тъй като $1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$.

Следователно $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$.

Във второто условие на играта, вероятността да спечели първия е:

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(TEE) + \mathbb{P}(ETT) + \mathbb{P}(TETEE) + \mathbb{P}(ETETT) + \dots + \mathbb{P}(\underbrace{ET\dots ET}_{2n}T) + \mathbb{P}(\underbrace{TE\dots TE}_{2n}E) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}}\right) = 2.\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n}\frac{1}{4^i} \overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{1-\frac{1}{4}} - 1 = \frac{1}{3}.$$ Следователно при втория регламент на играта, вероятностите се разменят. По-голямия шанс да спечели има втория играч.

II н/н: Разбиваме по първото хвърляне.

$$\mathbb{P}(A) = \underbrace{\mathbb{P}(A\,|\,E)}_{=1}.\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(A\,|\,T).\mathbb{P}(T) = 1.\frac{1}{2} + \mathbb{P}(A\,|\,T).\frac{1}{2} \overset{\star}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}.\mathbb{P}(B) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \mathbb{P}(A)) \Rightarrow 2\mathbb{P}(A) = 1 + 1 - \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}.$$

(★) Тук използвахме наблюдението, че ако първият е хвърлил тура, то единственото което се променя е, че втория става първи.

Задача 8. Секретарка написала n писма, сложила ги в пликове и ги запечатала. Забравила кое писмо в кой плик е, но въпреки това написала отгоре n-те различни адреса и изпратила писмата. Каква е вероятността никой да не получи своето писмо?

Решение:
Нека N е множеството от събития, в които никои не получава писмото си. Търси се $\mathbb{P}(N)$.

$\big(Y$ е множеството от събития, в които всеки полуава правилното писмо. Очевидно $|Y| = 1$ и $\mathbb{P}(Y) = \dfrac{1}{n!}\big)$

Отрицанието на N, т.е. $\overline{N}$ е множеството от събития, в които поне един адресат получава предназначеното за него писмо. Нека $A_i = \{i$-тия адресат получава педназначеното за него писмо$\}$.

$$\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{n}$$

$$\mathbb{P}_{i \neq j}(A_i \cap A_j) = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\mathbb{P}_{i<j<k}(A_i \cap A_j \cap A_k) = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$$

$$\dots$$

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{1}{n(n-1)\dots(n-k+1)}$$

$$\dots$$

$$\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{n!}$$

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(\overline{N}) = 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) =$$
$$= 1 - \left(n.\frac{1}{n} - \binom{n}{2}\frac{1}{n(n-1)} + \binom{n}{3}\frac{1}{n(n-1)(n-2)} + \dots\right) = 1 - \left(1! - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots\right) = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \dots$$

Окончателно отговора е $\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1}\dfrac{1}{i+1!}$.

$e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dots$, избираме $x = -1 \Rightarrow \mathbb{P}(N) = e^{-1} \sim \dfrac{1}{2.7182...}$.

Задача 9. В урна има 5 бели, 8 зелени и 7 червени топки. От урната последователно се вадят топки. К аква е вероятността бяла топка да бъде извадена преди зелена, ако

1. **след всяко изваждане топката се връща обратно в урната;**
2. **извадените топки не се връщат обратно**

Решение:

I н/н: Когато вадим червена топка - не се променя нищо, за това чисто интуитивно може да предположим, че отговора е $\dfrac{5}{5+8} = \dfrac{5}{13}$. Това обаче не е формално решение.

Нека A={вадим бяла топка преди зелена}.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \mathbb{P}(rrw) + \dots = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}.\frac{5}{20} + \frac{7}{20}.\frac{5}{20}.\frac{5}{20} + \dots = \frac{5}{20}\left(1 + \frac{7}{20} + \left(\frac{7}{20}\right)^2 + \dots\right) =$$
$$= \frac{5}{20}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{7}{20}\right)^i \overset{n\to\infty}{=} \frac{5}{20}\left(\frac{1}{1-\frac{7}{20}}\right) = \frac{5}{13}.$$

Тук използвахме факта, че $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = 1 + x + x^2 + \dots = \dfrac{1}{1-x}$, за $|x| < 1$. Ако обаче диференцираме тази сума ще получим също вярно равенство, което е:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i x^{i-1} = 1 + 2x^2 + 3x^3 + \dots = \left((1-x)^{-1}\right)^| = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

II н/н:
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A\,|\,G)\,.\,\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(A\,|\,W)\,.\,\mathbb{P}(W) + \mathbb{P}(A\,|\,R)\,.\,\mathbb{P}(R) =$$
$$= 0 + 1.\frac{5}{20} + \mathbb{P}(A\,|\,R)\,.\,\frac{7}{20} = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\mathbb{P}(A).$$

Тук използвахме наблюдението, че ако сме извадили първо червена топка, това по никакъв начин не променя условието на играта (тъй като ги връщаме обратно в урната).

Така получихме, че $20\mathbb{P}(A) = 5 + 7\mathbb{P}(A)$ или $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{13}$.

Нека сега не връщаме извадените топки.

I н/н:
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(w) + \mathbb{P}(rw) + \ldots + \mathbb{P}(\underbrace{r\ldots r}_{7}\,w) = \frac{5}{20} + \frac{7}{20}\,.\,\frac{5}{19} + \frac{7}{20}\,.\,\frac{6}{19}\,.\,\frac{5}{18} + \ldots + \frac{7}{20}\,.\,\frac{6}{19}\,.\,\frac{5}{18}\ldots\frac{1}{14}\,.\,\frac{5}{13} =$$
$$= \frac{5}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7.6}{19.18} + \ldots\right)}_{x} = \frac{5}{20}x.$$

За да пресметнем тази сума ще се доверим на симетрията и ще пресметнем

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(g) + \mathbb{P}(rg) + \ldots + \mathbb{P}(\underbrace{r\ldots r}_{7}\,g) = \frac{8}{20} + \frac{7}{20}\,.\,\frac{8}{19} + \frac{7}{20}\,.\,\frac{6}{19}\,.\,\frac{8}{18} + \ldots + \frac{7}{20}\,.\,\frac{6}{19}\,.\,\frac{5}{18}\ldots\frac{1}{14}\,.\,\frac{8}{13} =$$
$$= \frac{8}{20}\underbrace{\left(1 + \frac{7}{19} + \frac{7.6}{19.18} + \ldots\right)}_{x} = \frac{8}{20}x.$$

Но $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 \Rightarrow \dfrac{5}{20}x + \dfrac{8}{20}x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{20}{13}$. Следователно $\mathbb{P}(A) = \dfrac{5}{13}$.

II н/н:
Червените топки нямат значение, тъй като по никакъв начин не оказват влияние на правилата на играта (ако разглеждаме условието като игра)

Тогава, ако разглеждаме изтеглените топки като редици:

w	$\cdots$											

Игнорираме червените топки. Всички възможни наредби на 5 бели и 8 зелени топки на 13 поиции са: $\dfrac{13!}{5!8!}$. От тях $\dfrac{12!}{4!8!}$ наредби ни удовлетворяват (бяла топка е изтеглена преди челена) $\Rightarrow$
$$\mathbb{P}(A) = \frac{\frac{13!}{5!8!}}{\frac{12!}{4!8!}} = \frac{5}{13}.$$

Задача 11 (Monty Hall Problem). Зад една от 3 затворени врати има чисто нова кола, а зад другите две няма нищо. Избирате врата, след това водещията отваря една от останалите две врати, зад които няма нищо. Сега трябва да решите - сменяте ли избраната врата или запазвате първоначалния си ичбор?

Решение:

Винаги сменяме, за да повишим вероятността да спечелим колата, тъй като при първоначалния избор вероятността е била 1/3 за печалба, а след отваряне на една от вратите вече е 1/2.

Behind door 1	Behind door 2	Behind door 3	Result if staying at door #1	Result if switching to the door offered
Goat	Goat	**Car**	Wins goat	**Wins car**
Goat	**Car**	Goat	Wins goat	**Wins car**
Car	Goat	Goat	**Wins car**	Wins goat

Задача 12 (Boy or Girl paradox). X има две деца. Ако по-старото е момиче, каква е вероятността и двете да са момичета? А ако знаете, че поне едно от тях е момче, каква е вероятността и двете да са момчета?

Решение:

$\Omega = \Big\{\{B, G\}, \{G, B\}, \{B, B\}, \{G, G\}\Big\}$.

Ако по старото е момиче, вселената намалява на половина $\Omega_{new}\Big\{\{B, G\}, \{G, G\}\Big\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\text{и двете са момичета} \mid \text{по-старото е момиче}) = \dfrac{1}{2}$.

Ако поне едното е момче, вселената намалява малко по-малко от предходния случай, тъй като отчитаме естествената наредба, за да бъде по-реалистичен модела. Следователно

$\Omega_{new}\Big\{\{B, G\}, \{G, B\}, \{B, B\}\Big\} \Rightarrow \mathbb{P}(\text{и двете са момчета} \mid \text{поне едно от тях е момче}) = \dfrac{1}{3}$.