Задача (процеси). На всяка страна на четиристенен зар записваме равно вероятно едно число от {1,2,3,4}. Играем следната игра: хвърляме зара последователно и сумираме точките, които са се паднали. T е първото хвърляне, за което сумата на първите T хвърляния се дели на 4. Да се намери очакването на T.

Допускаме, че зарът е стандартен и страните му са съответно номерирани с 1, 2, 3 и 4. Това допускане е законно, тъй като в дългосрочен план, равно вероятното избиране на числа за стените и осредняването на всички генерирани зарове ще доведе до такъв зар в очакване.

На всяко хвърляне на зара, имаме вероятност 1/4 експериментът да приключи и вероятност 3/4 той да продължи. Следователно очакваната бройка хвърляния на зара е геометрично разпределена с параметър 3/4.

За едно хвърляне имаме вероятност $\frac{1}{4}$, за две хвърляния имаме вероятност $\frac{3}{4} \times \frac{1}{4}$, за три хвърляния имаме вероятност $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$, $\cdots$, за n хвърляния имаме вероятност $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} \times \frac{1}{4}$.

Тоест, ако броят хвърляния е T, то $\mathbb{E}(T) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$. Тази сума всъщност представлява сума от геометрични прогресии.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 1 + 2 \times \frac{3}{4} + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots =$$

$$= 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \cdots +$$

$$+ \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots +$$

$$+ \cdots =$$

$$= \left(1 + \frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) + \left(\frac{9}{16} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) + \cdots =$$

$$= 1 + 3 + 4\left(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{63} + \frac{81}{256} + \cdots\right) =$$

$$= 4 + 4\left(\frac{3}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) = 4 + 4 \times 3 = 16\,.$$

Следователно $\mathbb{E}(\mathrm{T}) = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{n}\left(\frac{3}{4}\right)^{\mathrm{n-1}} = \frac{1}{4} \times 16 = 4$. Тоест 4 броя хвърляния в средния случай ще са необходими, за да се дели за първи път получената сума от падналите се точки от зара на 4.