Ако не е споменато друго, ще считаме, че n и k са естествени числа

Задача 1. Припомнете принципа за включването и изключването.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Задача 2. Нека M е множество с n елемента (ще пишем $|M| = n$) и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. Припомнете по колко начина може да изберем

(a) k различни елемента от M, т.е. $\{a_1, \ldots, a_k\}$;

(b) k-орка от различни елементи на M, т.е. $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$;

(c) k-орка от елементи на M, т.е. $(a_1, \ldots, a_k)$.

Решение: (a) (C_n^k); (b) (V_n^k); (c) $V(n; k) = n^k$.

Задача 3. Колко решения има уравнението $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, ако

(a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са естествени числа;

(b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са неотрицателни цели числа;

По колко начина може да изберем k елемента от множество с n елемента, ако допускаме и повторения, т.е. k-елементно мултиподмножество?

Решение: Виж Задача 4.

Задача 4. По колко начина може да разпределим k различими частици в n различни клетки, ако

(a) всяка клетка може да съдържа точно една частица;

(b) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

(c) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Решение:

(a) Тъй като всяка клетка може да съдържа точно една частица, то за първата частица ще може да изберем от n клетки, за вторара – от $n-1$ клетки и т.н. докато за k-тата частица ще може да изберем от останалите $n-k+1$ клетки. Следователно отговора е $n\,.\,(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} = V_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Освен това, ако $k > n$ отговора ще е 0, а при $k = n$ получаваме пермутациите на частиците.

(b) $\underbrace{n\,.\,n\ldots n}_{k} = V(n;\ k) = n^k$.

(c) Очевидно, ако $k < n$ това не е възможно и следователно отговора ще е 0. Нека $k \geq n$. Нека A_i, $i = \overline{1, n}$ е множеството от всички разпределения, при които i-тата клетка е празна. Означаваме с A множеството от всички разпределения, при които <u>поне</u> една клетка е празна. Следователно $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и от принципа на включването и изключването имаме, че:

$$|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| =$$
$$= \binom{n}{1}(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \binom{n}{3}(n-3)^k \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)^k.$$

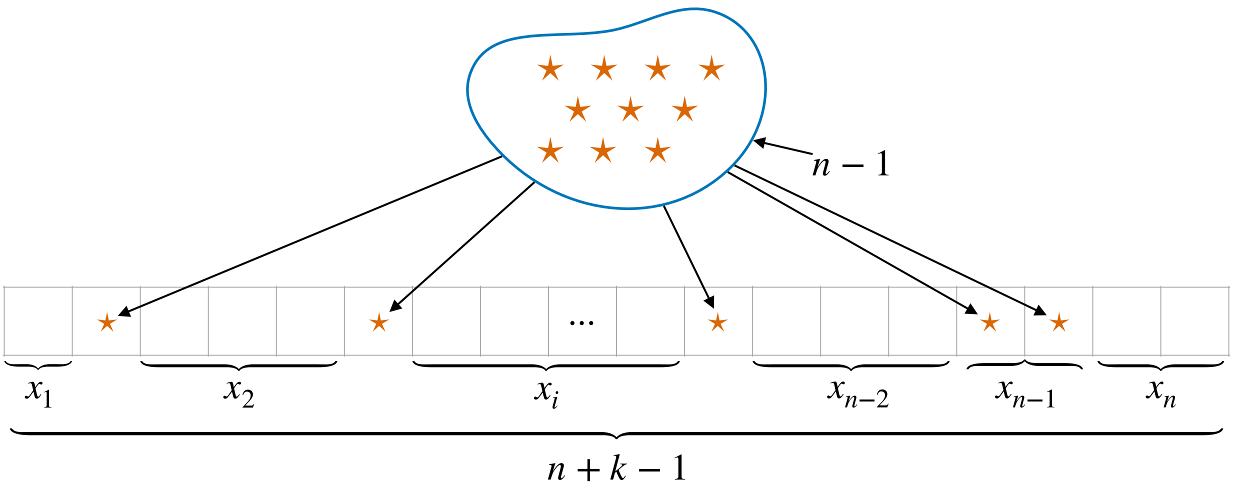
Следователно за да намерим търсения брой, ще извадим от броя всички възможни разпределения без ограничения, броя на тези, за които има поне една празна клетка:

$$|V(n;k) \backslash A| = |V(n;k)| - |A| = n^k - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^k$$

Нека сега частиците са неразличими:

(a) Без наредба (неразличими) и без повторения. От тук директно може да заявим, че това са комбинации, тъй като избираме k-елементни подмножества от n-елементно множество. Следователно отговора е $\binom{n}{k} = C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са n-те клетки и имаме k-частици. Ако намерим едно решение на диофантовото уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, в цели неотрицателни числа, то същото това решение ще е и решение на изходната задача. Т.е. имаме инекция, а освен това имаме и сюрекция и следователно биекция. Нека имаме масив от $n + k - 1$ клетки и $n - 1$ звездички (звездичките са еднакви).



След като поставим всички $n - 1$ звездички (без повторения) в масива, заедно с началото и края на масива ще образуват точно n прегради/интервала, като между началото и първата звездичка – броят на свободните клетки ще е равен на x_1, между първата и втората звездичка – на x_2, ..., между последната звездичка и края на масива – на x_n. Казано по друг начин, i-тата последователност от празни клетки ще представлява i-тото събираемо в диофантовото уравнение, където под последователност от празни клетки разбираме броя на клетките между две звечдички или двата ъглови случая в края на масива.

По този начин избирайки позициите и разпределяики $n - 1$ звездички – изброяваме всички възможни разпределения на k. Т.е. намерихме биекция между избирането на

$n-1$ звездички от $n+k-1$ клетки без повторения и без наредба **и** броя на решенията на диофантовото уравнение. Следователно търсеният брой е равен на

$$C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

(c) Аналогично на (b), но с тази разлика, че тук $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ **и** $x_i \geq 1$ за $i = \overline{1, n}$. Полагаме $x_i - 1 = y_i$, тогава $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k - n$ и $y_i \geq 0$, за $i = \overline{1, n}$. Сведохме задачата до тази от (b) $\Rightarrow$ търсеният брой е: $\binom{k-n+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1} = C_{k-1}^{n-1}$.

Задача 5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, ако
(a) не се допуска повторение на цифри;
(b) допуска се повторение на цифри;
(c) не се допускат повторения и числото е нечетно?

Решение:
(a) За първото число имаме 5 опции и за всяко следващо с една опция по-малко от предходното: $5 \times 4 \times 3 \times 2 = |V_5^4| = \dfrac{5!}{(5-4)!} = 120$.
(b) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = V(5;4) = 5^4$.
(c) За да бъде нечетно числото трябва на последната позиция да изберем една от 3-те нечетни цифри, след което остават 4 числа за 3 позиции: $3 \times V_4^3 = 3.4.3.2 = 72$.

Задача 6. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако
(a) няма ограничение за участие в нея;
(b) A и B не трябва да участват заедно;
(c) C и D могат да участват само заедно.

Решение:

(a) Избираме 4 елементно подмножество от 12 елементно множество, без наредба и без повторения. Това са комбинации! $C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \dfrac{12!}{4!8!} = \dfrac{9.10.11.\cancel{12}}{2.\cancel{3.4}} = 495$.
(b) От броя на всички възможности 4 елементни подмножества от 12 елементно множество изваждаме броя на тези подмножества, при които A и B са избрани заедно. Това са $\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 495 - 45 = 450$.

Или може да подходим и по следния начин: от 10 кандидате (без A и без B) избираме четирима, от 10 (избрали сме A и нямаме право да избираме B) избираме трима и от 10 (избрали сме B и нямаме право да избираме A) избираме трима. Общо $\binom{10}{4} + 2\binom{10}{3}$, което трябва да даде същия резултат както горното.
(c) От 10 елементно множество (без C и D) избираме 4 елементно подмножество и от 10 елементно множество избираме 2 елементно подмножество (вече сме избрали C и D).
$\binom{10}{4} + \binom{10}{2} = 255$.

Или може да подходим и по следния начин: от всички 4 елементни подмножества от 12

елементно множество изваждаме броя на тези в който C и D не са заедно:
$\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$.

Задача 7. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A, B и C. Да се намери броя на всички различни разпределения, за които:
(a) кутията A е празна;
(b) само кутията A е празна;
(c) точно една кутия е празна;
(d) поне една кутия е празна;
(e) няма празна кутия.

Решение:

(a) Всяка топка може да отиде или в кутия B или в кутия C. Тоест имаме общо $2^5 = 32$ разпределения за топките, при положение че кутията A е празна.
(b) От резултата в (a) трябва да извадим броя на разпределенията, при които кутията B е празна и тези, при които кутията C е празна. Ние вече знаем, че кутията A е празна, следователно ако още една от кутиите B или C е празна, топките ще имат само една възможност. Тоест търсеният брой разпределения тук е $2^5 - 1 - 1 = 30$.
(c) Или само A е празна, или само B е празна, или само C е празна. Следователно търсеният брой намираме, като умножим броя от (b) по три: $3 \times |(\text{b})| = 3 \times (2^5 - 2) = 90$.
(d) Това е броят на разпределенията, при които точно една кутия е празна събран с броя тези, при които две кутии са празни: |(c)| + |две празни кутии| $= 90 + \binom{3}{2} = 93$|.
(e) От броя на всички възможни разпределения без ограничения изваждаме броя на тези, при които поне една кутия е празна:

$$3^5 - |(\text{d})| = 3^5 - \left(3 \times (2^5 - 2) + \binom{3}{2}\right) = 243 - 93 = 150.$$

Задача 8. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи буквите a, b и c, такива, че:
(a) започват с a;
(b) съдържат точно k пъти буквата a;
(c) съдържат точно k пъти буквата a, при което започват и завършват със буквата a;
(d) съдържат съответно k_1, k_2 и k_3 броя от буквите a, b и c, където $k_1 + k_2 + k_3 = n$.

Решение:

(a) Остават $n - 1$ позиции, на които може да разбределим три букви, тъй като на първата позиция вече сме поставили a. За втората ще имаме три възможности, за третата отново три и т.н. до последната. Следователно отоговота е 3^{n-1}.
(b) Остават $n - k$ позиции, на които може да разпределим две букви (тъй като буквата a вече е разпределена точно k пъти и е изчерпана). Следователно отговора е $\binom{n}{k} 2^{n-k}$, тъй като $\binom{n}{k}$ са начините, по които може да изберем k-те позиции за a от n.

(c) Остават $n-2$ позиции, от които може да изберамe, за да поставим останалите $k-2$ букви a. След което за останалите $n-k$ позиции може да разпределим само две букви (без a). Следователно отговора е $\binom{n-2}{k-2} \times 2^{n-k}$.

(d) Имаме $\binom{n}{k_1}$ начина, по които може да изберем буквата a, $\binom{n-k_1}{k_2}$ начина, по които може да изберем буквата b и $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ начина, по които може да изберем буквата c. Следователно търсеният брой е $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\underbrace{(n-k_1-k_2-k_3)!}_{=0!=1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

Задачча 9. Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на A, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

Решение:

Знаем, че $|\mathscr{P}(A)| = 2^{n+k}$ е броят на всички подмножества на A (степенното множество).

Нека въведем следните означения:

AB: всички подмножества на A, които съдържат елемент a и елемент b;
$\overline{A}B$: всички подмножества на A, които не съдържат елемент a;
$A\overline{B}$: всички подмножества на A, които не съдържат елемент b;
$\overline{A}\,\overline{B}$: всички подмножества на A, които не съдържат нито един елемент a и нито един елемент b.

Тъй като така дефинираните множества са непресичащи се и обединението им прави цялото множество, то те са разбиване.

Тогава търсеното множество $AB = \mathscr{P}(A) \setminus (\overline{A}B \cup A\overline{B})$ и от принципа на изваждането и принципа на включването и изключването имаме, че:

$$|AB| = |\mathscr{P}(A)| - |\overline{A}B \cup A\overline{B}| = 2^{n+k} - |\overline{A}B| - |A\overline{B}| + |\overline{A}B \cap A\overline{B}| = 2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$$