Вероятности и статистика
(задачи за самостоятелна работа)

Факултет по математика и информатика
специалност „Софтуерно инженерство“

Име	Фамилия	Специалност	Факултетен номер	Група
Андрей	Стоев	Софтуерно инженерство	62369	3

Съдържание:

09 Януари 2021 г.

Задача 1. Да се докажат формулите:

а) Вероятността да настъпи точно едно от събитията A и B е равна на $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$;

б) За произволни събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е в сила формулата:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cup A_j \cup A_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Доказателство:

а) Нека с $A \vartriangle B$ означим събитието „настъпва **само** едно от събитията A и B".

Ще разбием Ω на пълна група от събития, с цел да приложим формулата за пълна вероятност. Всички възможни сценарии, в които може да попаднем са:

- Изпълнява се само едно от събитията A и $B \longmapsto A \vartriangle B$
- Изпълняват се и двете събития A и $B \longmapsto A \cap B$
- Не се изпълнява нито едно от събитията A и $B \longmapsto \overline{A} \cap \overline{B}$

Тези събития са две по две непресичащи се и обединението им дава цялото пространство от елементарни събития Ω. Следователно, от формулата за пълна вероятност ще имаме, че $\mathbb{P}(A \vartriangle B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1$.

Следователно,

$$\mathbb{P}(A \vartriangle B) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) - \left(1 - \mathbb{P}(\overline{\overline{A} \cap \overline{B}})\right) \overset{de\ Morgan}{=}$$
$$= \cancel{1} - \mathbb{P}(A \cap B) - \cancel{1} + \mathbb{P}(A \cup B) = -\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) =$$
$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$, което искахме да докажем.

Забележете, че в предпоследното неравенство използвахме принципа за включване и изключване за $n = 2$, който ще ни е необходим за всяко n, за да го използваме в доказателството на б). За това, нека се обосновем тук, защо той е верен за $n = 2$ и ще използваме този резултат като индукционна база в б).

За всеки две събития $E, F \in \mathscr{F}$: $\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E \cap F)$.
Доказателство: Ще направим простото наблюдение, че E и $F \backslash E$ са взаимно изключващи се събития и тяхното обединение е $E \cup F$:

$$\mathbb{P}(E \cup F) = \mathbb{P}(E \cup (F \backslash E)) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \backslash E) \qquad (1)$$

От друга страна, $F \backslash E$ и $F \cap E$ са също взаимно изключващи се събития с обединение равно на F:

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}((F \backslash E) \cup (F \cap E)) = \mathbb{P}(F \backslash E) + \mathbb{P}(F \cap E) \qquad (2)$$

Разликата на двете равенства от (1) и (2) ни дава доказателство на твърдението.

б) Формулата, която искаме да докажем **много прилича** на принципа за включване и изключване.

Ние току що доказахме, че тя е изпълнена за $n = 2$, а пък за $n = 1$ твърдението е тривиално вярно. Нека това е база за нащата индукция и направим индукционната хипотеза, че твърдението е вярно и за някое $n = k > 2$. Ще докажем, че е вярна и за $n = k + 1$.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k+1} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i \cup B_{k+1}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}\left(B_{k+1}\right) - \mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \cap B_{k+1}\right] =$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) + \mathbb{P}\left(B_{k+1}\right) - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} \left(B_i \cap B_{k+1}\right)\right)$$

Първия и последния член са обединения от k елемента, за които предположихме, че формулата е валидна в индукционната хипотеза.

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k \cup B_{k+1}) = \sum_{1 \le i \le k} \mathbb{P}(B_i) \tag{1}$$
$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2}) \tag{2}$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le k} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3}) \tag{3}$$
$$- \cdots + (-1)^{k+1} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k) \tag{4}$$
$$+ \mathbb{P}(B_{k+1}) \tag{5}$$
$$- \sum_{1 \le i \le k} \mathbb{P}(B_i \cap B_{k+1}) \tag{6}$$
$$+ \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le k} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{k+1}) \tag{7}$$
$$- \cdots - (-1)^k \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le k-1} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \ldots \cap B_{i_{k-1}} \cap B_{k+1}) \tag{8}$$
$$-(-1)^{k+1} \mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_k \cap B_{k+1})$$

Тук (1) и (5) отчитат всички вероятности за единични събития от 1 до $k + 1$. (2) включва всички вероятности за две пресичания от 1 до k, (6) – всички вероятности за две пресичания, където по-високият индекс е равен на $k + 1$. Тези две суми по този начин отчитат всички възможни вероятности за две пресичания от 1 до $k + 1$.

По същия начин (3) включва всички вероятности за три пресичания от 1 до k и (7) тези с по-висок индекс равен на $k+1$. Заедно те включват всички вероятности за три пресичания от 1 до $k+1$. Това продължава до (4) и (8), които заедно дават всички вероятности за k пресичания от 1 до $k+1$. Следователно,

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{k+1}) =$$
$$= \sum_{1\le i\le k+1} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{1\le i_1<i_2\le k+1} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2}) + \sum_{1\le i_1<i_2<i_3\le k+1} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap B_{i_3})$$
$$- \cdots + (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le k+1} \mathbb{P}(B_{i_1} \cap B_{i_2} \cap \cdots \cap B_{i_k}) + (-1)^{k+2}\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_{k+1}),$$

което удовлетворява формулата за $k+1$.

По този начин доказахме верността на принципа за включване и изключване. Т.е. вече имаме, че:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B_i) - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(B_i \cap B_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(B_i \cap B_j \cap B_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right)$$

Нека сега положим $B_i = \overline{A}_i$, за $i = 1, 2, \ldots, n$ и използваме формулите на де Морган, за да изразим всеки член от формулата на принципа за включване и изключване.

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A}_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\overline{A}_i\right) = n - \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

$$\sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}\left(B_i \cap B_j\right) = \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}\left(\overline{A}_i \cap \overline{A}_j\right) = \binom{n}{2} - \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}\left(A_i \cup A_j\right)$$

… … …

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A}_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Заместваме с получените резултати във формулата от принципа за включване и изключване и получаваме:

$$1-\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=n-\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)-\left(\binom{n}{2}-\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{P}\left(A_i\cup A_j\right)\right)+\cdots+$$

$$+(-1)^{n+1}\left(1-\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right)\Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(A_i\right)-\sum_{1\le i<j\le n}\mathbb{P}\left(A_i\cup A_j\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)+$$

$$+\underbrace{\left(1-n+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\right)}_{=(1-1)^n=0},$$ което е точно това което искахме да докажем.

Забележка: тук използвахме формулата за нютоновия бином:

$$(x+y)^n=\binom{n}{0}x^n y^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2+\cdots+\binom{n}{n-1}x^1 y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0 y^n$$

за $x=1$ и $y=-1$.

$\square$

Задача 2. Книга от 120 страници съдържа 6 фигури. Всяка фигура може да се намира на всяка една от страниците с една и съща вероятност. Да се пресметне вероятността, случайно избрана страница да съдържа поне три фигури.

Решение:

Нека X_k е събитието: на случайно избрана страница има точно k на брой фигури. Очевидно $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ са всички възможни сценарии за k и освен това X_k брои успехи от бернулиевите събития F_i, $i = \overline{1,6}$, всяко от които е с вероятност за успех $p = \dfrac{1}{120}$, където с „успех" сме маркирали събитието „фигура F_i присъства на страницата".

Следователно X_k е биномно разпределена случайна величина с $n = 6$ и $p = \dfrac{1}{120}$. Тегловата функция на X_k е $k \longmapsto p_k = \mathbb{P}(X_k) = \mathbb{P}(X = k) = \dbinom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k}$.

В задачата се търси:

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{k=2} \mathbb{P}(X = k) \approx 0.0000113585 \approx \mathbf{1.135e-05}.$$

Коментар:
Числовата стойност на израза може лесно да се провери чрез вградената в програмния език $\mathbf{R}$, функция:

```
> pbinom(q = 2, size=6, prob=1/120, lower.tail = F)
# [1] 1.13585e-05
```

$\square$

Задача 3. Хвърлят се 5 бели и 5 червени зара. Каква е вероятността сумата от точките върху белите зарове, минус сумата от точките върху червените зарове, да бъде равна на:

а) 0;

б) 1.

Решение:

Тъй като броя на точките от горната страна на хвърлен зар е независимо само по себе си събитие, то без ограничение на общността може да разглеждаме задачата като последователно хвърляне на 10 зара, първите 5 от които са бели, а последните 5 – червени. Нека X_i е случайната величина: брой точки, които са се паднали при хвърлянето на i-тия зар.

$X_i(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и при допускането, че заровете са честни – всяка една от точките на зара е с еднаква вероятност от $\mathbb{P}(X_i = k) = p_{i,k} = \dfrac{1}{6}$.

Нека означим с Y и Z, съответно, случайните величини: сбор от падналите се точки на първите 5 зара и сбор от падналите се точки на последните 5 зара. Т.е.

$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i$, $Z = \sum_{i=6}^{10} X_i$. Следователно Y и Z са еднакво разпределени и с

пораждащата функция, която се задава по следния начин:

$$h_Y(s) = h_Z(s) = \mathbb{E}s^Y = \mathbb{E}s^{\Sigma_{i=1}^5 X_i} = \prod_{i=1}^{6} \mathbb{E}s^{X_i} = \left(\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} s^i\right)^5 =$$
$$\frac{1}{6^5}(s^{30} + 5s^{29} + 15s^{28} + 35s^{27} + 70s^{26} + 126s^{25} + 205s^{24} + 305s^{23} + 420s^{22} + 540s^{21} +$$
$$+651s^{20} + 735s^{19} + 780s^{18} + 780s^{17} + 735s^{16} + 651s^{15} + 540s^{14} + 420s^{13} + 305s^{12} +$$
$$+205s^{11} + 126s^{10} + 70s^9 + 35s^8 + 15s^7 + 5s^6 + s^5)$$

Вероятността $\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(Z = k) = \dfrac{h_Y^{(k)}(0)}{k!}$, което е просто коефициента пред x^k в развитието на $h_Y(x)$. Следователно,

а) $\mathbb{P}(Y = Z) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=5}^{30} \{Y = Z = j\}\right) = \sum_{j=5}^{30} \mathbb{P}(Y = j)\mathbb{P}(Z = j) = \sum_{j=5}^{30} \left[\mathbb{P}(Y = j)\right]^2 =$

$$= \sum_{j=5}^{30} \left[\mathrm{coef}\left(x^j, h_Y(x)\right)\right] = \frac{1}{6^5} \sum_{j=5}^{30} \left(\sum_{\substack{0 \le k \le 5 \\ l \ge 0 \\ 6k + l = j}} (-1)^k \binom{6}{k} \binom{5+l}{5} \right)^2 \approx 0.072.$$

б) $$\mathbb{P}(Y - Z = 1) = \sum_{j=5}^{30} \mathbb{P}(Y = j+1, Z = j) = \sum_{j=5}^{30} \mathbb{P}(Y = j+1)\mathbb{P}(Z = j) =$$

$$= \sum_{j=5}^{30} \left[\mathrm{coef}\left(x^{j+1}, h_Y(x)\right)\right] \left[\mathrm{coef}\left(x^j, h_Y(x)\right)\right] =$$

$$\frac{1}{6^5} \sum_{j=5}^{30} \left(\sum_{\substack{0 \le k \le 5 \\ l \ge 0 \\ 6k + l = j+1}} (-1)^k \binom{6}{k} \binom{5+l}{5} \right) \times \left(\sum_{\substack{0 \le k \le 5 \\ s \ge 0 \\ 6r + s = j}} (-1)^r \binom{6}{r} \binom{5+s}{5} \right) \approx 0.071.$$

Отново, получения резултат много лесно може да се провери чрез програмния език **R** и следната функция:

```
task3 = function(n = 300000){
	Y=c( ); Z=c( )
	for(i in 1:n){
		Y[i] = sum(x = sample(c(1:6), size = 5, replace = TRUE))
		Z[i] = sum(x = sample(c(1:6), size = 5, replace = TRUE))
	}
	X = Y - Z
	print(sum(X == 0)/n)
	print(sum(X == 1)/n)
}
task3( )
# [1] 0.07229667
# [1] 0.07125667
```

□

Задача 4. Нека ξ е случайна величина с характеристична функция $\psi_{\xi}(t)$. Докажете, че:

а) ако $\xi \in Exp(\lambda)$, то $\psi_{\xi}(t) = (1 - it\lambda^{-1})^{-1}$;

б) ако $\xi \in \Gamma(\alpha, \beta)$, то $\psi_{\xi}(t) = (1 - it\beta^{-1})^{-\alpha}$.

Доказателство:

а) $\Psi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi}$. Но $e^{it\xi} = \cos(t\xi) + i\sin(t\xi) \Rightarrow$

$$\mathbb{E}e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_{\xi}(x) \mathrm{d}\, x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x =$$

$$\underbrace{\lambda \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x}_{I} + \underbrace{i\lambda \int_{0}^{\infty} \sin(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x}_{J}.$$

Пресмятаме двата интеграла I и J.

$$I = \lambda \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x = \frac{\lambda}{t} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, tx = \frac{\lambda}{t} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \mathrm{d} \sin(tx) =$$

$$= \frac{\lambda}{t} \sin(tx) e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} - \frac{\lambda}{t} \int_{0}^{\infty} \sin(tx) \mathrm{d}\, e^{-\lambda x} = \frac{\lambda^2}{t} \int_{0}^{\infty} \sin(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{t^2} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \mathrm{d} \cos(tx) = -\frac{\lambda^2}{t^2} \cos(tx) e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{\lambda^2}{t^2} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) \mathrm{d}\, e^{-ex} =$$

$$= \frac{x^2}{t^2} - \frac{\lambda^{3}}{t}^{2} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x \Rightarrow$$

$$\lambda \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x = \frac{\lambda^2}{t^2} - \frac{\lambda^3}{t^3} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x$$

$$\int_{0}^{\infty} \cos(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x = \frac{\frac{\lambda^2}{t^2}}{x + \frac{\lambda^3}{t^2}} = \frac{\lambda^2}{t^2 \lambda + \lambda^3} = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda^2 + t^2}}$$

$$J = i\lambda \int_{0}^{\infty} \sin(tx) e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x = -\frac{i\lambda}{t} \int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \mathrm{d} \cos(tx) =$$

$$= -\frac{i\lambda}{t} \cos(tx) e^{-\lambda x} \Big|_{0}^{\infty} + \frac{i\lambda}{t} \int_{0}^{\infty} \cos(tx) \mathrm{d}\, e^{-\lambda x} =$$

$$= \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\sin(tx) =$$

$$= \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^2}{t^2}\sin(tx)e^{-\lambda x}\Big|_0^\infty + \frac{i\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)\mathrm{d}\,e^{-\lambda x} =$$

$$= \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^3}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \Rightarrow$$

$$i\lambda\int_0^{+\infty} \sin(tx)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{i\lambda}{t} - \frac{i\lambda^3}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\frac{i\lambda}{t}}{i\lambda + \frac{i\lambda^3}{t^2}} = \frac{i\lambda t}{i\lambda t^2 + i\lambda^3} = \frac{it}{it^2 + \lambda^2 i} = \boxed{\frac{t}{t^2+\lambda^2}}$$

Следователно, $\Psi_\xi(t) - \mathbb{E}e^{itx} = \lambda\dfrac{\lambda}{\lambda^2+t^2} + i\lambda\dfrac{t}{t^2+\lambda^2} = \lambda\dfrac{\lambda+t}{\lambda^2+t^2}\times\dfrac{\lambda-it}{\lambda-it} =$

$$= \lambda\frac{\lambda^2-(it)^2}{(\lambda^2+t^2)(\lambda-it)} = \lambda\frac{\lambda^2-i^2t^2}{(\lambda^2+t^2)(\lambda-it)} = \lambda\frac{\cancel{\lambda^2+t^2}}{(\cancel{\lambda^2+t^2})(\lambda-it)} = \boxed{\frac{\lambda}{\lambda-it}} =$$

$= \left(\dfrac{\lambda-it}{\lambda}\right)^{-1} = (1-it\lambda^{-1})^{-1}$, което искахме да докажем.

б) $\Gamma(1,\lambda) = Exp(\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}e^{itX} = \dfrac{\lambda}{\lambda-it}$.

Нека $X_1 \in Exp(\lambda)$ и $X_2 \in Exp(\lambda)$ са независими и експоненциално разпределени случайни величини. Разглеждаме случайната величина $X = X_1 + X_2$. От задача 5., която сме доказали по-долу имаме, че $X \in \Gamma(2,\lambda) \Rightarrow \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{it(X_1+X_2)} =$
$= \mathbb{E}e^{itX_1}e^{itX_2} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda-it}\right)^2$.

Следователно $\Gamma(\alpha,\beta)$ има следната характеристична функция $\left(\dfrac{\beta}{\beta-it}\right)^\alpha = (1-it\beta^{-1})^{-\alpha}$.

Имаме, че $\Gamma(1,\lambda) \equiv Exp(\lambda)$. Тогава ако $Y \in \Gamma(1,\lambda)$, то $\Psi_Y(t) = \mathbb{E}e^{itY} = \dfrac{\lambda}{\lambda-it}$.

Нека $X_1 \in Exp(\lambda)$, $X_2 \in Exp(\lambda)$ и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$. Полагаме $X = X_1 + X_2$. Съгласно твърдението, което сме доказали в задача 5: $X \in \Gamma(2, \lambda)$. От независимостта на X_1 и X_2 следва, че $\Psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{it(X_1+X_2)} = \mathbb{E}e^{itX_1} \times \mathbb{E}e^{itX_2} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^2$.

Ще използваме резултата за база на математическата индукция, която ще направим. Нека индукционната хипотеза е, че твърдението е вярно за $n = k$, т.е.

Ако $X_1, \ldots, X_k$ са независими в съвкупност, експоненциално разпределени случайни величини с параметър λ и $X = \sum_{i=1}^{k} X_i \in \Gamma(k, \lambda)$, то $\Psi_X(t) = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - it}\right)^k$.

Остава да докажем, че е изпълнена индукционната стъпка (или индукционния преход), а именно че за $n = k + 1$ твърдението също е вярно.

Имаме X_i, $i = \overline{1,k+1} \in Exp(\lambda)$ са независими и $X = \sum_{i=1}^{k+1} = X_i$. Тогава,

$$\Psi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} = \mathbb{E}e^{it\sum_{j=1}^{k+1} X_j} = \prod_{j=1}^{k+1} \mathbb{E}e^{itX_j} = \prod_{j=1}^{k+1} \frac{\lambda}{\lambda - it} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^{k+1},$$

което искахме да докажем.

Окончателно, $\Psi_\xi(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} - \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha = \left(\dfrac{\beta - it}{\beta}\right)^{-\alpha} = \boxed{(1 - it\beta^{-1})^{-\alpha}}$

$\square$

Задача 5. Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими и експоненциално разпределени случайни величини, с параметър λ. Да се докаже, че $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ има гама разпределение $\Gamma(n, \lambda)$.

Доказателство:

Един от начините за доказване на това твърдение е чрез математическа индукция по n. Ще търсим по-кратък път до верността на това твърдение.

Ще разгледаме MGF функциите (moment-generating functions), които тук ще наричаме функции на момента на случайна величина.

Едно от основните свойства на функциите на момента е, че ако в произволен момент са равни, то и разпеделението на случайните величини, които описват ще е еднакво.

$$M_S(t) = M_Y(t) \Leftrightarrow S \overset{\text{разпределение}}{=} Y$$

Нека $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$ и $Y \in \Gamma(n, \lambda)$. Тогава

$$M_{X_i}(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_{X_i} \,\mathrm{d}\,x = \int_{0}^{\infty} e^{tx} \lambda e^{(-\lambda x)} \,\mathrm{d}\,x = \lambda \int_{0}^{\infty} e^{(t-\lambda)x} \,\mathrm{d}\,x =$$

$$\frac{\lambda}{t-\lambda} \int_{0}^{\infty} e^{(t-\lambda)x} \,\mathrm{d}(t-\lambda)x = \frac{\lambda}{t-\lambda} e^{(t-\lambda)x} \Big|_{0}^{\infty}$$

За да бъде добре дефинирана $M_{X_i}(t)$ е необходимо $t - \lambda < 0 \Rightarrow t < \lambda$:

$$M_{X_i}(t) = -\frac{\lambda}{\lambda - t} e^{-(\lambda - t)x} \Big|_{0}^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{0} = \frac{\lambda}{\lambda - t} \text{ за } t < \lambda.$$

$M_S(t) = \mathbb{E}e^{tS} = \mathbb{E}e^{t(X_1 + \ldots + X_n)}$. Имаме n независими в съвкупност експоненциално разпределени случайни величини X_i, $i = \overline{1,n} \Rightarrow$

$M_S(t) = \mathbb{E}e^{tX_1} \times \mathbb{E}e^{tX_2} \times \ldots \times \mathbb{E}^{tX_n} = \left(\dfrac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n$, за $t - \lambda$. Тоест пресметнахме за X_i, след което скалирахме.

Сега да разгледаме $M_Y(t)$.

$$M_Y(t) = \mathbb{E}e^{tY} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tY} f_Y(y) \mathrm{d}\,y = \int_{0}^{\infty} e^{tY} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\lambda y} \,\mathrm{d}\,y = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_{0}^{\infty} e^{(t-\lambda)y} t^{n-1} \,\mathrm{d}\,y$$

За да бъде добре дефинирана $M_Y(t)$ е необходимо да е изпълнено условието

$$t - \lambda < 0 \Rightarrow t < \lambda \Rightarrow M_Y(t) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-(\lambda-t)y} y^n \frac{\mathrm{d}\,y}{y} \overset{\substack{(\lambda - t)y = x \\ \mathrm{d}\,x = (\lambda - t)\mathrm{d}\,y \\ y = \frac{x}{\lambda - t} \\ \mathrm{d}\,y = \frac{\mathrm{d}\,x}{\lambda - t}}}{=}$$

$$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^n}{(\lambda - t)^n} \frac{\frac{\mathrm{d}\,x}{\cancel{\lambda - t}}}{\frac{x}{\cancel{\lambda - t}}} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x} \frac{x^n}{(\lambda - t)^n} \frac{\mathrm{d}\,x}{x} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{(\lambda - t)^n} \underbrace{\int_0^\infty e^{-x} \,.\, x^{n-1}\,\mathrm{d}\,x}_{\Gamma(n)} =$$

$$= \frac{\lambda^n}{\cancel{\Gamma(n)}} \times \frac{1}{(\lambda - t)^n} \times \cancel{\Gamma(n)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n, \text{ за } t < \lambda \Rightarrow$$

$$M_S(t) = M_Y(t) \Rightarrow S \overset{\text{разпр.}}{=} Y \Rightarrow S \in \Gamma(n, \lambda).$$

$\square$

Задача 6. $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини, като $\xi_n \in Bin(n, p_n)$ и $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Да се докаже, че редицара $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ е сходяща по разпределение, с гранична функция $\xi \in Pois(\lambda)$.

Доказателство:

Преди да докажем задачата, нека се върнем още една крачка назад и разгледаме бернулиево разпределена случайна величина $X \in Ber(p)$, с вероятност за успех p. От дефиницията на характеристична функция имаме, че $\phi(t) = \mathbb{E}[e^{iXt}]$. Тази функция е добре дефинирана и ограничена. Но тъй като в нашия случай X е бернулиева, то може да кажем, че $\mathbb{P}[X=1] = 1 - \mathbb{P}[X=0] = p$. Всяка очаквана стойност на $f(X)$ може да се изчисли като $\mathbb{E}[f(X)] = f(0) \times (1-p) + p \times f(1)$, при условие, че f е добре дефинирана в $x = 0$ и $x = 1$. В нашия случай $f(x) = e^{itx}$ и следователно $\mathbb{E}[e^{itX}] = e^{it\times 0}(1-p) + pe^{it} = 1 - p + pe^{it}$.

Характеристичната функция е функция, която определя еднозначно разпрделението на случайна величина. Може да се каже, че характеристичната функция е като идентификатор на закона за вероятността. Последното ще е правилно да се каже, поради формулата за инверсия и фактът, че на практика това е преобразувание на Фурие. Освен това, ако тази функция е безкрайно диференцируема в $t = 0$, може да намерим моментите на случайната величина:

$$i^k \mathbb{E}[X^k] = \frac{\partial^k \phi(t)}{\partial t^k}\Big|_t = 0$$

Коментар: всяка случайна величина има своята характеристична функция, но не всички функции са подходящи характеристични функции на случайна величина (критерии, като критерия на Polya, могат да кажат коя функция е подходяща характеристична функция на случайна величина. За повече информация: https://joelmoreira.wordpress.com/2011/07/20/polyas-criterion-for-positive-definite-sequences/)

Сега, нека се върнем към първоначалната задача. Очевидно, характеристичната функция на биномно разпределена случайна величина ще скалира тази на бернулиево разпределената и следователно ще има вида $(1 - p + e^{it})^n$.

Тогава $\lim_{n\to\infty} \phi_{\xi_n}(t) = \lim_{n\to\infty} (1 - p_n + p_n e^{it})^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{np_n}{n} + \frac{np_n e^{it}}{n}\right)^n =$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{-\lambda + \lambda e^{it}}{n}\right)^n = e^{-\lambda + \lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$, което е характеристичната функция

на поасоново разпределена случайна величина с параметър λ. Т.е.
$\xi_{n\to\infty} = Y \in Pois(\lambda)$, което искахме да докажем.

$\square$

Задача 7. Случайна величина X се нарича безгранично делима, ако за всяко естествено $n \in \mathbb{N}$ съществува редица $X_1, X_2, \ldots, X_n$ от независими и еднакво разпределени случайни величини така, че X и $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ имат еднакво разпределение. Докажете, че ако X има нормално, поасоново или гама разпределение, то X е безгранично делима.

Докаателство:

а) Нека $X_i \in \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, за $i = 1, 2, \ldots, n$. тъй като всички случайни величини X_i имат еднакво разпределение, то $\mu_i = \dfrac{\mu}{n}$ и $\sigma_i^2 = \dfrac{\sigma^2}{n^2}$ за всяко $i = \overline{1,n}$.

Но от линейното свойство на нормалното разпределение следва, че $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = n \times \mathcal{N}\left(\dfrac{\mu}{n}, \dfrac{\sigma^2}{n^2}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{N}\left(\dfrac{\mu}{n}, \dfrac{\sigma^2}{n^2}\right)$, което може да се направи за всяко n.

б) Нека случайната величина $X \in Pois(\lambda)$. $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Характеристичната функция на X е

$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{e^{itk-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda e^{it} - \lambda}$. За всяко положително цяло число n функцията $\sqrt[n]{\phi_x(t)}$ е характеристична за $Pois\left(\dfrac{\lambda}{n}\right)$.

в) Нека случайната величина $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$. Тогава $\phi(t) = \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}$ е характеристичната и функция. Но $\phi_n(t) = \left(\dfrac{\beta}{\beta - it}\right)^{\frac{\alpha}{n}}$ е характеристична функция на $\Gamma(\dfrac{\alpha}{n}, \beta)$

$\square$

Задача 8. Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини, като $\mathbb{E}\xi_k = a$ и $\mathbb{E}|\xi_k| < \infty$, $k = 1, 2, \ldots$, а τ е целочислена положителна случайна величина, независима от ξ_k и $\mathbb{E}\tau < \infty$. Да се докаже, че

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \ldots + X_\tau) = a\mathbb{E}\tau$$

Доказателство:

Имаме, че:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_\tau) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_\tau | \tau = n)\mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n)\mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n\geq 1} na\mathbb{P}(\tau = n) = a\mathbb{E}[\tau]\,.
\end{aligned}$$

Също така може да използваме и условно очакване. Полагаме $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$. Ясно е, че за случайна величина със случаен индекс τ, S_τ ще дава $S_\tau | \tau = n = S_n$ и тогава ще имаме $\mathbb{E}[S_\tau | \tau] = a\tau$. Следователно очакваната стойност е$\mathbb{E}[S_\tau] =$
$= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[S_\tau | \tau]\right] = = \mathbb{E}[a\tau] = a\mathbb{E}[\tau]$.

$\square$

Задача 9. Напишете интуитивно обяснение на „Законът за големите числа“. Посочете приложения на този закон.

В теорията на вероятностите, законът за големите числа (ЗГЧ) е теорема, която описва резултата, който ще получим, ако повтаряме един и същ експеримент достатъчно много на брой пъти. Според ЗГЧ, средната стойност на резултатите, получени от голям брой опити, трябва да бъде близка до очакваната стойност на един опит и ще има тенденция да се приближава до очакваната стойност, с извършването на повече опити.

По-формално може да опишем ЗГЧ по следния начин: Нека X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ са n на брой еднакво разпределени и независими в съвкупност случайни величини (например n различни експеримента от един тип) и $\mathbb{E}X_i = \mu < \infty$, за $i = \overline{1,n}$ (i се мени от 1 до n). Тогава $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \overset{\text{ЗГЧ}}{=} \mu$.

Нека разгледаме някакъв пример. В дадено казино има няколко на брой рулетки. Всяка една от тях, било то на „жива игра“ с крупие или на електронна машина, е маркирана с 37 числа от 0 до 36 ($0 - 36$ за европейски вариант на рулетка, докато $00, 0, 1, \ldots, 36$ за американски. За нашия пример разглеждаме европейска рулетка). Числото 0 е маркирано в зелен цвят и казиното не го приема нито за четно нито за нечетно, както в математиката се приема, че е четно. Останалите числа (без нулата) са разделени на две половини – в едната от тях числата са маркирани с червен цвят, а в другата с черен.

Във всяка една отделна игра, крупието прави следната операция, която в нашия случай може да разглеждаме като „експеримент“: завърта колелото на рулетката и пуска топче да се върти около нея. От силата на триенето топчето ще намалява скоростта си и когато достигне определена скорост, под влиянието на земното притегляне ще падне по случаен начин върху секция с някакво число. Нека X_i е случайната величина – числото от секцията, на което е попаднало топчето от игра i. Очевидно, всяко число е с вероятност за попадение $\mathbb{P}(X_i = k) = \dfrac{1}{37}$, $k = \overline{0{,}37}$.

Нека разгледаме и следните случайни величи:

$Y = \{$брой паднали се четни числа 10 игри (завъртания на рулетката)$\}$
$Z_i = \{$пада се червено число на i-тата игра$\}$
$T_i = \{$пада се число от сектор Tiere$\}$, сектор Tier включва 12 числа, който се считат за най-отдалечени от нулата (от френски – tiere – трети сектор)

Очевидно $Y_i \in Ber(p)$, където $p = \dfrac{18}{37}$ (нулата не е нито четно, нито нечетно според правилата на казиното). Аналогично $Z_i \in Ber(p)$ (нулата е число в зелено).

$T_i \in Ber(p')$, където $p' = \dfrac{12}{37}$.

Тогава $\overline{Y_n} = \dfrac{Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}Y_1$.

Според ЗГЧ: $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{Y_i} = \lim\limits_{i\to\infty} \overline{Z_i} = \dfrac{18}{37}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \overline{T_i} = \dfrac{12}{37}$.

ЗГЧ е важен, тъй като гарантира дългосрочни резултати за средните стойности на някои случайни събития (в случая на този закон разчита казиното). Например, докато казиното може да загуби пари при едно завъртане на рулетката (например играч е заложил на червено число и топчето е попаднало в червено число), печалбата му ще има тенденция към предвидим процент за голям брой завъртания. Всяка печеливша серия на играч, рано или късно ще бъде преодоляна от параметрите на играта, които са в полза на казиното. Важното тук, е да се отбележи, че закона се прилага само когато се разглеждат **голям брой наблюдения**. Няма принцип, че малък брой наблюдения ще съвпадат с очакваната стойност или че малка поредица от стойности ще балансира веднага резултата.

В горе-описания случай, ако например играч залага по 5 лв. на червено $(\times 2)$, то в дългосрочен план, той ще печели $5 \times p - 5 \times q = 5 \times \dfrac{18}{37} - 5 \times \dfrac{19}{37} = -\dfrac{5}{37}$, т.е. ще „губи" по 5 лева на всеки 37 игри – средно.

Аналогично, ако например играча залага по 5 лв. на сектор Tier $(\times 3)$:
в дългосрочен план, той ще печели $10 \times \dfrac{12}{37} - 5 \times \dfrac{25}{37} = -\dfrac{5}{37}$, т.е. отново ще „губи" по 5 лева на всеки 37 игри – средно.

Нека се върнем на случайната величина Y и например за първите 10 завъртания на рулетката са се паднали 7 четни числа, за вторите 10 завъртания са се паднали 9 четни числа, а за третите 10 завъртания – 8 четни числа.

Тогава $\overline{Y_3} = \dfrac{7+9+8}{3} = 8 >> \mathbb{E}Y = \dfrac{18}{37} \times 10 \approx 4.86$.

Да си представим сега, че след 1000 опита отново ще сме доста над средната величина за един опит. Грешната интуиция би била да си мислим по следния начин „*след като сме над средната стойност и знаем ЗГЧ, то вероятностните богове би трябвало сега да дават по-малко четни числа на рулетката, за да балансират нещата и по някакъв начин да оправят разликата*". Но това **не е** точното нещо което се случва. Тази грешна интуиция всъщност е известна като „*заблудата на комарджията*". Това е погрешното убеждение, че ако дадено събитие се е случвало по-често от нормалното през изминалия период, то ще е по-малко вероятно да се случи в бъдеще (или обратно). Но вероятността реално не се променя, тъй като това са статистически независими събития и притежават свойството безпаметност. Играта се рестартира и няма никакво значение какво се е случвало преди нея – рулетката не се променя, числата са същите, топчето е същото и вероятността остава същата.

Но ЗГЧ не се интересува от това колко на брой опита сме направили преди стигането до дисбаланса – може да са 100, може да са $100\,000$ или дори $1\,000\,000\,000$ – няма никакво значение, защото ще са краен брой! Ще остават още безкрайно много опита, които да имат възможността да оправят дисбаланса – и доказано ще го направят. Сравнено с безкрайността всеки изброим брой опити е нищожен, а останалите безкрайно много опити ще са с очакването към което ще се приближаваме.

С каквато и стратегия да атакува играча, той няма как да пребори теорията на вероятностите и според зададените правила от казиното – винаги ще губи в дългосрочен план – това е по ЗАКОН! Но, ако играча има късмет и знае кога да спре, може би няма да е толкова добър клиент за казиното, но в дългосрочен план, колкото и късмет да има, той ще е доказано губещ. Съществуват алгоритми на Даламбер и алгоритми на Фибоначи, за „разумно" залагане (под „разумно" се разбира такова, което минимизира вероятността от загуба след краен брой залаганаия), които са доста интересни и се базират както на начина на правене на залози (кога и по какъв начин да увеличаваш и намаляваш, както и с какъв начален ресур трябва да започнеш) така и на идеята за момента на спиране на игра от страна на играча. Но дори и тези алгоритми в дългосрочен план (ако се пренебрегне крайния момент на спиране) не могат да „излъжат" ЗГЧ. Те само максимизират вероятностт за печалба за краен брой игри (за съжаление от съображения за краткост ще трябва да оставим на читателя да се поинтересува сам за тях, ако му е интересно).

Освен в казиното, лотарията и хазарта като цяло, закона за големите числа намира широко приложение в т.нар. Монте Карло алгоритми. Тези алгоритми са широк клас изчислителни (апроксимиращи с някаква грешка) алгоритми, които разчитат на повтарянето на случайни извадки за постигане на числов резултат.

Методите Монте Карло варират, но са склонни да следват определен модел:

1. Дефиниране на областта на възможната входяща информация.
2. Генериране на входяща информация на случаен принцип от вероятностно разпределение върху областта.
3. Извършване на детерминистични изчислявания на входящата информация.
4. Съвкупност на резултатите.

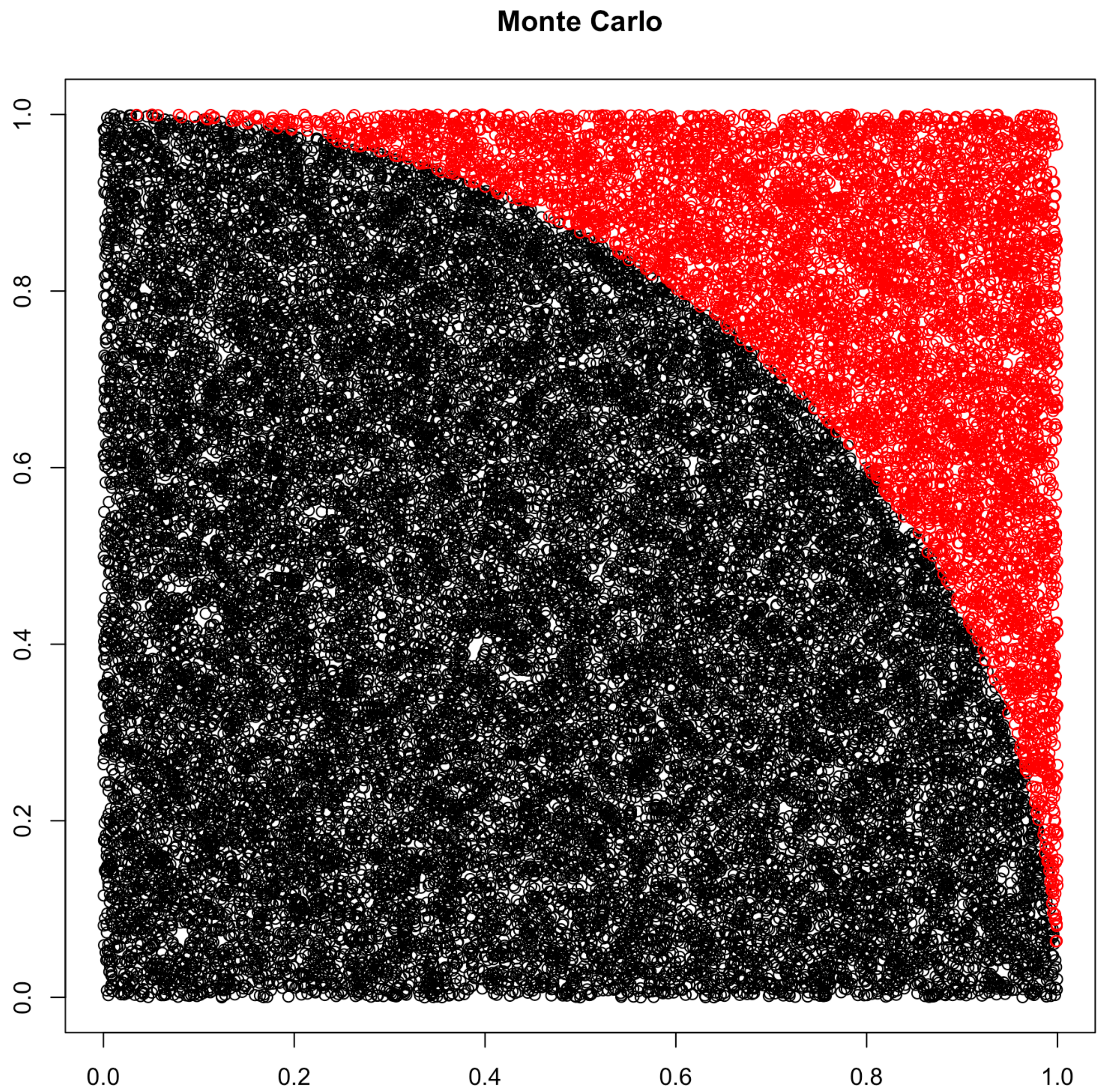
Например, нека разгледаме кръг вписан в единичен квадрат. Като се има предвид, че в кръга и квадрата има съотношение на повърхнините, което е $\frac{\pi}{4}$, стойността на π може да бъде приблизително изчислена с помощта на метод Монте Карло:

1. Начертава се единичния квадрат на лист хартия, като долната му страна съвпада с абсцисната ос, а дясната с ординатната ос на координатна система $\mathrm{O}_{\overrightarrow{xy}}$.
2. Равномерно (случайно) се разпръсват няколко обекта с еднакъв размер (песъчинки) над квадрата.
3. Преброяват се обектите във вътрешността на кръга и общия брой на обектите.

4. Съотношението на двата броя е приблизително равно на съотношението между двете области, което е $\frac{\pi}{4}$. Резултатът се умножава по 4, за да изчислим π.

Естествено би било много трудно за човек да брой песъчинки, но за компютър е изключително тривиално да симулира подобен експеримент. Нека покажем подобна програма на програмния език $\mathbf{R}$.

```
pi = function(n = 100000){
        x = runif(n); y = runif(n); z = sqrt(x^2 + y^2)
        print(length(which(z <= 1)) * 4 / n)
        plot(x[which(z <= 1)], y[which(z <= 1)], main = "Monte Carlo")
        points(x[which(z > 1)], y[which(z > 1)], col = 'red')
}
pi( )
# [1] 3.141467
```



Програмата се изпълни ча части от секундата и забележете колко точно приближение получихме. □

Задача 10. Напишете интуитивно обяснение на „Централна Гранична Теорема“. Посочете някои свойства и приложения на „Нормалното разпределение“.

Централната Гранична Теорема (ЦГЧ) казва, че ако $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са n на брой независими в съвкупност и еднакво разпределени случайни величини със средно $\mathbb{E}X_1 = \mu$ и крайна дисперсия $DX_1 = \sigma^2$, то случайната величина $Z = \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ще има стандартно нормално разпределение $\mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$, когато $n \longrightarrow \infty$, където $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

Да обясниш нещо което е контра-интуитивно по интуитивен начин е доста трудна задача.

Истинската стойност на ЦГТ е, че тя ни позволява да използваме нормалното разпределение като приближение в случаите, когато не знаем истинското разпределение.

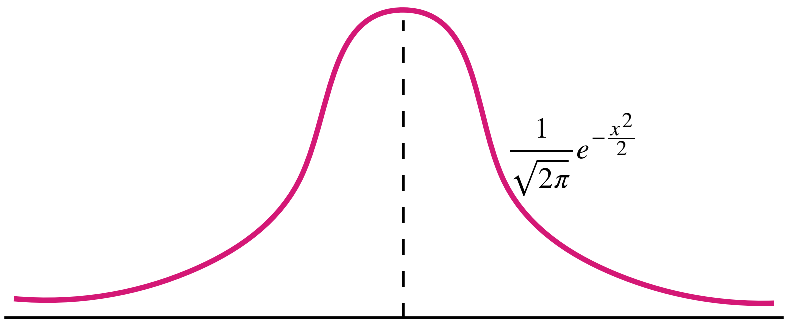
Представете си, че хвърляме стндартен зар много пъти. С течение на времето ще очакваме да получим еднакъв брой падали се точки на горната страна на зара за всеки брой точки.

Сега да направим същото упражнение с два зара. Тук имаме само един шанс от общо 36 (което е около $3\,\%$ вероятност) да се паднат сумарно 2 или 12, защото имаме само по един начин това да се случи – или и на двата зара да се падне 1 или и на двата зара да се падне 6, но за общо 7 – ще имаме много повече възможни сценарии.

Сега нека го направим отново, този път с три зара. Шансът на 3 (или 18) е 1 на 216 $(6 \times 6 \times 6)$. Шансът на 10 или 11 е много по-голям.

Формата на разпределението преминава постепенно от плоска (еднаква) до нещо, което изглежда доста близо до нормалното разпределение (камбановидно) и имаме само три зара. Всеки път, когато добавяме зар, разпределението ще се приближава до нормалното. И тук Централната Гранична Теорема започва да издава съществуването си интуитивно.

ЦГТ измерва каква е грешката в ЗГЧ. Т.е. ние знаем, че $\dfrac{S_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \mu$, почти сигурно (траекторно) и скалираме грешката по $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и виждаме, че се държи като нормално разпределение.



Често се дава за пример пресмятането на средно IQ за група хора или тяхна височина и т.н., но за да бъде IQ-то нормална разпределена случайна величина е необходимо да бъде средно аритметичен ефект от множество независими характеристики. А дали това е така? Възможно е да е така, но това не е доказано – прави се допускане. За това няма да давам този комерсиален пример.

Във физиката ЦГТ може да ни даде каква е грешката между акумулиран ефект и среден ефект, който сме измерили в някаква система.

Следствия:

$\oplus$ $\quad Z_n := \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, където $\mu = \mathbb{E}X_1$, $\sigma = \sqrt{DX_1}$. ЦГТ гласи следното:

Ако се интересуваме от $\mathbb{P}\left(Z_n \in (a,b)\right) = \mathbb{P}\left(S_n \in (n\mu + a\sigma\sqrt{n}, n\mu + b\sigma\sqrt{n})\right) \sim \mathbb{P}\left(Z \in (a,b)\right) =$

$$= \Phi(b) - \Phi(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \underbrace{\int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{d}y}_{\substack{\text{този интеграл}\\ \text{от това с какви}\\ \text{случайни величини}\\ \text{сме стартирали.}\\ \text{Той зависи само от } a \text{ и } b}}.$$

$$\mathbb{P}(Z_n < a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(a) = \mathbb{P}(Z < a); \qquad \mathbb{P}(Z_n \geq a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \overline{\Phi}(a) = 1 - \Phi(a)$$

$$\mathbb{P}(Z_n < \mu) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(\mu).$$

Т.е. ЦГТ дава инструмент, с който може да приближаваме вероятности.

ЦГТ трябва да върви в комплект с теоремата на Берн-Есеен, която показва колко бързо се схожда до това стандартно нормално разпределение.
<u>Тоерема на Берн-Есеен</u>:

Нека $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ са независими и еднакво разпределени случайни величини с $\mathbb{E}X_1 = \mu$, $DX_1 = \sigma^2$ и $\mathbb{E}\,|\,X_1 - \mathbb{E}X_1\,|^3 = \rho_3$.

Тогава $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) - \underbrace{\Phi(x)}_{=\mathbb{P}(Z<x)} \right| \le 0{,}4748 \frac{\rho^3}{\sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}$.

Свойства на нормалното разпределение:

Казваме, че X има нормално разпределение със средно $\mathbb{E}X = \mu$ и дисперсия $DX = \sigma^2 \Leftrightarrow$ има плътностна функция $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Записваме $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \le t\right) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$.

- ✦ $\underbrace{\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)}_{\text{независими}} = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$
- ✦ $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) + c = \mathcal{N}(\mu + c, \sigma^2), c = const$.
- ✦ $c\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \mathcal{N}(c\mu, c^2\sigma^2)$

X е нормално стандартно разпределена случайна величина, ако $\mu = 0$ и $\sigma^2 = 1$.

Нека положим $Z = \mathcal{N}(0, 1)$.

$$f_Z(t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{t^2}}; \quad F_Z = \underbrace{\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\substack{\text{няма примиривна} \\ \text{не може да се} \\ \text{пресметне явно}}} = \underbrace{\Phi(t)}_{\substack{\text{ползваме} \\ \text{таблица}}}.$$

Нормалното разпределение е симетрично и има камбановидна форма.

Приложение/пример:

Правилен зар се хвърля 6 милиона пъти. Каква е вероятността да се паднат повече от 1 млн. шестици?

Нека $X_i = \{$пада се 6-ца на i-тото хвърляне на зара$\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

$X_i \in \mathrm{Ber}\left(p = \frac{1}{6}\right)$ и $\underbrace{\perp\!\!\!\perp_{i=1}^{n} X_i}_{\text{независими}}$.

$\mathbb{E}X_1 = 1 \times p + 0 \times (1-p) = p; \qquad \mathbb{E}X_1^2 = 1^2 \times p + 0^2 \times (1-p) = p;$

$DX = \mathbb{E}X_1^2 - (\mathbb{E}X_1^2) = p - p^2 = p(1-p).$

Нека $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \Rightarrow S_n \in \text{Bin}\left(n, p = \dfrac{1}{6}\right).$

$$\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}\sum_{i-1}^{n} X_i \overset{\substack{\mathbb{E}\text{ е линеен} \\ \text{функционал}}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_1 = n \times \mathbb{E}X_1 = np = \mu;$$

$$DS_n = D\sum_{i=1}^{n} \overset{\text{независимост}}{=} \sum_{i=1}^{n} DX_1 = n \times DX_1 = np(1-p) = \sigma^2.$$

S_n е случайна величина, която е сума от еднакво разпределени случайни величини (тук не се интересуваме от това какви точно са разпределенията, които се сумират за да образуват S_n, а само от това, че са еднакви и имат добре дефинирано средно)

$\overset{\text{ЗГЧ}}{\Rightarrow} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = \mu.$ От друга страна, ЦГТ ни дава информацията относно това

как точно схожда тази редица $R_n = \dfrac{S_n}{n}$ към средното (с какъв порядък/ колко бързо/ каква е грешката (теорема на Берн-Есеен)).

$\overset{\text{ЦГТ}}{\Rightarrow} \dfrac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$ Тоест за достатъчно големи n е напълно резонно да

направим приближението $S_n \sim \sqrt{n\sigma^2} \times \mathcal{N}(0,1) + n\mu = \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2).$

Следователно за $\underbrace{n \gg 30}_{\text{Rule of thumb}}$: $\mathbb{P}(l \le S_n \le r) \approx \Phi\left(\dfrac{l - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) - \Phi\left(\dfrac{r - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right).$

Тук използвахме лиинеините свойства на нормалното разпределение.

За биномно разпределената случайна величина $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ с $X_i \sim \text{Ber}(p)$ знаем, че $p = \dfrac{1}{6}$ и имаме $\mu_1 = \dfrac{1}{6}$ и $\sigma_1^2 = pq = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{5}{6}.$

Следователно, за $n = 6$ млн. $\gg 30$,

$$\mathbb{P}\left(S_{6\text{ млн.}} > 1\text{ млн.}\right) \approx \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(n\mu_1, n\sigma_1^2) > 1\text{ млн.}\right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{1\text{ млн.} - n\mu_1}{\sqrt{n\sigma_1^2}}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > 0\right) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq 0) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}.$$

Или директно от по-горе изведената формула:

$$\mathbb{P}\left(S_n > 1\text{ млн.}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(S_n \leq 1\text{ млн.}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{1\text{ млн.} - 6\text{ млн.} \times \frac{1}{6}}{\sqrt{6\text{ млн.} \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6}}}\right) = 1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

$\square$