Упражнение 4 по СЕМ. Условна вероятност. Независимост

23 октомври 2020 г. / групи 1,2,3

Задача 1. Известни са вероятностите на събитията A, B, AB. Да се определят $\mathbb{P}(A\overline{B})$ и $\mathbb{P}(\overline{B}\,|\,\overline{A})$.

Решение:

$\{B, \overline{B}\}$ = образуват пълна група от събития $\Rightarrow A = AB \cup A\overline{B}$. Освен това $AB \cap A\overline{B} = \emptyset$.
Следователно $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}(A\overline{B}) \Rightarrow \mathbb{P}(A\overline{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)$.

Аналогично $\overline{B} = \overline{B}A \cup \overline{B}\overline{A}$ и $\overline{B}A \cap \overline{B}\overline{A} = \emptyset \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{B}A) + \mathbb{P}(\overline{B}\overline{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{B}\overline{A}) &= \mathbb{P}(\overline{B}) - \mathbb{P}(\overline{B}A) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(B) - (\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(AB)) = \\ &= 1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)\,.\end{aligned}$$

Следователно $\mathbb{P}(\overline{B}\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{B}\overline{A})}{\overline{A}} = \dfrac{1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(AB)}{1 - \mathbb{P}(A)}$.

II н/н:

$$\mathbb{P}(\overline{B}\,|\,\overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B}\overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} \overset{de\ Morgan}{=} \frac{\mathbb{P}(\overline{A \cup B})}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{1 - \mathbb{P}(A \cup B)}{1 - \mathbb{P}(A)} = \frac{1 - \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(AB)}{1 - \mathbb{P}(A)}.$$

Задача 2. Вероятността, че в резултат на четири независими опита събитието A ще настъпи поне веднъж е равна на $\frac{1}{2}$. Да се определи вероятността за настъпване на A при един опит, ако вероятността за всеки опит е една и съща.

Решение:

Нека $A_k = \{A$ настъпва точно в k-тия опит (но в другите опити не настъпва)$\}$, $k = \overline{1,4}$
Знаем, че $\{A_k\}_{k=1}^4$ са независими събития ($*$).

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = x$. Търси се x. Дадено е още, че $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_k\right) = \frac{1}{2}$.

За да използваме ($*$) ни трябва сечение

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^4 A_k) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\cup_{i=1}^4 A_k}) =$$

$$\overset{de\ Morgan}{=} 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^4 \overline{A_k}) \overset{\mathscr{L}ema\ 1}{=} 1 - \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 1 - (1 - x)^4$$

Следователно $x = 1 - \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

$\mathscr{L}ema$ 1. Ако $A_1, A_2, \ldots, A_k$ са събития от $\mathscr{F}$ и са независими в съвкупност, тогава $A_1', A_2', \ldots, A_k'$ $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k})$ с или без черти $\rightarrow (A_1, \overline{A_2}, A_3, \overline{A_4}, \ldots)$ също са независими.

Задача 5. В компютърен център има три принтера А, Б и В, които работят с различна скорост. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите за заявка да бъде изпратена към А, Б или В са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да се задави и да провали печатането е 0.01, 0.05 и 0.04 съответно. Ако печатането на даден документ се прекрати, каква е вероятността това да е по вина на първия принтер?

Решение:

Нека $H_k = \{$документа е даден за печат на k-тия принтер$\}$, $k = \overline{1{,}3}$
$\{H_k\}_{k=1}^{3}$ са пълна група от събития и $Z = \{$печатането на документ се е провалило$\}$.

Имаме, че $\begin{cases} \mathbb{P}(Z \,|\, H_1) = 0.01, \\ \mathbb{P}(Z \,|\, H_2) = 0.05, \\ \mathbb{P}(Z \,|\, H_3) = 0.04 \end{cases}$ и $\begin{cases} \mathbb{P}(H_1) = 0.6, \\ \mathbb{P}(H_2) = 0.3, \\ \mathbb{P}(H_3) = 0.1 \end{cases}$

Търси се $\mathbb{P}(H_1 \,|\, Z)$. От формулата на Бейс имаме, че:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(H_1 \,|\, Z) &= \frac{\mathbb{P}(Z \,|\, H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(Z \,|\, H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \\ &= \frac{0.01 \times 0.6}{0.01 \times 0.6 + 0.05 \times 0.3 + 0.04 \times 0.1} = \frac{6}{6 + 15 + 4} = 24\,\% \end{aligned}$$

Задача 7. На изпит се явяват 100 студента, 60 момчета и 40 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.5, а момчетата с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите да са момичета?

Решение:

Нека $H_i = \{$ от слузайно избрани 3 контролни работи, точно i са на момичета$\}$, за $i = 0,\, 1,\, 2,\, 3$
$A = \{$от случайно избрани 3 контролни работи, точно 2 са успешни$\}$

Търси се $\mathbb{P}(H_3 \,|\, A)$.

Нека пресметнем:

$\mathbb{P}(A \,|\, H_0) = \binom{3}{2} \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6$ (избираме 2 от 3 момчета, които да са успешни и останалото е неуспешно)

$\mathbb{P}(A \,|\, H_1) = 0.5 \times \binom{2}{1} \times 0.4 \times 0.6 + 0.5 \times 0.4 \times 0.4$ (нека момичето е успешно и изберем 1 от 2 момчета което да е успешно; след това нека момичето да е неуспешно - тогава и двете момчета трябва да са успешни)

$\mathbb{P}(A \,|\, H_2) = 0.4 \times \binom{2}{1} \times 0.5 \times 0.5 + 0.6 \times 0.5 \times 0.5$ (нека момчето е успешно, тогава избираме 1 от 2 момичета което да е успешно; след това нека момчето е неуспешно, тогава и двете момичета ще са успешни)

$\mathbb{P}(A \mid H_3) = \binom{3}{2} \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5$ (избираме 2 от 3 момичета, които да са успешни)

Сега от формулата на Бейс следва, че: $\mathbb{P}(H_3 \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \mid H_3) \,.\, \mathbb{P}(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(A \mid H_i) \,.\, \mathbb{P}(H_i)}$.

Нека сега пресметнем:

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{60}{30}}{\binom{100}{3}} = \frac{60 \times 59 \times 58}{100 \times 99 \times 98} = 0.21162647$$

$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{40}{1} \times \binom{60}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{40 \times 60 \times 59 \times 3}{100 \times 99 \times 98} = 0.43784787$$

$$\mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{40}{2} \times \binom{60}{1}}{\binom{100}{3}} = \frac{40 \times 39 \times 60 \times 3}{100 \times 99 \times 98} = 0.28942486$$

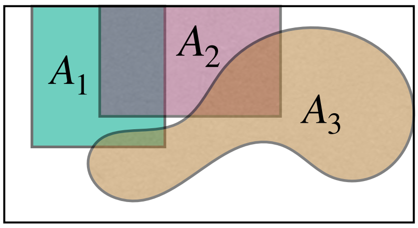
$$\mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{40 \times 39 \times 38}{100 \times 99 \times 98} = 0.0611008$$

Сега остана само да заместим в по-горната формула на Бейс и да получим че търсената вероятност е $\mathbb{P}(H_3 \mid A) \approx 0.07$.

Задача 8. Дадени са $n \geq 3$ събития, които са равновероятни, две по две независими, като всеки три от тях са несъвместими. Каква е максималната вероятност на тези събития?

Решение:

Нека $n = 3$: A_1, A_2, A_3. Тогава от условието $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = x$.
$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \,.\, \mathbb{P}(A_j)$, за $1 \leq i \leq j \leq 3$ и $A_1A_2A_3 = \emptyset$.



Търси се $\max(x) = ?$

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = x > 0$
$\mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_1A_2) = x^2 > 0 \Rightarrow$ сечението не е празно.

Пълна група е синоним на независимост.
A_1A_2, A_2A_3, A_3A_1 – несъвместими, част от пълна група.

$A_1A_2,\ A_2A_3,\ A_3A_1,\ \overline{A_1}\,\overline{A_2}$ – несъвместими, част от пълна група (или цяла пълна група) и две по две независими.

$\Omega \supset A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\Omega) \geq \mathbb{P}(A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2})$$

$$\Rightarrow 1 \geq \mathbb{P}(A_1A_2 \cup A_2A_3 \cup A_3A_1 \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2}) = \sum_{1\leq i<j\leq 3} \mathbb{P}(A_iA_j) + \mathbb{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) = x^2 + x^2 + x^2 + \mathbb{P}(\overline{A_1}\,\overline{A_2}) =$$

$$= 3x^2 + (1-x)(1-x) = 3x^2 + 1 - 2x + x^2 = 4x^2 - 2x + 1$$

Следователно $2x(2x-1) \leq 0,\ x \leq \dfrac{1}{2}$. Остава въпроса достига ли се $\dfrac{1}{2}$?

Отговора ще го дадем с директен пример:

$\varepsilon : \Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ – избираме по случаен начин число y и дефинираме:

$$A_1 = \{1, 2\}$$
$$A_2 = \{2, 3\}$$
$$A_3 = \{3, 4\}$$

$$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1A_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}, A_1A_2A_3 = \emptyset.$$