Упражнение 5 по СЕМ - Решения

7 ноември 2020 г.

Задача 0 Нека $n \in \mathbb{N}$ и $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{A}$ са събития от $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$. Да се докаже, че

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_i \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbf{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k} \mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n A_i).$$

Решение: С индукция по n ще докажем формулата. При $n = 2$ получаваме равенството $\mathbf{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A_2) - \mathbf{P}(A_1 \cap A_2)$, което е в сила предвид свойство 3 на вероятностната мярка. Да предположим, че формулата е вярна за n събития и да извършим индуктивната стъпка $n \longrightarrow n+1$:

$$\mathbf{P}(\cup_{i=1}^{n+1} A_i) = \mathbf{P}((\cup_{i=1}^n A_i) \cup A_{n+1}) = \mathbf{P}(\cup_{i=1}^n A_i) + \mathbf{P}(A_{n+1}) - \mathbf{P}((\cup_{i=1}^n A_i) \cap A_{n+1})$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i<j \le n} \mathbf{P}(A_i A_j) + \cdots (-1)^{n-1} \mathbf{P}(\cap_{i=1}^n A_i) - \mathbf{P}(\cup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \le i<j \le n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i<j<k \le n+1} \mathbf{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^n \mathbf{P}(\cap_{i=1}^{n+1} A_i).$$

Задача 1 Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан. Всеки един от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент на даден ден (24часа). Каква е вероятността параходите да не се изчакват, ако за разтоварването на първия са необходими 6ч, а за втория 4ч.

Решение: Нека A е събитието - параходите не се изчакват. Нека x и y са съответно часът в който пристига първия, втория параход на фиксиран ден. Тогава

$$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\{x - y \ge 4\} \cup \{y - x \ge 6\} | \{0 \le x \le 24\} \cap \{0 \le y \le 24\}) = \frac{\frac{20 \times 20}{2} + \frac{18 \times 18}{2}}{24^2} = \frac{181}{288}.$$

Задача 2 Автобусите от линия А се движат на интервали от шест минути, а от линия В на четири минути, независимо от автобусите от линия А. Да се пресметне вероятността:
а) автобус от А да дойде преди автобус от Б;
б) пътник, дошъл в случаен момент на спирката, да чака не повече от две минути.

Решение: Нека C и D са съответно събитията - автобус от линия А идва преди автобус от линия В, пътник идващ в случаен момент на спирката, чака не повече от 2 минути до идването на автобус от линия A или линия B. Нека $x,\ y$ са съответно времето в минути от последното идване на автобус от линия A, съответно линия B. Тогава $0 \le x < 6,\ 0 \le y < 4$ и $\mathbf{P}(C) = \mathbf{P}(\{6-x < 4-y\}|\ \{0 \le x < 6\} \cap \{0 \le y < 4\}) = \mathbf{P}(\{x-y > 2\}|\ \{0 \le x < 6\} \cap \{0 \le y < 4\}) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$. $\mathbf{P}(D) = 1 - \mathbf{P}(\overline{D}) = 1 - \mathbf{P}(\{x < 4\} \cap \{y < 2\}|\ \{0 \le x < 6\} \cap \{0 \le y < 4\}) = 1 - \frac{8}{24} = \frac{2}{3}$.

Задача 3 Дадена е отсечка с дължина K. По случаен начин се избират две други отсечки с дължина по-малка от K. Каква е вероятността от трите отсечки да може да се построи триъгълник?

Решение: Нека $x,\ y$ са съответно дължините на другите 2 отсечки. Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{x+y > K\}|\ \{0 < x, y < K\}) = \frac{\mu(\{x+y>K\} \cap \{0<x,y<K\})}{\mu(\{0<x,y<K\})} = \frac{\frac{K^2}{2}}{K^2} = \frac{1}{2}$.

Задача 4 Каква е вероятността от три избрани по случаен начин отсечки с дължина по-малка от K да може да се построи триъгълник?

Решение: Нека $A,\ H_k,\ k = 1, 2, 3$ са съответно събитията: от трите отсечки може да се построи триъгълник; максималната по дължина от трите отсечки е x за $k = 1$, y за $k = 2$, z за $k = 3$. Тогава събитията H_k образуват пълна група, $\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{3}$ и съгласно предходната задача $\mathbf{P}(A|H_k) = \frac{1}{2}$. От формулата за пълната вероятност получаваме $\mathbf{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{P}(A|H_k)\mathbf{P}(H_k) = \frac{1}{2}$.

Задача 5 Каква е вероятността сумата на две случайно избрани положителни числа, всяко от които е по-малко от 1, да бъде по-малка от 1, а произведението им по-малко от 2/9.

Решение: Нека $x,\ y$ са случайно избраните числа от $[0, 1]$. Тогава

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\}|\ \{0 < x,\ y < 1\}) = \frac{\mu(\{x+y<1\} \cap \{xy < \frac{2}{9}\} \cap \{0 < x,\ y < 1\})}{\mu(\{0 < x,\ y < 1\})}$$

$$= \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} (1 - x - \frac{2}{9x})dx = \frac{1}{2} - (x - \frac{x^2}{2} - \frac{2\ln x}{9})|_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{2\ln 2}{9} \approx 0.487$$

Задача 6 Върху окръжност по случаен начин са избрани 3 точки. Да се определи вероятността, тригълникът с върхове в избраните точки да бъде остроъгълен.

Решение: Нека Oxy е фиксирана координатна система в равнината, k е единичната окръжност и $\triangle ABC$ е случайният триъгълник вписан в k, като без ограничение $A(1, 0)$. Нека $\angle AOB = \phi,\ \angle AOC = \psi$, като без ограничение $\phi \in [0, \pi]$. За пространството от елементарни изходи Ω и за подпространството $S \subset \Omega$, определящо остроъгълен $\triangle ABC$ намираме

$$\Omega = \{(\phi, \psi) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le \phi \le \pi,\ 0 \le \psi \le 2\pi\} = [0, \pi] \times [0, 2\pi],$$

$$S = \{(\phi, \psi) \in \Omega \mid \pi \le \psi \le \pi + \phi\}.$$

Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \frac{\mu(S)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi^2/2}{2\pi^2} = \frac{1}{4}$.

Задача 7 По случаен начин три точки попадат върху три различни страни на квадрат. Каква е вероятността центърът на квадрата, да се съдържа във вътрешността на триъгълникът с върхове в избраните точки?

Решение: Два от върховете на триъгълникът лежат на две срещуположни страни на квадрата, например нека това са върховете A и B. Тогава точка C лежи върху някоя от другите две срещуположни страни на квадрата с равна вероятност $\frac{1}{2}$. Ако C и центърът на квадрата O са от една и съща страна на AB, то O лежи във вътрешността на $\triangle ABC$. Ако C и O са от различни страни на правата AB, то условието не е изпълнено. Отговор $\frac{1}{2}$.