Упражнение 5 по СЕМ. Формула на Бейс. Геометрична вероятност

2 ноември 2020 г. / групи 4/5

Задача 1. Разполагаме с тест за рядко заболяване, който е точен в $99\,\%$ от случаите и при заразените (когато трябва да е положителен), и при незаразените (когато трябва да е отрицателен). Ако знаете, че $0{,}5\,\%$ от населението има това заболяване, каква е вероятността случайно избран човек с положителен тест да е болен?

Решение:

Нека $A = \{$тестът е положителен$\}$, $B = \{$случаино избран човек е болен$\}$.
По условие имаме, че $\mathbb{P}(B) = 0.5\,\%$ и $\mathbb{P}(A\,|\,B) = 99\,\%$.
Търси се: $\mathbb{P}(B\,|\,A)$.

Тъй като B и $\overline{B}$ образуват пълна група от събития, то $A = AB \cup A\overline{B}$ и освен това $AB \cap A\overline{B} = \emptyset \;\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(AB) + \mathbb{P}A\overline{B} = \mathbb{P}(A\,|\,B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\,|\,\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})$.

Сега, от формулата за условна вероятност имаме, че:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(AB)}{\mathbb{P}(A)} &= \frac{\mathbb{P}(A\,|\,B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A\,|\,B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A\,|\,\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} = \\
&= \frac{99\% \times 0.5\,\%}{99\% \times 0.5\% + 1\% \times 99.5\,\%} = \\
&= \frac{99 \times \frac{1}{200}}{99 \times \frac{1}{200} + 1 \times \frac{199}{200}} = \frac{99}{99 + 199} = \frac{99}{298} = 33.22\,\%
\end{aligned}.$$

Задача 2. В компютърен център има три принтера A, B и C. Заявките за печат се изпращат към първия свободен принтер. Вероятностите заявка да бъде изпратена към A, B и C са съответно 0.6, 0.3 и 0.1. Вероятността за всеки от принтерите да провали печатането е съответно 0.01, 0.05 и 0.04. Ако печатането на даден документ е било прекратено, каква е вероятността причината да е грешка в принтера A?

Решение:

Нека $A = H_1$, $B = H_2$ и $C = H_3$.
Нека $H_i = \{$заявката е изпратена към i-тия принтер$\}$, $i = 1, 2, 3$ и $D = \{$принтерът се е провалил$\}$

Имаме, че $\begin{cases} \mathbb{P}(H_1) = 0.6 \\ \mathbb{P}(H_2) = 0.3 \\ \mathbb{P}(H_3) = 0.1 \end{cases}$ и $\begin{cases} \mathbb{P}(D\,|\,H_1) = 0.01 \\ \mathbb{P}(D\,|\,H_1) = 0.05 \\ \mathbb{P}(D\,|\,H_1) = 0.04 \end{cases}$. Търси се $\mathbb{P}(H_1\,|\,D)$.

От формула на бейс имаме, че

$$\mathbb{P}(H_1 \mid D) = \frac{\mathbb{P}(D \mid H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(D \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)} = \frac{0.01 \times 0.6}{0.01 \times 0.6 + 0.05 \times 0.3 + 0.04 \times 0.1} = \frac{6}{6 + 15 + 4} =$$

$$= \frac{6}{25} = 24\,\%\,.$$

Задача 3. Дадени са три жетона. Първият има две бели страни, вторият две черни, а третият една бяла и една черна страна. По случаен начин се избира жетон и се хвърля върху маса. Ако горната страна на жетона е бяла, каква е вероятността другата му страна която не се вижда също да е бяла?

Решение:

Нека
$J_1 = \{$случайно избран жетон да е **„бял“** жетон$\}$
$J_2 = \{$случайно избран жетон да е **„черен“** жетон$\}$
$J_3 = \{$случайно избран жетон да е **„пингвин“**$\}$😁

Имаме, че $\bigcup_{i=1}^{3} J_i = \Omega$, $J_i J_j = \emptyset$, за $i \neq j \Rightarrow$ образуват пълна група от събития (и то елементарни).

$B = \{$една от страните на жетона е бяла$\}$. $\mathbb{P}(B) = \dfrac{2}{3}$.

Търси се $\mathbb{P}(J_1 \mid B)$.

От формулата на Бейс имаме, че:

$$\mathbb{P}(J_1 \mid B) = \frac{\mathbb{P}(B \mid J_1)\mathbb{P}(J_1)}{\sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(B \mid J_i)\mathbb{P}(J_i)} = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}\,.$$

Задача 4. Изпит се провежда по следния начин: във всеки билет има написан един въпрос с четири отговора, от които само един е верен. Предполагаме, че студент знае $90\,\%$ от въпросите, а ако не знае верния отговор, налучква. Каква е вероятността студент, който е отговорил правилно, да не е знаел верният отговор, а да е налучкал?

Решение:

Нека
$A = \{$студент **знае верния отговор** на случайно избран въпрос$\}$
$B = \{$студент знае **отговаря правилно** на случайно избран въпрос$\}$

$\mathbb{P}(B \mid A) = 1$
$\mathbb{P}(B \mid \overline{A}) = \dfrac{1}{4}$

Имаме, че $\{A, \overline{A}\}$ образуватнпълна група от събития $\Rightarrow$ от формулата на Бейс:

$$\mathbb{P}(\overline{A}\,|\,B) = \frac{\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A}\,)\mathbb{P}(\overline{A}\,)}{\mathbb{P}(B\,|\,\overline{A}\,)\mathbb{P}(\overline{A}\,) + \mathbb{P}(B\,|\,A)\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{10} + 1\times\frac{9}{10}} = \frac{1}{37}.$$

Задача 3. Трима ловци едновременно стрелят по заек. Заекът е убит от един куршум. Каква е вероятносста той да е изстрелян от първия ловец, ако те уцелват с вероятност, съответно $0.2,\ 0.4,\ 0.6$?

Решение:

Наблюдението тук, което е съществено за решаване на задачата е, че заека може да умре равновероятно от всеки куршум. Т.е. е необходимо само той да е бил точен и да го е уцелил.

Нека $H_i = \{$ловец i стреля и уцелва заека$\}$, $i = 1,\ 2,\ 3.$
Нека $A = \{$RIP 🐰 ☹️$\}$

Имаме, че $\begin{cases} \mathbb{P}(H_1) = 0.2 \\ \mathbb{P}(H_2) = 0.4. \\ \mathbb{P}(H_3) = 0.6 \end{cases}$

Сега, от заключението следва, че

$$\mathbb{P}(A\,|\,H_1) = \mathbb{P}(A\,|\,H_2) = \mathbb{P}(A\,|\,H_3) = y > 0$$

Търси се $\mathbb{P}(H_1\,|\,A)$. Ще приложим формулата на Бейс:

$$\mathbb{P}(H_1\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(A\,|\,H_1)\mathbb{P}(H_1)}{\mathbb{P}(A\,|\,H_1)\mathbb{P}(H_1) + \mathbb{P}(A\,|\,H_2)\mathbb{P}(H_2) + \mathbb{P}(A\,|\,H_3)\mathbb{P}(H_3)} =$$

$$= \frac{y\times 0.2}{y\times 0.2 + y\times 0.4 + y\times 0.6} = \frac{0.2}{1.2} = \frac{1}{6}$$

Задача 6. Раздаваме последователно картите от стандартно тесте карти. Ако за първи път видим червено асо на 6-та позиция, каква е вероятността след това да видим първо червено преди черно асо?

Решение:

След първото срещане на червено асо, остава само още едно червено асо след 6-тата позиция. Т.е. на останалите $52 - 6 = 46$ позиции от раздаването ще има точно 1 червено асо и <u>точно</u> i черни аса ($i = 0, 1, 2$).

Нека
$B_i = \{$след първото срещнато червено асо има **точно** i черни аса$\}$, $i = 0, 1, 2$
$A = \{$срещаме червено асо преди черно в останалите 46 раздавания$\}$

Наблюдения: $B_i \cap B_j = \emptyset$, за $i \neq j$ и $\bigcup_{i=0}^{2} B_i = \Omega$. Следователно $\{B_1, B_2, B_3\}$ образуват пълна група от събития и може да разбием A по тях, тъй като A също е събитие от Ω:

$A = AB_0 \cup AB_1 \cup AB_2$. Тъй като $B_i \cap B_j = \emptyset$, то и $AB_i \cap AB_j = \emptyset$, за $i \neq j$ което означава че тези събития освен че са дичюнктни (непресичащи се), са и независими – което е по-съществено важно за нас.

Следователно $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A \,|\, B_i)\mathbb{P}(B_i)$.

Остана да ги насмятаме:

$$\mathbb{P}(A \,|\, B_0) = 1 \; \{ \, ..red..$$

$$\mathbb{P}(A \,|\, B_1) = \frac{1}{2} \begin{cases} ..red..black.. \\ ..black..red.. \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(A \,|\, B_2) = \frac{1}{3} \begin{cases} ..red..black_1..black_2.. \\ ..red..black_2..black_1.. \\ ..black_1..red..black_2.. \\ ..black_2..red..black_1.. \\ ..black_1..black_2..red.. \\ ..black_2..black_1..red.. \end{cases}$$

а) $\mathbb{P}(B_0)$. След 6 раздадени карти има 0 черни аса, като знаем, че 6-тата карта е червено асо. Тоест от първите 5 раздавания са ни раздадени само карти, които не са червено асо и от тях има две черни аса.

$$\mathbb{P}(B_0) = \frac{2}{51} \times \frac{1}{50} \times \frac{\cancel{48}}{49} \times \frac{\cancel{47}}{\cancel{48}} \times \frac{44}{\cancel{47}} = \frac{2 \times 44}{49 \times 50 \times 51} \approx 0.0007$$

$\frac{2}{51}$ – получили сме черно асо от 51 карти (без червеното асо на 6-та позиция)

$\frac{1}{50}$ – получили сме черно асо от 50 карти (без червеното асо на 6-та позиция и вече изтегленото черно асо)

$\frac{48}{49}$ – получили сме карта, която е различна от червено или черно асо от останалите 49 карти (без червеното асо на 6-та позиция и получената карта от предходното раздаване) и т.н.

b) $\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{51} \times \frac{\cancel{48}}{50} \times \frac{\cancel{47}}{49} \times \frac{46}{\cancel{48}} \times \frac{45}{\cancel{47}} = \frac{2 \times 46 \times 45}{51 \times 50 \times 49} \approx 0.0331$

$\frac{2}{51}$ – получили сме черно асо от 51 карти (без червеното асо на 6-та позиция)

$\frac{48}{50}$ – получаваме карта, която е различна от червено или черно асо от останалите 50 карти (без червеното асо на 6-та позиция и получената карта от предходното раздаване) и т.н.

c) $\mathbb{P}(B_2) = \frac{\cancel{48}}{51} \times \frac{\cancel{47}}{50} \times \frac{46}{49} \times \frac{45}{\cancel{48}} \times \frac{44}{\cancel{47}} = \frac{44 \times 45 \times 46}{49 \times 50 \times 51} \approx 0.7289$.

$\frac{48}{51}$ – от 51 карти (без червеното асо на 6-та позиция) сме получили карта която не е нито червено нито черно асо.

$\frac{47}{50}$ – от 50 карти (без червеното асо на 6-та позиция и получената от предходното раздаване карта) сме получили карта която не е нито червено нито черно асо нито изтеглената от предходното теглене карта и т.н.

Окончателно,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i) \approx$$

$$\approx 1 \times 0.0007 + \frac{1}{2} \times 0.0331 + \frac{1}{3} \times 0.7289 = 26\,\% \,.$$

Задача 7. На изпит се явяват 100 студенти, 55 момчета и 45 момичета. Момичетата взимат изпита с вероятност 0.7, а момчетата – с 0.4. След изпита се избират три резултата. Два от тях се оказали успешни, а един неуспешен. Каква е вероятността и трите резултата да са на момичета?

Решение:

Нека

$H_i = \{$от случайно избрани три контролни работи, <u>точно</u> i от тях са на момичета$\}$, за $i = 0,1,2,3$

$A = \{$от случайно избрани три контролни работи, точно 2 са успешни и 1 неуспешна$\}$

Имаме, че $H_i \cup H_j = \emptyset$ за $i \neq j$ и $\bigcup_{i=0}^{3} H_i = \Omega$. Търси се $\mathbb{P}(H_3 \mid A)$.

Тъй като $\{H_i\}_{i=0}^{3}$ образуват пълна група от събития в Ω и A също е събитие в Ω, то от $A = \bigcup_{i=0}^{3} AH_i$ и $AH_i \cap AH_j = \emptyset$, за $i \neq j$, т.е. са независими събития

$$\Rightarrow \ \mathbb{P}(A) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(AH_i) = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i) \Rightarrow \mathbb{P}(H_3 \mid A) = \frac{\mathbb{P}(A \mid H_3)\mathbb{P}(H_3)}{\sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(A \mid H_i)\mathbb{P}(H_i)}.$$

Остана само да ги пресметнем:

$$\mathbb{P}(H_0) = \frac{\binom{55}{3}}{\binom{100}{3}}; \mathbb{P}(H_1) = \frac{\binom{45}{1} \times \binom{55}{2}}{\binom{100}{3}}; \mathbb{P}(H_2) = \frac{\binom{45}{2} \times \binom{55}{1}}{\binom{100}{3}}; \mathbb{P}(H_3) = \frac{\binom{45}{3}}{\binom{100}{3}}$$

$\mathbb{P}(A \mid H_0) =$ (само момчета) $= \binom{3}{2} \times 0.4 \times 0.4 \times 0.6$

$\mathbb{P}(A \mid H_1) =$ (две момчета, едно момиче) $= 0.4 \times 0.4 \times 0.3 + \binom{2}{1} \times 0.6 \times 0.4 \times 0.7$

$\mathbb{P}(A \mid H_2) =$ (две момичета едно момче) $= 0.7 \times 0.7 \times 0.6 + \binom{2}{1} 0.3 \times 0.7 \times 0.4$

$\mathbb{P}(A \mid H_3) =$ (само момчета) $= \binom{3}{2} \times 0.7 \times 0.7 \times 0.3$

Заместваме с получените резултати и пресмятаме отговора.