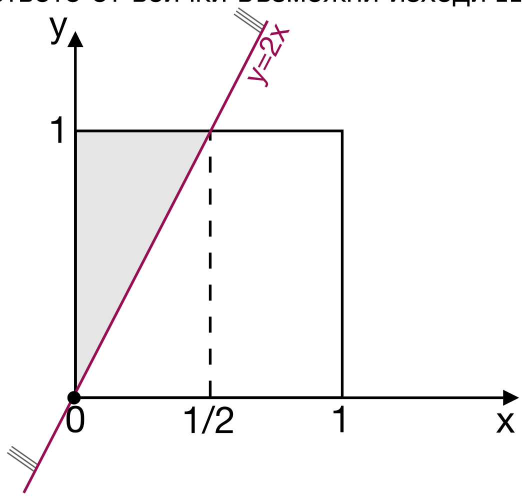
Задача (Putnam 1993, B3). Две реални числа x и y се избират на случаен принцип (с равномерна плътност) от интервала (0,1). Каква е вероятността най-близкото цяло число до x/y да е четно?

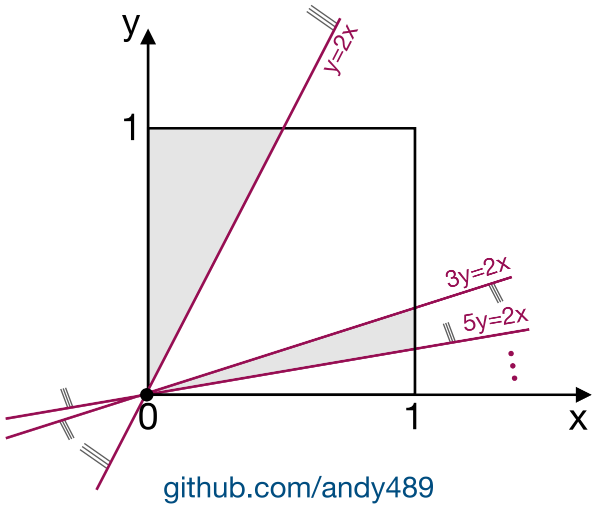
Решение.

Нека [x/y] е най-близкото цяло число до x/y. Тъй като x и y са положителни, то [x/y] може да е равно най-малко на 0. Кога [x/y]=0 ? [x/y]=0 $\Leftrightarrow$ x/y<1/2 или y>2x. Да разгледаме правата y=2x и единичния квадрат върху координатна система. Ясно е, че единичният квадрат е пространството (пространството от всички възможни изходи Ω за избор на x и y), в което решаваме задачата.



За всички наредени двойки (x,y), за които y>2x имаме, че [x/y]=0, което е четно и следователно x и y изпълняват условието на задачата. Правата y=2x отсича от единичният квадрат фигура с лице равно на 1/4. Търсената вероятност е равна на сбора на лицата на всички тези фигури отсечени от единичния квадрат, от които ако вземем произволни числа x и y ще имаме [x/y]=2n, за някое n $\in \mathbb{N}_{\{0\}}$. За n=0 вече намерихме фигурата и нейното лице. Да разгледаме [x/y]=2n за n $\neq$ 0. За да имаме [x/y]=2n е необходимо да имаме:

$2n - \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2n + \frac{1}{2}$ или $\frac{4n\text{-}1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{4n\text{+}1}{2}$. Тоест $\frac{2x}{4n\text{+}1} < y < \frac{2x}{4n\text{-}1}$. Тук игнорираме, числата, за които $\frac{x}{y} = \frac{2m\text{+}1}{2}$, тъй като не е дефинирано дали [x/y] е четно или нечетно (равноотдалечено и от двете), но това не е от значение тъй като те са с плътност равна на 0 (всяка една ненулева отсечка съдържа безбройно много точки и всяка една ненулева фигура съдържа безбройно много отсечки). В случая всички прави от вида $\frac{x}{y} = \frac{2m\text{+}1}{2}$, които минават през единичния квадрат (изброимо много за m $\in \mathbb{N}_{\{0\}}$) имат нулева плътност.



Очевидно е необходимо да пресметнем лицата на всички фигури заключени между правите (4n+1)y=2x и (4n-1)y=2x за всяко n > 0 и единичния квадрат. На чертежа по-горе сме изобразили правите за n=1 и фигурата заключена между тях и единичния квадрат. Нейното лице е равно на:

$$\int_0^1 \frac{2x}{3}dx - \int_0^1 \frac{2x}{5}dx = \frac{x^2}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Следователно, търсената вероятност е равна на:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \frac{2x}{4n-1}dx - \int_0^1 \frac{2x}{4n+1}dx\right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{5-\pi}{4}$$

В последното равенство използвахме формулата на Лайбниц за π. Може да намерите нейното доказателство в референциите по-долу.

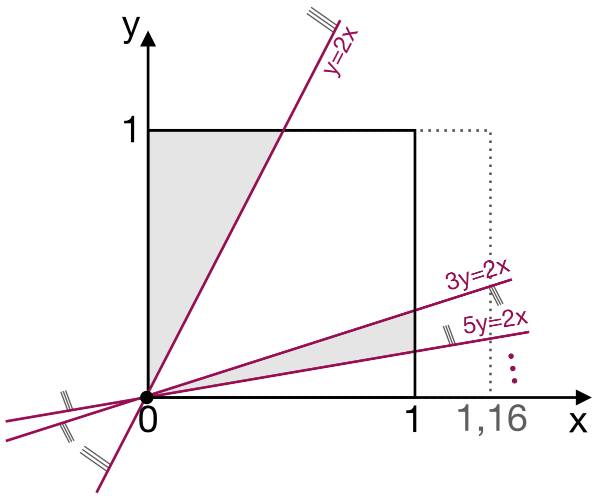
Друга интересна опаковка на задачата.

Ако интервала на реалното число y, от който се избира, запазва своите граници и остава (0,1), то да се намери най-малкото t, за което, ако x се избира от интервала (0,t), то $\mathbb{P}\big([x/y] \equiv 0 \bmod 2\big) = 1/2$. Тоест, искаме да променим горната граница на интервала, от който избираме x, така че да е равно вероятно [x/y] да е четно или нечетно.

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^t \frac{2x}{4n-1}dx - \int_0^t \frac{2x}{4n+1}dx\right) = \frac{1}{4} + t \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots\right) = \frac{1}{4} + t \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Приравнявайки последното равенство до исканото 1/2 получаваме, че $t = \dfrac{1}{4-\pi}$, което е малко над 1, а именно

1.1649480915813719236196768173142674053311927368274150324499122832...



Референции :

- https://en.wikipedia.org/wiki/Madhava_series
- https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80
- https://maa.org/math-competitions/william-lowell-putnam-mathematical-competition
- https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/1993.pdf