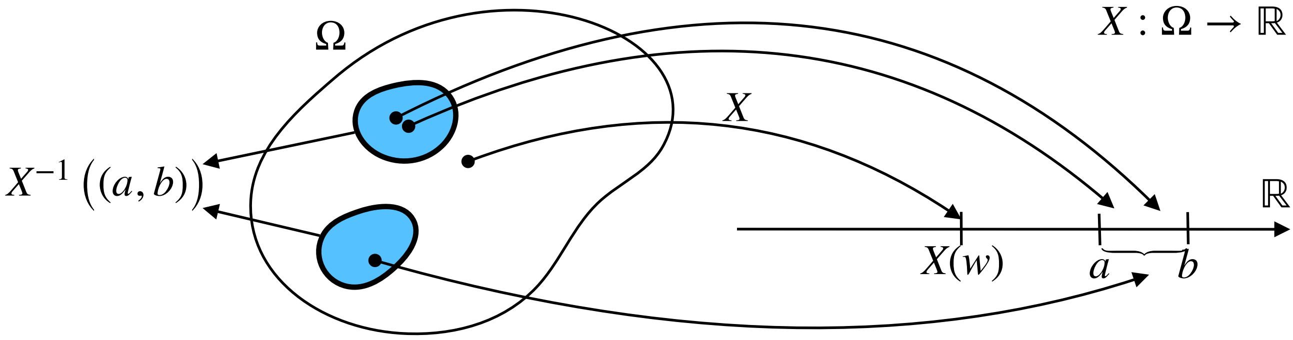
СЕМ, лекция 4 (2020-10-22)

Случайни величини

$V = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ - вероятностно пространство.



Случайната величина X не е нито случайна, нито величина. Тя е грубо казано функция/изображение, което съпоставя на всяко елементарно събитие w от Ω - някакво реално число.

За да бъде X случайна величина, тя трябва да удовлетворява някакви критерии.

<u>Дефиниция</u>: (**Случайна величина**) Нека V е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a < b,\ a, b \in \mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}\big((a, b)\big) \in \mathscr{A}$, където $X^{-1}(\underset{B \subseteq \mathbb{R}}{B}) = \{w \in \Omega \,|\, X(w) \in B\}$. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността x да е между a и b.

Всички елементарни събития, към които, като приложим изображението X отиват в интервала (a, b) са множеството B.

<u>Факт</u>: Вярно е, че $X^{-1}(I) \in \mathscr{A}$, ако $I = (a, b];\ \ I = [a, b];\ \ I = \{x\},\ x \in \mathbb{R}$. Всеки интервал (a, b) от $\mathbb{R}$ има прообраз $B \subseteq \Omega$ и се изпраща в него с $X^{-1}\big((a, b)\big)$. Някой интервали може да се изпращат в празното множество $\emptyset$.

Това изображение $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича случайна величина, ако може да придаваме вероятност на прообразите му - на всички множества, които изпращаме във всеки един интервал.

<u>Теорема</u> (**Свойства на случайни величини**): Нека V е вероятностно пространство и X и Y са случайни величини ($X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$). Тогава е в сила:

а) $aX \pm bY$ е случайна величина, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;

б) cX е случайна величина, $\forall c \in \mathbb{R}$ (частен случай на а) : $a = c$ и $b = 0$);

в) XY е случайна величина;

г) ако $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, то $\dfrac{X}{Y}$ е случайна величина.

Случайните величини са функции, за които не може да знаем как действат навсякъде, тъй като това би било или твърде сложно или твърде скъпо, а в някои случаи може дори да не е ясно как да въведем пространството от елементарни събития Ω.

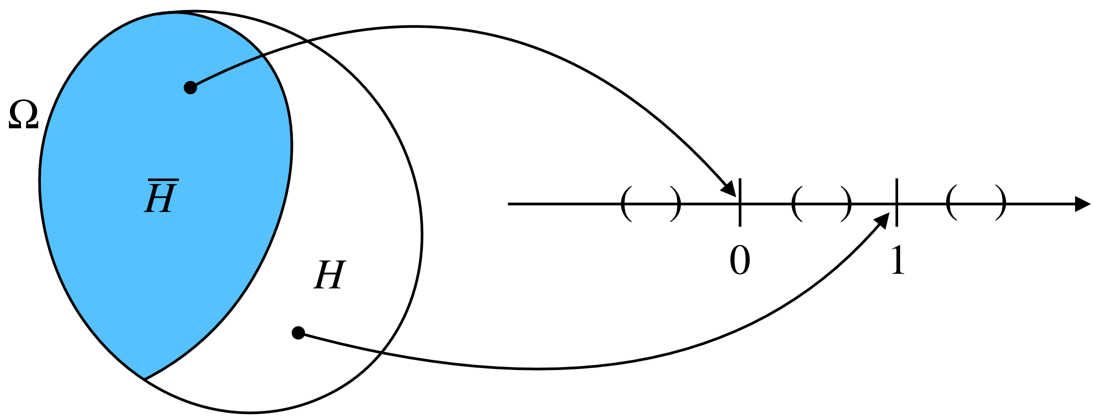
Дискретни случайни величини

<u>Дефиниция</u>: (**Индикаторна функция**) Нека Ω е множество от елементарни събития и $H \subseteq \Omega$. Тогава 1_H $(1_{\{H\}})$ се нарича индикаторна функция, ако
$1_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } w \in H \\ 0, & \text{ако } w \in \overline{H} \end{cases}$. Грубо казано: $1_H : \Omega \to \mathbb{R}$.

<u>Лема</u>: Нека V е вероятностно пространство и $H \in \mathscr{A}$. Тогава $1_H : \Omega \to \mathbb{R}$ е случайна величина.

Доказателство:

Ако $X(w) := 1_H(w)$, то $X^{-1}\left(\{0\}\right) = \overline{H}$, а $X^{-1}\left(\{1\}\right) = H$.



$\forall a < b$ е вярно, че $X^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } a \geq 1 \text{ или } b \leq 0 \text{ или } a > 0 \text{ и } b < 1 \\ \Omega, & \text{ако } 0 \in (a,b) \text{ и } 1 \in (a,b) \\ H, & \text{ако } 1 \in (a,b) \text{ и } 0 \notin (a,b) \\ \overline{H}, & \text{ако } 1 \notin (a,b) \text{ и } 0 \in (a,b) \end{cases}$

Който и интервал (a,b) да вземем - изходите ще са един от 4-те възможни: $\emptyset$, Ω, H и $\overline{H}$, които са σ алгебра. Т.е. дефиницията е изпълнена (за всеки случай $X^{-1}\left((a,b)\right) \in \mathscr{A} \Rightarrow X = 1_H$ е сучайна величина). С това лемата е доказана.

$\mathscr{H} \subseteq \mathscr{A} : X(w) = 1_H(w) \in \{0,1\}$

$H = \{w \in \Omega \,|\, X(w) = 1\} = \{X = 1\}$
$\overline{H} = \{w \in \Omega \,|\, X(w) = 0\} = \{X = 0\}$

Имаме две възможности: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ и $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1-p$, $p \in [0,1]$

Нека $V^* = (\Omega^*, \mathscr{A}^*, \mathbb{P}^*)$ е друго вероятностно пространство и $\mathscr{H}^* \subseteq \mathscr{A} : X^* = 1_{H^*}$ е вероятността $\mathbb{P}(X^* = 1) = p \Rightarrow$ вероятностно тези две случайни величини X и X^* не са различими.

Означения (за удобство):

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_n) - n \text{ различни числа} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) - \text{ изброимо много различни числа} \end{cases}$$

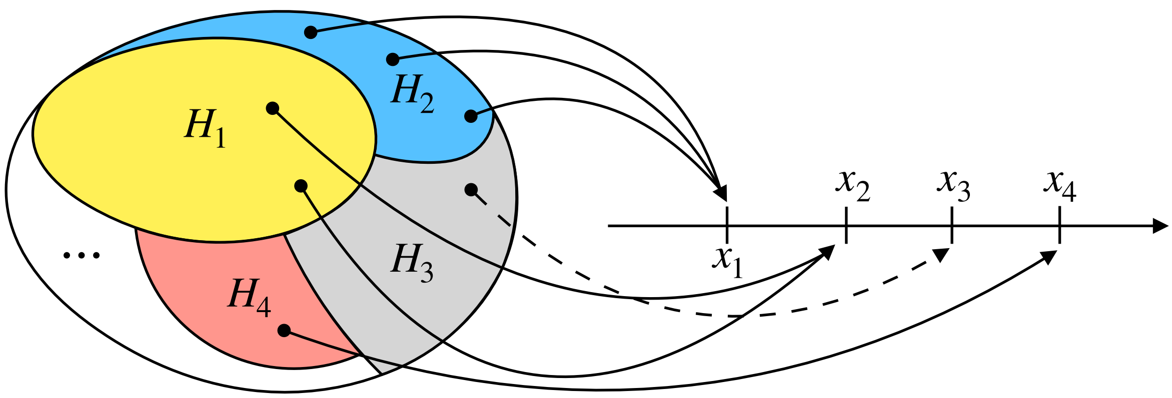
V е вероятностно пространство.

$$\mathscr{H} = \begin{cases} H_1, \ldots, H_n \text{ пълна група от събития във } V \\ (H_i)_{i \geq 1}, \text{ където } H_i \in A;\ H_i \cap H_j = \emptyset,\ i \neq j,\ \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega \end{cases}$$

<u>Дефиниция</u>: (**Дискретна случайна величина**) Нека V е вероятностно пространство. Дадени са $\bar{x}$ и $\mathscr{H}$. Тогава

$$X(w) = \sum_{j=1}^{n} x_j 1_{H_j}(w) \left(\text{или когато имаме изброим брой: } X(w) = \sum_{i=1}^{\infty} x_j 1_{H_j}(w) \right) \text{ се}$$

нарича дискретна случайна величина (взима или n различни или най-много изброимо много на брой различни стойности умножени по индикаторната функция). Кратък запис: $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$.



$$H_j = \{X = x_j\} = \{w \in \Omega \,|\, X(w) = x_j\}$$

<u>Дефиниция</u>: (**Разпределение на дискретна случайна величина**)

Нека $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$ е дискретна случайна величина. Тогава таблицата

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$\mathbb{P}(X = x_j)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

където $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j = \mathbb{P}(H_j)$ и $\sum_{j=1} p_j = 1$, се нарича разпределение на X.

$\oplus$ Измерваме дните, в които дадено CPU работи (функционира) и X случайната величина, която измерва броя на тези дни. Може да моделираме X по два начина:

- $X \in \mathbb{N}_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $X \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$

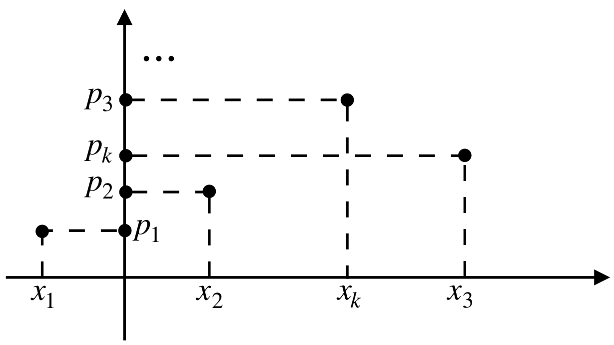
X	0	1	2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

X	0	1	$\cdots$	1000
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	$\cdots$	p_{1000}

$$\sum_{j=0}^{1000} p_j = 1$$

<u>Дефиниция</u>: (**Хистограма**) Графиката по-долу се нарича хистограма:



$\oplus$ Хвърляме два зара. X и Y са случайните величини - точките от 1 до 6, съответно паднали се на $1^{\text{-вия}}$ зар. $Z = X + Y$.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Смяна на променливите на дискретни случайни величини

X - сл. вел., $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $Y = g(X)$ - искаме да знаем дали Y е случайна величина.

Ако $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$, то $Y = \sum_j g(x_j) 1_{H_j}$ е случайна величина и ако положим $y_i = g(x_j)$, то $Y = \sum_j y_j 1_{H_j}$.

За $g(x_m) = g(x_k)$, $m \neq k$ ще получим повтаряемост на някои стойности, но това няма да е грешка, просто за удобство и икономичност може да ги обединим като $\mathscr{H} = H_m \cup H_k$.

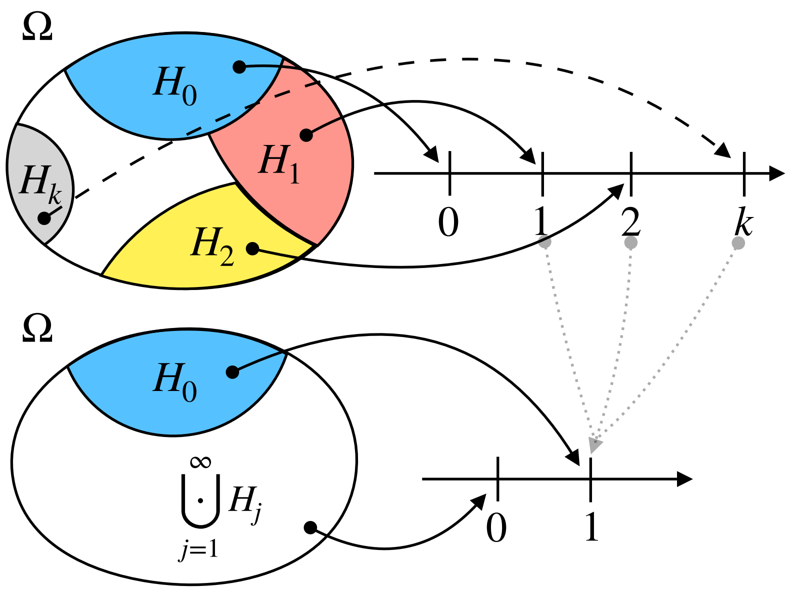
X	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$	$\cancel{y_k}$	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$	$p_m + p_k$	$\cdots$	$\cancel{p_k}$	$\cdots$

$\oplus$ Имаме някакво CPU. $X = \sum_{j=0}^{\infty} j 1_{\{H_j\}}$, където $H_j = \{CPU$ работи точно j дни$\}$

$Y = g(X)$, където $g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$.

X	0	1	2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

$Y = g(X)$	0	1
$\mathbb{P}$	p_0	$p_1 + p_2 + \ldots$



X, Y - дискретни случайни величини, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогава $Z = g(Z, Y)$ е дискретна случайна величина.

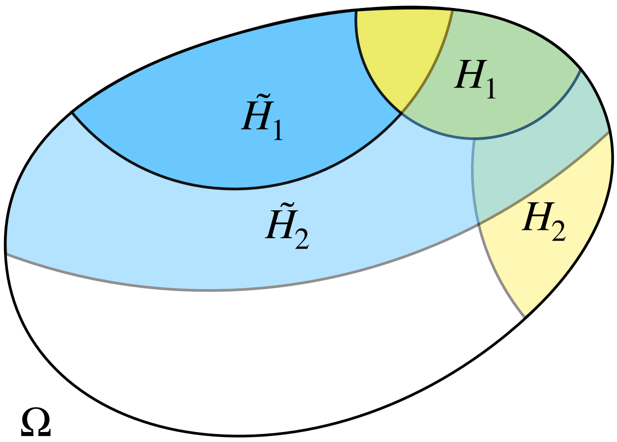
X	x_1	x_2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$

$$\sum_i p_i = 1$$

Y	y_1	y_2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	q_1	q_2	$\cdots$

$$\sum_i q_i = 1$$

$$Z = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) 1_{\{X=x_i, Y=y_j\}}$$



$$H_1 = \{X = x_1\};\ H_2 = \{X = x_2\};\ \ldots$$

$$\tilde{H}_1 = \{Y = y_1\};\ \tilde{H}_2 = \{Y = y_2\};\ \ldots$$

$$T_{ij} = H_i \cap \tilde{H}_j$$

Независимост на дискретни случайни величини

<u>Дефиниция</u>: (**Независимост на дискретни сл. вел.**) Нека X, Y са дискретни случайни величини във вероятностното пространство V. Тогава

$$\underbrace{X \perp\!\!\!\perp Y}_{X \text{ и } Y \text{ са независими}} \quad \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j;\ Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) \overset{def.}{=}$$

$$= \mathbb{P}(X = x_j)\mathbb{P}(Y = y_k), \forall j, k.$$

$\oplus$ $\quad \Omega = \{(0, 0);\ (0, 1);\ (1, 0);\ (1, 1)\};\ \mathscr{A} = 2^{\Omega};$

$\mathbb{P}\left(\{0, 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\{0, 1\}\right) = \mathbb{P}\left(\{1, 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\{1, 1\}\right) = \dfrac{1}{4}$ (имаме равномерна вероятност върху четирите елемента). Това е математическа конструкция на простия пример с хвърлянето на две монети.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \underset{\text{1-ва кордината}}{X(w)} = w(1)$. Например $X\left(\{0, 1\}\right) = 0$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \underset{\text{2-ра кордината}}{Y(w)} = w(2)$. Например $Y(\{0, 1\}) = 1$

Тоест, първата монета е „тура“, а втората монета - „ези“ (ако сме дефинирали събитието „ези“ с 1-ца (за успех)).

X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), т.к. $\mathbb{P}(X = i,\ Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$, $\forall i, j \in \{0,1\}$.

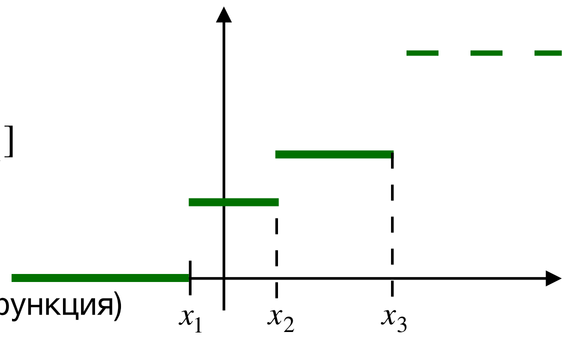
<u>Дефиниция</u>: (**Функция на разпределение на случайна величина**) Нека X е сл. вел. във вероятностно пространство V. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$, $\forall x \in (-\infty,\ \infty)$, се нарича функция на разпределение на X.

$\oplus$

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

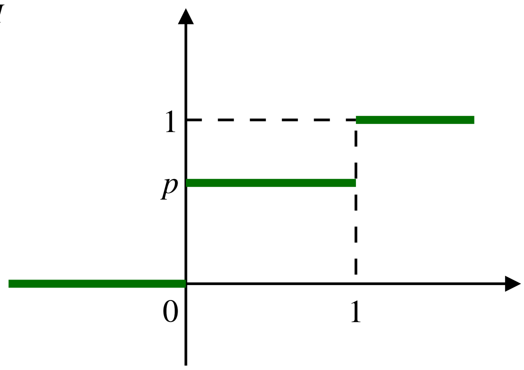
и $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \le x_1 \\ p_1, & \text{ако } x \in (x_1,\ x_2] \\ p_1 + p_2, & \text{ако } x \in (x_2,\ x_3] \\ \cdots & \\ p_1 + \ldots + p_k, & \text{ако } x \in (x_k,\ x_{k+1}] \end{cases}$$

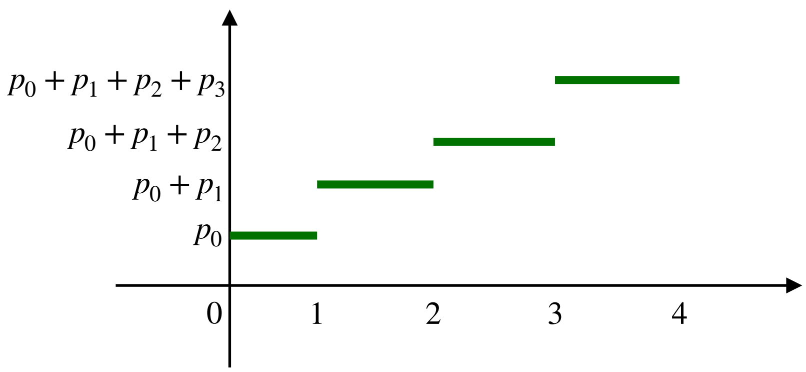


стъпаловидна (нарастваща функция)

$\oplus$ $X = 1_H$



$\oplus$ CPU



<u>Свойства</u>: $\lim\limits_{x \to \infty} F_X = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X = 0$.

Математическо очакване (за дискретни случайни величини)

<u>Дефиниция</u>: Нека X е дискретна сл. вел. Ако $\sum_j x_j p_j$ е добре деф. (т.е. е крайна), то

$$\mathbb{E}X = \sum_j x_j p_j = \sum_j \underbrace{x_j}_{\text{възможна стойност на } X} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x_j)}_{\text{вероятност за тази стойност } x_j}$$ е очакването на X.

Когато имаме краен брой стойности - тяхната сума ще е винаги добре дефинирана. Обаче, когато имаме изброимо много стойности, то тогава може сумата да не е крайна.

⊕ Ако X взема краен брой стоиности: $x_1, \ldots, x_n$, то $\sum_{j=1}^{n} x_j p_j < \infty \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} x_j p_j$ винаги съществува.

⊕ Ако X е такава случайна величина, че $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2}$, $j \geq 1$. Тогава

$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1$, тъй като $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Но тази случайна величина

няма очакаване, тъй като

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \frac{6}{\pi^2} \times \underbrace{(\text{хармоничния ред})}_{\text{не схожда}} = \infty.$$

<u>Коментар</u>: $f(a) = \sum_j (x_j - a^2) p_j$ е функция на a и тя се минимизира, когато $a = \mathbb{E}X$.

$\min_{a \in \mathbb{R}} f(a) = f(\mathbb{E}X)$. Т.е. $\mathbb{E}X$ минимизира квадратичната грешка.

⊕ Ако имаме равномерно разпределение върху $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, то тогава $\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{n} x_j \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = \overline{X}$ (което е средно аритметичното на X).

Средно аритметичното е математическото очакване на равномерното разпределение върху дадени точки.