Задача 8.21. Да се докаже, че вероятността за броя на падналите се шестици при хвърляне на стандартен зар n пъти да е между $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$ и $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$ е не по-малка от $\frac{31}{36}$.

Доказателство:

За доказателството на задачата ще използваме неравенството на Чебишов, което ще докажем по-долу по два начина. Първо нека го формулираме:

Неравенство на Марков. Нека X е неотрицателна случайна величина. Тогава за всяко положително число a:

$$\mathbb{P}(X > a) \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}\,[X].$$

Доказателство:

I н/н. Нека A е множеството от стойности, за които $|X - \mathbb{E}\,[X]\,| > a$ (множеството от стойности, за което X е много далече от средното $\mathbb{E}[X]$). Тогава (когато това се случи),

$$A = \{\,|X - \mathbb{E}\,[X]\,| > a\} = \{(X - \mathbb{E}\,[X])^2 > a^2\}$$

Искаме да ограничим вероятността за случването на събитието C отгоре.

$$\mathrm{Var}[X] \overset{def.}{=} \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}\,[X])^2]\cdot 1 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}\,[X])^2]\cdot \mathbf{1}_{\{A\}} + \underbrace{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}\,[X])^2]\cdot \mathbf{1}_{\{\overline{A}\}}}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}\,[X])^2]\cdot \mathbf{1}_{\{A\}} \geq a^2\cdot\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{A\}}] = a^2\cdot\mathbb{P}(A)\,.$$

Следователно,

$$\mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathrm{Var}\,[X]}{a^2}.$$

Тоест,

$$\mathbb{P}(\,|X - \mathbb{E}\,[X]\,| > a) = \mathbb{P}(\mathbb{E}\,[X] - a < X < \mathbb{E}\,[X] + a) = \mathbb{P}(A) \leq \frac{\mathrm{Var}\,[X]}{a^2}.$$

$\square$

II н/н. Тъй като X е неотрицателна,

$$\mathbb{E}\,[X] = \int_0^\infty x\,\mathrm{d}\,F_X(x) \geq \int_0^\infty x\,\mathrm{d}\,F_X(x) \geq a\int_a^\infty \mathrm{d}\,F_X(x) = a\cdot\mathbb{P}(X > a).$$

$\square$

Сега обратно към задачата.

Нека $X_i = \{$пада се 6-ца при $i^{\text{-тото}}$ хвърляне на зара$\}$, $i = \overline{1, n}$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Очевидно $X_i \sim \mathrm{Ber}\left(p = \frac{1}{6}\right)$ и $S_n \sim \mathrm{Bin}\left(n, p = \frac{1}{6}\right)$, тъй като брои успехите в бернулиево разпределени случайни величини. От това, че бернулиевите експерименти са независими и еднакво разпределени със средно $\mu = \mathbb{E}\left[X_1\right] = p = \frac{1}{6}$ и $\sigma^2 = \mathrm{Var}\left[X_1\right] = p(1-p) = \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, то от ЦГТ може да направим следното приближение (считаме, че $n \gg 30$ е достатъчно голямо):

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1), \text{ тоест } \frac{S_n - n \cdot \frac{1}{6}}{\sqrt{n \cdot \frac{5}{36}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Следователно,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{6}n - \sqrt{n} \le S_n \le \frac{1}{6}n + \sqrt{n}\right) &= \mathbb{P}\left(-\sqrt{n} \le S_n - \frac{1}{6}n \le \sqrt{n}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}} \le \frac{S_n - \frac{1}{6}n}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{6}{\sqrt{5}} \le \mathcal{N}(0,1) \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(|Z - \underbrace{\mathbb{E}[Z]}_{=0}| \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \overset{\text{Марков}}{\ge} \\
&\ge 1 - \frac{\mathrm{Var}[Z]}{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 - \frac{5}{36} \cdot 1 = \frac{31}{36}.
\end{aligned}$$

$\square$