

Подробни решения:

Задача 1.

Събитията $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap B$ и $\bar{A} \cap \bar{B}$ са пълна група от събития, тъй като сечението на всеки две от тях дава празното множество, а обединението на всички образуват пълното множество от събития Ω . Следователно,

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1.$$

От законите на де Морган знаем, че

$$\mathbb{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}) \stackrel{\text{де Морган}}{=} 1 - \mathbb{P}(A \cup B) \stackrel{\text{по условие}}{=} 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Заместваме с получения резултат в по-горното уравнение и получаваме, че:

$$\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) + \mathbb{P}(\bar{A} \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{3}.$$

Тъй като събитията A и B са независими, то и събитията A , \bar{A} , B и \bar{B} са две по две независими (ТОВА Е ОСНОВНА ЛЕМА, КОЯТО ТРЯБВА ДА СЕ ДОКАЖЕ!). Тогава $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B})$, $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B) = \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}(B)$ и $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

$\mathbb{P}(A) = a$ и $\mathbb{P}(B) = b$. Търсим a и b , такива, че $a < \frac{1}{3}$ и $b < \frac{1}{3}$. От зависимостта по-горе следва, че $a(1-b) + (1-a)b + ab = \frac{1}{3}$. Тоест търсим едно от безбройно многото решения на уравнението $a + b - ab = \frac{1}{3}$. Всяко решение на уравнението $3a + 3b - 3ab = 1$, за което $a < \frac{1}{3}$ и $b < \frac{1}{3}$ е решение на задачата. Нека $a = \frac{1}{5} < \frac{1}{3}$, тогава $b = \frac{1}{6}$. Окончателно $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$ и $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$ е едно от безбройно многото валидни решения. Тези числа могат да се отгатнат и чрез тривиални разсъждения.

Доказателство на използваната в решението ЛЕМА може да намерите [тук](#).

□

Задача 2.

За да е напълно дефинирана задачата е необходимо да се спомене, че играчът ще играе разумно или казано по друг начин - оптимално. Това може да се добави при допълнителен въпрос зададен от полагащия теста. В това решение правим допускането, че играчът ще прилага възможно най-добрата стратегия. Най-добрата стратегия, която може да приложи играчът е да хвърля зарчето втори път когато е получил брой точки по-малък от 4. Това е така, тъй като ако е получил брой точки по-голям или равен на 4, той няма да има смисъл да рискува с повторно хвърляне, тъй като вероятността да получи повече точки от вече получените е по-малка. Нека означим с p броя на точките които играчът е получил при хвърляне на зарчето. Тогава имаме, че:

$$\mathbb{P}(p < 4) \times \frac{1+2+3+4+5+6}{6} + \mathbb{P}(p \geq 4) \times \frac{4+5+6}{3} = \frac{1}{2} \times 3.5 + \frac{1}{2} \times 5 = 4.25$$

□

Задача 3.

Преименуваме събитията Activator = A и RandomWilds = RW . Тъй като $A = \Omega \setminus \bar{A}$, то A и \bar{A} образуват пълна група от събития. От формулата за пълната математическа вероятност имаме, че:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(RW) &= \mathbb{P}(RW | A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(RW | \bar{A}) \times \mathbb{P}(\bar{A}) = \\ &= (60\% + 4\%) \times 19\% + 10\% \times 81\% = \\ &= \frac{64 \times 19 + 10 \times 81}{10\,000} = \frac{2\,026}{10\,000} = \boxed{20.26\%}\end{aligned}$$

□

Задача 4.

Ако се стреля хаотично (напълно аматьорски), то вероятностите да се улучат съответно множествата от точки (секторите) A , B и C са съответно:

$$A : \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \boxed{\frac{1}{9}};$$

$$B : \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\mu(A \cup B) - \mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}};$$

$$C : \quad \mathbb{P}(C) = \frac{\mu(A \cup B \cup C) - \mu(A \cup B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times 1^2 - \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = 1 - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

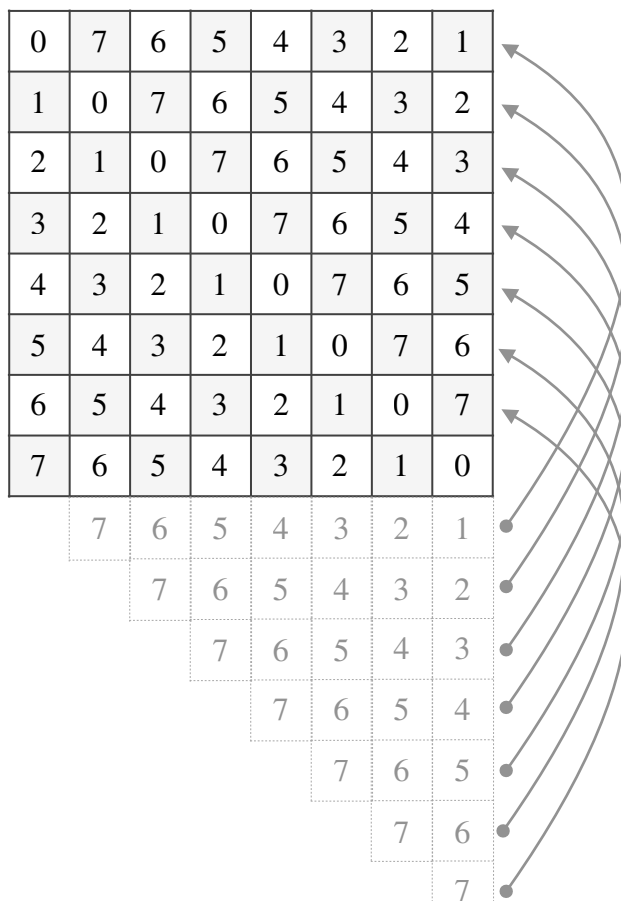
Задачата е типичен пример за Монте Карло алгоритмите. По-добър вариант би бил да се иска да се реши задачата с обърнат пример за Монте Карло алгоритъм – знаят се вероятностите, с които играчът улучва секторите по мишената и се иска да се намерят площите на секторите по мишената. След това да се иска обяснение от полагащия теста – защо това работи и как. Правилният отговор се обляга на закона за големите числа (ЗГЧ), за който може да прочетете повече на страница 17 от [тук](#).

□

Задача 5.

Разглеждаме осем успоредни диагонала, като диагонал номер j се състои от всички клетки, за които номерът на реда минус номера на стълба дава остатък j при деление на 8, където $j = 0, \dots, 7$. Нека тези диагонали са „чекмеджета“, а топовете — „предмети“. От принципа на Дирихле, тъй като $33/8 \equiv 4$ с остатък 1, то има поне един диагонал с поне $4 + 1$ топа. Тези пет топа лежат в различни редове и в различни стълбове, тоест не се бият.

Тоест винаги може да намерим 5 топа измежду 33 топа поставени на шахматна дъска с размерност 8×8 , никои два измежду тях, които не се бият.



□

Задача 6.

Нека $A = \{\text{теста е реагирал положително за вирус (включва се аларма)}\}$. Търси се условната вероятност $\mathbb{P}(I|A)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(I|A) &= \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A|I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A|I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A|H)\mathbb{P}(H)} = \frac{99\% \times 1\%}{99\% \times 1\% + 20\% \times 99\%} = \\ &= \frac{99}{99 + 20 \times 99} = \frac{1}{21}. \text{ Тук използвахме, че } I \text{ и } H \text{ са пълна група от събития, тъй}\end{aligned}$$

като $I = \overline{H}$.

Получаваме, че 1 на всеки 21 души, при които се е пуснала алармата наистина е заразен с вируса COVID. Оказва се, че теста НЕ е много полезен. Получава се така, тъй като заразените са много малък процент от популацията (посетителите на летището), а грешката в теста от 20 % е втърде голяма.

□

Задача 7.

Имаме експеримент, който всеки път е един и същ (играта не се променя) и следователно връщаните стойности от достатъчно на брой игри ще са нормално разпределени (спрямо централна гранична теорема (ЦГТ)).

Критичната стойност за ниво на довереност от 95 % се задава от $t^* = 1.96$.

$$\text{Границата на стандартната грешка е } t^* \times \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.96 \times 12}{\sqrt{36}} = 3.92.$$

Следователно доверителният интервал за средната върната стойност е:

$\mu \in (4 - 3.92, 4 + 3.92) = (0.08, 7.92)$ Този интервал ни казва, че с гаранционна вероятност от 95 % – върнатата стойност от проведения експеримент ще лежи в границите на интервала.

□

Задача 8.

Контраинтуитивно, такава стратегия съществува!

Именуваме следните събития: $A = \{\text{вижда } a \text{ в } I^{-\text{ВИ}} \text{ плик}\}$,

$B = \{\text{вижда } b \text{ във } II^{-\text{РИ}} \text{ плик}\}$ и $C = \{\text{прави се смяна на пликете}\}$.

Знаем, че $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ (равно вероятно е да изберем който и да е от двата

плика). Нека още $C = \{\text{прави се смяна на пликете}\}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(b) &= \underbrace{\mathbb{P}(A \cap C)}_{\substack{\text{избира се} \\ \text{плик А и} \\ \text{се прави} \\ \text{смяна}}} + \underbrace{\mathbb{P}(B \cap \bar{C})}_{\substack{\text{избира се} \\ \text{плик В и} \\ \text{НЕ се прави} \\ \text{смяна}}} = \\ &= \mathbb{P}(C|A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{C}|B) \times \mathbb{P}(B) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(C|A) + \mathbb{P}(\bar{C}|B)) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(C|A) + 1 - \mathbb{P}(C|B)) = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B)) \end{aligned}$$

$$\text{Тук използвахме, че } \mathbb{P}(C|B) + \mathbb{P}(\bar{C}|B) = \frac{\mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(\bar{C} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$$

Тоест задачата се свежда до въпроса: може ли да определим такава стратегия, при която $\mathbb{P}(C|A) > \mathbb{P}(C|B)$.

Нека разгледаме няколко случая, за да добием представа за сложността на въпроса:

Нека,

$J = \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B)$. Търсим стратегия, при която $J > 0$.

$$\begin{aligned}
J &= \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B) \\
&= \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} - \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = \\
&= \mathbb{P}(C) \times \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} - \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \times \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)} \right) = \\
&= \mathbb{P}(C) \times \left(\frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A|C) - \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(B|C) \right) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(C)}{2} \times (\mathbb{P}(A|C) - \mathbb{P}(B|C)).
\end{aligned}$$

1 сл. Ако никога не сменяме: $J = 0$, т.к. $\mathbb{P}(C) = 0$ и $\mathbb{P}(A|C) = 0 = \mathbb{P}(B|C)$.

2 сл. Ако винаги сменяме: $J = 0$, т.к. $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A) = 1$ и аналогично $\mathbb{P}(B|C) = \mathbb{P}(B) = 1$.

3 сл. Ако сменяме на всяко второ теглене: $J = 0$, тъй като $\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ и аналогично и за B .

4 сл. Ако сменяме на всяко трето теглене: $J = 0$, тъй като $\mathbb{P}(A|C) = \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ и аналогично и за B .

...

Изглежда, че каквото и да направим, винаги ще е равновероятно да останем с която и да е от двете суми.

Сега да се върнем на $J = \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B)$. Това равенство в този вид е много по-мощно от равенството до което достигахме в синьото уравнение. Но благодарение на равенството от синьото уравнение може да пресметнем J при някакви стратегии от вида „сменяме плик на всяко k^{TO} теглене“.

Какво е всъщност $\mathbb{P}(C|A)$? Това е „вероятността да сменим пликите при положение, че сме избрали плик A “. Ние не знаем дали сме избрали плик A , но знаем каква е сумата в него! Имаме наредба на събитията. Първо виждаме каква е сумата в избрания плик и после решаваме дали го сменим или не. Нека използваме тази налична информация, за да се опитаме да формулираме желаната стратегия.

Ако си дефинираме стратегията по следния начин:

Ако виждаме числото (сумата) x , то винаги сменяме с вероятност e^{-x} .

Тоест $\mathbb{P}(C|\text{виждаме } x) = e^{-x}$. Следователно,

$$J = \mathbb{P}(C|A) - \mathbb{P}(C|B) = e^{-a} - e^{-b} > 0 \text{ и това е валидна стратегия!}$$

В случая взехме неперовото число e , но твърдението е в сила за всяко положително реално число, може да вземем например числото 2023.

Коментар: Нетривиална задача е да се намери такова число като функция на сумата в двата плика, което да максимизира вероятността за взимане на плик с по-голямата сума в очакване (в средния случай).

□