

## Упражнение 12,13,14 по СЕМ - Задачи

6 януари 2021 г.

**Задача 1** Точка  $(X, Y)$  попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати  $(0,0)$ ,  $(0,2)$  и  $(3,0)$ . Да се намери съвместната плътност и функцията на разпределение на  $X$  и  $Y$ . Да се пресметне коефициента на корелация  $\rho_{X,Y}$ .

**Задача 2** Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че в продължение на 1 час, в случаен момент  $X$  ще запали лампите, а в момент  $Y$  ще ги огаси. Нека съвместната плътност на случайните величини  $X$  и  $Y$  е  $f_{X,Y}(x,y) = cxy$ ,  $0 < x < y < 1$ . Да се определят:

- а) константата  $c$  така, че плътността да е добре дефинирана;
- б) маргиналните плътности и математическите очаквания;
- в) вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10мин;
- г) колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15мин;
- д) каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20мин.

**Задача 3** Нека  $X$  е температурата, а  $Y$  е времето необходимо за подготовка за запалване на дизелов двигател в минути. Нека  $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2000}(x + 5y + 10)$ ,  $-10^\circ \leq x \leq 30^\circ$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Да се определи:

- а) вероятността да е нужна поне 1 минута за запалване;
- б) средното време за запалване при  $15^\circ$ ;
- в) ако двигателят е запалил за 1,5 минути, каква е вероятността температурата да е отрицателна?

**Задача 4** Върху страните на квадрат независимо една от друга по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е с дължина  $a$ .

**Задача 5** Нека случайните величини  $X_1, X_2 \in \text{Ex}(\lambda)$  са независими. Да се намери разпределението на случайната величина  $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$ .

**Задача 6** Нека случайните величини  $X_1, X_2 \in U(0,1)$  са независими. Да се намери разпределението на случайната величина  $Y = X_1 + X_2$ .

**Задача 7** Нека случайните величини  $X_1, X_2 \in \text{Ex}(\lambda)$  са независими. Да се намери плътността на случайната величина:

- а)  $Y = \max(X_1, X_2)$ ;  
 б)  $Y = \min(X_1, X_2)$ .

**Задача 8** Случайна величина  $Z = (X, Y)$  има плътност  $f(x, y) = \begin{cases} c(1 + xy), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Намерете:

- а) константата  $c$ ;  
 б)  $\mathbf{E}XY$ ,  $\mathbf{D}(X - Y)$ .

**Задача 9** Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка  $P$ . Правата през  $P$ , успоредна на страна на триъгълника, пресичат другите му две страни в точките  $Q$  и  $R$ . Точките  $S$  и  $T$  лежат върху страна на триъгълника така, че  $QRST$  е правоъгълник. Да се намери средната стойност на лицето на  $QRST$ .

**Задача 10** Във вътрешността на тетраедър  $T$  с обем 1 по случаен начин попада точка  $P$ . Равнината през  $P$  успоредна на една от стените на  $T$  отсича от  $T$  тетраедър  $T_1$ . Да се намери средната стойност на обема на  $T_1$ .