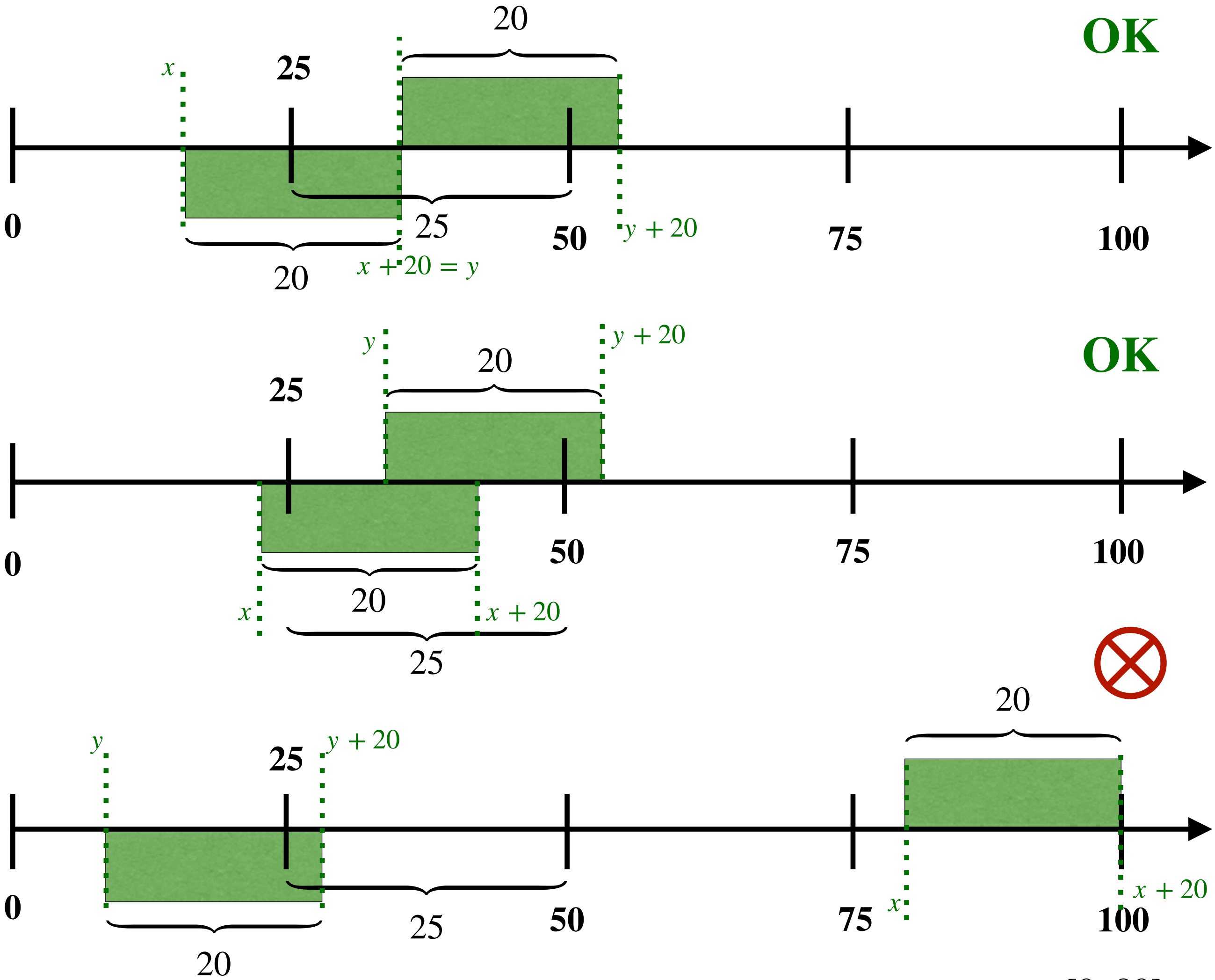
Задача 1. (Зад. 13 – оригинален номер) Дадена е магнетофонна лента с дължина 100 м. Върху всяка от двете страни на лентата, на случайно избрано място, е записано непрекъснато съобщение с дължина 20м. Каква е вероятността между 25 и 50 м, считано от началото на лентата, да няма участък несъдържащ поне едно от двете съобщения?

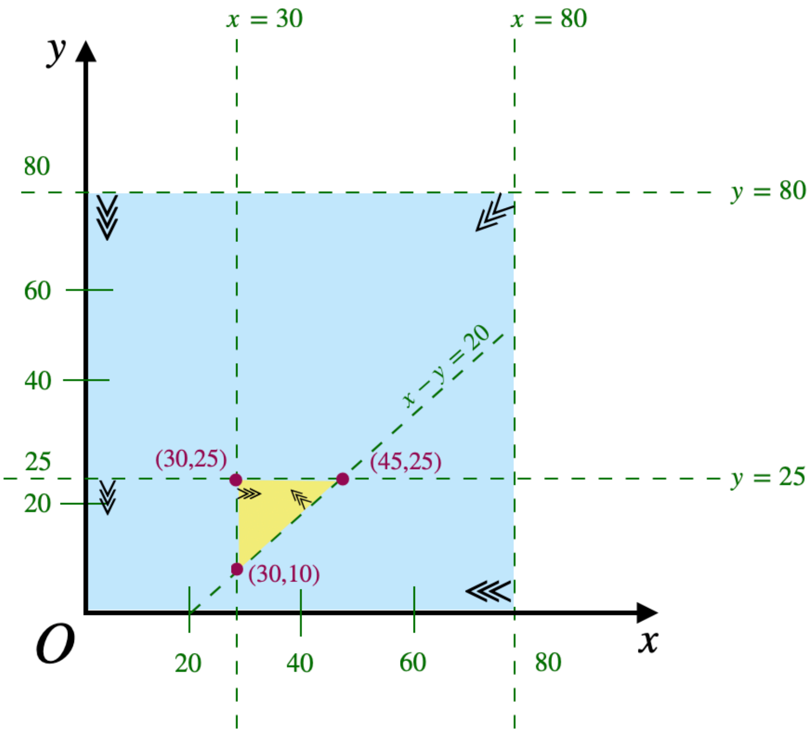


Решение. Избираме по случаен начин две точки x и y, такива че $x, y \in [0, 80]$. С тях ще отбелязваме началните точки върху лентата на двете непрекъснати съобщения: x за горното и y за долното. Интервала на допустимите стойности и за двете променливи е до 80, тъй като и двете се съдържат в магнетофонната лента по условие и също така имат дължина от 20м. Тогава двете записани съобщения ще представляват интервалите $[x, x+20]$ и $[y, y+20]$. Б.о.о. (без ограничение на общността) нека $x \geq y$, т.е. y да е първият интервал на съобщение (първото записано съобщение). Първият интервал трябва да е започнал най-късно в началото на интврвала $[25, 50]$ (за да може да няма непокрита част от него), т.е. ще имаме, че $\mathbf{y \leq 25}$, а втория интервал трябва да започва най-късно веднага след края на първия (не по-късно от края на първия), тъй като първия не е достатъчен за да покрие целия интервал от $[25, 50]$. Следователно ще имаме, че $\mathbf{x \leq y + 20}$. От друга страна, вторият интервал, трябва да покрива всичко до края на интервала $[25, 50]$ и следователно ще имаме още, че краят му е не по-рано от 50, т.е. $\mathbf{x + 20 \geq 50}$.

Получихме **пет** ограничения за променливите x и y, които въведохме:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 80 \\ 0 \le y \le 80 \\ y \le 25 \\ x \le y + 20 \\ x + 20 \ge 50 \end{cases}$$

. Нека ги нанесем на координатна система $\overrightarrow{Oxy}$, по такъв начин, че началото на горния интервал се изобразява по y, а началото на долния – по x (те са независими случайни събития).



Жълтото триъгълниче е сечението на всички неравенства от условието, а вселената от допустимите ни стойности е голямото квадратче в синьо.

$$S_{\triangle} = \frac{(45-30)\times(25-10)}{2} = \frac{15\times 15}{2} = \frac{225}{2};$$
$$S_{\square} = 80\times 80 = 6400.$$

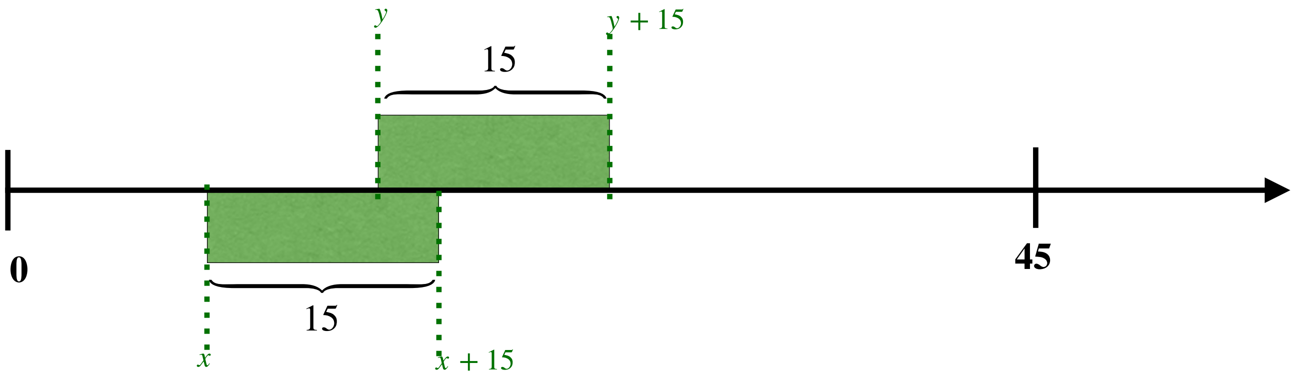
Следователно,

$$p = \mathbb{P}(\{x-y\le 20\}\cap\{30\le x\}\cap\{0\le y\le 25\}\,|\,\{0\le x, y\le 80\}) =$$
$$= \frac{\mu(\{x-y\le 20\}\cap\{0\le x\le 30\})}{\mu(\{0\le x, y\le 80\})} = \frac{\frac{225}{2}}{6400} = \frac{225}{12800} \approx 0.0175$$

Но тъй като допуснахме, че $x \ge y$, то търсената вероятност ще е $2\times p \approx 0.035$
Тук използвахме факта, че жълтото множество е подмножество на синьото: $\triangle \subset \square$.

Задача 2. (Зад. 2) В продължение на една минута, два компютъра се свързват с рутер, всеки за по 15 сек. Моментите на свързване са случайни и независими.
а) Да се определи вероятността общото време, през което рутерът е свързан да е под 20 сек.
б) Ако на 30-тата секунда се случи токов удар, от който рутерът се възстановява за 10 сек., каква е вероятността токовият удар да доведе до проблем с връзката?

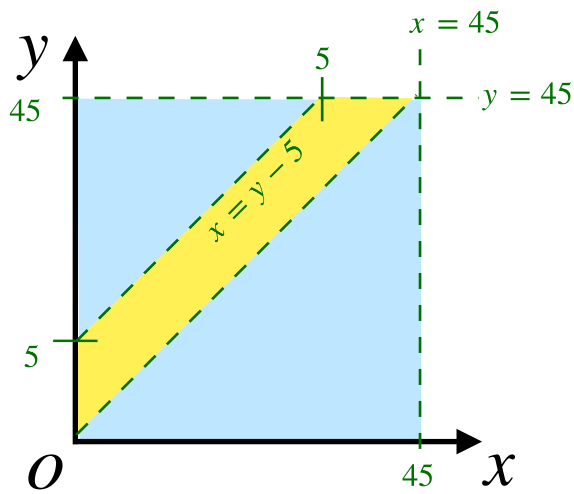
Решение. Нека x и y са две случайно избрани цели координати, такива че $x, y \in [0, 45]$. С тях ще отбелязваме началните точки на свързване съответно на първия и втория компютър с рутера. Интервала на допустимите стойности и за двете променливи е до 45, тъй като и двата компютъра се свързват към рутера в рамките на една минута по условие. Тогава двата периода, в който компютрите са свързани може да моделираме чрез интервалите $[x, x+15]$ и $[y, y+15]$. Б.о.о. (без ограничение на общността) нека $x \leq y$, т.е. първия компютър да се включва към рутера преди втория.



а) За да бъде рутър свързан не повече от 20 сек. е необходимо двата компютъра да са свързани едновременно за не по-малко от 10 сек.
Нека A е събитието – рутър е свързан за по-малко от 20сек.

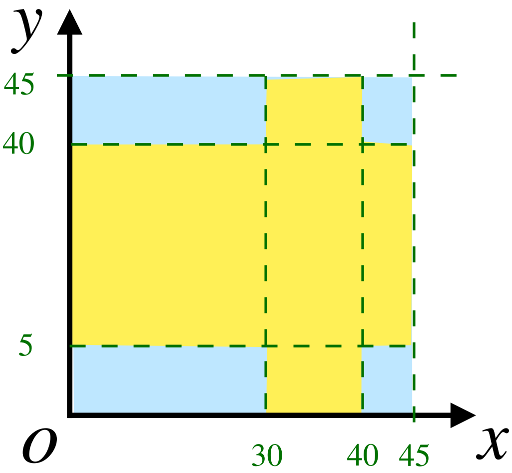
$$\mathbb{P}(A) = 2 \times \mathbb{P}(\{x + 15 - y \geq 10\} \cap \{x \leq y\} \,|\, \{0 \leq x, y \leq 45\}) =$$
$$= 2 \times \frac{\mu(\{x \geq y - 5\} \cap \{x \leq y\} \cap \{0 \leq x, y, \leq 45\})}{\mu(\{0 \leq x, y, \leq 45\})} = \frac{S_{▱}}{S_{\square}}$$

$$\mathbb{P}(A) = 2 \times \frac{\frac{45 \times 45}{2} - \frac{40 \times 40}{2}}{45 \times 45} =$$
$$= 1 - \frac{8^2}{9^2} = \frac{17}{81} \approx 0.2098$$



b) Нека за тази подточка именуваме събитието – „поне един от компютрите е бил във връзка или се е опитал да се свърже с рутера, докато той се е възстановявал“ с B.

$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\{x \leq 30,\, y \geq 40\} \cap \{x \geq 40,\, y \leq 30\} \cap \{x, y \leq 30\} \cap \{x, y \geq 40\} \cap \{0 \leq x, y, \leq 45\})}{\mathbb{P}(\{0 \leq x, y \leq 45\})}$$



$$\mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{2 \times (30 \times 5 + 5 \times 5)}{45 \times 45} = \frac{10 \times 35}{45 \times 45} = \frac{14}{81}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\overline{B}) = \frac{67}{81} \approx 0.8271.$$

Задача 3. (Зад. 2) Съществуват три рискови фактора A, B и C за заболяване. Вероятността човек да има един от тях, но не и другите два е 0.1 за всеки фактор. Вероятността човек да има точно два фактора, но не и третия е 0.14 за всеки два фактора. Вероятността човек да има и трите фактора, ако има A и B е 1/3 (0.33(3)). Каква е вероятността човек да няма нито един фактор, ако няма A?

Решение. По условие имаме, че $\mathbb{P}(A\overline{B}\,\overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A}B\overline{C}) = \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}C) = 0.1$,

$\mathbb{P}(\overline{A}BC) = \mathbb{P}(A\overline{B}C) = \mathbb{P}(AB\overline{C}) = 0.14$. Освен това,
$\mathbb{P}(ABC\,|\,AB) = \mathbb{P}(C\,|\,AB) = \dfrac{1}{3}$.

Търси се $\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,|\,\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{B}\,\overline{C}\,|\,\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{A})} \quad (\star)$.

От условието

$$\mathbb{P}(C\,|\,AB) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(AB)} = \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(ABC) + \mathbb{P}(AB\overline{C})} = \frac{\mathbb{P}(ABC)}{\mathbb{P}(ABC) + 0.14} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(ABC) = 0.07$
От формулата за пълната вероятност, човек може да има 0, 1, 2 или 3 заболявания:
$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) + 3 \times \mathbb{P}(A\overline{B}\,\overline{C}) + 3 \times \mathbb{P}(\overline{A}BC) + \mathbb{P}(ABC) =$
$= \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) + 3 \times 0.1 + 3 \times 0.14 + 0.07 = \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) + 0.79 \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) = 0.21.$

Сега, за да заместим в $(\star)$ остана само да намерим
$\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A}B) + \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}) = \mathbb{P}(\overline{A}BC) + \mathbb{P}(\overline{A}B\overline{C}) = + \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}C) + \mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) =$
$= 0.14 + 0.1 + 0.1 + 0.21 = 0.55$
Окончателно, $\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,|\,\overline{A}) = \dfrac{\mathbb{P}(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \dfrac{0.21}{0.55} \approx 0.3818.$

Задача 4. (Зад. 1) В урна има топки номерирани с цифрите от 1 до 9. От урната последователно с връщане се вадят три топки, като номерата им се записват. За изтеглените номера са дефинирани следните събития:

$A = \{$всички са нечетни$\}$; $B = \{$ има точно две еднакви цифри$\}$; $C = \{$ най-големият е $5\}$.

Да се определи вероятността на събитията. Независими ли са събитията A и B.

Решение.

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{5}{9}\right)^3; \quad \mathbb{P}(B) = \binom{3}{2} \times \frac{9}{9} \times \frac{8}{9}; \quad \mathbb{P}(C) = \binom{3}{2} \times \frac{1}{9} \times \frac{5}{9} \times \frac{5}{9}.$$

Търсим $\mathbb{P}(AB) = \binom{3}{1} \times \dfrac{5 \times 4}{9^3}$ (по пет начина избираме кое нечетно число ще повторим, останалото го избираме по четири начина и избираме кое ще се повтаря)

$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(AB)$, следователно събитията A и B не са независими (зависими).

Задача 5. (Зад. 4) Детектор улавя пет елементарни частици. За всяка от тях вероятността да е високоенергийна е 0.2. Вероятностите за блокиране на детектора при попадане на 1, 2 и 3 такива частици са съответно 0.1, 0.2 и 0.7. При повече високоенергийни частици детекторът със сигурност блокира. Намерете математическото очакване на броя високоенергийни частици, които са попаднали в детектора. Ако детекторът е блокирал, каква е вероятността в него да са попаднали по-малко от три високоенергийни частици.

Решение. Имаме бернулиева схема, в която детектор улавя частици пет пъти, като всяко улавяне е независимо от останалите и е с вероятност за успех $p = 0.2$ (под успех сме дефинирали събитието частица да е високоенергийна).

Нека $X \in Bin\left(n = 5, p = \dfrac{1}{5}\right)$. Тогава,

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} =$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} = np \sum_{j=0}^{m} p^k q^{m-j} = np = 5 \times 0.2 = 1$$

Дефинираме следното събитие $A = \{$детекторът блокира$\}$. Тогава по условие имаме, че

$\mathbb{P}(A \mid X = 1) = \dfrac{1}{10}$, $\mathbb{P}(A \mid X = 2) = \dfrac{3}{10}$, $\mathbb{P}(A \mid X = 3) = \dfrac{7}{10}$, $\mathbb{P}(A \mid X = 4) = \mathbb{P}(A \mid X = 5) = 1$

За пълнота може да добавим, че $\mathbb{P}(A \mid X = 0) = 0$, което не е съществено за блокиране на детектора. Търсим:

$$\mathbb{P}(X<3\,|\,A)=\frac{\mathbb{P}(\{X<3\}\cap A)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{\mathbb{P}(\{X=1\cap A\}\cap\{X=2\cap A\})}{\mathbb{P}(A)}=$$
$$=\frac{\mathbb{P}(\{X=1\cap A\})+\mathbb{P}(\{X=2\cap A\})}{\mathbb{P}(A)}=$$
$$=\frac{\mathbb{P}(A\,|\,X=1)\mathbb{P}(X=1)+\mathbb{P}(A\,|\,X=2)\mathbb{P}(X=2)}{\sum_{i=1}^{5}\mathbb{P}(A\,|\,X=i)\mathbb{P}(X=i)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{10}\binom{5}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4+\frac{3}{10}\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3}{\frac{1}{10}\binom{5}{1}\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4+\frac{3}{10}\binom{5}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^2\left(\frac{4}{5}\right)^3+\frac{7}{10}\binom{5}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3\left(\frac{4}{5}\right)^2+\binom{5}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)+\binom{5}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5}\approx$$
$$\approx 0.71$$

Задача 6. (Зад. 4) На стрелбище клиент заплаща 2лв. и получава право на 3 изстрела. Ако уцели три пъти мишената печели 10лв., при две попадения печели 5лв., а при едно взима левче. Вероятността за уцелване на мишената при един изстрел е 1/3. Справедлива ли е играта? Ако момчето е на печалба, каква е вероятността да е уцелило три пъти?

Решение. Нека A_i, $i=1,2,3$ са бернулиев експерименти с вероятност за успех $\mathbb{P}(A_i)=\dfrac{1}{3}$. Тогава от условието може да моделираме задачата като за всеки от трите изстрела съпоставим съответно експериментите A_i.

Нека X е случайната величиина „брой пъти, в които играч уцелва мишената“. Тъй като X брои успехите от бернулиеви опити (и играча стреля само три пъти), то $X\in Bin\left(n=3,\,p=\dfrac{1}{3}\right)$. Тогава от тегловата функция за биномно разпределената случайна величина имаме, че $k\mapsto p_k=\mathbb{P}(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$, където $k=0,\,1,\,2,\,3,$ е броя на успехите. Тъй като е възможно стрелец да не уцели нито веднъж мишената, за това k започва от 0.

Нека Y е случайната величина „печалба на стрелец“. Тогава тегловата функция на Y ще е $Y=\begin{cases}-2,\text{ ако } X=0\,;\\-1,\text{ ако } X=1\,;\\\ \ 3,\text{ ако } X=2\,;\\\ \ 8,\text{ ако } X=3.\end{cases}$ Тогава разпределението на Y ще е следното:

Y	-2	-1	2	8
$\mathbb{P}(X=k)_{k=\overline{0,3}}$	$\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^3$	$\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(1-\frac{1}{3}\right)^2$	$\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{3}\right)^1$	$\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(1-\frac{1}{3}\right)^0$
Проверка: $\sum=\frac{8+12+6+1}{27}=1$	$=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$	$=3\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)=\frac{12}{27}$	$=3\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{6}{27}$	$=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

За да проверим дали играта е честна или колко не е честна, ще пресметнем математическото очакване на Y.

$\mathbb{E}Y = -2 \times \dfrac{8}{27} - 1 \times \dfrac{12}{27} + 2 \times \dfrac{6}{27} + 8 \times \dfrac{1}{27} = -\dfrac{2}{27} < 0 \Rightarrow$ играта не е честна и

е с много малко в полза на приемащият залози.

Търси се: $\mathbb{P}(X = 3 \,|\, Y > 0) = \dfrac{\mathbb{P}(X = 3)}{\mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3)} = \dfrac{\frac{1}{27}}{\frac{6}{27} + \frac{1}{27}} = \dfrac{1}{7}$.

Задача 7. (Зад. 3) Броят на частиците попаднали в детектор е поасоново разпределена случайна величина с очакване една частица на ден. При попадането на по-малко от три частици детекторът работи. При три частици вероятността за повреда е 1/2, при повече от три частици детекторът се поврежда. Каква е вероятността детекторът да се повреди? Ако уред се състои от 1000 детектора, оценете вероятността да се повредят повече от 200 от тях.

Решение. Нека X е случайната величина {„брой на частици попаднали в детектор за един ден“}. Имаме, че $X \in Pois(\lambda = 1)$.

Тегловата функция на X е $k \mapsto p_k = \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. Ако A е събитието { детектора се поврежда}, то

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X = 3) = 1 - e^{-1}\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3!}\right)$$

$$= 1 - e^{-1}\left(\frac{24 + 6 + 1}{12}\right) = 1 - \frac{31}{12e} \approx 0.0496 \approx 0.05$$

Нека Y; $Y_i, i = 1, \ldots, 1000$ са съответно случайните величини – брой попаднали частици в 1000 детектора; брой попаднали частици в i-тия детектор. Тъй като $Y_i \in Pois(\lambda_i)$ и $\lambda_i = 1$, за $i = 1, \ldots, 1000$, то от теоремата на Поасон знаем, че $Y \in Pois\left(\sum_{i=1}^{1000} \lambda_i = 1000 \times \lambda = 1000\right)$.

Нека Z е случайната величина {„брой повредили се детектора от 1000“}, а $Z_i, i = 1, \ldots, 1000$ са бернулиево разпределените събития – {„i-тия детектор от машината се поврежда“}. Тъй като Z брой бернулиеви събития с вероятност за успех $p = 0.05$ (където под успех сме дефинирали – {„даден детектор се поврежда“}), то $Z \in Bin(n = 1000, p = 0.05)$.

Искаме да оценим $\mathbb{P}(Z > 200)$.

Имаме, че $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{1000} Z_i \overset{\substack{\mathbb{E} \text{ е линеен} \\ \text{функционал}}}{=} \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}Z_1 = 1000 \times p = 1000 \times 0.05 \approx 50.$

От дтуга страна, тъй като Z_i са независими събития, то

$$\mathbb{D}Z = \mathbb{D}\sum_{i=1}^{1000} Z_i = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{D}Z_1 = 1000 \times p \times 1 - p = 1000 \times 0.05 \times 0.95 = 47.5.$$

За да направим оценка е необходимо да използваме неравенството на Чебишев:

$$\mathbb{P}(Z > 200) = \mathbb{P}(Z \geq 199) \leq \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}Z| > 199 - \mathbb{E}Z) \leq \frac{\mathbb{D}Z}{(199 - \mathbb{E}Z)^2}.$$

Следователно $\mathbb{P}(Z > 200) \leq \dfrac{47.5}{(199 - 50)^2} \approx 0.002139$. Т.е. вероятността да се

счупят повече от 200 детектора е $0.21\ \%$.

Ако искаме да направим по-точна оценка, може да използваме неравенството на Кантели, което ни дава:

$$\mathbb{P}(Z - \mathbb{E}Z \geq 199 - \mathbb{E}Z) \leq \frac{\mathbb{D}Z}{\mathbb{D}Z + (199 - \mathbb{E}Z)^2} \approx 0.002134,$$

което ни дава миниатюрна разлика, но в наша полча (неравенството е по-строго).

Задача 8. (Зад. 1) A и B провеждат дуел (стрелят един срещу друг). При това има три равновероятностни връзможности: A стреля пръв, а B втори; B стреля пръв, а A втори; стрелят едновременно. A улучва смъртоносно с вероятност 0.7, а B с вероятност 0.8. Каква е вероятността A да бъде убит?

Решение. Въвеждаме следните означения за събитията:

$H_A = \{A \text{ стреля пръв}\}$
$H_B = \{B \text{ стреля пръв}\}$
$H_T = \{A \text{ и } B \text{ стрелят едновременно}\}$

По условие $\mathbb{P}(H_A) = \mathbb{P}(H_B) = \mathbb{P}(H_C) = \dfrac{1}{3}$ и следователно образуват пълна група от събития, тъй като вероятностните им мерки се събират до единица и са взаимно непресичащи се събития (разбиване).

Нека означим събитията:

$C = \{A \text{ улучва смъртоносно } B\}$
$D = \{B \text{ улучва смъртоносно } A\}$

От условието следва, че $\mathbb{P}(C) = 0.7$ и $\mathbb{P}(D) = 0.8$

Нека преименуваме събитието $A_{dead} = \{A \text{ е убит}\}$.

a) A и B стрелят най-много по един път. Тогава от формулата за пълната вероятност имаме, че

$$\mathbb{P}(A_{dead}) = \mathbb{P}(\overline{C}D \mid H_A)\mathbb{P}(H_A) + \mathbb{P}(D \mid H_B)\mathbb{P}(H_B) + \mathbb{P}(D \mid H_T)\mathbb{P}(H_T) =$$
$$= 0.3 \times 0.8 \times \frac{1}{3} + 0.8 \times \frac{1}{3} + 0.8 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \times \frac{1}{3}\left(\frac{3}{10} + 2\right) =$$
$$= \frac{4}{15} \times \frac{23}{10} = \frac{92}{150} \approx 0.613$$

b) Стрелят докато няма поне един убит. Нека въведем събитието $A_k = \{A \text{ е ранен смъртоносно на } k\text{-тия ход}\}$ и случаините величини X, Y - съответно брой пропуски докато A не рани смъртоносно B; брой пропуски докато B не рани смъртоносно A.

$X \in Ge(p_x = 0.3), Y \in Ge(p_y = 0.2).$

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}(A_k \mid H_A)\mathbb{P}(H_A) + \mathbb{P}(A_k \mid H_B)\mathbb{P}(H_B) + \mathbb{P}(A_k \mid H_T)\mathbb{P}(H_T) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\mathbb{P}(A_k \mid H_A) + \mathbb{P}(A_k \mid H_B) + \mathbb{P}(A_k \mid H_C)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\Bigg[\underbrace{\mathbb{P}(X = k)}_{\substack{A \text{ пропуска} \\ \text{точно } k \text{ пъти}}} \times \underbrace{\mathbb{P}(Y = k-1)}_{\substack{A \text{ пропуска} \\ \text{точно } k-1 \text{ пъти}}} + \underbrace{\mathbb{P}(X = k-1)} \times \underbrace{\mathbb{P}(Y = k-1)} + \underbrace{\mathbb{P}(X = k-1)}_{\substack{A \text{ пропуска} \\ \text{точно } k-1 \text{ пъти}}}\ \underbrace{\mathbb{P}(Y = k-1)}\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(0.3^k \times 0.2^{k-1} \times 0.8 + 2 \times 0.3^{k-1} \times 0.2^{k-1} \times 0.8\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \times (0.3 \times 0.2)^{k-1} \times \left[0.3 + 2\right] = \frac{1}{3} \times 0.06^{k-1} \times 0.8 \times 2.3 = 0.61 \times 0.06^{k-1}.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A_{dead}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 0.06 \sum_{k=1}^{\infty} 0.06^{k-1} = 0.61 \times \frac{1}{1 - 0.06} = 0.61 \times 1.064 \approx 0.65$$

Задача 9. (Зад. 1) Разбърква се тесте от 32 карти и се вимат горните три. За изтеглените карти са дефинирани събитията:

$A = \{$има поне два попа$\}$;
$B = \{$има точно две карти от един цвят$\}$;
$C = \{$има белот - поп и дама от един цвят$\}$.

Да се определи $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(A \mid B)$. Независими ли са B и C?

Решение. Нека X е случайната величина – „брой изтеглени попове“. Тогава X е разпределено хипергеометрично с $X \in HG(sz = 3, n = 4, N = 32)$.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{1}}{\binom{32}{3}} + \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{0}}{\binom{32}{3}} \approx \frac{43}{1240} = 0.0346$$

```
# R code:
dhyper(x = 2, m = 4, n = 28, k = 3) + dhyper(x = 3, m = 4, n = 28, k = 3)
# 0.03467742
```

Нека Y е случайната величина – {„брой изтеглени червени карти“}. Тогава Y е разпределено хипергеометрично с $Y \in HG(sz = 3, n = 16, N = 32)$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(Y = 2) = \underbrace{2}_{red\ or\ black} \times \frac{\binom{16}{2}\binom{16}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{24}{31} \approx 0.7741$$

R code: 2*dhyper(x=2,m=16,n=16,k=3)=0.7741935

$$\mathbb{P}(C) = \frac{2 \times \binom{2}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{30}{1}}{\binom{32}{3}} = \frac{3}{62} = 0.0483$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \underbrace{\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}}}_{\text{при три попа – два със сигурност са от един и същ цвят}} + \overbrace{\frac{2\binom{2}{2}\binom{14}{1}}{\binom{32}{2}}}^{\text{двата попа са от един цвят и от другия цвят избираме карта, която да не е поп, за да не влезем в първия случай отново}} + \underbrace{\frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{28}{1}}{\binom{3}{32}}}_{\text{двата попа са от различни цвята и от един цвят избираме карта, която да не е поп, за да не попаднем в първия случай}}$$

$\mathbb{P}(A \mid B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$. B и C са независими $\Leftrightarrow \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{2 \times \binom{2}{1}\binom{2}{1}\binom{16}{1}}{\binom{32}{3}}$$

2← цвят; червен поп; червена дама; една от останалите 16 карти с различен цвят