

Упражнение 12,13,14 по СЕМ - Теория, Задачи, Решения

MRS

13 януари 2021 г.

1 Непрекъснати многомерни случайни величини

Нека n е естествено число, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е вероятностно пространство на експеримент \mathcal{E} , и $X_i \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $i = 1, 2, \dots, n$ са едномерни случайни величини. В \mathbb{R}^n се въвежда частична наредба $\leq_{\mathbb{R}^n}$ посредством $(x_1, \dots, x_n) \leq_{\mathbb{R}^n} (y_1, \dots, y_n) \iff x_1 \leq y_1, \dots, x_n \leq y_n$. Впоследствие релацията $\leq_{\mathbb{R}^n}$ ще записваме чрез \leq . Следващата дефиниция обобщава понятието n -мерна дискретна случайна величина.

Дефиниция 1.1. Изображението $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\omega \longmapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega))$ със свойството: $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq_{\mathbb{R}^n} x\} \in \mathfrak{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, се нарича n -мерна случайна величина върху $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Множеството на случайните величини върху разглежданото вероятностно пространство означаваме със $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ или \mathfrak{S} .

Всяка n -мерна дискретна случайна величина е случайна величина по отношение на дефиниция 1.1, понеже при дискретна $X \in \mathfrak{S}$ и за произволно $x \in \mathbb{R}^n$ е в сила $\{X \leq x\} := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} = \cup_{y \in X(\Omega): y \leq x} \{X = y\} = \cup_{y \in X(\Omega): y \leq x} (\cap_{i=1}^n \{X_i = y_i\})$, което е изброимо обединение на елементи от \mathfrak{A} и следователно принадлежи на \mathfrak{A} .

Дефиниция 1.2. Функция на разпределение за n -мерна $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ наричаме функцията $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ $x \longmapsto P(X \leq x)$, която ще означаваме с F_X .

Функцията на разпределение на всяка случайна величина е монотонно растяща, с гранични стойности $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$, и непрекъсната отлясно. Вярно е и обратното, всяка функция $\mathbb{R}^n \longrightarrow [0, 1]$ с изброените 3 свойства е функция на разпределение за случайна величина, дефинирана в подходящо вероятностно пространство. На многомерна случайна величина еднозначно се съпоставя функция на разпределение. Обратно, на функция на разпределение (това е функция с изброените 3 свойства) съответства множество от случайни величини, чиито функции на разпределение съвпадат с дадената. Свойствата монотонност, гранично поведение и непрекъснатост отлясно следват по аналогичен на едномерния случай начин.

При фиксирано естествено $k : 1 \leq k \leq n$, функцията на разпределение F_{X_k} на X_k се изразява чрез F_X по следния начин: да означим с π_k изображението проектор

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad (x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n),$$

и да положим $y_k = \pi_k(x)$. При $y_k \longrightarrow +\infty$, тоест при $x_1 \longrightarrow +\infty, \dots, x_{k-1} \longrightarrow +\infty, x_{k+1} \longrightarrow +\infty, \dots, x_n \longrightarrow +\infty$, поради непрекъснатостта на вероятностната мярка P получаваме:

$$\lim_{y_k \longrightarrow +\infty} F_X(x) = \lim_{y_k \longrightarrow +\infty} P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n)$$

$$\begin{aligned}
&= P(\{X_k \leq x_k\} \cap_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \{X_i \leq \lim_{x_i \rightarrow +\infty} x_i\}) = P(\{X_k \leq x_k\} \cap_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \Omega) \\
&= P(X_k \leq x_k) = F_{X_k}(x_k) \Rightarrow F_{X_k}(x_k) = \lim_{\pi_k(x) \rightarrow +\infty} F_X(x). \\
F_{X_k}(x_k) &= \lim_{\pi_k(x) \rightarrow +\infty} F_X(x)
\end{aligned} \tag{1}$$

Дефиниция 1.3. Случайните величини X_1, X_2, \dots, X_n наричаме независими, ако за всеки $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ събитията $\{X_i \leq x_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n$ са независими.

Ако X_1, X_2, \dots, X_n са независими, за функцията на разпределение F_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ намираме

$$\begin{aligned}
F_X(x) &:= F_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X \leq x) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) \\
&= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x_i) = \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i).
\end{aligned}$$

Дефиниция 1.4. Случайната n -мерна величина $X \in \mathfrak{S}$ се нарича непрекъсната, ако функцията и на разпределение има вида:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n,$$

където $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ е интегрируема по Лебег функция, която се нарича плътност на X .

Ако $f_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е непрекъсната функция, то прилагайки Лайбниц-Нютон, като редът на диференциране не е от значение (понеже съществуват и са непрекъснати $\frac{\partial^n F_X(x)}{\partial x_{\sigma(1)} \partial x_{\sigma(2)} \dots \partial x_{\sigma(n)}}$, за всяка пермутация $\sigma \in S_n$), получаваме

$$f_X(x) = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

В общия случай, полагаме $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x), & \text{ако съществува производната в } x \\ 0, & \text{в противен случай.} \end{cases}$

Ако X_1, X_2, \dots, X_n са независими, за функцията на плътност f_X на $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ в точките $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ на диференцируемост намираме

$$f_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} F_X(x) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} \prod_{i=1}^n F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i).$$

Всяка функция $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ със свойствата $f \geq 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1$ е функция на плътност на непрекъсната случайна величина (а следователно и на *разпределение*), понеже

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n$$

е монотонна, с гранични стойности $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ и непрекъсната отясно, тоест $F(x)$ е функция на разпределение. Следователно задаването на непрекъснато *разпределение* е еквивалентно на задаване функция на плътност.

Теорема 1.5. Ако $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е непрекъсната n -мерна случайна величина с функция на плътност f_X , и $A \subset \mathbb{R}^n$ е измеримо по Лебег множество, то $P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ и

$$P(X \in A) = \int \cdots \int_{(u_1, u_2, \dots, u_n) \in A} f_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n.$$

Естествена е съпоставката между плътностната функция на непрекъсната $X \in \mathfrak{S}$ и тегловата функция на дискретна $Y \in \mathfrak{S}$ в n -мерния случай. Свойствата $\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ и $\sum_{y \in Y(\Omega)} P(Y = y) = 1$ подсказват аналогия, но тя е непълна: плътността може да приема стойности по-големи от 1. При малки $\delta x_i > 0$, вероятността X да принадлежи на паралелепипеда $\Pi(x, \delta x) = [x_1, x_1 + \delta x_1] \times \cdots \times [x_n, x_n + \delta x_n]$ по теорема 1.5 е

$$P(x \leq X \leq x + \delta x) = \int_{\Pi(x, \delta x)} f_X(u) du \approx f_X(x) \delta x = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta x_1 \delta x_2 \dots \delta x_n.$$

Следователно точната аналогия е между формата $f_X(x) dx = f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$ (на плътност за X) и тегловата функция $y \mapsto P(Y = y)$ на Y .

При фиксирано естествено $k : 1 \leq k \leq n$, функцията на плътност f_{X_k} на X_k се изразява чрез f_X по следния начин (f_X удовлетворява условията на теоремата на Фубини и следователно в разглежданият n -мерен интеграл няма значение редът на интегриране. Съгласно (1) намираме

$$\begin{aligned} f_{X_k}(x_k) &= \frac{d}{dx_k} F_{X_k}(x_k) = \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \rightarrow \infty} F_X(x) \right] \\ &= \frac{d}{dx_k} \left[\lim_{\pi_k(x) \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(u_1, u_2, \dots, u_n) du_1 du_2 \dots du_n \right] \\ &= \frac{d}{dx_k} \int_{\mathbb{R}^{k-1} \times (-\infty, x_k] \times \mathbb{R}^{n-k}} f_X(u) du \\ &= \frac{d}{dx_k} \int_{-\infty}^{x_k} \left[\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u) du_1 \dots du_{k-1} du_{k+1} \dots du_n \right] du_k \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_X(u_1, \dots, u_{k-1}, x_k, u_{k+1}, \dots, u_n) du_1 \dots du_{k-1} du_{k+1} \dots du_n. \end{aligned}$$

Ако X и Y са непрекъснати с функции на плътност f_X и f_Y , то за плътността на $Z = X + Y$ намираме:

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= f_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} F_{X+Y}(z) = \frac{d}{dz} \int \int_{(x,y) \in \mathbb{R}^2: x+y \leq z} f_{X,Y}(x,y) dx dy \\ &= \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y) dy \right] dx = \frac{d}{dz} \int_{\mathbb{R}} \int_{-\infty}^z f_{X,Y}(x(u,v), y(u,v)) |J_{\Psi^{-1}}(u,v)| du dv \\ &= \frac{d}{dz} \int_{-\infty}^z \left[\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, v-u) du \right] dv = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, z-u) du. \end{aligned}$$

В пресмятанията приложихме теорема 1.7 като направихме гладка смяна на променливите чрез дифеоморфизмът $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (x,y) \mapsto (u,v)$, като $u = x$, $v = x + y$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x = u$, $y = v - u$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} = 1$. В частност, ако X и Y са независими, то $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ и получаваме:

Теорема 1.6. Ако X и Y са непрекъснати и независими случайни величини, съответно с плътности f_X и f_Y , то за плътността f_{X+Y} на $X + Y$ е в сила:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(u) f_Y(z - u) du.$$

Теорема 1.7. Нека (X, Y) е двумерна непрекъсната случайна величина, с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x, y) > 0\}$. Ако изображението $\Psi : D \rightarrow \Psi(D)$ $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U, V) = (u \circ (X, Y), v \circ (X, Y))$ е непрекъсната, с плътност

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) |J_{\Psi^{-1}}(u, v)|, & (u, v) \in \Psi(D) \\ 0, & (u, v) \notin \Psi(D) \end{cases}$$

Нека $(X, Y) \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ е двумерна непрекъсната случайна величина, $S = \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$. Ако $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X . Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X \mid Y = y)$ и се задава чрез функция на разпределение $F_{X|Y} : X(\Omega) \rightarrow [0, 1]$ $x \mapsto P(X \leq x \mid Y = y)$. Условната вероятност се дефинира чрез:

$$\begin{aligned} P(X \leq x \mid Y = y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{P(X \leq x, y \leq Y \leq y + h)}{P(y \leq Y \leq y + h)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du \right] dv}{\int_y^{y+h} f_Y(v) dv} = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} \left[\int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, v) du \right] dv}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_y^{y+h} f_Y(v) dv} \\ &= \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du \Rightarrow F_{X|Y}(x, y) = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{-\infty}^x f_{X,Y}(u, y) du. \end{aligned}$$

Функцията на плътност $f_{X|Y}$ на $(X \mid Y = y)$ е $f_{X|Y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} F_{X|Y}(x, y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}$.

Дефиниция 1.8. Условна функция на плътност за X при условие $Y = y$, наричаме функцията

$$f_{X|Y} : \mathbb{R} \times S \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)}.$$

Теорема 1.9. Нека $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ е непрекъсната случайна величина с плътност f_X , $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ е интегрируема по Лебег функция. Тогава $g \circ X$ е едномерна случайна величина със средно $\mathbf{E}g \circ X = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f_X(x) dx$.

Забележка 1.10. Всяка интегрируема функция е абсолютно интегрируема. Обратното не е вярно. В частност, от интегрируемост на g следва, че е абсолютно интегрируема функцията $g f_X$ и следователно съществува средното $\mathbf{E}g \circ X$.

Дефиниция 1.11. Нека $f_{X|Y}$ е условна функция на плътност за X относно Y , където (X, Y) е непрекъсната случайна величина. При $y \in \{y \in \mathbb{R} \mid f_Y(y) > 0\}$, за средното на $(X \mid Y = y)$ е в сила

$$\mathbf{E}(X \mid Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x, y) dx = \frac{1}{f_Y(y)} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx.$$

1.1 Условия на задачите от упражнение 15

Задача 1 Точка (X, Y) попада по случаен начин в триъгълник с върхове в точките с координати $(0,0)$, $(0,2)$ и $(3,0)$. Да се намери съвместната плътност и функцията на разпределение на X и Y . Да се пресметне коефициента на корелация $\rho_{X,Y}$.

Задача 2 Електронно устройство за предпазване от крадци автоматично променя осветлението в дома. То е настроено така, че в продължение на 1 час, в случаен момент X ще запали лампите, а в момент Y ще ги огаси. Нека съвместната плътност на случайните величини X и Y е $f_{X,Y}(x,y) = cxy$, $0 < x < y < 1$. Да се определят:

- а) константата c така, че плътността да е добре дефинирана;
- б) маргиналните плътности и математическите очаквания;
- в) вероятността лампите да бъдат запалени преди 45-тата минута и да светят по-малко от 10мин;
- г) колко е средното време на светене, ако лампите са запалени на 15мин;
- д) каква е вероятността лампите да светят по-малко от 20мин.

Задача 3 Нека X е температурата, а Y е времето необходимо за подготовка за запалване на дизелов двигател в минути. Нека $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2000}(x + 5y + 10)$, $-10^\circ \leq x \leq 30^\circ$, $0 \leq y \leq 2$. Да се определи:

- а) вероятността да е нужна поне 1 минута за запалване;
- б) средното време за запалване при 15° ;
- в) ако двигателят е запалил за 1,5 минути, каква е вероятността температурата да е отрицателна?

Задача 4 Върху страните на квадрат независимо една от друга по случаен начин попадат две точки. Да се намери математическото очакване на квадрата на разстоянието между точките, ако страната на квадрата е с дължина a .

Задача 5 Нека случайните величини $X_1, X_2 \in \text{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = \frac{X_1}{X_1 + X_2}$.

Задача 6 Нека случайните величини $X_1, X_2 \in U(0,1)$ са независими. Да се намери разпределението на случайната величина $Y = X_1 + X_2$.

Задача 7 Нека случайните величини $X_1, X_2 \in \text{Ex}(\lambda)$ са независими. Да се намери плътността на случайната величина:

- а) $Y = \max(X_1, X_2)$;
- б) $Y = \min(X_1, X_2)$.

Задача 8 Случайна величина $Z = (X, Y)$ има плътност $f(x,y) = \begin{cases} c(1+xy), & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

Намерете:

- а) константата c ;
- б) $\mathbf{E}XY$, $\mathbf{D}(X - Y)$.

Задача 9 Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин попада точка P . Правата през P , успоредна на страна на триъгълника, пресичат другите му две страни в точките Q и R . Точките S и T лежат върху страна на триъгълника така, че $QRST$ е правоъгълник. Да се намери средната стойност на лицето на $QRST$.

Задача 10 Във вътрешността на тетраедър T с обем 1 по случаен начин попада точка P . Равнината през P успоредна на една от стените на T отсича от T тетраедър T_1 . Да се намери средната стойност на обема на T_1 .

1.2 Решения на задачите от упражнение 15

Задача 1 Случайните величини X и Y удовлетворяват условията $X \geq 0$, $Y \geq 0$, $2X + 3Y \leq 6$. При $x > 0$, $y > 0$ дефинираме $A(x, y) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u \leq x, 0 \leq v \leq y\} = [0, x] \times [0, y]$ и $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 2x + 3y \leq 6\}$. Функцията $F_{X,Y}$ на разпределение на двумерната случайна величина (X, Y) е

$$F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0 \\ \frac{\mu(A(x,y) \cap B)}{\mu(B)}, & (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ или } y \leq 0 \\ \frac{xy}{3}, & 0 < x, 0 < y, 2x + 3y \leq 6 \\ \frac{12xy - (2x + 3y - 6)^2}{36}, & 0 < x \leq 3, 0 < y \leq 2, 2x + 3y > 6 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{9}, & 0 < x \leq 3, 2 < y \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{4}, & 3 < x, 0 < y \leq 2 \\ 1, & 3 \leq x, 2 \leq y \end{cases}.$$

Плътноста на (X, Y) е $f_{X,Y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 < x < 3, 0 < y < 2, 2x + 3y \leq 6 \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}.$

Плътностите на X и Y са съответно $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, v) dv = \int_0^{2-\frac{2x}{3}} \frac{1}{3} dv = \frac{2}{3}(1 - \frac{x}{3})$, $x \in (0, 3)$; $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, y) du = \int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{1}{3} du = 1 - \frac{y}{2}$, $y \in (0, 2)$. Пресмятаме:

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^3 \frac{2x}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = 1, \quad EY = \int_{\mathbb{R}} y f_Y(y) dy = \int_0^2 y \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{2}{3}.$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = -1 + \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x) dx = -1 + \int_0^3 \frac{2x^2}{3} \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = \frac{1}{2},$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = -\frac{4}{9} + \int_{\mathbb{R}} y^2 f_Y(y) dy = -\frac{4}{9} + \int_0^2 y^2 \left(1 - \frac{y}{2}\right) dy = \frac{2}{9}.$$

$$EXY = \int \int_{\mathbb{R}^2} xy f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_0^2 \left[\int_0^{3-\frac{3y}{2}} \frac{xy}{3} dx \right] dy = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(X, Y) = \frac{EXY - EXEY}{\sqrt{DXDY}} = -\frac{1}{2}.$$

Пресмятаме функциите на разпределение на X и Y :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du = \int_0^x \frac{2}{3}(1 - \frac{u}{3})du = \frac{x(6-x)}{9}, \quad x \in (0, 3).$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(u)du = \int_0^y (1 - \frac{u}{2})du = y - \frac{y^2}{4}, \quad y \in (0, 2).$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x(6-x)}{9}, & x \in (0, 3); \\ 1, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ y - \frac{y^2}{4}, & x \in (0, 3); \\ 1, & y \geq 2. \end{cases}$$

Задача 2 Нека $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}$.

а) Пресмятаме $1 = \int \int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int \int_A cxy dx dy = c \int_0^1 [\int_0^y xy dx] dy = \frac{c}{8} \Rightarrow c = 8$. Съвместната плътност на X и Y е $f_{X,Y}(x, y) = 8xy$ при $(x, y) \in A$, и $f_{X,Y}(x, y) = 0$ при $(x, y) \notin A$.

б) Пресмятаме $f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, v) dv = \int_x^1 8xv dv = 4x(1 - x^2)$, $x \in (0, 1)$;

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(u, y) du = \int_0^y 8uy du = 4y^3, \quad EX = \int_{\mathbb{R}} xf_X(x) dx = \int_0^1 4x^2(1 - x^2) dx = \frac{8}{15}.$$

$$EY = \int_{\mathbb{R}} yf_Y(y) dy = \int_0^1 4y^4 dy = \frac{4}{5}.$$

в) Търсената вероятност е $P = P(X < \frac{3}{4}, Y < X + \frac{1}{6}) = \int_0^{\frac{3}{4}} \int_0^{x+\frac{1}{6}} f_{X,Y}(x, y) dy dx =$

$$= \int_0^{\frac{3}{4}} \left[\int_x^{x+\frac{1}{6}} 8xy dy \right] dx = \frac{7}{32}.$$

г) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y - X \mid X = \frac{1}{4})$. Ако дефинираме $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto x - \frac{1}{4}$, то $E(Y - X \mid X = \frac{1}{4}) = E(Y - \frac{1}{4} \mid X = \frac{1}{4}) = E(g \circ Y \mid X = \frac{1}{4}) = E(g \circ (Y \mid X = \frac{1}{4})) =$

$$\int_{\mathbb{R}} g(y) f_{Y|X} \left(y \mid x = \frac{1}{4} \right) dy = \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{4}, y)}{f_X(\frac{1}{4})} dy = \frac{32}{15} \int_{\frac{1}{4}}^1 \left(y - \frac{1}{4} \right) y dy = \frac{27}{60} \text{ h} = 27 \text{ min}.$$

е) Нека $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1, y - x < \frac{1}{3}\}$, $B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq \frac{2}{3}, x < y < x + \frac{1}{3}\}$, $B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2}{3} < x < 1, x < y < 1\}$. Следователно $B = B_1 \cup B_2$ и търсената вероятност е

$$P((X, Y) \in B) = \int \int_B f_{X,Y}(x, y) dx dy = \sum_{k=1}^2 \int \int_{B_k} f_{X,Y}(x, y) dx dy =$$

$$= \int_0^{\frac{2}{3}} \left[\int_x^{x+\frac{1}{3}} 8xydy \right] dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \left[\int_x^1 8xydy \right] dx = 1 - \frac{80}{243} \approx 0.67$$

Задача 3 Нека $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -10 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 2\}$, като $f_{X,Y}(x, y) = 0$, при $(x, y) \notin A$.

а) Ако $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\} \cap A$, то $P(Y \geq 1) = P((X, Y) \in B) = \int \int_B f_{X,Y}(x, y) dx dy =$

$$= 2000^{-1} \int_{-10}^{30} \left[\int_1^2 (x + 5y + 10) dy \right] dx = \frac{11}{20} = 0.55$$

б) Търсим средната стойност на случайната величина $(Y \mid X = 15)$. Пресмятаме

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dy = 2000^{-1} \int_0^2 (x + 5y + 10) dy = \frac{x + 15}{1000}$$

$$\begin{aligned} E(Y \mid X = 15) &= \int_{\mathbb{R}} y f_{Y|X}(y \mid x = 15) dy = \int_{\mathbb{R}} y \frac{f_{X,Y}(15, y)}{f_X(15)} dy \\ &= \frac{1}{12} \int_0^2 y(y + 5) dy = \frac{19}{18} \approx 1.05 \end{aligned}$$

в) Пресмятаме $f_Y(y) = 2000^{-1} \int_{-10}^{30} (x + 5y + 10) dx = \frac{y+4}{10}$, следователно

$$\begin{aligned} P(X < 0 \mid Y = 1.5) &= \int_{-\infty}^0 f_{X|Y}(x \mid y = 1.5) dx = \int_{-\infty}^0 \frac{f_{X,Y}(x, 1.5)}{f_Y(1.5)} dx = \\ &= 2000^{-1} \int_{-10}^0 \frac{x + 17.5}{0.55} dx = \frac{5}{44} \approx 0.113 \end{aligned}$$

Задача 4 Нека $(X, Y) \in [0, a] \times [0, a]$, като $X, Y \in \mathcal{U}(0, a)$ са независими. Тук интерпретираме X като разстоянието от произволно избраната точка върху контура на квадрата до съседният и отляво връх на квадрата, при положителна ориентация на контура (обратна на часовниковата стрелка). Аналогично за Y . Нека Z е случайната величина - квадратът на разстоянието между двете произволно избрани точки върху контура на квадрата. Нека $g_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ са съответно функциите (при $k = 1, 2, 3, 4$): $g_1(x, y) = (x - y)^2$, $g_2(x, y) = (a - x)^2 + y^2$, $g_3(x, y) = a^2 + (a - x - y)^2$, $g_4(x, y) = x^2 + (a - y)^2$. Дефинираните функции изчисляват търсеното квадратично разстояние при възможните разположения на избраните две точки: когато са на една и съща страна ($k = 1$), когато са на съседни страни ($k = 2, 4$), на срещуположни страни ($k = 3$). Всяко от тези взаимни разположения се реализира с вероятност $\frac{1}{4}$, а плътността на (X, Y) е $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{a^2}$ при $(x, y) \in [0, a]^2$, и 0 в противен случай. За търсеното средно EZ намираме:

$$\begin{aligned} EZ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 E g_k \circ (X, Y) = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \int \int_{[0,a]^2} g_k(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{6} + \frac{2a^2}{3} + \frac{7a^2}{6} + \frac{2a^2}{3} \right) = \frac{2a^2}{3}. \end{aligned}$$

Задача 5 За функцията на разпределение F_{X_1, X_2} на (X_1, X_2) намираме:

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2) \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1})(1 - e^{-\lambda x_2}), \text{ при } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Следователно $f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x_1+x_2)}, & (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{в останалите случаи} \end{cases}$
Изображението $\Psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \times (0, 1)$ $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, \frac{x_1}{x_1+x_2})$ е дифеоморфизъм, следователно задава гладка смяна на променливите $(x_1, x_2) \rightarrow (x, y)$, като $x = x_1$, $y = \frac{x_1}{x_1+x_2}$. За обратната трансформация Ψ^{-1} намираме $x_1 = x$, $x_2 = \frac{x}{y} - x$, с якобиан $J_{\Psi^{-1}}(x, y) = \frac{\partial x_1}{\partial x} \frac{\partial x_2}{\partial y} - \frac{\partial x_1}{\partial y} \frac{\partial x_2}{\partial x} = -\frac{x}{y^2}$. От теорема 1.7 при $X = X_1$, $x > 0$, $y \in (0, 1)$ получаваме

$$\begin{aligned} f_{X,Y}(x, y) &= f_{X_1, X_2}(x_1(x, y), x_2(x, y)) |J_{\Psi^{-1}}(x, y)| = \frac{x}{y^2} f_{X_1, X_2}\left(x, \frac{x}{y} - x\right) = \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_Y(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda^2 x}{y^2} e^{-\frac{\lambda x}{y}} dx = \int_{\mathbb{R}^+} \frac{\lambda x}{y} e^{-\frac{\lambda x}{y}} d\left(\frac{\lambda x}{y}\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} t e^{-t} dt = 1. \end{aligned}$$

Следователно $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & y \in (0, 1) \\ 0, & y \notin (0, 1) \end{cases}$, тоест $Y \in \mathcal{U}(0, 1)$.

Задача 6 Считаме, че X_1 и X_2 са независими. Плътността f_Y на $Y = X_1 + X_2$ по теорема 1.6 получаваме:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_{X_1+X_2}(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u) du = \int_0^y 1 du = y, \text{ при } y \in (0, 1) \\ f_{X_1+X_2}(y) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(u) f_{X_2}(y-u) du = \int_{y-1}^1 1 du = 2-y, \text{ при } y \in [1, 2) \\ f_{X_1+X_2}(y) &= 0, \text{ при } y \notin (0, 2). \end{aligned}$$

Следователно $F_{X_1+X_2}(y) = 0$, при $y \leq 0$; $F_{X_1+X_2}(y) = \int_0^y u du = \frac{y^2}{2}$, при $y \in (0, 1)$;
 $F_{X_1+X_2}(y) = \int_{-\infty}^y f_{X_1+X_2}(u) du = \int_0^1 u du + \int_1^y (2-u) du = \frac{-y^2+4y-2}{2}$, при $y \in [1, 2)$, тоест

$$F_Y(y) = F_{X_1+X_2}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y^2}{2}, & 0 < y < 1 \\ \frac{-y^2+4y-2}{2}, & y \in [1, 2) \\ 1, & 2 \leq y \end{cases}$$

Задача 7 а) При $y > 0$: $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\max\{X_1, X_2\} \leq y) = P(X_1 \leq y, X_2 \leq y) =$

$$P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) = F_{X_1}(y)F_{X_2}(y) = (1 - e^{-\lambda y})^2 \Rightarrow$$

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda y}(1 - e^{-\lambda y}), & 0 < y \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{б) При } y > 0: F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(\min\{X_1, X_2\} \leq y) = P(\{X_1 \leq y\} \cup \{X_2 \leq y\}) = \\ &= 1 - P(\overline{\{X_1 \leq y\} \cup \{X_2 \leq y\}}) = 1 - P(\overline{\{X_1 \leq y\}} \cap \overline{\{X_2 \leq y\}}) \\ &= 1 - P(\{X_1 > y\} \cap \{X_2 > y\}) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \\ &= 1 - (1 - P(X_1 \leq y))(1 - P(X_2 \leq y)) = 1 - (1 - F_{X_1}(y))(1 - F_{X_2}(y)) \\ &= 1 - e^{-2\lambda y} \Rightarrow Y \in Ex(2\lambda) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} 2\lambda e^{-2\lambda y}, & 0 < y \\ 0, & y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Задача 8 а) Нека $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y < 1\}$. От свойството $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = 1$ намираме:

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \iint_D c(1 + xy) dx dy \\ &= c \int_0^1 \left(\int_x^1 (1 + xy) dy \right) dx = c \int_0^1 \left(y + \frac{xy^2}{2} \right) \Big|_{y=x}^1 dx \\ &= c \int_0^1 \left(1 - \frac{x + x^3}{2} \right) dx = \frac{5c}{8} \Rightarrow c = \frac{8}{5}. \end{aligned}$$

б) Прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x, y) = xy$ и случайната величина $Z = (X, Y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}XY &= \mathbf{E}g \circ (X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \frac{8}{5} \iint_D xy(1 + xy) dx dy = \frac{13}{72}. \end{aligned}$$

Аналогично прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x, y) = x - y$ и случайната величина $Z = (X, Y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(X - Y) &= \mathbf{E}(X - Y)^2 - (\mathbf{E}(X - Y))^2 \\ &= \mathbf{E}g^2 \circ (X, Y) - (\mathbf{E}g \circ (X, Y))^2 \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} g^2(x, y) f(x, y) dx dy - \left(\iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f(x, y) dx dy \right)^2 \\ &= \frac{8}{5} \iint_D (x - y)^2 (1 + xy) dx dy - \frac{64}{25} \left(\iint_D (x - y)(1 + xy) dx dy \right)^2 = \dots \end{aligned}$$

Задача 9 Нека Oxy е декартова координатна система в равнината, и б.о.о. върховете на разглежданият $\triangle ABC$ имат координати: $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $C(c, d)$; $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Координатите на точка P са случайни величини X, Y , като по условие двумерната случайна величина (X, Y) има *равномерно разпределение*. Следователно за плътността $f_{X,Y}$ на (X, Y) е в сила:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} c, & (x, y) \in \text{вътрешността на } \triangle ABC \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

където c е константа, а вътрешността D на $\triangle ABC$ се задава чрез

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{(c-a)y}{d} + a < x < \frac{(c-b)y}{d} + b, 0 < y < d \right\}.$$

Нужно е да определим константата c и да изразим лицето на $QRST$ като функция на X и Y . За константата c намираме

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint_D c dx dy = c \iint_D 1 dx dy \\ &= c \cdot S_D = c \cdot S_{\triangle ABC} = c \frac{(b-a)d}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{(b-a)d}. \end{aligned}$$

За лицето на $QRST$ пресмятаме:

$$\begin{aligned} S_{QRST} &= \frac{S_{QRST}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{|QR| \cdot |RS|}{|AB| \cdot |CO|/2} = 2 \cdot \frac{|QR|}{|AB|} \cdot \frac{|RS|}{|CO|} = 2 \cdot \frac{d-Y}{d} \cdot \frac{Y}{d} \\ &\Rightarrow S_{QRST} = g(X, Y) = \frac{2(d-Y)Y}{d^2}. \end{aligned}$$

За средната стойност на лицето S_{QRST} прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x, y) = \frac{2(d-y)y}{d^2}$ и случайната величина $Z = (X, Y)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}S_{QRST} &= \mathbf{E}g \circ (X, Y) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy \\ &= \iint_D \frac{2(d-y)y}{d^2} \frac{2}{(b-a)d} dx dy = \frac{4}{(b-a)d} \iint_D \frac{(d-y)y}{d^2} dx dy \\ &= \frac{4}{(b-a)d} \int_0^d \frac{(d-y)y}{d^2} \left(\int_{\frac{(c-a)y}{d}+a}^{\frac{(c-b)y}{d}+b} 1 dx \right) dy \\ &= \frac{4}{d^4} \int_0^d (d-y)^2 y dy = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Задача 10 Нека $Oxyz$ е декартова координатна система в тримерното Евклидово пространство. Нека $T = ABCD$ и DH е височина, като б.о.о. $H \in \triangle ABC$ и върховете на разглежданият тетраедър имат координати: $A(a, 0, 0)$, $B(b, c, 0)$, $D(0, 0, d)$, $H(0, 0, 0)$; $a, c, d \in \mathbb{R}^+$, $b \in \mathbb{R}$. Координатите на точка P са случайни величини X, Y, Z , като по условие тримерната случайна величина (X, Y, Z) има *равномерно разпределение*. Следователно за плътността $f_{X,Y,Z}$ на (X, Y, Z) е в сила:

$$f_{X,Y,Z}(x, y, z) = \begin{cases} c, & (x, y, z) \in \text{вътрешността на } T \\ 0, & \text{иначе} \end{cases},$$

където c е константа.

Нужно е да определим константата c и да изразим обема на T_1 като функция на X, Y, Z . За константата c намираме

$$1 = \iiint_{\mathbb{R}^3} f_{X,Y,Z}(x, y, z) dx dy dz = \iiint_T c dx dy dz = c \iiint_T 1 dx dy dz$$

$$= c.V_T = c \Rightarrow c = 1.$$

Означаваме: $T^1 = DHAB$, $T^2 = DHBC$, $T^3 = DHCA$. Тогава са в сила равенствата

$$V_{T_1} = \frac{V_{T_1}}{V_T} = \left(\frac{d-Z}{d} \right)^3 \quad \text{и} \quad V_T = \sum_{k=1}^3 V_{T^k}.$$

За средната стойност на V_T прилагаме теорема 1.9 към функцията $g(x, y, z) = \left(\frac{d-z}{d} \right)^3$ и случайната величина (X, Y, Z) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}V_{T_1} &= \mathbf{E}g \circ (X, Y, Z) = \iiint_T g(x, y, z) f_{X,Y,Z}(x, y) dx dy dz \\ &= \iiint_T \left(\frac{d-z}{d} \right)^3 dx dy dz = \sum_{k=1}^3 \iiint_{T^k} \left(\frac{d-z}{d} \right)^3 dx dy dz. \end{aligned}$$

Без ограничение, нека $a > b \geq 0$. Вътрешността на T^1 се задава чрез: $\text{int } T^1 = T^{1,1} \cup T^{1,2}$, където

$$\begin{aligned} T^{1,1} &= \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < t < 1, 0 < x < b(1-t), 0 < y < \frac{cx}{b} \right\}, \\ T^{1,2} &= \left\{ (x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < t < 1, b(1-t) < x < a(1-t), 0 < y < \frac{c[a(1-t)-x]}{a-b} \right\}. \end{aligned}$$

Полагаме $t = \frac{z}{d}$ и пресмятаме:

$$\begin{aligned} \iiint_{T^1} \left(\frac{d-z}{d} \right)^3 dx dy dz &= d \iiint_{T^1} (1-t)^3 dx dy dt \\ &= d \sum_{k=1}^2 \iiint_{T^{1,k}} (1-t)^3 dx dy dt = \frac{acd}{12} = \frac{1}{2} V_{T^1}. \end{aligned}$$

Аналогично пресмятаме, че $\iiint_{T^k} \left(\frac{d-z}{d} \right)^3 dx dy dz = \frac{1}{2} V_{T^k}$, при $k = 2, 3$. Следователно

$$\mathbf{E}V_{T_1} = \sum_{k=1}^3 \iiint_{T^k} \left(\frac{d-z}{d} \right)^3 dx dy dz = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 V_{T^k} = \frac{1}{2} V_T = \frac{1}{2}.$$