Задача 1. Докажете, че събитията A и B са независими, ако индикаторите 1_A, 1_B са независими случайни величини.

Доказателство:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(1_{A\cap B} = 1) = \underbrace{\mathbb{P}(1_A 1_B = 1)}_{\substack{\text{само когато} \\ \text{и двата индикатора} \\ \text{са } 1^{\text{-ца}}}} = \mathbb{P}(1_A = 1 \cap 1_B = 1) \overset{\text{незав.}}{\underset{1_A \perp\!\!\!\perp 1_B}{=}}$$

$= \mathbb{P}(1_A = 1)\mathbb{P}(1_B = 1) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, което искахме да докажем. $\square$

Задача 2. (независимост дискретни сл. вел.)

1. Кога наричаме две събития независими? Дефинирайте кога наричаме две дискретни случайни величини независими и кога некорелирани.
2. Нека хвърляме $n > 3$ пъти монета с вероятност за ези p и дефинираме събитията $A =$ "третото хвърляне е ези" и $B =$ "общо са се паднали 3 езита". При какви условия A и B са независими?

Решение:

2.1. Две събития A и B се наричат независими и бележим $A \perp\!\!\!\perp B$, тогава и само тогава когато $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ $\big($Ако $\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B\,|\,A) = \mathbb{P}(B)$, т.е. независимостта означава, че случването на събитието A не ни носи никаква информация за $B\big)$.

Две дискретни случайни величини X, Y във вероятностно пространство V се наричат независими и бележим $X \perp\!\!\!\perp Y$, тогава и само тогава когато
$\mathbb{P}(X = x_j;\ Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) \overset{def.}{=} \mathbb{P}(X = x_j)\mathbb{P}(Y = y_k), \forall j, k.$

Целта на корелацията е да мери някаква степен на линейност между X и Y. Ако $DX < \infty$ и $DY < \infty$, тогава $\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ се нарича коефициент на корелация между X и Y.
Това реално е нормираната ковариация на X и Y, където
$cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right]$ се нарича ковариация. За да бъдат двете случайни величини X и Y некорелирани е необхоимо и достатъчно

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right] = \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}XY) \overset{\substack{\text{лин.} \\ \text{функц.} \\ \mathbb{E}}}{=}$$
$= \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y = 0$, т.е. $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$. За дискретния случай това е:

$$\sum_i \sum_j x_i x_j \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_j) \sum_j y_j \mathbb{P}(Y = y_i)$$

2.2 Дефинираме си с успех падането на "ези" от хвърлянето на дадена монета.

(1) $\quad \mathbb{P}(A) = p$ (интересуваме се само от третия успех, който е с вероятност p)

B е конкретен изход от биномно разпределена случайна величина $Bin(n, p)$ за $k = 3$ успеха.

(2) $\quad \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\text{общо 3 успеха}) = \binom{n}{3} p^3(1-p)^{n-3}$

Нека $X_i = \{$на $i^{\text{-тата}}$ позиция се пада "ези"$\}$, $1 \leq i \leq n$. X_i са независими в съвкупност (бернулиеви експерименти).

(3) $\quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(X_3 \cap \{$на останалите $n-1$ позиции разпределяме 2 успеха$\}) =$
$= \mathbb{P}(X_3) \times \mathbb{P}(\{$на останалите $n-1$ позиции разпределяме 2 успеха$\}) =$
$= p \times \binom{n-1}{2} p^2(1-p)^{n-3}$.

За да са независими събитията A и B е необходимо и достатъчно да е изпълнено условието: $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, това се случва когато:

$\binom{n-1}{2} p^3(1-p)^{n-3} = \binom{n}{3} p^4(1-p)^{n-3}$, т.е. когато $p = \dfrac{\binom{n-1}{2}}{\binom{n}{3}} = \dfrac{\frac{(n-1)!}{(n-3)!2!}}{\frac{n!}{(n-3)!3!}} = \dfrac{3}{n}$.

Следователно A и B са независими когато $np = 3$ □

Задача 3. Нека X е непрекъсната случайна величина с функция на разпределение F, която е строго монотонно растяща върху реалната права. Покажете, че $Y = F(X) \in \mathcal{U}(0,1)$. Коментар: Всъщност условията върху F могат да се облекчат, но идеята е, че ако можем да симулираме равномерно разпределение с компютър и знаем F^{-1}, то $F^{-1}(Y)$ ще ни е симулация за X.

Решение:

$F_Y(y) \overset{def.}{=} \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}\big(F(X) < y\big) \overset{F\uparrow \text{ мон.}}{=} \mathbb{P}\left(X < F^{-1}(y)\right) = F\left(F^{-1}(y)\right) = y.$
Следователно $Y \in \mathcal{U}(0,1)$, тъй като $F_{\mathcal{U}}(t) = t = F_Y(t)$, $\forall t \in [0,1]$ (функциите на разпределение на равномерното и Y са равни). □

Задача 4. (независимост непрекъснати сл. вел.)

1. Дефинирайте кога наричаме две непрекъснати случайни величини независими и кога некорелирани.

2. Дефинирайте функция пораждаща моментите $M_X(t)$ на случайната величина X. Нека $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Пресметнете $M_X(t)$. На колко са равни $\mathbb{E}X$, $\mathbb{E}X^2$, $\mathbb{E}X^3$?

3. Нека $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Потърсете случайна величина, която е полином на X и е некорелирана, но не е независима с X.

Решение:

4.1. Нека $X = (X_1, X_2)$. Тогава $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, когато $F_X(x) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$ или $\mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \mathbb{P}(X_1 < x_1)\mathbb{P}(X_2 < x_2)$ за всяко $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ако X е вектор от НСВ, то независимостта е еквивалентна на $f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Аналогично както при дискретния вариант имаме, че X и Y са некорелирани когато $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$:
$\displaystyle\int_{D_X}\int_{D_Y} x\,y \,\mathrm{d}\,F_Y(y)\mathrm{d}\,F_X(x) = \int_{D_X} x \,\mathrm{d}\,F_X(x)\int_{D_Y} y \,\mathrm{d}\,F_Y(y)$, където F_Z е функцията на разпределение на НСВ Z.

4.2. Нека X е случайна величина. Ако $\mathbb{E}e^{tX}$ съществува за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ и някое $\varepsilon > 0$, то $M_X(t) = \mathbb{E}e^{tx}$ за $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ се нарича функция на моментите.

Нека $X \sim \mathcal{N}(0{,}1)$. Тогава,

$$f_X(x) = f_{\mathcal{N}(0,1)} = f_{\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}\,x\Bigg|_{\substack{\mu=0\\ \sigma^2=1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x.$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}f_X(x)\mathrm{d}\,x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2-2tx+t^2)+\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x =$$

$$= e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-t)^2}{2}}}_{f_{\mathcal{N}(t,1)}(x)}\,\mathrm{d}\,x = e^{\frac{t^2}{2}}.$$

$\displaystyle\mathbb{E}X^k = \frac{\partial}{\partial t^k}M_X(t)\Big|_{t=0}$, за $k \geq 1$. Следователно:

$$\mathbb{E}X = \frac{\partial}{\partial t}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = \frac{2t}{2}e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0$$

$$\mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E}e^{t\mathcal{N}(0,1)} = \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{t}(e^t-1) = f(t),\ \lim_{n\to\infty}\frac{e^t-1}{t} \overset{\text{Лопитал}}{=} \lim_{t\to 0}\frac{e^t}{1} = 1$$

$$\mathbb{E}X^2 = \frac{\partial}{\partial t^2}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\big(te^{\frac{t^2}{2}}\big)\Big|_{t=0} = e^{\frac{t^2}{2}} + t\times\frac{2t}{2}\times e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 1$$

$$\mathbb{E}X^3 = \frac{\partial}{\partial t^3}M_X(t)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\big(e^{\frac{t^2}{2}} + t^2e^{\frac{t^2}{2}}\big)\Big|_{t=0} = te^{\frac{t^2}{2}} + 2te^{\frac{t^2}{2}} + t^3e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 3te^{\frac{t^2}{2}} + t^3e^{\frac{t^2}{2}}\Big|_{t=0} = 0$$

4.3.
От 4.2. Доказахме, че за $X \in \mathcal{N}(0{,}1) \to \mathbb{E}X = 0$.
Търсим полином $Y = g(X)$, за който е изпълнено $cov(X,Y) = 0$ и $Y \not\perp\!\!\!\perp X$.
Тъй като $Y = g(X)$ е функция на X, то ще следва че $Y \not\perp\!\!\!\perp X$. За да бъдат некорелирани е необходимо $\displaystyle 0 = cov(X,Y) = \mathbb{E}XY - \underbrace{\mathbb{E}X}_{=0}\mathbb{E}Y = \mathbb{E}XY = \mathbb{E}Xg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xg(x)f_X(x)\mathrm{d}\,x =$
$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xg(x)e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\,x$. Последното ще се нулира когато функцията под интеграла е нечетна, което е еквивалентно на това $xg(x)$ да е нечетна или $g(x)$ да е четна. Т.е.
$Y = X^2, Y = X^4, \ldots, Y = \cos(X), Y = e^{x^2} + e^{-x^2}$ са все валидни примери. □

Задача 5. Нека X е случайна величина с плътност $3(1-x)^2$ за $x \in (0,1)$. Намерете първите два цели момента и изчислете функцията на моментите.

Решение:

Нека първо проверим дали плътността X е добре дефинирана:

$$1 \stackrel{?}{=} \int_{D_X} = f_X(x)\mathrm{d}\,x = \int_0^1 3(1-x)^2\mathrm{d}\,x = 3\int_0^1 1-2x+x^2\,\mathrm{d}\,x = 3\left(x - \frac{2x}{x} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 3\left(1 - 1 + \frac{1}{3}\right) = 1.$$

$$M_X(t) = \mathbb{E}e^{tX} = \int_0^1 e^{tX}3(1-x)^2\mathrm{d}\,x = 3\underbrace{\int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x}_{I_1} - 6\underbrace{\int_0^1 xe^{tx}\,\mathrm{d}\,x}_{I_2} + 3\underbrace{\int_0^1 x^2e^{tx}\,\mathrm{d}\,x}_{I_3}$$

$$I_1 := \int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{t}\int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,tx = \frac{1}{t}e^{tx}\Bigg|_0^1 = \frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}$$

$$I_2 := \int_0^1 xe^{tx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{t}\int_0^1 x\,\mathrm{d}\,e^{tx} \overset{\text{и.ч.}}{=} \frac{1}{t}\left(xe^{tx}\Bigg|_0^1 - \underbrace{\int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x}_{I_1}\right) = \frac{xe^{tx}}{t}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{t}\left(\frac{e^t}{t} - \frac{1}{t}\right) =$$

$$= \frac{e^t}{t} - 0 - \frac{e^t - 1}{t^2} = \frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}$$

$$I_3 := \int_0^1 x^2e^{tx}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{t}\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}\,e^{tx} \overset{\text{и.ч.}}{=} \frac{1}{t}x^2e^{tx}\Bigg|_0^1 - \frac{1}{t}\int_0^1 e^{tx}\,\mathrm{d}\,x^2 = \frac{e^t}{t} - \frac{2}{t}\underbrace{\int_0^1 xe^{tx}\,\mathrm{d}\,x}_{I_2} =$$

$$= \frac{e^t}{t} - \frac{2}{t}\left(\frac{e^t}{t} - \frac{e^t}{t^2} + \frac{1}{t^2}\right) = \frac{e^t}{t} - \frac{2e^t}{t^2} + \frac{2e^t - 2}{t^3}.$$ Следователно,

$$M_X(t) = 3I_1 - 6I_2 + I_3 = \cancel{\frac{3e^t}{t}} - \frac{3}{t} - \cancel{\frac{6e^t}{t}} + \cancel{\frac{6e^t}{t^2}} - \frac{6}{t^2} + \cancel{\frac{3e^t}{t}} - \cancel{\frac{6e^t}{t^2}} + \frac{6e^t}{t^3} - \frac{6}{t^3} =$$

$$= -\frac{3}{t} - \frac{6}{t^2} + \frac{6e^t}{t^3} - \frac{6}{t^3}.$$

$$\mathbb{E}X = 3\int_0^1 x(1-x)^2\mathrm{d}\,x = 3\int_0^1 x - 2x^2 + x^3\,\mathrm{d}\,x = 3\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = 3\left(\frac{6-8+3}{12}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{E}X^2 = 3\int_0^1 x^2(1-x)^2 \mathrm{d}\, x = 3\int_0^1 x^2 - 2x^3 + x^4 \,\mathrm{d}\, x = 3\left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 =$$
$$3\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{10}\left(10 - 15 + 6\right) = \frac{1}{10}. \qquad \square$$

Задача 6. Нека X, Y и Z са случайни величини със стойности в $\mathbb{N}$ и $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Кога наричаме X и Y еднакво разпределени? Да предположим, че последното е изпълнено. Вярно ли е, че $f(X)$ и $f(Y)$ са еднакво разпределени? А $X + Z$ и $Y + Z$? Докажере или дайте контрапримери. Вярно ли е, че ако X и Z са независими, то стига $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$ и $\mathbb{E}(g(Z)) < \infty$, където $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то $\mathbb{E}(f(X)g(Z)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Z))$.

Решение:

X и Y са еднакво разпределени $\Leftrightarrow F_X = F_Y$. Ако X, Y са НСВ, то $\Rightarrow f_x = f_Y$. Вярно ли е че $f(X)$ и $f(Y)$ са еднакво разпределени, ако $X \stackrel{d}{=} Y$.

Трябва да покажем, че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е вярно, че $\mathbb{P}(f(x) = n) = \mathbb{P}(f(Y) = n)$. Но $\{f(X) = n\} = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}:f(k)=n} \{X = k\}$ или събитието $\{f(X) = n\}$ е обединението на независимите събития $\{X = k\}$ за тези k, за които $f(k) = n$. Пример, ако $f(l) = l^2$, то $\{f(X) = n\}$ е празното множесто, ако n не е квадрат и $\{f(X) = n\} = \{x = \sqrt{n}\}$ иначе. Тогава

$$\mathbb{P}(f(X) = n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}:f(k)=n} \{X = k\}\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}:f(K)=n} \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k\in\mathbb{N}:f(k)=n} \mathbb{P}(Y = k) =$$
$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}:f(k)=n} \{Y = k\}\right) = \mathbb{P}(f(Y) = n).$$

$X + Z$ и $Y + Z$?

$X \perp\!\!\!\perp Y$ и X и Y са разпределени така:

$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 2) = \dfrac{1}{2}$. Нека

$Z = -X \Rightarrow \mathbb{P}(Z = -1) = \mathbb{P}(Z = -2) = \dfrac{1}{2}$. Тогава

$\mathbb{P}(X + Z = n) = \mathbb{P}(n = 0) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$.

$\mathbb{P}(Y + Z = n) = \mathbb{P}(Y - X = n)$. Нека $n = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(X + Z = 1) = 0$

$\mathbb{P}(Y + Z = 1) = \mathbb{P}(Y - X = 1) = \mathbb{P}(Y = 2;\ X = 1) \stackrel{X\perp\!\!\!\perp Y}{=} \mathbb{P}(Y = 2)\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{1}{4}$

$\Rightarrow$ при $n = 1 : \mathbb{P}(X + Z = n) \neq \mathbb{P}(Y + Z = n) \Rightarrow X + Z$ и $Y + Z$ не са еднакво разпределени.

Вярно ли е, че ако X и Z са независими, то стига $\mathbb{E}(f(X)) < \infty$ и $\mathbb{E}(g(Z)) < \infty$, където $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то $\mathbb{E}(f(X)g(Z)) = \mathbb{E}(f(X)g(Z))$. Стига да докажем , че $f(X)$ и $g(Z)$ са независими.

$X \perp\!\!\!\perp Z \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j, Z = Z_k) = \mathbb{P}(X = x_j)\mathbb{P}(Z = z_k), \forall j, k$. Трябва да покажем, че за всяко $m, n \in \mathbb{N}$ е вярно, че $\mathbb{P}(f(X) = m, g(Z) = n) = \mathbb{P}(f(X) = m)\mathbb{P}(g(Z) = n)$.

$$\mathbb{P}(f(X)=m, g(Z)=n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}:f(k)=m}\{X=k\}; \bigcup_{l\in\mathbb{N}:g(l)=n}\{Z=l\}\right) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{N}:f(k)=m}\sum_{l\in\mathbb{N}:g(l)=n}\mathbb{P}(X=k;Z=l) = \sum_{k\in\mathbb{N}:f(k)=m}\sum_{l\in\mathbb{N}:g(l)=n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Z=l) =$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}:f(k)=m}\mathbb{P}(X=k)\sum_{l\in\mathbb{N}:g(l)=n}\mathbb{P}(Z=l) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}:f(k)=m}\{X=k\}\right)\mathbb{P}\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}:g(l)=n}\{Z=l\}\right) =$$

$$= \mathbb{P}\big(f(X)=m\big)\mathbb{P}\big(g(Z)=n\big) \qquad \square$$

Задача 7. (контрапример ЗГЧ)

1. Разполагаме със зар с 2 червени и 4 черни страни и със зар с 4 червени и 2 черни страни. Вероятността да се падне, която и да е от страните е $1/6$.

   Избираме с вероятност $1/2$ един от двата зара и го хвърляме безкраен брой пъти. Да дефинираме за $n \geq 1$

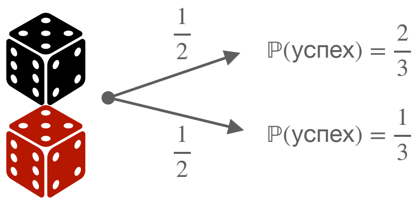
   $$X_n = \begin{cases} 1, & \text{ако на } n\text{-тото хвърляне се е паднала черна страна,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

   Докажете, че дефинираните по-горе случайни величини са еднаков разпределени и пресметнете очакването им. Независими ли са?

2. Формулирайте слабия ЗГЧ. Докажете, че той е в сила/не е в сила за редицата $(X_n)_n$.

Решение:

Дефинираме събитието "пада се черна страна при хвърляне" с успех. Нека Y е случайната величиниа $\{$избираме един от двата зара$\}$
Номерираме заровете с числата 1 и 2 (1 е с повече черни страни)



$\mathbb{P}(Y=1) = \dfrac{1}{2}, \mathbb{P}(Y=2) = \dfrac{1}{2}.$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_n}{N} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \underbrace{V}_{\text{сл.вел.}}, \text{ където } V = \begin{cases} \frac{2}{3}, & \text{когато } Y=1 \\ \frac{1}{3}, & \text{когато } Y=2 \end{cases}$$, но това не е ЗГЧ, т.к. V е случайна величина, а не константа.

$$X_i = \frac{2}{3}\times 1_{\{Y=1\}} + \frac{1}{3}\times 1_{\{Y=2\}}$$

$\mathbb{E}V = \frac{2}{3}\mathbb{E}1_{\{Y=1\}} + \frac{1}{3}\mathbb{E}1_{\{Y=2\}} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Казваме, че за X е изпълнен ЗГЧ (слаб), ако $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0$ (*)

$X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$, наричаме редица от независими в съвкупност и еднакво разпределение сл. вел., ако $X_i \stackrel{d}{=} X_1$, $\forall i \geq 1$ и са независими. Нека $X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ от нез. едн. раз. сл. вел. Нека в доп. $\mathbb{E}|X_1| = \mu < \infty$, тогава е изпълнено (*). $\square$

Задача 8. Докажете, че вероятността броят на шестиците при хвърляне на стандартен зар 900 пъти да е между 120 и 180 е поне $31/36$.

Доказателство:

<u>*Неравенство на Чебишев*</u>: Нека A е множеството от стойности, за които $|X - \mathbb{E}X| > a$. Тогава $A = \{|X - \mathbb{E}X| > a\} = \{(X - \mathbb{E}X)^2 > a^2\}$

Искаме да ограничим вероятността за случването на събитието A отгоре.

$$DX \stackrel{def.}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_{\{A\}} + \underbrace{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_{\{\overline{A}\}}}_{\geq 0} \geq$$

$\geq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \times 1_A \geq a^2\mathbb{E}1_{\{A\}} = a^2\mathbb{P}(A)$. Следователно $\mathbb{P}(A) \leq \frac{DX}{a^2}$.

Т.е. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) = \mathbb{P}(\mathbb{E}X - a < X < \mathbb{E}X + a) \leq \frac{DX}{a^2}$.

Сега обратно към задачата.

Нека $X_i = \{$пада се 6-ца при хвърляне на $i^{\text{-тия}}$ зар$\}$, $i = \overline{1,n}$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Очевидно $X_i \in Ber\left(p = \frac{1}{6}\right)$ и $S_{900} \in Bin\left(n = 900, p = \frac{1}{6}\right)$, тъй като брои успехите в бернулиево разпределени случайни величини. Тъй като бернулиевите експерименти са независими и еднакво разпределени със средно $\mu = \mathbb{E}X_1 = p = \frac{1}{6}$ и $\sigma^2 = \mathbb{D}X_1 = p(1-p) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, то от ЦГТ може да направим следното приближение (считаме, че $n = 900$ е достатъчно голямо):

$$\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1), \text{ т.е. } \frac{S_{900} - 900 \times \frac{1}{6}}{\sqrt{900 \times \frac{5}{36}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Следователно, $\mathbb{P}(120 \leq S_{900} \leq 180) = \mathbb{P}(120 - 150 \leq S_{900} - 150 \leq 180 - 150) =$

$$= \mathbb{P}\left(-\frac{\cancel{30}\times 6}{\cancel{30}\times\sqrt{5}} \le \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{\substack{\text{кратък запис:} \\ \mathcal{N}(0,1)\equiv Z}} \le \frac{\cancel{30}\times 6}{\cancel{30}\times\sqrt{5}} \right) = \underbrace{\mathbb{P}\left(|Z - \underbrace{\mathbb{E}Z}_{=0}| \le \frac{6}{\sqrt{5}} \right)}_{\substack{\text{изкуствено добавяме } \mathbb{E}Z, \\ \text{за да нагласим израза} \\ \text{до неравенството на Чебишев}}} =$$

$$= \mathbb{P}\left(|Z| \le \frac{6}{\sqrt{5}} \right) = 1 - \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{6}{\sqrt{5}} \right) \overset{\substack{\text{неравенство} \\ \text{на Чебишев}}}{\ge} 1 - \frac{DZ}{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 - \frac{5}{36}\times 1 = \frac{31}{36}.$$

$\square$

Задача 9.

Хвърляте монета 1000 пъти и получавате 800 езита. Това ви усъмнява, че монетата е честна. Нека θ е вероятността за ези.

- Пресметнете каква е вероятността да наблюдавате 800 езита при допускане, че монетата е честна;
- Използвайте ЦГТ, за да конструирате доверителен интервал с ниво на доверие за точковата оценка на θ. Най-вероятно няма да можете да изпилзвате понятието централна статистика, но се опитайте чрез увеличаване на доверителния интервал, което е реултат от оценка на дисперсията (зависеща от θ)
- $(**)$ Ако приемете, че вероятността за честна монета е 0.99 и с вероятност 0.01 е точковата оценка, която получавате от тези 1000 хвърляния, т.е. $4/5$. Как бихте преизчислили вероятността за честност при настъпването на тези данни?

Решение:

Според лектора може би задачата е грешна, но все пак каква е идеята:

$Ber(\theta)$
$Bin(1000, \theta)$

$$T = \frac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \in \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}(T > a) \overset{\theta=\frac{1}{2}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\times\frac{1}{2}}{\sqrt{n\times\frac{1}{4}}} > \frac{a - n\times\frac{1}{2}}{\sqrt{n\times\frac{1}{4}}} \right) \overset{\substack{n=1000 \\ a=800}}{=} \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{800 - 1000\times\frac{1}{2}}{\sqrt{1000\times\frac{1}{4}}} \right) =$$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{300\times 2}{100} \right) = \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > 6 \right) = 1 - \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \le 6 \right) \approx 1 - 1 = 0.$$

$$T = \frac{S_n - n\theta}{\sqrt{n\theta(1-\theta)}} \in \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{P}(q_1 \le T \le q_2) = \mathbb{P}\left(q_1\sqrt{n\theta(1-\theta)} + n\theta \le S_n \le q_2\sqrt{n\theta(1-\theta)} + n\theta\right)$$

$$\gamma = \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} - q_1\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}} \ge \theta \ge \frac{S_n}{n} - q_2\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right)$$

Имаме, че $\left(\theta - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \theta(1-\theta) \le \frac{1}{4}$

$$1 - \gamma = \mathbb{P}\left(\theta < \frac{S_n}{n} - q_2\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right) + \mathbb{P}\left(\theta > \frac{S_n}{n} - q_1\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}\right) \ge$$

$$\overset{\theta(1-\theta) \le \frac{1}{4}}{\ge} \mathbb{P}\left(\theta < \frac{S_n}{n} - q_2\frac{\sqrt{\frac{1}{4}}}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\mathbb{P}(T > a) \overset{\theta=\frac{1}{2}}{=} \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \times \frac{1}{2}}{n\sqrt{n \times \frac{1}{4}}} > a\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_n - \frac{n}{2}}{\frac{\sqrt{n}}{2}} > a\right) = \mathbb{P}\left(\frac{2S_n - n}{\sqrt{n}} > a\right)$$

Задача 10. Нека X е сучайна величина с разпределение $f_X(x;\theta) = C(\theta)e^{-\theta x^2}$, $x > 0$, $\theta > 0$. Намерете максимално правдоподобна оценка за θ от n наблюдения. Можете да използвате, че $C(\theta) = K\theta^{1/2}$, където K не зависи от θ. Вярно ли е, че оценката е състоятелна?

Решение:

$$f_X(x;\theta) = C(\theta)e^{-\theta x^2},\ x > 0,\ \theta > 0$$

$$L_X(x,\theta) = C^n(\theta)\prod_{j=1}^{n} e^{-\theta X_j^2} = K^n\theta^{\frac{n}{2}}e^{-\theta\sum_{j=1}^{n} X_j^2}$$

$$\ln L_X(x;\theta) = n\ln K + \frac{n}{2}\ln\theta - \theta\sum_{j=1}^{n} X_j^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L_X(x;\ \theta) = \frac{n}{2\theta} - \sum_{j=1}^{n} X_j = 0 \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n}{2\sum_{j=1}^{n} X_j^2}$$

Състоятелна ли е оценката? Ако искаме да докажем, че е състоятелна, трябва проверим следното (*):

$\hat{\theta} = \dfrac{n}{2\sum_{j=1}^{n} X_j^2}$, нека н.е.р. $Y_j = X_j^2$. Тогава $\hat{\theta}(\overrightarrow{X}) = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{\sum_{j=1}^{n} X_j^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{\sum_{j=1}^{n} Y_j}$.

$$\frac{\sum_{j=1}^n Y_j}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}\text{,п.с.}} \mathbb{E}Y_1 = \mathbb{E}X_1^2.$$

$\hat{\theta}(\overrightarrow{X}) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.с.}} \dfrac{1}{2\mathbb{E}X_1^2} \stackrel{?}{=} \theta$ (ако е състоятелна)

$$\mathbb{E}X_1^2 = K\theta^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty x^2 e^{-\theta x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{K\theta^{\frac{1}{2}}}{\theta^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty \theta x^2 e^{-\theta x^2}\,\mathrm{d}\sqrt{\theta}x =$$

$\stackrel{\sqrt{\theta}x=y}{=} \dfrac{K}{\theta}\displaystyle\int_0^\infty \underbrace{y^2 e^{-y^2}}_{\text{нечетна}}\,\mathrm{d}\,y \stackrel{\text{нечетност}}{=} \dfrac{K}{2\theta}\dfrac{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi\frac{1}{2}}}\displaystyle\int_{-\infty}^\infty y^2 e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y = \dfrac{K\sqrt{\pi}}{2\theta} \times \dfrac{1}{2}$, т.е. оценката е състоятелна (схожда се добре към функция на тита, от която може да изразим тита с обратната функция).

11. Нека $X \in \mathcal{N}(\mu, 4)$. Постройте $90\,\%$ доверителен интервал за μ, ако наблюденията над X са: $1, 3, 4, 4$.

Решение:

Знаем, че $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, като σ^2 е известно ($\sigma = 2$), т.е. $\mu = \theta$.

Имаме, че $\hat{\mu} = \overline{X_n} = \underbrace{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n X_j}_{\in\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)} = \dfrac{1+3+4+4}{4} = 3.$

Пояснения защо $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=1}^n X_j \in \mathcal{N}\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$:

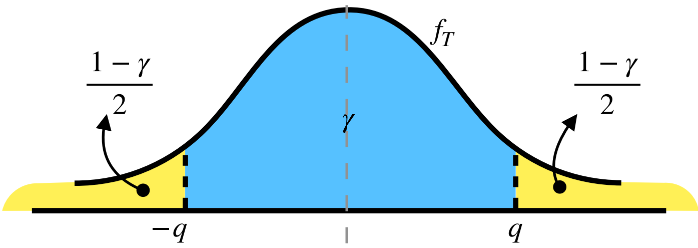
$$\sum_{j=1}^n X_j \overset{\substack{\text{линейност}\\ \text{на } \mathcal{N}\\ \text{и незав.}}}{\in} \mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2) \Rightarrow \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j \in \mathcal{N}\left(\frac{n\mu}{n}, \frac{n\sigma^2}{n^2}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Използвахме свойството $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ за независими нормално разпределени сл. вел. (каквито в случая са нашите опити $\overrightarrow{X}$, тъй като ще са прототипи на X - от там ги взимаме).

Тогава $T(\overrightarrow{X}, \mu) = \underbrace{\dfrac{\overline{X_n} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}}_{\text{нормираме}} \in \mathcal{N}(0,1)$, σ е известно число. Следователно получаваме, че T е намаляваща функция по μ и $\mathbb{P}(T \leq x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \, \mathrm{d}\, y$, т.е.

не зависи от $\mu \overset{def.}{\Rightarrow} T$ е централна статистика за μ (тя е монотонна и намаляваща по μ и нейното разпределение съвпада с $\mathcal{N}(0,1)$, т.е. не зависи от θ)

Тогава, $\gamma = \mathbb{P}(-q < T < q)$, тъй като $\mathcal{N}(0,1)$ е симетрично:



Това ни гарантира, че $(-q, q)$ ще е най-тесния интервал, тъй като в $(-\infty, -q)$ и (q, ∞) е сбита най-малко маса (навсякъде извън тези интервали е сбита повече маса)

$q = q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}$, който квантил го има в таблицата за нормалното стандартно разпределение.

$$\gamma = \mathbb{P}(-q < T < q) = \mathbb{P}\left(-q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} < \frac{\overline{X}_n - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\mu \in (\underbrace{\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}}_{I_1}, \underbrace{\overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}}}_{I_2}) \right) = \gamma \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

(Даденото е $\gamma = 0.90$, $\sigma = 2$, $n = 4$)

$$I_1 = \overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} = 3 - \frac{2}{\sqrt{4}} \times q_{0.95} \approx 3 + 1.645 = 4.645$$

$$I_2 = \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times q_{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} = 3 + \frac{2}{\sqrt{4}} \times q_{0.95} \approx 3 - 1.645 = 1.355$$

$\square$