

СЕМ, лекция 2

(2020-10-08)

Дефиниция: (Вероятност) Нека \mathcal{A} е σ -алгебра върху множество от елементарни събития Ω . Тогава изображението $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ се нарича вероятност, ако са изпълнени следните три условия:

- 1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- 2) Ако $A \in \mathcal{A}$ и $A^c = \Omega \setminus A$, то $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- 3) Ако $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall i \geq 1$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$

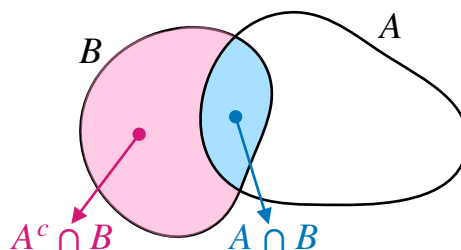
(Ако имаме редица от непресичащи се събития, то вероятността поне едно от тях да се случи (операцията „или“) е сумата на индивидуалните вероятности. В този смисъл вероятността е мярка, тъй като това е най-класическото свойство на мярката)

Следствие: Нека имаме $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ е вероятност. Тогава са изпълнени следните свойства ($A, B \in \mathcal{A}$) :

- a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- b) Ако $B \subseteq A$, то $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$, $\forall A \in \mathcal{A}$
- c) Ако $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Монотонност)
- d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- e) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Непрекъснатост)
- f) Ако имаме $A_i, i \geq 1$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$. Това свойство е изпълнено и за всяко крайно обединение от събития: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$, за някое $n \in \mathbb{N}$.

Доказателство:

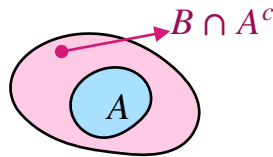
- a) $\emptyset = \Omega^c \xRightarrow{2)} \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
- b) $A, B \in \mathcal{A}$



$$\Rightarrow B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) \stackrel{3)}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

c) $B = A \cup (B \cap A^c)$

$$\mathbb{P}(B) \stackrel{3)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A)$$

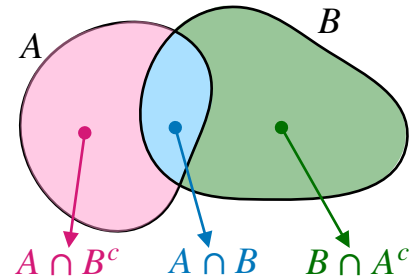


d) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$

$$\mathbb{P}(A \cup B) \stackrel{3)}{=} \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap A^c) =$$

$$\stackrel{b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)}_{\text{добавяме и изваждаме}} =$$

$$\stackrel{b)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



e) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ е множеството, което

принадлежи на всяко едно от събитията.

Под $A \setminus B$ разбираме множеството A без множеството B , т.е. $A \setminus B = A \cap B^c$.

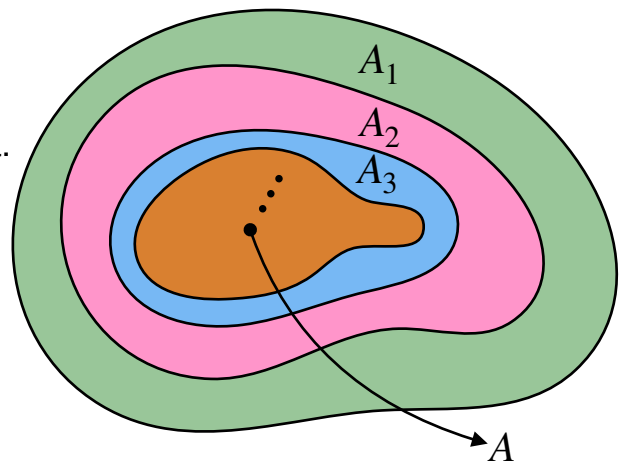
Цел: Да докажем, че $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n)$.

$$A_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \setminus A_{j+1} \cup A \stackrel{3)}{\Rightarrow}$$

$$1 \geq \mathbb{P}(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \setminus A_{j+1}) + \mathbb{P}(A) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \setminus A_{j+1}) < \infty \text{ е сходящ ред.}$$

$$\text{От друга страна, } A_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \setminus A_{j+1} \cup A \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \setminus A_{j+1}) + \mathbb{P}(A).$$

$$\text{Граничен преход: } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \setminus A_{j+1})}_{=0} = \mathbb{P}(A).$$

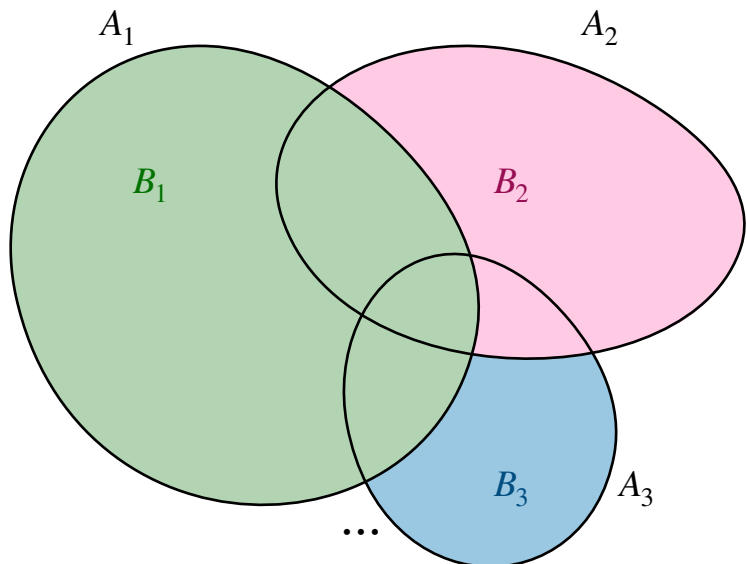


f) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right), \text{ това може да се докаже по индукция, използвайки}$$

$\mathbb{P}(A \cup B) \stackrel{d)}{\leq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, но ние ще докажем директно по-общия случай за безкраен брой множества.)

$$\begin{aligned}
A_1 &= B_1 \\
B_2 &= A_2 \setminus A_1 = A_2 \cap A_1^c \\
B_3 &= A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \\
&\dots \\
B_n &= A_n \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right) \subseteq A_n \\
&\dots
\end{aligned}$$



$$B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j$$

От друга страна имаме, че:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \stackrel{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j), \text{ но } B_j \subseteq A_j \stackrel{c)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(B_j) \leq \mathbb{P}(A_j). \text{ Т.е. е в сила}$$

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \stackrel{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$. Остана да докажем, че $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ (тъй като, ако това е изпълнено, то ще може да го заместим в предходното равенство и да получим желания резултат).

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ е очевидно, тъй като } B_j \subseteq A_j, \forall j. \text{ Защо, обаче } \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j?$$

Нека вземем елемент $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \omega \in A_k$ за някое k . Да вземем

$k = \min\{j \geq 1 : \omega \in A_j\}$ (най-малкия номер k на множество, в което елемента ω принадлежи – знаем, че със сигурност ще има поне едно такова множество)

$$B_k = A_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j, \text{ но } \omega \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \Rightarrow \omega \in B_k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right) \stackrel{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j), \text{ което искахме да докажем.}$$

Примери:

$$\oplus_1: \Omega = \{0,1\}; \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\} = 2^\Omega$$

$\mathbb{P}(\{0\}) := p, \mathbb{P}(\{1\}) := 1 - p, p \in [0,1]$, то \mathbb{P} е вероятност.

\oplus_2 : Дискретна вероятност:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\} \simeq \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega, (p_i)_{i=1}^N : p_i \geq 0, \forall i \geq 1 \text{ и } \sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

$$\forall A \subseteq \Omega, \mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i$$

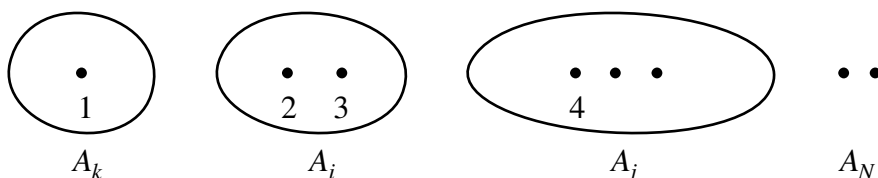
$\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0,1]$ е вероятност

$$A = \{1, 3, 5\}, \mathbb{P}(A) = p_1 + p_3 + p_5.$$

$$\text{Проверка: По дефиниция } \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^N p_i = 1$$

$$\text{Ако } A \subseteq \Omega, \text{ то } \mathbb{P}(A^c) = \sum_{i \in A^c} p_i = \sum_{i \notin A} p_i = \sum_{i=1}^N p_i - \sum_{i \in A} p_i = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Нека A_1, \dots, A_k са непресичащи се събития:



$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{i \in \bigcup_{j=1}^k A_j} p_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in A_j} p_i = \left(i \text{ принадлежи на точно едно от събитията} \right) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A_j).$$

$$\oplus_3 : \Omega = \{1, 2, \dots, N\}$$

$$\text{Ако дефинираме } p_i = \frac{1}{N}, 1 \leq i \leq N, \text{ то } \mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} \frac{1}{N} = \frac{|A|}{N} \text{ се нарича}$$

равномерна вероятност! Това означава, че всяко едно от елементарните събития има равен шанс да се сбъдне.

$$\oplus_4 : \Omega = \{1, 2, \dots, N\}$$

$$A = \{i \leq N : i \text{ е четно}\}$$

$$A^c = \{i \leq N : i \text{ е нечетно}\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{N} = p$$

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{N - |A|}{N} = 1 - p$$

$$\Omega = \{0, 1\}, \mathcal{A} = (\Omega, \emptyset, A, A^c) \subseteq 2^\Omega$$

\oplus_5 : Дискретни вероятности

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \simeq \{1, 2, \dots\}$$

$$\mathcal{A} = 2^\Omega$$

Дадена е редица $(p_i)_{i=1}^\infty : p_i \geq 0, \forall i \geq 1$ и $\sum_{i=1}^\infty p_i = 1$.

Ако $A \subseteq \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i$, то $\mathbb{P} : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ задава вероятност.

$$\oplus_6 : \Omega = \{1, 2, \dots\}$$

$$p_i = \frac{c}{i^2}, i \geq 1$$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i = c \sum_{i \in A} \frac{1}{i^2}; \quad \sum_{i=1}^\infty = 1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{\pi^2}.$$

Следователно само за $c = \frac{6}{\pi^2}$ ще може да дефинираме вероятност.

$$\oplus_7 : \Omega = \{0, 1, \dots\}$$

$$p_i = qp^i, i \geq 0, p + q = 1, p \in (0, 1).$$

$$\sum_{i=0}^\infty qp^i = \frac{q}{1-p} = 1 \text{ (геометрична прогресия и дефиниране на геометрично}$$

рзпределение)

$\oplus_8 : \Omega = \{1, 2, \dots\}$ тук не може да дефинираме равномерно разпределение, т.е. $p_i = p_j$ за всяко i, j .