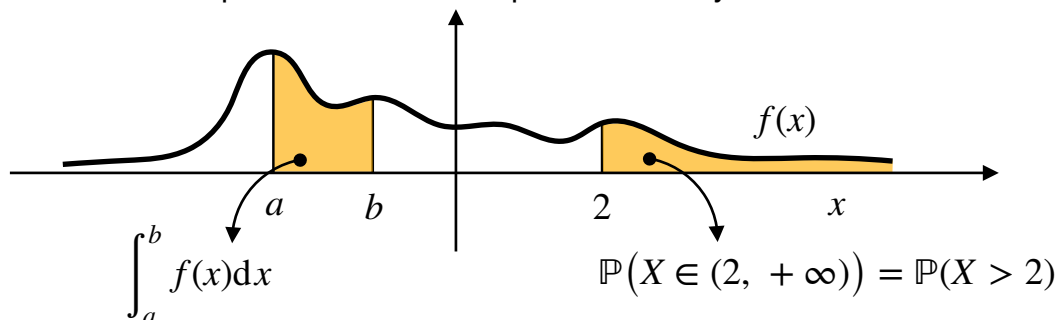


Непрекъснати случайни величини (НСВ)

Непрекъснати случайни величини са такива, които могат да приемат неизброимо много стойности (обикновено интервал от реални числа). Тези стойности не са изброими, а образуват континуум. За разлика от дискретните, които имат изброими стойности, непрекъснатите се описват с функция на плътността на вероятността (probability density function, PDF).

Фундаменталните теореми включват непрекъснати случайни величини.



Дефиниция (Абсолютно непрекъснатата СВ). Абсолютно непрекъснатата случайна величина (абсолютно непрекъснатата случайна променлива) е случайна величина, чиято функция на разпределение може да бъде изразена чрез интеграл на неотрицателна функция. X е абсолютно непрекъснатата случайна величина, ако $\exists f_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такава, че:

- $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$,
- $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx, \forall a, b \in (-\infty, \infty), a < b$,

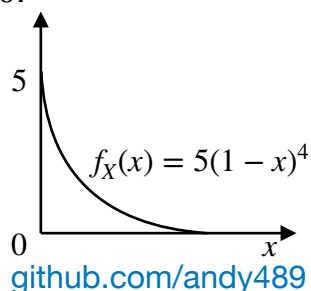
f_X наричаме плътност на X .

- Важно: За непрекъснати величини $\mathbb{P}(X = c) = 0$ за всяка константна точка c .

⊕ Дадена застрахователна компания обслужва здравните полици на някаква малка фирма. Разходите за обслужване на годишна полица е $M = 100,000 \cdot X$, където застрахователната компания е оценила, че X приема стойности в интервала $(0, 1)$ и

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x < 0 \text{ или } x > 1 \end{cases}$$

Търси се $\mathbb{P}(M > 10,000)$: вероятността цената за обслужване на едногодишна полица да е по-голяма от 10,000.



Първо нека проверим, дали функцията в действителност може да бъде плътност на X . Проверка:

$\int_0^1 5(1-x)^4 dx \stackrel{y=1-x}{=} 5 \int_0^1 y^4 dy = 5 \cdot \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = 1$, тоест плътността е добре определена.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(100,000 X > 10,000) &= \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{10}\right) = \int_{\frac{1}{10}}^{\infty} f_X(x) dx = 5 \int_{\frac{1}{10}}^1 (1-x)^4 dx \stackrel{y=1-x}{=} \\ &= 5 \int_0^{\frac{9}{10}} y^4 dy = 5 \times \frac{y^5}{5} \Big|_0^{\frac{9}{10}} = \left(\frac{9}{10}\right)^5 \approx 0.59 \end{aligned}$$

Твърдение. Нека X е непрекъсната случайна величина (НСВ).

Тогава $\mathbb{P}(X = c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$. Следователно,

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b)) = \mathbb{P}(X \in (a, b]) = \mathbb{P}(X \in (a, b)),$$

$$\forall a, b \in (-\infty, \infty), a < b.$$

Случайната величина няма маса, тоест има нулева вероятност в конкретна точка.

Доказателство: $\{X = c\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ X \in \left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n} \right) \right\}, \forall n \geq 1$, но

$$\begin{aligned} Q &= \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x) dx \\ \Rightarrow \mathbb{P}(X = c) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x) dx = \int_c^c f_X(x) dx = 0. \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X = c) \leq 0, \text{ но } \mathbb{P}(X = c) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = c) = 0.$$

Сега правим съображението: $\{X \in [a, b]\} = \{X \in (a, b)\} \cup \{X = a\} \cup \{X = b\}$, което е обединение на непресичащи се събития.

Следователно,

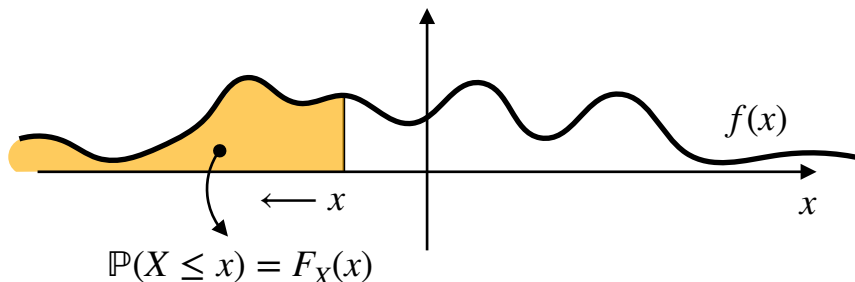
$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in (a, b)) + \underbrace{\mathbb{P}(X = a)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(X = b)}_{=0} = \mathbb{P}(X \in (a, b)).$$

□

Дефиниция (Функция на разпределение на НСВ (CDF)). Нека X е НСВ с плътност f_X . Тогава функцията:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(y) \mathrm{d}y, \forall x \in (-\infty, \infty)$$

се нарича функция на разпределението на X .



Свойства

- ако f_X е непрекъсната в точка x_0 , то $\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cdot F_X \right|_{x=x_0} = f_X(x_0)$
- $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^x f_X(y) \mathrm{d}y = 0$
- $F_X(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X < x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} f_X(y) \mathrm{d}y = 1$

Смяна на променливите на НСВ

Дадена е НСВ X с плътност f_X .

$Y = g(X)$ е някаква детерминистична функция. Питаме се дали може да пресметнем плътността на Y .

Първото нещо, в което трябва да се обединим е, че не за всяка функция g , Y има плътност.

Нека например $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$, като $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Тогава,

$$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & \text{за } \mathbb{P}(X \geq 0) \\ 0, & \text{за } \mathbb{P}(X < 0) \end{cases} \Rightarrow Y \sim \text{Ber}(\mathbb{P}(X \geq 0)), \text{ тоест за плътност на } Y \text{ не}$$

може и да става дума, тъй като Y не приема неизброимо много стойности, а само краен брой такива – само две $\{0,1\}$.

Ще изследваме конкретен клас от функции, за които Y има плътност и тя се пресмята сравнително лесно, чрез f_X и свойствата на g .

Теорема (Смяна на променливите на НСВ). Нека X е НСВ с плътност f . Нека g е строго монотонно растяща или намаляваща (е монотонна) функция. Тогава:

$$Y = g(X) \text{ е НСВ с плътност } \varphi(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{d}{dy} (g^{-1}(y)) \right| \text{ или}$$

$$\varphi = f(h(y)) \cdot |h'(y)|, \text{ където } h = g^{-1} \text{ е обратната функция на } g.$$

Доказателство: Нека $g \uparrow$ (g е строго растяща).

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbb{P}(Y \in (a, b))}_{= \int_a^b ?} &= \mathbb{P}(g(X) \in (a, b)) \stackrel{g \uparrow}{=} \mathbb{P}(X \in (g^{-1}(a), g^{-1}(b))) \\ &\stackrel{h=g^{-1}}{=} \mathbb{P}(X \in (h(a), h(b))) = \\ &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx \stackrel{x=h(v)}{=} \int_a^b f(h(v)) dh(v) = \\ &\quad \begin{cases} h(a) = h(v) \Rightarrow v = a \\ h(b) = h(v) \Rightarrow v = b \end{cases} \\ &= \int_a^b \underbrace{f(h(v)) h'(v)}_{\varphi(v)} dv = \int_a^b \varphi(v) dv \Rightarrow \varphi(y) = f(h(y)) \cdot h'(y). \end{aligned}$$

Аналогично и за $g \downarrow$ (с дребни промени)

$$\varphi(y) = f(h(y)) \cdot \underbrace{(-h'(y))}_{>0 \Leftarrow g \downarrow, h=g^{-1}}. \text{ Във всеки случай } \varphi(y) = f(h(y)) \times |h'(y)|.$$

Математическо очакване на НСВ

Нека X е НСВ. Под очакване на X се разбира $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$, при условие, че интегралът е абсолютно сходящ: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ (е крайно).

Свойства:

- Линейност: $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[aX + b] &= \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) \cdot f(x) dx \\
&= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\
&= a\mathbb{E}[X] + b \cdot 1.
\end{aligned}$$

- Адитивност (общ случай, независимо от независимостта):

$$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].$$

Доказателство:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X + Y] &= \iint (x + y) \cdot f_{X,Y}(x, y) dx dy = \iint x \cdot f_{X,Y} dx dy + \iint y \cdot f_{X,Y} dx dy \\
&= \int x f_X(x) dx + \int y f_Y(y) dy = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

- Адитивност на независими величини: $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, ако $X \perp Y$.

Доказателство:

Нека $f_X(x), f_Y(y)$ са плътностите, а $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ е съвместна плътност.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f_X(x) f_Y(y) dx dy \\
&= \int x f_X(x) dx \cdot \int y f_Y(y) dy = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

- Математическо очакване на функция на случайна величина (теорема за смяна на променливите (Law of the unconscious statistician, LOTUS)): Нека

$Y = g(X)$, тогава $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$, където $g \uparrow$ или $g \downarrow$ и при условие, че интегралът е абсолютно сходящ.

Доказателство:

$g \uparrow$, то $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$, където $h(y) = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(h(y)) \cdot h'(y) dy & \begin{array}{l} x = h(y) \\ y = g(x) \\ \Downarrow \\ \Rightarrow dy = g'(x) dx \end{array} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) \cdot \underbrace{h'(g(x)) \cdot g'(x)}_{\stackrel{(*)}{=1}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_X(x) dx.
\end{aligned}$$

$$(*) : h(g(x)) \Big| \frac{d}{dx} \Rightarrow 1 = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

- Монотонност: Ако $X \leq Y$ почти сигурно (тоест $\mathbb{E}(X \leq Y) = 1$), то:

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Доказателство:

$$\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y - X] = \int_{-\infty}^{\infty} (y - x) f_{Y-X}(z) dz \geq 0,$$

Където $Z = Y - X \geq 0$ почти сигурно, следователно интегралът на неотрицателна функция е неотрицателен.

- Неравенство на Йенсен: Ако φ е изпъкнала функция и $\mathbb{E}[X]$ съществува, то:

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$$

Доказателство:

От изпъкналостта на φ , за всяка точка a съществува допирателна $\ell(x) = \varphi(a) + m(x - a)$ такава, че $\ell(x) \leq \varphi(x)$.

Избираме $a = \mathbb{E}[X]$. Тогава:

$$\varphi(X) \geq \varphi(\mathbb{E}[X]) + m(X - \mathbb{E}[X])$$

Взимаме очакване от двете страни:

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \geq \varphi(\mathbb{E}[X]) + m(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]) = \varphi(\mathbb{E}[X])$$

Дефиниция (Дисперсия). Нека X е НСВ с плътност f_X . Тогава, ако

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx < \infty \text{ (е крайно),}$$

то под дисперсия на X разбираме

$$\text{Var}(X) = \underbrace{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}[X])^2 f_X(x) dx.$$

Свойства

- Дисперсия на константа: $\text{Var}[c] = 0$
- Линейна трансформация: $\text{Var}[aX + b] = a^2 \cdot \text{Var}[X]$
- Дисперсия на сума на независими величини: $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y]$

(Разглеждахме свойствата на дисперсията при дискретни случайни величини. Тук е аналогично.)

Видове НСВ

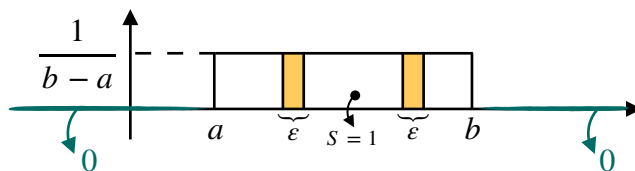
(А) Равномерно разпределение

Казваме, че една случайна величина X е равномерно разпределена в интервала $[a, b]$, ако нейната плътност на вероятността е постоянна в този интервал.

За $a < b$ казваме, че $X \sim \mathcal{U}(a, b) \equiv \text{Uni}(a, b) \equiv \text{Uniform}(a, b)$, ако функцията на плътността и е:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Графиката на $f_X(x)$ е правоъгълник с височина $\frac{1}{b-a}$ и дължина на основата $b - a$.



Кумулативна функция (CDF):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Математическо очакване:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$$

(средата на интервала)

Доказателство:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx \\&= \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_{x=a}^{x=b} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^2 - a^2}{2} \\&= \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.\end{aligned}$$

Дисперсия:

$$\text{Var}[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Доказателство:

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$

Намираме $\mathbb{E}[X^2]$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_a^b x^2 \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x=a}^{x=b} \\&= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3 - a^3}{3}\end{aligned}$$

Но $b^3 - a^3 = (b-a)(a^2 + ab + b^2)$. Заместваме:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{(b-a)(a^2 + ab + b^2)}{3} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \\ \text{Var}[X] &= \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Стандартно отклонение:

$$\sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

Чрез нормализация:

Ако $Y = \frac{X - a}{b - a}$, то $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Нека $g(x) = \frac{x - a}{b - a}$, тогава $g(x) \uparrow$ (е строго растяща).

$$h(y) = g^{-1}(y) = (b - a)y + a$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\overbrace{(b - a)y + a}^{=x}\right)(b - a) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} \cdot (b - a) = 1, & y \in [0, 1] \\ 0, & y \notin [0, 1] \end{cases}$$

$y \in [0, 1] \Leftrightarrow x \in [a, b]$

Нека $X \sim \mathcal{U}(a, b)$. Тогава:

$$Y = \frac{X - a}{b - a} \sim \mathcal{U}(0, 1) \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{b - a} \cdot \mathbb{E}[X - a] = \frac{\mathbb{E}[X] - a}{b - a} \text{ и}$$

$$\text{Var}[Y] = \left(\frac{1}{b - a}\right)^2 \cdot \text{Var}[X - a] = \frac{\text{Var}[X]}{(b - a)^2}, \text{ но}$$

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 y \cdot 1 \, dy = \frac{y^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \frac{b - a}{2} + a = \frac{a + b}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[Y] &= \int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 1 \, dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{y}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ \Rightarrow \text{Var}[X] &= \frac{1}{12}(b - a)^2 \end{aligned}$$

(Б) Нормално разпределение (Гусово разпределение)

Непрекъснатата случайна величина X се нарича нормално разпределена с параметри μ (средна стойност) и σ^2 (дисперсия), което означава $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \equiv \text{Norm}(\mu, \sigma^2)$, ако нейната плътност е:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R},$$

където:

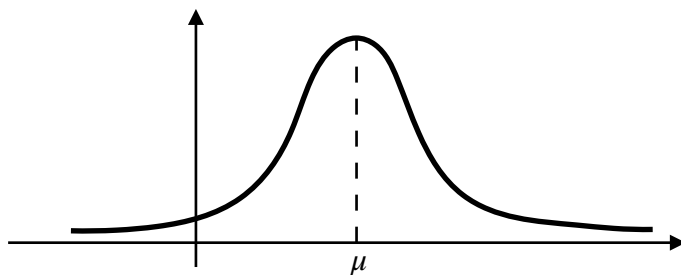
- $\mu \in \mathbb{R}$ (средна стойност)
- $\sigma > 0$ (стандартно отклонение)

Основни характеристики

Функция на плътността (PDF):

- Симетрична относно $x = \mu$
- Има форма на камбана (bell-shaped)

- Максимумът е при $x = \mu : f_X(\mu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$



Нека проверим дали функцията на плътността отговаря на необходимите условия за вероятност:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Необходимо е $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$.

Проверка:

Правим субституцията:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow dz = \frac{dx}{\sigma} \Rightarrow dx = \sigma dz.$$

Границите: $x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow z \in (-\infty, \infty)$.

Тогава:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-z^2/2} \cdot \sigma dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz.$$

Достатъчно е да докажем:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi}.$$

Въвеждане на квадрат на интеграла:

Нека

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz$$

(интеграл на Гаус (Йохан Карл Фридрих Гаус, (1777-1855 г.), Брауншвайг, Свещената Римска империя (сегашна Германия)).

Понеже интегралът не зависи от името на променливата,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy$$

Тогава

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} dy \right).$$

Преобразуване в двоен интеграл:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

Преминаваме към полярни координати:

Полагаме $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$,

$$x^2 + y^2 = r^2, dx dy = r dr d\theta.$$

Граници: $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$.

Тогава

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr d\theta.$$

Интегриране по r

Полагаме $u = \frac{r^2}{2}$, $du = r dr$, значи $r dr = du$.

Граници: $r = 0 \Rightarrow u = 0, r \Rightarrow \infty \Rightarrow u \rightarrow \infty$.

$$\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r dr = \int_0^{\infty} e^{-u} du = -e^{-u} \Big|_0^{\infty} = 1.$$

Интегрираме по θ :

$$I^2 = \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2\pi \Rightarrow I = \sqrt{2\pi}.$$

□

Кумулативна функция (CDF):

Нормално разпределение $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ има плътност:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}$$

Неговата кумулативна функция на разпределение (CDF) е:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \end{aligned}$$

Въвеждаме стандартизацията (линейно транслиране):

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Тогава:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right),$$

където Φ е CDF на стандартното нормално разпределение $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-t^2/2} dt$$

За пресмятането на кумулативната функция на нормалното разпределение $F_X(x)$ се използват трансформации до стандартното нормално разпределение след което се използват таблични стойности. Това е така, тъй като не може да интегрираме ($F_X(x)$ няма явен вид). Интеграла се приближава числено.

Знаем, че $g(x) = \frac{x - \mu}{\sigma}$ е \uparrow . $h(y) = \sigma y + \mu$, $h'(y) = \sigma$. Тогава ,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, \forall y \in (-\infty, \infty).$$

Математическо очакване:

Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогава $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ и

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}[X] - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow \mathbb{E}[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f_X(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{\text{нечетна}} = 0.$$

Следователно: $0 = \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\sigma} \cdot \mathbb{E}[X] - \frac{\mu}{\sigma}$ или $\mathbb{E}[X] = \mu$.

Дисперсия:

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \underbrace{(\mathbb{E}[Y])^2}_{=0} = \mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{\sigma^2} \cdot \text{Var}[X]$$

(тъй като $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ и от свойства на Var функционала)

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot f_Y(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_J = 1.$$

Следователно,

$$1 = \text{Var}[Y] = \frac{\text{Var}[X]}{\sigma^2} \Rightarrow \text{Var}[X] = \sigma^2.$$


Остана да покажем, защо $J = \sqrt{2\pi}$.

От Гаусовият интеграл знаем, че $1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$ за $\forall \sigma > 0$.

$$\Rightarrow \sigma\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \Big| \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{y^2}{2\sigma^2} \right)' \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{y}{2} \cdot (\sigma^{-2}) \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sigma^3} \cdot e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \stackrel{\sigma=1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} dy = J. \end{aligned}$$

Този метод е известен като метода на физика Ричард Файнман. Друга алтернатива за пресмятане на интеграла J е чрез интегриране по части.

Ричард Филипс Фейнман (1918–1988)  е един от най-влиятелните и харизматични физици на 20 век, лауреат на Нобеловска награда от 1965 г. Известен е както със своите фундаментални открития в квантовата физика, така и с необичаен и широк публичен образ.