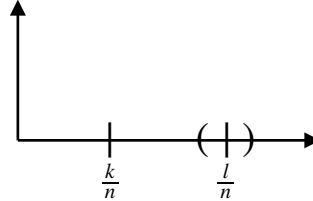


Непрекъснати случайни величини (НСВ)

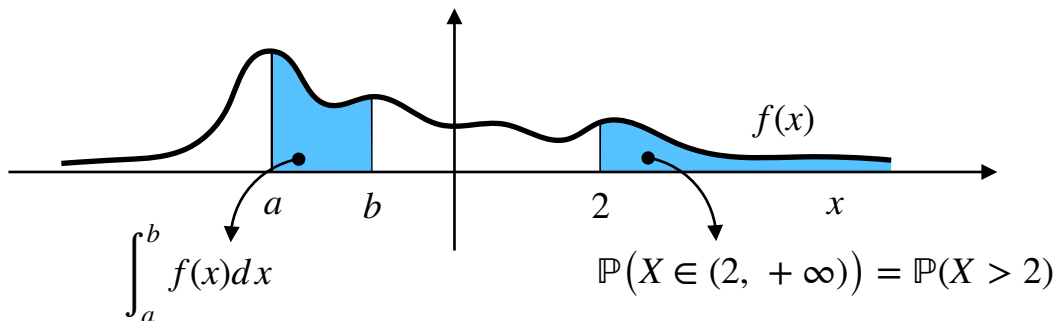
$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ и X приема неизброимо много стойности. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – вероятностно пространство.

$$\oplus \mathbb{P}\left(T = \frac{k}{n}\right), 0 \leq k \leq n$$



\oplus Интересуваме се от случайната величина $X \in (a, b)$, $(T \in (1^\circ\text{C}, 3^\circ\text{C}))$

\oplus Фундаменталните теореми включват непрекъснати случайни величини.



Дефиниция. X е (абсолютно) непрекъсната случайна величина, ако $\exists f_X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такава, че:

a) $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

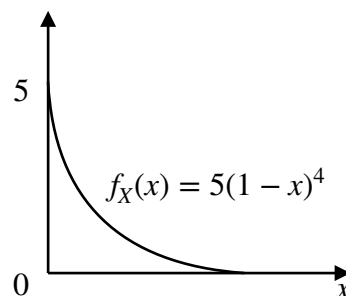
b) $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$,

c) $\mathbb{P}(X \in (a, b)) = \int_a^b f_X(x)dx, \forall a, b \in (-\infty, +\infty), a < b$,

f_X наричаме плътност на X .

\oplus Дадена застрахователна компания обслужва здравните полици на някаква малка фирма. Разходите за обслужване на годишна полица е $M = 100\,000 X$, където застрахователната компания е оценила, че X приема стойности в интервала $(0,1)$ и

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$



Търси се $\mathbb{P}(M > 10\,000)$ – вероятността цената за обслужване на 1 година да е по-голяма от 10 000.

Първо нека проверим, дали функцията в действителност може да бъде плътност на X . Проверка:

$$\int_0^1 5(1-x)^4 dx \stackrel{y=1-x}{=} 5 \int_0^1 y^4 dy = 5 \times \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = 1, \text{ т.е. плътността е добре определена.}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(100\,000 > X > 10\,000) &= \mathbb{P}\left(X > \frac{1}{10}\right) = \int_{\frac{1}{10}}^{\infty} f_X(x) dx = 5 \int_{\frac{1}{10}}^1 (1-x)^4 dx \stackrel{y=1-x}{=} \\ &= 5 \int_0^{\frac{9}{10}} y^4 dy = 5 \times \frac{y^5}{5} \Big|_0^{\frac{9}{10}} = \left(\frac{9}{10}\right)^5 \approx 0.59 \end{aligned}$$

Твърдение. Нека X е непрекъсната случайна величина (НСВ).

Тогава $\mathbb{P}(X = c) = 0, \forall c \in \mathbb{R}$. Следователно ,

$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in [a, b)) = \mathbb{P}(X \in (a, b]) = \mathbb{P}(X \in (a, b)),$$

$\forall a, b \in (-\infty, +\infty), a < b$. Случайната величина няма маса, т.е. има нулева вероятност в конкретна точка.

Доказателство. $\{X = c\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{ X \in \left(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}\right) \right\}, \forall n \geq 1$, но

$$Q = \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x) dx \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(X = c) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x) dx = \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x) dx = \int_c^c f_X(x) dx = 0 \Rightarrow$$

$\mathbb{P}(X = c) \leq 0$, но $\mathbb{P}(X = c) \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X = c) = 0$. Сега,

$\{X \in [a, b]\} = \{X \in (a, b)\} \cup \{X = a\} \cup \{X = b\}$, което е обединение на непересичащи се събития. Следователно,

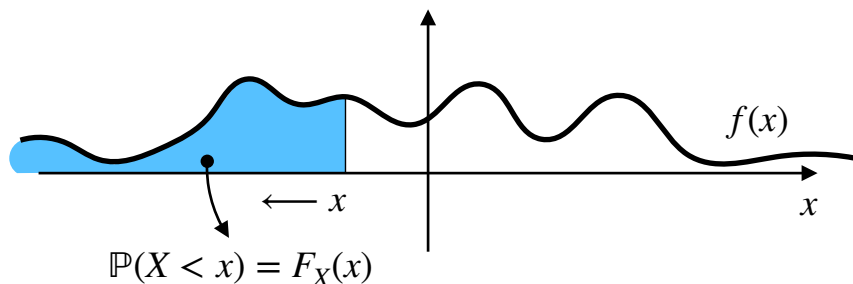
$$\mathbb{P}(X \in [a, b]) = \mathbb{P}(X \in (a, b)) + \underbrace{\mathbb{P}(X = a)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(X = b)}_{=0} = \mathbb{P}(X \in (a, b)).$$

Дефиниция (Функция на разпределение на НСВ). Нека X е НСВ с плътност f_X .

Тогава функцията $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f_X(y) dy, \forall x \in (-\infty, +\infty)$ се нарича функция на разпределението на X .

Свойства.

- ако f_X е непрекъсната в точка x_0 , то $\left. \frac{\partial}{\partial x} F_X \right|_{x=x_0} = f_X(x_0)$
- $F_X(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) dy = 0$



Аналогично,

- $F_X(+\infty) = 1$
- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X < x)$

Смяна на променливите на НСВ

Дадена е НСВ X с плътност f_X .

$Y = g(X)$ е някаква детерминираща функция. Питаме се дали може да пресметнем плътността на Y .

Първото нещо, в което трябва да се обединим е, че не за всяка функция g , Y има плътност.

Нека например $g : \mathbb{R} \rightarrow \{0,1\}$, като $g(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$. Тогава,

$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & \mathbb{P}(X \geq 0) \\ 0, & \mathbb{P}(X < 0) \end{cases} \Rightarrow Y \in \text{Ber}(\mathbb{P}(X \geq 0))$, т.е. за плътност на Y не може

и да става дума, тъй като Y не приема неизброимо много стойности, а само краен брой такива – само две $\{0,1\}$.

Ще изследваме конкретен клас от функции, за които Y има плътност и тя се пресмята сравнително лесно, чрез f_X и свойствата на g .

Теорема (Смяна на променливите на НСВ). Нека X е НСВ с плътност f . Нека g е строго монотонно растяща или намаляваща (е монотонна) функция. Тогава

$Y = g(X)$ е НСВ с плътност $\varphi(y) = f(g^{-1}(y)) \cdot \left| \frac{\partial}{\partial y} (g^{-1}(y)) \right|$ или

$\varphi = f(h(y)) \cdot |h'(y)|$, където $h = g^{-1}$.

Доказателство. Нека $g \uparrow$ (g е строго растяща).

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\mathbb{P}(Y \in (a, b))}_{= \int_a^b ?} &= \mathbb{P}(g(X) \in (a, b)) \stackrel{g \uparrow}{=} \mathbb{P}\left(X \in (g^{-1}(a), g^{-1}(b))\right) \stackrel{h=g^{-1}}{=} \\
 &= \mathbb{P}\left(X \in (h(a), h(b))\right) = \\
 &= \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx \quad \begin{array}{l} x=h(v) \\ \left\{ \begin{array}{l} h(a) = h(v) \Rightarrow v = a \\ h(b) = h(v) \Rightarrow v = b \end{array} \right. \end{array} \quad \int_a^b g(h(v)) dh(v) = \\
 &= \int_a^b \underbrace{f(h(v)h'(v))}_{\varphi(v)} dv = \int_a^b \varphi(v) dv \Rightarrow \varphi(y) = f(h(y)) h'(y).
 \end{aligned}$$

Аналогично и за $g \downarrow$ (с дребни промени)

$$\varphi(y) = \underbrace{f(h(y))}_{>0 \Leftarrow g \downarrow, h=g^{-1}} (-h'(y)). \text{ Във всеки случай } \varphi(y) = f(h(y)) \times |h'(y)|.$$

Математическо очакване на НСВ

Нека X е НСВ. Под очакване на X се разбира $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$, ако $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ (е крайно).

$$\left[\text{Припомняне: За } X \text{ дискретно } \mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i \right]$$

Свойства.

- $\mathbb{E}cX = c\mathbb{E}X$
 $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{f_Y(y)}_{\text{може да се покаже с функцията } g(x) = cx} dy$
- $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, ако $X \perp Y$
- $Y = g(X)$, то $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx$, където $g \uparrow$ или $g \downarrow$.

$g \uparrow$, то $f_Y(y) = f_X(h(y)) \cdot h'(y)$, където $h(y) = g^{-1}(y)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Y &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(h(y)) \cdot h'(y) dy \quad \begin{matrix} x=h(y) \\ y=g(x) \Rightarrow dy=g'(x)dx \end{matrix} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(x) f_X(x) h'(g(x))}_{=1} g'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.\end{aligned}$$

$$(*) \quad x = h(g(x)) \left| \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow 1 = h'(g(x)) \cdot g'(x). \right.$$

Дефиниция (Дисперсия). Нека X е НСВ с плътност f_X . Тогава, ако

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx < \infty \text{ (е крайно),}$$

то под дисперсия на X разбираме $\mathbb{D}X = \underbrace{\mathbb{E}[X - \mathbb{E}X]^2}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 f_X(x) dx$

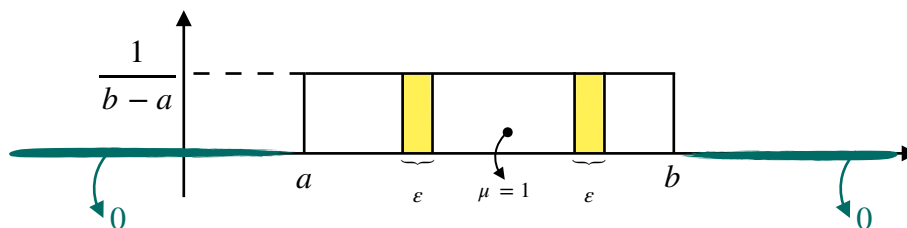
Свойства.

- $\mathbb{D}cX = c^2 \mathbb{D}X$
- $\mathbb{D}(X + c) = \mathbb{D}X$
- $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Видове НСВ

А. Равномерно разпределена НСВ

Дефиниция: За $a < b$ казваме, че $X \in Unif(a, b)$, ако $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$.



Ако $Y = \frac{X - a}{b - a}$, то $Y \in Unif(0, 1)$. Нека $g(x) = \frac{x - a}{b - a}$, тогава $g(x) \uparrow$.

$$h(y) = g^{-1}(y) = (b - a)y + a$$

$$f_Y(y) = f_X\left(\underbrace{(b - a)y + a}_{\substack{=x \\ y \in (0, 1) \Leftrightarrow x \in (a, b)}}\right) (b - a) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} (b - a) = 1, & y \in (0, 1) \\ 0, & y \notin (0, 1) \end{cases}$$

Нека $X \in Unif(a, b)$. Тогава

$$Y = \frac{X - a}{b - a} \in Unif(0, 1) \Rightarrow \mathbb{E}Y = \frac{1}{b - a} \mathbb{E}(X - a) = \frac{1}{b - a} (\mathbb{E}X - a) \text{ и}$$

$$\mathbb{D}Y = \left(\frac{1}{b - a} \right)^2 \mathbb{D}(X - a) = \frac{\mathbb{D}X}{(b - a)^2}, \text{ но}$$

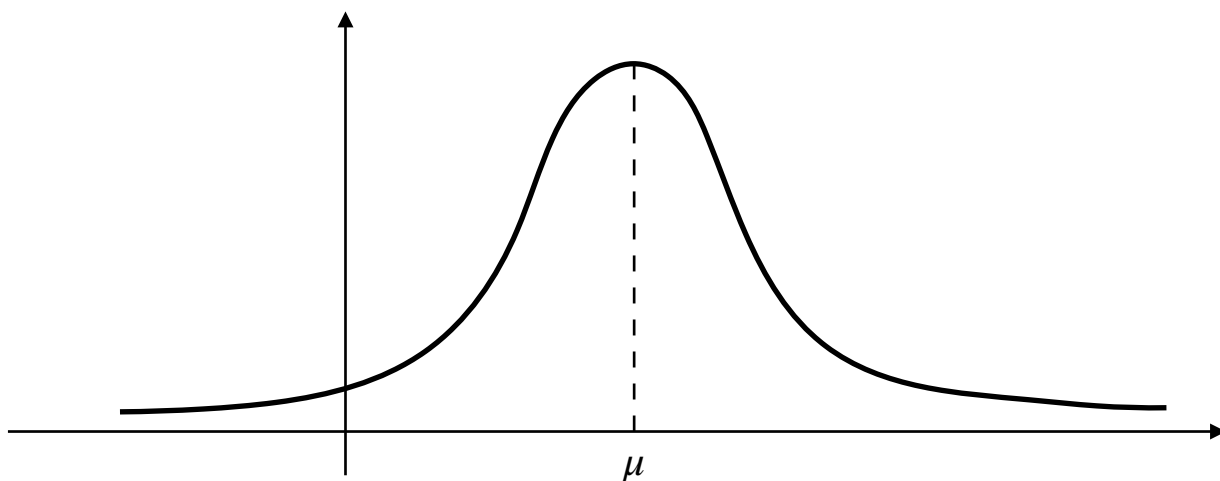
$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 y \times 1 \, dy = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{b - a}{2} + a = \frac{a + b}{2};$$

$$\mathbb{D}Y = \int_0^1 \left(y - \frac{1}{2} \right)^2 \times 1 \, dy = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow \mathbb{D}X = \frac{1}{12} (b - a)^2.$$

Б. Нормално разпределена НСВ

Казваме, че $X \in Norm(\mu, \sigma^2)$ или $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ако

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}.$$



$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1, \forall \mu, \sigma.$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

F_X кумулативната функция на нормалното разпределение. За пресмятането и се ползват трансформации до стандартното нормално разпределение (ползват таблици). Това е така, тъй като не може да интегрираме ($F_X(x)$ няма явен вид). Интеграла се приближава числено.

(За домашно може да пресметнем кумулативната функция на равномерното разпределение, което пропуснахме)

Ако $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$ (линейно транслиране) и се нарича стандартно нормално разпределение.

$$g(x) = \frac{x - \mu}{\sigma} \text{ е } \uparrow. \quad h(y) = \sigma y + \mu, \quad h'(y) = \sigma. \text{ Тогава,}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}}, \quad \forall y \in (-\infty, \infty).$$

Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогава $Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow \mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{y e^{-\frac{y^2}{2}}}_{\text{нечетна}} dy = 0.$$

Следователно $0 = \mathbb{E}Y = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma}$ или $\mathbb{E}X = \mu$.

$$\mathbb{D}Y = \mathbb{E}Y^2 - (\underbrace{\mathbb{E}Y}_{=0})^2 = \mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{\sigma^2}\mathbb{D}X \left(\text{т.к. } Y = \frac{X - \mu}{\sigma} \text{ и от свойства на } \mathbb{D} \right)$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1. \text{ Следователно,}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_I \quad \mathbb{D}Y = 1 = \frac{\mathbb{D}X}{\sigma^2} \Rightarrow \mathbb{D}X = \sigma^2.$$

Сега, за интеграла I : знаем, че $1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$ за $\forall \sigma > 0$.

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \Big| \frac{\partial}{\partial \sigma}.$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy \stackrel{\sigma \equiv 1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Този метод е известен като метода на физика Ричард Файнман. Друга алтернатива за пресмятане на интеграла I е чрез интегриране по части.