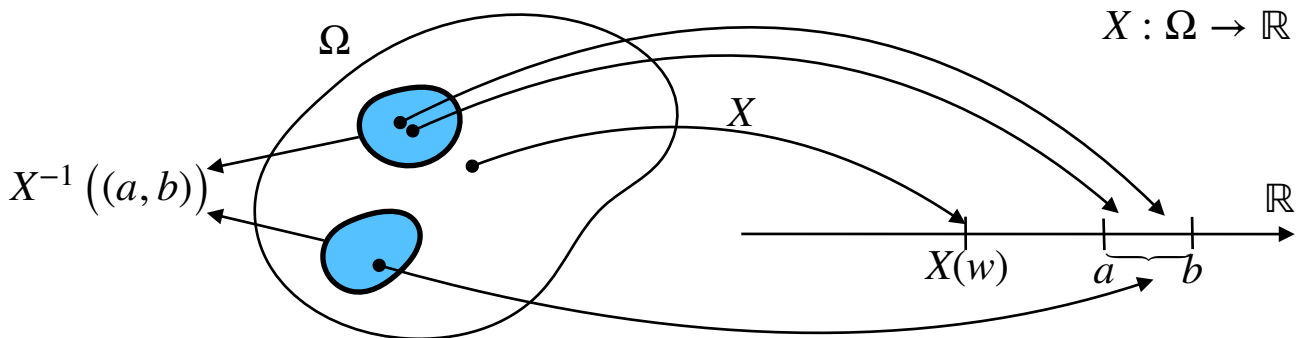


## Случайни величини

$V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  - вероятностно пространство.



Случайната величина  $X$  не е нито случайна, нито величина. Тя е грубо казано функция/изображение, което съпоставя на всяко елементарно събитие  $w$  от  $\Omega$  - някакво реално число.

За да бъде  $X$  случайна величина, тя трябва да удовлетворява някакви критерии.

**Дефиниция (Случайна величина).** Нека  $V$  е вероятностно пространство. Тогава  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  е случайна величина, тогава когато  $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$  е в сила  $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$ , където  $X^{-1}(B) = \{w \in \Omega \mid X(w) \in B\}$ . Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността  $x$  да е между  $a$  и  $b$ .

Всички елементарни събития, към които, като приложим изображението  $X$  отиват в интервала  $(a, b)$  са множеството  $B$ .

**Факт.** Вярно е, че  $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$ , ако  $I = (a, b)$ ;  $I = [a, b]$ ;  $I = \{x\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Всеки интервал  $(a, b)$  от  $\mathbb{R}$  има прообраз  $B \subseteq \Omega$  и се изпраща в него с  $X^{-1}((a, b))$ . Някой интервали може да се изпращат в празното множество  $\emptyset$ .

Това изображение  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  се нарича случайна величина, ако може да придаваме вероятност на прообразите му - на всички множества, които изпращаме във всеки един интервал.

**Теорема (Свойства на случайни величини).** Нека  $V$  е вероятностно пространство и  $X$  и  $Y$  са случайни величини ( $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ). Тогава е в сила:

- а)  $aX \pm bY$  е случайна величина,  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ;
- б)  $cX$  е случайна величина,  $\forall c \in \mathbb{R}$  (частен случай на а) :  $a = c$  и  $b = 0$ );
- в)  $XY$  е случайна величина;
- г) ако  $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$ , то  $\frac{X}{Y}$  е случайна величина.

Случайните величини са функции, за които не може да знаем как действат навсякъде, тъй като това би било или твърде сложно или твърде скъпо, а в някои случаи може дори да не е ясно как да въведем пространството от елементарни събития  $\Omega$ .

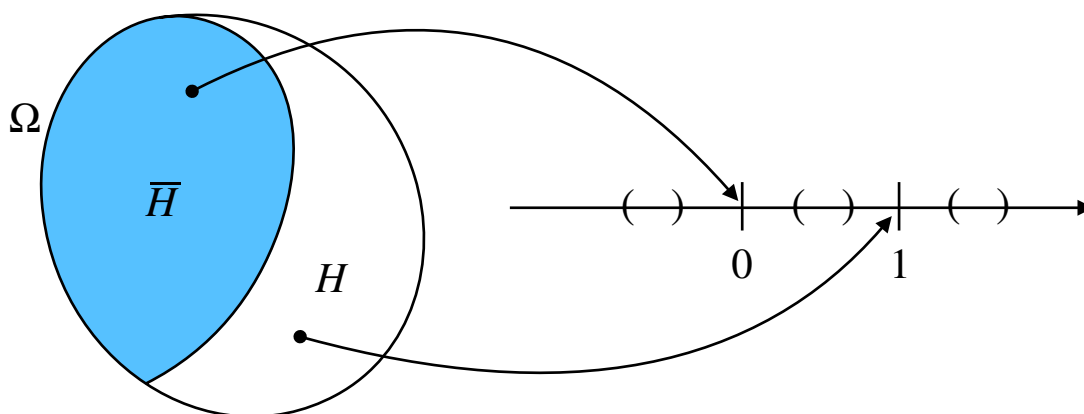
## Дискретни случайни величини

**Дефиниция (Индикаторна функция).** Нека  $\Omega$  е множество от елементарни събития и  $H \subseteq \Omega$ . Тогава  $1_H$  ( $1_{\{H\}}$ ) се нарича индикаторна функция, ако  $1_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } w \in H \\ 0, & \text{ако } w \in \bar{H} \end{cases}$ . Грубо казано:  $1_H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Лема.** Нека  $V$  е вероятностно пространство и  $H \in \mathcal{A}$ . Тогава  $1_H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  е случайна величина.

Доказателство:

Ако  $X(w) := 1_H(w)$ , то  $X^{-1}(\{0\}) = \bar{H}$ , а  $X^{-1}(\{1\}) = H$ .



$$\forall a < b \text{ е вярно, че } X^{-1}(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } a \geq 1 \text{ или } b \leq 0 \text{ или } a > 0 \text{ и } b < 1 \\ \Omega, & \text{ако } 0 \in (a, b) \text{ и } 1 \in (a, b) \\ H, & \text{ако } 1 \in (a, b) \text{ и } 0 \notin (a, b) \\ \bar{H}, & \text{ако } 1 \notin (a, b) \text{ и } 0 \in (a, b) \end{cases}$$

Който и интервал  $(a, b)$  да вземем - изходите ще са един от 4-те възможни:  $\emptyset$ ,  $\Omega$ ,  $H$  и  $\bar{H}$ , които са  $\sigma$  алгебра. Т.е. дефиницията е изпълнена (за всеки случай  $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \Rightarrow X = 1_H$  е случайна величина). С това лемата е доказана.

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A} : X(w) = 1_H(w) \in \{0, 1\}$$

$$H = \{w \in \Omega \mid X(w) = 1\} = \{X = 1\}$$

$$\bar{H} = \{w \in \Omega \mid X(w) = 0\} = \{X = 0\}$$

Имаме две възможности:  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  и  $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$ ,  $p \in [0, 1]$

Нека  $V^* = (\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$  е друго вероятностно пространство и  $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{A} : X^* = 1_{H^*}$  е вероятността  $\mathbb{P}(X^* = 1) = p \Rightarrow$  вероятно тези две случайни величини  $X$  и  $X^*$  не са различни.

Означения (за удобство):

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) - n \text{ различни числа} \\ (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) - \text{изброимо много различни числа} \end{cases}$$

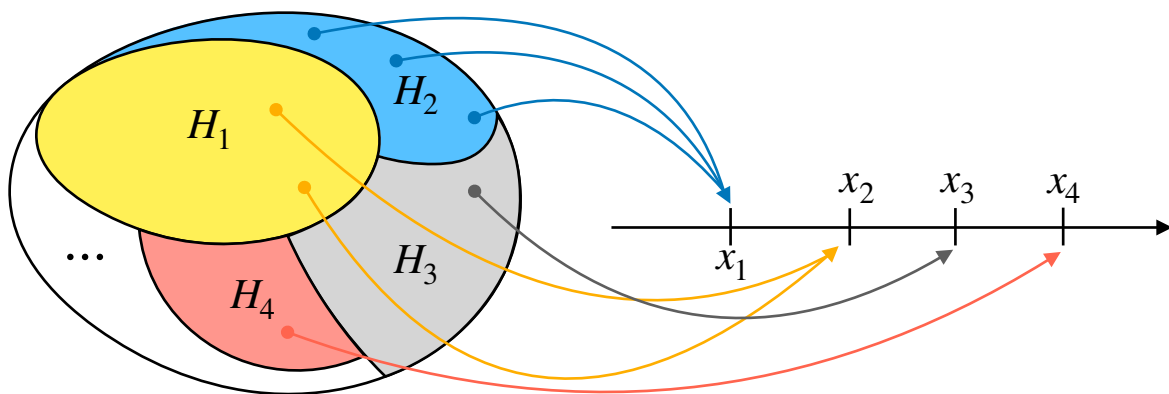
$V$  е вероятностно пространство.

$$\mathcal{H} = \begin{cases} H_1, \dots, H_n \text{ пълна група от събития във } V \\ (H_i)_{i \geq 1}, \text{ където } H_i \in \mathcal{A}; H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega \end{cases}$$

**Дефиниция (Дискретна случайна величина).** Нека  $V$  е вероятностно пространство. Дадени са  $\bar{x}$  и  $\mathcal{H}$ . Тогава

$$X(w) = \sum_{j=1}^n x_j 1_{H_j}(w) \quad \left( \text{или когато имаме изброим брой: } X(w) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i 1_{H_i}(w) \right)$$

се нарича дискретна случайна величина (взима или  $n$  различни или най-много изброимо много на брой различни стойности умножени по индикаторната функция). Кратък запис:  $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$ .



$$H_j = \{X = x_j\} = \{w \in \Omega \mid X(w) = x_j\}$$

**Дефиниция (Разпределение на дискретна случайна величина).**

Нека  $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$  е дискретна случайна величина. Тогава таблицата

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
$\mathbb{P}(X = x_j)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

където  $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j = \mathbb{P}(H_j)$  и  $\sum_{j=1} p_j = 1$ , се нарича разпределение на  $X$ .

⊕ Измерваме дните, в които дадено CPU работи (функционира) и  $X$  случайната величина, която измерва броя на тези дни. Може да моделираме  $X$  по два начина:

- $X \in \mathbb{N}_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $X \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$

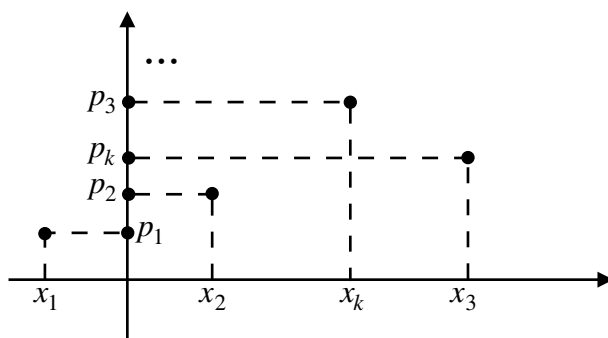
$X$	0	1	2	...
$\mathbb{P}$	$p_0$	$p_1$	$p_2$	...

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$
  

$X$	0	1	...	1000
$\mathbb{P}$	$p_0$	$p_1$	...	$p_{1000}$

$$\sum_{j=0}^{1000} p_j = 1$$

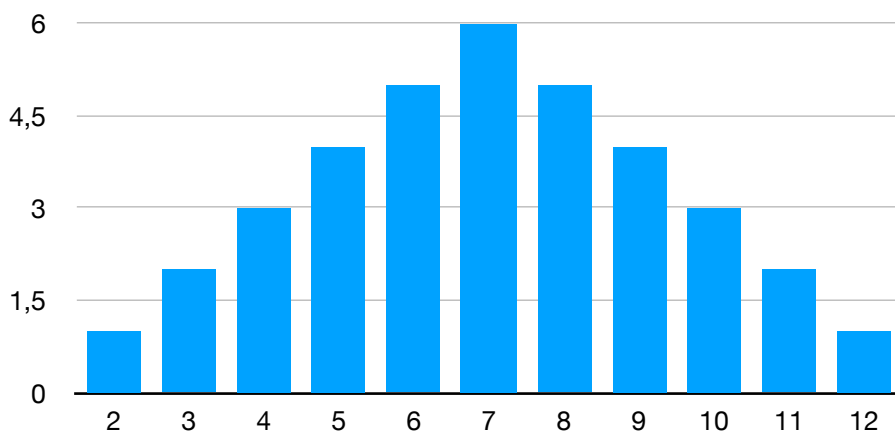
**Дефиниция (Хистограма).** Графиката по-долу се нарича хистограма:



⊕ Хвърляме два зара.  $X$  и  $Y$  са случайните величини - точките от 1 до 6, съответно паднали се на 1-вия зар.  $Z = X + Y$ .

$Z$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

■ Сумата от точките на два зара



## Смяна на променливите на дискретни случайни величини

$X$  - сл. вел.,  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $Y = g(X)$  - искаме да знаем дали  $Y$  е случайна величина.

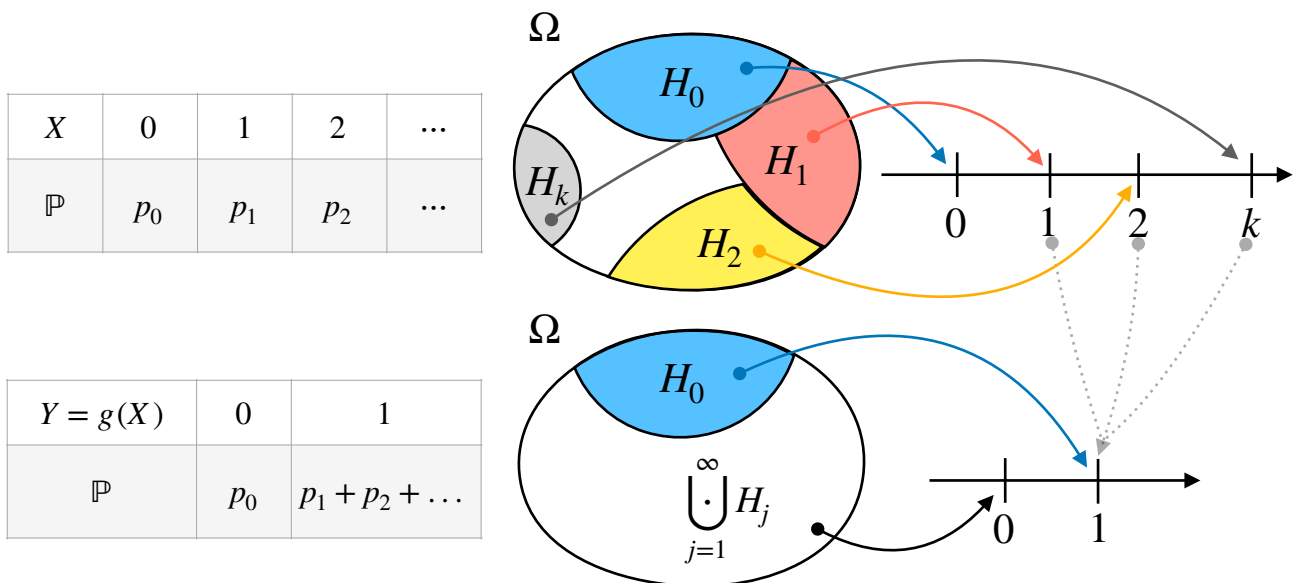
Ако  $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$ , то  $Y = \sum_j g(x_j) 1_{H_j}$  е случайна величина и ако положим  $y_i = g(x_j)$ , то  $Y = \sum_j y_j 1_{H_j}$ .

За  $g(x_m) = g(x_k)$ ,  $m \neq k$  ще получим повтаряемост на някои стойности, но това няма да е грешка, просто за удобство и икономичност може да ги обединим като  $\mathcal{H} = H_m \cup H_k$ .

$X$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_m$	$\dots$	$y_k$	$\dots$
$\mathbb{P}$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_m + p_k$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

$\oplus$  Имаме някакво CPU.  $X = \sum_{j=0}^{\infty} j 1_{\{H_j\}}$ , където  $H_j = \{\text{CPU работи точно } j \text{ дни}\}$

$Y = g(X)$ , където  $g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$ .



$X, Y$  - дискретни случайни величини,  $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогава  $Z = g(X, Y)$  е дискретна случайна величина.

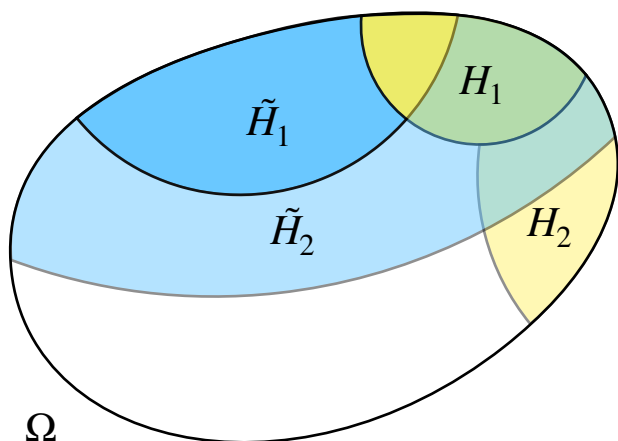
$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$
$\mathbb{P}$	$p_1$	$p_2$	$\dots$

$$\sum_i p_i = 1$$

$Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$
$\mathbb{P}$	$q_1$	$q_2$	$\dots$

$$\sum_i q_i = 1$$

$$Z = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) 1_{\{X=x_i, Y=y_j\}}$$



$$H_1 = \{X = x_1\}; H_2 = \{X = x_2\}; \dots$$

$$\tilde{H}_1 = \{Y = y_1\}; \tilde{H}_2 = \{Y = y_2\}; \dots$$

$$T_{ij} = H_i \cap \tilde{H}_j$$

## Независимост на дискретни случайни величини

**Дефиниция (Независимост на дискретни сл. вел.).** Нека  $X, Y$  са дискретни случайни величини във вероятностното пространство  $V$ . Тогава

$$\underbrace{X \perp\!\!\!\perp Y}_{X \text{ и } Y \text{ са независими}} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) \stackrel{\text{def.}}{=} \\ = \mathbb{P}(X = x_j) \mathbb{P}(Y = y_k), \forall j, k.$$

$$\oplus \quad \Omega = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}; \mathcal{A} = 2^\Omega;$$

$\mathbb{P}(\{0, 0\}) = \mathbb{P}(\{0, 1\}) = \mathbb{P}(\{1, 0\}) = \mathbb{P}(\{1, 1\}) = \frac{1}{4}$  (имаме равномерна вероятност върху четирите елемента). Това е математическа конструкция на простия пример с хвърлянето на две монети.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X(w) = w(1). \text{ Например } X(\{0, 1\}) = 0 \\ \text{1-ва координата}$$

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad Y(w) = w(2). \text{ Например } Y(\{0, 1\}) = 1 \\ \text{2-ра координата}$$

Тоест, първата монета е „тура“, а втората монета - „ези“ (ако сме дефинирали събитието „ези“ с  $1^{-\text{ца}}$  (за успех) ).

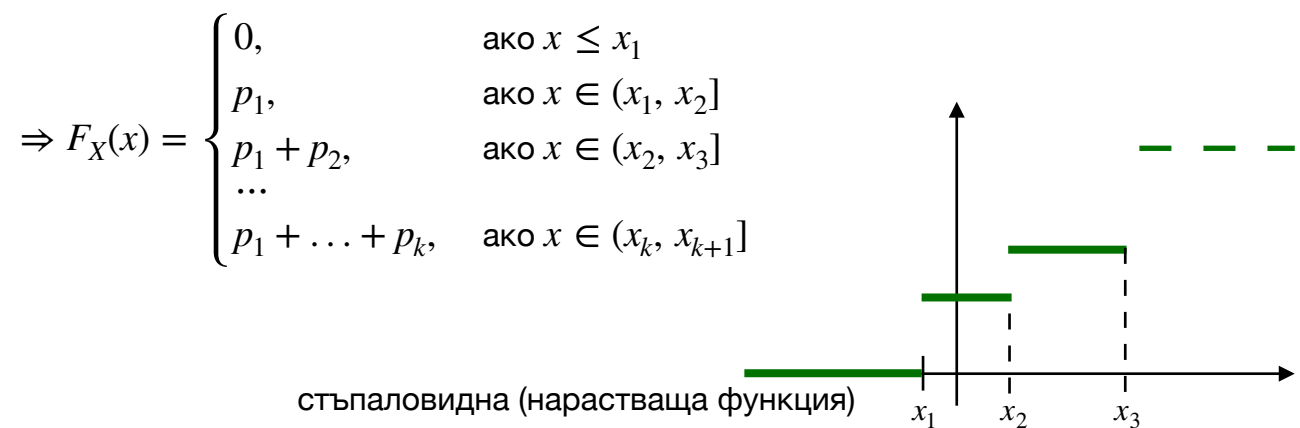
$X$  и  $Y$  са независими ( $X \perp Y$ ), т.к.  $\mathbb{P}(X=i, Y=j) = \mathbb{P}(X=i)\mathbb{P}(Y=j)$ ,  $\forall i, j \in \{0,1\}$ .

**Дефиниция (Функция на разпределение на случайна величина).** Нека  $X$  е сл. вел. във вероятностно пространство  $V$ . Тогава  $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$ ,  $\forall x \in (-\infty, \infty)$ , се нарича функция на разпределение на  $X$ .

⊕

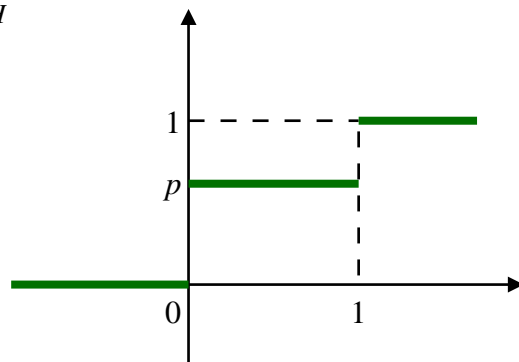
$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$\mathbb{P}$	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

и  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$



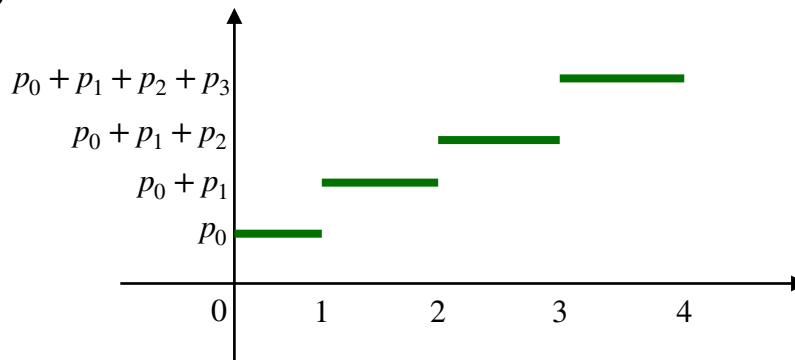
⊕

$X = 1_H$



⊕

CPU



Свойства:  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X = 0$ .

## Математическо очакване (за дискретни случайни величини)

**Дефиниция.** Нека  $X$  е дискретна сл. вел. Ако  $\sum_j x_j p_j$  е добре деф. (т.е. е крайна),

то  $\mathbb{E}X = \sum_j x_j p_j = \sum_j \underbrace{x_j}_{\text{възможна стойност на } X} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x_j)}_{\text{вероятност за тази стойност } x_j}$  е очакването на  $X$ .

Когато имаме краен брой стойности - тяхната сума ще е винаги добре дефинирана. Обаче, когато имаме изброимо много стойности, то тогава може сумата да не е крайна.

⊕ Ако  $X$  взема краен брой стойности:  $x_1, \dots, x_n$ , то

$$\sum_{j=1}^n x_j p_j < \infty \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n x_j p_j \text{ винаги съществува.}$$

⊕ Ако  $X$  е такава случайна величина, че  $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2}, j \geq 1$ . Тогава

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1, \text{ тъй като } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}. \text{ Но тази случайна величина}$$

няма очакване, тъй като

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \frac{6}{\pi^2} \times \underbrace{(\text{хармоничния ред})}_{\text{не сходя}} = \infty.$$

**Коментар.**  $f(a) = \sum_j (x_j - a^2) p_j$  е функция на  $a$  и тя се минимизира, когато

$$a = \mathbb{E}X.$$

$\min_{a \in \mathbb{R}} f(a) = f(\mathbb{E}X)$ . Т.е.  $\mathbb{E}X$  минимизира квадратичната грешка.

⊕ Ако имаме равномерно разпределение върху  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , то тогава

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n x_j \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{X} \text{ (което е средно аритметичното на } X \text{).}$$

Средно аритметичното е математическото очакване на равномерното разпределение върху дадени точки.