

СЕМ, лекция 8

(2020-11-19)

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}, |\rho(X, Y)| \leq 1 \text{ и } |\rho(X, Y)| = 1 \Leftrightarrow Y = aX + b.$$

Когато X и Y са дискретни: $\text{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - \mathbb{E}X)(y_j - \mathbb{E}Y)p_{ij}$

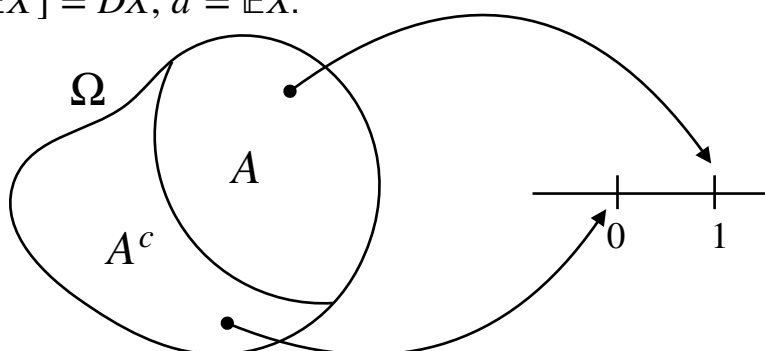
$$DX = \sum_i (x_i - \mathbb{E}X)^2 \mathbb{P}(X = x_i)$$

Условно математическо очакване (УМО)

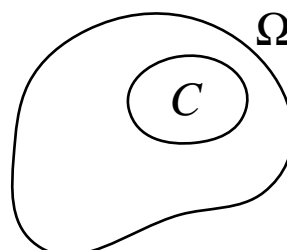
Знаем, че $\min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X - a)^2 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}X] = DX, a = \mathbb{E}X.$

Ако $Y = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$

$A = \{Y = 1\}$
 $A^c = \{Y = 0\}$

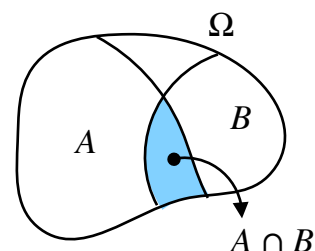


$Y = 1_A = 1_{\{Y=1\}}$
 $p = \mathbb{E}Y = \mathbb{E}1_A = \mathbb{E}1_{\{Y=1\}} = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(Y = 1)$

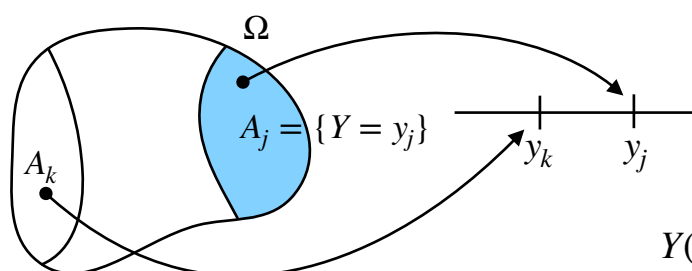


По-общо $C \subseteq \Omega$
 $\mathbb{E}1_C = \mathbb{P}(C)$

A, B - множества. Тогава $1_A 1_B = 1_{A \cap B}$



Ако Y е дискретна случайна величина, то $Y = \sum_j y_j \cdot 1_{A_j}$, където A_j е пълна група от събития и $\mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(Y = y_j), A_j = \{Y = y_j\}$



$$Y(w) = 0 + \dots + 0 + y_k \cdot 1 + 0 + \dots + 0$$

⊕ Случайна величина X и наблюдаваме $Y = \begin{cases} 1, p \\ 0, 1-p \end{cases}$, $Y = 1_A$, където

$$A = \{Y = 1\}.$$

(Пример: X е клиент влязъл в магазин, а Y е дали клиента е мъж или жена)

$$G : \{0,1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$\min_G \mathbb{E}[X - G(Y)]^2 = ?$ От всички функции G искаме да вземем тази, която минимизира квадратичната грешка.

$$\mathbb{E}[X - f(Y)]^2, f(x) = ?$$

$$G(Y) = a \cdot 1_A + b \cdot 1_{A^c} = aY + b(1 - Y), \text{ тъй като } 1 - Y = 1_{A^c}$$

$$\min_{a,b} \mathbb{E}[X - a1_A - b1_{A^c}]^2 = \min_{a,b} (\mathbb{E}X^2 - a^2\mathbb{E}1_A + b^2\mathbb{E}1_{A^c} - 2a\mathbb{E}X1_A - 2b\mathbb{E}X1_{A^c} - 0) = f(a, b)$$

$$\text{Интересуваме се от } \min_{a,b} f(a, b) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial a} = 2a\mathbb{E}1_A - 2\mathbb{E}X1_A \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial b} = 2b\mathbb{E}1_{A^c} - 2\mathbb{E}X1_{A^c} \end{cases} \Rightarrow$$

$$a = \frac{\mathbb{E}X1_A}{\mathbb{E}1_A} \text{ и } b = \frac{\mathbb{E}X1_{A^c}}{\mathbb{E}1_{A^c}}$$

$$G(Y) = \underbrace{\frac{\mathbb{E}X1_A}{\mathbb{E}1_A}}_a \times 1_A + \underbrace{\frac{\mathbb{E}X1_{A^c}}{\mathbb{E}1_{A^c}}}_b \times 1_{A^c} = \frac{\mathbb{E}XY}{\mathbb{P}(Y=1)} \times 1_{\{Y=1\}} + \frac{\mathbb{E}(1-Y)}{\mathbb{P}(Y=0)} \times 1_{\{Y=0\}}$$

Дефиниция: (**Условно очакване**) Нека X и Y са две случайни величини. Тогава

$$\mathbb{E}[X | Y] = f(y) : \min_G \mathbb{E}[X - G(Y)]^2 = \mathbb{E}[X - f(Y)]^2$$

$$\oplus X = 1_B$$

Ω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X | Y] &= \mathbb{E}[1_B | Y] = \\ &= \frac{\mathbb{E}1_B1_A}{\mathbb{P}(A)} 1_A + \frac{\mathbb{E}1_B1_{A^c}}{\mathbb{P}(A^c)} 1_{A^c} = \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(B|A)} \times 1_A + \underbrace{\mathbb{P}(B|A^c)} \times 1_{A^c} \end{aligned}$$

Твърдение: Нека X и Y са случайни величини, като Y е дискретна.

Y	Y_1	\dots	y_j	\dots
\mathbb{P}	p_1	\dots	p_j	\dots

$$Y = \sum_j y_j 1_{A_j}, \quad A_j = \{Y = y_j\}, \quad \mathbb{P}(A_j) = p_j.$$

Тогава $\mathbb{E}[X | Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}X 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}$. Количеството $\mathbb{E}[X | Y = y_j] = \frac{\mathbb{E}X 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}$ се нарича условно очакване на X при положение (условие) $Y = y_j$.

$$\oplus X = 1_B, \quad B = \{X = 1\}$$

$$\mathbb{E}[1_B | Y = y_j] = \frac{\mathbb{E}1_B 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_j)}{\mathbb{P}(A_j)} = \mathbb{P}[B | A_j] = \mathbb{P}[X = 1 | Y = y_j]$$

$$\oplus X = \sum_i x_i 1_{B_i}, \quad X \text{ е дискретна случайна величина.}$$

$$Y = \sum_j y_j 1_{A_j} \text{ и } p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X | Y] &= \sum_j \frac{\mathbb{E}X 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}; & \mathbb{E}X 1_{A_j} &= \mathbb{E}\left(\sum_i x_i 1_{B_i}\right) 1_{A_j} = \sum_i x_i \mathbb{E}1_{B_i} 1_{A_j} = \\ &= \sum_i x_i \mathbb{P}(B_i \cap A_j) = \underbrace{\sum_i x_i p_{ij}} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X | Y = y_j] = \frac{\sum_i x_i p_{ij}}{\mathbb{P}(A_j)} = \sum_i x_i \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B_i)}{\mathbb{P}(A_j)} = \sum_i x_i \mathbb{P}(B_i | A_j) = \sum_i \underbrace{x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j)}$$

Твърдение: X и Y са случайни величини, като Y е дискретна. Тогава $\mathbb{E}[X | Y]$ е дискретна случайна величина и $\mathbb{E}[X | Y] = \sum_j \mathbb{E}[X | Y = y_j] 1_{A_j}$.

$\mathbb{E}[X Y]$	\dots	$\mathbb{E}[X Y = y_j]$
\mathbb{P}	\dots	$\mathbb{P}(A_j)$

Свойства на условните математически очаквания

Теорема: Нека X, Z са случайни величини и Y е дискретна случайна величина -
 $Y = \sum_j y_j 1_{A_j}$. Тогава:

а) $\mathbb{E}[aX + bZ | Y] = a\mathbb{E}[X | Y] + b\mathbb{E}[Z | Y]$

б) Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}X$

в) Ако $X = g(Y)$, то $\mathbb{E}[X | Y] = g(Y)$

г) $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}X$

д) $\mathbb{E}[f(U, Y) | Y = y_j] = \mathbb{E}f(U, y_j)$, където

U е конкретна случайна величина $U = X$;

U е вектор от случайни величини $U = (X_i)_{i \geq 1}$

U е редица от случайни величини $U = (X_1, \dots, X_n)$, ако $U \perp\!\!\!\perp Y$.

Доказателство:

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbb{E}[aX + bZ | Y] &= \sum_j \frac{\mathbb{E}[(aX + bZ)1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = \sum_j \frac{a\mathbb{E}X1_{A_j} + b\mathbb{E}Z1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = \\ &= a \underbrace{\sum_j \frac{\mathbb{E}X1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}}_{\mathbb{E}[X | Y]} + b \underbrace{\sum_j \frac{\mathbb{E}Z1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}}_{\mathbb{E}[Z | Y]} = a\mathbb{E}[X | Y] + b\mathbb{E}[Z | Y]. \end{aligned}$$

б) Нека X е дискретна (ще го докажем само в този случай, макар и да е вярно и ако не е дискретна)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X | Y] = \sum_j \underbrace{\mathbb{E}[X | Y = y_j] 1_{A_j}}_{\mathbb{E}[X | Y = y_j]} = \sum_j x_i \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) =$$

$$\stackrel{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_j \frac{\mathbb{P}(X = x_i) \cancel{\mathbb{P}(Y = y_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(Y = y_j)}} = \underbrace{\sum_j \mathbb{E}1_{A_j}}_{\text{пълна група от събития}} = \mathbb{E}X.$$

в) $\mathbb{E}[X | Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}[g(Y)1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = S,$

имаме, че $g(Y)1_{A_j} = g(Y) \cdot 1_{\{Y=y_j\}} = g(y_j)1_{\{Y=y_j\}}$

$$\Rightarrow S = \sum_j \frac{\mathbb{E}[g(y_j)1_{A_j}]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = \sum_j g(y_j) \frac{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = g(Y) = X.$$

г) Нека X е дискретна.

$$\mathbb{E}[X | Y] = \sum_j \mathbb{E}[X | Y = y_j] 1_{A_j}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}\left[\sum_j \mathbb{E}[X | Y = y_j] 1_{A_j}\right] = \sum_j \mathbb{E}[X | Y = y_j] \mathbb{E} 1_{A_j} =$$

$$= \sum_j \mathbb{E}[X | Y = y_j] \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_j \frac{\mathbb{E} X 1_{A_j}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}} \cancel{\mathbb{P}(A_j)} = \mathbb{E} \sum_j X 1_{A_j} = \mathbb{E} X \underbrace{\sum_j 1_{A_j}}_{=1} = \mathbb{E} X.$$

д) \oplus Имаме следния модел:

В даден магазин влизат клиенти, като знаем, че мъжете закупуват нещо с вероятност $1/3$, а жените с вероятност $2/3$.

$$X = \begin{cases} 1, & \mathbb{P}(Y) \\ 0, & \mathbb{P}(Y) \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{мъж (вероятност } 1/2) \\ \frac{2}{3}, & \text{жена (вероятност } 1/2) \end{cases}$$

закупува или не

$$X = Z_1 \cdot 1_{\{Y=\frac{1}{3}\}} + Z_2 \cdot 1_{\{Y=\frac{2}{3}\}}, \text{ където } Z_1 \in \text{Ber}\left(\frac{1}{3}\right), \text{ а } Z_2 \in \text{Ber}\left(\frac{2}{3}\right).$$

$$X = f(Z_1, Z_2, Y) = \begin{cases} Z_1, & Y = \frac{1}{3} \\ Z_2, & Y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X &= \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}\left[X | Y = \frac{1}{3}\right] \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{3}\right) + \mathbb{E}\left[X | Y = \frac{2}{3}\right] \mathbb{P}\left(Y = \frac{2}{3}\right) = \\ &= \mathbb{E}\left[Z_1 | Y = \frac{1}{3}\right] \times \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\substack{\text{мъж или} \\ \text{жена}}} \times \mathbb{E}\left[Z_2 | Y = \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2} (\mathbb{E} Z_1 + \mathbb{E} Z_2) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\oplus U = (X_j)_{j \geq 1}$, X_j са независими една от друга случайни величини и $X_j \in \text{Ber}(p)$ (хвърляне на нечестна монета с вероятност p за ези и q за тура)

Нека $N \in \text{Ge}(r)$ и N не зависи от U . Търсим $\mathbb{E} \sum_{j=1}^{N+1} X_j$.

$$f(U, N) = \sum_{j=1}^{n+1} X_j, \text{ ако } N = n. \text{ Тогава}$$

$$\mathbb{E} \sum_{j=1}^{N+1} X_j = \mathbb{E} [f(U, N)] = \mathbb{E} [\mathbb{E} f(U, N) | N] = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} [f(U, N) | N = n] 1_{N=n} =$$

$$= \mathbb{E} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} [f(U, n)] 1_{N=n} \right] = \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\mathbb{E} \sum_{j=1}^{n+1} X_j \right] 1_{\{N=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{n+1} X_j \cdot \mathbb{E} 1_{N=n} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{n+1} X_j \cdot \mathbb{P}(N = n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)p(1-r)^n r = pr \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(1-r)^n = T$$

$$\left[\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{1+x} \right) \Big|_{|x| \leq 1} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \right]$$

$$\Rightarrow T \stackrel{x=1-r}{=} pr \frac{1}{(1-(1-r))^2} = pr \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{p}{r}.$$

Условни разпределения

Нека X и Y са дискретни случайни величини. Тогава под разпределение на X при условие $Y = y_j$ се разбира следната таблица:

$X Y = y_j$...	x_i	...
\mathbb{P}	...	$\mathbb{P}(X = x_i Y = y_j)$...

$$\sum_j \mathbb{P}(X = x_i | Y = y_j) = 1, \forall j$$

⊕ Хвърляме два зара (1,...,6). Нека X е броят шестици, а Y е броят единици. Търси се (X, Y) . За едно хвърляне може да имаме 0,1,2 шестици или единици.

$Y \backslash X$	$X = 0$	1	2	
$Y = 0$	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{36}$
	$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{25}{36}$	$\mathbb{P}(X = 1) = \frac{10}{36}$	$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{36}$	

Условно разпределение:

$X Y$	$X = 0$	1	2	
$Y = 0$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(X Y = i) = 1$
1	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	...
2	1	0	0	...

Ж. Полиномно разпределение

Имаме n - независими експеримента. Всеки експеримент има r възможни стойности с вероятност p_0, p_1, \dots, p_{r-1} и $p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1} = 1$. Тогава $(X_0, X_1, \dots, X_{r-1})$ са случайнит величини X_i - брой експерименти измежду n , които са върнали i за $0 \leq i \leq r - 1$.

Забележка: (X_0, \dots, X_{r-1}) вече не са независими!

$J = \mathbb{P}(X_0 = k_0, \dots, X_{r-1} = k_{r-1})$, където $k_0 + \dots + k_{r-1} = n$ и $k_i \in \mathbb{N}_0$

$$J = \binom{n}{k_0} p_0^{k_0} \binom{n - k_0}{k_1} p_1^{k_1} \dots \binom{n - k_0 - k_1 - \dots - k_{r-2}}{k_{r-1}} p_{r-1}^{k_{r-1}}.$$