Задача 8.21. Да се докаже, че вероятността за броя на падналите се шестици при хвърляне на стандартен зар n пъти да е между $\frac{1}{6}n - \sqrt{n}$ и $\frac{1}{6}n + \sqrt{n}$ е не по-малка от $\frac{31}{36}$.

Доказателство:

За доказателството на задачата ще използваме неравенството на Чебишев, което ще докажем по-долу по два начина. Първо нека го формулираме:

Неравенство на Чебишев. Нека X е неотрицателна случайна величина. Тогава за всяко положително число c: $\mathbb{P}(X > c) \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[X]$.

I н/н. Нека C е множеството от стойности, за които $|X - \mathbb{E}[X]| > c$.
Тогава $C = \{|X - \mathbb{E}[X]| > c\} = \{(X - \mathbb{E}[X])^2 > c^2\}$

Искаме да ограничим вероятността за случването на събитието C отгоре.

$$\mathbb{D}[X] \overset{def.}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 \times 1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 \times 1_{\{C\}} + \underbrace{\mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 \times 1_{\{\overline{C}\}}}_{\geq 0} \geq$$

$\geq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}[X])^2 \times 1_A \geq a^2\mathbb{E}1_{\{C\}} = a^2\mathbb{P}(A)$. Следователно $\mathbb{P}(C) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{c^2}$.

Т.е. $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| > c) = \mathbb{P}(\mathbb{E}[X] - c < X < \mathbb{E}[X] + c) \leq \frac{\mathbb{D}[X]}{c^2}$.

II н/н. Тъй като X е неотрицателна,

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \,\mathrm{d}\, F_X(x) \geq \int_0^\infty x \,\mathrm{d}\, F_X(x) \geq c\int_c^\infty \mathrm{d}\, F_X(x) = c\mathbb{P}(X > c).$$

Сега обратно към задачата.

Нека $X_i = \{$пада се 6-ца при хвърляне на $i^{\text{-тия}}$ зар$\}$, $i = \overline{1,n}$ и $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Очевидно

$X_i \in Ber\left(p = \frac{1}{6}\right)$ и $S_n \in Bin\left(n, p = \frac{1}{6}\right)$, тъй като брои успехите в

бернулиево разпределени случайни величини. От това, че бернулиевите експерименти са независими и еднакво разпределени със средно $\mu = \mathbb{E}\left[X_1\right] = p = \frac{1}{6}$ и

$\sigma^2 = \mathbb{D}\left[X_1\right] = p(1-p) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{5}{36}$, то от ЦГТ може да направим следното приближение (считаме, че $n >> 30$ е достатъчно голямо):

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1), \text{ т.е. } \frac{S_n - n \times \frac{1}{6}}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1)$$

Следователно,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{1}{6}n - \sqrt{n} \le S_n \le \frac{1}{6}n + \sqrt{n}\right) &= \mathbb{P}\left(-\sqrt{n} \le S_n - \frac{1}{6}n \le \sqrt{n}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}} \le \frac{S_n - \frac{1}{6}n}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}} \le \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n \times \frac{5}{36}}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(-\frac{6}{\sqrt{5}} \le \mathcal{N}(0,1) \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(|Z - \underbrace{\mathbb{E}[Z]}_{=0}| \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = \\
&= \mathbb{P}\left(|Z| \le \frac{6}{\sqrt{5}}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(|Z| > \frac{6}{\sqrt{5}}\right) \overset{\substack{\text{неравенство} \\ \text{на Чебишев}}}{\ge} \\
&= \ge 1 - \frac{\mathbb{D}[Z]}{\left(\frac{6}{\sqrt{5}}\right)^2} = 1 - \frac{5}{36} \times 1 = \frac{31}{36}.
\end{aligned}
$$

$\square$