СЕМ, лекция 7 (2020-11-12)

Теорема (**Поасон / преговор**) Нека $X_n \in Bin(n,p)$, където $p_n = \dfrac{\lambda}{n} + \dfrac{V_n}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$ $\left(\text{т.е. } \dfrac{V_n}{n} \text{ клони по-бързо от } \dfrac{\lambda}{n} \text{ към } 0\right)$. Тогава за $\forall k \geq 0$ е вярно, че $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = \mathbb{P}(X=k)$, където $X \in Pois(\lambda)$.

$\oplus$ При $n \geq 100$ и $np \leq 20$ може да считаме, че $\mathbb{P}(X_n = k) \approx \mathbb{P}(X=k)$, където $X \in Pois(\lambda)$ и $\lambda = np$.

Нека например $n = 1000$ души се завръщат в България за някакъв период от време и вероятността за всеки един от тях да внесе някакъв вирус е $p = 0.001$. Искаме да приближим относително добре вероятността да влязат точно k на брой заразени.

$$\tilde{X} \in Bin\left(n = 1000, p = \frac{1}{1000}\right)$$

$$\mathbb{P}(\tilde{X} = 3) = \binom{1000}{3}\left(\frac{1}{1000}\right)^3\left(\frac{999}{1000}\right)^{997}$$

$$\lambda = np = 1 \leq 20,\ n = 1000 \geq 100 \Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{X} = 3) \approx \frac{1}{3!}\,.\,e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx \frac{1}{6}\,.\,\frac{1}{2.7182...}$$

Доказателство: $X_n \in Bin(n,p_n)$, тогава $g_{X_n} = (1 - p_n + p_n s)^n$. Ако $g_{X_n}(s) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g_X(s)$, където $g_X(s) = e^{-\lambda}\,.\,e^{\lambda s}$, то може да заключим искания резултат, тъй като $e^{-\lambda}\,.\,e^{\lambda s}$ е пораждаща функция на $X \in Pois(\lambda)$.

От $g_{X_n}(s) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} g_X(s) \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = k) = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \forall k \geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} g_{X_n}(s) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n} - \frac{V_n}{n} + \underbrace{\frac{\lambda}{n}s + \frac{V_n}{n}s}_{<O\left(\frac{1}{n}\right)}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{\lambda}{n}(1-s)\right)^n = e^{-\lambda(1-s)} = e^{\lambda s}e^{-\lambda}$$

E. Хипергеометрично разпределение

Имаме N обекта, от които M са маркирани $(0 \leq M \leq N)$. Избират се n обекта и случайната величина X е броя маркирани измежду тези N $(n \leq N)$. Тогава казваме, че X е разпределено хипергеометрично с параметри N, M и n и бележим $X \in HG(N, M, n)$.

<u>Твърдение</u>: Нека $X \in HG(N, M, n)$. Тогава:

а) $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$, като $\max\left(0, n - (N - M)\right) \le k \le \min(n, M)$

б) $\mathbb{E}X = n \,.\, \dfrac{M}{N}$, $DX = n \,.\, \dfrac{M}{N} \,.\, \dfrac{N-M}{N} \,.\, \dfrac{N-n}{N-1}$.

<u>Доказателство</u>:

а) $\mathbb{P}(X = k) = \dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$.

б)

$$\underbrace{\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_\ \overset{i}{\_}\ \_\ \_}_{n}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_}_{N}$$

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, където $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ако на } i\text{-тата позиция } \textbf{има} \text{ маркиран обект} \\ 0, & \text{ако на } i\text{-тата позиция } \textbf{няма} \text{ маркиран обект} \end{cases}$

X_i е бернулиево разпределено: $X_i \in Ber(p_i)$. $p_i = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{\binom{N-1}{M-1}}{\binom{N}{M}} = \dfrac{M}{N}$.

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_i = n \,.\, \frac{M}{N}.$$

$\oplus$ $X_i \in Ber(p)$ - поведението на i-тия клиент в даден магазин (купува или не)

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, $X \in Bin(n, p)$ - броя на извършилите покупка клиенти от първите n клиента.

$Y = \min\left\{ \sum_{j=1}^{n} X_j = 1 \right\} - 1 \in Ge(p)$ - броя на не извършили покупка клиенти, до идването на първия извършил покупка клиент.

$Z = \min \left\{ \sum_{j=1}^{n} X_j = r \right\} - r \in NB(r, p)$ - броя на не извършили покупка клиенти, до идването на r-тия извършил покупка клиент.

Съвместно разпределение на дискретни случайни величини

Нека X, Y са дискретни случайни величини. Интересуваме се от (X, Y).
Дефиниция. Нека (X, Y) са две дискретни случайни величини. Тогава таблицата по-долу се нарича съвместно разпределение на X и Y:

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$	
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{n1}	$\cdots$	$\sum_i p_{i1}$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{n2}	$\cdots$	$\sum_i p_{i2}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
y_k	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	p_{nk}	$\cdots$	$\sum_i p_{ik}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	
	$\sum_j p_{1j}$	$\sum_j p_{2j}$		$\sum_j p_{nj}$		

Където $0 \leq p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i;\ Y = y_j)$, за $\forall i, j \in$ Table Indexes. $\sum_{i,j} p_{ij} = 1$.

Маргинално разпределение на X:

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
	$\sum_j p_{1j}$	$\sum_j p_{2j}$	...	$\sum_j p_{nj}$	...

Разпределенията само на X или само на Y се наричат маргинални разпределения.

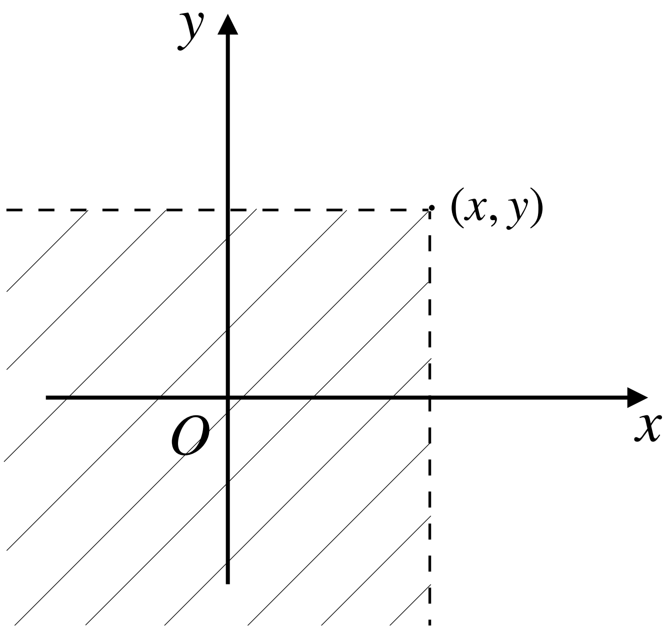
$\oplus$ Хвърляме два зара $(1,...,6)$. Нека X е броят шестици, а Y е броят единици. Търси се (X, Y). За едно хвърляне може да имаме $0,1,2$ шестици или единици.

$Y \backslash X$	0	1	2	
0	$\left(\frac{4}{6}\right)^2$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6}$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	$\frac{25}{36}$
1	$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6}$	$\binom{2}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	0	$\frac{10}{36}$
2	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$	0	0	$\frac{1}{36}$
	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	$1 \backslash 1$

Дефиниция: (**Функция на разпределение на случайни величини**) Нека (X, Y) се състои от *произволни* случайни величини. Тогава
$F_{XY}(x, y) = \mathbb{P}(X < x \cap Y < y) = \mathbb{P}(X < x;\ Y < y)$ дефинирана за $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ се нарича функция на разпределение.

$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty)$

$F_Y = F_{XY}(\infty, y)$



Дефиниция: (**Независимост** $\perp\!\!\!\perp$) Произволни случайни величини X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$) $\Leftrightarrow$
$F_{XY}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) = F_{XY}(x, \infty)F_{XY}(\infty, y), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ковариация на X и Y

Линейна зависимост $Y = aX + b$.
Показател за това до колко имаме линейна зависимост между произволни случайни величини X и Y е ковариацията.

Дефиниция: (**Ковариация**) Нека X и Y са случайни величини с $DX < \infty$ и $DY < \infty$. Тогава $cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right]$ се нарича ковариация.

Твърдение:
а) $cov(X, Y) = \mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}$, където $\tilde{X} = X - \mathbb{E}X,\ \tilde{Y} = Y - \mathbb{E}Y$
б) $cov(X, Y) = \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$

Доказателство:

а) $cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(\underbrace{X - \mathbb{E}X}_{\tilde{X}})(\underbrace{Y - \mathbb{E}Y}_{\tilde{Y}})\right] = \mathbb{E}\tilde{X}\tilde{Y}$.

б)

$$cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right] = \mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}XY) \overset{\substack{\text{лин.}\\ \text{функц.}\\ \mathbb{E}}}{=} \mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$$

Следствие: Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $cov(X, Y) = 0$
Доказателство: Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}XY - \mathbb{E}X\mathbb{E}Y}_{cov(X,Y)} = 0$.

$X \longmapsto 10X,\ Y \longmapsto 10Y\ \Rightarrow \tilde{X} \longmapsto 10\tilde{X},\ \tilde{Y} \longmapsto 10\tilde{Y}$
$\Rightarrow cov(10X, 10Y) = 100 \times cov(X, Y)$.

Дефиниция: (**Корелация**) Нека X, Y са случайни величини и $DX < \infty$ и $DY < \infty$. Тогава $\rho(X, Y) = \dfrac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ се нарича коефициент на корелация между X и Y.

Целта на корелацията е да мери някаква степен на линейност между X и Y.

Твърдение: Нека X и Y са случайни величини с крайни дисперсии и нека $\overline{X} = \dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}$ и $\overline{Y} = \dfrac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}}$. Тогава $\rho(X, Y) = \mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y}$ и
$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\overline{Y} = 0,\ D\overline{X} = \mathbb{E}\overline{X}^2 = D\overline{Y} = \mathbb{E}\overline{Y}^2 = 1$.

Доказателство:

$$\rho(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{\left[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right]}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \mathbb{E}\left[\underbrace{\left(\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}}\right)}_{=\overline{X}}\underbrace{\left(\frac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}}\right)}_{=\overline{Y}}\right] = \mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y}$$

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mathbb{E}\frac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} = \frac{1}{\sqrt{DX}}\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X) = 0$$

$D\overline{X} = D\dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} = \dfrac{1}{(\sqrt{DX})^2} D(X - \underbrace{\mathbb{E}X}_{const.}) = \dfrac{DX}{DX} = 1$, тъй като $D(X - c) = DX$,

защото $\mathbb{E}\big(X - c - \mathbb{E}(X-c)\big)^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

$D\overline{X}^2 = D\overline{X} + (\underbrace{\mathbb{E}\overline{X}}_{=0})^2 = D\overline{X} = 1$.

Твърдение: Нека X и Y са случайни величини с крайни дисперсии. Тогава:

а) $|\rho(X,Y)| \leq 1$

б) $|\rho(X,Y)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b : a, b \in \mathbb{R}\ \&\ Y = aX + b$

(Колкото е по-голям коефициента на корелация, толкова по-добра е линейната зависимост между X и Y)

<u>Доказателство</u>:

а) $(\overline{X} - \overline{Y})^2$ е неотрицателно случайна величина

$\Rightarrow 0 \leq \mathbb{E}(\overline{X} - \overline{Y})^2 = \mathbb{E}\overline{X}^2 + \mathbb{E}\overline{Y}^2 - 2\mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = 2\left(1 - \rho(X,Y)\right) \Rightarrow \rho(X,Y) \leq 1$

Аналогично,

$0 \leq \mathbb{E}(\overline{X} + \overline{Y})^2 = \mathbb{E}\overline{X}^2 + \mathbb{E}\overline{Y}^2 + 2\mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = 2\big(1 + \rho(X,Y)\big) \Rightarrow -1 \leq \rho(X,Y)$

б) $Y = aX + b \Leftrightarrow Y = \mathbb{E}X = a(X - \mathbb{E}X) + a\mathbb{E}X + b - \mathbb{E}Y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{Y - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}} = \underbrace{\dfrac{a}{\sqrt{DY}}\sqrt{DX}}_{v}\ \dfrac{X - \mathbb{E}X}{\sqrt{DX}} + \underbrace{\dfrac{a\mathbb{E}X + b - \mathbb{E}Y}{\sqrt{DY}}}_{w} \Leftrightarrow \overline{Y} = v\overline{X} + w$

$0 = \mathbb{E}\overline{Y} = \mathbb{E}(v\overline{X} + w) = v\underbrace{\mathbb{E}\overline{X}}_{=0} + w \Rightarrow w = 0 \Rightarrow \overline{Y} = v\overline{X}$

$D\overline{Y} = v^2 D\overline{X} \Rightarrow v^2 = 1$ или $v = \pm 1$.

$Y = aX + b \Leftrightarrow \overline{Y} = v\overline{X}$ и $v^2 = 1$

б) Нека $Y = aX + b$ или $\overline{Y} = v\overline{X}$. Тогава

$\rho(X,Y) \overset{\text{твърдение}}{=} \mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = v\mathbb{E}\overline{X}^2 = v \Rightarrow \rho(X,Y) = \pm 1$.

Нека $|\rho(X,Y)| = 1$. Тогава $|\mathbb{E}(\overline{X}\,\overline{Y})| = 1$. Да допуснем, че $\mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = 1$ (аналогично и за другия случай: $\mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = -1$). Тогава

$\mathbb{E}(\overline{X} - \overline{Y})^2 = \mathbb{E}\overline{X}^2 + \mathbb{E}\overline{Y}^2 - 2\mathbb{E}\overline{X}\,\overline{Y} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\overline{X} - \overline{Y}^2) = 0 \Rightarrow \overline{X} = \overline{Y}$, защото и $D(\overline{X} - \overline{Y}) = 0$.