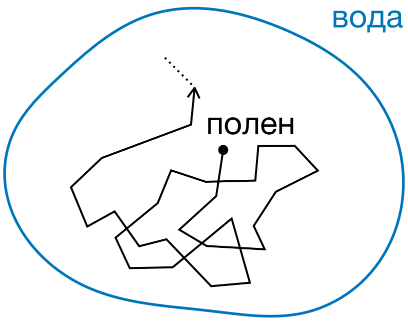
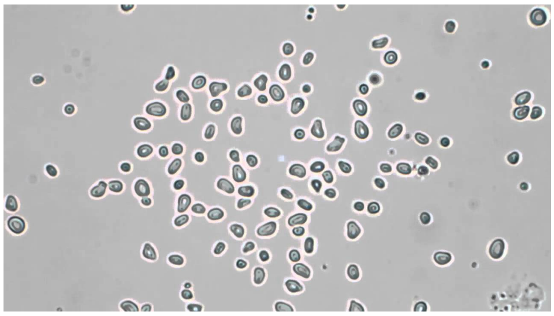
СЕМ, лекция 1
(2020-10-01)

През 1827 г. Робърт Браун наблюдава под микроскоп частици полен във вода и забелязва непрекъснато и хаотично движение. Той търси причината за това движение, което по-късно е наречено „брауново движение“.





Допускането, че частицата има вътрешна енергия, която поражда движението, е било погрешно. Браун избира полен, защото той е бил лесно наблюдаем.

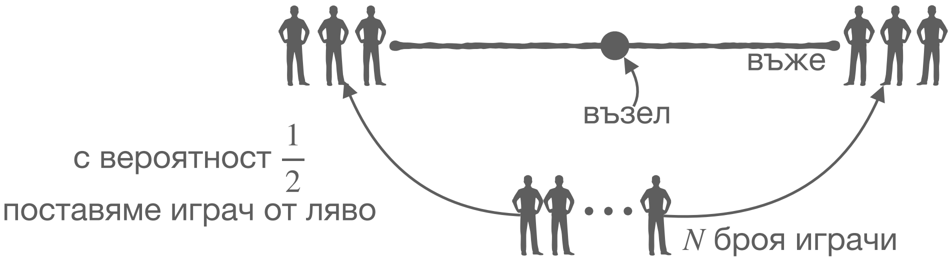
През 1905 г. Алберт Айнщайн публикува статия, в която обяснява истинската причина за това движение. Благодарение на кинетичната теория на молекулите, той показва, че частицата, поставена във вода, бива удряна от водните молекули. Във всеки един момент от време, частицата бива удряна от множество молекули във всевъзможни посоки, което предизвиква рязка смяна на посоката и на движението ѝ, в случай че сме взели достатъчно малка частица. Всичко това се случва, тъй като огромно количество молекули удрят полена едновременно във всеки един момент и в този момент, резултатната сила в очакване е нула (което означава, че очакваното движение е нулево), но реализираната резултатна сила е в някаква посока и частицата се движи в нея. Това движение е универсално, тъй като то е резултат от всевъзможна колекция от движения.

Френският физик Жан Батист Перен (1870–1942) успява с помощта на това брауново движение да определи броя на Авогадро (Числото на Авогадро (означавано като N_A) е най-важната константа, свързваща микро- и макросвета. То е кръстено на италиянския учен Амедео Авогадро (1776–1856), който формулира закона на Авогадро през 1811 г., който гласи, че еднаквите обеми газове при еднакви температура и налягане съдържат еднакъв брой молекули. Това предостави теоретичната основа за съществуването на константа). Това постижение му носи Нобелова награда за физика през 1926 г.

Чисто физически е ясно, че движението не е съвсем случайно, тъй като и молекулите имат своите скорости и посоки на движение. Оказва се, че ако третираме молекулите като някакви случайни частици и приближим този процес, ние може да получим едно много добро приближение на истинското движение. То разбира се няма да е реалното брауново движение в истинския смисъл на думата, но то ще даде толкова добро приближение, че ние ще може да приближим други константни величини и куп други неща, на база на това приближение.

<u>Примери</u>:

⊕ Дърпане на въже



Средният брой хора, които ще се разполагат отляво и отдясно ще е $\frac{N}{2}$. Ако допуснем, че всеки човек дърпа въжето с еднаква сила, то в очакване възела ще е неподвижен, но реално той ще се движи във всеки един момент.

⊕ Системата за застрахователни бонуси/малуси

Това е известната система за застраховки, при която шофьор, който нарушава правилника за движение по-често се застрахова с по-големи суми, а такъв, който го нарушава по-рядко – с по-малки суми. Примерна система:

Брой нарушения		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Коефициент		0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.6

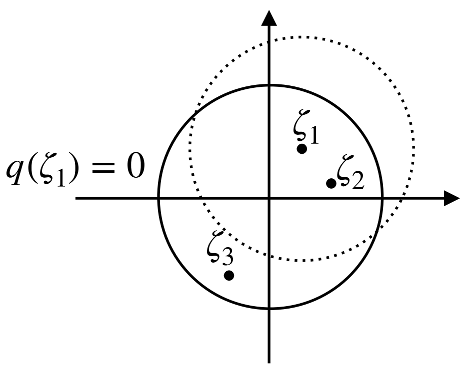
Идеята е, ако например застраховката за дадено нарушение е 200 лв., шофьор, който е правел до 3 нарушения да заплаща 0.9 x 200 лв., такъв който е правел до 9 нарушения да заплаща 1.5 x 200 лв. и т.н. По-този начин ще се стимулират водачите да правят по-малко нарушения или по-точно да ги ограничават колкото се може повече.

Казусът, който възниква, се отнася до застрахователите, а именно: как да се изчислят тези коефициенти така, ч че очакваната стойност на платените глоби да е същата, т.е

$$P = \mathbb{E}\left[\frac{f_{\text{статично}}(X_n)}{f_{\text{плаващо}}(X_n)}\right] \approx 1,$$

където X_n цената, която заплаща даден водач с n нарушения.

През 1959 г., академик Сендов формулира следната хипотеза: Ако $q(\zeta)$ е полином и знаем, че нулите на полинома са в единичният кръг,



то ако вземем окръжност с радиус 1 и център която и да е нула на полинома (например ζ_1 на фигурата по-горе), то в този единичен кръг (окръжността с пунктир) ще има поне една нула ζ на производната, т.е. $\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\left[q(\zeta)\right] = 0.$

Професор Терънс Тао доказва през 2020 г. тази хипотеза за всички полиноми от достатъчно голяма степен $n \geq n_0$ (т.е. останалите полиноми са изброимо много). Неговото доказателство включва много вероятностни аргументи. Доказателство за всички n все още не е открито.

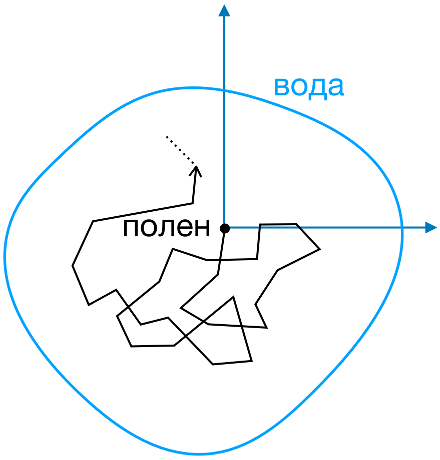
Дефиниция (Случаен експеримент). Случаен експеримент наричаме опит или експеримент, при който не може предварително да определим кой от възможните изходи ще се сбъдне. Всеки възможен елементарен изход ще означаваме с ω и ще наричаме **елементарно събитие**.

Дефиниция. С Ω ще означаваме **множеството от всички елементарни събития** на даден случаен експеримент.

$\oplus$ $\Omega = \{$ези, тура$\}$; $\Omega = \{0, 1\}$

$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\omega_5 = \{5\}$

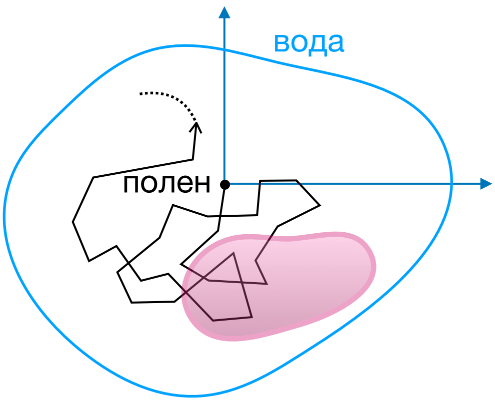
$\oplus$ $\Omega = \{$всички криви в равнината $f : f(0) = (0, 0)\}$



$\oplus$ Тото „6 от 49". Броят на всички елементарни изходи е равен на $\dbinom{49}{6} = 13{,}983{,}816$, тоест $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13,983,816}\}$

$\oplus$ $\Omega = \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ – времена на живот на CPU. Например $\omega = 23.5$ (23 месеца и половина)

Дефиниция (събитие). Ще наричаме всяко подмножество $A \subseteq \Omega$.
$\oplus$ $\Omega = \{$клиенти$\}$, $A = \{$клиентите, които са жени$\}$
$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, признакът по групиране е нечетност
$\oplus$ $A = \{$всички криви, чиито траектории достигат розовия регион$\}$



1.1 Операции с множества

- $A \subseteq B \Leftrightarrow (\omega \in A \Rightarrow \omega \in B)$
- $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ и $B \subseteq A)$

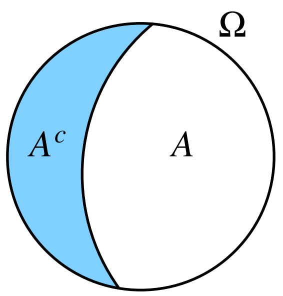
Дефиниция (обединение). Нека $A, B \subseteq \Omega$. Под обединението на събитията $A \cup B$ разбираме всички $\omega \in A$ **или** $\omega \in B$.

$\oplus$
$A = \{$хора между 20 и 30 г.$\}$
$B = \{$гласували за партия X$\}$
$A \cup B = \{$хора или между 20 и 30 г. ИЛИ гласували за партия X$\}$

Дефиниция (сечение). Нека $A, B \subseteq \Omega$. Под сечението на събитията $A \cap B$ разбираме всички $\omega \in A$ **и** $\omega \in B$.

$\oplus$
$A = \{$хора между 20 и 30 г.$\}$
$B = \{$гласували за партия X$\}$
$A \cap B = \{$хора между 20 и 30 г. И гласували за партия X$\}$

Дефиниция (отрицание). Нека $A \subseteq \Omega$. Под допълнението на събитието A разбираме всички $\omega \notin A$ и бележим с A^c (понякога ще се случва да го бележим и с $\overline{A}$).



$\oplus$
$A^c = \overline{A} = \{$всички хора, които са по-млади от 20 г. и по-възрастни от 30 г.$\}$

Свойства:

а) (комутативност) $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$
б) (асоциативност) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
б) (дистрибутивност) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
г) (Закони на **де Морган**) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за някое (поне едно) } i\}, \text{ където } A_i \in \Omega,\ \forall i \geq 1$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за всяко } i\}, \text{ където } A_i \in \Omega,\ \forall i \geq 1$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c \quad \text{и} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c = \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c.$$

Дефиниция (σ-алгебра). Нека Ω е съвкупност от елементарни събития. $\mathscr{A}$ е колекция от събития/подмножества на Ω. Наричаме $\mathscr{A}$ σ-алгебра, ако:

а) $\emptyset \in \mathscr{A}$;
б) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$;
в) $A_i \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1 : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

(Принадлежност на празното множество и затвореност относно допълнение и обединение на крайно или безкрайно обединение на множества от $\mathscr{A}$. Оказва се, че това е достатъчно (виж следствието по-долу).)

Ако премахнем „безкрайно“ обединения и оставим само „крайно“, то ще останем само с алгебра без σ.

Следствие: Ако $\mathscr{A}$ е σ-алгебра, то:
а) $\Omega \in \mathscr{A}$
б) $A_i \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$ (тоест имаме и затвореност относно крайно/безкрайно сечение)

Доказателство.
а) $\emptyset^c = \Omega$, но $\emptyset \in \mathscr{A} \Rightarrow \Omega \in \mathscr{A}$;
б) $A_i \in \mathscr{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1 \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathscr{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^c\right)^c \in \mathscr{A} \overset{\text{де Морган}}{\Rightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

$\oplus$ $\Omega = \{0,1\}$
$\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
$\mathscr{A}_2 = 2^\Omega = \big\{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\big\}$

$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, $|\Omega| = n$
$\mathscr{A} = 2^\Omega \Rightarrow \mathscr{A}$ има 2^n елемента.

⊕ „6 от 49“. $\Omega = \left\{ \omega_1, \ldots, \omega_{\binom{49}{6}} \right\}$. $\mathscr{A} = 2^n = 2^{13{,}983{,}816}$.

Дефиниция (Борелова сигма алгебра). Ако $\mathscr{B}$ е произволна колекция от събития от Ω, то $\sigma(\mathscr{B})$ е най-малката/най-грануларната σ-алгебра, такава, че $\mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$.

$\sigma(\mathscr{B}) = \bigcap\limits_{\substack{\sigma_T \text{ е } \sigma\text{-алгебра} \\ \mathscr{B} \subseteq \sigma_T}} \sigma_T$ върху $\sigma(\mathscr{B})$ може да се дефинира понятието дължина (мярка на Лебег).

$\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$; $\mathscr{B} = \{$всички отворени интервали$\}$

(a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$

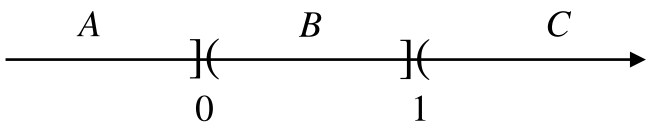
$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{B})$ се нарича борелова σ-алгебра.

$x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \overset{?}{\in} \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Отговорът е „ДА“, тъй като може да представим точката $\{x\}$ по следния начин:

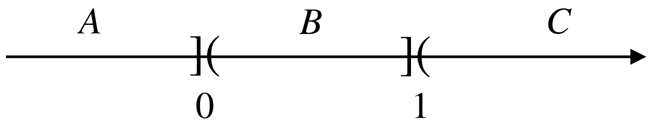
$\{x\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \left(x - \dfrac{1}{i}, x + \dfrac{1}{i} \right) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Също така $[a, b) = \{a\} \cup (a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

$[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ и т.н.

Естествено, ако ни интересува само трихотомията,



то може да се ограничим само до σ-алгебрата
$\mathscr{A} = \{\varnothing, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B, B \cup C, C \cup A\}$, която има кардиналност $|\mathscr{A}| = 8$.
Дефиниция (Атом). Ако $\mathscr{A}$ е σ-алгебра, то $A \in \mathscr{A}$ се нарича атом, ако от $B \subseteq A$ и $B \in \mathscr{A} \Rightarrow B = \varnothing$, т.е. не съществува нетривиално подсъбитие на $\mathscr{A}$, което е част от σ-алгебрата.

⊕ 

$|\mathscr{A}| = 8$. Атомите на $\mathscr{A}$ са A, B, C.

⊕ За $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ атомите са $\{x\}$, т.е. всяка една точка от реалната права.

$\oplus$ $T = 10\ 001$ - брой тиражи на „6 от 49“. За всяко едно теглене имаме $\Omega_i = \left\{ \omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots, \omega_{\binom{49}{6}}^{(i)} \right\}, 1 \le i \le T$ шесторки, които се падат в i-тия тираж.

Формална конструкция: всяка една от всевъзможна шесторка от $\omega^{(1)}$.

$$\Omega = \bigotimes_{i=1}^{T} \Omega_i = \{(\omega^{(1)}, \omega^{(2)}, \ldots, \omega^{(T)})\}$$

$A = \{$паднали са се две еднакви наредени шесторки в T тиража$\}$

$A = \bigcup_{i=1}^{10\ 000} A_i$, където $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega^{(i)} = \omega^{i+1}\}$.

Задача за размисъл:

$\oplus$ Имаме два пощенски плика A и B, в които има съответно сумите a и b. Нямаме никаква априорна информация за сумите, а човека, който ги е поставил в пликовете знае, че $a < b$. Избираме случайно с вероятност $\frac{1}{2}$ и отваряме съответния плик. Виждаме сумата x в плика, който сме избрали ($x = a$ или $x = b$), но нямаме никаква информация за това дали останалата сума е по-голяма или по-малка. Човекът, който е сложил сумите в пликовете знае, но ние не. Дава ни се шанс, ако искаме, да си сменим плика. При пожелана смяна, ние със сигурност ще вземем сумата в новия плик, а ако откажем смяната ще останем със сумата от първоначално избрания плик. Да означим събитието $C = \{$печелим по-голямата сума $b\}$. Съществува ли такава стратегия, за която $\mathbb{P}(C) > \frac{1}{2}$? $\Big($тоест има ли стратегия, която ви позволява да спечелите по-голямата от двете суми, с вероятност строго по-голяма от $\frac{1}{2}\Big)$

Интуицията подвежда и се оказва, че има такава стратегия.