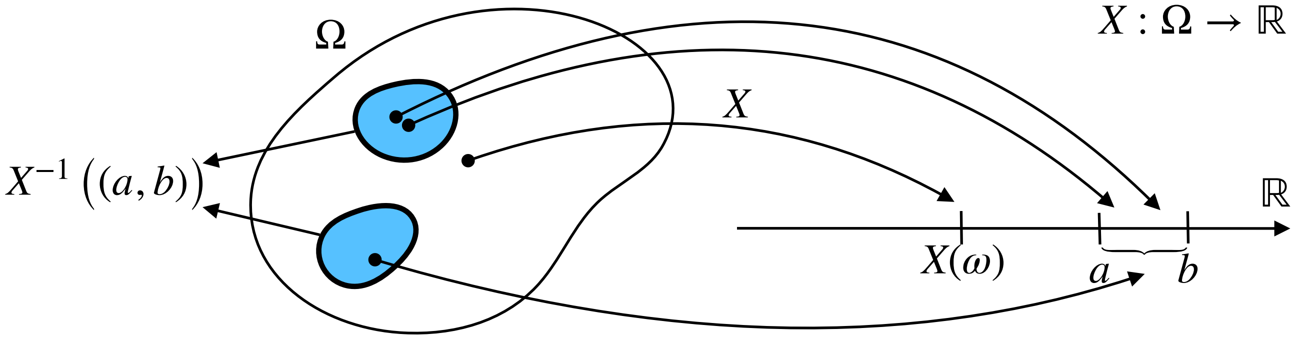
СЕМ, Л-04
(2020-10-22)

Случайни величини

$V = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ – вероятностно пространство.



Случайната величина X не е нито случайна, нито величина. Тя е грубо казано функция/изображение, което съпоставя на всяко елементарно събитие ω от Ω – някакво реално число.

За да бъде X случайна величина, тя трябва да удовлетворява някакви критерии.

Случайна величина (или още стохастична величина)**.** Нека е дадено вероятностно пространство $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Функцията $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича случайна величина, ако за всяко реално число $x \in \mathbb{R}$ прообразът на интервала $(-\infty, x]$ е събитие, тоест: $X^{-1}\left((-\infty, x]\right) \in \mathscr{A}$ или записано по друг начин: $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathscr{A}$.

Това условие се нарича измеримост на X спрямо σ-алгебрата $\mathscr{A}$. Тоест трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността X да е по-малко от x. **Резултатът е случаен**, защото изходът ω е случаен, но **самата функция** X **е детерминистична**. След като експериментът се случи, X приема една точно определена числова стойност.

Теорема (Свойства на случайните величини). Нека V е вероятностно пространство и X и Y са случайни величини $(X, Y : \Omega \to \mathbb{R})$. Тогава е в сила:

1. $aX \pm bY$ е случайна величина, $\forall a, b \in \mathbb{R}$
2. cX е случайна величина, $\forall c \in \mathbb{R}$ (частен случай на а) : $a = c$ и $b = 0$)
3. XY е случайна величина
4. ако $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, то $\dfrac{X}{Y}$ е случайна величина.

Случайните величини са функции, за които не може да знаем как действат навсякъде, тъй като това би било или твърде сложно или твърде скъпо, а в някои случаи може дори да не е ясно как да въведем пространството от елементарни събития Ω.

Дискретни случайни величини

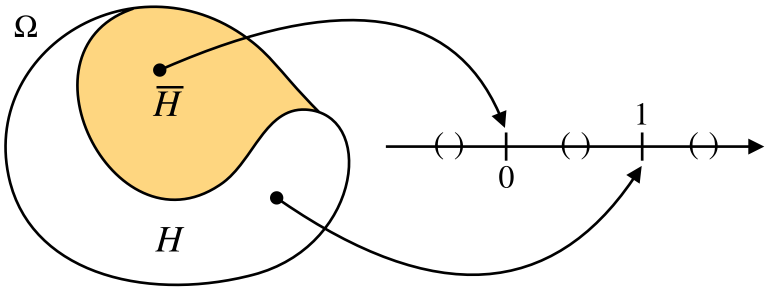
Дефиниция (Индикаторна функция). Нека $V = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $H \subseteq \mathscr{A}$. Тогава $\mathbf{1}_H$ се нарича индикаторна функция, ако

$$\mathbf{1}_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } \omega \in H \\ 0, & \text{ако } \omega \in \overline{H} \end{cases}. \text{ Грубо казано: } \mathbf{1}_H : \mathscr{A} \to \{0,1\}.$$

Лема. Нека $V = (\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и $H \in \mathscr{A}$. Тогава $\mathbf{1}_H : \mathscr{A} \to \{0,1\}$ е случайна величина.

Доказателство:

Ако $X(\omega) = \mathbf{1}_H(\omega)$, то $X^{-1}\left(\{0\}\right) = \overline{H}$, а $X^{-1}\left(\{1\}\right) = H$.



$$\forall a < b \text{ е вярно, че } X^{-1}(a,b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } 1 \notin (a,b) \text{ и } 0 \notin (a,b) \\ H, & \text{ако } 1 \in (a,b) \text{ и } 0 \notin (a,b) \\ \overline{H}, & \text{ако } 1 \notin (a,b) \text{ и } 0 \in (a,b) \\ \Omega, & \text{ако } 0 \in (a,b) \text{ и } 1 \in (a,b) \end{cases}$$

Който и интервал (a,b) да вземем, резултатът (или изходът) винаги ще принадлежи на нкой от възможните интервали: $\emptyset, \Omega, H$ и $\overline{H}$, които са σ алгебра. Тоест дефиницията е изпълнена (за всеки случай $X^{-1}\left((a,b)\right) \in \mathscr{A} \Rightarrow X = \mathbf{1}_H$ е сучайна величина). С това лемата е доказана.

Имаме две възможности: $\mathbb{P}(X=1) = p$ и $\mathbb{P}(X=0) = q = 1-p, p \in [0,1]$.

Нека $V_1 = (\Omega_1, \mathscr{A}_1, \mathbb{P}_1)$ е друго вероятностно пространство и $H_1 \subseteq \mathscr{A} : X_1 = \mathbf{1}_{H_1}$ е вероятността $\mathbb{P}(X_1 = 1) = p \Rightarrow$ вероятностно тези две случайни величини X и X_1 не са различими.

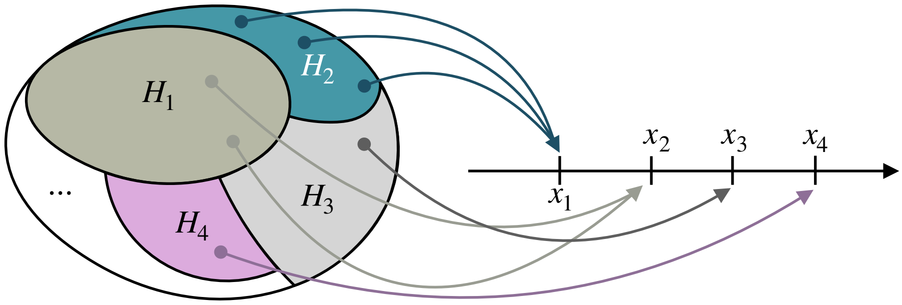
Означения (за удобство):

- $\overline{x}_n = (x_1, x_2, \ldots, x_n) -$ n различни числа
- $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots) -$ изброимо много различни числа

Дефиниция (Дискретна случайна величина). Нека $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство. Функцията $X : \Omega \to \mathbb{R}$ се нарича дискретна случайна величина, ако са изпълнени следните две условия:

1. Измеримост: За всяко реално число $x \in \mathbb{R}$, множеството $\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\}$ е събитие, тоест принадлежи на $\mathscr{A}$. Това позволява да се говори за вероятността $\mathbb{P}(X = x)$.
2. Дискретност: Съществува крайно или изброимо множество $S \subset \mathbb{R}$, такова че $\mathbb{P}(X \in S) = 1$. С други думи, X приема стойности само в едно изброимо множество с вероятност 1.

$$X(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i}(\omega) \times x_i$$



Дефиниция (Разпределение на дискретна случайна величина).
Нека $X = \sum_i 1_{H_i} x_i$ е дискретна случайна величина. Тогава таблицата

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

където $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i = \mathbb{P}(H_i)$ и $\sum_i p_i = 1$, се нарича разпределение на X.

⊕ Измерваме дните, в които дадено CPU работи и X случайната величина, която измерва броя на тези дни. Може да моделираме X по два начина:

- $X \in \mathbb{N}_0^+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- $X \in \{0, 1, 2, \ldots, 1000\}$

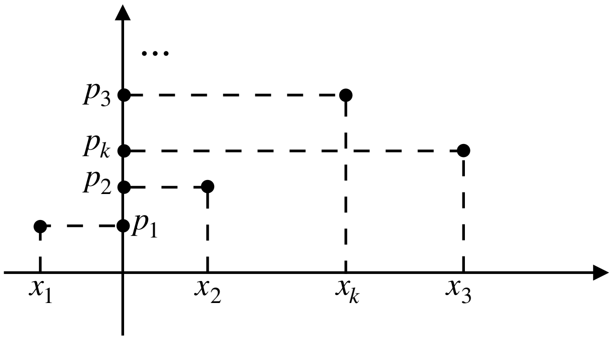
X	0	1	2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$$

X	0	1	$\cdots$	1000
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	$\cdots$	p_{1000}

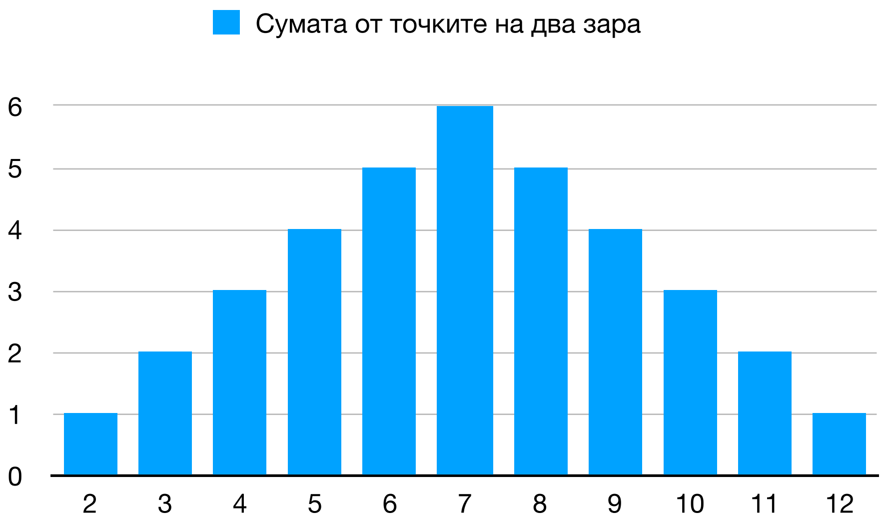
$$\sum_{i=0}^{1000} p_i = 1$$

Дефиниция (Хистограма). Графиката по-долу се нарича хистограма:



⊕ Хвърляме два зара. X и Y са случайните величини – точките от 1 до 6, съответно паднали се на горните страни при хвърлане на първия и втория зар. $Z = X + Y$ е случайната величина, която моделира сбора от тези точки.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$



Смяна на променливите на дискретни случайни величини

X – сл. вел., $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $Y = g(X)$ – искаме да знаем дали Y е случайна величина.

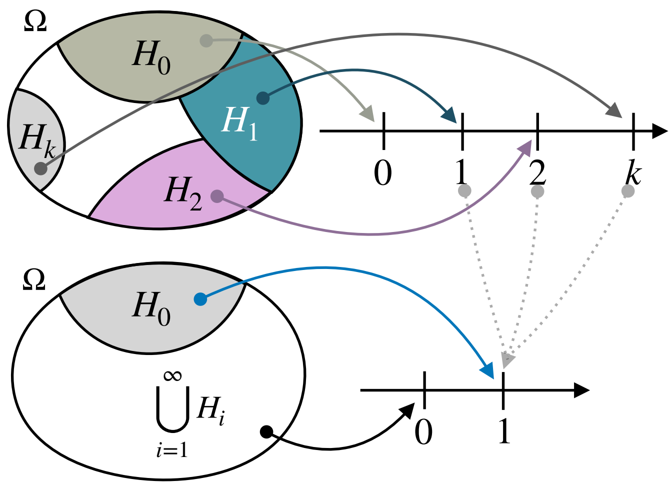
Ако $X = \sum_i \mathbf{1}_{H_i} x_i$, то $Y = \sum_i \mathbf{1}_{H_i} g(x_i)$ е случайна величина и ако положим $y_i = g(x_i)$, то $Y = \sum_i \mathbf{1}_{H_i} y_i$.

За $g(x_m) = g(x_k)$, $m \neq k$ ще получим повтаряемост на някои стойности, но това няма да е грешка, просто за удобство и икономичност може да ги обединим като $H_m \cup H_k$.

X	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$	$\cancel{y_k}$	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$	$p_m + p_k$	$\cdots$	$\cancel{p_k}$	$\cdots$

⊕ Имаме някакво CPU. $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{H_i} x_i$, където $H_i = \{CPU$ работи точно i дни$\}$

$Y = g(X)$, където $g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}.$



X	0	1	2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_0	p_1	p_2	$\cdots$

$Y = g(X)$	0	1
$\mathbb{P}$	p_0	$p_1 + p_2 + \dots$

X, Y – дискретни случайни величини, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Тогава $Z = g(X, Y)$ е дискретна случайна величина.

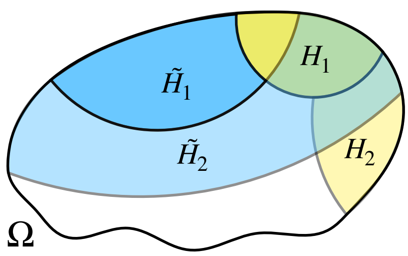
X	x_1	x_2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	$\cdots$

$\sum_i p_i = 1$

Y	y_1	y_2	$\cdots$
$\mathbb{P}$	q_1	q_2	$\cdots$

$\sum_i q_i = 1$

$$Z = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) \mathbf{1}_{\{X = x_i, Y = y_j\}}$$



$H_1 = \{X = x_1\};\ H_2 = \{X = x_2\};\ \dots$

$\tilde{H}_1 = \{Y = y_1\};\ \tilde{H}_2 = \{Y = y_2\};\ \dots$

$T_{ij} = H_i \cap \tilde{H}_j$

Независимост на дискретни случайни величини

Дефиниция (Независимост на дискретни сл. вел.). Нека X, Y са дискретни случайни величини във вероятностното пространство V. Тогава

$$\underbrace{X \perp\!\!\!\perp Y}_{X \text{ и } Y \text{ са независими}} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j;\ Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) \overset{def.}{=}$$

$$= \mathbb{P}(X = x_j) \times \mathbb{P}(Y = y_k),\ \forall j, k\ .$$

Независимост на n случайни величини

Случайните величини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са взаимно независими (или просто независими), ако за всякакъв избор на стойности $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ е изпълнено:

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = x_i).$$

Тоест:

$$p_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i).$$

$\oplus\ \Omega = \{(0, 0);\ (0, 1);\ (1, 0);\ (1, 1)\};\ \mathscr{A} = 2^{\Omega};$

$\mathbb{P}\left(\{0, 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\{0, 1\}\right) = \mathbb{P}\left(\{1, 0\}\right) = \mathbb{P}\left(\{1, 1\}\right) = \dfrac{1}{4}$ (имаме равномерна вероятност върху четирите елемента). Това е математическа конструкция на простия пример с хвърлянето на две монети.

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \underbrace{X(\omega)}_{\text{1-ва кордината}} = \omega(1)$. Например $X\left(\{0, 1\}\right) = 0$

$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad \underbrace{Y(\omega)}_{\text{2-ра кордината}} = \omega(2)$. Например $Y(\{0, 1\}) = 1$

Тоест, първата монета е „тура“, а втората монета – „ези“ (ако сме дефинирали събитието „ези“ с $1^{\text{-ца}}$ (за успех)).

X и Y са независими ($X \perp\!\!\!\perp Y$), тъй като $\mathbb{P}(X = i,\ Y = j) = \mathbb{P}(X = i) \times \mathbb{P}(Y = j)$, $\forall i, j \in \{0,1\}$.

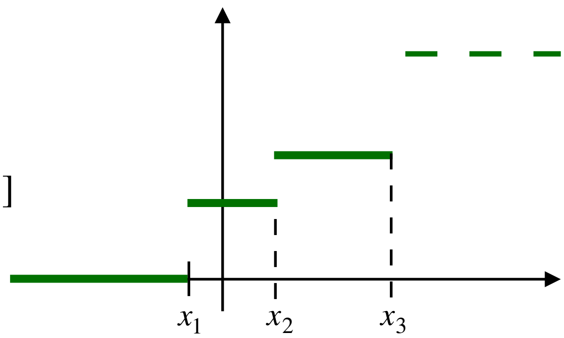
Дефиниция (Функция на разпределение на случайна величина). Нека X е сл. вел. във вероятностно пространство V. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x),\ \forall x \in (-\infty, \infty)$, се нарича функция на разпределение на X.

⊕

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$
$\mathbb{P}$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$

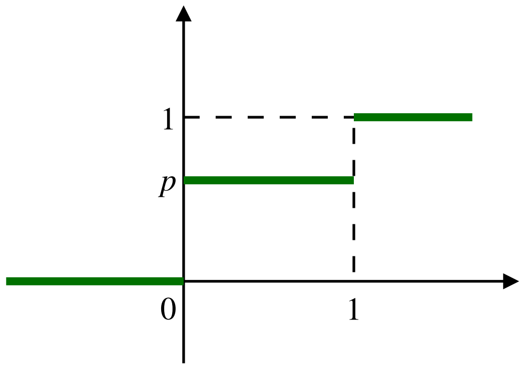
и $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$

$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \leq x_1 \\ p_1, & \text{ако } x \in (x_1, x_2] \\ p_1 + p_2, & \text{ако } x \in (x_2, x_3] \\ \cdots & \\ p_1 + \ldots + p_k, & \text{ако } x \in (x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

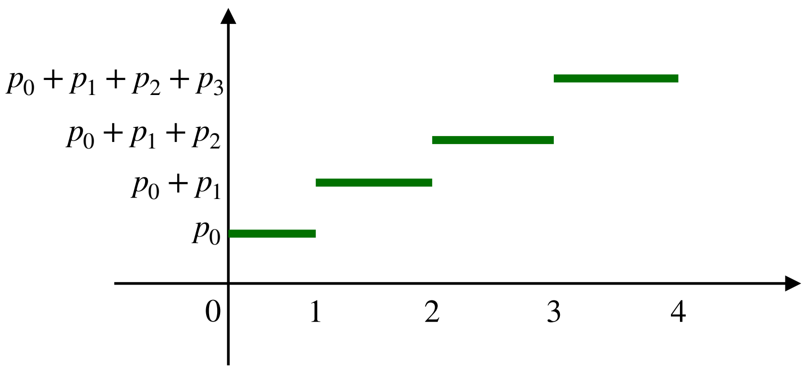


стъпаловидна (нарастваща функция)

⊕ $X = 1_H$



⊕ CPU



Свойства: $\lim\limits_{x\to\infty} F_X = 1, \quad \lim\limits_{x\to-\infty} F_X = 0.$

Дефиниция. Математическо очакване (за дискретни случайни величини)

Нека X е дискретна сл. вел. Ако $\sum\limits_i x_i p_i$ е добре деф. (тоест е крайна),

то $\mathbb{E}[X] = \underbrace{\mathbb{E}[X]}_{\substack{\text{съкратена}\\\text{форма}}} = \sum\limits_i x_i p_i = \sum\limits_i \underbrace{x_i}_{\substack{\text{възможна}\\\text{стойност на } X}} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x_i)}_{\substack{\text{вероятност за}\\\text{тази стойност } x_i}}$

е очакването на X.

Когато имаме краен брой стойности – тяхната сума ще е винаги добре дефинирана. Обаче, когато имаме изброимо много стойности, то тогава може сумата да не е крайна.

⊕ Ако X взема краен брой стоиности: $x_1, \dots, x_n$, то $\Sigma_{j=1}^n x_j p_j < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \Sigma_{j=1}^n x_j p_j$ винаги съществува.

⊕ Ако X е такава случайна величина, че $\mathbb{P}(X = x_j) = \dfrac{6}{\pi^2} \times \dfrac{1}{j^2}$, $j \geq 1$. Тогава

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = i) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1, \text{ тъй като } \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Но тази случайна величина няма очакаване, тъй като

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} i \times \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{i^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \frac{6}{\pi^2} \times \underbrace{(\text{хармоничния ред})}_{\text{не схожда}} = \infty.$$

Коментар. $f(a) = \sum_j (x_j - a^2) p_j$ е функция на a и тя се минимизира, когато $a = \mathbb{E}[X]$; $\min_{a \in \mathbb{R}} f(a) = f(\mathbb{E}[X])$. Тоест $\mathbb{E}[X]$ минимизира квадратичната грешка.

⊕ Ако имаме равномерно разпределение върху $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то тогава $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{n} x_j \times \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j = \overline{X}$, което е средно аритметичното на стойностите, които X може да приема.

Средно аритметичното е математическото очакване на равномерното разпределение върху дадени точки.