Домашна работа по Вероятности и Статистика
Софтуерно Инженерство

Име......................................, Група......, ФН............

25.11.2020

Задача 1 Да се докажат формулите:
а) Вероятността да настъпи точно едно от събитията A и B е равна на $P(A)+P(B)-2P(AB)$;
б) За произволни събития $A_1, A_2, \dots, A_n$ е в сила формулата:

$$P(\cap_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n}^n P(A_i \cup A_j) + \sum_{1\le i<j<k\le n}^n P(A_i \cup A_j \cup A_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(\cup_{i=1}^n A_i).$$

Задача 2 Книга от 120 страници съдържа 6 фигури. Всяка фигура може да се намира на всяка една от страниците с една и съща вероятност. Да се пресметне вероятността, случайно избрана страница да съдържа поне три фигури.

Задача 3 Хвърлят се 5 бели и 5 червени зара. Каква е вероятността сумата от точките върху белите зарове, минус сумата от точките върху червените зарове, да бъде равна на:
а) 0;
б) 1.

Задача 4 Нека ξ е случайна величина с характеристична функция $\psi_\xi(t)$. Докажете, че
а) ако $\xi \in \mathrm{Ex}(\lambda)$, то $\psi_\xi(t) = (1 - it\lambda^{-1})^{-1}$;
б) ако $\xi \in \Gamma(\alpha, \beta)$, то $\psi_\xi(t) = (1 - it\beta^{-1})^{-\alpha}$.

Задача 5 Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими и експоненциално разпределени случайни величини, с параметър λ. Да се докаже, че $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ има гама разпределение $\Gamma(n, \lambda)$.

Задача 6 $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ е редица от случайни величини, като $\xi_n \in \mathrm{Bi}(n, p_n)$ и $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Да се докаже, че редицата $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ е сходяща по разпределение, с гранична функция $\xi \in \mathrm{Po}(\lambda)$.

Задача 7 Случайна величина X се нарича безгранично делима, ако за всяко естествено $n \in \mathbb{N}$ съществува редица $X_1, X_2, \dots, X_n$ от независими и еднакво разпределени случайни величини така, че X и $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ имат еднакво разпределение. Докажете, че ако X има нормално, поасоново или гама разпределение, то X е безгранично делима.

Задача 8 Нека $\xi_1, \xi_2, \ldots$ са независими и еднакво разпределени случайни величини, като $E\xi_k = a$ и $E|\xi_k| < \infty,\ k = 1, 2, \ldots$, а τ е целочислена полижителна случайна величина, независима от ξ_k и $E\tau < \infty$. Да се докаже, че

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_\tau) = aE\tau.$$

Задача 9 Напишете интуитивно обяснение на "Законът за Големите Числа". Посочете приложения на този закон.

Задача 10 Напишете интуитивно обяснение на "Централна Гранична Теорема". Посочете някои свойства и приложения на "Нормалното разпределение".

Забележка: Всяка задача се оценява с 1 точка и се прибавя към резултата от двете контролни работи. Максимален брой точки от $K1 + K2 + \text{Д} = 40 + 40 + 10 = 90$. Минимумът за освобождаване от писмен изпит е 50 точки от 90 възможни. Задачи 1,2,3,9,10 са от учебната програма, останалите са допълнение. За отличен са достатъчни двете контролни, домашното е по желание. Успех!