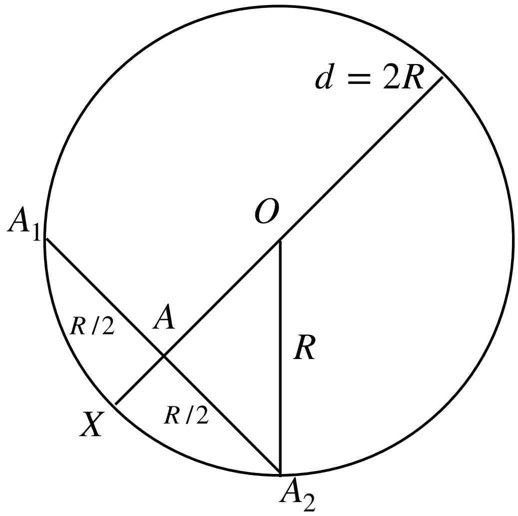
Упражнение 6 по СЕМ. Геометрична вероятност

4 ноември 2020 г. / групи 4/5

Задача 1. Даден е кръг с радиус R. Върху диаметъра по случаен начин е избрана точка A. През точка A е прекарана хорда - перпендикулярна на диаметъра. Каква е вероятността хордата да бъде по-къса от R?

Решение:



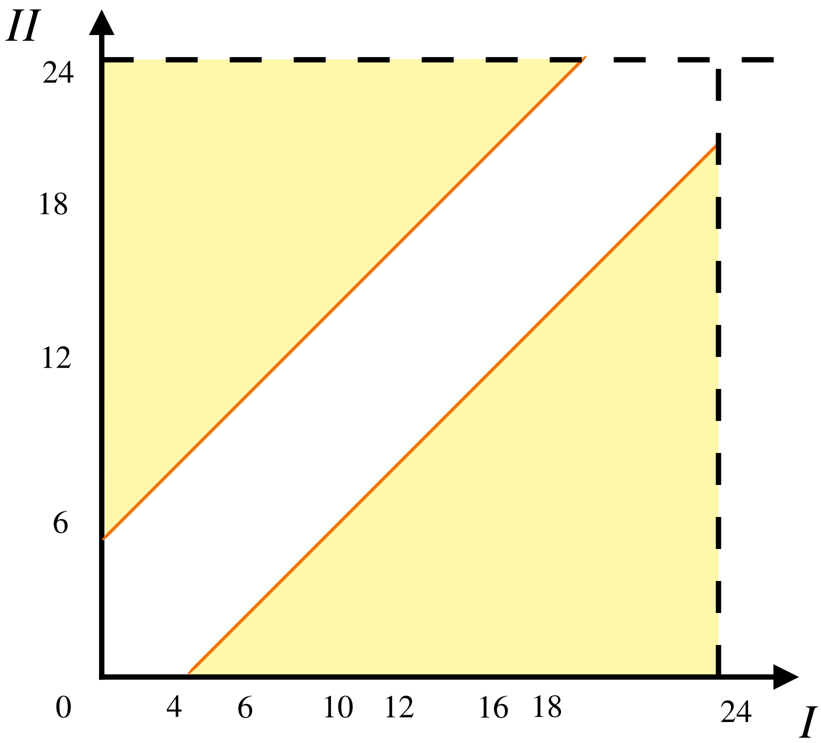
Нека A е точката от диаметъра $d = 2R$ и по-точно такава, че $A \in OX$, където O е центъра на окръжността, а X е по-близката до A пресечна точка на диаметъра, на който лежи A с окръжността. От симетрия може да разглеждаме само едната половина на кръга – тази в която се намира хордата. Нека хордата е A_1A_2 $(A \in A_1A_2,\ A_1A_2 \perp OA)$ и сме я избрали такава, че $A_1A_2 = R$. Тъй като растежа на хордата е монотонна функция, на която минимума и се достига в X и е 0, а максимума в O и е $2R$. То в полукръга, тази точка е определена до единственост и нека сме я избрали да е такава в която $A_1A_2 = R$, за да проверим къде се намира точката A в този случай. Тогава от триъгълника OAA_2 например, намираме, че $OA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}R$ и следователно $XA = R - \dfrac{\sqrt{3}}{2}R = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}R.$

Тогава търсената вероятност $\mathbb{P}(A_1A_2 < R) = \dfrac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}R}{R} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}.$

Задача 2. Два парахода трябва да бъдат разтоварени на един и същи пристан през един и същи ден. Всеки от тях, независимо от другия, може да пристигне в кой да е момент от денонощието. Каква е вероятността параходите да не се засекат, ако за разтоварването на първия са необходими 6, а за втория 4 часа?

Решение:

Ще моделираме задачата чрез координатна система, като по $Ox^{\rightarrow}$ ще отбелязваме часът на пристигане на първия параход, а по $Oy^{\rightarrow}$ часът на пристигане на втория параход.
Нека например първия кораб пристигне в 0 часа. Тогава благоприятните часове за пристигане на втория са от 6 до 24 часа.



Ако пък първият кораб е пристигнал например в 6 часа, то тогава за втория кораб, благоприятните часове за пристигане ще са от 12 до 24 и т.н.

Чрез аналогични разсъждения може да заключим, че ако втория кораб пристигне в 0 или 6 часа, то благоприятните часове за пристигане на първия кораб ще са съответно от 4 до 24 часа и от 10 до 24 часа.

Така може да взимаме достатъчно много примери, за да заключим двата благоприятни триъгълника от фигурата по горе и да стигнем до извода, че търсената вероятност е:

$$\mathbb{P}(\text{non-overlapping}) = \frac{|GOOD|}{|ALL|} = \frac{|GREEN| + |RED|}{|ALL|} =$$

$$= \frac{\frac{(24-6)^2}{2} + \frac{(24-4)^2}{2}}{24 \times 24} = \frac{9 \times 9 + 10 \times 10}{2 \times 12 \times 12} =$$

$$= \frac{181}{2 \times 12 \times 12} = \frac{181}{288} = 0.628472(2)\,.$$