Задача. Имаме две зарчета – стандартно номерирани с числата (точките) от 1 до 6. Хвърляме зарчетата и гледаме само сбора точките на горните стени. При това положение може да получим следното разпределение:

Брой точки	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Брой начини за получаване	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Може ли да преномерираме (по различен начин) стените на зарчетата с **цели положителни числа (брой точки)**, така че сборът на точките на горните стени от двете нови зарчета, при хвърляне, да има същото разпределение като на старите? Ако не може – обосновете отговора си. Ако може – намерете броя на всички начини, по които може да се осъществи тази преномерация.

Решение:

Нека $f_1(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ е обикновената пораждаща функция за случайната величина X_1 – падналите се точки на първото зарче. Аналогично за броя на падналите се точки на второто зарче X_2 ще имаме същата обикновена пораждаща функция: $f_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Начините, по които може да получим сума k при хвърлянето на двете зарчета ($X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$) е коефициента пред x^k в полинома $f_1(x)f_2(x)$.

$f_1(x)f_2(x) = x^2 + 2x^3 + \ldots + 6x^7 + 5x^8 + \ldots + x^{12}$, което е обикновената пораждаща функция на случайната величина $X_1 + X_2$ – сумата от точките при хвърлянето на две стандартни зарчета.
Търсим $g_1(x)$ и $g_2(x)$ да са такива функции, за които е изпълнено:
1. $g_1(x)g_2(x) = f_1(x)f_2(x)$
2. $g_1(x) \neq f_1(x)$ (т.е. g_1 и g_2 са различни функции от f_1 и f_2)

$$f_1(x)f_2(x) = \left[x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^2 = \left[x\left(1 + x + x^2\right)(1 + x^3)\right]^2 =$$

$$= x^2(1 + x + x^2)^2(1 + x)^2(1 - x + x^2)^2$$

Знаем, че функциите g_1 и g_2 ще наследят някои свойства от функциите f_1 и f_2, като например $g_1(0) = g_2(0) = 0$ (т.к. няма страни без точки по тях – по условие) и $g_1(1) = g_2(1) = 6$ (от условието, че заровете са шестстенни).

За да е изпълнено първото условие е необходимо и в двете функции да имаме множител x, а за да бъде изпълнено и второто е необходимо и в двете функции да имаме точно една двойка и една тройка ако заместим x с единица.

Следователно,

$$\begin{cases} g_1(x) = x(1+x+x^2)(1+x)A(x) \\ g_2(x) = x(1+x+x^2)(1+x)B(x) \end{cases}$$

Ако $A(x) = B(x) = (1 - x + x^2)$ ще получим същите зарчета като оригиналните. За да получим различи зарчета е необходимо останалите множители да разпределим по начин, по който да получим различни пораждащи функции. Това е възможно само по един начин:

$A(x) = 1$ и $B(x) = (1 - x + x^2)^2$. Тогава:

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \longrightarrow \{1, 2, 2, 3, 3, 4\} \\ g_2(x) &= (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4) = \\ &= x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \longrightarrow \{1, 3, 4, 5, 6, 8\} \end{aligned}$$

Новите зарчета са съответно $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ и $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$ и това са единствените две нови зарчета, които ще имат същото разпределение като оригиналното при стандартните зарчета. Други две зарчета отговарящи на условието не съществуват.

Нека $f_1(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ е обикновената пораждаща функция за случайната величина - брой на паднали се точки на първото зарче. Аналогично за броя на падналите се точки на второто зарче ще имаме същата обикновена пораждаща функция:
$f_2(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$.

Начините, по които може да получим сума k при хвърляне на двете зарчета е коефициента пед x^k в полинома $f_1(x)f_2(x)$.

$f_1(x)f_2(x) = x^2 + 2x^3 + \ldots + 6x^7 + 5x^8 + \ldots + x^{12}$, което е обикновената пораждаща функция на случайнава величина - сумата от точки при хвърлянето на два стандартни зара.

Търсим $g_1(x)$ и $g_2(x)$ да са такива функции, за които е изпълнено:

1. $g_1(x)g_2(x) = f_1(x)f_2(x)$
2. $g_1(x) \neq f_1(x)$ (т.е. g_1 и g_2 са различни функции от f_1 и f_2)

$$f_1(x)f_2(x) = \left[x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)\right]^2 = \left[x\left(1 + x + x^2\right)(1 + x^3)\right]^2 =$$

$$= x^2(1 + x + x^2)^2(1 + x)^2(1 - x + x^2)^2$$

Знаем, че функциите g_1 и g_2 ще наследят някой свойства на функциите f_1 и f_2, като например $g_1(0) = g_2(0) = 0$ и $g_1(1) = g_2(1) = 6$ (от условието, че заровете са шестстенни и нямат нулеви страни).

За да е изпълнено първото условие е необходимо и в двете функции да имаме множител x, а за да бъде изпълнено и второто е необходимо и в двете функции да имаме една двойка и една тройка ако заместим x с единица.

Следователно:
$g_1(x) = x(1 + x + x^2)(1 + x)$
$g_2(x) = x(1 + x + x^2)(1 + x)(1 - x + x^2)^2$, тогава
(останалите множители трябва да разпределим така, че да получим различни функции)

Това е възможно само по един начин:
$g_1(x) = x + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \longrightarrow \{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$
$g_2(x) = (x + 2x^2 + 2x^3 + x^4)(1 - 2x + 3x^2 - 2x^3 + x^4) =$
$\qquad = x + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \longrightarrow \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$

Новите зарчета са съответно $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\}$ и $\{\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \mathbf{8}\}$ и това са единствените две нови зарчета, които ще имат същото разпределение като оригиналното при стандартните зарчета. Други две зарчета отговарящи на условието - няма.