Упражнение 4 по СЕМ. Условна вероятност. Независимост

26 октомври 2020 г. / групи 4,5

Задача 5. Дадени са две партиди от съответно 12 и 10 изделия. Във всяка има по едно дефектно. По случаен начин се избира изделие от първата партида и се прехвърля във втората, след което избираме случайно изделие от втората партида. Каква е вероятността то да е дефектно?

Решение:
Ще използваме формулата за пълна вероятност и за това ще дефинираме няколко събития. Нека

A = {избираме дефектно изделие от първата партида}
B = {избираме дефектно от втората партида}

Следователно

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A}) = \frac{2}{11} \times \frac{1}{12} + \frac{11}{12} \times \frac{1}{11} = 0{,}0(95)\ldots$$

Задача 6. Разполагаме с три стандартни зара и един, чийто страни са само шестици. По случаен начин избираме три от заровете и ги хвърляме. Да се определи вероятността да се паднат

1. **три шестици;**
2. **различни цифри;**
3. **последователни цифри?**

Решение:

Нека $H = \{$изтеглили сме трите стандартни зара$\}$, тогава
$\overline{H} = \{$изтеглили сме два стандартни + суперзара (само с 6-ци)$\}$.

Нека означим с A, B, C множествата от 1., 2. и 3. съответно.

Вероятността да изтеглим трите стандартни зара е $\mathbb{P}(H) = \frac{1}{\binom{4}{3}} = \frac{1}{4}$.

Разбиваме по първото теглене и прилагаме формулата за пълна вероятност:

1) $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(A|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \frac{1}{6^3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{6^2} \times \frac{3}{4}$;

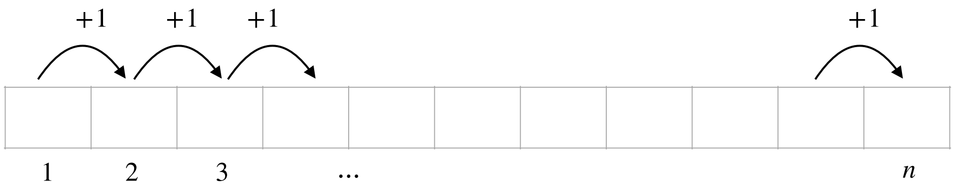
2) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(B|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \frac{6 \times 5 \times 4}{6^3} \times \frac{1}{4} + \frac{5 \times 4}{6^2} \times \frac{3}{4}$;

3) $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(C|H)\mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(C|\overline{H})\mathbb{P}(\overline{H}) = \frac{4.3!}{6^3} . \frac{1}{4} + \frac{2!}{6^2} . \frac{3}{4}$,

Пояснение за 3) :
Ако сме изтеглили трите обикновени зара възможностите да изтеглим три последователни числа са$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{4, 5, 6\}$ и техните пермутации. А ако сме изтеглили два обикновени зара и суперзара, тогава възможностите са само $\{4, 5\}, \{5, 4\}$.

Задача 7. Дадени са n урни, всяка от тях има m бели и k черни топки. От първата урна се тегли топка и се прехвърля във втората, след това от втората урна една топка се прехвърля в третата и т.н. Каква е вероятността от последната урна да бъде изтеглена бяла топка?

Решение:



m-бели
k-черни

– във всяка урна имаме m-бели и k-черни топки

Нека $U_i = \{$избрали сме бяла топка от i-тата урна$\}$. Търси се U_n.

$$\mathbb{P}(U_1) = \frac{m}{m+k} \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{U_1}) = \frac{k}{m+k}.$$

Разбиваме по първото вадене на топка от първата урна и прилагаме формулата за пълна вероятност:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U_2) &= \mathbb{P}(U_2 \,|\, U_1)\mathbb{P}(U_1) + \mathbb{P}(U_2 \,|\, \overline{U_1})\mathbb{P}(\overline{U_1}) = \\ &= \frac{m+1}{m+k+1} \times \frac{m}{m+k} + \frac{m}{m+k+1} \times \frac{k}{m+k} = \\ &= \frac{m\cancel{(m+k+1)}}{\cancel{(m+k+1)}(m+k)} = \frac{m}{m+k}\end{aligned}$$

Полученият резултат $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2)$ ни навежда на мисълта, че $\mathbb{P}(U_i) = \dfrac{m}{m+k}$ за всяко $i = \overline{1,n}$.

Това може да се докаже с математическа индукция:

1. Индукционна база: За U_1 и U_2 е изпълнено: $\mathbb{P}(U_1) = \mathbb{P}(U_2) = \dfrac{m}{m+k}$;
2. Индукционна хипотеза: Нека допуснем, че е изпълнено и за U_p, $p \in \mathbb{N}$;

3. Индукционен преход/стъпка: Ще покажем, че е изпълнено и за U_{p+1}. Разбиваме по ваденето на топка от предходната урна:

$$\mathbb{P}(U_{p+1}) = \mathbb{P}(U_{p+1} \,|\, U_p)\mathbb{P}(U_p) + \mathbb{P}(U_{p+1} \,|\, \overline{U_p})\mathbb{P}(\overline{U_p}) =$$

$$= \frac{m+1}{m+k+1} \times \mathbb{P}(U_p) + \frac{m}{m+k+1} \times (1 - \mathbb{P}(U_p)) = \frac{m}{m+k}.$$

Задача 8. В кутия има 7 топки за тенис, от които 4 са нови. За първата игра по случаен начин се избират три топки, които след играта се връщат обратно в кутията. За втората игра също случайно се избират три топки. Каква е вероятността те да са нови?

Решение:

Нека $\underset{i=\overline{0,3}}{A_i} = \{$изтеглили сме i нови топки от първото теглене$\}$.

Нека $B = \{$и трите топки изтеглени от втория път са нови$\}$.

Вероятността да изтеглим 3 топки от 7 е $\binom{7}{3}$.

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \,|\, A_0)\mathbb{P}(A_0) + \mathbb{P}(B \,|\, A_1)\mathbb{P}(A_1) + \ldots = \sum_{i=0}^{3} \mathbb{P}(B \,|\, A_i)\mathbb{P}(A_i) =$$

$$= \frac{\binom{4}{3}\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{2}}{\binom{7}{3}\binom{7}{3}} = \frac{4 + 4 \times 3}{\binom{7}{3}^2} = \frac{16}{35^2}$$

Задача 10 (Kahneman, Thinking Fast and Slow). В град с две фирми за таксита, синя и зелена, през нощта се случва катастрофа с участието на такси, от която шофьорът на таксито бяга. Разполагате със следните данни:

- $85\,\%$ от всички таксита са зелени и $15\,\%$ са сини;
- свидетел дава показания, че таксито е било синьо;
- експертиза установява, че свидетелят определя правилно синьо/зелено в $80\,\%$ от случаите и греши в останалите $20\,\%$.

Каква е вероятността колата наистина да е била синя?

Решение:

Нека B={таксито от катастрофата е синьо}, S={свидетеля определя че таксито е синьо}.

Имаме, че: $\mathbb{P}(B) = 15\,\%$, $\mathbb{P}(\overline{B}) = 85\,\%$, $\mathbb{P}(S \,|\, B) = 80\,\%$, $\mathbb{P}(S \,|\, \overline{B}) = 20\,\%$

Търси се $\mathbb{P}(B \,|\, S)$.

Имаме, че $\mathbb{P}(B|S) = \dfrac{\mathbb{P}(B\cap S)}{\mathbb{P}(S)} = \dfrac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(S)}$, но от друга страна

$$\mathbb{P}(S|B) = \frac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Rightarrow \mathbb{P}(S\cap B) = \mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B).$$

Заместваме втория резултат в първия и получаваме, че:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|S) &= \frac{\mathbb{P}(S\cap B)}{\mathbb{P}(S)} = \frac{\mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(S)} = \\ &= \frac{\mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(S|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(S|\overline{B})\mathbb{P}(\overline{B})} = \frac{80\% \times 15\,\%}{80\% \times 15\% + 20\% \times 85\,\%} = \\ &= \frac{8\times 15}{8.15 + 2\times 85} = \frac{4\times 3}{4\times 3 + 17} = \frac{12}{29} < \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$