СЕМ, лекция 3 (2020-10-15)

$$\Omega = \{1, 2, \dots, N\},\ p_i = \frac{1}{N}.$$

Равномерна вероятност е такава, при която всяко едно от събитията (всеки елемент) има равна вероятност. Тя е прототип на случая, в който нямаме никаква априорна информация за модела и не искаме на нито един от възможните изходи да придаваме по-голяма или по-малка възможност от тези на останалите.

$$\Omega = \{w_1, w_2, \dots, w_m, \dots\}$$

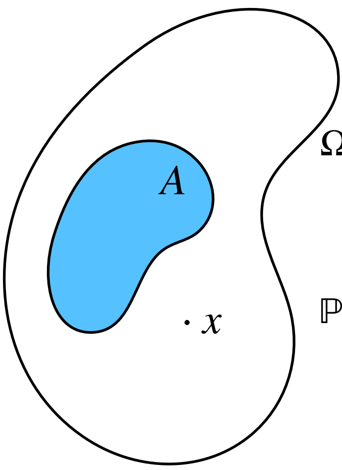
Когато имаме изброимо много елементи (събития) също имаме дискретна вероятност и множество от числа (вероятности), които вървят с всяко едно събитие $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\},\ p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. В този случай, обаче, не е възможно да зададем равномерна вероятност.

$$\mathbb{P}(\{w_i\}) = p_i,\ i \geq 1;$$

$$A \subseteq \Omega,\ \mathbb{P}(A) = \sum_{w_i \in A} p_i.$$

Геометрична вероятност

Тази вероятност е пример за вероятностно разпределение върху неизброимо множество. Най-простия прототип, който ще вземем, отново отговаря на равномерна вероятност.



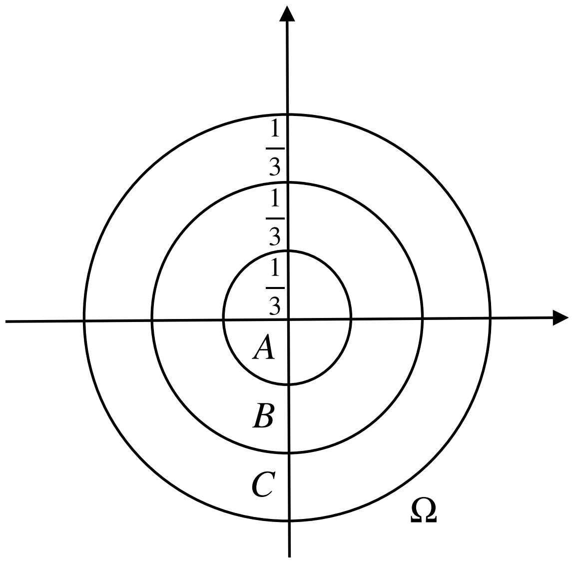
$$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 : |\Omega| = \iint_\Omega \mathrm{d}\,x$$

$\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$; всяко A отворено

Вероятността нещо да се случи в A, като подмножество на Ω $(A \subseteq \Omega)$ е равна на площта (мярката) на A върху площта на Ω $\left(\dfrac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}\right)$. Това е пример за равномерна вероятност, но равномерна само върху Ω. Това е така, защото самата вероятност зависи само от площта на (събитието) A - не зависи от нейната локация или форма, а само от нейната полощ.

$\mathbb{P}(\{x\}) = \dfrac{|\{x\}|}{|\Omega|} = 0$. Площта на една точка е равна на 0. Вероятността на една точка е равна на 0. Вероятността да оценим конкретна точка е равна на 0 (площта и е нулева).

⊕



$$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$A = \left\{x^2 + y^2 \leq \frac{1}{9}\right\}$$

$$B = \left\{\frac{1}{9} \leq x^2 + y^2 \leq \frac{4}{9}\right\}$$

$$C = \left\{\frac{4}{9} \leq x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

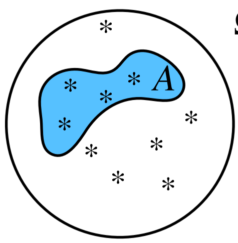
Ако се стреля хаотично (напълно аматьорски), то вероятностите да се улучат съответно множествата A, B и C са съответно:

$$A: \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{1}{9};$$

$$B: \quad \mathbb{P}(B) = \frac{\mu(A \cup B) - \mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3};$$

$$C: \quad \mathbb{P}(C) = \frac{\mu(A \cup B \cup C) - \mu(A \cup B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times 1^2 - \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}.$$

<u>Идея на Монте Карло алгоритмите</u>: Имаме, например, лицето на Ω, което в нашия случай е кръг и искаме да пресметнем лицето на $A \subseteq \Omega$:



$\Omega \qquad \dfrac{A(N)}{N}$ — $A(N)$: брой на точките попаднали в A; N: брой на всички хвърлени точки

Колкото повече точки включиме в изследването, толкова по-добре ще се приближаваме към шлощта на A. По този начин реално може да пресметнем интеграл без числени методи.

<u>Дефиниция</u>: (**Вероятностно пространство**) Наредена тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, където Ω е пространство от елементарни събития; $\underbrace{\mathscr{A}}_{\text{колекция от подмножества на } \Omega} \subseteq 2^{\Omega}$ е σ-алгебра и

$\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ е вероятностна мярка (вероятното пространство)

$\oplus$ $$\underbrace{\begin{array}{l}\Omega = \{1, 2, \dots, N\};\ \mathscr{A} = 2^{\Omega} \\ \mathbb{P}(\{i\}) = \dfrac{1}{N}, \forall i \geq 1\end{array}}$$

В случая когато сме взели вероятностите на всяко елементарно събитие да са равни - ще имаме равномерно вероятностно пространство. Т.е. всяко $i \geq 0$ има един и същ шанс да се падне.

$\oplus$ $$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\};\ A, B, C;\ \Omega = \{\emptyset, \Omega, A, B, C, A \cup B, B \cup C, C \cup A\}$$
$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0, \mathbb{P}(\Omega) = 1, \mathbb{P}(A) = \frac{1}{9}, \mathbb{P}(B) = \frac{3}{9}, \mathbb{P}(C) = \frac{5}{9}, \mathbb{P}(A \cup B) = \frac{4}{9},$$
$$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{8}{9}, \mathbb{P}(C \cup A) = \frac{6}{9}.$$

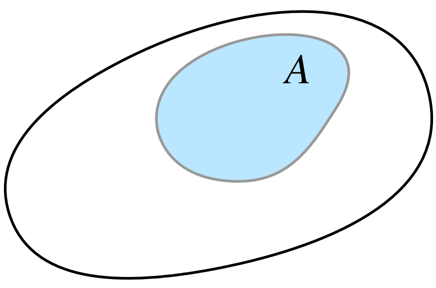
$\oplus$ $$\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}; \quad \underbrace{\mathbf{B}(\Omega) = \mathscr{A}}_{\text{бореловата сигма алгебра}} \ :\ \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}; \qquad \forall A \in \Omega.$$

Условна вероятност

$(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Нашия модел трябва да е такъв, че да може да промени вероятностното пространство максимално добре спрямо постъпваща информация.

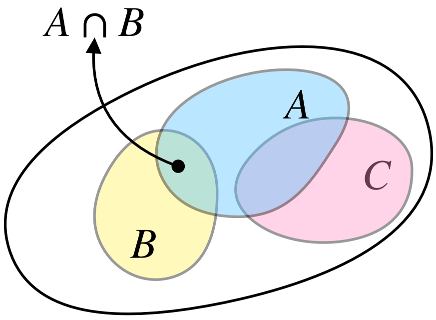
Изкуствения интелект, бейсовата статистика и много други имат зад себе си условни вероятности освен всички други неща.

$A \in \mathscr{A}$ настъпва. Първоначално тръгваме с Ω, но в даден етап настъпва събитието A. Това вече е в състояние да промени цялото вероятностно пространство/ разпределение. Въпроса е как това се случва (как се променя)?



<u>Дефиниция</u>: (**Условна вероятност**) Нека $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ е вероятностно пространство и е такова, че $A \in \mathscr{A} : \mathbb{P}(A) > 0$. Тогава условна вероятност при условие A наричаме $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}, \ \forall B \in \mathscr{A}$.

По този начин се изчисляват вероятностите на всяко едно B.



Т.е. ние знаем, че е настъпило събитието A и тази част от B, която не е в A - не ни интересува. Трябва да пресмятаме вероятността да се сбъдне частта на B, която попада в A $(A \cap B)$, като новото вероятностно състояние вече е A $(\Omega \mapsto A)$. Т.е. ние вече „живеем" в $(A, \mathscr{A} \cap A, \mathbb{P}_A)$.

При настъпването на A се променя вероятностното пространство.
$A \cap \mathscr{A} = \{B \cap A \mid B \in \mathscr{A}\}$.

Най-доброто число, което бихме задали за вероятност на събитието B, при положение, че знаем (че се е случило) A е $\dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, както интуитивно, така и чисто в математически смисъл.

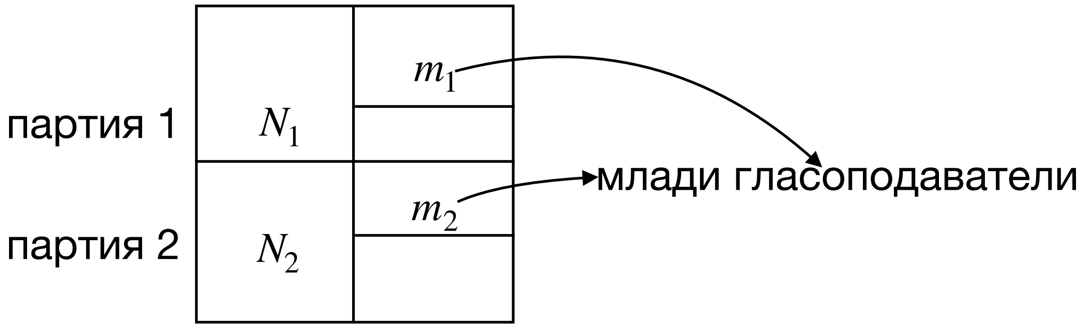
$\oplus$ „6 от 49"

Пуснали сме фиш: $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. По една или друга причина ние научаваме, че са се паднали числата 1 и 2 в настоящия тираж (някога когато не е имало интернет). Т.е. $A = \{\underbrace{w}_{\text{шесторки}} \in \Omega \mid 1 \text{ и } 2 \in w\}$.

$\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$, тъй като $B \subseteq A$. Следователно

$\mathbb{P}(B \mid A) = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{\binom{49}{6}}}{\frac{\binom{47}{4}}{\binom{47}{6}}} = \dfrac{\frac{1}{13\,983\,816}}{\frac{1}{128\,365}} \dfrac{1}{\binom{47}{4}} = \dfrac{1}{178\,365}$. Т.е. вероятността за печалба нараства значително (от порядъка на $70 - 80$ пъти).

⊕ Имаме две партии на някакви избори - Π_1 и Π_2.



Пита се някакъв човек за коя партия е гласувал и той се окачва, че е млад. Нека $A = \{\text{млад}\}$ и $B = \{\text{гласувал за } \Pi_1\}$. Сега питаме - каква е вероятността да е гласувал за Π_1, ако се знае, че е млад?

$\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\frac{m_1}{N_1+N_2}}{\frac{m_1+m_2}{N_1+N_2}} = \dfrac{m_1}{m_1+m_2}$, т.е. числото така се променя, че не зависи от общия брой гласоподаватели, а само от младите такива (m_1 и m_2).

Независимост

<u>Дефиниция</u>: (**Независимост**) Две събития A и B се наричат независими, ако $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$ $\big($Ако $\mathbb{P}(A) > 0 \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, т.е. независимостта означава, че случването на събитието A не ни носи никаква информация за $B\big)$.

<u>Дефиниция</u>: (**Взаимна независимост**) Дадени са събития $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Казваме, че те са независими взаимно (в съвкупност), ако

$\forall M \in \{1, \ldots, n\}$ $(M \neq \emptyset$, M не е празното$)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in M} A_i\right) = \prod_{i \in M} \mathbb{P}(A_i)$.

Вероятността да се случи кое да е подмножество от M се разпада на произведението на вероятностите да се случат съставните (елементарните) множества от M.

<u>Теорема</u>: Нека $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са n събития, така че $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0$. Тогава

$$(*)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_n \middle| \bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \times \mathbb{P}\left(A_{n-1} \middle| \bigcap_{i=1}^{n-2} A_i\right) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_2|A_1) \times \mathbb{P}(A_1)$$

Доказателство: По индукция. За $n = 1 : \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_1)$. Нека допуснем, че (*) е вярно за $n = k$, т.е. : $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_k \middle| \bigcap_{i=1}^{k-1} A_i\right) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_2 | A_1)\mathbb{P}(A_1)$

(индукционна хипотеза). Ще докажем верността на твърдението и за $n = k + 1$ (индукционна стъпка):

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_{k+1} \cap \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = \mathbb{P}\left(A_{k+1} \middle| \bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)$$

<u>Следствие</u>: Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ са независими (ще разбираме, че са взаимно независими / зависими в съвкупност), то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$.

$\oplus$ „6 от 49“

$$\underbrace{\Omega = \left\{w = (w_1^{(1)}, w_2^{(2)}, \ldots, w^{10\,001})\right\}}_{\substack{\text{всички паднали се 10 001} \\ \text{наредени шесторки до сега}}}$$

$$A = \bigcup_{i=1}^{10\,000} A_i,\ A_i = \left\{w \in \Omega \,|\, w^{(i)} = w^{(i+1)}\right\}$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{10\,000}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{10\,000} A_i}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{10\,000} \overline{A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{10\,000} \mathbb{P}(\overline{A_i}).$$

$\overline{A_i}$ са независими, тъй като ако $\overline{A_i} = \left\{w \in \Omega \,|\, w^{(i)} \neq w^{(i+1)}\right\}$ и $\overline{A_j} = \left\{w \in \Omega \,|\, w^{(j)} \neq w^{(j+1)}\right\}$, то за $|\, i - j \,| \geq 2$, $\overline{A_i}$ и $\overline{A_j}$ са независими. Освен това може да се покаже, че A_i и A_{i+1} също са независими.

$$\mathbb{P}(\overline{A_i} \cap \overline{A_{i+1}}) = \mathbb{P}(\overline{A_i}) \times \mathbb{P}(\overline{A_{i+1}}) = 1 = \prod_{i=1}^{10\,000} \mathbb{P}(\overline{A_i}) = 1 - \left(\mathbb{P}(\overline{A_1})\right)^{10\,000} =$$

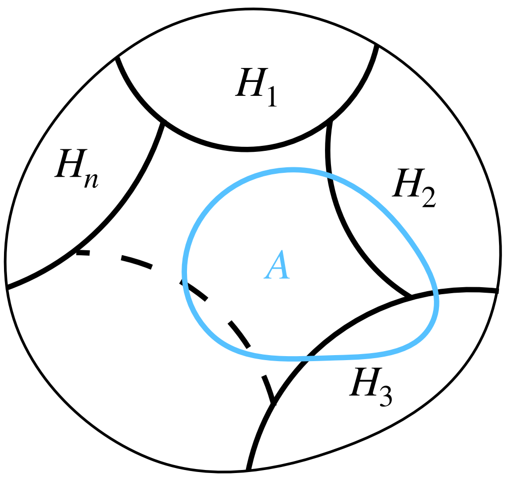
$$= 1 - \left(\frac{\binom{49}{6} - 1}{\binom{49}{6}}\right)^{10\,000} = 1 - \left(1 - \frac{1}{\binom{49}{6}}\right)^{10\,000} \approx 1 - \left(1 - 10\,000 \times \frac{1}{\binom{49}{6}}\right) \approx \frac{1}{1400}$$

Формула за пълната вероятност

Дефиниция: (**Пълна група от събития**) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ се нарича пълна група от събития, ако $H_i \cap H_j = \emptyset$, $\forall i \neq j$, $i \leq n$, $j \leq n$ и $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} H_i = \Omega$. $\Big(\dot{\bigcup}$ е символ за обединение на непресичащи се множества$\Big)$.

Теорема: (**Формула за пълната вероятност**) Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълна група от събития в Ω и $A \in \mathscr{A}$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \,|\, H_i)\mathbb{P}(H_i)$ с конвенцията, че ако $\mathbb{P}(H_i) = 0$, то $\mathbb{P}(A \,|\, H_i)\mathbb{P}(H_i) = 0$.

Доказателство: $A = A \cap \Omega = A \cap \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} H_i = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A \cap H_i$.



Тогава

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} A \cap H_i\right) \underbrace{=}_{\text{непресичащи се}} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap H_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \,|\, H_i)\mathbb{P}(H_i),$$

като накрая използвахме, че $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \,|\, A)\mathbb{P}(A)$, което е формулата за условна вероятност.

Теорема: (**Формула на Бейс**) Нека $H_1, H_2, \ldots, H_n$ е пълна група от събития в Ω и $A \in \Omega$. Тогава $\mathbb{P}(H_k \,|\, A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \,|\, H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A \,|\, H_k)\mathbb{P}(H_k)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \,|\, H_i)\mathbb{P}(H_i)}$, $\forall\, 1 \leq k \leq n$.

Доказателство: От една страна имаме, че $\mathbb{P}(A \cap H_k) = \mathbb{P}(A \,|\, H_k)\mathbb{P}(H_k)$, но от друга страна $\mathbb{P}(H_k \,|\, A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(H_k \cap A)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(H_k \,|\, A) = \frac{\mathbb{P}(H_k)\mathbb{P}(A \,|\, H_k)}{\underbrace{\mathbb{P}(A)}_{\substack{\text{формула за} \\ \text{пълната вероятност}}}}.$$

Формулата на Бейс показва как актуализираме нашата априорна вероятност за хипотеза да се случи, при положение че е настъпила някаква информация A.

$\oplus$ Допускаме, че на някакво летище има бърз $COVID19$ тест, който е способен да индикира дали даден човек е заразен или не. Инфектираните са $1\ \%$ от посетителите на летището.

$I\ (infected) \longrightarrow 99\ \%$. Ако човек **е** носител на висруса, теста с $99\ \%$ засича вярно и индикира, за наличието на вирус.

$H\ (healthy) \longrightarrow 80\ \%$. Ако човек **не е** носител на заразата, тогава теста правилно връща индикатор (т.е. не реагира) с $80\ \%$ вероятност, че е здрав.

Да се пресметне вероятността, даден човек да е заразен, при положение, че теста е реагирал положително за наличие на вирус?

Решение:

Нека $A = \{$теста е реагирал положително за вирус (аларма)$\}$.

Търси се $\mathbb{P}(I\,|\,A)$.

$$\mathbb{P}(I\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\,|\,I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A\,|\,I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A\,|\,H)\mathbb{P}(H)} = \frac{99\% \times 1\ \%}{99\% \times 1\% + 20\% \times 99\ \%} =$$

$$= \frac{99}{99 + 20 \times 99} = \frac{1}{21}$$. Тук изолзвахме, че I и H са пълна група от събития, тъй

като $I = \overline{H}$.

Оказва се, че теста не е много полезен. Получава се така, защото заразените са много малък процент от популацията (посетителите на летището), а грешката от $20\ \%$ е твърде голяма.

$\oplus$ $p \ll 10\ \%$ заразени.

Взимат се няколко проби и се смесват и се тества смеската. По този начин с един тест се правят n проби (където n е броя на извадката).

$$n - \text{проби накуп} = \begin{cases} \text{нито един заразен - жертваме 1 тест, но правим извод за цялата извадка;} \\ \text{има заразен, тогава правим } n \text{ индивидуални теста.} \end{cases}$$

Как да подберем размера на извадката n, така че да минимизираме използваните тестове.

Например при $p = 5\ \% = 0{,}05$, $p = 2\ \% = 0{,}02$. Да се помисли за домашно (случайни величини - предстои да се вземат)

$\oplus$ Имаме две числа a и b (две суми пари в два плика), за които ние не знаем нищо, освен че са положителни $a, b > 0$, но някой друг (водещия на играта, например) знае, че $a < b$.

Може ли да измислим стратегия, при която $\mathbb{P}(b) > \dfrac{1}{2}$ (избираме по-голямата сума с вероятнос по голяма от $50\,\%$)?

Решение:

Нека $A = \{$вижда a в $I^{\text{-ви}}$ плик$\}$ и $B = \{$вижда b във $II^{-\text{ри}}$ плик$\}$.

Знаем, че $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$. Нека още $C = \{$прави се смяна на пликовете$\}$.

$$\mathbb{P}(b) = \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap \overline{C}) = \mathbb{P}(C \,|\, A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{C} \,|\, B)\mathbb{P}(B) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) + \mathbb{P}(\overline{C}\,|\,B)\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) + 1 - \mathbb{P}(C\,|\,B)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B)\right)$$

Тук използвахме, че $\mathbb{P}(C\,|\,B) + \mathbb{P}(\overline{C}\,|\,B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(\overline{C} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$

Т.е. задачата се свежда до въпроса: може ли да определим такава стратегия, при която $\mathbb{P}(C\,|\,A) > \mathbb{P}(C\,|\,B)$.

Нека разгледаме няколко случая, за да добием представа за сложността на въпроса:

Нека
$J = \mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B) \Rightarrow J = \mathbb{P}(C) \times \left(\mathbb{P}(A\,|\,C) - \mathbb{P}(B\,|\,C)\right) = \mathbb{P}(C) \times \left(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\right)$

1 сл. Ако никога не сменяме, т.е. $\mathbb{P}(C) = 0 \to J = 0$;

2 сл. Ако сменяме на всяко второ теглене, т.е. $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2} \to J = 0$;

3 сл. Ако винаги сменяме, т.е. $\mathbb{P}(C) = 1 \to J = 0$.

Обаче, ако си дефинираме стратегията по следния начин: ако виждаме числото x сменяме с вероятност e^{-x}. Т.е. $\mathbb{P}(C\,|\,\text{виждаме } x) = e^{-x} \Rightarrow J = e^{-a} - e^{-b} > 0.$