СЕМ, Л-02
(2020-10-08)

Дефиниция (**Вероятност). Аксиоматичната дефиниция на Колмогоров за вероятност** или вероятностна мярка е следната: Нека имаме пространство от елементарни събития Ω и σ-алгебра на системата от подмножества $\mathscr{A}$ на Ω. Вероятността е функция $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$, за която:

- $\mathbb{P}(A) \geq 0$ за всяко $A \in \mathscr{A}$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Ако $A_1, A_2, A_3, \ldots$ са несъвместими, тоест $A_i \cap A_j = \emptyset$ за всяко $i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \Sigma_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$.

Ако имаме изброима редица от непресичащи се по двойки (несъвместими) събития, то вероятността на обединението им (операцията „и“) е равна на сумата на техните вероятности.

В този смисъл вероятността е мярка, тъй като точно това свойство (σ-адитивността или събираемостта) е определящото аксиоматично свойство на всяка мярка.

Следствие. Нека $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ е вероятност. Тогава са изпълнени следните свойства $(A, B \in \mathscr{A})$:

1. Неотрицателност и ограниченост: $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.
   Вероятността на всяко събитие е винаги число между 0 и 1 (включително).
2. Вероятност на достоверното събитие: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
   Вероятността на сигурното събитие (цялото пространство от възможности Ω) е 1.
3. Вероятност на невъзможното събитие: $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
   Вероятността на празното множество (невъзможно събитие) е 0.
4. Противоположно събитие: $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   Сумата от вероятностите на едно събитие и неговата противоположност винаги е 1.
5. Събиране за несъвместими събития.
   Ако $A \cap B = \emptyset$, то $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
   Ако две събития не могат да се случат едновременно, вероятността някое от тях да се случи е сумата от вероятностите им.
6. Събиране на всички събития (общ случай):
   $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
   За да намерим вероятността да се случи поне едно от две събития, изваждаме вероятността за тяхното *едновременно* случване, защото сме я включили два пъти.
7. Монотонност.
   Ако $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
   Ако събитието A винаги води до събитие B, то вероятността на A не може да е по-голяма от тази на B.
8. Непрекъснатост.
   Формално, ако имаме монотонна редица от събития (например нарастваща или намаляваща), то вероятността на тяхната граница е равна на границата на

техните вероятности. Съществуват два основни случая:

Непрекъснатост отдолу: Ако $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Непрекъснатост отгоре: Ако $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

9. Ако имаме $A_i \in \Omega$ за $i \geq 1$, то $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$. Това свойство е изпълнено и за всяко крайно обединение от събития: $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$, за някое $n \in \mathbb{N}$.

Доказателство:

1. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ е пряко следствие от аксиомата на Колмогоров: $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$.

2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ е отново пряко следствие от аксиомата на Колмогоров.

3. $\mathbb{P}(\varnothing) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 1 - 1 = 1.$

4. $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A}) \Rightarrow \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$

5. Събирането на несъвместими събития следва директно от аксиомата.

6. $A \cup B = A \cup (B \backslash A)$, като $B \backslash A = B \cap \overline{A}$. Тъй като двете събития от дясно са непресичащи се, може да приложим вероятностната функция: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \backslash A)$ (1). Разбиваме B: $B = (B\backslash A) \cup (A \cap B)$ и тези две части са непресичащи се , значи: $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\backslash A) + \mathbb{P}(A \cap B)$ и от тук намираме $\mathbb{P}(B\backslash A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ (2). Заместваме (2) в (1) и получаваме искания резултат.

7. $B = A \cup (B \backslash A)$, но те са и непресичащи се $\Rightarrow \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\mathbb{P}(B\backslash A)}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}(A).$

8. Непрекъснатост отдолу. Нека $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \dots$ и $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Определяме $C_1 = B_1$, $C_2 = B_2 \backslash B_1$, $C_3 = B_3 \backslash B_2$, ... Тогава C_k са независими по двойки (по смисъл, непресичащи се) и $B_n = \bigcup_{k=1}^{n} C_k$, $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. По адитивност за непресичащи се събития (което следва от аксиомите на Колмогоров):

$\mathbb{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(C_k)$, $\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_k)$. Но сумата на реда $\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_k)$ е по дефиниция границата на частичните суми: $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(C_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}(C_k)$.

Следователно $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(B)$.

Непрекъснатост отгоре. Нека $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots\ A=\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i$. Взимаме $B_n=A_n^c$ (допълнение). Тогава $B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots$, защото $A_1\supseteq A_2\supseteq\ldots\ \Rightarrow A_1^c\subseteq A_2^c\subseteq\ldots$. Имаме $\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=A^c$. От непрекъснатост отдолу (доказана вече) приложена за B_n следва, че: $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(B_n)=\mathbb{P}(A^c)$. Но $\mathbb{P}(B_n)=1-\mathbb{P}(A_n)$ и $\mathbb{P}(A^c)=1-\mathbb{P}(A)$.

Следователно $1-\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=1-\mathbb{P}(A)\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)=\mathbb{P}(A)$.

9. Нека $B_1=A_1\subseteq A_1$, $B_2=A_2\backslash A_1=A_2\cap A_1^c\subseteq A_2$, $B_3=A_3\backslash(A_2\cup A_1)\subseteq A_3$, … $B_n=A_n\backslash\left(\bigcup_{i=1}^{n-1}A_i\right)\subseteq A_n$. Имаме, че $B_i\cap B_j=\emptyset$, за $i\neq j$ (тоест са две по две непресичащи се). От друга страна имаме, че:

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i)$, но $B_i\subseteq A_i\overset{7.}{\Rightarrow}\mathbb{P}(B_i)\leq\mathbb{P}(A_i)$. Тоест е в сила

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$. Остана да докажем, че $\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j=\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ е очевидно, тъй като $B_i\subseteq A_i$ за всяко i. Защо, обаче $\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\supseteq\bigcup_{j=1}^{\infty}A_j$? Нека вземем елемент $\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\Rightarrow\omega\in A_k$ за някое k. Да вземем $k=\min\{i\geq 1:\omega\in A_i\}$ (най-малкия номер k на множество, в което елемента ω принадлежи – знаем, че със сигурност ще има поне едно такова множество)

$B_k=A_k\backslash\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i$, но $\omega\notin\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\Rightarrow\omega\in B_k\Rightarrow\omega\in\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\Rightarrow$

$\Rightarrow\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)\overset{5.}{=}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(B_i)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{P}(A_i)$, което искахме да докажем. $\square$

Дефиниция (Вероятностно пространство). Вероятностно пространство ще наричаме наредената тройка $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, където:

- Ω е **пространство на елементарните събития** (извадково пространство) - непразно множество от всички възможни резултати (елементарни събития) от даден случаен експеримент.
- $\mathscr{A}$ е **σ-алгебра на събитията** върху Ω.
- $\mathbb{P}$ е вероятностна мярка (вероятност), тоест функция $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$.

Примери:

$\oplus$ Пространство от елементарни събития: $\Omega = \{0,1\}$, σ-алгебра: $\mathscr{A} = \big\{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\big\} = 2^\Omega$ и вероятност $\mathbb{P}$: $\mathbb{P}(\{0\}) := p$, $\mathbb{P}(\{1\}) := 1 - p$,

$\oplus$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} \simeq \{1,2,\cdots,n\}$. $\mathscr{A} = 2^\Omega$. $\{p_i\}_{i=1}^n \geq 1$ и $\Sigma_{i=1}^n p_i = 1$.
За всяко събитие $A \subseteq \Omega : \mathbb{P}(A) := \Sigma_{i\in A} p_i$
Проверка: По дефиниция $\mathbb{P}(\Omega) = \Sigma_{i\in\Omega} p_i = \Sigma_{i=1}^n p_i = 1$
Ако $A \subseteq \Omega$, то $\mathbb{P}(A^c) = \Sigma_{i\in A^c} p_i = \Sigma_{i\notin A} p_i = \Sigma_{i=1}^n p_i - \Sigma_{i\in A} p_i = 1 - \mathbb{P}(A)$.
Нека $A_1, \ldots, A_k$ са непресичащи се събития. Тогава:
$\mathbb{P}\big(\cup_{j=1}^k A_j\big) = \Sigma_{i\in\bigcup_{j=1}^k A_j} p_i = \Sigma_{j=1}^k \Sigma_{i\in A_j} p_i = \left(\begin{matrix} i \text{ принадлежи на точно} \\ \text{едно от събитията} \end{matrix}\right) = \Sigma_{j=1}^k \mathbb{P}(A_j)$.

$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, \ldots\}$. $p_i = \dfrac{c}{i^2}$, $i \geq 1$

$\mathbb{P}(A) = \displaystyle\sum_{i\in A} p_i = c\sum_{i\in A}\frac{1}{i^2}$. За да бъде $\mathbb{P}$ вероятностна мярка е необходимо да е изпълнено: $c\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = 1 \Leftrightarrow c = \frac{6}{\pi^2}$, тъй като $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.
Следователно само за $c = \dfrac{6}{\pi^2}$ ще може да дефинираме вероятност и съответно вероятностно пространство.

$\oplus$ $\Omega = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$. $\underbrace{\mathscr{B}(\Omega) = \mathscr{A}}_{\text{бореловата сигма алгебра}} : \mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, за всяко $A \in \mathscr{A}$.