

Второ контролно по статистика и емпирични методи Софтуерно инженерство

Задача 1. Хвърлят се два червени и два сини зара. Нека X е броя на падналите се четни числа върху червените зарове, а Y е броя на падналите се петици върху четирите зара. Да се определи:

- а) съвместното разпределение на X и Y ;
- б) разпределението на $Z = \min\{X, Y\}$ и средната стойност $\mathbb{E}(Z | Y = 2)$.

Решение:

$X = \{\text{брой четни числа върху червените зарове}\}, \Omega_X \in \{0, 1, 2\}$

$Y = \{\text{брой петици върху всички зарове}\}, \Omega_Y \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

а) съвместно разпределение:

Означаваме $\mathbb{P}(X = k \cup Y = l) = \mathbb{P}(X = k, Y = l) = p_{kl}$, за $k \in \{0, 1, 2\}$ и $l \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Размерността на таблицата със съвместното разпределение ще е $k \times l = |\Omega_X| \times |\Omega_Y| = 3 \times 5 = 15$ клетки за попълване.

Нека с C_{kl} означаваме множеството, чиито елементи отговарят на условията наложени от p_{kl} (елементите, които са благоприятни изходи). Тогава ще имаме, че:

$$p_{kl} = \frac{\sum_{C_{k,l} \in \text{Good}} \prod_{A \in C_{kl}} |A|}{|\Omega|^4}.$$

Въвеждаме и неформалното означение:

$$\underbrace{\{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \dots\}}_{\times 2} = \left\{ \{\{A\}, \{B\}, \{C\}, \{D\}, \dots\}, \{\{A\}, \{C\}, \{B\}, \{D\}, \dots\} \right\}$$

$C_{00} = \{\{1, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}$, следователно по формулата по-горе

$$\text{ще имаме, че } p_{00} = \frac{2 \times 2 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{2^2 \times 5^2}{6^4} = \frac{100}{6^4}$$

(т.е. имаме нула броя паднали се четни числа от червените зарове и нула броя паднали се петици общо върху всички зарове)

$$C_{01} = \left\{ \underbrace{\{\{1, 3\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{\{1, 3\}, \{1, 3\}, \{5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}\}}_{\times 2} \right\},$$

$$p_{01} = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 5 \times 5 + 2 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2}{6^4} = \frac{2^2 \times 5 \times 7}{6^4} = \frac{140}{6^4}$$

$$C_{02} = \left\{ \underbrace{\{\{1,3\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{1,2,3,4,6\},\{5\}}_{\times 2}, \underbrace{\{\{5\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2} \right\},$$

$$\left\{ \{1,3\},\{1,3\},\{5\},\{5\} \right\} \Bigg\},$$

$$p_{02} = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 5 \times 2 + 1 \times 1 \times 5 \times 5 + 2 \times 2 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2^2 \times 5^2 + 5^2 + 2^2}{6^4} = \frac{3 \times 23}{6^4} = \frac{69}{6^4}$$

$$C_{03} = \left\{ \underbrace{\{\{1,3\},\{5\},\{5\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{\{5\},\{5\},\{5\},\{1,2,3,4,6\}\}}_{\times 2} \right\},$$

$$p_{03} = \frac{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 \times 5 \times 2}{6^4} = \frac{2 \times 7}{6^4} = \frac{14}{6^4}$$

$$C_{04} = \{\{5\},\{5\},\{5\},\{5\}\}, p_{04} = \frac{1}{6^4}$$

$$C_{10} = \left\{ \underbrace{\{2,4,6\},\{1,3\}}_{\times 2}, \{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\} \right\},$$

$$p_{10} = \frac{3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{2^2 \times 3 \times 5^2}{6^4} = \frac{300}{6^4}$$

$$C_{11} = \left\{ \underbrace{\{\{2,4,6\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{1,2,3,4,6\},\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2}, \underbrace{\{\{2,4,6\},\{1,3\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{1,2,3,4,6\}}_{\times 2} \right\}$$

$$p_{11} = \frac{3 \times 1 \times 2 \times 5 \times 5 + 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2}{6^4} = \frac{2 \times 3^3 \times 5}{6^4} = \frac{270}{6^4}$$

$$C_{12} = \left\{ \underbrace{\{\{2,4,6\},\{5\}\}}_{\times 2}, \underbrace{\{1,2,3,4,6\},\{5\}}_{\times 2}, \underbrace{\{\{2,4,6\},\{1,3\},\{5\},\{5\}\}}_{\times 2} \right\}$$

$$p_{12} = \frac{3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 5 \times 2 + 3 \times 2 \times 2 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2^3 \times 3^2}{6^4} = \frac{72}{6^4}$$

$$C_{13} = \left\{ \underbrace{\{2,4,6\},\{5\}}_{\times 2}, \{5\},\{5\},\{5\} \right\}, p_{13} = \frac{3 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{2 \times 3}{6^4} = \frac{6}{6^4}$$

$C_{14} = \emptyset, p_{14} = 0$ (няма как да се случи да се падне едно четно от червените зарчета и в същото време всички зарчета да са петици)

$$C_{20} = \{ \{2,4,6\}, \{2,4,6\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,4,6\} \},$$

$$p_{20} = \frac{3 \times 3 \times 5 \times 5}{6^4} = \frac{3^2 \times 5^2}{6^4} = \frac{225}{6^4}$$

$$C_{21} = \{ \{2,4,6\}, \{2,4,6\}, \{5\}, \{1,2,3,4,6\} \},$$

$$p_{21} = \frac{3 \times 3 \times 1 \times 5 \times 2}{6^4} = \frac{2 \times 3^2 \times 5}{6^4} = \frac{90}{6^4}$$

$$C_{22} = \{ \{2,4,6\}, \{2,4,6\}, \{5\}, \{5\} \}, p_{22} = \frac{3 \times 3 \times 1 \times 1}{6^4} = \frac{3^2}{6^4} = \frac{9}{6^4}$$

$$C_{23} = C_{24} = \emptyset \Rightarrow p_{23} = p_{24} = 0$$

Проверка:

$$100 + 140 + 69 + 14 + 1 + 300 + 270 + 72 + 6 + 225 + 90 + 9 =$$

$$= 309 + 315 + 348 + 324 = 624 + 672 = 1296 = 6^4$$

Таблица на съвместното разпределение:

$Y \setminus X$	0	1	2	$\mathbb{P}(Y = j)$
0	$\frac{100}{6^4}$	$\frac{300}{6^4}$	$\frac{225}{6^4}$	$\frac{625}{6^4}$
1	$\frac{140}{6^4}$	$\frac{270}{6^4}$	$\frac{90}{6^4}$	$\frac{500}{6^4}$
2	$\frac{69}{6^4}$	$\frac{72}{6^4}$	$\frac{9}{6^4}$	$\frac{150}{6^4}$
3	$\frac{14}{6^4}$	$\frac{6}{6^4}$	0	$\frac{20}{6^4}$
4	$\frac{1}{6^4}$	0	0	$\frac{1}{6^4}$
$\mathbb{P}(X = i)$	$\frac{324}{6^4}$	$\frac{648}{6^4}$	$\frac{324}{6^4}$	$\frac{1296}{6^4} = 1$

б) разпределението на $Z = \min\{X, Y\}$ и средната стойност $\mathbb{E}(Z | Y = 2)$.

$$Z = \Omega_X \cap \Omega_Y = \{0, 1, 2\}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 0) &= \sum_{i=0}^4 p_{0i} + \sum_{i=1}^2 p_{i0} = \\
&= p_{00} + p_{01} + p_{02} + p_{03} + p_{04} + p_{10} + p_{20} = \\
&= \frac{100 + 140 + 69 + 14 + 1 + 300 + 225}{6^4} = \\
&= \frac{849}{6^4} \approx 0.655
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 1) &= p_{00} + p_{11} + p_{12} + p_{13} + p_{14} + p_{21} = \\
&= \frac{270 + 72 + 6 + 0 + 90}{6^4} = \\
&= \frac{438}{6^4} \approx 0.338
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z = 2) &= p_{22} + p_{23} + p_{24} = \\
&= \frac{9 + 0 + 0}{6^4} = \\
&= \frac{9}{6^4} \approx 0.07
\end{aligned}$$

Проверка: $\frac{\sum_{i=0}^2 \mathbb{P}(Z = i)}{6^4} = \frac{849 + 438 + 9}{1296} = \frac{1296}{1296} = 1.$

Следователно Z има следното разпределение:

Z	0	1	2
\mathbb{P}	$\frac{849}{1296}$	$\frac{438}{1296}$	$\frac{9}{1296}$

Остава да намерим очакването на случайната величина Z при наличието на априорната информация, че $Y = 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z | Y = 2) &= \sum_{i=0}^2 i \times \mathbb{P}(Z = i | Y = 2) \\
&= 0 \times \frac{p_{02}}{\mathbb{P}(Y = 2)} + 1 \times \frac{p_{12}}{\mathbb{P}(Y = 2)} + 2 \times \frac{p_{22}}{\mathbb{P}(Y = 2)} = \\
&= 0 \times \frac{69}{6^4} \times \frac{6^4}{150} + 1 \times \frac{72}{6^4} \times \frac{6^4}{150} + 2 \times \frac{9}{6^4} \times \frac{6^4}{150} = \\
&= \frac{0 \times 69 + 1 \times 72 + 2 \times 9}{150} = \frac{72 + 18}{150} = \frac{3}{5} = 0.6
\end{aligned}$$

□

Задача 2. Случайна величина $Z = (X, Y)$ има плътност

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x + y)^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да се намерят:

а) константата c ;

б) плътността на сумата $X + Y$ и средната стойност $\mathbb{E}(Y | X = \frac{1}{2})$

Решение:

За да е дефинирана добре плътността е необходимо

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} c(x + y)^2 d\mathbb{R}^2 = \int_0^1 \int_x^1 c(x + y)^2 dy dx = \\ &= c \int_0^1 \int_x^1 x^2 + 2xy + y^2 dy dx = c \int_0^1 x^2 y + \frac{2xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \Big|_{y=x}^{y=1} dx = \\ &= c \int_0^1 x^2 + x + \frac{1}{3} - x^3 - x^3 - \frac{x^3}{3} dx = \\ &= c \int_0^1 \frac{1}{3} + x + x^2 - \frac{7}{3}x^3 dx = c \left(\frac{x}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{7x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \\ &= c \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \right) = c \left(\frac{4 + 4 + 6 - 7}{12} \right) = \\ &= \frac{7}{12}c \Rightarrow c = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

Естествено, може и да обърнем последователността на интегриране:

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}} c(x + y)^2 dx dy = c \int_0^1 \left(\int_0^y (x + y)^2 dx \right) dy = \\ &= c \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + 2xy + y^2) dx \right) dy = \\ &= c \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2y}{2} + y^2x \right) \Big|_{x=0}^{x=y} dy = c \int_0^1 \frac{y^3}{3} + y^3 + y^3 dy = \\ &= c \int_0^1 \frac{7}{3}y^3 dy = \frac{7}{3}c \int_0^1 y^3 dy = \frac{7}{3}c \frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=1} = \frac{7}{3}c \frac{1}{4} = \frac{7}{12}c \Rightarrow c = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

И в двата случая получаваме един и същ резултат за константата c .

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{12}{7}(x+y)^2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

б) Да се намери $f_{X+Y}(x, y)$ и средната стойност $\mathbb{E}\left(Y \mid X = \frac{1}{2}\right)$

$$\text{Полагаме } \begin{cases} Z_1 = X + Y \\ Z_2 = X \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = Z_2 \\ Y = Z_1 - X = Z_1 - Z_2 \end{cases}$$

$$\text{abs}(|J|) = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} \frac{\partial X(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial X(z_1, z_2)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial Y(z_1, z_2)}{\partial z_1} & \frac{\partial Y(z_1, z_2)}{\partial z_2} \end{vmatrix} \right) = \text{abs} \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = \text{abs}(0 - 1) = 1.$$

Съгласно теорема 1.7. , нека (X, Y) е двумерна непрекъсната случайна величина с плътност $f_{X,Y}$ и нека $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_{X,Y}(x, y) > 0\}$. Ако изображението $\psi : D \rightarrow \psi(D), (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ е дифеоморфизъм, то случайната величина $(U, V) = (u \circ (X, Y), v \circ (X, Y))$ е непрекъсната с плътност:

$$f_{U,V}(u, v) = \begin{cases} f_{X,Y}(x(u, v), y(u, v)) |J_{\psi^{-1}}(u, v)|, & (u, v) \in \psi(D) \\ 0, & (u, v) \notin \psi(D) \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{Z_1, Z_2}(z_1, z_2) = f_{X,Y}(z_2, z_1 - z_2) \text{abs}(|J|) = \frac{12}{7}(z_2 + z_1 - z_2)^2 \times 1 = \frac{12}{7}z_1^2.$$

Сега, да намерим $f_{Z_1}(z_1) = \int_{\mathbb{R}} \frac{12}{7}z_1^2 dz_2$, където, тъй като $f_{X,Y}(u, v) \neq 0$ за

$0 < u < v < 1$, то от $f_{X,Y}(z_2, z_1 - z_2)$ следва, че трябва да е изпълнено:

$$0 < z_2 < z_1 - z_2 < 1.$$

$$\text{От } \begin{cases} Z_1 = X + Y \\ Z_2 = X \end{cases} \text{ и } x, y \in (0, 1), \text{ като } 0 < x < y < 1 \text{ следва, че } \begin{cases} z_1 \in (0, 2) \\ z_2 \in (0, 1) \end{cases}.$$

Знаем, че $z_2 < z_1 - z_2 < 1 \Rightarrow 2z_2 < z_1 < 1 + z_2 \Rightarrow 2z_2 < z_1$, т.е. $z_2 < \frac{z_1}{2}$ и

$z_1 < 1 + z_2$, т.е. $z_2 > z_1 - 1$.

$$\text{Следователно, } \begin{cases} z_2 < \frac{z_1}{2} \\ z_2 > z_1 - 1 \\ z_2 \in (0,1) \\ z_1 \in (0,2) \end{cases} \Rightarrow \text{ако } z_1 \in [1,2), \text{ то } z_2 < \frac{z_1}{2} \text{ и също така } z_2 > z_1 - 1,$$

$$\text{т.е. } z_1 - 1 < z_2 < \frac{z_1}{2}.$$

$$\text{За } z_1 \in (0,1) : z_2 < \frac{z_1}{2}, \text{ но от } \begin{cases} z_2 > z_1 - 1 \\ z_1 \in (0,1) \\ z_2 \in (0,1) \end{cases} \Rightarrow z_2 > 0 \Rightarrow 0 < z_2 < \frac{z_1}{2}.$$

Сега вече знаем границите на съответните интеграли и може да преминем към пресмятането им.

I сл. $z_1 \in [1,2)$:

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(z_1) &= \int_{z_1-1}^{\frac{z_1}{2}} \frac{12}{7} z_1^2 \, dz_2 = \frac{12}{7} z_1^2 z_2 \Big|_{z_2=z_1-1}^{z_2=\frac{z_1}{2}} = \\ &= \frac{12}{7} z_1^2 \left(\frac{z_1}{2} - z_1 + 1 \right) = \frac{12}{7} z_1^2 \left(1 - \frac{z_1}{2} \right) \end{aligned}$$

II сл. $z_1 \in (0,1)$:

$$\begin{aligned} f_{Z_1}(z_1) &= \int_0^{\frac{z_1}{2}} \frac{12}{7} z_1^2 \, dz_2 = \frac{12}{7} z_1^2 z_2 \Big|_{z_2=0}^{z_2=\frac{z_1}{2}} = \\ &= \frac{12}{7} z_1^2 \frac{z_1}{2} = \frac{12}{7} \frac{z_1^3}{2} = \frac{6z_1^3}{7} \end{aligned}$$

Получихме, че:

$$f_{Z_1}(t) = f_{X+Y}(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{6t^3}{7}, & \text{за } t \in (0,1) \\ \frac{12}{7} t^2 \left(1 - \frac{t}{2} \right), & \text{за } t \in [1,2) \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

Остана да намерим средната стойност $\mathbb{E}\left[Y|X = \frac{1}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, v) dv = \int_x^1 \frac{12}{7}(x+v)^2 dv = \frac{12}{7} \int_x^1 x^2 + 2xv + v^2 dv = \\ &= \frac{12}{7} \left(x^2v + xv^2 + \frac{v^3}{3} \right) \Big|_x^1 = \frac{12}{7} \left(x^2 + x + \frac{1}{3} - x^3 - x^3 - \frac{x^3}{3} \right) = \\ &= \frac{12}{7} \left(x^2 + x + \frac{1}{3} - \frac{7}{3}x^3 \right) = \frac{4}{7} + \frac{12}{7}x + \frac{12}{7}x^2 - 4x^3 \end{aligned}$$

Следователно $f_X\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{7} + \frac{6}{7} + \frac{3}{7} - \frac{1}{2} = 1 + \frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{6}{7} = \frac{19}{14}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[Y|X = \frac{1}{2}\right] &= \frac{1}{f_X(\frac{1}{2})} \int_{\mathbb{R}} y \frac{12}{7} \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 dy = \frac{14}{19} \int_{\frac{1}{2}}^1 y \frac{12}{7} \left(\frac{1}{2} + y\right)^2 dy \\ &= \frac{24}{19} \int_{\frac{1}{2}}^1 y \left(\frac{1}{4} + y + y^2\right) dy = \frac{24}{19} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{4}y + y^2 + y^3 dy = \\ &= \frac{24}{19} \left(\frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{24}{19} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} - \frac{1}{24} - \frac{1}{64} \right) = \\ &= \frac{24}{19} \left(\frac{3+8+6-1}{24} - \frac{3}{64} \right) = \frac{24}{19} \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{64} \right) = \frac{24}{19} \times \frac{128-9}{192} \\ &= \frac{24}{19} \times \frac{119}{192} = \frac{7 \times 17}{8 \times 19} \approx 0.7828 \end{aligned}$$

□

Задача 3. Височината на студентите е нормално разпределена случайна величина с параметри $\mathcal{N}(170, 4^2)$ за момичетата и $\mathcal{N}(174, 4^2)$ за момчетата. Да се определи вероятността от двама случайно избрани студента, поне един от тях да има ръст между 160 см и 172 см. (Допълнително пояснение за задачата: $\sigma = 4$)

Решение:

Дефинираме събитията:

$M = \{\text{случайно избран студент е момче}\}$

$F = \{\text{случайно избран студент е момиче}\}$

$A = \{\text{от 2 случайно избрани студента, поне един от тях има ръст между 160 см и 172 см}\}$

Тогава,

$\bar{A} = \{\text{от 2 случайно избрани студента, нито един от тях не е с ръст между 160 см и 172 см}\}$

Дефинираме още,

$B_i = \{i\text{-тия студент е или под 160 см. височина или над 172 см. височина}\}$, за $i = 1, 2$.

$\bar{A} = B_1 \cap B_2$.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) \stackrel{B_1 \perp B_2}{=} \stackrel{\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(B_2)}{=} 1 - \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2) = 1 - [\mathbb{P}(B_1)]^2.$$

Тъй като избираме студентите на случаен принцип и нямаме априорна информация, то приемаме, че избираме момиче или момче с равна вероятност:

$$\mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(F) = \frac{1}{2}.$$

Нека X е случайна величина, отразяваща ръста на случайно избрания студент. Тогава:

$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X < 160 \cup X > 172) = \mathbb{P}(X < 160) + \mathbb{P}(X > 172)$, тук използвахме, че събитията $\{X < 160\}$ и $\{X > 172\}$ са непресичащи се.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < 160) &= \mathbb{P}(X < 160 | F)\mathbb{P}(F) + \mathbb{P}(X < 160 | M)\mathbb{P}(M) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X < 160 | F) + \mathbb{P}(X < 160 | M)) \end{aligned}$$

По условие знаем, че ако студентът е момиче, то $X \in \mathcal{N}(170, 4^2)$, а ако е момче: $X \in \mathcal{N}(174, 4^2)$. Тогава:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X < 160) &= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(\mathcal{N}(170, 4^2) < 160) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(174, 4^2) < 160) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{160 - 170}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{160 - 174}{4}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) < -2.5) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) < -3.5) \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\Phi(-2.5) + \Phi(-3.5)) \approx \frac{1}{2} (0.0062 + 0.0001) = \\
&= \frac{1}{2} \times 0.0063 = 0.00315
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X > 172) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 172)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \leq 172) &= \mathbb{P}(X \leq 172 | M) \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(X \leq 172 | F) \mathbb{P}(F) = \\
&= \frac{1}{2} (\mathbb{P}(X < 172 | M) + \mathbb{P}(X < 172 | F)) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(\mathcal{N}(174, 4^2) < 172) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(170, 4^2) < 172) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{172 - 174}{4}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0, 1) < \frac{172 - 170}{4}\right) \right) = \\
&= \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) < -0.5) + \mathbb{P}(\mathcal{N}(0, 1) < 0.5) \right) = \\
&= \frac{1}{2} (\Phi(-0.5) + \Phi(0.5)) = \frac{1}{2} (\Phi(-0.5) + 1 - \Phi(-0.5)) = \\
&= \frac{1}{2} \times 1 = 0.5
\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(X > 172) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 172) = 1 - 0.5 = 0.5.$$

Сега вече може да пресметнем:

$$\mathbb{P}(B_1) = \mathbb{P}(X < 160) + \mathbb{P}(X > 172) \approx 0.00315 + 0.5 = 0.50315.$$

Търсената вероятност е

$$\mathbb{P}(A) = 1 - [\mathbb{P}(B_1)]^2 \approx 1 - (0.50315)^2 \approx 1 - 0.25315 = 0.74684$$

□

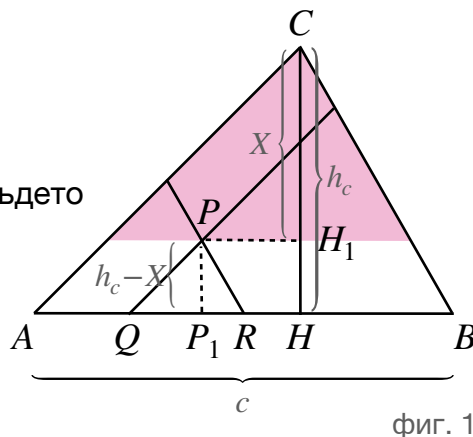
Задача 4. Във вътрешността на триъгълник с лице 1 по случаен начин избираме точка P . Правите през P , успоредни на две от страните на триъгълника, пресичат третата му страна в точките Q и R . Да се намери средната стойност на лицето на:

- $\triangle PQR$;
- шестоъгълника $QRSTVW$, където точките S, T, V и W се дефинират аналогично на точките Q и R .

Решение:

- $PQ \parallel CA, PR \parallel CB$

Въвеждаме означенията: $AB = c, CH = h_c$ и случайната величина $X = \{\text{размера на } CH_1\}$, където H_1 е проекцията на точка P върху височината CH на $\triangle ABC$. По условие имаме $ch_c = 2$.



Означаваме с P_1 проекцията на точка P върху страната AB на $\triangle ABC$.

Тогава ще имаме, че $PP_1 = CH - CH_1 = h_c - X$.

Тъй като $\triangle PQR \sim \triangle CAB$, то $\frac{PP_1}{CH} = \frac{QR}{AB}$. Следователно $\frac{h_c - X}{h_c} = \frac{QR}{c} \Rightarrow$
 $\Rightarrow QR = \frac{c(h_c - X)}{h_c}$.

$$S_{\triangle PQR} = \frac{QR \times PP_1}{2} = \frac{\frac{c(h_c - X)}{h_c} \times (h_c - X)}{2} = \frac{c(h_c - X)^2}{2h_c}.$$

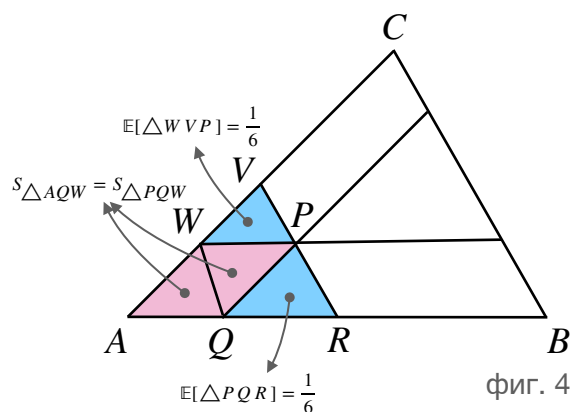
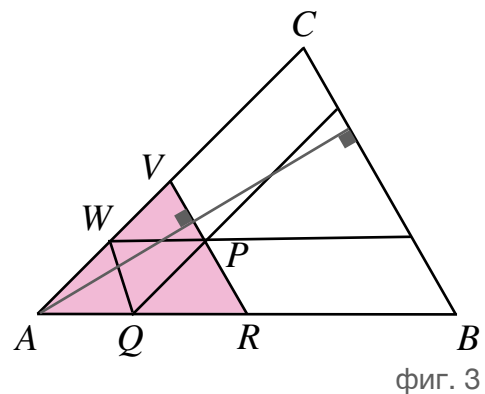
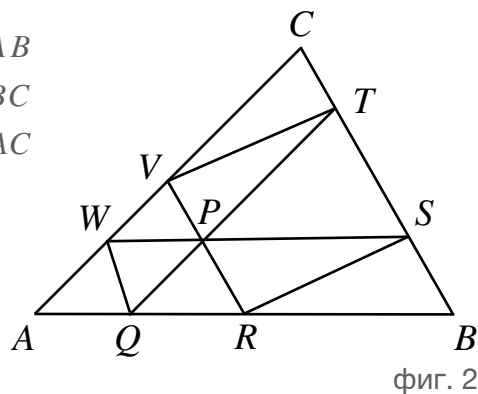
Необходимо е да намерим плътността на случайната величина X . Може лесно да намерим функцията ѝ на разпределение:

$$F_X(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \frac{S_{\triangle}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{t}{h_c}\right)^2, \text{ но } f_X(t) = \frac{\partial}{\partial t} [F_X(t)] = \frac{2t}{h_c^2} \mathbb{I}_{\{t \in (0, h_c)\}}.$$

С \mathbb{I} сме отбелязали индикаторна функция.

Сега вече имаме плътността на случайната величина X и лицето на $\triangle PQR$ изразено чрез две константи и същата тази случайна величина. Тоест може да пресметнем:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[S_{\Delta PQR}\right] &= \int_0^{h_c} S_{\Delta PQR}(t) \times f_X(t) \, dt = \int_0^{h_c} \frac{c(h_c - t)^2}{2h_c} \times \frac{2t}{h_c^2} \, dt = \\ &= \frac{c}{h_c^3} \int_0^{h_c} th_c^2 - 2t^2h_c + t^3 \, dt = \frac{c}{h_c^3} \left(\frac{t^2h_c^2}{2} - \frac{2t^3h_c}{3} + \frac{t^4}{4} \right) \Bigg|_0^{h_c} = \\ &= \frac{c}{h_c^3} \times h_c^4 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = ch_c \times \frac{1}{12} = 2 \times \frac{1}{12} = \\ &= \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & WS \parallel AB \\ & VR \parallel BC \\ & QT \parallel AC \end{aligned}$$


Първо разглеждаме фигура 1. Ние знаем, че очакването \mathbb{E} е линеен функционал и може да заключим, че:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [S_{QRSTVW}] &= \mathbb{E} [S_{\triangle PQR}] + \mathbb{E} [S_{\triangle PST}] + \mathbb{E} [S_{\triangle PVW}] + \mathbb{E} [S_{\triangle PRS}] + \mathbb{E} [S_{\triangle PTV}] + \mathbb{E} [S_{\triangle PWQ}] = \\
&= 3\mathbb{E} [S_{\triangle PQR}] + 3\mathbb{E} [S_{\triangle PWQ}] = 3 \times \frac{1}{6} + 3\mathbb{E} \left[\frac{S_{AQPW}}{2} \right] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{AQPW}] = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle ARV} - (S_{\triangle QPR} + S_{\triangle PWV})] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle ARV}] - \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle QPR}] - \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle PWV}] = \\
&= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle ARV}] - 2 \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{6} = \\
&= \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle ARV}].
\end{aligned}$$

Сведохме задачата от подточка б) до намиране на очакването за лицето на $\triangle ARV$, който е подобен на $\triangle ABC$.

Въвеждаме случайна величина $Y = \{\text{дължината на височината на } \triangle ARV \text{ през върха } A\}$ и означаваме височината на $\triangle ABC$ през върха A с h_a , а страната BC с a . По условие знаем, че $ah_a = 2$.

$$\text{От друга страна } \triangle ARV \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{h_{\triangle ARV}}{h_{\triangle ABC}} = \frac{RV}{BC}, \frac{Y}{h_a} = \frac{RV}{a}$$

$$\Rightarrow RV = \frac{aY}{h_a} \Rightarrow S_{\triangle ARV} = \frac{Y \times RV}{2}, \text{ но } F_Y(t) = \left(\frac{t}{h_a} \right)^2 \Rightarrow f_Y(t) = \frac{\partial}{\partial t} [F_Y(t)] = \frac{2t}{h_a^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} [S_{\triangle ARV}] &= \int_0^{h_a} S_{\triangle ARV}(t) \times f_Y(t) \, dt = \int_0^{h_a} \frac{at^2}{2h_a} \times \frac{2t}{h_a^2} \, dt = \\
&= \frac{a}{h_a^3} \int_0^{h_a} t^3 \, dt = \frac{a}{h_a^3} \times \frac{t^4}{4} \Big|_0^{h_a} = \frac{ah_a}{4} = \frac{2}{4} = \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E} [S_{QRSTVW}] = \frac{3}{2}\mathbb{E} [S_{\triangle ARV}] = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

□