Упражнение 3 по СЕМ

19 октомври 2020 г.

Задача 1. С цел намаляване броя на изиграните мачове, $2k$ отбора с жребий се разбиват на две равни по брой групи. Да се определи вероятността двата най-силни отбора да са в различни групи.

Решение:

Нека двата най-силни отбора са 1 и 2 и нека

$A = \{$първата група, в която сме фиксирали отбор $1\}$

$B = \{$влиза отбор 1, но не влиза отбор $2\}$

Тогава $\mathbb{P}(B) = \dfrac{|B|}{|A|} = \dfrac{\binom{2k-2}{k-1}}{\binom{2k-1}{k-1}}$.

Задача 2. От урна, която съдържа топки с номера $1, 2, \ldots, n$, k пъти последователно се вади по една топка. Да се пресметне вероятността номерата на извадените топки, записани по реда на изваждането, да образуват растяща редица, ако:

a) **извадката е без връщане;**

b) **извадката е с връщане.**

Решение:

a) Всички възможни избори без връщане са $\Omega = V(n;k)$. Избираме редица $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

$A = \{$строго растяща редица$\} = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \,|\, 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$

$A \to C_n^k$

$(i_1, i_2, \ldots, i_k) \mapsto \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$

$$\mathbb{P} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n}{k}}{V_n^k} = \frac{1}{k!}.$$

b) $\Omega = V(n;k)$

$B = \{(i_1, i_2, \ldots, i_k) \in \mathbb{Z}^k \,|\, 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n\}$

$B \to C(n;k)$

$(i_1, i_2, \ldots, i_k) \overset{\varphi}{\mapsto} [i_1, i_2, \ldots, i_k]$ - мултимножество

$\Rightarrow \varphi$ е биекция

$$|B| = |C(n;k)| \Rightarrow \mathbb{P} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}.$$

Задача 3. Парадокс на дьо Мере: Да се пресметне вероятността при хвърляне на 2 зара да се падне поне една шестица, ако всички изходи са равновероятни и:

a) заровете са различими;

b) заровете са неразличими.

Кой модел отразява вярно действителността?

Решение:

Всички възможни събития са $\Omega = V(6;2) = 36$.

a) Нека $A = \{$не се пада нито една шестица$\}$. Тогава $\overline{A} = \{$пада се поне една шестица$\}$ е $\overline{A} = \Omega \backslash A$.

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{5.5}{36} = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}.$$

b) $\overline{A} = \{[1 \div 5,\ 1 \div 5]\}$ - двуелементните мултимножества на числата от едно до пет.

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \frac{|C(5;2)|}{|C(6;2)|} = 1 - \frac{\binom{5+2-1}{2}}{\binom{6+2-1}{2}} = 1 - \frac{\binom{6}{2}}{\binom{7}{2}} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}.$$

В действителността може да приемем, че всеки два обекта са различими. Следователно първия модел отразява вярно действителността.

Задача 4. Вероятността стелец да улучи мишена е $\frac{2}{3}$, ако улучи той получава право на втори изстрел. Вероятността за улучване и на двете мишени е $\frac{1}{2}$. Каква е вероятността за улучване на втората мишена, ако стрелецът е получил право да стреля втори път?

Решение:

Нека $A_i = \{$стрелеца улучва i-тата мишена$\}$

$\mathbb{P}(A_1) = \frac{2}{3}$; $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{2}$. Търси се $\mathbb{P}(A_2 | A_1)$.

$$\mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap A_2)}{\mathbb{P}(A_1)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Задача 5. Застрахователна компания води статистика за воите клиенти:

- **всички клиенти посещават поне веднъж годишно лекар;**
- $60\,\%$ **посещават повече от веднъж годишно лекар;**
- $17\,\%$ **посещават хирург;**
- $15\,\%$ **от тези, които посещават повече от веднъж годишно лекар, посещават хирург.**
  Каква е вероятността случайно избран клиент, който посещава само веднъж годишно лекар, да не е бил при хирург?

Решение:

Разбиваме множеството на клиентите на:

$A = \{$клиент, който е посещавал лекар точно веднъж$\}$

$\overline{A} = \{$клиент, който е посещавал лекар повече от веднъж$\}$

$H = \{$клиент който е бил при хирург$\}$

Имаме, че:

$\mathbb{P}(\overline{A}) = 60\,\%$

$\mathbb{P}(A) = 1 - \overline{\mathbb{A}} = 1 - 60\,\% = 40\,\%$

$\mathbb{P}(H) = 17\,\%$

$\mathbb{P}(H | \overline{A}) = 15\,\%$

Търси се: $\mathbb{P}(\overline{H} | A)$.

$\mathbb{P}(\overline{H} | A) = \frac{\mathbb{P}(\overline{H} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{H} \cap \overline{\overline{A}})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(\overline{H \cup \overline{A}})}{\mathbb{P}(A)}$, но от принципа на включването и изключването имаме, че $\mathbb{P}(H \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(H \cup \overline{A})$ или $\mathbb{P}(H \cup \overline{A}) = \mathbb{P}(H) + \mathbb{P}(\overline{A}) - \mathbb{P}(H \cap \overline{A})$.

Следователно $\mathbb{P}(\overline{H} | A) = \frac{1 - \mathbb{P}(H \cup \overline{A})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1 - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(\overline{A}) + \mathbb{P}(H \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(A)}$ $\quad\star$

От друга страна, от формулата за условна вероятност имаме, че $\mathbb{P}(H | \overline{A}) = \frac{\mathbb{P}(H \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})}$ или

$\mathbb{P}(H \cap \overline{A}) = \mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(H | \overline{A})$.

Сега заместваме с горното равенство в ★ и получаваме:

$$\mathbb{P}(\overline{H}\,|\,A) = = \frac{1-\mathbb{P}(H)-\mathbb{P}(\overline{A})+\mathbb{P}(\overline{A})\mathbb{P}(H\,|\,\overline{A})}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1-17\%-60\%+60\,\%\,.15\,\%}{40\,\%} = \frac{23\%+9\,\%}{40\,\%} = \frac{4}{5} = 80\,\%$$

Задача 6. Да се определи вероятността, случайно избрано естествено число, да не се дели:
a) нито на две, нито на три;
b) на две или на три.

Решение:

Нека всички естествени числа, без ограничение на общността са n.
Тези, които се делят на 2 са $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ и нека ги отбележим с D_2;
Тези, които се делят на 3 са $\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ и нека ги отбележим с D_3;
Тези, които се делят на 6 са $\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$ и нека ги отбележим с D_{23};
Нека $A = \{$тези, които не се делят нито на 2 нито на $3\} = \Omega \backslash \{$тези, който се делят и на 2 и на $3\}$
Следователно $\overline{A} = D_2 \cup D_3$;
$|D_2 \cup D_3| = |D_2| + |D_3| - |D_2 \cap D_3|$
$|A| = 1 - |D_2 \cup D_3| = 1 - |D_2| - |D_3| + |D_2 \cup D_3| = 1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1 - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

В подточка b) отговора е $\mathbb{P}(A) = \dfrac{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{6} \right\rfloor}{n} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$. От тези, които се делят на две, вадим тези които се делят И на три и аналогично обратното. Тук сме допуснали, че ако числото се дели на 2, то не искаме да се дели на 3 и обтатното.

Задача 7. Хвърлят се два зара. Каква е вероятността сумата от падналите числа да е по-малка от 8, ако се знае, че тя е нечетна? Независими ли са двете събития?

Решение:
Нека $A = \{$сумата от двата зара е по-малка от $8\} = \{(a, b)\,|\,a + b \leq 7\}$ и
$B = \{$сумата от двата зара е нечетна$\} = \{a + b \equiv 1 \mod 2\}$

$\Omega = \{$множеството от всички възможни събития$\} = V(6; 2)$
$|\Omega| = |V(6; 2)| = 36$

Всевъзможните суми са:
$x_1 + x_2 = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
Всевъзможните начини за съставяне на всяка сума са съответно:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36$
Възможните конфигурации, в които сумата е по-малка от 8 са:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 16$
От тях $2 + 4 + 6 = 12$ дават нечетна сума $\Rightarrow \mathbb{P}(A\,|\,B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3}$.