Задача 37. [Китай 1994, Chengzhang Li] Дванадесет музиканти $M_1, M_2, \ldots, M_{12}$ се събират на седмичен фестивал по камерна музика. Всеки ден има един концерт, на който част от музикантите свирят, а останалите слушат като публика. За $i = 1,2,...,12$, нека t_i е броят на концертите, в които свири музикант M_i, и нека $t = t_1 + t_2 + \ldots + t_{12}$. Намерете най-малката възможна стойност на t, за която е възможно всеки музикант да слуша като публика всички останали музиканти.

Предварителнен коментар:

Условието на чадачата е следното:

- Ако един музикант не свири на даден ден, той слуша концерта като публика.
- Ако един музикант свири на даден ден, той не може да слуша изпълненията на другите музиканти през този ден.
- От всеки музикант се изисква да слуша поне по едно изпълнение на всеки от останалите музиканти.

Нека именуваме тези условия с Δ.

Решение:

Наблюдение 1. За да се изпълни условието Δ, всяка група от **3** музиканти трябва да свирят в поне 3 концерта. Наистина, ако те свирят само в 2 концерта, то по принципа на Дирихле, двама от тях свирят в 1 концерт. Следователно те не могат да се наблюдават взаимно през този ден. Това означава, че те трябва да се наблюдават взаимно в другия концерт, което е невъзможно (тъй като трябват поне два отделни дни за да се наблюдават двама музиканта взаимно).

$\square$

Наблюдение 2. За да се изпълни условието Δ, всяка група от **7** или повече музиканти трябва да свирят в поне 4 концерта. Наистина, ако те свирят само в 3 концерта, то по принципа на Дирихле, има поне 3 музиканти, които свирят в 1 концерт, следователно те не могат да се наблюдават взаимно през този концерт. Те трябва да се наблюдават взаимно в останалите 2 концерта, което е невъзможно според наблюдение 1.

$\square$

Наблюдение 3. За да се изпълни условието Δ, всяка група от **9** музиканти трябва да свирят в поне 5 концерта. Наистина, ако те свирят само в 4 концерта, то всеки от тях може да свири в най-много 3 концерта, тъй като в противен случай не би могъл да слуша останалите 8 музиканти. Забележете, че ако един от тях свири само в 1 концерт, то всички останали 8 музиканти трябва да присъстват като публика на този концерт. Тогава тези 8 музиканти разполагат само с 3 концерта, за да се наблюдават взаимно, което е невъзможно според наблюдение 2. Също така, ако един от тях свири в 3 концерта, то той може да слуша само в четвъртия концерт; следователно всички останали 8 музиканти трябва да свирят в този концерт. Това отново води до ситуация, при която останалите 8 музиканти трябва да се наблюдават взаимно в 3 концерта, което е невъзможно според наблюдение 2. Следователно всеки от 9-те музиканти свири в 2 концерта. Има $\binom{4}{2} = 6$ начина за избор на 2 концерта, в които да се свири. По принципа на Дирихле, има двама музиканти, които свирят в едни и същи концерти, поради което не могат да се наблюдават взаимно, което нарушава условието Δ.

$\square$

Допускаме, че има k музиканти, всеки от които свири само в 1 концерт. Тези k музиканти трябва да свирят в различни концерти, тъй като в противен случай не могат да се наблюдават взаимно. Следователно $0 \le k \le 7$. Забележете, че всички тези k концерта трябва да са солово изпълнение. Останалите $12 - k$ музиканти всеки свирят в поне 2 концерта и те трябва да се наблюдават взаимно в оставащите $7 - k$ концерта. Лесно се вижда, че това е невъзможно за $k = 7$ или $k = 6$. Ако $k = 5$, 7 музиканти трябва да се наблюдават взаимно в 2 концерта, което е невъзможно според наблюдение 2; ако $k = 4$, 8 музиканти трябва да се наблюдават взаимно в 3 концерта, което е невъзможно според наблюдение 2; и ако $k = 3$, 9 музиканти трябва да се наблюдават взаимно в 4 концерта, което е невъзможно според наблюдение 3. Следователно $k \leq 2$, откъдето следва, че $t \geq k + 2(12 - k) \geq 22$. Накрая даваме пример, който показва, че $t = 22$ наистина е постижимо. Нека музикантите M_1 и M_2 дават соло изпълнения съответно на ден 1 и ден 2. Всеки от останалите 10 музиканти ще свири два пъти. Остават 5 дни и следователно има $\binom{5}{2} = 10$ начина за избор на два дни, в които да се свири. По този начин, като на всеки музикант се даде да свири в различна двойка дни, примерът е завършен.

■

Алтернативно решение (оптимизационен подход):

При 7 човека очевидно ще имаме най-много 7 концерта, тъй като ако допуснем, че имаме по-малко, то от принципа на дирихле ще имаме поне един концерт с поне 2 музиканта, които няма да са се изслушали един друг.

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7

Как броя на концертите ще нарастне ако дойде музикант M_8? Тъй като фестивала е едноседмичен, то този нов музикант ще трябва да свири с един от другите седем музиканти, б.о.о. нека това е музикант M_7. Но така тези два музиканта няма да са се слушали един друг, за това M_7 трябва да го сложим с някой друг за да го чуе M_8 и M_8 трябва да го сложим с някой друг за да го чуе M_7.

Тоест концертите ще са:

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8	M_2, M_7	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7, M_8

Тоест концертите ще са общо 10.

Ако добавим музикант M_9, той или ще свири в група с още един музикант или в група с още двама музиканти.

- Ако свири в група с още един друг музикант, то казуса ще е същия като предния и новия музикант M_9 заедно с този с който ще свири в дадения ден, няма да са се чували един друг.

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8	M_2, M_7	M_3, M_9	M_4, M_6	M_5	M_6, M_9	M_7, M_8

- Ако свири в група с още два други музиканти в ден X, то тогава M_9 няма да се е чувал с тях. За да поправим това и за да изпълним Δ е необходимо M_9 да свири в група с други музиканти, в която група не са нито един от музикантите, с който той свири в ден X.

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8	M_2, M_7	M_3, M_9	M_4, M_6	M_5	M_6	M_7, M_8, M_9

Тоест и в двата случая имаме +3 концерта.

Тази минималистична логика може да продължи до 11-тия музикант.

$+M_{10}$

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8, M_{10}	M_2, M_7, M_5	M_3, M_9	M_4, M_6	M_5, M_{10}	M_6, M_9	M_7, M_8

$+M_{11}$

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8, M_{10}	M_2, M_7, M_5	M_3, M_9, M_{11}	M_4, M_6, M_{11}	M_5, M_{10}, M_{11}	M_6, M_9	M_7, M_8

Оказва се, че същата логика може да продължи и до M_{12}.

$+M_{12}$

Monday	Tuesday	Wednesday	Thursday	Friday	Saturday	Sunday
M_1, M_8, M_{10}	M_2, M_7, M_5	M_3, M_9, M_{11}	M_4, M_6, M_{11}	$M_5, M_{10}, M_{11}, M_{12}$	M_6, M_9, M_{12}	M_7, M_8, M_{12}

■