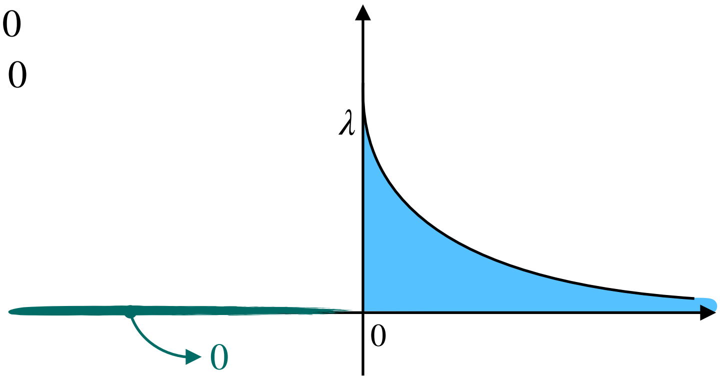
СЕМ, лекция 10
(2020-12-03)

B. Експоненциално разпределена НСВ

Дефиниция. Казваме, че случайната величина X е експоненциално разпределена с параметър $\lambda > 0$ и бележим $X \in Exp(\lambda)$, ако X има плътност от вида

$$f_X = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Проверка: $$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \mathrm{d}\, x = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x \overset{\begin{cases} y = -\lambda x \\ \mathrm{d}\, y = -\lambda\, \mathrm{d}\, x \\ \Rightarrow \mathrm{d}\, x = \frac{\mathrm{d}\, y}{-\lambda} \\ \lambda > 0 \Rightarrow y \in (0, -\infty) \end{cases}}{=} \int_0^{-\infty} \lambda e^y \frac{\mathrm{d}\, y}{-\lambda} =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} -1 e^y \mathrm{d}\, y = \int_{-\infty}^{0} e^y \mathrm{d}\, y = e^y \Big|_{-\infty}^{0} = 1 - 0 = 1.$$

Следователно плътността е добре дефинирана и X съществува.

Функция на разпределение $F_X(x) = \mathbb{P}(X < x)$:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda y} \mathrm{d}\, y = 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$

$\overline{F}_X = \mathbb{P}(X \geq x) = \begin{cases} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 1, & x \leq 0 \end{cases}$, където $\overline{F}_X$ се нарича „опашка“ на X.

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} x \,.\, \lambda e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x \overset{(*)}{=} \int_0^{\infty} x\, \mathrm{d} - e^{-\lambda x} \overset{\text{интегриране по части}}{=} -xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} - e^{-\lambda x} \mathrm{d}\, x =$$

$$= 0 - 0 - \frac{1}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \mathrm{d}(-\lambda x) = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}.$$

$$\left[(*) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[-e^{-\lambda x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}[-\lambda x] - e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} \right]$$

Втори подход (Файнман). Ние знаем, че

$$1 = \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x \Big| \frac{\partial}{\partial \lambda} \Rightarrow -\frac{1}{\lambda^2} = \int_0^\infty -x e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x$$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\lambda} = \lambda \displaystyle\int_0^\infty x e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x = \mathbb{E}X$, което искахме да докажем.

$$\mathbb{E}X^2 = \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, x = \frac{1}{\lambda^2} \times \lambda \times \frac{1}{-\lambda} \int_0^\infty (-\lambda x)^2 \times e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}(-\lambda x) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda^2} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \,\mathrm{d}\, 2(-\lambda x) = -\frac{2}{\lambda^2} \left(e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty \right) = -\frac{2}{\lambda^2}(0 - 1) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Окончателно, ако $X \sim Exp(\lambda)$, то $\mathbb{E}X = \dfrac{1}{\lambda}$ и $\mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \dfrac{2}{\lambda^2} - \dfrac{1}{\lambda^2} = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Експоненциалното разпределение е непрекъснат аналог на геометричното разпределение в смисъла на свойството безпаметност (memoryless). Ако вземем $t > 0,\, s > 0$, то $\mathbb{P}(X > t + s \,|\, X > t) = \mathbb{P}(X > s)$.

Доказателство.

$$\frac{\mathbb{P}(X > t + s \cap X > t)}{\mathbb{P}(X > t)} \overset{\{t\} \subseteq \{t+s\}}{=} \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = \mathbb{P}(X > s)$$

Преди да продължим, нека въведем следните нотации, които ще използваме по-долу:

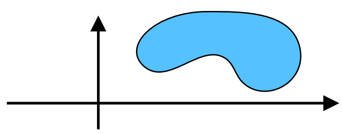
$X = (X_1, X_2)$, f_X – плътност на X, $x = (x_1, x_2)$
$Y = (Y_1, Y_2)$, f_Y – плътност на Y, $y = (y_1, y_2)$

$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Под $y = g(x)$ се разбира $(y_1, y_2) = \big(g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2)\big) = g(x)$.

Двумерна непрекъсната случайна величина

Дефиниция. $X = (X_1, X_2)$ е вектор от НСВ с плътност f_X, ако е изпълнено:

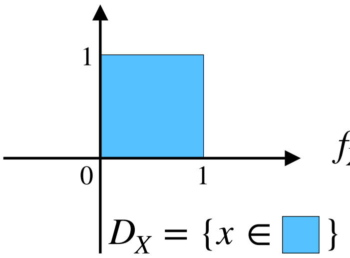
- $f_X(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^2$
- $\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty f_X(x_1, x_2) \underbrace{\mathrm{d}\, x_1 \,\mathrm{d}\, x_2}_{dx} = \int_{\mathbb{R}^2} f_X(x) \mathrm{d}\, x = 1$



- $\mathbb{P}(X \in D) = \int_D f_X(x)dx$, $\forall$ отворени/затворени множества $D \subseteq \mathbb{R}^2$

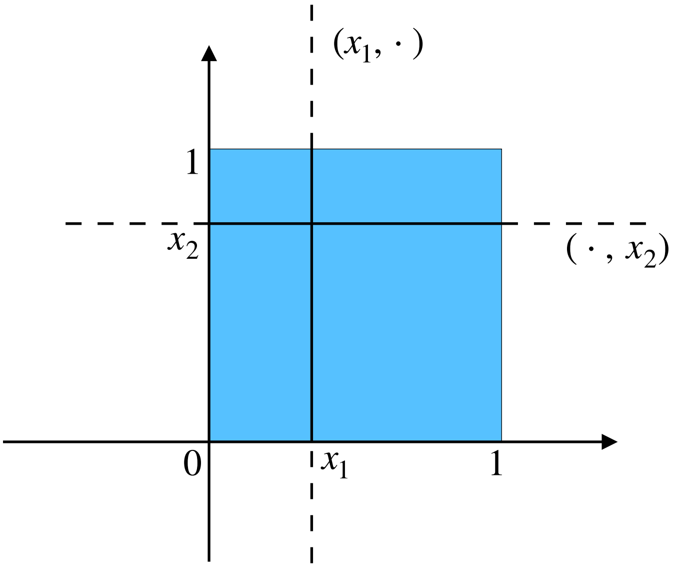
Дефиниция (Носител на случайна величина). Нека f_X е плътността на X. Тогава $D_X = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_X(x) > 0\}$ и D_X се нарича носител на X.

Смисъла на D_X е да показва какви са възможните стойности на случайния вектор.

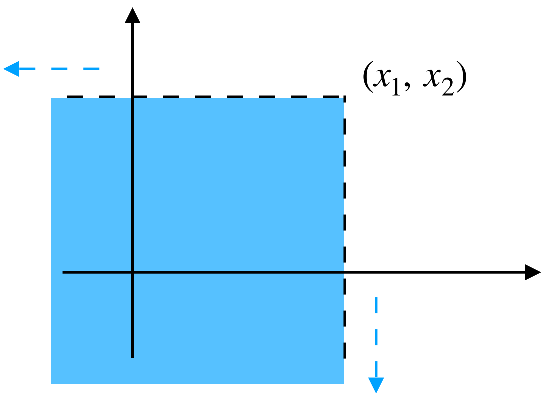


$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & x_1, x_2 \in (0,1) \\ 0, & x_1, x_2 \notin (0,1) \end{cases}$$

Дефиниция (Маргинални разпределения). Нека X е вектор от НСВ с плътност f_X. Тогава $f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\mathrm{d}\, x_2$ е маргиналното разпределение на X_1 и $f_{X_2}(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2)\mathrm{d}\, x_1$ е маргиналното разпределение на X_2



Дефиниция (Функция на разпределение). X е вектор от случайни величини. Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2), \forall x \in \mathbb{R}^2$ се нарича функция на разпределение на X.



Ако X е вектор от НСВ, то X има следната функция на разпределение:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f_X(v_1, v_2) \mathrm{d}\, v_1 \,\mathrm{d}\, v_2$$

Плътността на X в точката x е равна на $f_X(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F_X \bigg|_{x=x_1+x_2}$

Дефиниция (Независимост на две непрекъснати случайни величини).
Нека $X = (X_1, X_2)$. Тогава $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, когато $F_X(x) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$ или $\mathbb{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2) = \mathbb{P}(X_1 < x_1)\mathbb{P}(X_2 < x_2)$ за всяко $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Ако X е вектор от НСВ, то независимостта е еквивалентна на

$$f_X(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2), \ \forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Т.е. двумерната плътност X се разпада на произведението на двете маргинални плътности на X_1 и $X_2 \Leftrightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

Обобщение за n мерен случай:

Дефиниция: (Съвкупна независимост). Нека $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са случайни величини, такива, че $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ има плътност f_X. Т.е. са изпълнени условията:

a) $f_X(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) \mathrm{d}\, x = 1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}^n: \ \mathbb{P}(X \in D) = \displaystyle\int_D f_X(x) \underbrace{\mathrm{d}\, x}_{\mathrm{d}\, x_1 \ldots \mathrm{d}\, x_n}$

Тогава $X_1, X_2, \ldots, X_n$ са независими в съвкупност

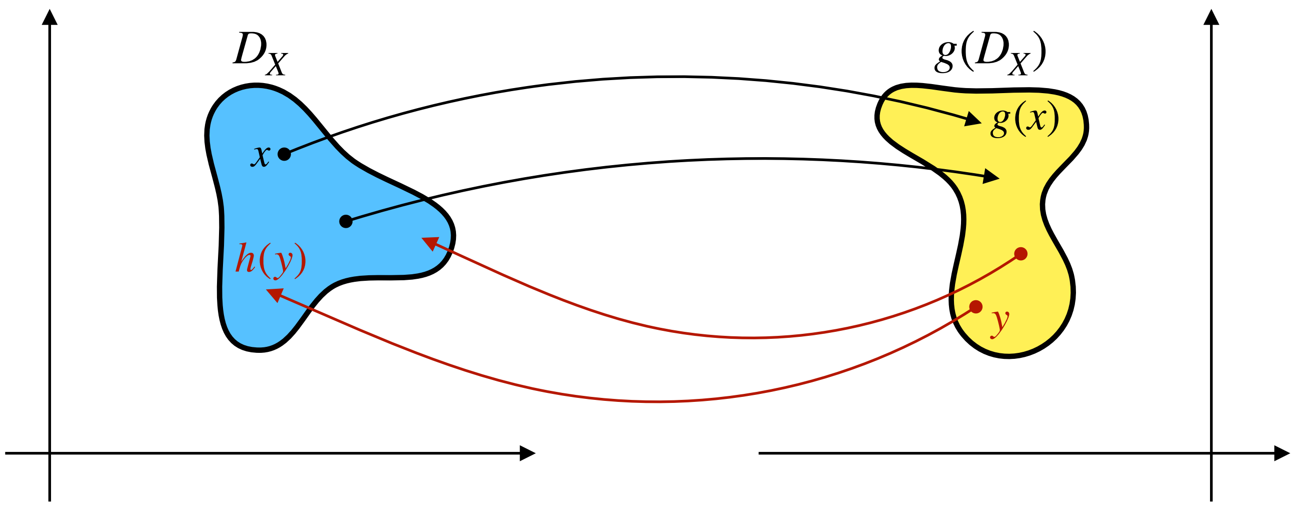
$$\Leftrightarrow f_{X_{i_1} X_{i_2} \ldots X_{i_k}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} f_{X_{i_j}}(x_{i_j})$$

Смяна на променливите

Имаме $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $Y = g(X)$ и ще знаем плътността f_X. Въпроса е: кога и как ще може да изчислим f_Y?

$D_X = \{x \in \mathbb{R}^2 : f_X(x) > 0\}$,

$g(D_X) = \{y \in \mathbb{R}^2, \exists x \in D_X : y = g(x)\}$



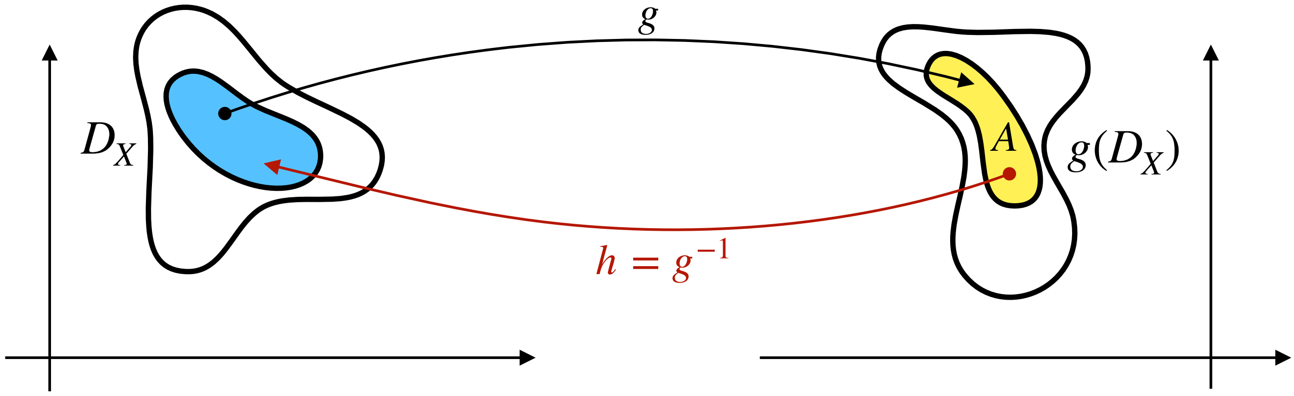
Ако g е взаимно еднозначно вътху D_X, то може да дефинираме и $h(y) = g^{-1}(y)$, $y \in g(D_X)$.

Теорема (Смяна на променливите). Нека X е вектор от НСВ(2) (две непрекъснати случайни величини) и $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ е функция. Нека $Y = g(X)$.
Ако $g : D_X \to g(D_X)$ е взаимно еднозначно с обратна функция $h = g^{-1}$, h, g са непрекъснати, h има непрекъснати производни и $\forall y \in g(D_X)$ е изпълнено:

$$0 \neq \left| det \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_1}{\partial y_2}(y_1, y_2) \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1}(y_1, y_2) & \frac{\partial h_2}{\partial y_2}(y_1, y_2) \end{vmatrix} \right| =: |J(y)|,$$ то Y е вектор от НСВ с плътност

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X\big(h(y)\big)\, |\underbrace{J(y)}_{\text{Якобиан на смяната}}|, & y \in g(D_X) \\ 0, & y \notin g(D_X) \end{cases}$$ и $D_Y = g(D_X)$.

Доказателство. Ще покажем, че за $\forall A \subseteq g(D_X) : \mathbb{P}(Y \in A) = \int_A f_Y(y) \mathrm{d}\, y$.



$\mathbb{P}(Y \in A) = \mathbb{P}\left(g(x) \in A\right) = \mathbb{P}\left(X \in h(A)\right) =$

$$= \int_{x \in h(A)} f_X(x) \mathrm{d}\, x \overset{x=(x_1,x_2)=h(y)=\left(h_1(y),\, h_2(y)\right)}{=} \int_{y \in A} \underbrace{f_X\left(h(y)\right) |J(y)|}\, \mathrm{d}\, y \Rightarrow$$

$f_Y(y) = f_X\left(h(y)\right) |J(y)|$ е плътността на Y

$\oplus$ Нека $V_1, V_2, \ldots, V_n$ са независими в съвкупност НСВ, т.е. $V_i \in \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Тогава $\sum_{i=1}^{n} V_i \in N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$. Ще покажем, че е изпълнено за $n = 2$. От принципа на математическата индукция ще следва за всяко $n \in \mathbb{N}$.

$n = 2$: $V_1 + V_2 = \mu_1 + \sigma_1 Z_1 + \mu_2 + \sigma_2 Z_2$, където $Z_1, Z_2 \in \mathcal{N}(0, 1)$ и $Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2 \Rightarrow$

$$V_1 + V_2 = \left(\mu_1 + \mu_2\right) + \sigma_1 Z_1 + \sigma_2 Z_2$$

Поставяме $X_1 = \sigma_1 Z_1 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ и $X_2 = \sigma_2 Z_2 \in N(0, \sigma_2^2) \Rightarrow$

$V_1 + V_2 = \mu_1 + \mu_2 + X_1 + X_2$.
Ако $X_1 + X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$, то $V_1 + V_2 \in \left(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$.

Оттук нататък се интересуваме от $X_1 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$, $X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ и тяхната сума, където $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

$$f_X(x) = f_{X_1X_2}(x_1, x_2) = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2}}}_{f_{X_1}(x_1)} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times e^{-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}}}_{f_{X_2}(x_2)} = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \times e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2}} > 0 \quad -$$

новата съвместна плътност.

$D_X = \mathbb{R}^2$ (диапазона на X)

$$f_X(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{x_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{x_2^2}{\sigma_2^2}}, \; D_X = \mathbb{R}^2$$

$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases} \Rightarrow Y = g(X)$ (линейно неизродено изображение)

$$\Rightarrow g(D_X) = g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$$

$$X_1 + X_2 \in N(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

$$y = g(x) \Leftrightarrow x = h(y) = \begin{pmatrix} y_1 & -y_2 \\ y_2 & \end{pmatrix}$$

$$|J(y)| = \left| \det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = 1$$

,

$$f_Y(y) = f_X\left(h(y)\right).1 = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_2^2}}, \; \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

$$Y_1 = X_1 + X_2, \; Y_2 = X_2$$

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y_1-y_2)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{y_2^2}{2\sigma_2^2}} \, \mathrm{d}\, y^2 \overset{(*)}{=} \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(by_2 - ay_1)^2} \, \mathrm{d}\, y_2 \overset{by_2 = w}{=}$$

$$= \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w - ay_1)^2} \, \mathrm{d}\, w \overset{v = w - ay_1}{=} \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{2\pi\sigma_1\sigma_2 b} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}v^2} \, \mathrm{d}\, v}_{\sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2 b}.$$

Като $(*)$ е следното допускане: $\frac{(y_1-y_2)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} \overset{(*)}{=} cy_1^2 + (by_2 - ay_1)^2$, т.е. допускаме, че левия израз може да се представи като десния за някой $a, b, c \in \mathbb{R}$. Остава да намерим тези параметри a, b и c.

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{e^{-\frac{y_1^2 c}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2 b}.$$

Връщаме се в $(*)$, за да намерим b и c.

$$\frac{(y_1-y_2)^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = cy_1^2 + (by_2 - ay_1)^2 = cy_1^2 + b^2y_2^2 - 2aby_1y_2 + a^2y_1^2$$

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = y_2^2\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right)}_{b^2} - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2} + y_1^2 + \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} =$$

$$= \left(y_2^2b^2 - \frac{2y_1y_2}{\sigma_1^2}.\frac{b}{b} + \frac{y_1^2}{\sigma_1^4b^2}\right) - \frac{y_1^2}{\sigma_1^4b^2} + \frac{y_1^2}{\sigma_1^2}.$$

$$b^2 = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

$$a^2 = \frac{1}{\sigma_1^4}.\frac{1}{b^2} = \frac{\sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\sigma_1^2}$$

$$c = \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{a^2} = \frac{1}{\sigma_1^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) = \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$f_Y(y_1) = \frac{e^{-\frac{y_1^2c}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sigma_2 b} = \frac{e^{-\frac{y_1^2}{2}.\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}}{\sqrt{2\pi}\cancel{\sigma_1\sigma_2}\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\cancel{\sigma_1\sigma_2}}} = \frac{e^{-\frac{y_1^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$ – плътност на

$\mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \Rightarrow Y_1 = X_1 + X_2 \in \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$

Г. Гама разпределение

Дефиниция (Гама разпределени случайни величини). Казваме, че случайната непрекъсната величина X е гама разпределена с параметри $\alpha, \beta > 0$ и бележим $X \in \Gamma(\alpha, \beta)$, ако има плътност $f_X(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$, където

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx.$$

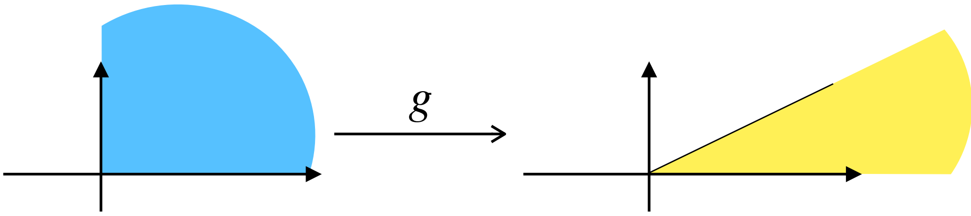
$\oplus$ $\alpha = 1, X \in \Gamma(1,\beta) = Exp(\beta)$. $\quad f_X(x) = \dfrac{\beta e^{-\beta x}}{\Gamma(1)} = \beta e^{-\beta x}, x > 0$

Твърдение. Ако $X_1 \in \Gamma(\alpha_1, \beta)$ и $X_2 \in \Gamma(\alpha_2, \beta)$ и $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$, то

$$X_1 + X_2 \in \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$$

Следствие. $X_i \in \Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = 1, \dots, n$ и $X_1, \dots, X_n$ са независими в съвкупност, то $X_1 + \dots + X_2 \in \Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta)$

Уплътване: $\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_2 \end{cases}$, $f_X(x_1, x_2) = \dfrac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta(x_1+x_2)}$, $x_1, x_2 \geq 0$.

$D_X =$ 

Свойства. Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими в съвкупност експоненциално разпределени случайни величини $\in Exp(\beta) \sim \Gamma(1, \beta)$. Тогава

$$H = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \beta)$$

$\mathbb{E}H = n\mathbb{E}X_1 = \dfrac{n}{\beta}$, $\mathbb{D}H = \dfrac{n}{\beta^2}$

Най-общо: $X \in \Gamma(\alpha, \beta) \Rightarrow \mathbb{E}X = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\mathbb{D}X = \dfrac{\alpha}{\beta^2}$

Д. Хи квадрат разпределение

Дефиниция. Казваме че една случайна непрекъсната велиина X е Хи квадрат разпределена с параметър n и бележим $X \in \mathscr{X}^2(n)$, ако има плътност

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

Ако $X \in \mathscr{X}^2(n)$, то $X \in \Gamma\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.