Упражнение 9 по СЕМ - Теория, Задачи, Решения

MRS

03.12.2020

1 Числови характеристики на случайните величини

Нека $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е вероятностно пространство на експеримент $\mathcal{E}$. С $\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ или $\mathfrak{S}$ означаваме множеството на случайните величини върху $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, с $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ са означени функционалите - средно и дисперсия - върху $\mathfrak{S}$. Изображението $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (X, Y) \longmapsto \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y$ се нарича ковариация на $X, Y \in \mathfrak{S}$ и се означава с $\mathsf{cov}(X, Y)$. (Директно се проверява, че cov е неизродена, симетрична и билинейна форма, т.е. скаларно прозведение във $\mathfrak{S}$ - да допълня и обясня). Нормировката $\rho(X, Y) = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbf{D}X}\sqrt{\mathbf{D}Y}}$ на $\mathsf{cov}(X, Y)$ се нарича корелация на X, Y. Ковариацията $\mathsf{cov}(X, Y)$ може да се интерпретира като "мярка" за отклонение от адитивност на дисперсията $\mathbf{D}$ върху сумата $X + Y$, поради $\mathbf{D}(X + Y) = \mathbf{D}X + \mathbf{D}Y + 2\mathsf{cov}(X, Y)$. Корелацията $\rho(X, Y)$ дава необходимо и достатъчно условие за линейна зависимост на X и Y, тоест $|\rho(X, Y)| = 1 \iff Y = aX + b, \ a, b \in \mathbb{R}$. От независимост на случайни величини следва, че ковариацията и корелацията им е нула. Обратното не е вярно.

2 Пораждащи функции и полиномно разпределение

Нека n, m са естествени числа, $p_1, p_2, ..., p_m$ са положителни числа със сума $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

Дефиниция 2.1. *Ще казваме, че $X \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ е полиномно разпределена случайна величина с параметри $(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, което ще записваме чрез $X \in P(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, ако $X(\Omega) = \{(k_1, k_2, ..., k_m)|\ k_i \in \mathbb{Z},\ k_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^m k_i = n\}$ и тегловата функция на X има вида*

$$(k_1, k_2, ..., k_m) \longmapsto \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$$

Една възможна интерпретация на полиномно разпределена случайна величина с параметри $(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, дава следната схема: провеждат се n Бернулиеви опита, като при всеки опит настъпва точно едно от m несъвместими събития $A_1, ..., A_m$, съответно с вероятности $p_1, ..., p_m$. Вероятността на събитието - A_1 настъпва точно k_1 пъти, ... ,A_m настъпва точно k_m пъти - се дава чрез функцията $(k_1, k_2, ..., k_m) \longmapsto \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m}$. Функцията

$$f(x_1, ..., x_m) = (p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_mx_m)^n = \sum_{k_1+\cdots+k_m=n} \frac{n!}{k_1!k_2!...k_m!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_m^{k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$$

се нарича пораждаща на $X \in \mathrm{P}(n, m, p_1, p_2, ..., p_m)$, понеже f поражда тегловата функция на X: коефициента пред $x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}$ е равен на $P(X = (k_1, k_2, ..., k_m))$.

Дефиниция 2.2. *Нека $X \in \mathfrak{S}$ е случайна величина, приемаща цели неотрицателни стойности и нека $p_k = \mathbf{P}(X = k),\ k = 0, 1, \dots$ Функцията*

$$h_X(s) = \mathbf{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k, \quad |s| < 1,$$

се нарича пораждаща функция на X.

При предположенията и означенията на горната дефиниция, пресмятаме

$$\mathbf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = h'_X(1), \quad \mathbf{D}X = h''_X(1) + h'_X(1) - (h'_X(1))^2.$$

Теорема 2.3. *Ако $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathfrak{S}$ са независи случайни величини с пораждащи функции $h_1, h_2, \dots, h_n$, то за пораждащата функция h на $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ е в сила $h = \prod_{k=1}^{n} h_k$.*

Следващата теорема показва, че пораждащите функции определят еднозначно неотрицателните целочислени разпределения.

Теорема 2.4. *Съществува биективно съответствие между неотрицателните целочислени разпределения и пораждащите им функции.*

Доказателство: Две неотрицателните целочислени разпределения $p_k,\ q_k,\ k = 0, 1, \dots$ имащи една и съща пораждаща функция съвпадат, понеже $p_k = \frac{h_X^{(k)}(0)}{k!} = q_k$. Обратно, ако разпределенията съвпадат, то пораждащите им функции съвпадат. □

Пример 2.5. *Да се определи пораждащата функция на случайна величина X, ако*
а) $X \in Ge(p)$;
б) $X \in Po(\lambda)$;
в) $X \in Bi(n, p)$.

Пример 2.6. *Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими случайни величини с Поасоново разпределение, като $X_k \in Po(\lambda_k)$. Да се докаже, че $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in Po(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$.*

Пример 2.7. *Нека $X_1, X_2, \dots, X_n$ са независими случайни величини с Биномно разпределение, като $X_k \in Bi(m_k, p)$. Да се докаже, че $X_1 + X_2 + \dots + X_n \in Bi(\sum_{k=1}^{n} m_k, p)$.*

3 Условни разпределения

Ако $X, Y \in \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ и знаем, че $Y = y$, то тази информация може да оказва влияние върху числовите характеристики на X. Това мотивира на X да се съпостави случайна величина, отчитаща настъпилото събитие $\{Y = y\}$: тази величина се означава с $(X|Y = y)$ и се задава чрез теглова функция $X(\Omega) \longrightarrow [0, 1] \quad x \longmapsto \mathbf{P}(X = x|Y = y)$. Следователно, при фиксирани $Y \in \mathfrak{S}$ и $y \in Y(\Omega)$ е дефинирано изображение

$$\mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \longrightarrow \mathfrak{S}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}) \quad X \longmapsto (X|Y = y),$$

като $(X|Y=y)(\omega)=X(\omega),\ (X|Y=y)(\Omega)=X(\Omega)$. Средната стойност на $(X|Y=y)$ има вида

$$\mathbf{E}(X|Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x|Y=y).$$

За да се отчете влиянието на Y върху средната стойност на X, се дефинира изображението

$$\mathfrak{S}\times\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{S}\quad (X,Y)\longmapsto\mathbf{E}(X|Y),$$

където $\mathbf{E}(X|Y):\Omega\longrightarrow\mathbb{R}\quad \omega\longmapsto\mathbf{E}(X|Y=Y(\omega))$. Тегловата функция на $\mathbf{E}(X|Y)$ се задава, чрез

$$r\longmapsto\sum_{y\in Y(\Omega),\ \mathbf{E}(X|Y=y)=r}\mathbf{P}(Y=y).$$

Множеството от тегловите функции на $(X|Y=y)$, при y пробягващ $Y(\Omega)$ се нарича условно разпределение на X, при условие Y. В частност, тегловата функция на $(X|Y=y)$, при фиксиран $y\in Y(\Omega)$, се нарича условно разпределение на X, при условие $Y=y$.
Ако с f означим функцията $Y(\Omega)\longrightarrow\mathbb{R}\ \ y\longmapsto\mathbf{E}(X|Y=y)$, то случайната величина $\mathbf{E}(X|Y)$ се явява композиция на f с Y, тоест $(f\circ Y)(\omega)=f\circ Y(\omega)=f(Y(\omega))=\mathbf{E}(X|Y=Y(\omega))$. Следователно за средното на $\mathbf{E}(X|Y)$ използвайки теоремата за средната стойност на композиция $(f\circ Y)$ получаваме

$$\mathbf{E}(\mathbf{E}(X|Y))=\mathbf{E}f\circ Y=\sum_{y\in Y(\Omega)}f(y)\mathbf{P}(Y=y)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{E}(X|Y=y)\times\mathbf{P}(Y=y)$$

$$=\sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x|Y=y)\mathbf{P}(Y=y)=\sum_{y\in Y(\Omega)}\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x,Y=y)$$

$$=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x,Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}x\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbf{P}(X=x,Y=y)$$

$$=\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbf{P}(X=x)=\mathbf{E}X.$$

3.1 Условия на задачите от упражнения 10 и 11

Задача 1 От числата 1,2,3,4,5 се избират по случаен начин три числа без повторение. Нека X е случайната величина - средното по големина от избраните три, а Y е случайната величина най-малкото от избраните числа. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;
б) маргиналните разпределения на X и Y;
в) да се провери дали X и Y са независими;
г) ковариацията и коефициента на корелация на X и Y;
д) разпределението, очакването и дисперсията на случайната величина $Z=X-2Y$.

Задача 2 Четири пъти последователно се хвърля монета. Нека X е броят гербове паднали се при първите три хвърляния, а Y е броят гербове от последните две. Да се определи:
а) съвместното разпределение на X и Y;

б) условните разпределения на X и Y;
в) $\mathbf{P}(X = Y)$, $\mathbf{P}(X > 1 \mid Y = 1)$ и $\mathbf{P}(X + Y > 2 \mid X = 2)$;
г) разпределението на $\mathbf{E}(X|Y)$, $\mathbf{E}(Y|X)$.

Задача 3 Четири топки са разпределени случайно в девет кутии, от които две са бели, три зелени и четири червени. Да се пресметнат вероятностите на събитията:
а) в белите кутии има една топка, а в зелените две;
б) в белите кутии има две топки;
в) в белите кутии попадат повече топки отколкото в останалите взети заедно.

Задача 4 Двама стрелци правят по три изстрела в мишена. На всеки изстрел първият може да спечели точки от 7 до 10 с една и съща вероятност. Вторият уцелва 7 или 10 с вероятност 1/8, а 8 или 9 с вероятност по 3/8.
а) За всеки стрелец да се определи вероятността да изкара общо 25 точки.
б) Каква е вероятността двамата да имат равен брой точки?
в) Каква е вероятността първият да има с три точки повече от втория?

Задача 5 Билетите в лотария имат номера от 0 до 999999. Да се определи вероятността за случайно избран билет:
а) сумата от цифрите в номера да е равна на 21;
б) да има равна сума от първите три и последните три цифри;
в) сумата от първите три цифри да е с 2 по-голяма от сумата на последните три.

3.2 Решения на задачите от упражнения 10 и 11

Задача 1 Имаме $X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$, $Y(\Omega) = \{1, 2, 3\}$. Нека $T = (X, Y)$ и $\mathbf{P}(X = k,\ Y = l) = p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k, l) \longmapsto p_{k,l}$ на T има вида: $p_{2,1} = \frac{3}{\binom{5}{3}} = \frac{3}{10}$, $p_{3,1} = \frac{1}{5}$, $p_{4,1} = \frac{1}{10}$, $p_{3,2} = \frac{1}{5}$, $p_{4,2} = \frac{1}{10}$, $p_{4,3} = \frac{1}{10}$, $p_{2,2} = p_{2,3} = p_{3,3} = 0$.

b) Тегловата функция $k \longmapsto \mathbf{P}(X = k)$ на X има вида: $\mathbf{P}(X = 2) = \sum_{l=1}^{3} p_{2,l} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X = 3) = \sum_{l=1}^{3} p_{3,l} = \frac{2}{5}$, $\mathbf{P}(X = 4) = \sum_{l=1}^{3} p_{4,l} = \frac{3}{10}$. Тегловата функция $l \longmapsto \mathbf{P}(Y = l)$ на Y има вида: $\mathbf{P}(Y = 1) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,1} = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(Y = 2) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,2} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(Y = 3) = \sum_{k=2}^{4} p_{k,3} = \frac{1}{10}$.

c) X и Y са зависими, поради $p_{4,1} = \frac{1}{10} \neq \frac{9}{50} = \mathbf{P}(X = 4)\mathbf{P}(Y = 1)$.

d) $\mathsf{cov}(X, Y) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}X)(Y - \mathbf{E}Y)) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X\mathbf{E}Y = \sum_{k=2}^{4} \sum_{l=1}^{3} klp_{k,l} - (\sum_{k=2}^{4} kP(X = k))(\sum_{l=1}^{3} lP(Y = l)) = \frac{24}{5} - 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$. Корелационният коефициент на X и Y е: $\rho(X, Y) = \frac{\mathsf{cov}(X,Y)}{\sqrt{DXDY}} = \frac{0.3}{\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{\frac{9}{20}}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.577$

e) Имаме $Z(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и нека $\mathbf{P}(Z = m) = p_m$. Тегловата функция $m \longmapsto p_m$ на Z се задава чрез: $p_{-2} = p_{4,3} = \frac{1}{10}$, $p_{-1} = p_{3,2} = \frac{1}{5}$, $p_0 = p_{2,1} + p_{4,2} = \frac{2}{5}$, $p_1 = p_{3,1} = \frac{1}{5}$, $p_2 = p_{4,1} = \frac{1}{10}$. Средното и вариацията: $\mathbf{E}Z = \mathbf{E}(X - 2Y) = \mathbf{E}X - 2\mathbf{E}Y = 0$, $D(X - 2Y) =$

$DX + 4DY - 4\mathsf{cov}(X,Y) = \frac{3}{5} + 4 \times \frac{9}{20} - 4 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$.

Задача 2 $X(\Omega) = \{0,1,2,3\},\ Y(\Omega) = \{0,1,2\}$. Нека $Z = (X,Y)$ и $\mathbf{P}(X = k,\ Y = l) = p_{k,l}$.

a) Тегловата функция $(k,l) \longmapsto p_{k,l}$ на Z има вида: $p_{0,2} = p_{3,0} = 0,\quad p_{0,0} = p_{0,1} = p_{1,2} = p_{2,0} = p_{3,1} = p_{3,2} = \frac{1}{16},\quad p_{1,1} = p_{2,1} = \frac{3}{16},\quad p_{1,0} = p_{2,2} = \frac{1}{8}$.

b) Нека $\mathbf{P}(X = k|\ Y = l) = q_{k,l}$ и $\mathbf{P}(Y = l|\ X = k) = r_{l,k}$. Тегловата функция $k \longmapsto \mathbf{P}(X = k)$ на X има вида: $\mathbf{P}(X = 0) = \sum_{l=0}^{2} p_{0,l} = \frac{1}{8},\ \mathbf{P}(X = 1) = \frac{3}{8},\ \mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8},\ \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$. Тегловата функция $l \longmapsto \mathbf{P}(Y = l)$ на Y има вида: $\mathbf{P}(Y = 0) = \sum_{k=0}^{3} p_{k,0} = \frac{1}{4},\ \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$. От $q_{k,l} = \frac{p_{k,l}}{\mathbf{P}(Y=l)}$ и $r_{l,k} = \frac{p_{k,l}}{\mathbf{P}(X=k)}$, получаваме $q_{0,2} = q_{3,0} = 0,\quad q_{0,0} = q_{1,2} = q_{2,0} = q_{3,2} = \frac{1}{4},\ q_{0,1} = q_{3,1} = \frac{1}{8},\ q_{1,1} = q_{2,1} = \frac{3}{8},\ q_{1,0} = q_{2,2} = \frac{1}{2};\ r_{2,0} = r_{0,3} = 0,\quad r_{0,0} = r_{2,3} = \frac{1}{2},\ r_{0,2} = r_{2,1} = \frac{1}{6},\ r_{1,0} = r_{1,1} = r_{1,2} = r_{1,3} = \frac{1}{4},\ r_{0,1} = r_{2,2} = \frac{1}{12}$. Следователно тегловата функция на $(X|Y = l)$ има вида $k \longmapsto q_{k,l}$, $k \in X(\Omega) = \{0,1,2,3\}$ и $l \in Y(\Omega) = \{0,1,2\}$. Аналогично, условното разпределение на Y при условие $X = k$ се задава чрез тегловата функция на $(Y|X = k):\quad l \longmapsto r_{l,k}$.

c) $\mathbf{P}(X = Y) = p_{0,0} + p_{1,1} + p_{2,2} = \frac{3}{8},\quad \mathbf{P}(X > 1|\ Y = 1) = \frac{p_{2,1}+p_{3,1}}{\mathbf{P}(Y=1)} = \frac{1}{2},\ \mathbf{P}(X + Y > 2|\ X = 2) = \mathbf{P}(Y > 0|\ X = 2) = \frac{p_{2,1}+p_{2,2}}{\mathbf{P}(X=2)} = \frac{5}{6}$.

d) От $\mathbf{E}(X|Y = 0) = \sum_{k=0}^{3} kq_{k,0} = 1,\ \mathbf{E}(X|Y = 1) = \frac{3}{2},\ \mathbf{E}(X|Y = 2) = 2,\ \mathbf{E}(Y|X = 0) = \frac{1}{4},\ \mathbf{E}(Y|X = 1) = \frac{7}{12},\ \mathbf{E}(Y|X = 2) = \frac{5}{12},\ \mathbf{E}(Y|X = 3) = \frac{5}{4}$, следва $\mathbf{E}(X|Y)(\Omega) = \{1, \frac{3}{2}, 2\},\ \mathbf{E}(Y|X)(\Omega) = \{\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{12}, \frac{5}{4}\}$. Тегловата функция $k \longrightarrow s_k$ на $\mathbf{E}(X|Y)$ има вида $s_1 = \mathbf{P}(Y = 0) = \frac{1}{4},\ s_{\frac{3}{2}} = \mathbf{P}(Y = 1) = \frac{1}{2},\ s_2 = \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{4}$. Тегловата функция $k \longrightarrow t_k$ на $\mathbf{E}(Y|X)$ има вида $t_{\frac{1}{4}} = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{1}{8},\ t_{\frac{7}{12}} = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{3}{8},\ t_{\frac{5}{12}} = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{3}{8},\quad t_{\frac{5}{4}} = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$.

Задача 3 Нека $X_i,\ i = 1,2,3$ са съответно случайните величини: брой топки попаднали в бели кутии (при $i = 1$), брой топки попаднали в зелени кутии (при $i = 2$), брой топки попаднали в червени кутии ($i = 3$), при поставянето на 4 топки в общо 9 кутии (2 бели, 3 зелени и 4 червени). Тогава $Y = (X_1, X_2, X_3)$ е тримерна случайна величина с теглова функция: $(k_1, k_2, k_3) \longmapsto \frac{4!}{k_1!k_2!k_3!}(\frac{2}{9})^{k_1}(\frac{1}{3})^{k_2}(\frac{4}{9})^{k_3},\quad k_1 + k_2 + k_3 = 4,\ k_i \geq 0$ са цели числа, тоест $Y \in \mathbf{P}(4, 3; \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9})$ има полиномно разпределение.

a) Търсената вероятност е $\mathbf{P}(Y = (1,2,1)) = \frac{4!}{1!2!1!}(\frac{2}{9})^1(\frac{1}{3})^2(\frac{4}{9})^1 = (\frac{2}{3})^5 \approx 0.13$

Забележка: Означаваме топките с $1,2,3,4$, а цветовете на кутиите с w, g, r. Нека k-тата топка, отива в кутия с цвят $i_k,\ k = 1,2,3,4$. Всяко разпределение на 4 различни топки в разглежданите (3 типа кутии) е еквиалетно на редица $i_1i_2i_3i_4$, която е пермутация с повторение на елементите w, g, r. Броят на тези пермутации за а) е $|\mathbf{P}(1,2,1)| = \frac{4!}{1!2!1!}$ и всяка от тях се реализира с вероятност $p = (\frac{2}{9})^1(\frac{1}{3})^2(\frac{4}{9})^1$, откъдето получаваме $\mathbf{P}(Y = (1,2,1)) \approx 0,13$.

b) Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \sum_{k_2+k_3=2} \mathbf{P}(Y = (2, k_2, k_3)) = \mathbf{P}(Y = (2,2,0)) + \mathbf{P}(Y = (2,1,1)) + P(Y = (2,0,2)) \approx 0.179$

c) Търсената вероятност е $\mathbf{P} = \mathbf{P}(X_1 > X_2+X_3 | X_1+X_2+X_3 = 4) = \mathbf{P}(Y = (3,1,0))+\mathbf{P}(Y = (3,0,1)) + P(Y = (4,0,0)) \approx 0.0365$

Задача 4 Нека $X,\ Y$ са съответно случайните величини: брой точки получени при три изстрела от първи, втори стрелец. Тогава $X = X_1 + X_2 + X_3,\ Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, където $X_i,\ Y_i$ са съответно брой точки при i-тия изстрел, $X_i(\Omega) = Y_i(\Omega) = \{7, 8, 9, 10\}$ и $X,\ Y$ са независими.

a) От $25 = 7+8+10 = 7+9+9 = 8+8+9$, следва $\mathbf{P}(X = 25) = 3!(\frac{1}{4})^3 + 3(\frac{1}{4})^3 + 3(\frac{1}{4})^3 = \frac{3}{16}$, $\mathbf{P}(Y = 25) = 3!(\frac{1}{8})^2\frac{3}{8} + 3\frac{1}{8}(\frac{3}{8})^2 + 3(\frac{3}{8})^3 = \frac{63}{256} \approx 0.246$

b) $\mathbf{P}(X = Y) = \mathbf{P}(\cup_{k=21}^{30}\{X = Y = k\}) = \sum_{k=21}^{30}\mathbf{P}(X = Y = k) = \sum_{k=21}^{30}\mathbf{P}(X = k)\mathbf{P}(Y = k)$

$$= \sum_{k=0}^{9}\mathbf{P}(X = 21+k)\mathbf{P}(Y = 21+k) = \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{8^3}\binom{9}{k}\sum_{i+2j=k}\frac{1}{4^3}\binom{3}{i}\binom{3}{j}$$

$$= \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{9}\binom{9}{k}\sum_{i+2j=k}\binom{3}{i}\binom{3}{j} = \frac{649}{4096} \approx 0.158$$

c) $\mathbf{P}(X-Y = 3) = \sum_{k=21}^{27}\mathbf{P}(X = k+3)\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{6}\mathbf{P}(X = k+24)\mathbf{P}(Y = k+21) =$

$$= \frac{1}{32^3}\sum_{k=0}^{6}\binom{9}{k}\sum_{i+2j=k+3}\binom{3}{i}\binom{3}{j} = \frac{2608}{32768} \approx 0.079$$

Използвахме, че пораждащата функция на $X_i,\ i = 1, 2, 3$ е $f(x) = \frac{1}{4}(x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}) = \frac{x^7}{4}(1+x)(1+x^2)$. От независимостта на X_1, X_2, X_3 и теорема 2.3 следва, че пораждащата на $X = X_1 + X_2 + X_3$ е $f(x)^3$. Тогава $\mathbf{P}(X = k)$ е равна на коефициента пред x^k в развитието на $f(x)^3$. Аналогично, пораждащата на Y е $g(x) = \frac{x^{21}}{8^3}(1+x)^9$.

Забележка 3.1. *В задача 4, случайните величини X и Y имат полиномно разпределение: $X \in \mathbf{P}(3, 4, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ и $Y \in \mathbf{P}(3, 4, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8})$.*

Задача 5 Нека X, Y, Z са съответно случайните величини: сума от всички цифри, сума от първите три цифри, сума на последните три цифри на случайно избран номер в интервала $[000000, 999999]$.

a) Всяка от цифрите $0, 1, ..., 9$ е еднакво вероятна (с вероятност $\frac{1}{10}$) да участва на всяка от 6-те позиции на разглежданният 6-цифрен номер. Следователно пораждащата функция на X е

$$f(x) = \frac{1}{10^6}\left(\sum_{k=0}^{9}x^k\right)^6 = \frac{1}{10^6}\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6 = \frac{1}{10^6}(1-x^{10})^6(1-x)^{-6}$$

$$= \frac{1}{10^6}\left(\sum_{k=0}^{6}(-1)^k\binom{6}{k}x^{10k}\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\binom{-6}{l}x^l\right) =$$

$$= \frac{1}{10^6} \sum_{k=0}^{6} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{k+l} \binom{6}{k} \binom{-6}{l} x^{10k+l}.$$

Вероятността $\mathbf{P}(X = 21)$ е равна на коефициента пред x^{21} в развитието на $f(x)$, следователно $\mathbf{P}(X = 21) = \frac{1}{10^6} \left(-\binom{-6}{21} + \binom{6}{1}\binom{-6}{11} - \binom{6}{2}\binom{-6}{1} \right) \approx 0.039$

b) $\mathbf{P}(Y = Z) = \mathbf{P}(\cup_{m=0}^{27} \{Y = Z = m\}) = \sum_{m=0}^{27} \mathbf{P}(Y = m)\mathbf{P}(Z = m) = \sum_{m=0}^{27} [\mathbf{P}(Y = m)]^2$

$$= \sum_{m=0}^{27} [\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))]^2 = \frac{1}{10^6} \sum_{m=0}^{27} \left(\sum_{0 \le k \le 3,\ l \ge 0,\ 10k+l=m} (-1)^k \binom{3}{k} \binom{2+l}{2} \right)^2 = \frac{55252}{10^6} \approx 0.055,$$

където $\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))$ е коефициента пред x^m в развитието на $g(x) = \frac{1}{10^3} \left(\sum_{k=0}^{9} x^k \right)^3$.

c) $\mathbf{P}(Y - Z = 2) = \sum_{m=0}^{25} \mathbf{P}(Y = m+2, Z = m) = \sum_{m=0}^{25} \mathbf{P}(Y = m+2)\mathbf{P}(Z = m) =$

$$= \sum_{m=0}^{25} [\mathsf{coef}(x^{m+2},\ g(x))][\mathsf{coef}(x^m,\ g(x))] =$$

$$= \frac{1}{10^6} \sum_{m=0}^{25} \left(\sum_{0 \le k \le 3,\ l \ge 0,\ 10k+l=m+2} (-1)^k \binom{3}{k} \binom{2+l}{2} \right) \left(\sum_{0 \le r \le 3,\ s \ge 0,\ 10r+s=m} (-1)^r \binom{3}{r} \binom{2+s}{2} \right)$$

$$= \frac{53262}{10^6} = 0.053262$$

Пример2.5
а) Нека $X \in Ge(p)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = (1-p)^{k-1}p$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p x^k = px \sum_{k=1}^{\infty} [(1-p)x]^{k-1} = \frac{px}{1-(1-p)x},\ |x| < 1.$$

б) Нека $X \in Po(\lambda)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x\lambda)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{x\lambda} = e^{\lambda(x-1)},\ |x| < 1.$$

в) Нека $X \in Bi(n,p)$ с теглова функция $k \longmapsto p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Тогава за пораждащата функция на X намираме

$$h_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (px)^k (1-p)^{n-k} = (px + 1 - p)^n,\ |x| < 1.$$

Пример2.6 Нека h_{X_k} е пораждащата фунцкия на X_k. От 2.5 б) следва $h_{X_k}(x) = e^{\lambda_k(x-1)}$ и от теорема 2.3 следва, че за пораждащата функция h на $\sum_{k=1}^{n} X_k$ е изпълнено

$$h(x) = \prod_{k=1}^{n} h_{X_k} = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(x-1)} = e^{(x-1)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}.$$

Отново по 2.5 б) следва, че h е пораждаща функция на $Po(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k)$ и предвид теорема 2.4 получаваме $\sum_{k=1}^{n} X_k \in Po(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k)$.

Пример2.7 Нека h_{X_k} е пораждащата фунцкия на X_k. От 2.5 в) следва $h_{X_k}(x) = (px+1-p)^{m_k}$ и от теорема 2.3 следва, че за пораждащата функция h на $\sum_{k=1}^{n} X_k$ е изпълнено

$$h(x) = \prod_{k=1}^{n} h_{X_k} = \prod_{k=1}^{n}(px+1-p)^{m_k} = (px+1-p)^{\sum_{k=1}^{n} m_k}.$$

Отново по 2.5 в) следва, че h е пораждаща функция на $Bi(\sum_{k=1}^{n} m_k, p)$ и предвид теорема 2.4 получаваме $\sum_{k=1}^{n} X_k \in Bi(\sum_{k=1}^{n} m_k, p)$.