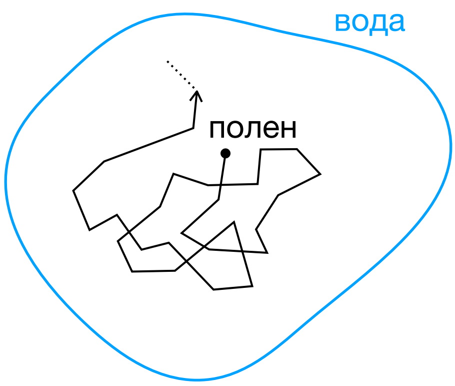
СЕМ, лекция 1

(2020-10-01)

През 1827 г., Робърт Браун, поставя частица полен върху вода и забелязва непрекъснато и хаотично движение. Той търси причината за това движение, което по-късно е наречено „брауново движение“.



Допускането на това, че частицата има вътрешна енергия, която да поражда движението, е довело до такъв избор на частицата (полен), който да осигури липсата на такава енергия.

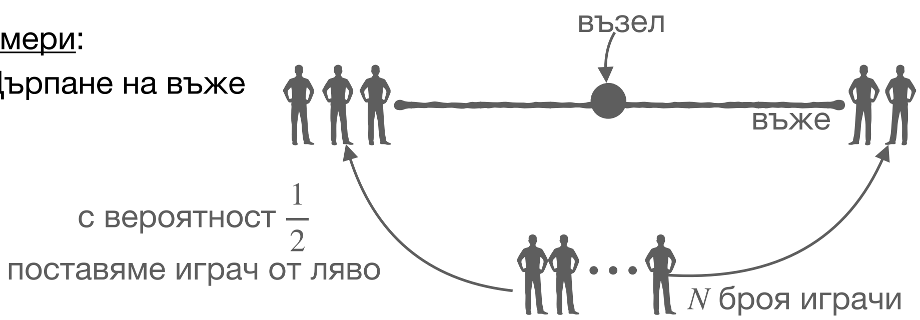
През 1905 г. Алберт Айнщайн обяснява истинската причина за това движение в семинарна статия. Благодарение на неговата кинетична теория на молекулите, той показва, че частица, поставена върху стояща вода бива удряна от молекулите на водата. Във всеки един момент от време, частицата ще я удрят множество молекули във всевъзможни посоки, което ще предизвиква рязка смяна на посоката и движението ѝ, в случай че сме взели достатъчно малка частица. Всичко това се случва, тъй като огромно количество молекули удрят полена едновременно във всеки един момент и в този момент, резултатната сила в очакване е 0 (което означава, че очакваното движение е нулево), но реализираната резултатна сила е в някаква посока и частицата се движи в нея. Това движение е универсално, тъй като то е резултат от всевъзможна колекция от движения.

В следващите години след Айнщайн, Жан Перан и колектив, успяват с помощта на това брауново движение да приближат броя на молекулите в изотопа C_{12} на въглерода. За времето си това е било постижение, което им е донесло нобелова награда.

Чисто физически е ясно, че движението не е съвсем случайно, тъй като и молекулите имат своите скорости и посоки на движение. Оказва се, че ако третираме молекулите като някакви случайни частици и приближим този процес, ние може да получим едно много добро приближение на истинското движение. То разбира се няма да е реалното брауново движение в истинския смисъл на думата, но то ще даде толкова добро приближение, че ние ще може да приближим други константни величини и куп други неща, на база на това приближение.

<u>Примери</u>:

⊕ Дърпане на въже



Средният брой хора, които ще се разполагат отляво и отдясно ще е $\frac{N}{2}$. Ако допуснем, че всеки човек дърпа въжето с еднаква сила, то в очакване възела ще е неподвижен, но реално той ще се движи във всеки един момент.

⊕ Системата „Бонус-Малус“

Това е известната система за глоби, при която шофьор, който нарушава правилника за движение по-често се глобява с по-големи суми, а такъв, който го нарушава по-рядко – с по-малки суми на глобите. Примерна система:

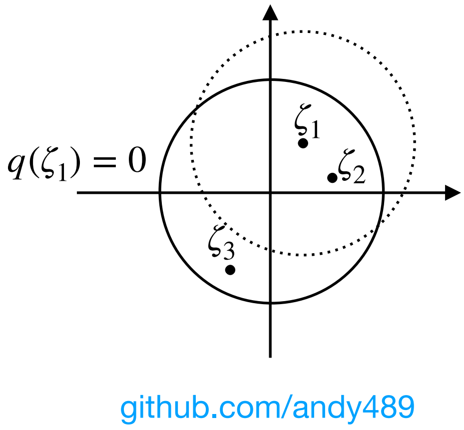
Брой нарушения									
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Коефициент									
0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.4	1.4	1.5	1.6

Идеята е, ако например глобата за дадено нарушение е 200 лв., шофьор, който е правел до 3 нарушения да заплаща 0.9 x 200 лв., такъв който е правел до 9 нарушения да заплаща 1.5 x 200 лв. и т.н. По-този начин ще се стимулират водачите да правят по-малко нарушения или по-точно да ги ограничават колкото се може повече.

Казуса, който възниква касае държавния апарат за събиране на данъци и застрахователи (ако например имаме подобен застрахователен проблем). Това е именно казуса: как да се изчислят тези коефициенти така, че сумарно платените глоби да са в очакване колкото ще са платените глоби ако системата няма плаващи коефициенти. Т.е. $P = \mathbb{E}\left[\frac{f_{\text{статично}}(X_n)}{f_{\text{плаващо}}(X_n)}\right] \approx 1$, където X_n цената, която заплаща даден водач с n нарушения. В случай, че $P > 1$ – ще се появи недоволство в данъкоплатците в името на държавата / застрахователите, тъй като сумарно ще се събират по-малко данъци от нарушителите. Ако пък $P < 1$, данъкоплатците / водачите отново ще са недоволни, тъй като ще заплащат сумарно повече за глоби, отколкото при фиксираната/статината система.

Преди около 6 години (~2015 г.), акад. Сендов формулира следната хипотеза: Ако вземем един полином $q(\zeta)$ и знаем, че нулите на полинома са в единичния кръг,



тогава ако вземем окръжност с радиус 1 и център която и да е нула на полинома, то в този единичен кръг ще има поне една нула от производната $\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\left[q(\zeta)\right] = 0.$

Професор Теранс Тау доказва тази хипотеза за всички полиноми от достатъчно голяма степен $\forall n \geq n_0$ (т.е. останалите са краен брой). Неговото доказателство включва много вероятностни аргументи.

Дефиниция: (**Случаен експеримент**) Опит или експеримент, при който не може предварително да определим кой от възможните изходи ще се сбъдне.

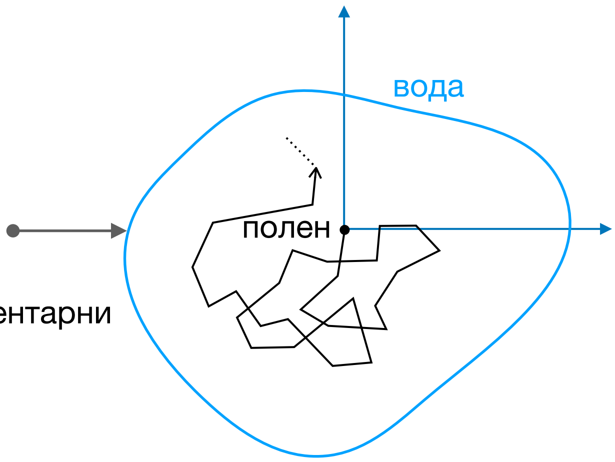
Всеки възможен елементарен изход ще означаваме с ω и ще наричаме елементарно събитие.

Дефиниция: (**Множество от всички елементарни събития**) С Ω ще означаваме съвкупността от всички елементарни събития на даден случаен експеримент.

$\oplus$ $\Omega = \{$'ези', 'тура'$\}$; $\Omega = \{0, 1\}$

$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$; $\omega_5 = \{5\}$

$\oplus$ $\Omega = \{$всички криви от $f(0) = (0{,}0)\}$



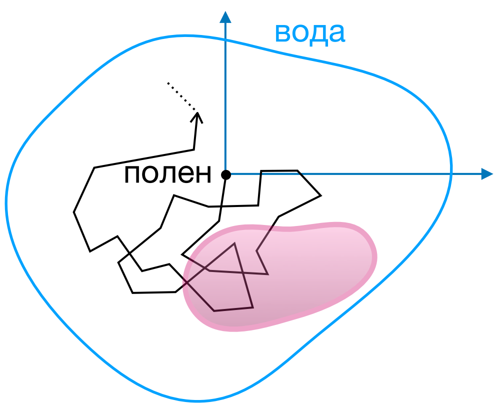
$\oplus$ Тото „6 от 49“. Броя на всички елементарни изходи е равен на $\dbinom{49}{6}$.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{13\,983\,816}\}$

$\oplus$ $\Omega = \mathbb{R}^+ = (0, \infty) \rightarrow$ времена на живот на CPU. Например $\omega = 23.5$ (23 месеца и половина)

Дефиниция: (**Събитие**) Всяко подмножество $A \subseteq \Omega$ наричаме събитие.

$\oplus$ $\Omega = \{$клиенти$\}$, $A = \{$клиентите, които са жени$\}$
$\oplus$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 3, 5\}$, признака по групиране е нечетност
$\oplus$ $A = \{$всички криви, чиито траектории достигат розовия регион$\}$



Операции с множества

- $A \subseteq B \Leftrightarrow \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$
- $A = B \Leftrightarrow \omega \in A \Rightarrow \omega \in B$ и $\omega \in B \Rightarrow \omega \in A$

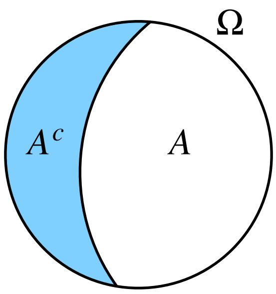
Дефиниция: (**„или“**), $A, B \subseteq \Omega$, то под обединението на събитията $A \cup B$ разбираме всички $\omega \in A$ или $\omega \in B$.

$\oplus$
$A = \{$хора между 20 и 30 г.$\}$
$B = \{$гласували за партия X$\}$
$A \cup B = \{$хора или между 20 и 30 г. или гласували за партия X$\}$

Дефиниция: (**„и“**), $A, B \subseteq \Omega$, то под сечението на събитията $A \cap B$ разбираме всички $\omega \in A$ и $\omega \in B$.

$\oplus$
$A = \{$хора между 20 и 30 г.$\}$
$B = \{$гласували за партия X$\}$
$A \cap B = \{$хора между 20 и 30 г. и гласували за партия X$\}$

Дефиниция: (**„отрицание“**), $A \subseteq \Omega$, то под допълнението на събитието A разбираме всички $\omega \notin A$ и бележим с A^c (понякога ще се случва да го бележим и с $\overline{A}$).



$\oplus$
$A^c = \{$всички хора, които са по-млади от 20 г. и по-възрастни от 30 г.$\}$

Свойства

а) (комутативност) $A \cap B = B \cap A$ и $A \cup B = B \cup A$
б) (асоциативност) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
б) (дистрибутивност) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
г) (Закони на **де Морган**) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за някое (поне едно) } i\}, \text{ където } A_i \in \Omega,\ \forall i \geq 1$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_i \text{ за всяко } i\}, \text{ където } A_i \in \Omega,\ \forall i \geq 1$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c, \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

Дефиниция: (σ-**алгебра**). Нека Ω е съвкупност от елементарни събития. $\mathscr{A}$ е колекция от събития/подмножества на Ω. Наричаме $\mathscr{A}$ σ-алгебра, ако:

а) $\emptyset \in \mathscr{A}$;
б) $A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}$;
в) $A_i \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1 : \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$.

(Принадлежност на празното множество и затвореност относно допълнение и обединение на крайно или безкрайно обединения на множества от $\mathscr{A}$. Оказва се, че това е достатъчно (виж следствието по-долу).)

Ако премахнем „безкрайно“ обединение и оставим само „крайно“, то ще останем само с алгебра без σ.

Следствие: Ако $\mathscr{A}$ е σ-алгрбра, то:
а) $\Omega \in \mathscr{A}$
б) $A_i \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1$, то $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$ (т.е. имаме и затвореност относно крайно/безкрайно сечение)

Доказателство:
а) $\emptyset^c = \Omega$, но $\emptyset \in \mathscr{A} \Rightarrow \Omega \in \mathscr{A}$;
б) $A_i \in \mathscr{A} \Rightarrow A_i^c \in \mathscr{A},\ \forall i \geq 1 \Rightarrow$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c \in \mathscr{A} \Rightarrow \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A^c\right)^c \in \mathscr{A} \overset{\text{де Морган}}{\Rightarrow} \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

$\oplus\ \Omega = \{0,1\}$
$\mathscr{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$
$\mathscr{A}_2 = 2^\Omega = \left\{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\right\}$

$\oplus\ \Omega = \{1, 2, \ldots, n\},\ |\Omega| = n$
$\mathscr{A} = 2^\Omega \Rightarrow \mathscr{A}$ има 2^n елемента.

$\oplus$ „6 от 49“. $\Omega = \left\{ \omega_1, \ldots, \omega_{\binom{49}{6}} \right\}$. $\mathscr{A} = 2^n = 2^{13\,983\,816}$.

<u>Дефиниция</u>: (**Борелова сигма алгебра**) Ако $\mathscr{B}$ е произволна колекция от събития от Ω, то $\sigma(\mathscr{B})$ е най-малката/най-грануларната σ-алгебра, такава, че $\mathscr{B} \subseteq \sigma(\mathscr{B})$, т.е. $\forall B \in \mathscr{B}$, то $B \in \sigma(\mathscr{B})$.

$\sigma(\mathscr{B}) = \bigcap\limits_{\substack{\sigma_T \text{ е } \sigma\text{-алгебра} \\ \mathscr{B} \subseteq \sigma_T}} \sigma_T$ върху $\sigma(\mathscr{B})$ може добре да се дефинира понятието дължина (мярка на Лебег).

$\Omega = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$; $\mathscr{B} = \{$всички отворени интервали$\}$

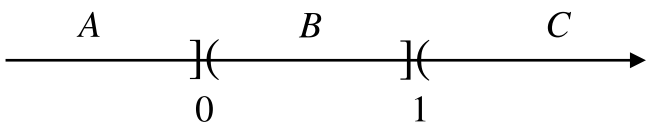
(a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$
$\mathscr{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathscr{B})$ се нарича борелова σ-алгебра.

$x \in \mathbb{R}$, $\{x\} \overset{?}{\in} \mathscr{B}(\mathbb{R})$. отговорът е „ДА“, тъй като може да представим точката $\{x\}$ по следния начин:

$\{x\} = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} \left(x - \dfrac{1}{i}, x + \dfrac{1}{i} \right) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. Също така $[a, b) = \{a\} \cup (a, b) \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$

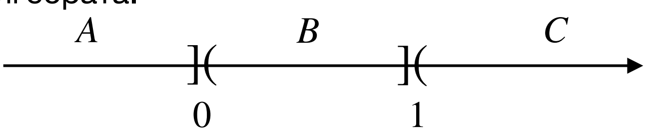
$[a, b] = \{a\} \cup (a, b) \cup \{b\} \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ и т.н.

Естествено, ако ни интересува само трихотомията,



то може да се ограничим само до σ-алгебрата
$\mathscr{A} = \{\emptyset, \mathbb{R}, A, B, C, A \cup B, B \cup C, C \cup A\}$, която има кардиланост $|\mathscr{A}| = 8$.

<u>Дефиниция</u>: (**Атом**) Ако $\mathscr{A}$ е σ-алгебра, то $A \in \mathscr{A}$ се нарича атом, ако от $B \subsetneq A$ и $B \in \mathscr{A} \Rightarrow B = \emptyset$, т.е. не съществува нетривиално подсъбитие на $\mathscr{A}$, което е част от σ-алгебрата.

$\oplus$ 

$|\mathscr{A}| = 8$. Атомите на $\mathscr{A}$ са A, B, C.

$\oplus$ За $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ атомите са $\{x\}$, т.е. всяка една точка от реалната права.

$\oplus$ $T = 10\ 001$ - брой тиражи на „6 от 49“. За всяко едно теглене имаме $\Omega_i = \left\{ \omega_1^{(i)}, \omega_2^{(i)}, \ldots, \omega_{\binom{49}{6}}^{(i)} \right\}$, $1 \le i \le T$ шесторки, които се падат в i-тия тираж.

Формална конструкция: всяка една от всевъзможна шесторка от $\omega^{(1)}$.

$$\Omega = \bigotimes_{i=1}^{T} \Omega_i = \{(\omega_\cdot^{(1)}, \omega_\cdot^{(2)}, \ldots, \omega_\cdot^{(T)})\}$$

$A = \{$паднали са се две еднакви наредени шесторки в T тиража$\}$

$A = \bigcup_{i=1}^{10\ 000} A_i$, където $A_i = \{\omega \in \Omega : \omega_\cdot^{(i)} = \omega_\cdot^{i+1}\}$.

$\oplus$ Имаме два пощенски плика A и B, в които има съответно сумите a и b. Нямаме никаква априорна информация за сумите, а човека, който ги е поставил в пликовете знае, че $a < b$. Избираме случайно с вероятност $\frac{1}{2}$ и отваряме съответния плик. Виждаме сумата x в плика, който сме избрали ($x = a$ или $x = b$), но нямаме никаква информация за това дали останалата сума е по-голяма или по-малка. Човека, който е сложил сумите в пликовете знае, но ние не. Дава ни се шанс, ако искаме, да си сменим плика. При пожелана смяна, ние със сигурност ще вземем сумата в новия плик, а ако откажем смяната ще останем със сумата от първоначално избрания плик. Да означим събитието $C = \{$печелим по-голямата сума $b\}$. Съществува ли такава стратегия, за която $\mathbb{P}(C) \ge \frac{1}{2}$? (т.е. има ли стратегия, която ви позволява да спечелите по-голямата от двете суми, с вероятност по-голяма от $\frac{1}{2}$)

Интуицията подвежда и се оказва, че има такава стратегия.