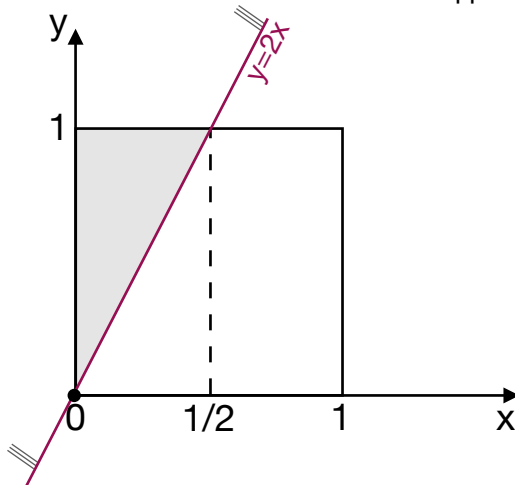


Задача (Putnam 1993, B3). Две реални числа x и y се избират на случаен принцип (с равномерна плътност) от интервала $(0,1)$. Каква е вероятността най-близкото цяло число до x/y да е четно?

Решение.

Нека $[x/y]$ е най-близкото цяло число до x/y . Тъй като x и y са положителни, то $[x/y]$ може да е равно най-малко на 0. Кога $[x/y]=0$? $[x/y]=0 \Leftrightarrow x/y < 1/2$ или $y > 2x$. Да разгледаме правата $y=2x$ и единичния квадрат върху координатна система. Ясно е, че единичният квадрат е пространството (пространството от всички възможни изходи Ω за избор на x и y), в което решаваме задачата.



За всички наредени двойки (x,y) , за които $y > 2x$ имаме, че $[x/y]=0$, което е четно и следователно x и y изпълняват условието на задачата. Правата $y=2x$ отсича от единичният квадрат фигура с лице равно на $1/4$. Търсената вероятност е равна на сбора на лицата на всички тези фигури отсечени от единичния квадрат, от които ако вземем произволни числа x и y ще имаме $[x/y]=2n$, за някое $n \in \mathbb{N}_{\{0\}}$. За $n=0$ вече намерихме фигурата и нейното лице. Да разгледаме $[x/y]=2n$ за $n \neq 0$. За да имаме $[x/y]=2n$ е необходимо да имаме:

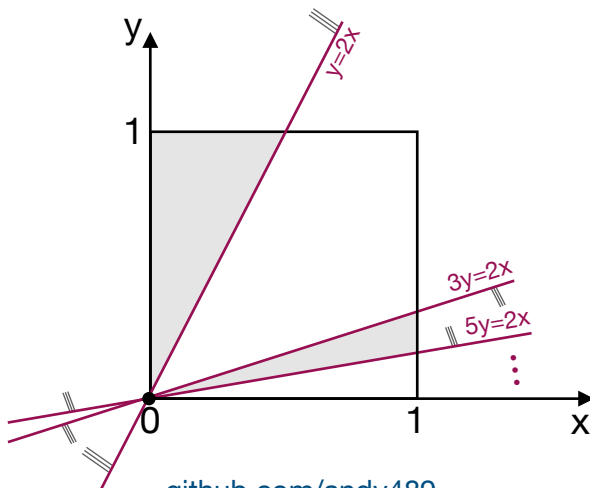
$$2n - \frac{1}{2} < \frac{x}{y} < 2n + \frac{1}{2} \text{ или } \frac{4n-1}{2} < \frac{x}{y} < \frac{4n+1}{2}. \text{ Тоест } \frac{2x}{4n+1} < y < \frac{2x}{4n-1}.$$

Тук игнорираме числата, за които $\frac{x}{y} = \frac{2m+1}{2}$, тъй като не е дефинирано дали $[x/y]$ е четно или нечетно

(равноотдалечено и от двете), но това не е от значение тъй като те са с плътност равна на 0 (всяка една ненулева отсечка съдържа безбройно много точки и всяка една ненулева

фигура съдържа безбройно много отсечки). В случая всички прави от вида $\frac{x}{y} = \frac{2m+1}{2}$,

които минават през единичния квадрат (изброимо много за $m \in \mathbb{N}_{\{0\}}$) имат нулева плътност.



Очевидно е необходимо да пресметнем лицата на всички фигури заключени между правите $(4n+1)y=2x$ и $(4n-1)y=2x$ за всяко $n > 0$ и единичния квадрат. На чертежа по-горе сме изобразили правите за $n=1$ и фигурата заключена между тях и единичния квадрат. Нейното лице е равно на:

$$\int_0^1 \frac{2x}{3} dx - \int_0^1 \frac{2x}{5} dx = \frac{x^2}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^2}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$$

Следователно, търсената вероятност е равна на:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{2x}{4n-1} dx - \int_0^1 \frac{2x}{4n+1} dx \right) = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots \right) = \frac{1}{4} + \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{5 - \pi}{4}$$

В последното равенство използвахме формулата на Лайбниц за π . Може да намерите нейното доказателство в референциите по-долу.

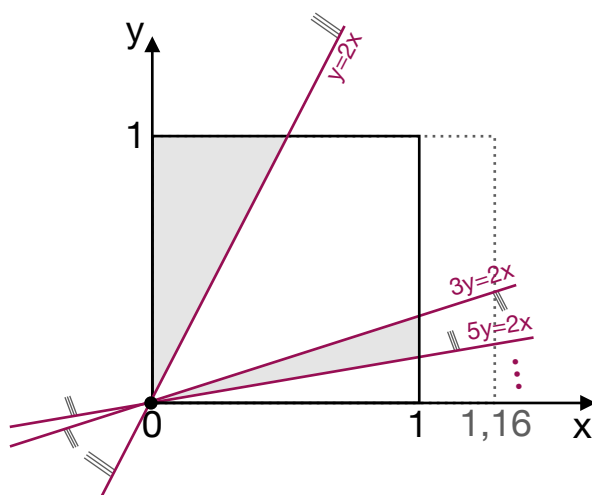
Друга интересна опаковка на задачата.

Ако интервала на реалното число y , от който се избира, запазва своите граници и остава $(0,1)$, то да се намери най-малкото t , за което, ако x се избира от интервала $(0,t)$, то $\mathbb{P}([x/y] \equiv 0 \pmod{2}) = 1/2$. Тоест питаме как да се промени горната граница на интервал, от които избираме x , така че да е равно вероятно $[x/y]$ да е четно или нечетно.

$$\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \frac{2x}{4n-1} dx - \int_0^t \frac{2x}{4n+1} dx \right) = \frac{1}{4} + t \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots \right) = \frac{1}{4} + t \times \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

Приравнявайки последното равенство до исканото $1/2$ получаваме, че $t = \frac{1}{4 - \pi}$, което е малко над 1, а именно

1.1649480915813719236196768173142674053311927368274150324499122832...



Референции :

- https://en.wikipedia.org/wiki/Madhava_series
- https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_%CF%80
- <https://maa.org/math-competitions/william-lowell-putnam-mathematical-competition>
- <https://math.hawaii.edu/home/pdf/putnam/1993.pdf>