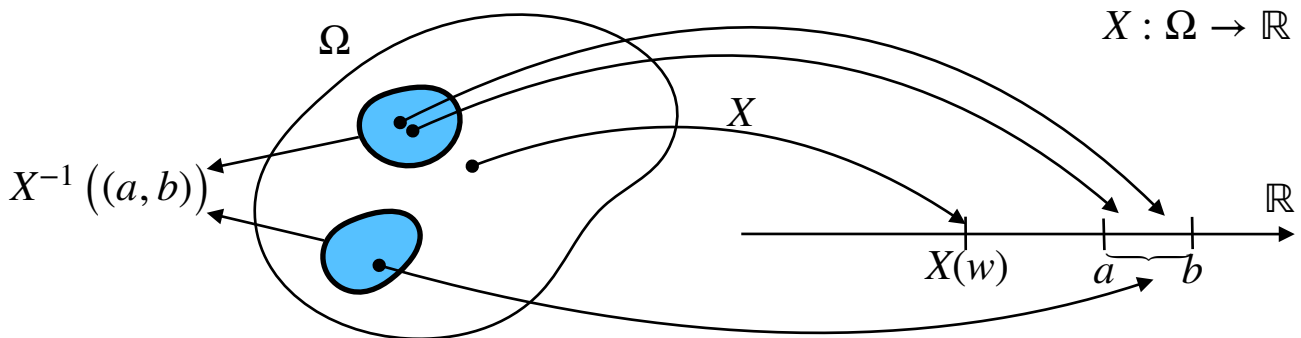


Случайни величини

$V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ – вероятностно пространство.



Случайната величина X не е нито случайна, нито величина. Тя е грубо казано функция/изображение, което съпоставя на всяко елементарно събитие ω от Ω – някакво реално число.

За да бъде X случайна величина, тя трябва да удовлетворява някакви критерии.

Дефиниция (Случайна величина). Нека V е вероятностно пространство. Тогава $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ е случайна величина, тогава когато $\forall a < b, a, b \in \mathbb{R}$ е в сила $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A}$, където $X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$. Т.е. трябва да имаме възможността да кажем каква е вероятността X да е между a и b .

Всички елементарни събития, към които, като приложим изображението X отиват в интервала (a, b) са множеството B .

Факт. Вярно е, че $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$, ако $I = (a, b)$; $I = [a, b]$; $I = \{x\}, x \in \mathbb{R}$. Всеки интервал (a, b) от \mathbb{R} има прообраз $B \subseteq \Omega$ и се изпраща в него с $X^{-1}((a, b))$. Някои интервали може да се изпращат в празното множество \emptyset .

Това изображение $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ се нарича случайна величина, ако може да придаваме вероятност на прообразите му – на всички множества, които изпращаме във всеки един интервал.

Теорема (Свойства на случайни величини). Нека V е вероятностно пространство и X и Y са случайни величини ($X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$). Тогава е в сила:

- а) $aX \pm bY$ е случайна величина, $\forall a, b \in \mathbb{R}$;
- б) cX е случайна величина, $\forall c \in \mathbb{R}$ (частен случай на а) : $a = c$ и $b = 0$);
- в) XY е случайна величина;
- г) ако $\mathbb{P}(Y = 0) = 0$, то $\frac{X}{Y}$ е случайна величина.

Случайните величини са функции, за които не може да знаем как действат навсякъде, тъй като това би било или твърде сложно или твърде скъпо, а в някои случаи може дори да не е ясно как да въведем пространството от елементарни събития Ω .

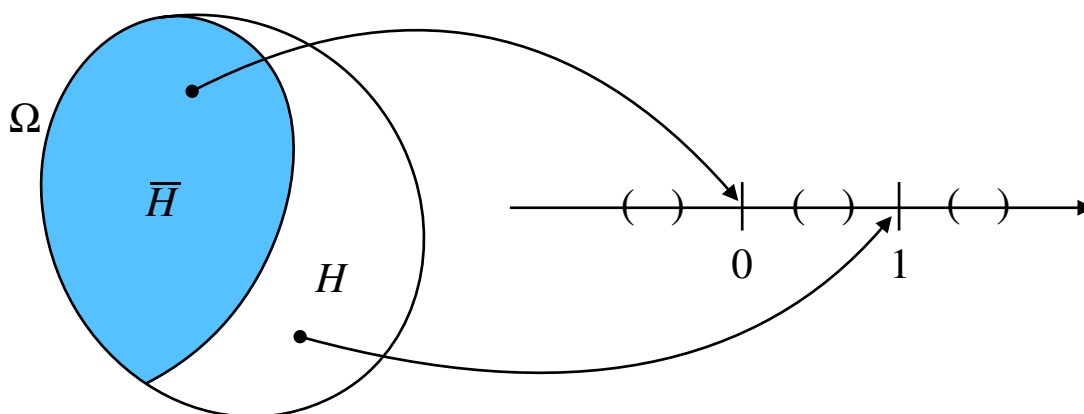
Дискретни случайни величини

Дефиниция (Индикаторна функция). Нека Ω е множество от елементарни събития и $H \subseteq \Omega$. Тогава 1_H ($1_{\{H\}}$) се нарича индикаторна функция, ако $1_H = \begin{cases} 1, & \text{ако } w \in H \\ 0, & \text{ако } w \in \bar{H} \end{cases}$. Грубо казано: $1_H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Лема. Нека V е вероятностно пространство и $H \in \mathcal{A}$. Тогава $1_H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ е случайна величина.

Доказателство:

Ако $X(w) := 1_H(w)$, то $X^{-1}(\{0\}) = \bar{H}$, а $X^{-1}(\{1\}) = H$.



$$\forall a < b \text{ е вярно, че } X^{-1}(a, b) = \begin{cases} \emptyset, & \text{ако } a \geq 1 \text{ или } b \leq 0 \text{ или } a > 0 \text{ и } b < 1 \\ \Omega, & \text{ако } 0 \in (a, b) \text{ и } 1 \in (a, b) \\ H, & \text{ако } 1 \in (a, b) \text{ и } 0 \notin (a, b) \\ \bar{H}, & \text{ако } 1 \notin (a, b) \text{ и } 0 \in (a, b) \end{cases}$$

Който и интервал (a, b) да вземем - изходите ще са един от 4-те възможни: \emptyset , Ω , H и \bar{H} , които са σ алгебра. Т.е. дефиницията е изпълнена (за всеки случай $X^{-1}((a, b)) \in \mathcal{A} \Rightarrow X = 1_H$ е случайна величина). С това лемата е доказана.

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{A} : X(w) = 1_H(w) \in \{0, 1\}$$

$$H = \{w \in \Omega \mid X(w) = 1\} = \{X = 1\}$$

$$\bar{H} = \{w \in \Omega \mid X(w) = 0\} = \{X = 0\}$$

Имаме две възможности: $\mathbb{P}(X = 1) = p$ и $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$, $p \in [0, 1]$

Нека $V^* = (\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ е друго вероятностно пространство и $\mathcal{H}^* \subseteq \mathcal{A} : X^* = 1_{H^*}$ е вероятността $\mathbb{P}(X^* = 1) = p \Rightarrow$ вероятно тези две случайни величини X и X^* не са различни.

Означения (за удобство):

$$\bar{x} = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n) - n \text{ различни числа} \\ (x_1, x_2, \dots, x_k, \dots) - \text{изброимо много различни числа} \end{cases}$$

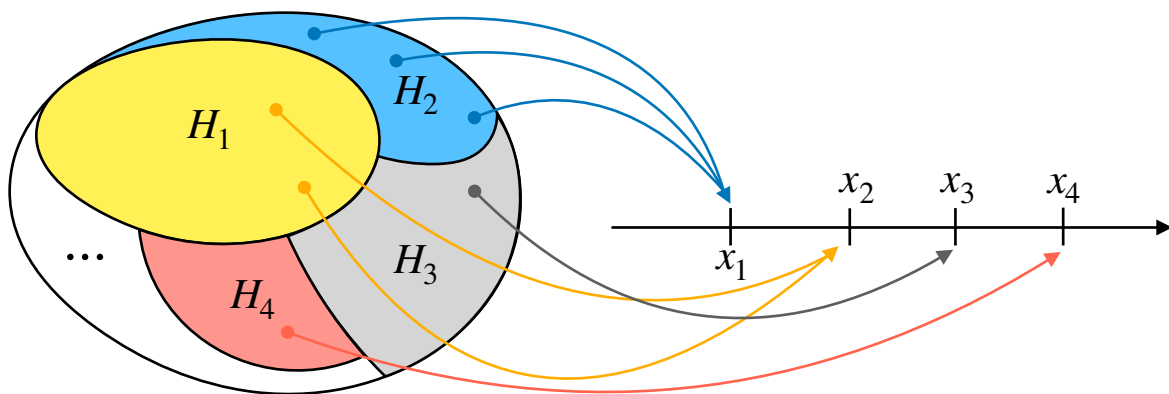
V е вероятностно пространство.

$$\mathcal{H} = \begin{cases} H_1, \dots, H_n \text{ пълна група от събития във } V \\ (H_i)_{i \geq 1}, \text{ където } H_i \in \mathcal{A}; H_i \cap H_j = \emptyset, i \neq j, \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega \end{cases}$$

Дефиниция (Дискретна случайна величина). Нека V е вероятностно пространство. Дадени са \bar{x} и \mathcal{H} . Тогава

$$X(\omega) = \sum_{j=1}^n x_j 1_{H_j}(\omega) \quad \left(\text{или когато имаме изброим брой: } X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} x_j 1_{H_j}(\omega) \right)$$

се нарича дискретна случайна величина (взима или n различни или най-много изброимо много на брой различни стойности умножени по индикаторната функция). Кратък запис: $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$.



$$H_j = \{X = x_j\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_j\}$$

Дефиниция (Разпределение на дискретна случайна величина).

Нека $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$ е дискретна случайна величина. Тогава таблицата

X	x_1	x_2	\dots	x_k	\dots
$\mathbb{P}(X = x_j)$	p_1	p_2	\dots	p_k	\dots

където $\mathbb{P}(X = x_j) = p_j = \mathbb{P}(H_j)$ и $\sum_{j=1} p_j = 1$, се нарича разпределение на X .

⊕ Измерваме дните, в които дадено CPU работи (функционира) и X случайната величина, която измерва броя на тези дни. Може да моделираме X по два начина:

- $X \in \mathbb{N}_0^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $X \in \{0, 1, 2, \dots, 1000\}$

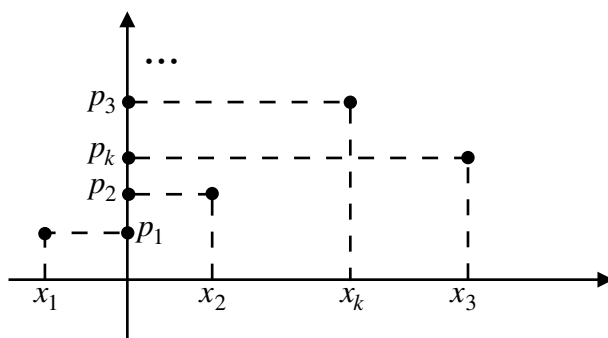
X	0	1	2	...
\mathbb{P}	p_0	p_1	p_2	...

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_j = 1$$

X	0	1	...	1000
\mathbb{P}	p_0	p_1	...	p_{1000}

$$\sum_{j=0}^{1000} p_j = 1$$

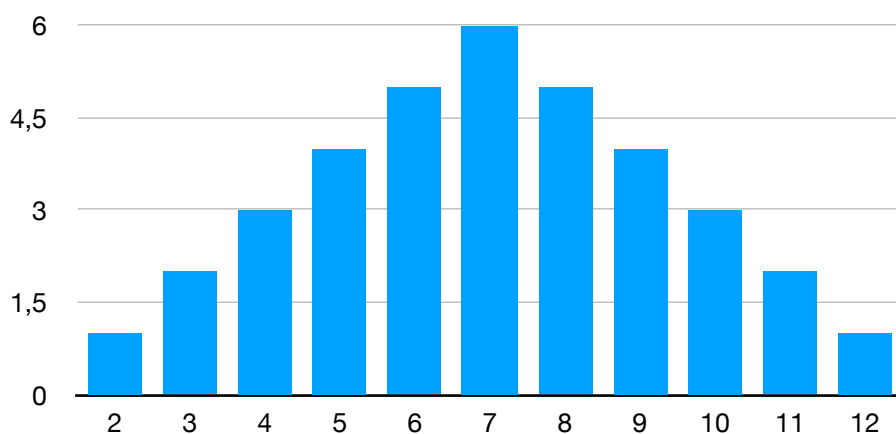
Дефиниция (Хистограма). Графиката по-долу се нарича хистограма:



⊕ Хвърляме два зара. X и Y са случайните величини – точките от 1 до 6, съответно паднали се на горните страни при хвърляне на първия и втория зар. $Z = X + Y$ е случайната величина, която моделира сбора от тези точки.

Z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
\mathbb{P}	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

■ Сумата от точките на два зара



Смяна на променливите на дискретни случайни величини

X - сл. вел., $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $Y = g(X)$ – искаме да знаем дали Y е случайна величина.

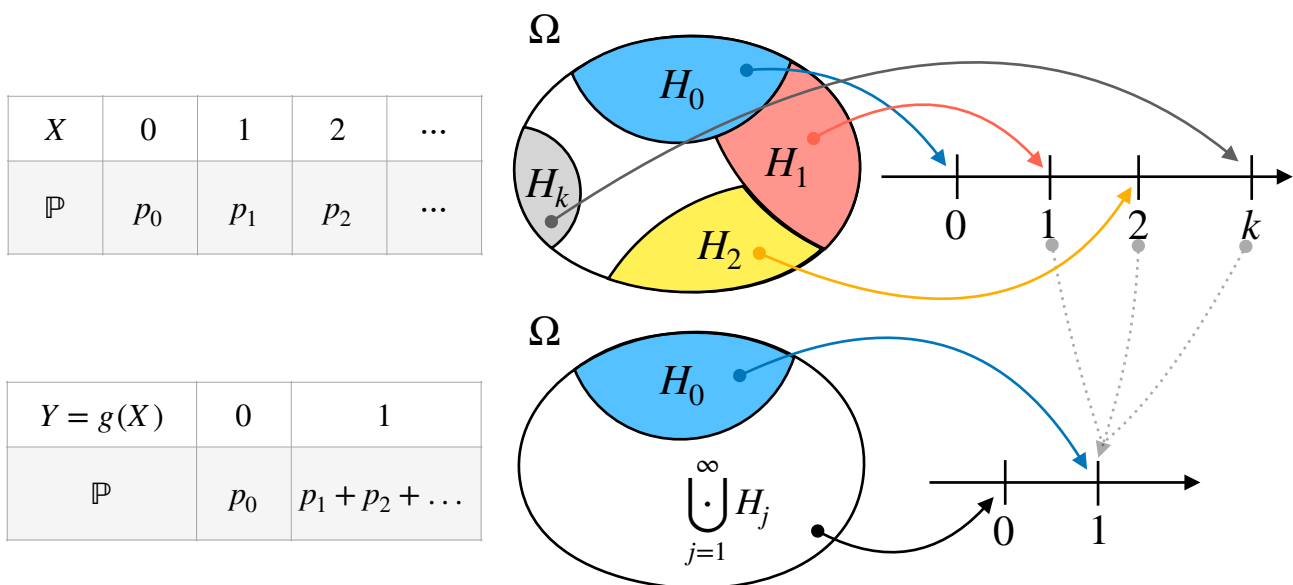
Ако $X = \sum_j x_j 1_{H_j}$, то $Y = \sum_j g(x_j) 1_{H_j}$ е случайна величина и ако положим $y_i = g(x_j)$, то $Y = \sum_j y_j 1_{H_j}$.

За $g(x_m) = g(x_k)$, $m \neq k$ ще получим повтаряемост на някои стойности, но това няма да е грешка, просто за удобство и икономичност може да ги обединим като $\mathcal{H} = H_m \cup H_k$.

X	y_1	y_2	\dots	y_m	\dots	y_k	\dots
\mathbb{P}	p_1	p_2	\dots	$p_m + p_k$	\dots	p_k	\dots

\oplus Имаме някакво CPU. $X = \sum_{j=0}^{\infty} j 1_{\{H_j\}}$, където $H_j = \{\text{CPU работи точно } j \text{ дни}\}$

$Y = g(X)$, където $g(n) = \begin{cases} 0, & \text{ако } n = 0 \\ 1, & \text{ако } n \geq 1 \end{cases}$.



X, Y – дискретни случайни величини, $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Тогава $Z = g(X, Y)$ е дискретна случайна величина.

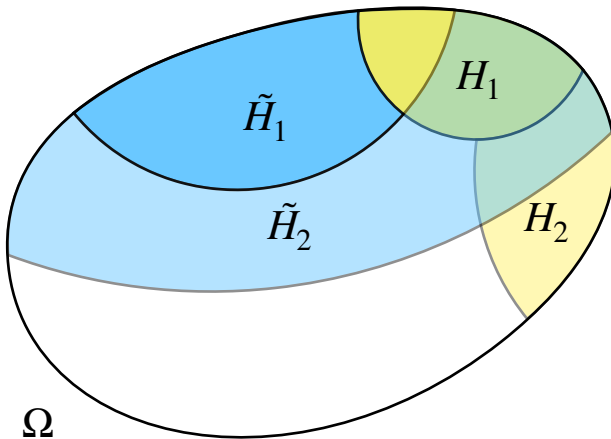
X	x_1	x_2	\dots
\mathbb{P}	p_1	p_2	\dots

$$\sum_i p_i = 1$$

Y	y_1	y_2	\dots
\mathbb{P}	q_1	q_2	\dots

$$\sum_i q_i = 1$$

$$Z = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) 1_{\{X=x_i, Y=y_j\}}$$



$$H_1 = \{X = x_1\}; H_2 = \{X = x_2\}; \dots$$

$$\tilde{H}_1 = \{Y = y_1\}; \tilde{H}_2 = \{Y = y_2\}; \dots$$

$$T_{ij} = H_i \cap \tilde{H}_j$$

Независимост на дискретни случайни величини

Дефиниция (Независимост на дискретни сл. вел.). Нека X, Y са дискретни случайни величини във вероятностното пространство V . Тогава

$$\underbrace{X \perp\!\!\!\perp Y}_{X \text{ и } Y \text{ са независими}} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x_j; Y = y_k) = \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_k) \stackrel{\text{def.}}{=} \\ = \mathbb{P}(X = x_j) \mathbb{P}(Y = y_k), \forall j, k.$$

$$\oplus \quad \Omega = \{(0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)\}; \mathcal{A} = 2^\Omega;$$

$\mathbb{P}(\{0, 0\}) = \mathbb{P}(\{0, 1\}) = \mathbb{P}(\{1, 0\}) = \mathbb{P}(\{1, 1\}) = \frac{1}{4}$ (имаме равномерна вероятност върху четирите елемента). Това е математическа конструкция на простия пример с хвърлянето на две монети.

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad X(w) = w(1). \text{ Например } X(\{0, 1\}) = 0$$

1-ва координата

$$Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad Y(w) = w(2). \text{ Например } Y(\{0, 1\}) = 1$$

2-ра координата

Тоест, първата монета е „тура“, а втората монета – „ези“ (ако сме дефинирали събитието „ези“ с $1^{-\text{ца}}$ (за успех)).

X и Y са независими ($X \perp Y$), т.к. $\mathbb{P}(X = i, Y = j) = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$, $\forall i, j \in \{0, 1\}$.

Дефиниция (Функция на разпределение на случайна величина). Нека X е сл. вел. във вероятностно пространство V . Тогава $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$, $\forall x \in (-\infty, \infty)$, се нарича функция на разпределение на X .

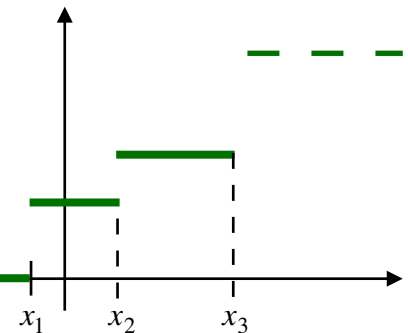
⊕

X	x_1	x_2	x_3	\dots
\mathbb{P}	p_1	p_2	p_3	\dots

и $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$

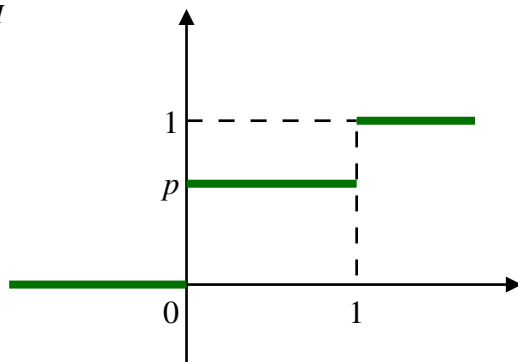
$$\Rightarrow F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{ако } x \leq x_1 \\ p_1, & \text{ако } x \in (x_1, x_2] \\ p_1 + p_2, & \text{ако } x \in (x_2, x_3] \\ \dots & \\ p_1 + \dots + p_k, & \text{ако } x \in (x_k, x_{k+1}] \end{cases}$$

стъпаловидна (нарастваща функция)



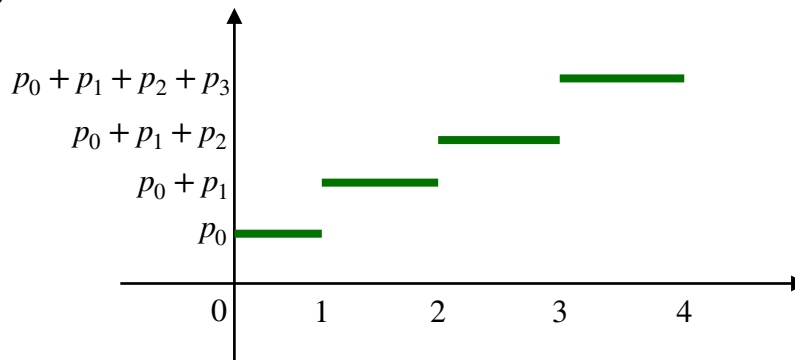
⊕

$X = 1_H$



⊕

CPU



Свойства: $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X = 0$.

Математическо очакване (за дискретни случайни величини)

Дефиниция. Нека X е дискретна сл. вел. Ако $\sum_j x_j p_j$ е добре деф. (т.е. е крайна),

то $\mathbb{E}X = \sum_j x_j p_j = \sum_j \underbrace{x_j}_{\text{възможна стойност на } X} \times \underbrace{\mathbb{P}(X = x_j)}_{\text{вероятност за тази стойност } x_j}$ е очакването на X .

Когато имаме краен брой стойности - тяхната сума ще е винаги добре дефинирана. Обаче, когато имаме изброимо много стойности, то тогава може сумата да не е крайна.

⊕ Ако X взема краен брой стойности: x_1, \dots, x_n , то

$$\sum_{j=1}^n x_j p_j < \infty \Rightarrow \mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n x_j p_j \text{ винаги съществува.}$$

⊕ Ако X е такава случайна величина, че $\mathbb{P}(X = x_j) = \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2}, j \geq 1$. Тогава

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = j) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = 1, \text{ тъй като } \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}. \text{ Но тази случайна величина}$$

няма очакване, тъй като

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^{\infty} j \times \frac{6}{\pi^2} \times \frac{1}{j^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \frac{6}{\pi^2} \times \underbrace{(\text{хармоничния ред})}_{\text{не сходя}} = \infty.$$

Коментар. $f(a) = \sum_j (x_j - a^2) p_j$ е функция на a и тя се минимизира, когато

$$a = \mathbb{E}X.$$

$\min_{a \in \mathbb{R}} f(a) = f(\mathbb{E}X)$. Т.е. $\mathbb{E}X$ минимизира квадратичната грешка.

⊕ Ако имаме равномерно разпределение върху $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то тогава

$$\mathbb{E}X = \sum_{j=1}^n x_j \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j = \bar{X} \text{ (което е средно аритметичното на } X \text{).}$$

Средно аритметичното е математическото очакване на равномерното разпределение върху дадени точки.