СЕМ, лекция 5

(2020-10-29)

Да се върнем на примера от лекция 3 за правене на COVID-19 тест на извадка от n души едновременно.

Нека X_n е случайната величина, която отговаря на сумата заплатена за тестване на n човека, които се събират в една проба (цената на един тест е 1 лв.). Тогава:

$$X_n = \begin{cases} 1 \text{ лв.}, & \text{ако всичките } n \text{ са НЕзаразени;} \\ n+1 \text{ лв.}, & \text{ако има поне един заразен от всички } n \text{ души в извадката} \\ & \text{(+1 лв., т.к. вече сме изхабили един тест за цялата извадка)} \end{cases}$$

Тъй като вероятността един човек да е заразен е равна на p, то вероятността да не е заразен ще е равна на $1-p$.

$$X_n = \begin{cases} 1, & (1-p)^n \\ n+1, & 1-(1-p)^n \end{cases}$$

X_n	1	$n+1$
$\mathbb{P}$	$(1-p)^n$	$1-(1-p)^n$

$\mathbb{E}X_n = 1 \times (1-p)^n + (n+1) \times \left(1-(1-p)^n\right) = \cancel{(1-p)^n} + n - n(1-p)^n + 1 - \cancel{(1-p)^n} =$
$= n + 1 - n(1-p)^n$ (трансцедентна функция).

Остана само да минимизираме тази функция $\dfrac{\mathbb{E}X_n}{n}$, за дадено p. Например при

$$p = 0{,}05 \Rightarrow \min_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}X_n}{n} = \frac{\mathbb{E}X_5}{5} = 4.626216.$$

Т.е. за $n = 5$ ще използваме най-малко тестове в очакване, за да определим всеки един от посетителите на летището дали е носител на вирус.

Wolfram Alpha: $\min \left\{ 1 + \dfrac{1}{x} - 0.95^x \right\} \approx 0.426216$ в $x \approx 5.02239$

Коментар. Имаме $5k$ човека, които да тестваме.

$X_5(1),\, X_5(2),\, \ldots,\, X_5(k).$

$\underbrace{X_5(1) + X_5(2) + \ldots + X_5(k)}_{k} = 2{,}1310 = \mathbb{E}X_5.$

Свойства на математическото очакване

а) Ако $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $Y = g(X)$, то $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}g(X) = \sum_j g(x_j)p_j$, ако тази сума е добре дефинирана, което следва директно от дефиницията на Y;

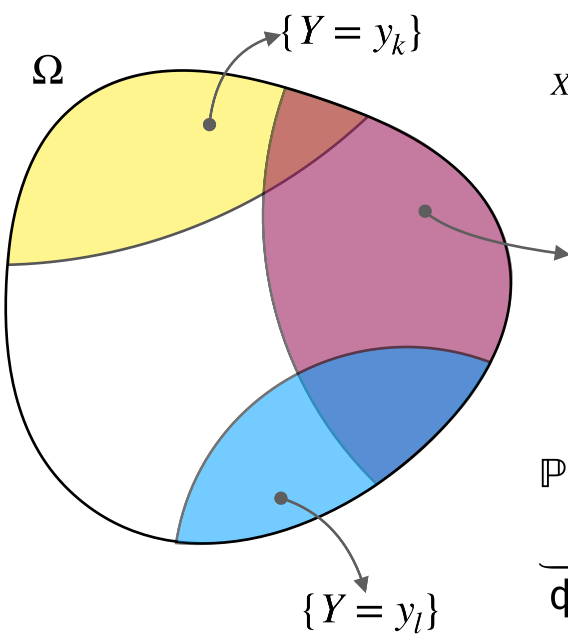
б) Ако $X \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}X \geq 0$ (позитивност) $\Leftarrow \mathbb{E}X = \sum_j \underbrace{x_j}_{\geq 0} \underbrace{p_j}_{\geq 0} \geq 0$;

в) Ако $X \equiv c\ (const.)$:

X	c
$\mathbb{P}$	1

$\Rightarrow \mathbb{E}X = c \Leftarrow \mathbb{E}X = c \times 1 = c$.

г) $\mathbb{E}cX = c\mathbb{E}X$, където $c \in \mathbb{R}$ е константа. $\Leftarrow$ ако вземем функцията $g(x) = cx$, то $Y = cX$. Тогава имаме, че $\mathbb{E}Y = \sum_j cx_jp_j = c\sum_j x_jp_j = c\mathbb{E}X$.



X, Y- дискретни случайни величини върху Ω

$$\{X = x_j\} = \{X = x_j\} \cap \dot{\bigcup_i} \{Y = y_i\} = \bigcup_i \{X = x_j\} \cap \{Y = y_i\}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}(X = x_j) = p_j = \sum_i \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i)}_{\text{формула за пълната вероятност}}$$

д) Нека X, Y са две дискретни случайни величини. Тогава $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Доказателство.

$$\mathbb{E}(X+Y) = \sum_i \sum_j (x_j + y_i)\mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i) =$$

$$= \sum_i \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i) + \sum_i \sum_j y_i \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i) =$$

$$= \sum_j x_j \underbrace{\sum_i \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i)}_{\substack{\mathbb{P}(X = x_j),\ \text{т.к. изчерпваме} \\ \forall\ \text{възм. ст-ти на } y \text{ сечени с } x_j \\ \text{(ф-ла за пълната вер.)}}} + \sum_i y_i \underbrace{\sum_j \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i)}_{\mathbb{P}(Y=y_i)} =$$

$$= \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j) + \sum_i y_i \mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y, \text{ което искахме да докажем}$$

Твърдение. Нека X и Y са дискретни случайни величини. Нека в допълнение имаме, че $X \perp\!\!\!\perp Y$. Тогава $\mathbb{E}XY = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$.

Доказателство.
Въвеждаме функцията $g(x, y) = xy$.

$$\mathbb{E}XY = \mathbb{E}g(X, Y) =$$

$$= \sum_j \sum_i x_j y_i \mathbb{P}(X = x_j \cap Y = y_i) \overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_j \sum_i x_j x_i \mathbb{P}(X = x_j)\mathbb{P}(Y = y_i) =$$

$$= \sum_j x_j \mathbb{P}(X = x_j) \sum_i y_i \mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y, \text{ което искахме да докажем.}$$

$\oplus$ Игра на рулетка (18 червени, 18 черни, 1 зелено).

Разглеждаме два вида игри:
Играч 1: играе само на черно с по 1лв.
Играч 2: играе само на числото 5 с по 1лв.

Очевидно двете игри са коренно различни. Нека се опитаме да ги оценим по някакъв начин и посочим и дори притеглим разликите.

Първо нека пресметнем математическото очакване на тяхната възвращаемост (печалба/загуба) за играта на двата играча.

Нека X е играча, който играе само на едно чисо (в случая това е числото 5, но реално може да бъде което и да е число от рулетката). Тогава:

X	-1	35
$\mathbb{P}$	$\frac{36}{37}$	$\frac{1}{37}$

$$\mathbb{E}X = -1 \times \frac{36}{37} + 35 \times \frac{1}{37} = -\frac{1}{37}$$

За по-консервативния играч Y, залагащ само на червено, ще имаме:

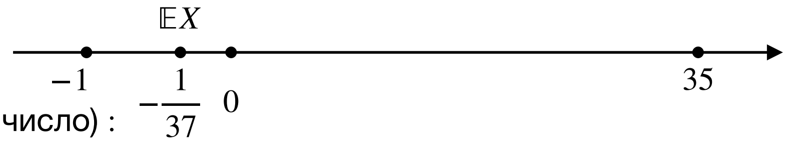
Y	-1	1
$\mathbb{P}$	$\frac{19}{37}$	$\frac{18}{37}$

$$\mathbb{E}Y = -1 \times \frac{19}{37} + 1 \times \frac{18}{37} = -\frac{1}{37}$$

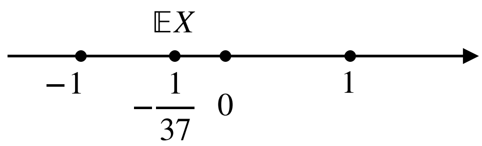
Оказва се, че $\mathbb{E}X = \mathbb{E}Y = -\dfrac{1}{37}$, т.е. и двамата играча губят средно по 1лв. на всеки 37 изиграни от тях игри или средно по ≈ 3ст. на всяка игра.

Дългосрочно, и двамата играчи ще имат средно една и съща печалба или загуба, но игрите се различават доста по своя характер. Играча X ще печели много повече (с много по-голямо отклонение от средното) при печалба, но много по-рядко. Докато играча Y ще печели много по-често, но с много по-малко отклонение от средното.

X (само на едно число) :



Y (на 18 от 37 числа) :



При играча X волатилността е много по-голяма от тази при играча Y.

Извода е, че очакването не може да различи двете игри. Необходим е друг инструмент, който да може да направи тази разлика, да я посочи и да я измери количествено.

Дисперсия

Дефиниция (Дисперсия). Ако сумата $\sum_j (X_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$ е добре дефинирана, то $\mathbb{D}X = \sum_j (x_j - \mathbb{E}X)^2 p_j$ е дисперсията на X.

За рисковия играч (този, който залага само на едно единствено число):

$$\mathbb{D}X = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{36}{37} + \left(35 - \frac{1}{37}\right)^2 \frac{1}{37} \approx 33.97;$$

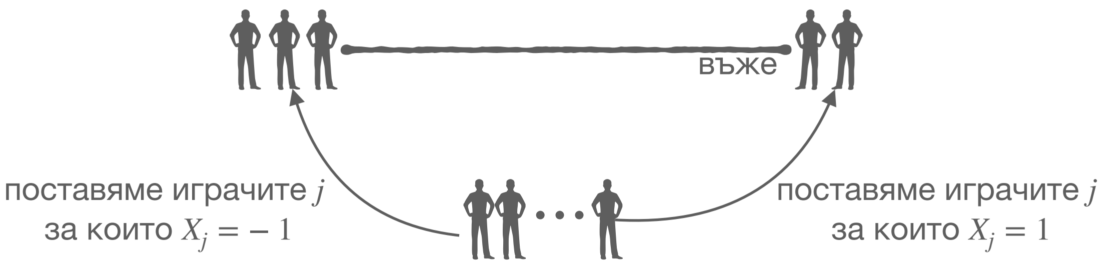
За консервативния играч (този който залага на 18 числа едновременно):

$$\mathbb{D}X = \left(-1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{19}{37} + \left(1 + \frac{1}{37}\right)^2 \frac{18}{37} \approx 0.999.$$

Дефиниция (Стандартно отклонение). Ако X е случайна величина и $\mathbb{D}X$ е крайно, то $\sqrt{\mathbb{D}X}$ се нарича стандартно отклонение на X.

$\oplus$ Имаме $2n$ играча и въже, което се дърпа от двата края. Ще нареждаме играчите от ляво и от дясно с вероятност $\frac{1}{2}$ и тази страна, от към която има повече играчи ще се измества от към техния край и ще спечели (допускаме, че всеки играч дърпа с еднаква сила).

Нека дефинираме случайна величина $X_i = \begin{cases} 1, & \text{с вероятност } p = \frac{1}{2} \\ -1, & \text{с вероятност } 1-p = \frac{1}{2} \end{cases}$, където ако се падне 1, i-тия играч се праща от дясно, иначе се праща от ляво (ако се падне -1).



$$Y = \sum_{j=1}^{2n} X_i = s \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{печели дясната страна} \\ < 0 \Rightarrow \text{печели лявата страна} \\ = 0 \Rightarrow \text{равенство между двете страни} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{2n} X_i + \sum_{i=1}^{2n} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{2n}\left(\frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{2}\times 1\right) = \sum_{i=1}^{2n} 0 = 0.$$

$$\mathbb{P}(Y) = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n} \overset{\text{асимптотично}}{=} O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Последния ред показва, че въпреки очакването да настъпи равенство, ние почти никога няма да го имаме. Тази игра може да се разглежда като опростен аналог на брауновото движение на частиците, на които действат равни сили от всякъде и се очаква да са статични, но всъщност непрекъснато се движат.

Твърдение. $\mathbb{D}X \overset{(1)}{=} \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \overset{(2)}{=} \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2.$

Доказателство.

$g(x) = (x - \mathbb{E}X)^2$, то

$\mathbb{E}g(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \overset{\text{def.}}{=} \sum\limits_j (x_j - \mathbb{E}X)p_j \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{D}X \Rightarrow (1)$ е доказано;

$$\mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\right) =$$

$$= \mathbb{E}X^2 + E\left(\underbrace{2}_{\text{число}} \times \underbrace{X}_{\text{сл. вел.}} \times \underbrace{\mathbb{E}X}_{\text{число}}\right) + \mathbb{E}(\underbrace{\mathbb{E}X}_{\text{число}})^2 =$$

$= \mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}X + (\mathbb{E}X)^2\mathbb{E}1 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \Rightarrow$ и (2) е доказано.

Свойства на дисперсията.

а) $\mathbb{D}X \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$, понеже $(X - \mathbb{E}X)^2 \geq 0$ и очакването на тази случайна величина е неотрицателно;

б) $\mathbb{E}X^2 \geq (\mathbb{E}X)^2 \Leftarrow 0 \leq \mathbb{D}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$;

в) Ако $X = c$ е константа, тогава $\mathbb{D}X = 0 \Leftarrow \mathbb{D}X = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}(c - c) = 0$;

г) $\mathbb{D}(cX) = c^2\mathbb{D}X \Leftarrow \mathbb{D}(cX) = \mathbb{E}(cX)^2 - (\mathbb{E}cX)^2 = c^2\mathbb{E}X^2 - c^2(\mathbb{E}X)^2 = c^2\mathbb{D}X$;

д) Ако X и Y са независими $(X \perp\!\!\!\perp Y)$, дискретни, случайни величини, то $\mathbb{D}(X + Y) = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$.

Доказателство.

Нека $Z = X + Y$ е нова случайна величина. Тогава,

$$\mathbb{D}Z \overset{def.}{=} \mathbb{E}(Z - \mathbb{E}Z)^2 = \mathbb{E}\left(X + Y - \mathbb{E}(X + Y)\right)^2 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X + Y - \mathbb{E}Y)^2 =$$

$$= \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X) + (Y - \mathbb{E}Y)^2 + 2(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)\right) \overset{\text{линейност на } \mathbb{E}}{=}$$

$$= \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 + \mathbb{E}(Y - \mathbb{E}Y)^2 + 2\mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y) =$$

$$= \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y + 2\mathbb{E}(XY - X\mathbb{E}Y - Y\mathbb{E}X + \mathbb{E}X\mathbb{E}Y) =$$

$$= \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y + 2\mathbb{E}XY - 2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y - \cancel{2\mathbb{E}Y\mathbb{E}X} + \cancel{2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y} =$$

$$= \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y - 2\mathbb{E}Y\mathbb{E}X + 2\mathbb{E}XY \overset{\text{независимост}}{=}$$

$$= \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y - 2\mathbb{E}Y\mathbb{E}X + \cancel{2\mathbb{E}X\mathbb{E}Y} = \mathbb{D}X + \mathbb{D}Y$$

Пораждаща функция

В тази тема X винаги ще е целочислена и неотрицателна, дискретна случайна величина, т.е. $X \in \mathbb{N}_0$.

Пораждащата функция прилича на торбичка, в която сме събрали всички индивидуални вероятности за $X = k$, както и друга информация, като сме я компресирали по начин, по който да може да изваждаме само това което ни трябва – на цената на някакви операции.

Дефиниция (Пораждаща функция). Нека $X \in \mathbb{N}_0$ е дискретна случайна величина. Тогава функцията $g_X(s) = \mathbb{E}s^X = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k)$, за $|s| < 1$, се нарича пораждаща функция на X.

⊕

X	0	1
$\mathbb{P}$	$1-p$	p

$$g_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) = s^0(1-p) + s^1(p) = \\ = \underbrace{1 - p + ps}_{\text{полином от първа степен на } s}$$

⊕

X	1	2	$\cdots$	n
$\mathbb{P}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\cdots$	$\frac{1}{n}$

$$g_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) = \\ = s^1 \times \frac{1}{n} + s^2 \times \frac{1}{n} + \ldots + s^n \times \frac{1}{n} = \\ = \frac{1}{n}\left(s^1 + \ldots + s^n\right) \overset{|s|<1}{=} \frac{s(1-s)^n}{n(1-s)}$$

Свойства на пораждащата функция.

a)
$$g_X^{(n)}(0) = n!\mathbb{P}(X = n) \Leftarrow g_X^{(n)}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} (s^k)^{(n)} \mathbb{P}(X = k) = \\ = \sum_{k=n}^{\infty} (s^k)^{(n)} \mathbb{P}(X = k) \overset{s=0}{=} \underbrace{(s^n)^{(n)} \mathbb{P}(X = n)}_{n!\mathbb{P}(X=n)}$$

Следователно $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{g_X^{(n)}(0)}{n!}$;

b) $\mathbb{E}X = g_X'(1) \Leftarrow \dfrac{\partial}{\partial s} g_X(s) = \dfrac{\partial}{\partial s}\mathbb{E}s^X = \mathbb{E}\dfrac{\partial}{\partial s}s^X = \mathbb{E}Xs^{X-1}\Big|_{s=1} = \mathbb{E}X$;

c) $\mathbb{D}X = g_X''(1) + g_X'(1) - \left(g_X'(1)\right)^2$.

Доказателство.

$$g'_X(1) = \frac{\partial}{\partial s} \sum_k s^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_k k s^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \bigg|_{s=1} = \underbrace{\sum_k k \mathbb{P}(X = k)}_{=\mathbb{E}X};$$

$$g''_X(1) = \frac{\partial}{\partial s} \sum_k k s^{k-1} \mathbb{P}(X = k) = \sum_k k(k-1) s^{k-2} \mathbb{P}(X = k) \bigg|_{s=1} = \sum_k k(k-1) \mathbb{P}(X = k)$$

$g''_X(1) + g'_X(1) = \sum_k k^2 \mathbb{P}(X = k) \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{E}X^2$. От друга страна: $\left(g'_X(1)\right)^2 = (\mathbb{E}X)^2$.

Следователно: $g''_X(1) + g'_X(1) - \left(g'_X(1)\right)^2 = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{D}X$, което искахме да докажем.

г) **Твърдение.** Нека $X \perp\!\!\!\perp Y$ и $X \in \mathbb{N}_0$ и $Y \in \mathbb{N}_0$. Тогава $g_{X+Y}(s) = g_X(s) g_X(s)$.

Доказателство.

$$g_{X+Y}(s) = \mathbb{E}s^{X+Y} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} s^{j+i} \mathbb{P}(X = j \cap Y = i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s^i \mathbb{P}(Y = i) \sum_{j=0}^{\infty} s^j \mathbb{P}(X = j) = \mathbb{E}s^Y \mathbb{E}s^X = g_X(s) g_Y(s)$$