СЕМ, лекция 8

(2020-11-19)

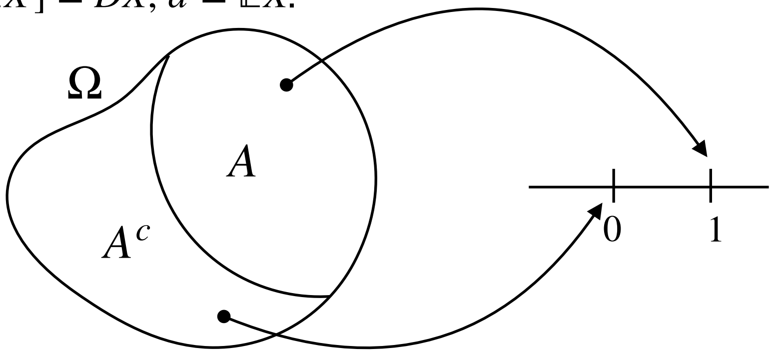
$$\rho(X,Y)=\frac{cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}},\ |\rho(X,Y)|\le 1 \text{ и } |\rho(X,Y)|=1 \Leftrightarrow Y=aX+b.$$

Когато X и Y са дискретни: $cov(X,Y)=\sum_{i,j}(x_i-\mathbb{E}X)(y_i-\mathbb{E}Y)p_{ij}$

$$DX=\sum_i (x_i-\mathbb{E}X)^2\mathbb{P}(X=x_i)$$

Условно математическо очакване (УМО)

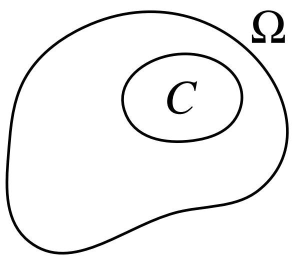
Знаем, че $\min_{a\in\mathbb{R}}(X-a)^2=\mathbb{E}[X-\mathbb{E}X]=DX,\ a=\mathbb{E}X.$



Ако $Y=\begin{cases}1,\ p\\ 0,\ 1-p\end{cases}$

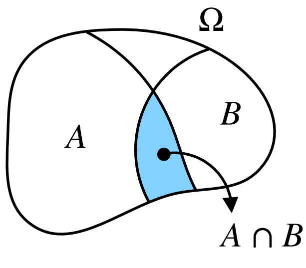
$A=\{Y=1\}$
$A^c=\{Y=0\}$

$Y=1_A=1_{\{Y=1\}}$
$p=\mathbb{E}Y=\mathbb{E}1_A=\mathbb{E}1_{\{Y=1\}}=\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(Y=1)$

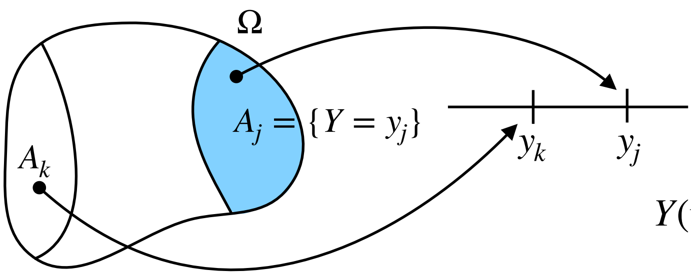


По-общо $C\subseteq\Omega$
$\mathbb{E}1_C=\mathbb{P}(C)$

Ако A и B са множества, то $1_A1_B=1_{A\cap B}$.
Следователно $\mathbb{E}1_A1_B=\mathbb{P}(A\cap B)$. Удобно е да записваме вероятностите като очакване на индикаторни функции, тъй като очакването знаем, че е линеен функционал и това може доста да ни помогне в някои случаи.



Ако Y е дискретна случайна величина, то $Y=\sum_j y_j.1_{A_j}$, където A_j е пълна група от събития и $\mathbb{P}(A_j)=\mathbb{P}(Y=y_j),\ \ A_j=\{Y=y_j\}$



$$Y(w)=0+\ldots+0+y_k.1+0+\ldots+0$$

$\oplus$ Случайна величина X и наблюдаваме $Y = \begin{cases} 1, \, p \\ 0, \, 1-p \end{cases}$, $Y = 1_A$, където $A = \{Y = 1\}$.
(Пример: X е клиент влязъл в магазин, а Y е дали клиента е мъж или жена)

$G: \ \{0,1\} \to \mathbb{R}$ е функция.
$\min\limits_G \mathbb{E}[X - G(Y)]^2 = ?$ От всички функции G искаме да вземем тази, която минимизира квадратичната грешка.

$\mathbb{E}[X - f(Y)]^2$, $f(x) = ?$

взаимно изключващи се $1_A . 1_{A^c} = 0$

$G(Y) = a.1_A + b.1_{A^c} = aY + b(1-Y)$, тъй като $1 - Y = 1_{A^c}$

$$\min_{a,b} \mathbb{E}[X - a1_A - b1_{A^c}]^2 = \min_{a,b}(\mathbb{E}X^2 - a^2\mathbb{E}1_A + b^2\mathbb{E}1_{A^c} - 2a\mathbb{E}X1_A - 2b\mathbb{E}X1_{A^c} - 0) = f(a,b)$$

Интересуваме се от $\min\limits_{a,b} f(a,b) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{\partial f}{\partial a} = 2a\mathbb{E}1_A - 2\mathbb{E}1_A X \\ 0 = \frac{\partial f}{\partial b} = 2b\mathbb{E}1_{A^c} - 2\mathbb{E}X1_{A^c} \end{cases} \Rightarrow$

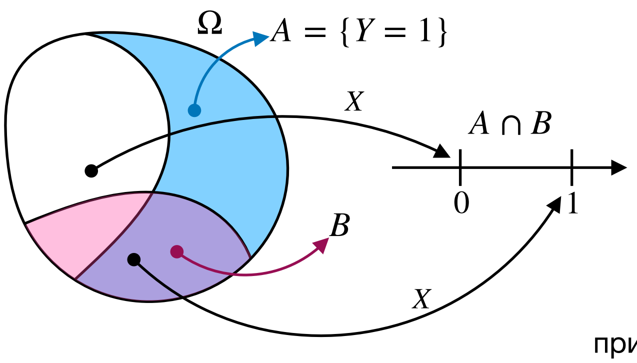
$$\boxed{a = \frac{\mathbb{E}X1_A}{\mathbb{E}1_A} \quad \text{и} \quad b = \frac{\mathbb{E}X1_{A^c}}{\mathbb{E}1_{A^c}}}$$

$$G(Y) = \underbrace{\frac{\mathbb{E}X1_A}{\mathbb{P}1_A}}_{a} \times 1_A + \underbrace{\frac{\mathbb{E}X1_{A^c}}{\mathbb{P}1_{A^c}}}_{b} \times 1_{A^c} \overset{\text{екв.}}{=} \frac{\mathbb{E}XY}{\mathbb{P}(Y=1)} \times 1_{\{Y=1\}} + \frac{\mathbb{E}(1-Y)}{\mathbb{P}(Y=0)} \times 1_{\{Y=0\}}$$

<u>Дефиниция</u>: (**Условно математическо очакване – УМО**) Нека X и Y са две случайни величини. Тогава

$$\mathbb{E}[X \,|\, Y] = f(y): \ \min_G \mathbb{E}[X - G(Y)]^2 = \mathbb{E}[X - f(Y)^2]$$

$\oplus$ $X = 1_B$



$$\mathbb{E}[X \,|\, Y] = \mathbb{E}[1_B \,|\, Y] =$$
$$= \frac{\mathbb{E}1_B1_A}{\mathbb{P}(A)}1_A + \frac{\mathbb{E}1_B1_{A^c}}{\mathbb{P}(A^c)}1_{A^c} =$$
$$= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}1_A + \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B)}{\mathbb{P}(A^c)}1_{A^c} =$$
$$= \underbrace{\mathbb{P}(B \,|\, A)}_{} \times 1_A + \underbrace{\mathbb{P}(B \,|\, A^c)}_{} \times 1_{A^c}$$

най-доброто приближение на X, когато $Y = 1$

най-доброто приближение на X, когато $Y = 0$

<u>Твърдение</u>: Нека X и Y са случайни величини, като Y е дискретна.

Y	Y_1	$\dots$	y_j	$\dots$
$\mathbb{P}$	p_1	$\dots$	p_j	$\dots$

$$Y = \sum_j y_j 1_{A_j}, \quad A_j = \{Y = y_j\}, \quad \mathbb{P}(A_j) = p_j.$$

Тогава $\mathbb{E}[X\,|\,Y] = \sum_j \dfrac{\mathbb{E}X1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}$. Количеството $\mathbb{E}[X\,|\,Y = y_j] = \dfrac{\mathbb{E}X1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)}$ се нарича условно очакване на X при положение (условие) $Y = y_j$.

$\oplus$ $X = 1_B$, $B = \{X = 1\}$

$$\mathbb{E}[1_B\,|\,Y = y_j] = \frac{\mathbb{E}1_B 1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} = \frac{\mathbb{P}(B \cap A_j)}{\mathbb{P}(A_j)} = \mathbb{P}[B\,|\,A_j] = \mathbb{P}[X = 1\,|\,Y = y_j]$$

$\oplus$ $X = \sum_i x_i 1_{B_i}$, X е дискретна случайна величина.

$$Y = \sum_j y_j 1_A \text{ и } p_{ij} = \mathbb{P}(X = x_i \cap Y = y_j)$$

$$\mathbb{E}[X\,|\,Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}X1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}; \qquad \underbrace{\mathbb{E}X1_{A_j}} = \mathbb{E}\left(\sum_i x_i 1_{B_i}\right) = \sum_i x_i \mathbb{E}1_{B_i}1_{A_j} =$$

$$= \sum_i x_i \mathbb{P}(B_i \cap A_i) = \underbrace{\sum_i x_i p_{ij}}$$

$$\mathbb{E}[X\,|\,Y = y_j] = \frac{\sum_i x_i p_{ij}}{\mathbb{P}(A_j)} = \sum_i x_i \frac{\mathbb{P}(A_j \cap B_i)}{\mathbb{P}(A_j)} = \sum_i x_i \mathbb{P}(B_i\,|\,A_j) = \sum_i \underline{x_i}\,\underbrace{\mathbb{P}(X = x_i\,|\,Y = y_i)}$$

<u>Твърдение</u>: X и Y са случайни величини, като Y е дискретна. Тогава $\mathbb{E}[X\,|\,Y]$ е дискретна случайна величина и $\mathbb{E}[X\,|\,Y] = \sum_j \mathbb{E}[X\,|\,Y = y_j] 1_{A_j}$.

$\mathbb{E}[X\,|\,Y]$	$\dots$	$\mathbb{E}[X\,|\,Y = y_j]$
$\mathbb{P}$	$\dots$	$\mathbb{P}(A_j)$

Свойства на условните математически очаквания

Теорема: Нека X, Z са случайни величини и Y е дискретна случайна величина - $Y = \sum_j y_j 1_{A_j}$. Тогава:

а) $\mathbb{E}[aX + bZ \,|\, Y] = a\mathbb{E}[X \,|\, Y] + b\mathbb{E}[Z \,|\, Y]$
б) Ако $X \perp\!\!\!\perp Y$, то $\mathbb{E}[X \,|\, Y] = \mathbb{E}X$
в) Ако $X = g(Y)$, то $\mathbb{E}[X \,|\, Y] = g(Y)$
г) $\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \,|\, Y]\big] = \mathbb{E}X$
д) $\mathbb{E}\big[f(U, Y) \,|\, Y = y_j\big] = \mathbb{E}f(U, y_j)$, където
U е конкретна случайна величина $U = X$;
U е вектор от случайни величини $U = (X_i)_{i \geq 1}$
U е редица от случайни величини $U = (X_1, \ldots, X_n)$, ако $U \perp\!\!\!\perp Y$.

Доказателство:

а) $$\mathbb{E}[aX + bZ \,|\, Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}\big[(aX + bZ)1_{A_j}\big]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = \sum_j \frac{a\mathbb{E}X1_{A_j} + b\mathbb{E}Z1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} =$$

$$= a \underbrace{\sum_j \frac{\mathbb{E}X1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}} + b \underbrace{\sum_j \frac{\mathbb{E}Z1_{A_j}}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j}} = a\mathbb{E}[X \,|\, Y] + b\mathbb{E}[Z \,|\, Y].$$

б) Нека X е дискретна (ще го докажем само в този случай, макар и да е вярно и ако не е дискретна)

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X \,|\, Y] = \sum_j \underbrace{\mathbb{E}[X \,|\, Y = y_j]}\, 1_{A_j} = \mathbb{E}[X \,|\, Y = y_j] = \sum_j x_i \mathbb{P}(X = x_i \,|\, Y = y_j) =$$

$$\overset{X \perp\!\!\!\perp Y}{=} \sum_j \frac{\mathbb{P}(X = x_i)\cancel{\mathbb{P}(Y = y_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(Y = y_i)}} = \underbrace{\sum_j \mathbb{E}1_{A_j}}_{\text{пълна група от събития}} = \mathbb{E}X.$$

в) $$\mathbb{E}[X \,|\, Y] = \sum_j \frac{\mathbb{E}\big[g(Y)1_{A_j}\big]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = S,$$

имаме, че $g(Y)1_{A_j} = g(Y).1_{\{Y = y_j\}} = g(y_j)1_{\{Y = y_j\}}$

$$\Rightarrow S = \sum_j \frac{\mathbb{E}\big[g(y_j)1_{A_j}\big]}{\mathbb{P}(A_j)} 1_{A_j} = \sum_j g(y_j)\frac{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}} 1_{A_j} = g(Y) = X.$$

г) Нека X е дискретна.

$$\mathbb{E}[X \mid Y] = \sum_j \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] 1_{A_j}$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \mathbb{E}\left[\sum_j \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] 1_{A_j}\right] = \sum_j \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] \mathbb{E} 1 A_j =$$

$$= \sum_j \mathbb{E}[X \mid Y = y_j] \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_j \frac{\mathbb{E} X 1_{A_j}}{\cancel{\mathbb{P}(A_j)}} \cancel{\mathbb{P}(A_j)} = \mathbb{E} \sum_j X 1_{A_j} = \mathbb{E} X \underbrace{\sum_j 1_{A_j}}_{=1} = \mathbb{E} X.$$

д) $\oplus$ Имаме следния модел:
В даден магазин влизат клиенти, като знаем, че мъжете закупуват нещо с вероятност $1/3$, а жените с вероятност $2/3$.

$$X = \begin{cases} 1, & \mathbb{P}(Y) \\ 0, & \mathbb{P}(Y) \end{cases}, \quad Y = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{мъж (вероятност 1/2)} \\ \frac{2}{3}, & \text{жена (вероятност 1/2)} \end{cases}$$

закупува или не

$X = Z_1 . 1_{\{Y = \frac{1}{3}\}} + Z_2 . 1_{\{Y = \frac{2}{3}\}}$, където $Z_1 \in Ber\left(\frac{1}{3}\right)$, а $Z_2 \in Ber\left(\frac{2}{3}\right)$.

$$X = f(Z_1, Z_2, Y) = \begin{cases} Z_1, & Y = \frac{1}{3} \\ Z_2, & Y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\mathbb{E} X = \mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X \mid Y]\big] = \mathbb{E}\left[X \mid Y = \frac{1}{3}\right] \mathbb{P}\left(Y = \frac{1}{3}\right) + \mathbb{E}\left[X \mid Y = \frac{2}{3}\right] \mathbb{P}\left(Y = \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \mathbb{E}\left[Z_1 \mid Y = \frac{1}{3}\right] \times \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{мъж или жена}} \times \mathbb{E}\left[Z_2 \mid Y = \frac{2}{3}\right] = \frac{1}{2}\left(\mathbb{E} Z_1 + \mathbb{E} Z_2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$\oplus$ $U = (X_j)_{j \geq 1}$, X_j са независими една от друга случайни величини и $X_j \in Ber(p)$ (хвърляне на нечестна монета с вероятност p за ези и q за тура)

Нека $N \in Ge(r)$ и N не зависи от U. Търсим $\mathbb{E} \sum_{j=1}^{N+1} X_j$.

$f(U,N) = \sum_{j=1}^{n+1} X_j$, ако $N = n$. Тогава

$$\mathbb{E}\sum_{j=1}^{N+1} X_j = \mathbb{E}\left[f(U,N)\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}f(U,N)\,|\,N\right] = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[f(U,N)\,|\,N=n\right]1_{N=n} =$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left[f(U,n)\right]1_{N=n}\right] = \mathbb{E}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n+1}X_j\right]1_{\{N=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n+1}X_j\,.\,\mathbb{E}1_{N=n} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\sum_{j=1}^{n+1}X_j\,.\,\mathbb{P}(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)p(1-r)^n r = pr\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(1-r)^n = T$$

$$\left[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+x}\right) \overset{|x|<1}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \quad\right]$$

$$\Rightarrow T \overset{x=1-r}{=} pr\frac{1}{\big(1-(1-r)\big)^2} = pr\,.\,\frac{1}{r^2} = \frac{p}{r}.$$

Условни разпределения

Нека X и Y са дискретни случайни величини. Тогава под разпределение на X при условие $Y = y_j$ се разбира следната таблица:

$X\,|\,Y = y_j$	$\dots$	x_i	$\dots$
$\mathbb{P}$	$\dots$	$\mathbb{P}(X = x_i\,|\,Y = y_j)$	$\dots$

$$\sum_j \mathbb{P}(X = x_i\,|\,Y = y_j) = 1,\ \forall j$$

⊕ Хвърляме два зара $(1,...,6)$. Нека X е броят шестици, а Y е броят единици. Търси се (X,Y). За едно хвърляне може да имаме $0,1,2$ шестици или единици.

$Y \backslash X$	$X = 0$	1	2	
$Y = 0$	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\mathbb{P}(Y=0) = \frac{25}{36}$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{10}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	0	0	$\mathbb{P}(Y=2) = \frac{1}{36}$
	$\mathbb{P}(X=0) = \frac{25}{36}$	$\mathbb{P}(X=1) = \frac{10}{36}$	$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$	

Условно разпределение:

$X \mid Y$	$X = 0$	1	2	
$Y = 0$	$\frac{16}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X \mid Y = i) = 1$
1	$\frac{8}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\dots$
2	1	0	0	$\dots$

Ж. Полиномно разпределение

Имаме n - независими експеримента. Всеки експеримент има r възможни стойности с вероятност $p_0, p_1, \dots, p_{r-1}$ и $p_0 + p_1 + \dots + p_{r-1} = 1$. Тогава $(X_0, X_1, \dots, X_{r-1})$ са случайнит величини X_i - брой експерименти измежду n, които са върнали i за $0 \leq i \leq r-1$.

Забележка: $(X_0, \dots, X_{r-1})$ вече не са независими!

$J = \mathbb{P}(X_0 = k_0, \dots, X_{r-1} = k_{r-1})$, където $k_0 + \dots + k_{r-1} = n$ и $k_i \in \mathbb{N}_0$

$$J = \binom{n}{k_0} p_0^{k_0} \binom{n-k_0}{k_1} p_1^{k_1} \dots \binom{n-k_0-k_1-\dots-k_{r-2}}{k_{r-1}} p_{r-1}^{k_{r-1}}.$$