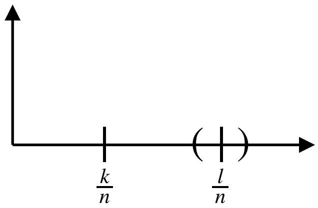
СЕМ, лекция 9

(2020-11-26)

Непрекъснати случайни величини (НСВ)

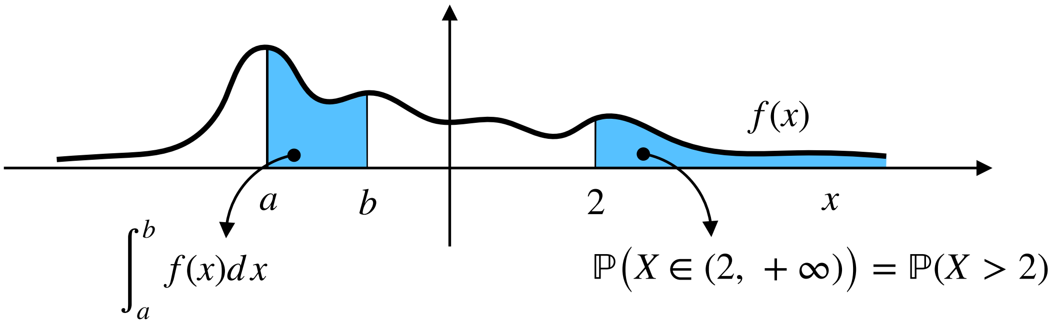
$X: \ \Omega \to \mathbb{R}$ и X приема неизброимо много стойности. $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ - вероятностно пространство.

$\oplus \ \mathbb{P}\left(T = \dfrac{k}{n}\right), 0 \le k \le n$



$\oplus$ Интересуваме се от случайната величина $X \in (a, b)$, $\quad \big(T \in (1^\circ C, 3^\circ C)\big)$

$\oplus$ Фундаменталните теореми включват непрекъснати случайни величини.



<u>Дефиниция</u>: X е (абсолютно) непрекъсната случайна величина, ако $\exists f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такава, че: а) $f_X(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$,

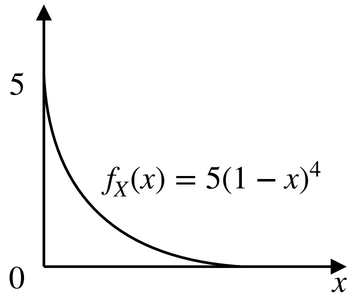
б) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$,

в) $\mathbb{P}\big(X \in (a, b)\big) = \displaystyle\int_a^b f_X(x)dx, \forall a, b \in (-\infty, +\infty), a < b$,

f_X се нарича плътност на X.

$\oplus$ Дадена застрахователна компания обслужва здравните полици на някаква малка фирма. Разходите за обслужване на годишна полица е $M = 100\,000X$, където застрахователната компания е оценила, че X приема стойности в интервала $(0,1)$ и

$$f_X(x) = \begin{cases} 5(1-x)^4, & x \in (0,1) \\ 0, & x \notin (0,1) \end{cases}$$



Търси се $\mathbb{P}(M > 10\,000)$ - вероятността цената за обслужване на 1 година да е по-голяма от $10\,000$.

Първо нека проверим, дали функцията в действителност може да бъде плътност на X. Проверка:

$$\int_0^1 5(1-x)^4 dx \overset{y=1-x}{=} 5\int_0^1 y^4 dy = 5.\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^1 = 1,$$ т.е. плътността е добре определена.

$$\mathbb{P}(100\,000X > 10\,000) = \mathbb{P}(X > \frac{1}{10}) = \int_{\frac{1}{10}}^{\infty} f_X(x)dx =$$

$$= 5\int_{\frac{1}{10}}^{1} (1-x)^4 dx \overset{y=1-x}{=} 5\int_0^{\frac{9}{10}} y^4 dy = = 5\frac{y^5}{5}\Bigg|_0^{\frac{9}{10}} = \left(\frac{9}{10}\right)^5 \approx 0.59.$$

<u>Твърдение</u>: Нека X е непрекъсната случайна величина (НСВ). Тогава $\mathbb{P}(X=c)=0, \forall c \in \mathbb{R}$. Следователно $\mathbb{P}\big(X\in[a,b]\big) = \mathbb{P}\big(X\in[a,b)\big) = \mathbb{P}\big(X\in(a,b]\big) = \mathbb{P}\big(X\in(a,b)\big)$, $\forall a,b \in (-\infty,+\infty)$, $a<b$. Случайната величина няма маса, т.е. има нулева вероятност в конкретна точка.

<u>Доказателство</u>: $\{X=c\} = \bigcap_{n\geq 1}\left\{X\in\left((c-\frac{1}{n}, c+\frac{1}{n}\right)\right\}$, $\forall n\geq 1$, но

$$Q = \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)dx \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}(X=c) \leq \lim_{n\to\infty}\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)dx = \int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}} f_X(x)dx = \int_c^c f_X(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$\mathbb{P}(X=c)\leq 0$, но $\mathbb{P}(X=c)\geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X=c\ =0)$. Сега,

$\{X\in[a,b]\} = \{X\in(a,b)\}\cup\{X=a\}\cup\{X=b\}$, което е обединение на непресичащи се събития. Следователно,

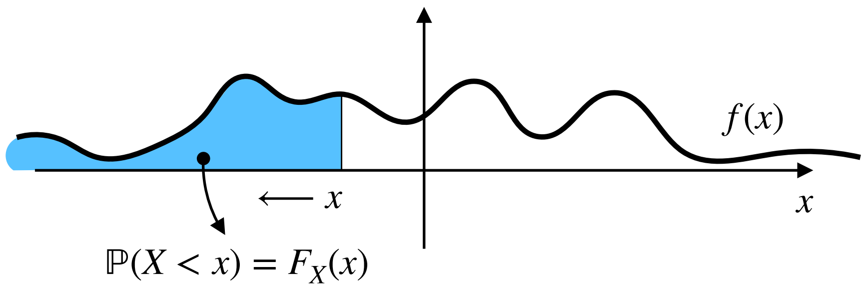
$$\mathbb{P}\left(X\in[a,b]\right) = \mathbb{P}\left(X\in(a,b)\right) + \underbrace{\mathbb{P}(X=a)}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(X=b)}_{=0} = \mathbb{P}\big(X\in(a,b)\big).$$

<u>Дефиниция</u>: (**Функция на разпределение на НСВ**) Нека X е НСВ с плътност f_X. Тогава функцията $F_X(x) = \mathbb{P}(X<x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Х(y)dy, \forall x\in(-\infty,+\infty)$ се нарича функция на разпределението на X.

<u>Свойства</u>:

- ако f_X е непрекъсната в точка x_0, то $\frac{\partial}{\partial x}F_X\Big|_{x=x_0} \quad f_X(x_0)$

- $F_X(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathbb{P}(X < x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(y) dy = 0$



Аналогично
- $F_X(+\infty) = 1$
- $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(X < x) + \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X < x)$

Смяна на променливите на НСВ

Дадена е НСВ X с плътност f_X.
$Y = g(X)$ е някаква детерминираща функция. Питаме се дали може да пресметнем плътността на Y.
Първото нещо, в което трябва да се обедим е, че не за всяка функция g, Y има плътност.

Нека например $g : \mathbb{R} \to \{0{,}1\}$, като $g(x) = \begin{cases} 1, \ x \geq 0 \\ 0, \ x < 0 \end{cases}$. Тогава
$Y = g(X) = \begin{cases} 1, & \mathbb{P}(X \geq 0) \\ 0, & \mathbb{P}(X < 0) \end{cases} \Rightarrow Y \in Ber\left(\mathbb{P}(X \geq 0)\right)$, т.е. за плътност на Y не може и да става дума, тъй като Y не приема неизброимо много стойности, а само краен брой такива - само две $\{0{,}1\}$.

Ще изследваме конкретен клас от функции, за които Y има плътност и тя се пресмята сравнително лесно, чрез f_X и свойствата на g.

Теорема: (**Смяна на променливите на НСВ**) Нека X е НСВ с плътност f. Нека g е строго монотонно растяща или намаляваща (е монотонна) функция. Тогава
$Y = g(X)$ е НСВ с плътност $\varphi(y) = f\left(g^{-1}(y)\right) . \left| \dfrac{\partial}{\partial y}\left(g^{-1}(y)\right) \right|$ или
$\varphi = f\left(h(y)\right) . \left| h'(y) \right|$, където $h = g^{-1}$.

Доказателство: Нека $g \uparrow$ (g е строго растяща).

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(Y \in (a,b)\right)}_{=\int_a^b ?} = \mathbb{P}\left(g(X) \in (a,b)\right) \overset{g\uparrow}{=} \mathbb{P}\left(X \in \left(g^{-1}(a), g^{-1}(b)\right)\right) \overset{h=g^{-1}}{=}$$

$$= \mathbb{P}\left(X \in \left(h(a), h(b)\right)\right) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx \underset{\begin{cases} h(a) = h(v) \Rightarrow v = a \\ h(b) = h(v) \Rightarrow v = b \end{cases}}{\overset{x=h(v)}{=}} \int_a^b g\left(h(v)\right) dh(v) =$$

$$= \int_a^b \underbrace{f\left(h(v)h'(v)\right)} dv = \int_a^b \varphi(v)dv \Rightarrow \varphi(y) = f\left(h(y)\right) h'(y).$$

Аналогично и за $g \downarrow$ (с дребни промени)

$\varphi(y) = f\left(h(y)\right) \underbrace{\left(-h'(u)\right)}_{>0 \Leftarrow g\downarrow,\ h=g^{-1}}$. Във всеки случай $\varphi(y) = f\left(h(y)\right) . \left|h'(y)\right|$.

Математическо очакване на НСВ

Нека X е НСВ. Под очакване на X се разбира $\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)dx$, ако $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)dx < \infty$ (е крайно).

$\left[\right.$ Припомняне: За X дискретно $\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i$ $\left.\right]$

<u>Свойства</u>:

- $\mathbb{E}cX = c\mathbb{E}X$

  $\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y \underbrace{f_Y(y)} dy$; (може да се покаже с функцията $g(x) = cx$)
- $\mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$
- $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}X\mathbb{E}Y$, ако $X \perp\!\!\!\perp Y$
- $Y = g(X)$, то $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$, където $g \uparrow$ или $g \downarrow$.

$g \uparrow$, то $f_Y(y) = f_X\left(h(y)\right) . h'(y)$, където $h(y) = g^{-1}(y)$.

$$\mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} yf_X\left(h(y)\right) . h'(y)dy \underset{y=g(x) \Rightarrow dy = g'(x)dx}{\overset{x=h(y)}{=}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\underbrace{h'\left(g(x)\right) g'(x)}_{\underset{(*)}{=}1} dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx.$$

$$(*)\quad x = h\left(g(x)\right) \Big| \frac{\partial}{\partial x} \Rightarrow 1 = h'\left(g(x)\right) . g'(x).$$

Дефиниция: (**Дисперсия**) Нека X е НСВ с плътност f_X. Тогава, ако $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) \mathrm{d}\, x < \infty$ (е крайно), то под дисперсия на X разбираме

$$DX = \mathbb{E}\,\underbrace{[X - \mathbb{E}X]^2}_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2\, f_X(x) \mathrm{d}\, x$$

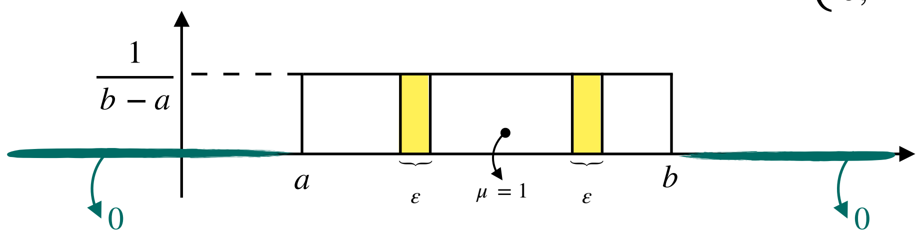
Свойства:

- $DcX = c^2 DX$
- $D(X + c) = DX$
- $D(X + Y) = DX + DY \Leftrightarrow X \perp\!\!\!\perp Y$

Видове НСВ

A. Равномерно разпределена НСВ

Дефиниция: За $a < b$ казваме, че $X \in Unif(a, b)$, ако $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b) \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases}$.



Ако $Y = \dfrac{X - a}{b - a}$, то $Y \in Unif(0,1)$. Нека $g(x) = \dfrac{x - a}{b - a}$, тогава $g(x) \uparrow$.

$$h(y) = g^{-1}(y) = (b - a)y + a$$

$$f_Y(y) = f_X\Bigg(\underbrace{\overbrace{(b-a)y + a}^{=x}}_{y \in (0,1) \Leftrightarrow x \in (a,b)}\Bigg)(b - a) \Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(b - a) = 1, & y \in (0,1) \\ 0, & y \notin (0,1) \end{cases}$$

Нека $X \in Unif(a, b)$. Тогава

$$Y = \frac{X - a}{b - a} \in Unif(0,1) \Rightarrow \mathbb{E}Y = \frac{1}{b - a}\mathbb{E}(X - a) = \frac{1}{b - a}(\mathbb{E}X - a)$$ и

$$DY = \left(\frac{1}{b - a}\right)^2 D(X - a) = \frac{DX}{(b - a)^2},$$ но

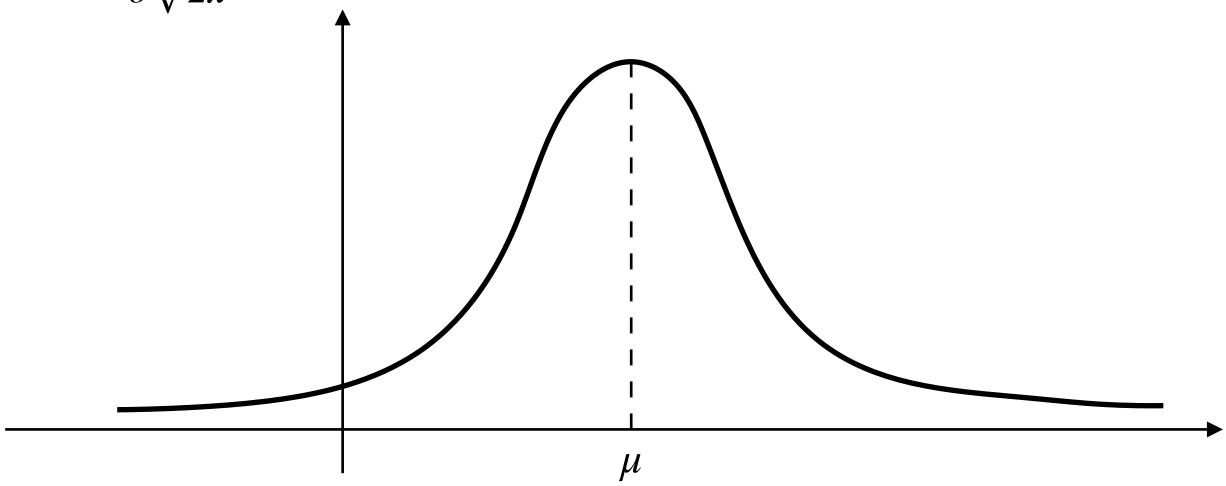
$$\mathbb{E}Y = \int_0^1 y.1\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{b-a}{2} + a = \frac{a+b}{2};$$

$$DY = \int_0^1 \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \times 1\,\mathrm{d}\,y = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \Rightarrow DX = \frac{1}{12}(b-a)^2.$$

- $DX \geq 0,\ DX = \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2$

Б. Нормално разпределена НСВ

Казваме, че $X \in \mathcal{N}orm(\mu, \sigma^2)$ или $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, където $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, ако $f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$.



$$\frac{1}{\sigma 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1,\ \forall \mu, \sigma.$$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

F_X комулативната функция на нормалното разпределение. За пресмятането и се ползват трансформации до стандартното нормално разпределение (ползват таблици). Това е така, тъй като не може да интегрираме ($F_X(x)$ няма явен вид). Интеграла се приближава числено.

(За домашно може да пресметнем комулативната функцията на равномерното разпределение, което пропуснахме)

Ако $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, то $Y = \frac{1}{\sigma}(X - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$ (линейно транслиране) и се нарича стандартно нормално разпределение.

$g(x) = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ е $\uparrow$. $h(y) = \sigma y + \mu$, $h'(y) = \sigma$. Тогава

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\sigma y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}.\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \,.\, e^{-\frac{y^2}{2}},\ \forall y \in (-\infty, \infty).$$

Нека $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, тогава $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$ и

$$\mathbb{E}Y = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \frac{\mu}{\sigma} \Rightarrow \mathbb{E}Y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_X(y) \mathrm{d}\,y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{ye^{-\frac{y^2}{2}}}_{\text{нечетна}} \mathrm{d}\,y = 0.$$

Следователно $0 = \mathbb{E}Y = \dfrac{1}{\sigma}\mathbb{E}X - \dfrac{\mu}{\sigma}$ или $\mathbb{E}X = \mu$.

$$DY = \mathbb{E}Y^2 - (\underbrace{\mathbb{E}Y}_{=0})^2 = \mathbb{E}Y^2 = \frac{1}{\sigma^2}DX \left(\text{т.к. } Y = \frac{X-\mu}{\sigma} \text{ и свойства на } D\right)$$

$$\mathbb{E}Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f_Y(y) \mathrm{d}\,y = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}\,y}_{I} = 1. \text{ Следователно}$$

$$DY = 1 = \frac{DX}{\sigma^2} \Rightarrow DX = \sigma^2.$$

Сега, за интеграла I: знаем, че $1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\,y$ за $\forall \sigma > 0$.

$$\Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\,y \,\Big|\, \frac{\partial}{\partial\sigma}.$$

$$\sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\sigma} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\,y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\cancel{2}} \,.\, \frac{\cancel{2}}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\,y = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y^2}{\sigma^3} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\,y \overset{\sigma=1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}\,y$$

Този метод е известен като метода на физика Ричард Файнман. Друга алтернатива за пресмятане на интеграла I е чрез интегриране по части.