СЕМ, лекция 2
(2020-10-08)

<u>Дефиниция</u>: (**Вероятност**) Нека $\mathscr{A}$ е σ-алгебра върху множество от елементарни събития Ω. Тогава изображението $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ се нарича вероятност, ако са изпълнени следните три условия:

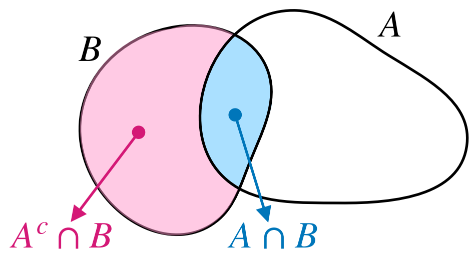
1) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
2) Ако $A \in \mathscr{A}$ и $A^c = \Omega \backslash A$, то $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3) Ако $A_i \in \mathscr{A}$, $\forall i \geq 1$ и $A_i \cap A_j = \emptyset$ за $i \neq j$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_k\right)$

(Ако имаме редица от непресичащи се събития, то вероятността поне едно от тях да се случи (операцията „или“) е сумата на индивидуалните вероятности. В този смисъл вероятността е мярка, тъй като това е най-класическото свойство на мярката)

<u>Следствие</u>: Нека имаме $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ е вероятност. Тогава са изпълнени следните свойства $(A, B \in \mathscr{A})$:

a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
b) Ако $B \subseteq A$, то $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$, $\forall A \in \mathscr{A}$
c) Ако $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ (Монотонност)
d) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
e) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$, то $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n)$ (Непрекъснатост)
f) Ако имаме A_i, $i \geq 1$, то $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(A_i\right)$. Това свойство е изпълнено и за всяко крайно обединение от събития: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_i\right)$, за някое $n \in \mathbb{N}$.

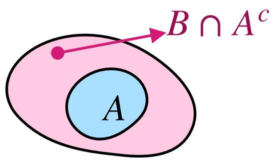
<u>Доказателство</u>:
a) $\emptyset = \Omega^c \overset{2)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(\emptyset) = 1 - \mathbb{P}(\Omega) = 0$
b) $A, B \in \mathscr{A}$



$$\Rightarrow B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B) \Rightarrow \mathbb{P}(B) \overset{3)}{=} \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$$

c) $B = A \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(B) \overset{3)}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) \geq \mathbb{P}(A)$

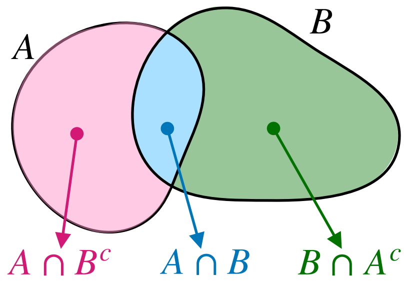


d) $A \cup B = (A \cap B^c) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^c)$

$\mathbb{P}(A \cup B) \overset{3)}{=} \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B \cap A^c) =$

$\overset{\text{b)}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^c) + \underbrace{\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)}_{\text{добавяме и изваждаме}} =$

$\overset{\text{b)}}{=} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$



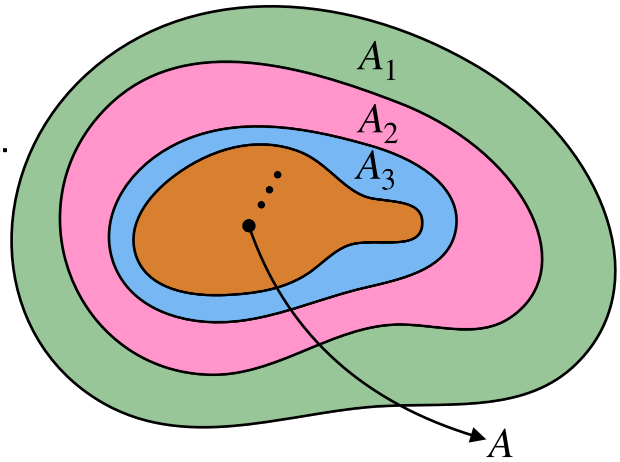
e) $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

$A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$ е множеството, което принадлежи на всяко едно от събитията.

Под $A \backslash B$ разбираме множеството A без множеството B, т.е. $A \backslash B = A \cap B^c$.

Цел: Да докажем, че $\mathbb{P}(A) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

$A_1 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \backslash A_{j+1} \cup A \overset{3)}{\Rightarrow}$



$1 \geq \mathbb{P}(A_1) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \backslash A_{j+1}) + \mathbb{P}(A) \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \backslash A_{j+1}) < \infty$ е сходящ ред.

От друга страна, $A_n = \bigcup_{j=n}^{\infty} A_j \backslash A_{j+1} \cup A \Rightarrow \mathbb{P}(A_n) = \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \backslash A_{j+1}) + \mathbb{P}(A)$.

Граничен преход: $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(A) + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \mathbb{P}(A_j \backslash A_{j+1})}_{=0} = \mathbb{P}(A)$.

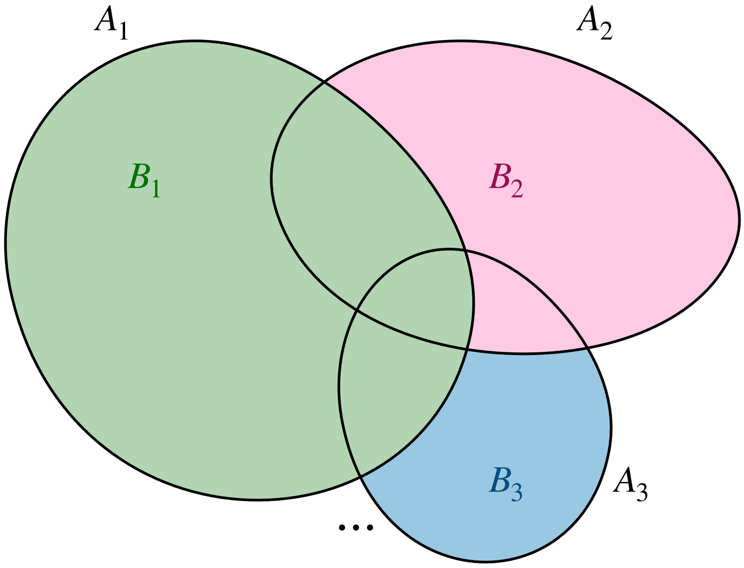
f) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$

$\Bigg(\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$, това може да се докаже по индукция, използвайки $\mathbb{P}(A \cup B) \overset{\text{д)}}{\leq} \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$, но ние ще докажем директно по-общия случай за безкраен брой множества. $\Bigg)$

$A_1 = B_1$
$B_2 = A_2 \backslash A_1 = A_2 \cap A_1^c$
$B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)$
$\dots$

$$B_n = A_n \backslash \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j \right) \subseteq A_n$$

$\dots$



$B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j$

От друга страна имаме, че:

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \overset{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j)$, но $B_j \subseteq A_j \overset{c)}{\Rightarrow} \mathbb{P}(B_j) \leq \mathbb{P}(A_j)$. Т.е. е в сила

$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \overset{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$. Остана да докажем, че $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ (тъй като, ако това е изпълнено, то ще може да го заместим в предходното равенство и да получим желания резултат).

$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ е очевидно, тъй като $B_j \subseteq A_j\ ,\forall j$. Защо, обаче $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \supseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$?

Нека вземем елемент $\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow \omega \in A_k$ за някое k. Да вземем $k = \min\{j \geq 1 : \omega \in A_j\}$ (най-малкия номер k на множество, в което елемента ω принадлежи – знаем, че със сигурност ще има поне едно такова множество)

$B_k = A_k \backslash \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j$, но $\omega \notin \bigcup_{j=1}^{k-1} A_j \Rightarrow \omega \in B_k \Rightarrow \omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \overset{3)}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\left(B_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j)$, което искахме да докажем.

Примери:

$\oplus_1$: $\Omega = \{0,1\}$; $\mathscr{A} = \big\{\emptyset, \Omega, \{0\}, \{1\}\big\} = 2^\Omega$

$\mathbb{P}\big(\{0\}\big) := p$, $\mathbb{P}\big(\{0\}\big) := 1 - p$, $p \in [0,1]$, то $\mathbb{P}$ е вероятност.

$\oplus_2$: Дискретна вероятност:

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\} \simeq \{1, 2, \ldots, N\}$
$\mathscr{A} = 2^\Omega$, $\left(p_i\right)_{i=1}^N : p_i \geq 0, \forall i \geq 1$ и $\sum_{i=1}^N p_i = 1.$

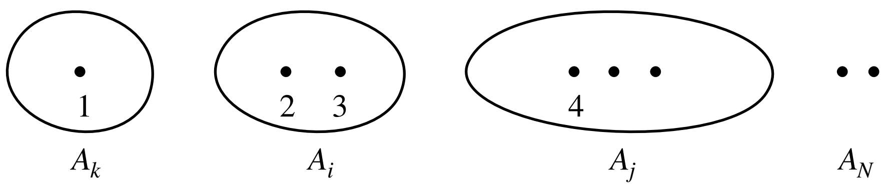
$\forall A \subseteq \Omega$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i$

$\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ е вероятност
$A = \{1, 3, 5\}$, $\mathbb{P}(A) = p_1 + p_3 + p_5$.

Проверка: По дефиниция $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{i \in \Omega} p_i = \sum_{i=1}^N p_i = 1$

Ако $A \subseteq \Omega$, то $\mathbb{P}(A^c) = \sum_{i \in A^c} p_i = \sum_{i \notin A} p_i = \sum_{i=1}^N p_i - \sum_{i \in A} p_i = 1 - \mathbb{P}(A)$.

Нека $A_1, \ldots, A_k$ са непресичащи се събития:



$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^k A_j\right) = \sum_{i \in \bigcup_{j=1}^k A_j} p_i = \sum_{j=1}^k \sum_{i \in A_j} p_i = \left(\begin{array}{c} i \text{ принадлежи на точно} \\ \text{едно от събитията} \end{array}\right) = \sum_{j=1}^k \mathbb{P}(A_j).$$

$\oplus_3$: $\Omega = \{1,2,\ldots,N\}$
Ако дефинираме $p_i = \dfrac{1}{N}$, $1 \leq i \leq N$, то $\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} \dfrac{1}{N} = \dfrac{|A|}{N}$ се нарича равномерна вероятност! Това означава, че всяко едно от елементарните събития има равен шанс да се сбъдне.

$\oplus_4$: $\Omega = \{1, 2, \ldots, N\}$
$A = \{i \leq N : i$ е четно$\}$

$A^c = \{i \le N : i \text{ е нечетно}\}$
$\mathbb{P}(A) = \dfrac{|A|}{N} = p$
$\mathbb{P}(A^c) = \dfrac{N - |A|}{N} = 1 - p$

$\Omega = \{0, 1\}, \mathscr{A} = (\Omega, \emptyset, A, A^c) \subseteq 2^\Omega$

$\oplus_5$: Дискретни вероятности

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\} \simeq \{1, 2, \dots\}$
$\mathscr{A} = 2^\Omega$
Дадена е редица $(p_i)_{i=1}^\infty : p_i \ge 0, \forall i \ge 1$ и $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.
Ако $A \subseteq \mathscr{A}$, $\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in A} p_i$, то $\mathbb{P} : \mathscr{A} \to [0,1]$ задава вероятност.

$\oplus_6 : \Omega = \{1, 2, \dots\}$
$p_i = \dfrac{c}{i^2}, i \ge 1$
$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in A} p_i = c \sum_{i \in A} \dfrac{1}{i^2}$; $c \sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2} = 1 \Leftrightarrow c = \dfrac{6}{\pi^2}$, тъй като $\sum_{i=1}^{\infty} \dfrac{1}{i^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Следователно само за $c = \dfrac{6}{\pi^2}$ ще може да дефинираме вероятност.

$\oplus_7 : \Omega = \{0, 1, \dots\}$
$p_i = qp^i, i \ge 0, p + q = 1, p \in (0,1)$.
$\sum_{i=0}^{\infty} qp^i = \dfrac{q}{1-p} = 1$ (геометрична прогресия и дефиниране на геометрично рзпределение)

$\oplus_8 : \Omega = \{1, 2, \dots\}$ тук не може да дефинираме равномерно разпределение, т.е. $p_i = p_j$ за всяко i, j.