

СЕМ, лекция 11

(2020-12-10)

Дефиниция: Две случайни величини са равни тогава и само тогава, когато имат еднакви функции на разпределение $X = Y \Leftrightarrow F_X = F_Y$. Ако X, Y са непрекъснати случайни величини, то от дясната страна на \Leftrightarrow може да сложим и равенство на плътностите $f_X = f_Y$.

Твърдение: Нека Z_1, Z_2, \dots, Z_n са независими в съвкупност, стандартно нормално разпределени, случайни величини. $Z_i \in \mathcal{N}(0,1), \forall 1 \leq i \leq n$. Тогава

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 \in \mathcal{X}^2(n).$$

Доказателство: Ще докажем, че $Z_1^2 \in \mathcal{X}^2(1) = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Понеже Z_i^2 са

независими и еднакво разпределени, то от предишната лекция

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n Z_i^2 \in \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ което по дефиниция е } \mathcal{X}^2(n).$$

Т.е. трябва да докажем само, че $Z_1^2 = \mathcal{X}^2(1)$. Този факт не може да се докаже директно със смяна, защото функцията, която имаме $Y_1 = Z_1^2 = g(Z_1), g(x) = x^2$, която функция g не е монотонна и еднозначна. Ще трябва да използваме директен подход.

Ще се опитаме да пресметнем плътността на Y_1 и от нейната производна да намерим функцията на разпределението.

$$\begin{aligned} x \geq 0, \mathbb{P}(Y_1 < x) &= \mathbb{P}(Z_1^2 < x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} < Z_1 < \sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \end{aligned}$$

$$f_{Y_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}, \text{ което е}$$

плътността на $\mathcal{X}^2(1)$.

Е. t -разпределение

Случайна величина $Y = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S}{n}}}$, където $Z \in \mathcal{N}(0,1)$, $Z \perp S$ и $S \in \mathcal{X}^2(n)$, се нарича t

-разпределена случайна величина с n степени на свобода.

$\oplus X_1, \dots, X_n \in N(0,1)$ независими. Означаваме $\bar{X} = \frac{1}{n}, \sum_{i=1}^n X_i \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right)$

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad \underbrace{S \perp \bar{X}}, \quad nS \in \mathcal{X}^2(n).$$

Видове сходимост на случайни величини

$X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, n \geq 1$ и $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ са случайни величини във вероятностното пространство $V = (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (т.е. имаме едни единствено вероятностно пространство и $X_i, i = \overline{1, n}, X$ са функции на елементарни събития в числата)

Дефиниция: (Сходимост почти сигурно (п.с.)) Казваме, че $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.с.}} X \Leftrightarrow \mathbb{P}(L) = 1$,
където събитието $L = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \} = \{ \omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega) \}$.

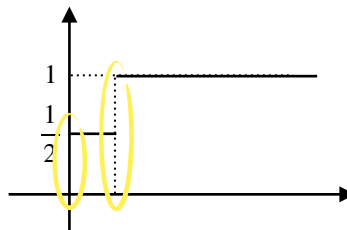
Дефиниция: (Сходимост по вероятност) Казваме, че $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 :$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n, \varepsilon}) = 0$, където $A_{n, \varepsilon} = \{ |X_n - X| > \varepsilon \} = \{ \omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon \}$

Дефиниция: Ако F_X е функция на разпределение, то с C_{F_X} означаваме всички точки x , за които F е непрекъсната в x . $C_{F_X} = \{x \in \mathbb{R} : F_X \text{ е непрекъсната в } x\}$ и $x \in C_{F_X} \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = x) = 0$.

\oplus Ако X е непрекъсната случайна величина, то $\mathbb{P}(X = x) = 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow C_{F_X} = \mathbb{R}$

Дефиниция: (Сходимост по разпределение) Казваме, че $X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x), \forall x \in C_{F_X}$ (тук никъде не споменаваме вероятностно пространство).

$$X = \begin{cases} 1, p = \frac{1}{2} \\ 0, p = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Твърдение: Нека $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$ и $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Нека $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$ и $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$. Тогава $\mathbb{P}(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_i)$.

Теорема: Нека $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ е редица от случайни величини и X е случайна величина.

а) Ако $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.с.}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X$

б) Ако $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$

в) Обратните индикации на а) и б) не са верни.

Доказателство:

а) Знаем, че $1 = \mathbb{P}(L)$, където $L = \{ \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \} \stackrel{?}{=} \bigcap_{r=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_{k, \frac{1}{r}}^c$, където

$$\Pi_{k,r} = A_{k, \frac{1}{r}}^c = \{ |X_k - X| \leq \frac{1}{r} \}$$

За фиксирано k : $\dots \supseteq \Pi_{k,r-1} \supseteq \Pi_{k,r} \supseteq \Pi_{k,r+1} \supseteq \dots$

Въвеждаме $B_{n,r} = \bigcap_{k \geq n} \Pi_{k,r}$: $\dots \supseteq B_{k,r-1} \supseteq B_{k,r} \supseteq B_{k,r+1} \supseteq \dots$ за фиксирано k .

Но при фиксирано r имаме следното: $\dots \subseteq B_{k-1,r} \subseteq B_{k,r} \subseteq B_{k+1,r} \subseteq \dots$

$$L \stackrel{?}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r}.$$

Въвеждаме още един запис $C_r = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} \Rightarrow L \stackrel{?}{=} \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$

За фиксирано r : $\dots \supseteq C_{r-1} \supseteq C_r \supseteq C_{r+1} \supseteq \dots$

Следователно $L \stackrel{?}{=} C = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$

Нека $\bar{w} \in L$ ще докажем, че то принадлежи и на C .

От допускането $\Rightarrow \forall r \geq 1, \exists n_r \forall n > n_r, |X_n(\bar{w}) - X(\bar{w})| \leq \frac{1}{r} \Rightarrow$

$$\bar{w} \in \Pi_{n,r}, \forall n \geq n_r \Rightarrow \bar{w} \in B_{n,r} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r} = C_r, \forall r \Rightarrow \bar{w} \in C = \bigcap_{r=1}^{\infty} C_r$$

Нека $\bar{w} \in C \Rightarrow \bar{w} \in C_r, \forall r \geq 1 \Rightarrow \exists n_r : \bar{w} \in B_{n_r, r}, \forall n \geq n_r \Rightarrow \bar{w} \in B_{n,r}, \forall n \geq n_r$

$\Rightarrow \bar{w} \in \Pi_{k,r}, \forall k \geq n_r$

$$|X_k(\overline{w}) - X(\overline{w})| \leq \frac{1}{r}, \forall k \geq n_r.$$

Успяхме да покажем, че $L = C$.

$$1 = \mathbb{P}(L) = \mathbb{P}(C) \Rightarrow \mathbb{P}(C_r) = 1, \forall r; \quad C \subseteq C_r, \forall r \geq 1$$

$$1 = \mathbb{P}(C_r) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,r}\right) = \dots \subseteq B_{n,r} \subseteq B_{n+1,r} \subseteq \dots$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(B_{n,r}) \leq \dots B_{n,r} \subseteq \Pi_{n,r}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Pi_{n,r}) \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\Pi_{n,r}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(|X_n - X| \leq \frac{1}{r}\right) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,r}) = 0 \quad \square$$

$$б) X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \overset{?}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X.$$

$$\text{От първата сходимост} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) = 0, A_{n,\varepsilon} = \{|X_n - X| > \varepsilon\}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{r}, \text{ достатъчно е да разгледаме само тези } \varepsilon, \text{ тъй като ако } \varepsilon \in \left(\frac{1}{r}, \frac{1}{r-1}\right), \text{ то}$$

$$A_{n, \frac{1}{r-1}} \subseteq A_{n,\varepsilon} \subseteq A_{n, \frac{1}{r}}.$$

Втората сходимост (по разпределение) означава, че $F_{X_n} \rightarrow F_X$, за $\forall x \in C_{F_X}$. Т.е. избираме $x \in C_{F_X}$ и целим да докажем, че $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x) = \mathbb{P}(X < x)$

Фиксираме $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} \{X < x - \varepsilon\} \cap A_{n,\varepsilon} &\subseteq \{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon}^c \subseteq \{X_n < x\} = \{X_n < x\} \cap \overbrace{(A_{n,\varepsilon} \cup A_{n,\varepsilon}^c)}^{=\Omega} = \\ &= \{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon}^c \cup \{X_n < x\} \cap A_{n,\varepsilon} \subseteq \{X < x + \varepsilon\} \cup A_{n,\varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < x - \varepsilon \cap A_{n,\varepsilon}^c) &\leq \mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x + \varepsilon) + \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon}) \\ \underbrace{\mathbb{P}(X < x - \varepsilon) - \mathbb{P}(X < x - \varepsilon \cap A_{n,\varepsilon}^c)}_{\geq \mathbb{P}(X < x - \varepsilon) - \mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}(X < x - \varepsilon)}_{F_X(x-\varepsilon)} - \underbrace{\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X_n < x)}_{F_{X_n}} \leq \underbrace{\mathbb{P}(X < x + \varepsilon)}_{F_X(x+\varepsilon)} + \underbrace{\mathbb{P}(A_{n,\varepsilon})}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}$$

$$\Rightarrow F_X(x - \varepsilon) = \mathbb{P}(X > x - \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x) \leq \mathbb{P}(X < x + \varepsilon) = F_X(x + \varepsilon)$$

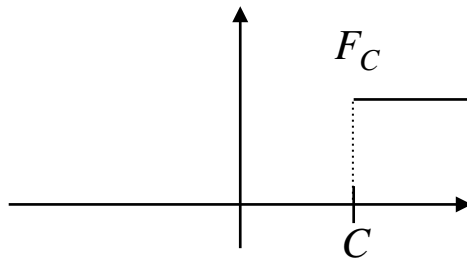
$$\Rightarrow \text{При } \varepsilon \rightarrow 0: F_X(x) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x) \leq F_X(x) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n < x) = F_X(x)$$

$$F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$$

□

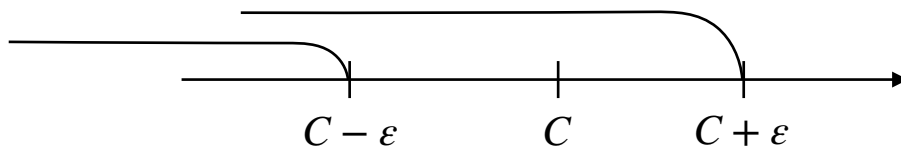
Твърдение: Ако $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} C$, то и $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} C$.

Доказателство: $F_{X_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F_C(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{C\}$



$$\text{Цел: } \forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$\mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon) - \mathbb{P}(X_n \leq C - \varepsilon)$$



$$\text{Но } \mathbb{P}(X_n \leq C - \varepsilon) = F_C(x - \varepsilon) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon)$$

$$1 \geq \mathbb{P}(X_n \leq C + \varepsilon) \geq \mathbb{P}(X_n < C + \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 = F_C(C + \varepsilon)$$

$$\Rightarrow 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - C| \leq \varepsilon).$$

Неравенство на Чебишев

Твърдение: (Чебишев) Нека X е случайна величина с очакванр $\mathbb{E}X$ и дисперсия DX .

$$\text{Нека } a > 0. \text{ Тогава } \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leq \frac{DX}{a^2}$$

Доказателство: $A = \{|X - \mathbb{E}X| > a\} = \{(X - \mathbb{E}X)^2 > a^2\}$
 $\mathbb{P}(A) \leq ?$

$$DX = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \cdot 1 = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \cdot 1_A + \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \cdot 1_{A^c} \geq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2 \cdot 1_A \geq a^2 \mathbb{E}1_A = a^2 \mathbb{P}(A) \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \frac{DX}{a^2}$$

□

$$\oplus a = b\sqrt{DX} \Rightarrow \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| > b\sqrt{DX}) \leq \frac{1}{b^2}$$

Закон за големите числа (ЗГЧ)

Дефиниция: Нека имаме редица от еднакво разпределени и независими (i.i.d.) случайни величини $(X_i)_{i=1}^{\infty}$ с очаквания съответно $\mathbb{E}X_i$. Казваме, че за X е изпълнено (слаб) ЗГЧ, ако

$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0.$$

Казваме, че за X е изпълнено (усилен) ЗГЧ, ако $\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mathbb{E}X_i)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.с.}} 0$.

$$\oplus \text{Ако } \mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1 = c, \forall i \geq 1, \text{ тогава } \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}(\text{п.с.})} \mathbb{E}X_1 = c$$

Дефиниция: Наричаме $X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ редица от независими в съвкупност и еднакво разпределени (НЕР) случайни величини, ако $X_i \stackrel{d}{=} X_1, \forall i$ и всички случайни величини са независими. ($F_{X_i} = F_{X_1}, \mathbb{E}X_i = \mathbb{E}X_1, \dots$)

Теорема: Нека $X = (X_i)_{i=1}^{\infty}$ от НЕР случайни величини. Нека в допълнение

$$\mathbb{E}|X_1| < \infty \text{ и } \mathbb{E}X_1 = \mu \in (-\infty, \infty).$$

$$\text{Тогава } \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}(\text{п.с.})} \mu = \mathbb{E}X_1.$$