СЕМ, Софтуерно инженерство, 3-ти курс, група 4/5, 2020/2021

Ако не е споменато друго, ще считаме, че n и k са естествени числа

Задача 1. Припомнете принципа за включването и изключването.

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Задача 2. Нека M е множество с n елемента (ще пишем $|M| = n$) и $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$. Припомнете по колко начина може да изберем

(a) k различни елемента от M, т.е. $\{a_1, \ldots, a_k\}$;

(b) k-орка от различни елементи на M, т.е. $(a_1, \ldots, a_k)$, $a_i \neq a_j$ при $i \neq j$;

(c) k-орка от елементи на M, т.е. $(a_1, \ldots, a_k)$.

Решение:

(a) (C_n^k); (b) (V_n^k); (c) $V(n; k) = n^k$.

Задача 3. Колко решения има уравнението $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$, ако

(a) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са естествени числа;

(b) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са неотрицателни цели числа?

По колко начина може да изберем k елемента от множество с n елемента, ако допускаме и повторения, т.е. k-елементно мултиподмножество?

Решение: Виж *Задача 4*.

Задача 4. По колко начина може да разпределим k различими частици в n различни клетки, ако

(a) всяка клетка може да съдържа точно една частица;

(b) клетките могат да съдържат произволен брой частици;

(c) няма празна клетка?

Отговорете на същите въпроси при положение, че частиците са неразличими.

Решение:

(a) Тъй като всяка клетка може да съдържа точно една частица, то за първата частица ще може да изберем от n клетки, за вторара - от $n-1$ клетки и т.н. докато за k-тата частица ще нице да изберем от останалите $n-k+1$ клетки. Следователно отговора е
$$n\,.\,(n-1)\ldots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} = V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

(b) $\underbrace{n\,.\,n\ldots n}_{k} = V(n;\ k) = n^k$.

(c) Очевидно, ако $k > n$ това не е възможно и следователно отговора ще е 0. Нека $k > n$. Нека A_i, $i = \overline{1,n}$ е множеството от всички разпределения, при които i-тата клетка е празна. Означаваме с A множеството от всички разпределения, при които <u>поне</u> една клетка е празна. Следователно $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и от принципа на включването и изключването имаме, че:

$$|A| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| =$$
$$= \binom{n}{1}(n-1)^k - \binom{n}{2}(n-2)^k + \binom{n}{3}(n-3)^k \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}(n-n)^k =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)^k.$$

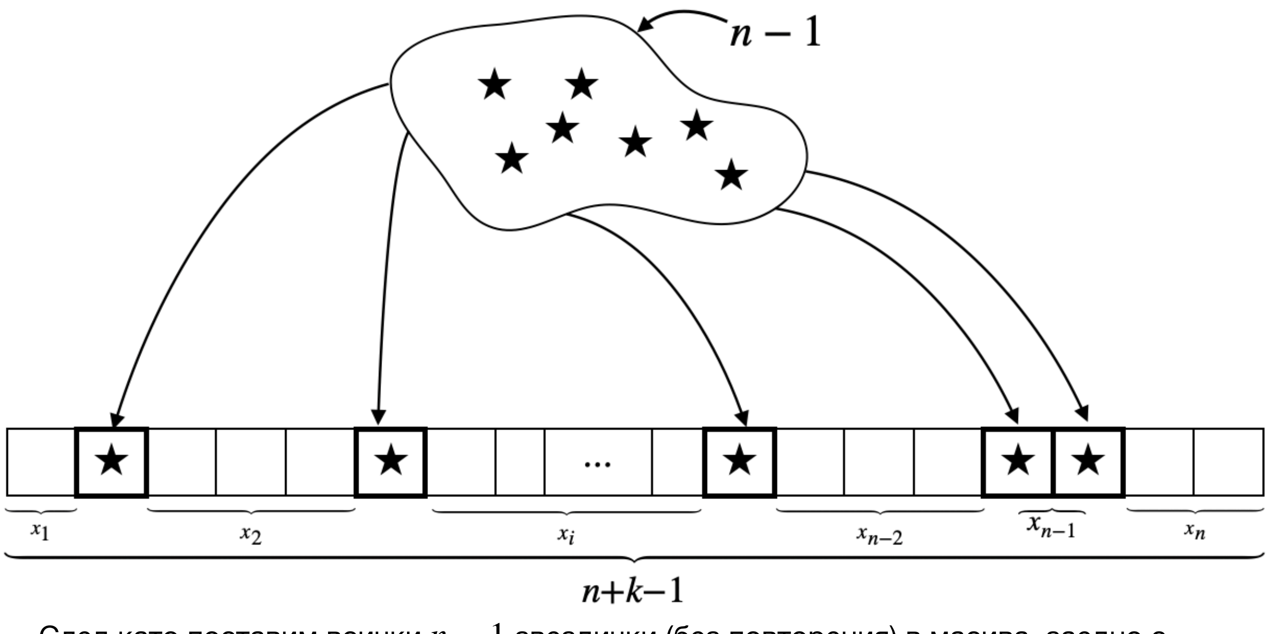
Следователно за да намерим търсения брой, ще извадим от броя всички възможни разпределения без ограничения - броя на тези, за които има поне една празна клетка:

$$|V(n;k) \backslash A| = |V(n;k)| - |A| = n^k - \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}\binom{n}{i}(n-i)^k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i}\binom{n}{i}(n-i)^k$$

Нека сега частиците са неразличими:

(a) Без наредба (неразличими) и без повторения. От тук директно може да заявим, че това са комбинации, тъй като ибираме k-елементни подмножества от n-елементно множество. Следователно отговора е $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

(b) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са n-те клетки и имаме k-частици. Ако намерим едно решение на диофантовото уравнение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$, в цели неотрицателни числа, то същото това решение ще е и решение на изходната задача. Т.е. имаме инекция, а освен това имаме и сюрекция и следователно биекция. Нека имаме масив от $n + k - 1$ клетки и $n - 1$ звездички (звездичките са еднакви).



След като поставим всички $n-1$ звездички (без повторения) в масива, заедно с началото и края на масива ще образуват точно n прегради/интервала, като между началото и първата звездичка - броя на свободните клетки ще е равен на x_1, броя на празните клетки между първата и втората звездичка ще е равен на x_2 и т.н. докато не стигнем между последната звездичка и края на масива, които образуват интервал от празни клетки с дължина равна на x_n.

По този начин избирайки позициите и разпределяики $n-1$ звездички - изброяваме всички възможни разпределения на k. Т.е. между избирането на $n-1$ звездички от

$n + k - 1$ клетки без повторения и без наредба и броя на репения на задачата има биекция. Следователно търсеният брой е $C_{n+k-1}^{n-1} = \binom{n+k-1}{n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$.

(c) Аналогично на (b), но с тази разлика, че тук $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = k$ и $x_i \geq 1$ за $i = \overline{1,n}$. Ами нека положим $x_i - 1 = y_i$, тогава $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = k - n$ и $y_i \geq 0$, за $i = \overline{1,n}$, което е същото като (b) $\Rightarrow$ търсения отговор е: $\binom{k-n+n-1}{n-1} = \binom{k-1}{n-1} = C_{k-1}^{n-1}$.

Задача 5. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите $1, 2, 3, 4$ и 5, ако
(a) не се допуска повторение на цифри;
(b) допуска се повторение на цифри;
(c) не се допускат повторения и числото е нечетно?

Решение:

(a) Без повторения и наредбата има значение: $5.4.3.2 = |V_5^4| = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$.

(b) $5.5.5.5 = V(5;4) = 5^4$.

(c) За да бъде нечетно числото трябва на последната позиция да изберем една от 3 нечетни цифри след което остават 4 числа за 3 позиции: $3 \times V_4^3 = 3.4.3.2 = 72$.

Задача 6. По колко начина може да се избере 4-членна делегация от 12 кандидати, ако
(a) няма ограничение за участие в нея;
(b) A и B не трябва да участват заедно;
(c) C и D могат да участват заедно.

Решение:

(a) Избираме 4 елементно подмножество от 12 елементно множество, без наредба и без повторения. Това са комбинации! $C_{12}^4 = \binom{12}{4} = \frac{12!}{4!8!} = \frac{9.10.11.\cancel{12}}{2.\cancel{3.4}} = 495$.

(b) От броя на всички възможности 4 елементни подмножества от 12 елементно множество изваждаме броя на тези подмножества, при които A и B са избрани заендно. Това са $\binom{12}{4} - \binom{10}{2} = 495 - 45 = 450$.

Или може да подходим и по следния начин: от 10 (без A и без B) избираме четирима, от 10 (избрали сме A и нямаме право да избираме B) избираме трима и от 10 (избрали сме B и нямаме право да избираме A) избираме трима. Общо $\binom{10}{4} + 2\binom{10}{3}$, което трябва да е същото като горното.

(c) От 10 елементно множество (без C и D) избираме 4 елементно подмножество и от 10 елементно множество избираме 2 елементно подмножество (вече сме избрали C и D). $\binom{10}{4} + \binom{10}{2} = 255$.

Или може да подходим и по следния начин: от всички 4 елементни подмножества от 12 елементно множество изваждаме броя на тези в който C и D не са заедно: $\binom{12}{4} - 2\binom{10}{3}$.

Задача 7. Пет различими топки се разпределят в три различни кутии A, B и C. Да се намери броя на всички различни разпределения, за които:

(d) кутията A е празна;
(e) само кутията A е празна;
(f) точно една кутия е празна;
(g) поне една кутия е празна;
(h) няма празна кутия.

Решение:

(a) Всяка топка може да отиде или в кутия B или в кутия C. Тоест имаме общо $2^5 = 32$ разпределения за топките, при положение че кутията A е празна.
(b) От резултата в (а) трябва да извадим броя на разпределенията, при които кутията B е празна и тези, при които кутията C е празна. Ние вече знаем, че кутията A е празна, следователно ако още една от кутиите B или C е празна, топките ще имат само една възможност. Тоест търсения отговор тук е $2^5 - 1 - 1 = 30$.
(c) $3 \times (b) = 3 \times (2^5 - 2) = 90$
(d) Това е броя на разпределенията, при които точно една кутия е празна събран с броя тези при които две кутии са празни: $(c)+|\text{две кутии са празни}| = 90 + \binom{3}{2} = 93.$
(e) От броя на всички възможни разпределения без ограничения изваждаме броя на тези разпределения, при които поне една кутия е празна:
$3^5 - (d) = 3^5 - \left(3 \times (2^5 - 2) + \binom{3}{2}\right) = 243 - 93 = 150.$

Задача 8. Колко е броят на думите с дължина n и съдържащи символите a, b и c, такива, че

(a) започват с a;
(b) съдържа точно k пъти символа a;
(c) съдържа точно k пъти символа a, при което започва и завършва със символа a;
(d) съдържа съответно k_1, k_2 и k_3 пъти, $k_1 + k_2 + k_3 = n$, от символите a, b и c.

Решение:

(a) Остават $n - 1$ позиции, на които може да разбределим три букви, тъй като на първата позиция вече сме поставили a. За втората ще имаме три възможности, за третата отново три и т.н. до последната. Следователно отоговота е 3^{n-1}.
(b) Остават $n - k$ позиции, на които може да разпределим две букви (тъй като буквата a вече е разпределена точно k пъти и е изчерпана). Следователно отговора е $\binom{n}{k} 2^{n-k}$, тъй като $\binom{n}{k}$ са начините, по които може да изберем k-те позиции за a от n.
(c) Остават $n - 2$ позиции, от които може да изберем за да поставим останалите $k - 2$ букви a. След което за останалите $n - k$ позиции може да разпределим само две букви (без a). Следователно отговора е $\binom{n-2}{k-2} 2^{n-k}$.

(d) Имаме $\binom{n}{k_1}$ начина, по които може да изберем буквата a, $\binom{n-k_1}{k_2}$ начина, по които може да изберем буквата b и $\binom{n-k_1-k_2}{k_3}$ начина, по които може да изберем буквата c. Следователно търсеният отговор е $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\binom{n-k_1-k_2}{k_3} =$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} \cdot \frac{\cancel{(n-k_1-k_2)!}}{k_3!\underbrace{(n-k_1-k_2-k_3)!}_{=0!=1}} = \frac{n!}{k_1!k_2!k_3!}.$$

Задачча 9. Нека $A = \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_k\}$. Колко са подмножествата на A, които съдържат поне един елемент a_i и поне един елемент b_j?

Решение:

Знаем, че $|P(A)| = 2^{n+k}$ е броя на всички подмножества на A.

Нека въведем следните означения:

AB: всички подмножества на A, които съдържат елемент a и елемент b
$\overline{A}B$: всички подмножества на A, които не съдържат елемент a
$A\overline{B}$: всички подмножества на A, които не съдържат елемент b
$\overline{A}\,\overline{B}$: всички подмножества на A, които не съдържат нито един елемент a и нито един елемент b

Очевидно $|AB|$ е търсения брой, а $\overline{A}\,\overline{B} = \emptyset$, което е подмножество на A.

Имаме, че $A = AB \cup \overline{A}B \cup A\overline{B} \cup \overline{A}\,\overline{B}$, и множествата от дясната страна са две по две непресичащи се. Следователно AB, $\overline{A}B$, $A\overline{B}$ и $\overline{A}\,\overline{B}$ са разбиване на A.

Тогава търсеното множество $AB = P(A) \backslash (\overline{A}B \cup A\overline{B})$ и от принципа на изваждането имаме, че:

$$|AB| = |P(A)| - |\overline{A}B \cup A\overline{B}| = 2^{n+k} - |\overline{A}B| - |A\overline{B}| + |\overline{A}B \cap A\overline{B}| = 2^{n+k} - 2^n - 2^k + 1$$