Game-Math Developer

Подробни решения:

Задача 1.
Нека $A_k = \{A$ настъпва точно в k-тия опит (но в другите опити не настъпва)$\}$, $k = \overline{1,4}$
Знаем, че $\{A_k\}_{k=1}^4$ са независими събития ($*$).

$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_4) = x$. Търси се x. Дадено е още, че $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{4} A_k\right) = \frac{1}{2}$.

За да използваме ($*$) ни трябва сечение

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^4 A_k) = 1 - \mathbb{P}(\overline{\cup_{i=1}^4 A_k}) =$$

$$\overset{de\ Morgan}{=} 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^4 \overline{A_k}) \overset{\mathscr{L}ema\ 1}{=} 1 - \prod_{i=1}^{4} \mathbb{P}(\overline{A_k}) = 1 - (1-x)^4$$

Следователно $x = 1 - \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

$\mathscr{L}ema$ 1. Ако $A_1, A_2, \dots, A_k$ са събития от $\mathscr{F}$ и са независими в съвкупност, тогава $A_1', A_2', \dots, A_k'$ $(\overline{A_1}, \overline{A_2}, \dots, \overline{A_k})$ с или без черти $\rightarrow (A_1, \overline{A_2}, A_3, \overline{A_4}, \dots)$ също са независими.

Доказателство на използваната в решението ЛЕМА може да намерите тук.

$\square$

Задача 2.
За да е напълно дефинирана задачата е необходимо да се спомене, че играчът ще играе разумно или казано по друг начин - оптимално. Това може да се добави при допълнителен въпрос зададен от полагащия теста. В това решение правим допускането, че играчът ще прилага възможно най-добрата стратегия. Най-добрата стратегия, която може да приложи играчът е да хвърля зарчето втори път когато е получил брой точки по-малък от 4. Това е така, тъй като ако е получил брой точки по-голям или равен на 4, той няма да има смисъл да рискува с повторно хвърляне, тъй като вероятността да получи повече точки от вече получените е по-малка. Нека означим с p броя на точките които играчът е получил при хвърляне на зарчето. Тогава имаме, че:

$$\mathbb{P}(p < 4) \times \frac{1+2+3+4+5+6}{6} + \mathbb{P}(p \geq 4) \times \frac{4+5+6}{3} = \frac{1}{2} \times 3.5 + \frac{1}{2} \times 5 = \boxed{4.25}$$

$\square$

Задача 3.

Преименуваме събитията Activator = A и RandomWilds = RW. Тъй като $A = \Omega \backslash \overline{A}$, то A и $\overline{A}$ образуват пълна група от събития. От формулата за пълната математическа вероятност имаме, че:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(RW) &= \mathbb{P}(RW \mid A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(RW \mid \overline{A}) \times \mathbb{P}(\overline{A}) = \\ &= (60\% + 4\%) \times 19\% + 10\% \times 81\,\% = \\ &= \frac{64 \times 19 + 10 \times 81}{10\,000} = \frac{2\,026}{10\,000} = \boxed{20.26\,\%}\end{aligned}$$

□

Задача 4.

Ако се стреля хаотично (напълно аматьорски), то вероятностите да се улучат съответно множествата от точки (секторите) A, B и C са съответно:

$$A: \qquad \mathbb{P}(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \boxed{\frac{1}{9}};$$

$$B: \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{\mu(A \cup B) - \mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \pi\left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}};$$

$$C: \qquad \mathbb{P}(C) = \frac{\mu(A \cup B \cup C) - \mu(A \cup B)}{\mu(\Omega)} = \frac{\pi \times 1^2 - \pi \times \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\pi \times 1^2} = 1 - \frac{4}{9} = \boxed{\frac{5}{9}}.$$

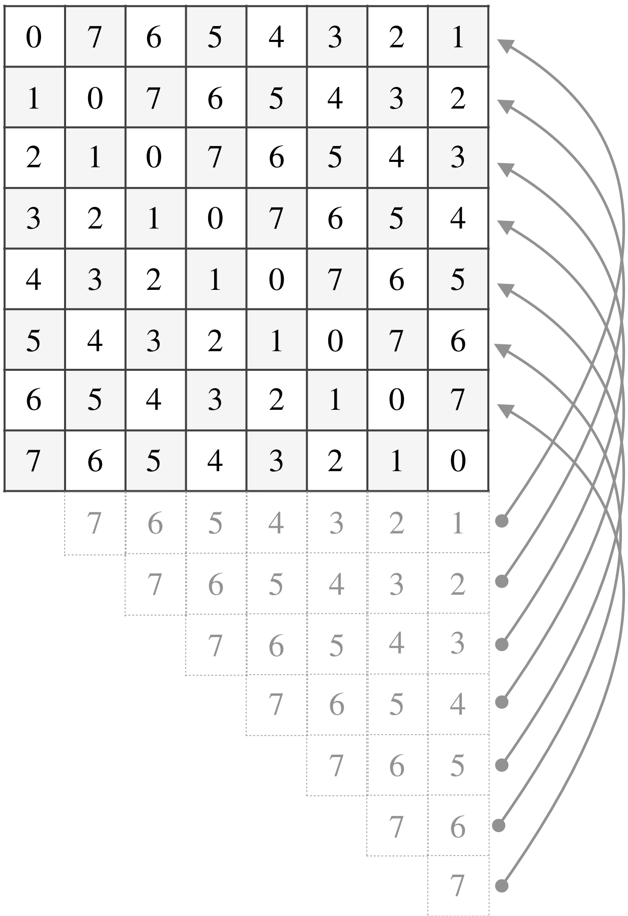
Задачата е типичен пример за Монте Карло алгоритмите. По-добър вариант би бил да се иска да се реши задачата с обърнат пример за Монте Карло алгоритъм – знаят се вероятностите, с които играчът улучва секторите по мишената и се иска да се намерят площите на секторите по мишената. След това да се иска обяснение от полагащия теста – защо това работи и как. Правилният отговор се обляга на закона за големите числа (ЗГЧ), за който може да прочетете повече на страница 17 от тук.

□

Задача 5.

Разглеждаме осем успоредни диагонала, като диагонал номер j се състои от всички клетки, за които номерът на реда минус номера на стълба дава остатък j при деление на 8, където $j = 0, \ldots, 7$. Нека тези диагонали са „чекмеджета“, а топовете — „предмети“. От принципа на Дирихле, тъй като $33/8 \equiv 4$ с остатък 1, то има поне един диагонал с поне $4+1$ топа. Тези пет топа лежат в различни редове и в различни стълбове, тоест не се бият.

Тоест винаги може да намерим 5 топа измежду 33 топа поставени на шахматна дъска с размерност 8×8, никои два измежду тях, които не се бият.



□

Задача 6.

Нека $A = \{$ теста е реагирал положително за вирус (включва се аларма)$\}$. Търси се условната вероятност $\mathbb{P}(I\,|\,A)$.

$$\mathbb{P}(I\,|\,A) = \frac{\mathbb{P}(I \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(A\,|\,I)\mathbb{P}(I)}{\mathbb{P}(A\,|\,I)\mathbb{P}(I) + \mathbb{P}(A\,|\,H)\mathbb{P}(H)} = \frac{99\% \times 1\,\%}{99\% \times 1\% + 20\% \times 99\,\%} =$$

$= \dfrac{99}{99 + 20 \times 99} = \boxed{\dfrac{1}{21}}$. Тук изолзвахме, че I и H са пълна група от събития, тъй

като $I = \overline{H}$.

Получаваме, че 1 на всеки 21 души, при които се е пуснала алармата наистина е заразен с вируса COVID. Оказва се, че теста НЕ е много полезен. Получава се така, тъй като заразените са много малък процент от популацията (посетителите на летището), а грешката в теста от $20\,\%$ е твърде голяма.

$\square$

Задача 7.

Имаме експеримент, който всеки път е един и същ (играта не се променя) и следователно връщаните стойности от достатъчно на брой игри ще са нормално разпределени (спрямо централна гранична теорема (ЦГТ)).

Критичната стойност за ниво на довереност от $95\,\%$ се задава от $t^* = 1.96$.

Границата на стандартната грешка е $t^* \times \dfrac{s}{\sqrt{n}} = \dfrac{1.96 \times 12}{\sqrt{36}} = 3.92.$

Следователно доверителният интервал за средната върната стойност е:

$\mu \in (4 - 3.92,\, 4 + 3.92) = \boxed{(0.08,\, 7.92)}$. Този интервал ни казва, че с гаранционна вероятност от $95\,\%$ – върнатата стойност от проведения експеримент ще лежи в границите на интервала.

$\square$

Задача 8.
Контраинтуитивно, такава стратегия съществува!
Именуваме следните събития: $A = \{$вижда a в $I^{\text{-ви}}$ плик$\}$,
$B = \{$вижда b във $II^{-\text{ри}}$ плик$\}$ и $C = \{$прави се смяна на пликовете$\}$.

Знаем, че $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ (равно вероятно е да изберем който и да е от двата плика). Нека още $C = \{$прави се смяна на пликовете$\}$.

$$\mathbb{P}(b) = \mathbb{P}\underbrace{(A \cap C)}_{\substack{\text{избира се}\\ \text{плик A и}\\ \text{се прави}\\ \text{смяна}}} + \mathbb{P}\underbrace{(B \cap \overline{C})}_{\substack{\text{избира се}\\ \text{плик B и}\\ \text{НЕ се прави}\\ \text{смяна}}} =$$

$$= \mathbb{P}(C\,|\,A) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{C}\,|\,B) \times \mathbb{P}(B) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) + \mathbb{P}(\overline{C}\,|\,B)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) + 1 - \mathbb{P}(C\,|\,B)\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B)\right)$$

Тук използвахме, че $\mathbb{P}(C\,|\,B) + \mathbb{P}(\overline{C}\,|\,B) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap B) + \mathbb{P}(\overline{C} \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1.$

Тоест задачата се свежда до въпроса: може ли да определим такава стратегия, при която $\mathbb{P}(C\,|\,A) > \mathbb{P}(C\,|\,B)$.

Нека разгледаме няколко случая, за да добием представа за сложността на въпроса:

Нека,
$J = \mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B)$. Търсим стратегия, при която $J > 0$.

$$\begin{aligned}
J &= \mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B) \\
&= \frac{\mathbb{P}(C \cap A)}{\mathbb{P}(A)} - \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} - \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \times \frac{\mathbb{P}(C)}{\mathbb{P}(C)} = \\
&= \mathbb{P}(C) \times \left(\frac{1}{\mathbb{P}(A)} \times \frac{\mathbb{P}(A \cap C)}{\mathbb{P}(C)} - \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \times \frac{\mathbb{P}(B \cap C)}{\mathbb{P}(C)}\right) = \\
&= \mathbb{P}(C) \times \left(\frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A\,|\,C) - \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(B\,|\,C)\right) = \\
&= \frac{\mathbb{P}(C)}{2} \times \left(\mathbb{P}(A\,|\,C) - \mathbb{P}(B\,|\,C)\right).
\end{aligned}$$

1 сл. Ако никога не сменяме: $J = 0$, т.к. $\mathbb{P}(C) = 0$ и $\mathbb{P}(A\,|\,C) = 0 = \mathbb{P}(B\,|\,C)$.
2 сл. Ако винаги сменяме: $J = 0$, т.к. $\mathbb{P}(A\,|\,C) = \mathbb{P}(A) = 1$ и аналогично $\mathbb{P}(B\,|\,C) = \mathbb{P}(B) = 1$.
3 сл. Ако сменяме на всяко второ теглене: $J = 0$, тъй като $\mathbb{P}(A\,|\,C) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$ и аналогично и за B.
4 сл. Ако сменяме на всяко трето теглене: $J = 0$, тъй като $\mathbb{P}(A\,|\,C) = \frac{1}{3} \times \mathbb{P}(A) = \frac{1}{6}$ и аналогично и за B.
...

Изглежда, че каквото и да направим, винаги ще е равновероятно да останем с която и да е от двете суми.

Сега да се върнем на $J = \mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B)$. Това равенство в този вид е много по-мощно от равенството до което достигаме в синьото уравнение. Но благодарение на равенството от синьото уравнение може да пресметнем J при някакви стратегии от вида „сменяме плика на всяко k-то теглене“.

Какво е всъщност $\mathbb{P}(C\,|\,A)$? Това е „вероятността да сменим пликовете при положение, че сме избрали плик A“. Ние не знаем дали сме ибрали плик A, но знаем каква е сумата в него! Имаме наредба на събитията. Първо виждаме каква е сумата в избрания плик и после решаваме дали го сменим или не. Нека използваме тази налична информация, за да се опитаме да формулираме желаната стратегия.

Ако си дефинираме стратегията по следния начин:
Ако виждаме числото (сумата) x, то винаги сменяме с вероятност e^{-x}.
Тоест $\mathbb{P}(C\,|\,\text{виждаме } x) = e^{-x}$. Следователно,

$$J = \mathbb{P}(C\,|\,A) - \mathbb{P}(C\,|\,B) = e^{-a} - e^{-b} > 0 \text{ и това е валидна стратегия!}$$

В случая взехме неперовото число e, но твърдението е в сила за всяко положително реално число число, може да вземем например числото 2023.

Коментар: Нетривиална задача е да се намери такова число като функция на сумата в двата плика, което да максимизира вероятността за взимане на плика с по-голямата сума в очакване (в средния случай).

□