Anleitung zur Bestimmung von Stammfunktionen von Ableitungen von e-Funktionen (welche mit der Produktregel gebildet wurden)

1.1 Beispielrechnung

Man ermittle die Stammfunktion von $f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x}$.

Da der e-Term aufgeleitet gleich bleibt, kann dieser zunächst vernachlässigt werden. Wichtig ist die innere Ableitung des e-Terms, also die Ableitung des Exponenten, welche $-\frac{1}{5}$ ist.

Um die Ableitung rückwärts zu rechnen bzw. zu neutralisieren, verwende man die Gegenoperation, d.h. mal -5:

$$-5 \cdot (x+2)$$

Da die Konstante 2 sich bei der Ableitungsrechnung aus Ableitung des Klammerausdrucks und der urprünglichen Konstante davon zusammensetzt, setze man zunächst A anstelle 2 ein.

$$-5x - 5A + (-5)$$

wobei -5 auf der rechten Seite des $+$ die Ableitung von $-5x+B$ ist, wobei B die ursprüngliche Konstante des Klammerterms ist.
Da wir nun in der Ableitungsschreibweise sind, mit -5 rechts vom $+$, ergänze man zusätzlich die Ableitung des Exponenten von e auf der linken Seite, d.h.:

$$-\frac{1}{5} \cdot (-5x - 5 \cdot A) + (-5)$$
$$\Rightarrow x + A + (-5)$$

Nun muss $A + (-5) = 2$ sein, da die Ableitung $x+2$ ist:

$$2 = A + (-5) \Leftrightarrow A = 2 + 5 = 7$$

Nun setze man $A = 7$, wobei die Ableitungsterme links und rechts nun weggelassen werden können:

$$-5x - 5 \cdot 7$$
$$-5x - 35$$

Die Stammfunktion F lautet somit:

$$F(x) = (-5x - 35) \cdot e^{\frac{3}{5} - \frac{1}{5}x}$$

1.2 Beispielrechnung mit Erweiterung

Sei die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$ eine zu integrierende Funktion:

$$f(x) = \left[-1 \cdot (\frac{x^2}{-1} + \frac{A}{-1}) + (-2x)\right] \cdot e^{-x} \tag{1}$$

$$A + (-2x) = 0 \Leftrightarrow A = 2x \tag{2}$$

Wenn A = 2x, dann muss dies ebenfalls abgeleitet werden, d.h.:

$$\frac{d}{dx} 2x = 2 \tag{3}$$

somit:

$$f(x) = \left[-1 \cdot (\frac{x^2}{-1} + \frac{A}{-1}) + (-2x + 2)\right] \cdot e^{-x} \tag{4}$$

$$A + (-2x + 2) = 0 \Leftrightarrow A = 2x + 2 \tag{5}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\, dx = \left[\frac{x^2}{-1} + \frac{2x+2}{-1}\right] \cdot e^{-x} \Leftrightarrow \left[-x^2 - 2x - 2\right] \cdot e^{-x} \tag{6}$$

Die Stammfunktion F lautet daher:

$$F(x) = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} \tag{7}$$

1.3 Allgemeine Formel

Um die Regel zu verallgemeinern, betrachte man die Funktion f:

$$f(x) = (ax^n + b) \cdot e^{k \cdot x}$$

Nun teile man durch die Ableitung des Exponenten von e, um den ursprünglichen Leitkoeffizienten A zu erhalten. Zusätzlich bilde man die Ableitung nach der Produktregel, d.h. links vom + mal Ableitung des Exponenten des e-Terms und rechts die Ableitung des Klammerterms:

$$f(x) = \left[k \cdot \left(\frac{a}{k} \cdot x^n + \frac{B}{k}\right) + \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{a}{k} \cdot x^n + \frac{B}{k}\right)\right] \cdot e^{k \cdot x}$$

wobei $A = \frac{a}{k}$ gilt und B eine Variable ist, welche beliebig sein kann, d.h. *universal* ist:

$$f(x) = \left[\cancel{k} \cdot \left(\frac{a}{\cancel{k}} \cdot x^n + \frac{B}{\cancel{k}}\right) + \frac{d}{dx} \cdot \left(Ax^n + \frac{B}{k}\right)\right] \cdot e^{k \cdot x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \left[a \cdot x^n + \underbrace{B + n \cdot Ax^{n-1}}_{=b}\right] \cdot e^{k \cdot x}$$

Um die Ursprungskonstante C zu erhalten, welche $C = \frac{B}{k}$ ist, löse man zunächst folgende Gleichung nach B auf:

$$b = B + n \cdot Ax^{n-1} \Leftrightarrow B = b - n \cdot Ax^{n-1}$$

Für die Stammfunktion F gilt daher:

$$F(x) = \int f(x)\, dx = \left[Ax^n + \frac{b - n \cdot Ax^{n-1}}{k}\right] \cdot e^{kx}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int f(x)\, dx = \left[\underbrace{\frac{a}{k}}_{=A} x^n + \underbrace{\frac{b - \left(n \cdot \frac{a}{k} x^{n-1}\right)}{k}}_{=C}\right] \cdot e^{kx}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = \int f(x)\, dx = \frac{1}{k} \cdot \left[ax^n + \underbrace{b - n \cdot \frac{a}{k} x^{n-1}}_{=B}\right] \cdot e^{kx}$$

Folglich lässt sich mit der Formel $\frac{1}{k} \cdot \left(b - \left(\frac{a}{k}\right)\right)$ die Ursprungskonstante C bestimmen. Diese gilt, wenn die Ableitung des Klammerterms eine Konstante ist.

Achtung (Lemma): Besitzt die Ableitung des Klammerterms ein x, d.h. $A \cdot x^n \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ wird abgeleitet, so muss die Ableitung des berechneten C's mit einbezogen werden, da diese dadurch ebenfalls ein x enthält. Konkret bedeutet dies:
Erkennt man, dass die Ableitung des Summanden mit dem höchten Exponent keine Konstante ist, sondern einen Exponenten besitzt mit $n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, so muss das Verfahren erneut angewandt werden, d.h. die neue Ableitungs des berechneten C's muss ebenfalls an Stelle der Ableitung des Klammerterms ergänzt werden, da diese ebenfalls Teil der Ableitung des Klammerterms ist.
Dieser Vorgang wird solange wiederholt, bis man für die Ableitung von C einen Term ohne x erhält, d.h. $(\ )^{n-n}$, somit eine Konstante hat. Alternativ: Es muss n-mal abgeleitet werden.

Beispiel: Sei f eine zu integrierende Funktion mit $f(x) = \left(24x^2 + 28x + 10\right) e^{3x}$.

Setze man nun die einzelnen Werte für die Variablen der Formel ein:

$$F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\frac{a}{k}x^n + \frac{b - n \cdot \frac{a}{k}x^{n-1}}{k}\right] \cdot e^{kx}$$

$$\Rightarrow F(x) = \int f(x)\,dx = \left[\underbrace{\frac{24}{3}}_{=A}\, x^2 + \underbrace{\frac{(28x+10) - 2 \cdot \left(\frac{24}{3}x\right)}{3}}_{=C}\right] \cdot e^{kx}$$

so erhält man für $A = 8$, somit $8x^2$, und die Gleichung $\frac{28x+10-16x}{3} = \frac{B}{3} = C$.

$$B_1 = 12x + 10$$

$$C_1 = 4x + \frac{10}{3}$$

Dieses C enthält nun ein x, daher muss ${C_1}'$ ergänzt werden zur Ableitung des Klammerterms:

$$C = \frac{28x + 10 - 16x + 4}{3}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{12x + 6}{3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = 4x + 2}$$

Der vordere Teil $4x$ ist derselbe wie bei C_1, dies bedeutet er wurde bereits ergänzt, somit bleibt nur noch eine Konstante. Die Stammfunktion wurde gefunden.

$$\Rightarrow F(x) = \left(8x^2 + 4x + 2\right) e^{3x}$$

Alternativ:
Ansatz:

$$f(x) = \left[k \cdot \left(\frac{a}{k} \cdot x^n + \frac{B}{k} + \frac{D}{k}...\right) + \frac{d}{dx} \cdot \left(\frac{a}{k} \cdot x^n + \frac{B}{k} + \frac{D}{k}...\right)\right] \cdot e^{k \cdot x}$$

Statt B universell zu betrachten, kann für jeden Summanden eine eigene Variable zugeordnet werden. Dies macht die Rechnung übersichtlicher:

$$\frac{28x - 16x}{3} = \frac{B}{3} = C_1 \Rightarrow \boxed{C_1 = 4x}$$

wobei $28x$ der 2. Summand aus $f(x)$ ist.

$$\frac{10 - 4}{3} = \frac{D}{3} = C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 6}$$

wobei 10 der 3. Summand aus $f(x)$ ist und 4 die Ableitung von C_1 ist.

Überprüfung:
Man differenziere die vermeintliche Stammfunktion F mit $\left(8x^2+4x+2\right)e^{3x}$, um $f(x)$ zu erhalten.

Beweis.

$$\frac{d}{dx}\,F(x) = \frac{d}{dx}\,\left(\left(8x^2+4x+2\right)e^{3x}\right)$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 3\cdot\left(8x^2+4x+2\right)e^{3x} + e^{3x}\cdot 16x+4$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \left(24x^2+12x+6+16x+4\right)e^{3x}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = \left(24x^2+28x+10\right)e^{3x}$$

□

q.e.d.