UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Sintonización Analítica de Controladores

Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.
leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

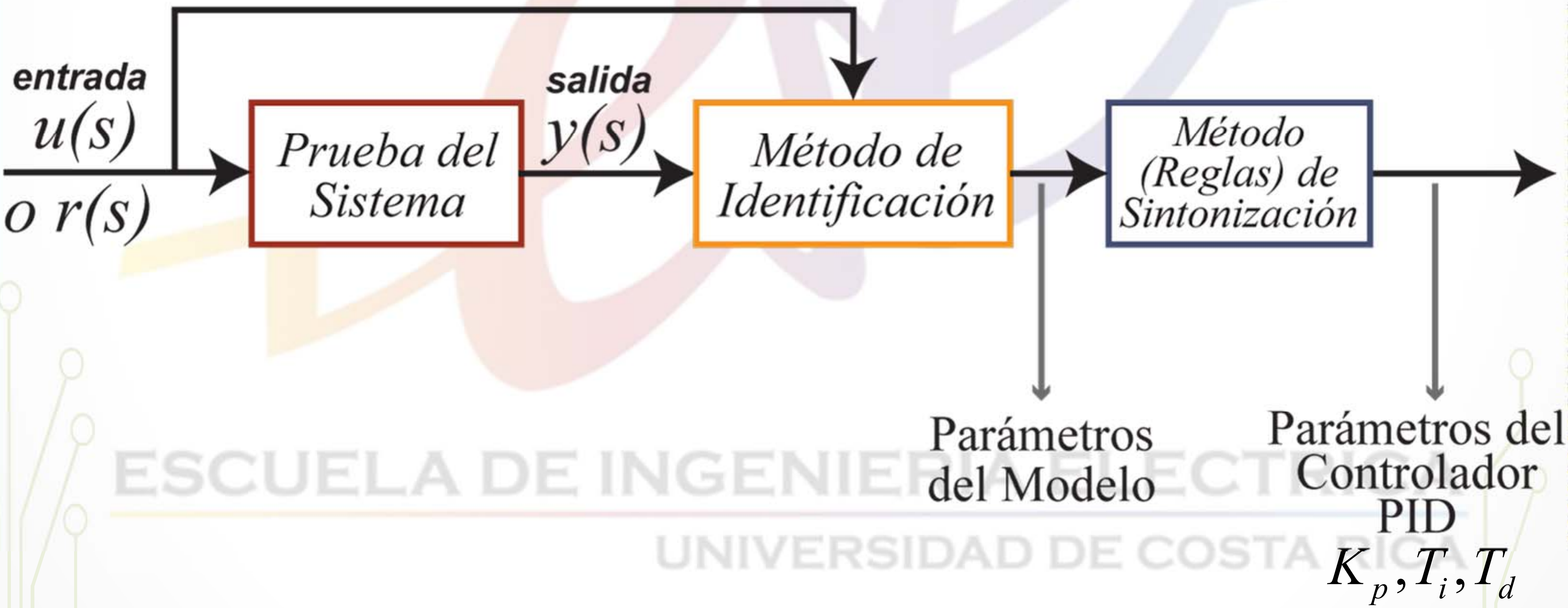
EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Sintonización de Controladores PID

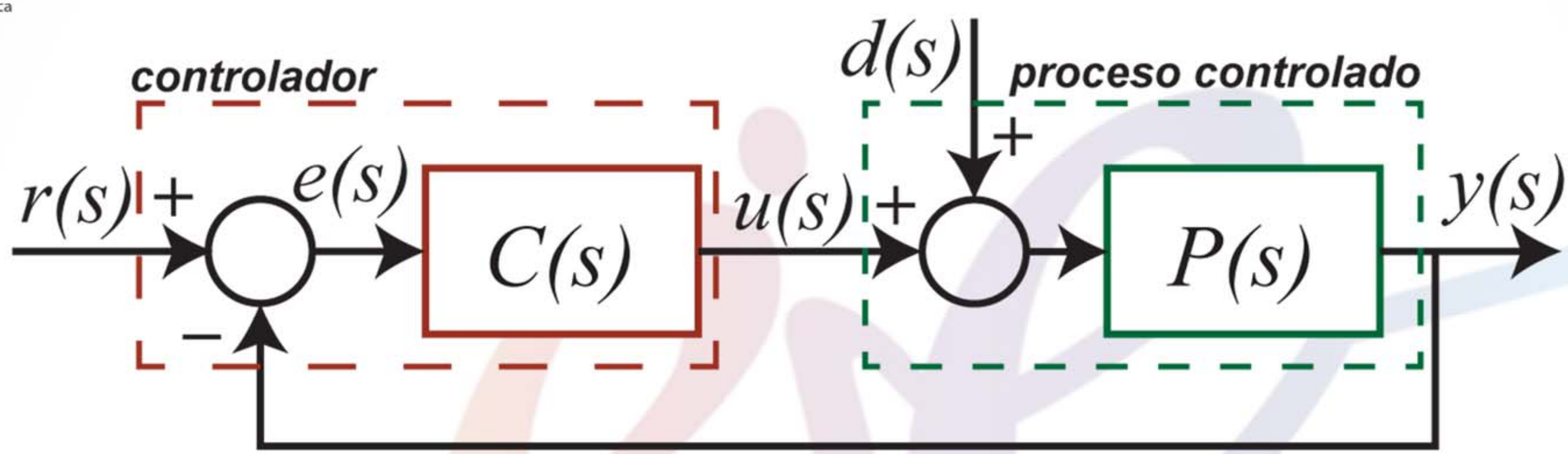
- Normalmente el paso final en la puesta en servicio de un lazo de control corresponde a la **sintonización** del controlador.
- La Sintonización de un controlador es el proceso en el cual se deben determinar los parámetros del mismo, necesarios para lograr el comportamiento deseado del sistema de control.
- **NO** existe un procedimiento de sintonización único aplicable a todos los sistemas, en el mejor de los casos, los parámetros calculados con el método empleado son una primera aproximación a los parámetros requeridos del sistema y probablemente se necesitará un afinamiento posterior de los mismos.
- La sintonización del controlador (***PID***) consiste en la determinación del valor de sus parámetros (K_p, T_i, T_d), para lograr un comportamiento del sistema de control aceptable y robusto, de conformidad con el criterio de desempeño establecido.

Sintonización de Controladores PID

- Para poder realizar la sintonización de los controladores debe identificarse primero la dinámica del proceso, para luego a partir de esta, determinar los parámetros del controlador utilizando un método de sintonización seleccionado.



Sintonización de Controladores PID



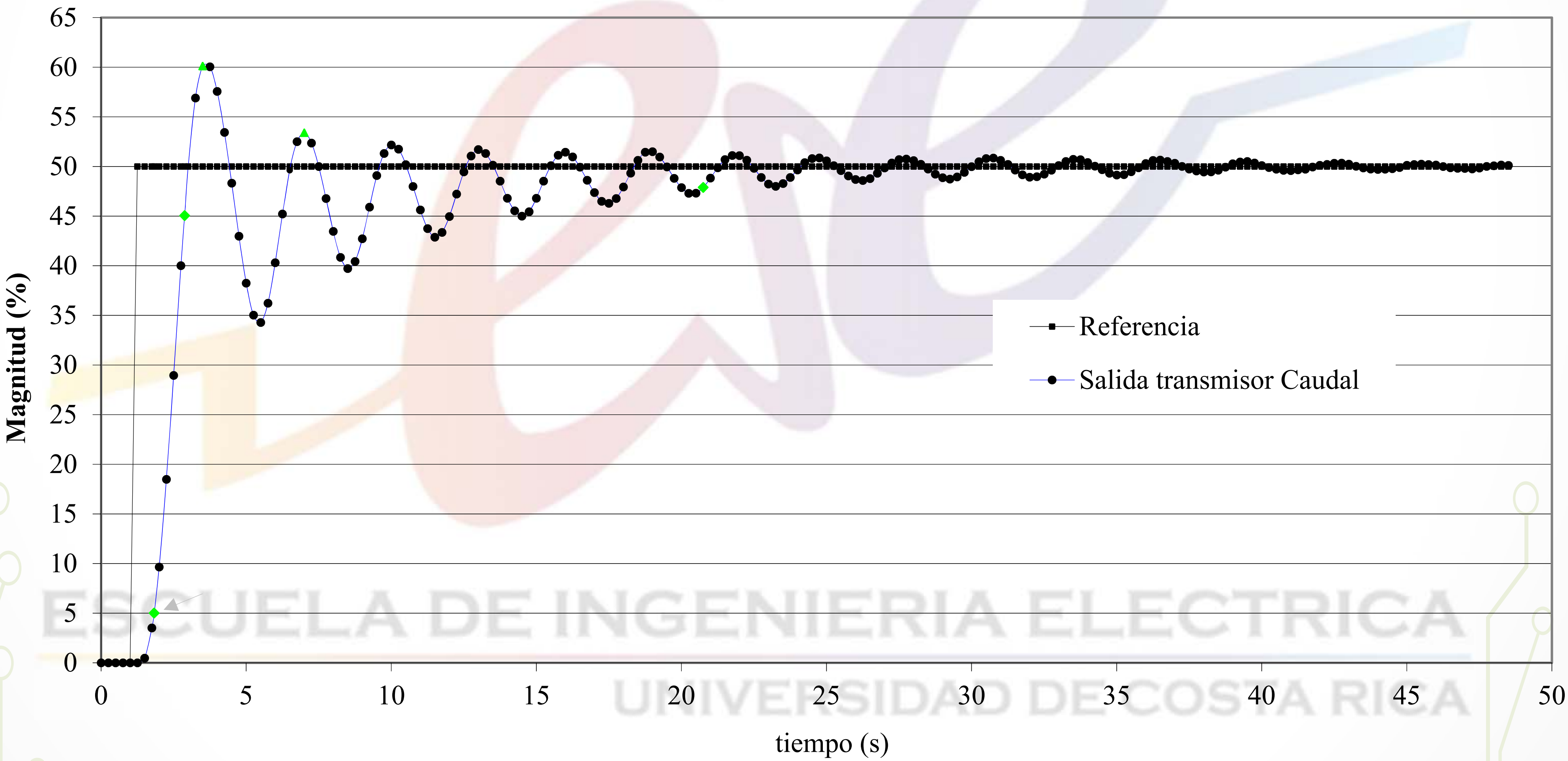
$$y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} r(s) + \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} d(s)$$

$$y(s) = M_{yr}(s) r(s) + M_{yd}(s) d(s)$$

- El sistema de control realimentado funcionará como **Servomecanismo** o como **Regulador**.

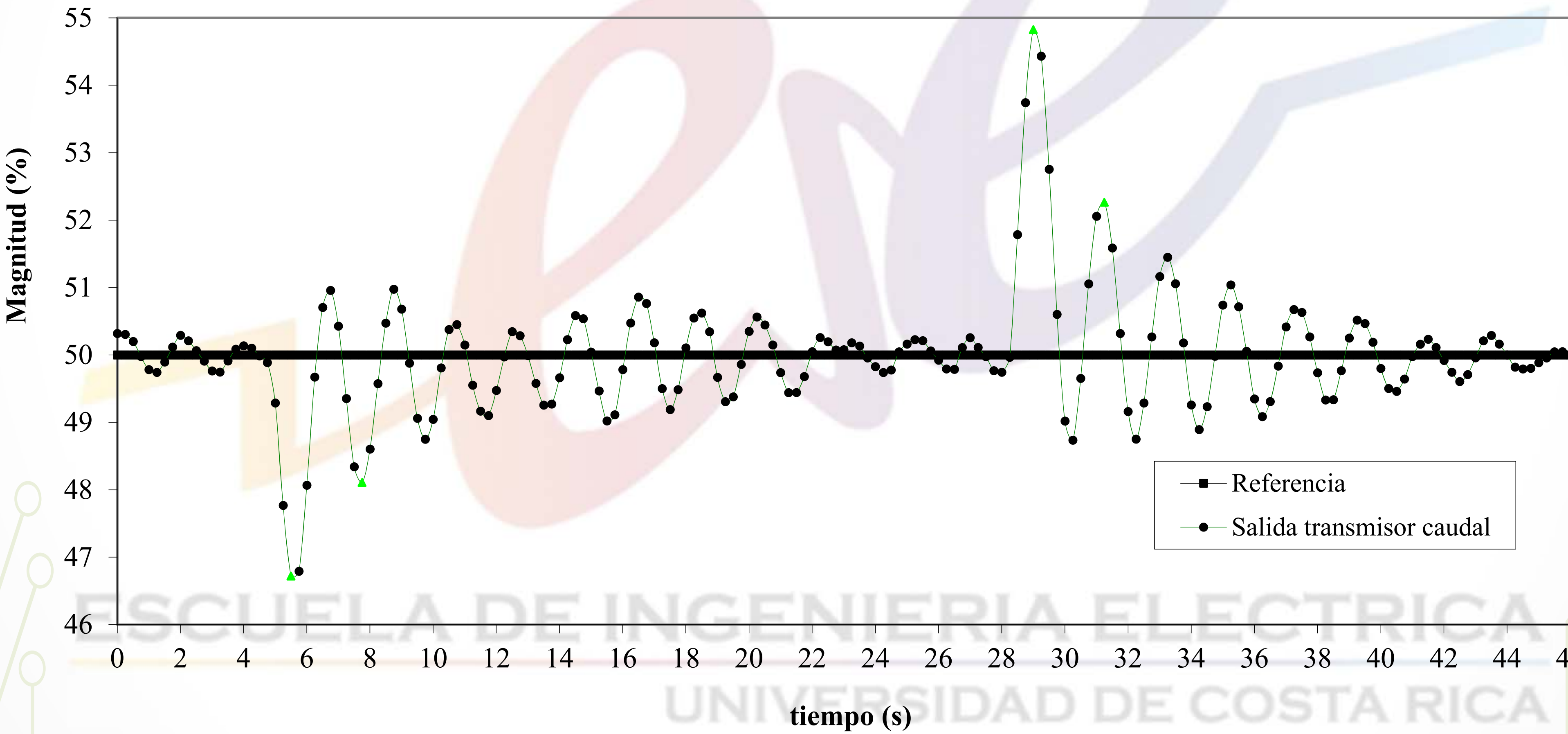
Sintonización de Controladores PID

- Funcionamiento del Lazo de Control: $M_{yr}(s) = \dfrac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$ $\quad d(s)=0$
- Servomecanismo: Se desea un buen seguimiento del valor deseado



Sintonización de Controladores PID

- Funcionamiento del Lazo de Control: $M_{yd}(s) = \dfrac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$ $\quad r(s) = 0$
- Regulador: Se desea eliminar el efecto de las perturbaciones.



Sintonización de Controladores PID

- Dado que los numeradores de $M_{yr}(s)$ y $M_{yd}(s)$ son diferentes, no necesariamente un buen ajuste del controlador para operar como servomecanismo funcionará bien como regulador, por lo que se han desarrollado procedimientos de sintonización para ambos casos
- En la industria, la mayor parte de los controladores se utilizan para responder a un cambio en la perturbación, se requiere una buena regulación más que un buen seguimiento a un cambio en el valor deseado, con la excepción de los controladores esclavos en los sistemas de control en cascada.
- Si el controlador se ha optimizado para una buena respuesta al valor deseado, no eliminará las perturbaciones en forma efectiva si el sistema contiene un integrador o su constante de tiempo es grande.
- Es importante determinar los requisitos de funcionamiento del lazo de control para seleccionar el procedimiento de sintonización adecuado.

Sintonización de Controladores PID

- Los métodos de sintonización se pueden clasificar en:
  - **Métodos de lazo abierto**: El controlador puede o no estar instalado y si lo está, operará en modo “manual”, estos métodos utilizan la **curva de reacción** del proceso (respuesta al escalón). Se identifica un modelo a partir de la curva y éste se utiliza en la sintonización del controlador.
  - **Métodos de lazo Cerrado**: el controlador se encuentra operando en “automático”: Se identifica un modelo de orden reducido para el proceso, utilizando la respuesta del sistema en **lazo cerrado** o la información de la oscilación sostenida del mismo, y este modelo se utiliza para sintonizar el controlador.
- Muchos métodos de sintonización requieren un tipo específico de modelo por lo que se debe verificar si se requiere la información de lazo abierto o lazo cerrado para sintonizar el controlador.

Sintonización de Controladores PID

- Los métodos se sintonización también se pueden clasificar de acuerdo a la información que requieren o al criterio de desempeño empleado:
  - Basados en la curva de reacción del proceso (lazo abierto)
  - Basados en criterios de error integral
  - Métodos de oscilación sostenida (lazo cerrado)
  - Síntesis de Controladores (cancelación de polos)
  - Localización (Ubicación) de polos
  - Robustez (Margen de fase, Margen de Ganancia, M_s)
  - Criterio múltiple (desempeño + robustez + acción de control + etc.)
  - Basados en Modelo Interno (IMC)
- **A la hora de utilizar un método de sintonización debe tomarse en cuenta el modo de funcionamiento del lazo (servo control o control regulatorio), el procedimiento utilizado para la obtención del modelo del proceso y la función de transferencia del controlador PID, supuestos por los autores del método.**

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Sintonización Analítica

- Se conoce también como Síntesis de Controladores o métodos de cancelación de polos.
- El principio básico es colocar los ceros del controlador en la posición de los polos dominantes de la planta, de manera que se cancelen.
- Se incorpora un parámetro de diseño variable τ_c para definir el comportamiento dinámico del lazo cerrado (velocidad relativa del lazo de control). Caso contrario a los demás métodos de sintonización, en donde el criterio de desempeño se encuentra implícito en las reglas.
- El orden del modelo utilizado está asociado al orden del controlador requerido, por lo que para obtener un controlador tipo PID, el modelo no puede tener más de 2 polos.
- Se estudiará la Síntesis del Servo control y del control regulatorio para controladores de uno y dos grados de libertad.

Síntesis del Servo Control

- Función de Transferencia de Lazo Cerrado del Servo Control:

$$M_{yr}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

- Si se tiene una planta ***P(s)*** determinada y se desea que $M_{yr}(s)$ tenga cierta forma (que determina su comportamiento), ¿Cuál es el controlador necesario para obtenerla?

- Se resuelve $C(s)$ desde $M_{yr}(s)$:

$$M_{yr}(s) = \frac{C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)} \Rightarrow M_{yr}(s) + M_{yr}(s)C(s)P(s) = C(s)P(s)$$

$$\Rightarrow M_{yr}(s) = C(s)P(s)\left[1 - M_{yr}(s)\right]$$

$$\boxed{\therefore C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{M_{yr}(s)}{\left[1 - M_{yr}(s)\right]}}$$

- Se debe comprobar que el controlador sea físicamente realizable

Síntesis del Servo Control

- Función de Transferencia de Lazo cerrado deseada: $M_{yr}(s) = \dfrac{K_{yr}}{T_c s + 1} e^{-Ls}$
- En donde T_c es la constante de tiempo de Lazo cerrado deseada, este es un parámetro de control ajustable que ajusta la velocidad relativa del lazo de control, ésta puede expresarse de forma normalizada como una proporción de la constante de tiempo dominante del modelo de la planta (modelos de primer y segundo orden): $T_c = \tau_c T$
- Para el caso de $M_{yr}(s)$ sin tiempo muerto y ganancia unitaria ($e_{pr0}=0$):

$$M_{yr}(s) = \frac{1}{T_c s + 1} \Rightarrow C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{M_{yr}(s)}{\left[1 - M_{yr}(s)\right]} = \frac{1}{P(s)} \frac{\frac{1}{T_c s + 1}}{\left[1 - \frac{1}{T_c s + 1}\right]}$$

$$\Rightarrow C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1}{\left[T_c s + 1 - 1\right]} \Rightarrow \boxed{C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1}{\left[T_c s\right]}}$$

Síntesis del Servo Control

- Planta de Primer Orden: $P(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$
- Función de transferencia Lazo cerrado deseada (***$e_{pr0} \neq 0$***): $M_{yr}(s)=\dfrac{K_{yr}}{T_c s+1}$
- El controlador está dado por:

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{M_{yr}(s)}{\left[1-M_{yr}(s)\right]}=\frac{Ts+1}{K}\frac{\dfrac{K_{yr}}{T_c s+1}}{\left[1-\dfrac{K_{yr}}{T_c s+1}\right]}=\frac{Ts+1}{K}\frac{K_{yr}}{\left[T_c s+1-K_{yr}\right]}$$

$$\Rightarrow C(s)=\left(\frac{Ts+1}{K}\right)\frac{\dfrac{K_{yr}}{1-K_{yr}}}{\left[\left(\dfrac{T_c}{1-K_{yr}}\right)s+1\right]}$$

Para obtener un Controlador tipo P:
(cancelando el polo mediante el cero)

$$\Rightarrow T=\frac{T_c}{1-K_{yr}}\Rightarrow T_c=T\left(1-K_{yr}\right)\Rightarrow \underbrace{\tau_c=1-K_{yr}}$$

$$\Rightarrow C(s)=K_p=\frac{K_{yr}}{K\left(1-K_{yr}\right)}\Rightarrow \boxed{K_pK=\frac{1-\tau_c}{\tau_c}}$$

Normalizando: $T_c=\tau_c T \quad 0<\tau_c<1$

Síntesis del Servo Control

- Planta de Primer Orden: $P(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ y $M_{yr}(s)=\dfrac{K_{yr}}{T_c s+1}$ ($e_{pr0}\neq 0$)
- Calculando $M_{yr}(s)$ utilizando un controlador tipo **P**: $C(s)=K_p$

$$M_{yr}(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}=\frac{K_pK}{Ts+1+K_pK}=\frac{\dfrac{K_pK}{1+K_pK}}{\left(\dfrac{T}{1+K_pK}\right)s+1}=\frac{K_{yr}}{T_c s+1}$$

$$\Rightarrow T_c=\frac{T}{1+K_pK}\Rightarrow \boxed{K_pK=\frac{T}{T_c}-1}\qquad 0<T_c<T$$

$$\Rightarrow K_{yr}=\frac{K_pK}{1+K_pK}=\frac{T-T_c}{T}$$

Normalizando

$$T_c=\tau_c T\qquad \Rightarrow \boxed{K_pK=(1-\tau_c)/\tau_c}$$

$$0<\tau_c<1\qquad \Rightarrow M_{yr}(s)=\frac{1-\tau_c}{\tau_c Ts+1}$$

Síntesis del Servo Control

- Planta de Primer Orden: $P(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$ y $M_{yr}(s) = \dfrac{1}{T_c s+1}$ $(e_{pr0} = 0)$

- El controlador está dado por:

$$C(s) = \frac{1}{P(s)} \frac{1}{[T_c s]} = \frac{Ts+1}{K}\left[\frac{1}{T_c s}\right] = \frac{T}{KT_c}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)$$

- El cual corresponde a un controlador ***PI*** $C(s) = K_p\left(\dfrac{T_i s+1}{T_i s}\right)$

Donde:

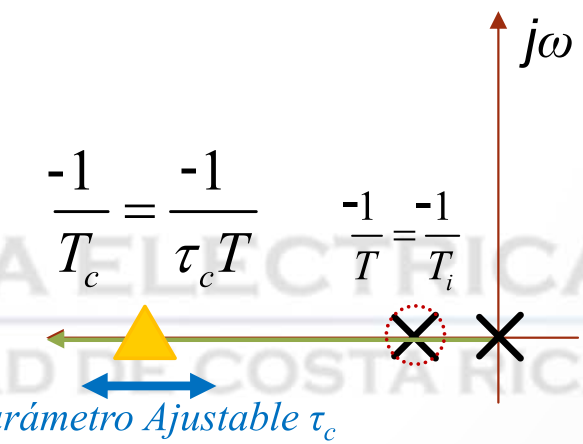
$$K_p = \frac{T}{KT_c} \qquad T_i = T$$

Normalizando

$$T_c = \tau_c T$$

$$0 < \tau_c < 1$$

$$\boxed{K_p K = \frac{1}{\tau_c} \qquad \frac{T_i}{T} = 1}$$



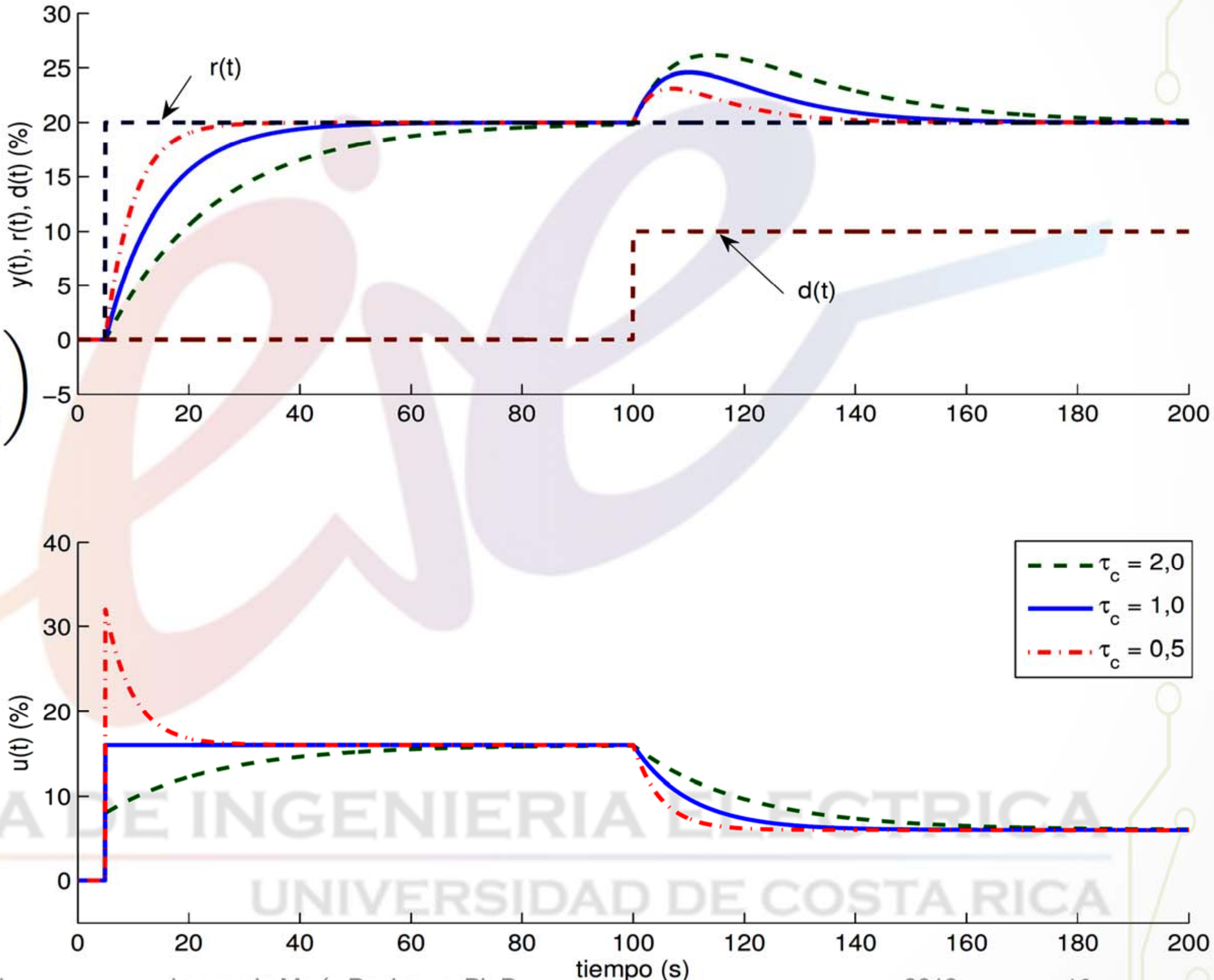
Síntesis del Servo Control

- Ejemplo:

$$P(s) = \frac{1{,}25}{10s+1}$$

$$C(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)$$

τ_c	K_p	T_i, s
2,0	0,4	10,0
1,0	0,8	10,0
0,5	1,6	10,0



Síntesis del Servo Control

- Planta de Primer Orden: $P(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$ y $M_{yr}(s)=\dfrac{\omega_{nc}^2}{s^2+2\zeta_c\omega_{nc}s+\omega_{nc}^2}$ $(e_{pr0}=0)$

- Se requiere un controlador ***PI***:

$$C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{M_{yr}(s)}{\left[1-M_{yr}(s)\right]}=\cdots=K_p\left(\frac{T_is+1}{T_is}\right)$$

- Donde:

$$K_pK=2\zeta_c\omega_{nc}T-1 \qquad \frac{T_i}{T}=\frac{2\zeta_c\omega_{nc}T-1}{\left(T\omega_{nc}\right)^2}$$

- Pero en este caso se obtiene una ***$M_{yr}(s)$*** *(método de ubicación de polos):*

$$M_{yr}(s)=\frac{\omega_{nc}^2\left(T_is+1\right)}{s^2+2\zeta_c\omega_{nc}s+\omega_{nc}^2}$$

  - Se obtiene la posición deseada de los polos de lazo cerrado.
  - La influencia del cero depende de $T_i(\zeta_c\omega_{nc})$, este afecta la forma de la respuesta.

Síntesis del Servo Control

- Planta de Segundo Orden: $P(s)=\dfrac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}=\dfrac{K}{(Ts+1)(aTs+1)}$

$$T_1 \geq T_2,\quad T_1=T,\quad a=T_2/T_1,\quad a\leq 1$$

- ***$M_{yr}(s)$*** deseada (***$e_{pr0}=0$***): $M_{yr}(s)=\dfrac{1}{T_c s+1}=\dfrac{1}{\tau_c Ts+1}$
- El controlador está dado por:

$$C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{1}{[T_c s]}=\frac{(Ts+1)(aTs+1)}{K}\left[\frac{1}{T_c s}\right]=\frac{1}{\tau_c K}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)(aTs+1)$$

- El cual corresponde a un ***PID*** tipo serie: $C(s)=K_p'\left(\dfrac{T_i's+1}{T_i's}\right)(T_d's+1)$

En donde:

$$\left.\begin{aligned}K_p'K=\frac{1}{\tau_c},\quad \frac{T_i'}{T}=1,\quad \frac{T_d'}{T}=a\\ \alpha'=0{,}1\end{aligned}\right\}$$

PID estándar equivalente:

$$K_pK=\frac{1+a}{\tau_c},\quad \frac{T_i}{T}=1+a,\quad \frac{T_d}{T}=\frac{a}{1+a}$$

$$\alpha'=0{,}1(1+a)$$

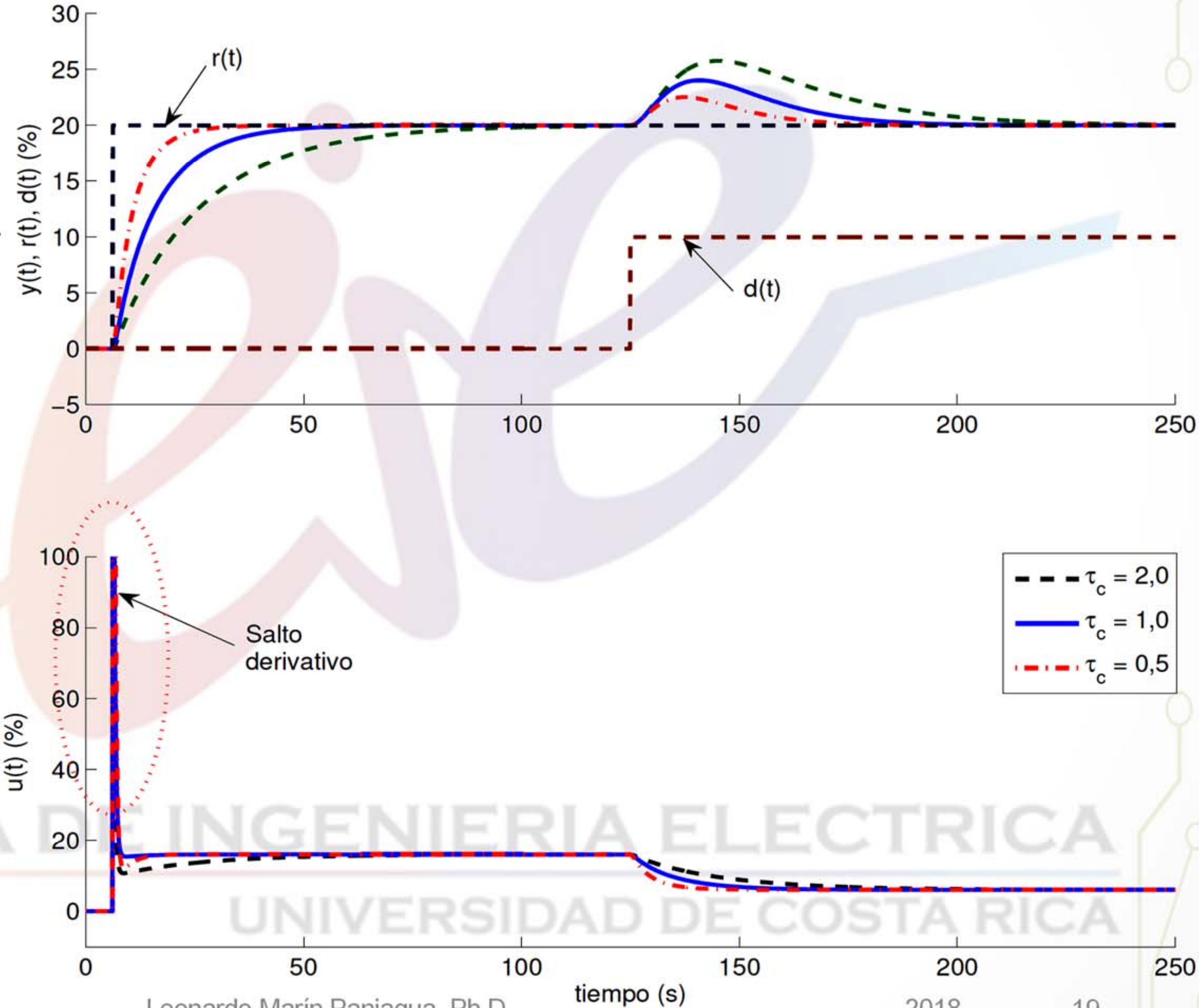
Síntesis del Servo Control

- Ejemplo:

$$P(s) = \frac{1{,}25}{(10s+1)(5s+1)}$$

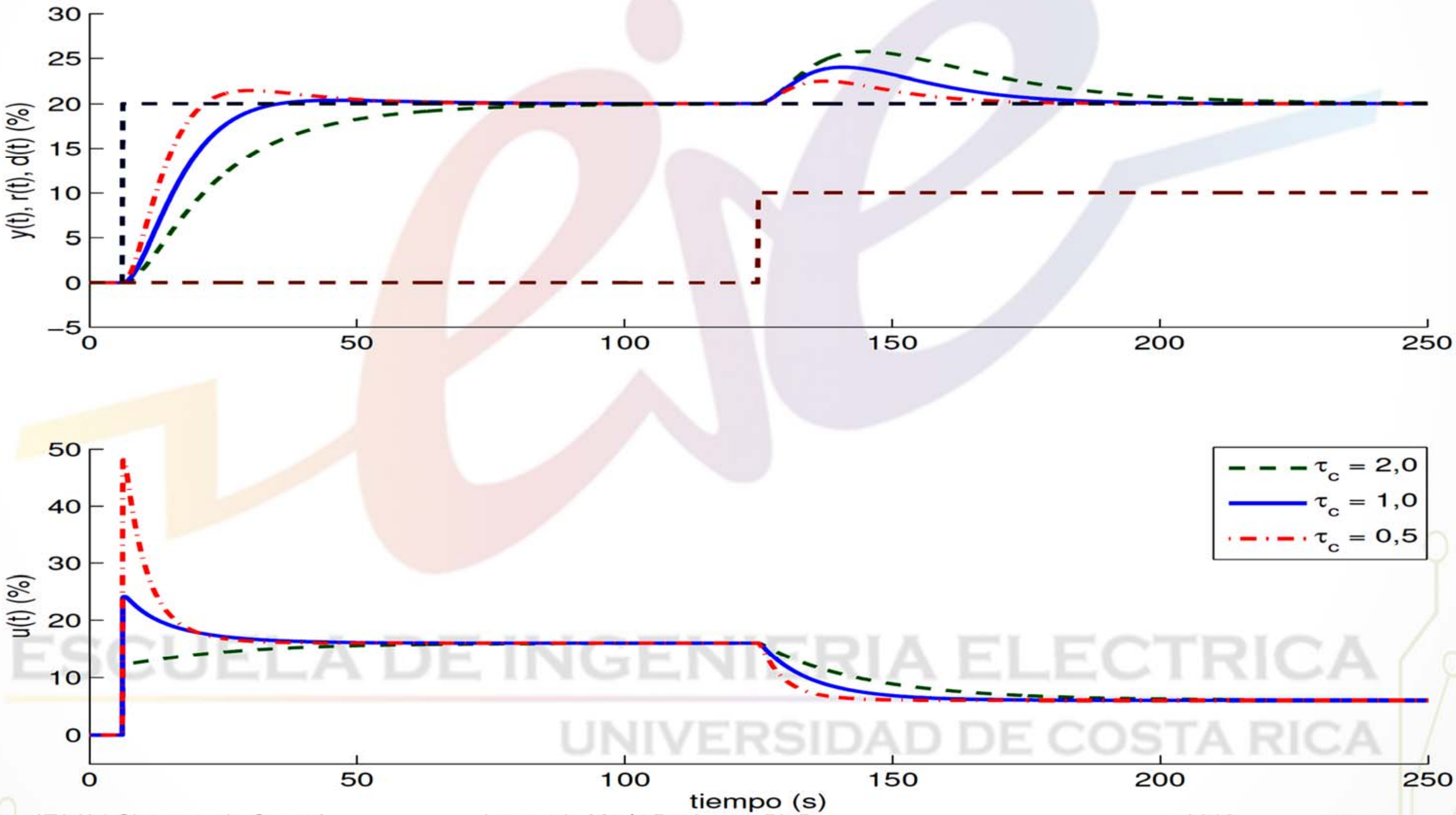
PID Estándar, $\gamma = 1$

τ_c	K_p	T_i, s	T_d,s
2,0	0,6	15,0	3,33
1,0	1,2	15,0	3,33
0,5	2,4	15,0	3,33



Síntesis del Servo Control

- Ejemplo PID Estándar, $\gamma = 0$:



Síntesis del Servo Control

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s)=\dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0=\dfrac{L}{T}$
- $M_{yr}(s)$ deseada ($e_{pr0}=0$): $M_{yr}(s)=\dfrac{e^{-Ls}}{T_c s+1}=\dfrac{e^{-Ls}}{\tau_c Ts+1}$
- El controlador está dado por:

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{M_{yr}(s)}{\left[1-M_{yr}(s)\right]}=\frac{1}{P(s)}\left[\frac{e^{-Ls}}{\tau_c Ts+1-e^{-Ls}}\right]$$

- El tiempo muerto en el denominador debe aproximarse, utilizando una expansión en serie de primer orden: $\boxed{e^{-Ls}=1-Ls}$
- Por lo que el controlador requerido es:

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{P(s)}\frac{M_{yr}(s)}{\left[1-M_{yr}(s)\right]}=\boxed{\frac{1}{P(s)}\left[\frac{e^{-Ls}}{\left(\tau_c T+L\right)s}\right]}$$

Síntesis del Servo Control

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s)=\dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0=\dfrac{L}{T}$
- $M_{yr}(s)$ deseada ($e_{pr0}=0$): $M_{yr}(s)=\dfrac{e^{-Ls}}{T_c s+1}=\dfrac{e^{-Ls}}{\tau_c Ts+1}$
- El controlador está dado por:

$$\Rightarrow C(s)=\frac{1}{P(s)}\left[\frac{e^{-Ls}}{\left(\tau_c T+L\right)s}\right]=\frac{Ts+1}{Ke^{-Ls}}\left(\frac{e^{-Ls}}{\left(\tau_c T+L\right)s}\right)=\frac{1}{K\left(\tau_c+\tau_0\right)}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)$$

- El cual corresponde a un ***PI***: $C(s)=K_p\left(\dfrac{T_i s+1}{T_i s}\right)$

En donde:

$$\boxed{K_pK=\frac{1}{\left(\tau_c+\tau_0\right)} \qquad \frac{T_i}{T}=1 \quad \tau_c=\frac{T_c}{T}, \quad \tau_0=\frac{L}{T}}$$

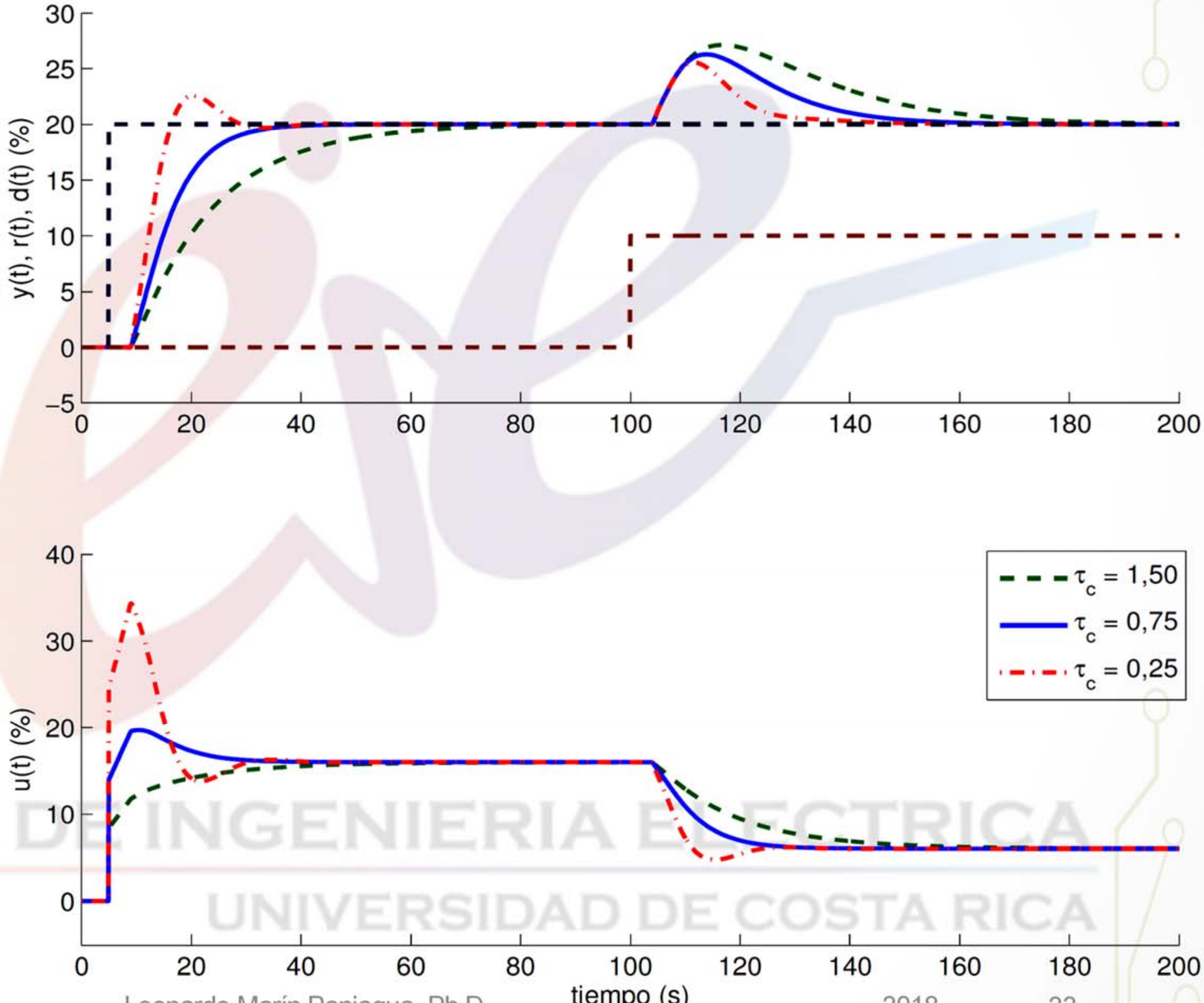
EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Servo Control

- Ejemplo

$$P(s) = \frac{1{,}25\mathrm{e}^{-4s}}{10s+1},\ \tau_o = 0{,}4$$

τ_c	K_p	T_i, s	M_S^r
1,50	0,42	10,0	1,20
0,75	0,70	10,0	1,37
0,25	1,23	10,0	1,80

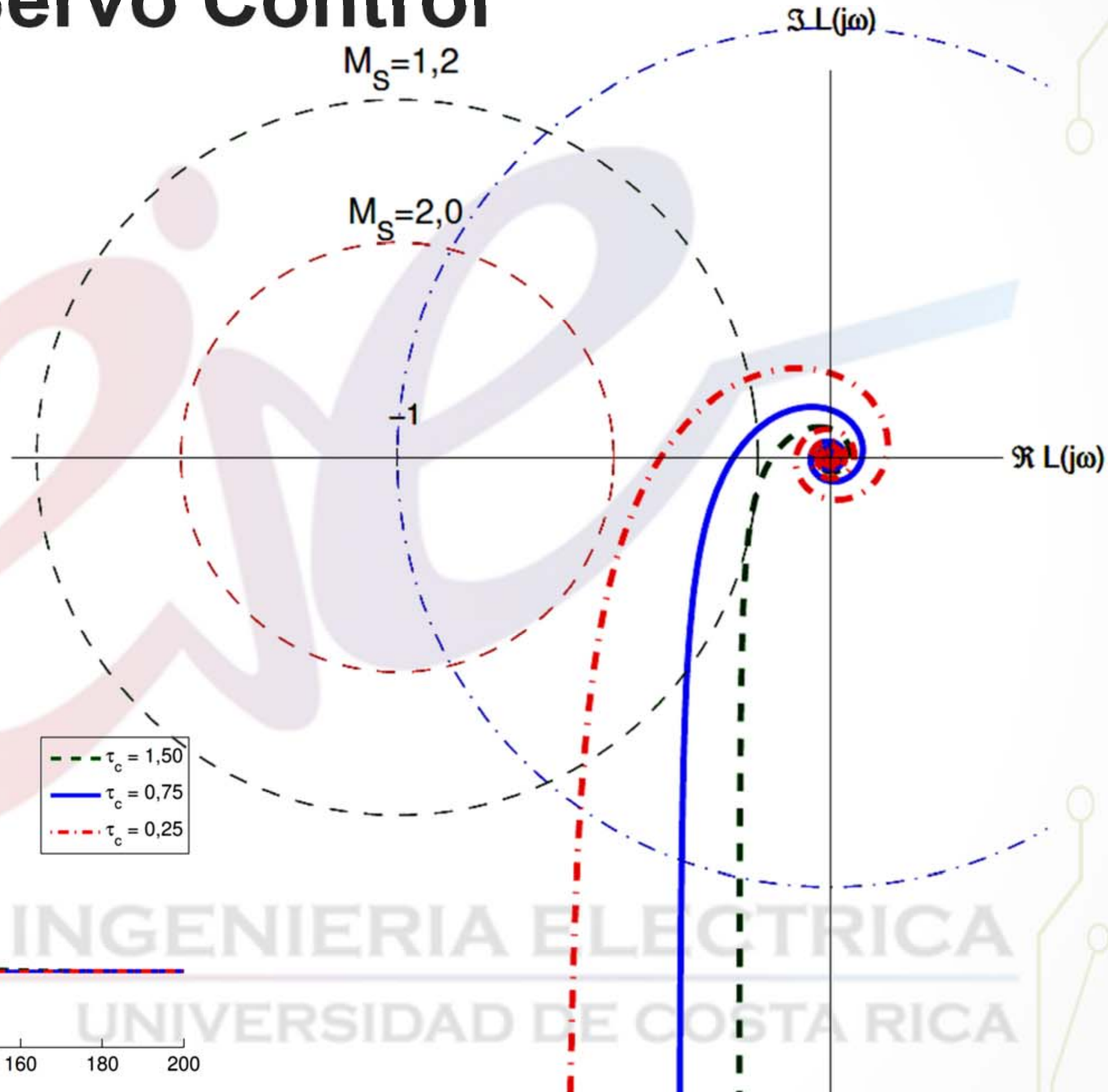


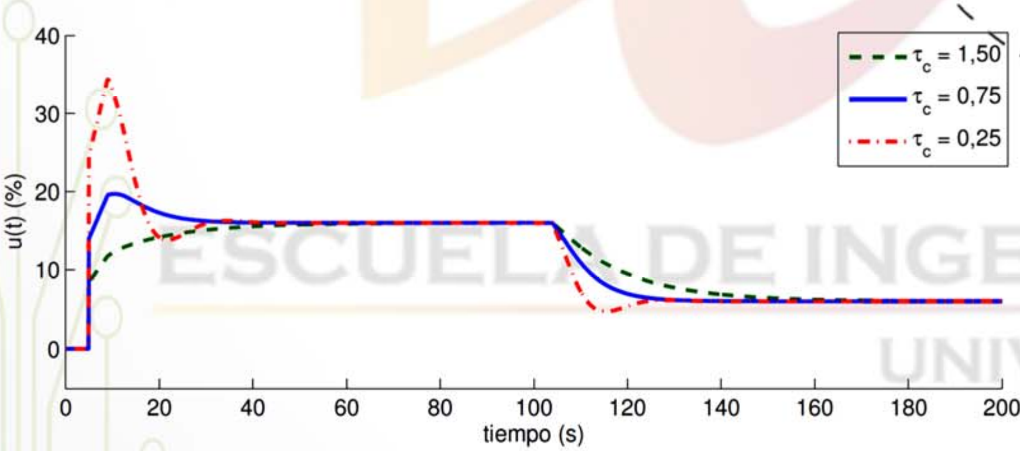
EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Servo Control

- Ejemplo

$$P(s) = \frac{1{,}25e^{-4s}}{10s+1},\ \tau_o = 0{,}4$$





Síntesis del Servo Control

- Planta de Segundo Orden más tiempo muerto: $P(s)=\dfrac{Ke^{-Ls}}{(Ts+1)(aTs+1)}$

$$0\le \tau_0 = L/T,\quad 0\le a\le 1$$

- $M_{yr}(s)$ deseada ($e_{pr0}=0$): $M_{yr}(s)=\dfrac{e^{-Ls}}{\tau_c Ts+1}$
- El controlador está dado por:

$$C(s)=\frac{1}{P(s)}\left[\frac{e^{-Ls}}{(\tau_c T+L)s}\right]=\frac{(Ts+1)(aTs+1)}{Ke^{-Ls}}\left(\frac{e^{-Ls}}{(\tau_c T+L)s}\right)=\frac{1}{K(\tau_c+\tau_0)}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)(aTs+1)$$

- Este controlador corresponde a un ***PID*** tipo serie: $C(s)=K_p'\left(\dfrac{T_i's+1}{T_i's}\right)(T_d's+1)$

En donde:

PID estándar equivalente:

$$K_p'K=\frac{1}{\tau_c+\tau_0},\quad \frac{T_i'}{T}=1,\quad \frac{T_d'}{T}=a \qquad K_pK=\frac{1+a}{\tau_c+\tau_0},\quad \frac{T_i}{T}=1+a,\quad \frac{T_d}{T}=\frac{a}{1+a}$$

$$\alpha'=0{,}1 \qquad \alpha'=0{,}1(1+a)$$

$$\tau_c=T_c/T,\quad \tau_0=L/T$$

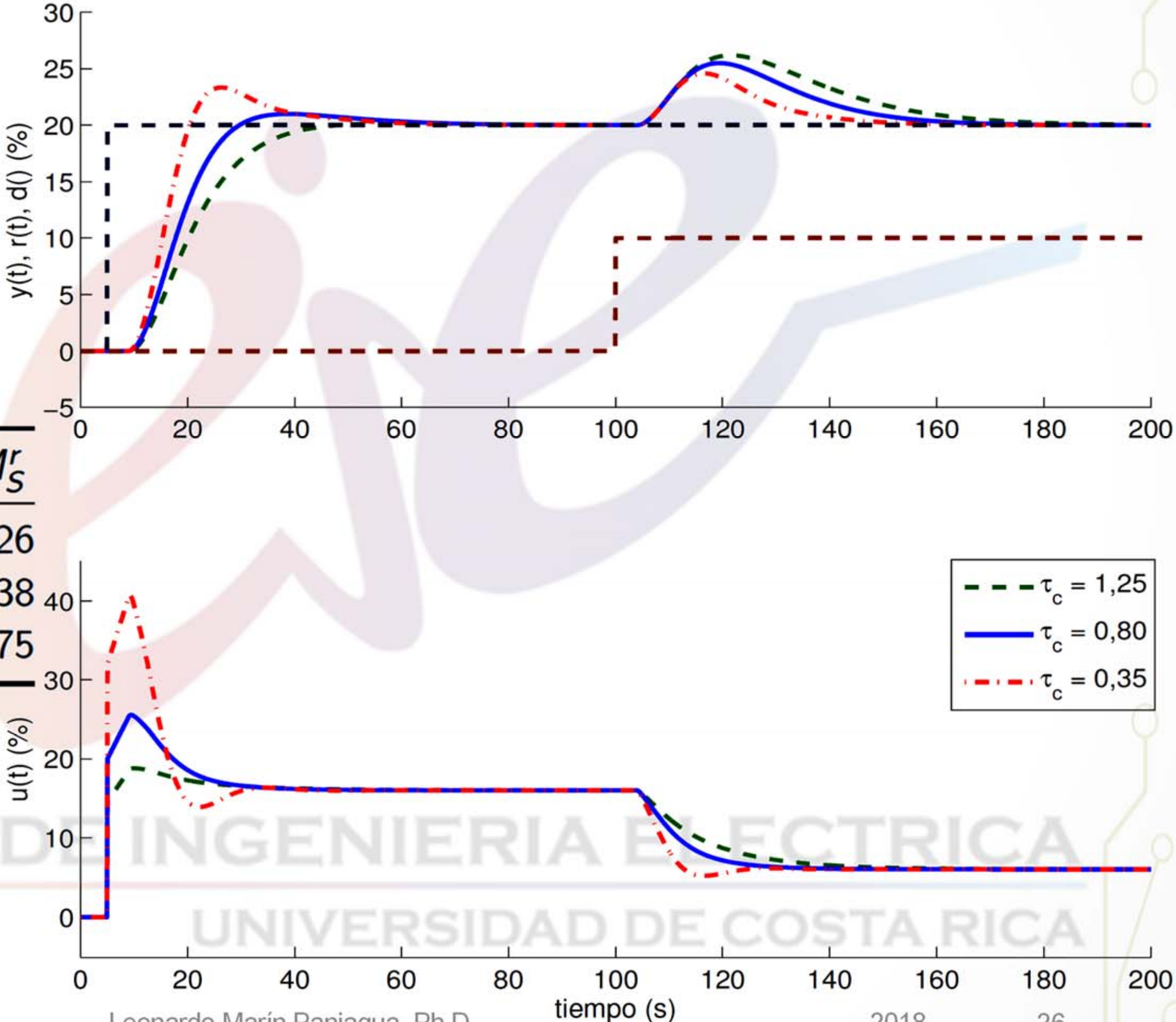
Síntesis del Servo Control

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Ejemplo:

$$P(s) = \frac{1{,}25e^{-4s}}{(10s+1)(5s+1)}$$

τ_c	K_p	T_i, s	T_d,s	M_S^r
1,25	0,73	15,0	3,33	1,26
0,80	1,0	15,0	3,33	1,38
0,35	1,6	15,0	3,33	1,75



Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Son controladores donde se incluye un **factor de peso en el valor deseado** sobre el cual se aplica el modo proporcional.
- Si alguno de los controladores de 1 grado de libertad se sintoniza para que funcione como servomecanismo, su funcionamiento como regulador queda totalmente definido, lo mismo ocurre a la inversa.
- Para un controlador de 2 grados de libertad, como se agrega el factor de peso sobre el valor deseado, se podrá sintonizar el controlador para lograr, con ciertas restricciones, diferentes desempeños como regulador y como servomecanismo.
- El factor de peso del valor deseado se define como $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boxed{0 \leq \beta \leq 1}$$

- Sin embargo, en muchos controladores industriales, el valor de $\boldsymbol{\beta}$ solo puede tener el valor de 0 o 1.

Síntesis del Controlador PID 2GdL

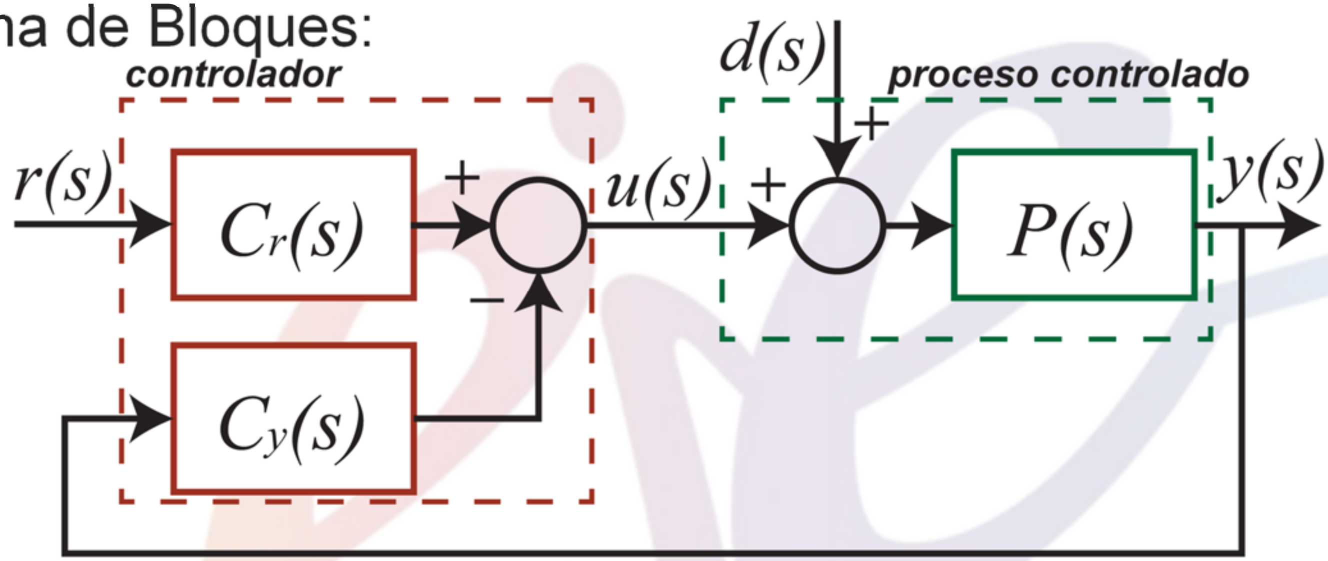
- PID estándar:

$$u(s)=K_p\left(\beta+\frac{1}{T_i s}+\gamma T_d\, s\right)r(s)-K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d\, s\right)y(s) \quad 0\le\beta\le 1$$

- En donde γ permite seleccionar si aplicar la acción derivativa en el error: $\gamma=\{0,1\}$.
- Se tienen entonces 2 controladores:
  - Controlador del valor deseado: $C_r(s)=K_p\left(\beta+\frac{1}{T_i s}+\gamma T_d\, s\right)$
  - Controlador de Realimentación: $C_y(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d\, s\right)$
- El Diagrama de Bloques de este controlador se muestra a continuación

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Diagrama de Bloques:



$$y(s)=\frac{C_r(s)P(s)}{1+C_y(s)P(s)}r(s)+\frac{P(s)}{1+C_y(s)P(s)}d(s)$$

$$y(s)=M_{yr}(s)r(s)+M_{yd}(s)d(s)$$

$$\boxed{p_c(s)=1+C_y(s)P(s)}$$

$$\boxed{M_{yr}(s)=C_rM_{yd}(s)}$$

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Características de desempeño deseadas: **Respuestas sin oscilación y con el menor número posible de parámetros de diseño:**

- Respuesta a un cambio de carga (perturbación) ($e_{pd0} = 0$):

$$M_{yd}(s) = \frac{K_{yd}s}{(T_c s+1)^2} \quad \text{o bien,} \quad M_{yd}(s) = \frac{K_{yd}se^{-Ls}}{(T_c s+1)^2}$$

- Respuesta a un cambio en el valor deseado ($e_{pr0} = 0$):

$$M_{yr}(s) = \frac{1}{T_c s+1} \quad \text{o bien,} \quad M_{yr}(s) = \frac{1}{(T_c s+1)^2}$$

$$M_{yr}(s) = \frac{e^{-Ls}}{T_c s+1} \quad \text{o bien,} \quad M_{yr}(s) = \frac{e^{-Ls}}{(T_c s+1)^2}$$

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- En general se diseña un controlador PID de 2 grados de libertad mediante síntesis de controladores de la siguiente forma:
  1. Se obtiene la FT de la planta
  2. Especificada una $M_{yd}(s)$ deseada para el regulador se obtienen los parámetros del controlador de realimentación requerido $C_y(s)$
  3. Con estos parámetros se seleccionan los parámetros libres del controlador del valor deseado $C_r(s)$ para así modificar la $M_{yr}(s)$ del servomecanismo. Para el caso de síntesis se puede hacer uso de la expresión: $\boxed{M_{yr}(s) = C_r M_{yd}(s)}$
- Se aplicará la síntesis de controladores al PID de 2 grados de libertad iniciando por la síntesis del control regulatorio.

Síntesis del Regulador

- FTLC del Regulador para el PID de 2 Grados de Libertad:

$$M_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + C_y(s)P(s)}$$

- Si se tiene una planta ***P(s)*** determinada y se desea que $M_{yd}(s)$ tenga cierta forma (que determina su comportamiento), ¿Cuál es el controlador necesario para obtenerla?

- Se podría resolver $C_y(s)$ desde $M_{yd}(s)$:

$$M_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + C_y(s)P(s)} \Rightarrow M_{yd}(s) + M_{yd}(s)C_y(s)P(s) = P(s)$$

$$\Rightarrow C_y(s) = \frac{P(s) - M_{yd}(s)}{M_{yd}(s)P(s)} = \boxed{\frac{1}{M_{yd}(s)} - \frac{1}{P(s)}}$$

- Procedimiento adecuado: suponer una estructura de ***C(s)*** y junto con el ***P(s)*** obtener un ***M$_{yd}$(s)*** que se deberá igualar al ***M$_{yd}$(s)*** deseado.

- Se debe comprobar que el controlador sea físicamente realizable

Síntesis del Regulador

- Planta de Primer Orden: $P(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$
- $M_{yd}(s)$ deseada (***respuesta sin oscilaciones, $e_{pd0}=0$***):

$$M_{yd}(s)=\frac{K_{yd}s}{\left(T_c s+1\right)^2}=\frac{K_{yd}s}{T_c^2 s^2+2T_c s+1} \qquad \begin{array}{c} T_c=\tau_c T \\ 0<\tau_c<1 \end{array}$$

- Controlador a utilizar tipo PI: $C_y(s)=K_p\left(\dfrac{T_i s+1}{T_i s}\right)$
- $M_{yd}(s)$ obtenida a partir de **P(s)** y **Cy(s)** se iguala a la $M_{yd}(s)$ deseada:

$$M_{yd}(s)=\frac{\left(T_i/K_p\right)s}{\left(\dfrac{T_i T}{K_p K}\right)s^2+T_i\left(\dfrac{1+K_p K}{K_p K}\right)s+1}=\frac{K_{yd}s}{T_c^2 s^2+2T_c s+1}$$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Regulador

- Planta de Primer Orden + Controlador tipo PI

$$M_{yd}(s)=\frac{\left(T_i/K_p\right)s}{\left(\frac{T_iT}{K_pK}\right)s^2+T_i\left(\frac{1+K_pK}{K_pK}\right)s+1}=\frac{K_{yd}s}{T_c^2s^2+2T_cs+1}$$

- Despejando los parámetros del controlador:

$$K_{yd}=T_i/K_p$$

Normalizando $T_c=\tau_cT$

$$K_p=\frac{2T-T_c}{KT_c}\quad\Rightarrow\quad K_pK=\frac{2-\tau_c}{\tau_c}$$

$$T_i=\frac{T_c\left(2T-T_c\right)}{T}\quad\Rightarrow\quad \frac{T_i}{T}=\tau_c\left(2-\tau_c\right)$$

$$\Rightarrow K_{yd}=T_i/K_p=K\tau_c^2T$$

Para garantizar que los parámetros del controlador sean positivos.

$$K_p>0,T_i>0$$

$$\Rightarrow\boxed{0<\tau_c<2}$$

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Planta de Primer Orden + Controlador tipo PI
- Utilizando los parámetros obtenidos para el regulador se observa el comportamiento del Servomecanismo.
- La FT del controlador del valor deseado: $C_r(s) = K_p\left(\beta + \frac{1}{T_i s} + \gamma T_d s\right)$
- Para el controlador PI no se tiene modo derivativo, por lo que $\gamma = 0$:
- Entonces el controlador: $C_r(s) = K_p\left(\beta + \frac{1}{T_i s}\right) = K_p\left(\frac{\beta T_i s + 1}{T_i s}\right)$
- Se tiene que $M_{yr}(s)$ viene dada por:

$$M_{yr}(s) = C_r M_{yd}(s) = K_p\left(\frac{\beta T_i s + 1}{T_i s}\right)\frac{K_{yd}s}{(T_c s + 1)^2} = \boxed{\frac{\beta T_i s + 1}{(T_c s + 1)^2}}$$

$$K_{yd} = T_i / K_p$$

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Planta de Primer Orden + Controlador tipo PI
- Utilizando los parámetros obtenidos para el regulador se observa el comportamiento del Servomecanismo:

$$M_{yr}(s) = \frac{\beta T_i s + 1}{\left(T_c s + 1\right)^2} = \frac{\beta T_i s + 1}{\left(\tau_c T s + 1\right)^2}$$

- Si se desea simplificar $M_{yr}(s)$, se puede hacer que el cero del controlador cancele un polo de lazo cerrado:

$$\Rightarrow \beta T_i = T_c \Rightarrow \beta = \frac{T_c}{T_i} = \frac{\tau_c T}{T_i}$$

- Sustituyendo el T_i calculado para el regulador se obtiene que:

$$\Rightarrow \beta = \frac{\tau_c T}{T_i} = \frac{\tau_c T}{\tau_c T\left(2 - \tau_c\right)} = \boxed{\frac{1}{2 - \tau_c}} \quad \boxed{0 < \tau_c \leq 1}$$

- Cuando **no** se desea la cancelación $\Rightarrow \boxed{\beta = 1}$ $\boxed{0 < \tau_c < 2}$

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Resumen, síntesis del controlador ***PI de dos grados de libertad***:

$$P(s)=\frac{K}{Ts+1}\qquad C_y(s)=K_p\left(\frac{T_i s+1}{T_i s}\right)\qquad C_r(s)=K_p\left(\frac{\beta T_i s+1}{T_i s}\right)$$

$$K_pK=\frac{2-\tau_c}{\tau_c},\qquad \frac{T_i}{T}=\tau_c\left(2-\tau_c\right),\quad \gamma=0,\ \beta=\frac{1}{2-\tau_c}\quad \text{o bien: } \beta=1$$

$\tau_c=T_c/T$

Cancelación polo servo $0<\tau_c\le 1$

$0<\tau_c<2$ ***Sin cancelar el polo servo***

- Respuesta del sistema de control, sin cancelación de polos:

$$\boxed{y(s)=\frac{\beta T_i s+1}{\left(\tau_c Ts+1\right)^2}r(s)+\frac{K\tau_c^2 Ts}{\left(\tau_c Ts+1\right)^2}d(s)}\qquad 0<\tau_c<2$$

- Respuesta del sistema de control, con cancelación de polos:

$$\beta=\frac{1}{2-\tau_c}\Rightarrow\qquad \boxed{y(s)=\frac{1}{\tau_c Ts+1}r(s)+\frac{K\tau_c^2 Ts}{\left(\tau_c Ts+1\right)^2}d(s)}$$

$$0<\tau_c<1$$

$$\beta=\min\left\{\frac{1}{2-\tau_c},1\right\}$$

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Planta de Segundo Orden: $P(s) = \dfrac{K}{(Ts+1)(aTs+1)} \qquad 0 \le a \le 1$
- La $M_{yd}(s)$ deseada está dada por: $M_{yd}(s) = \dfrac{K_{yd}s}{(\tau_c Ts+1)^2 (0{,}10\tau_c Ts+1)}$
- Se obtienen los parámetros del controlador ***PID*** estándar:

$$K_pK = \frac{21a-\tau_c^2}{\tau_c^2}, \quad \frac{T_i}{T} = \frac{\tau_c\left(21a-\tau_c^2\right)}{10a}, \quad \frac{T_d}{T} = \frac{\tau_c\left(12a-(1+a)\tau_c\right)}{21a-\tau_c^2}$$

$$\beta = \min\left\{\frac{\tau_c T}{T_i}, 1\right\}, \quad \gamma = 0, \quad 0 < \tau_c < \min\left\{4{,}58\sqrt{a}, \frac{12a}{1+a}\right\}$$

$\tau_c = T_c/T$

- Si la planta es polo doble: $a = 1$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s) = \dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0 = \dfrac{L}{T}$
- La $M_{yd}(s)$ deseada está dada por: $M_{yd}(s) = \dfrac{K_{yd}se^{-Ls}}{(\tau_c Ts+1)^2}$
- Se obtienen los parámetros del controlador ***PI*** 2GdL, utilizando la aproximación para el tiempo muerto: $e^{-Ls} = 1 - Ls$

$$K_pK = \frac{\tau_c(2-\tau_c)+\tau_0}{(\tau_c+\tau_0)^2}, \quad \frac{T_i}{T} = \frac{\tau_c(2-\tau_c)+\tau_0}{1+\tau_0}$$

$$\tau_c = T_c/T \qquad \beta = \min\left\{\frac{\tau_c T}{T_i}, 1\right\}, \quad \max\left\{\frac{1}{2}, \tau_{c\min}\right\} \leq \tau_c \leq 1{,}50 + 0{,}3\tau_0$$

$$\tau_0 = \frac{L}{T} \leq 1 \qquad \tau_{c\min}(M_s, \tau_0) = a(M_s) + b(M_s)\tau_0$$

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto y controlador PI 2GdL:

$$\max\left\{\frac{1}{2},\tau_{c\min}\right\}\leq\tau_c\leq 1,50+0,3\tau_0 \qquad \tau_{c\min}\left(M_s,\tau_0\right)=\underbrace{a\left(M_s\right)}_{\boldsymbol{a}}+\underbrace{b\left(M_s\right)}_{\boldsymbol{b}}\tau_0$$

- Donde M_s es la sensibilidad máxima deseada del sistema:

M_s	a	b
1,2	0,4836	1,8982
1,4	0,4156	0,9198
1,6	0,3441	0,6659
1,8	0,3264	0,4853
2	0,3064	0,3622

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Ecuación General:

$$\max\left\{\frac{1}{2},\tau_{c\min}\right\}\leq\tau_c\leq 1,50+0,3\tau_0 \qquad \tau_{c\min}\left(M_s,\tau_0\right)=k_{11}+\left(\frac{k_{12}}{k_{13}}\right)\tau_0$$

$$k_{11}=1{,}384-1{,}063M_S+0{,}262M_S^2$$
$$k_{12}=-1{,}915+1{,}415M_S-0{,}077M_S^2$$
$$k_{13}=4{,}382-7{,}396M_S+3{,}000M_S^2$$

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Planta de Segundo Orden más tiempo muerto: $P(s) = \dfrac{Ke^{-Ls}}{(Ts+1)(aTs+1)}$, $0 \le a \le 1$
- La $M_{yd}(s)$ deseada está dada por: $M_{yd}(s) = \dfrac{K_{yd}se^{-Ls}}{(\tau_c Ts+1)^2(0{,}10\tau_c Ts+1)}$
- Se obtienen los parámetros del controlador ***PID*** estándar:

$$K_pK = \frac{10\tau_i}{21\tau_c + 10\tau_0 - 10\tau_i}, \quad \beta = \min\left\{\frac{\tau_c T}{T_i}, 1\right\}, \quad \gamma = 0, \quad \tau_c = T_c/T$$

$$\tau_i = \frac{T_i}{T} = \frac{(21\tau_c + 10\tau_0)\left[(1+a)\tau_0 + a\right] - \tau_c^2(\tau_c + 12\tau_0)}{10(1+a)\tau_0 + 10a + 10\tau_0^2},$$

$$\frac{T_d}{T} = \frac{12\tau_c^2 + 10\tau_i\tau_0 - (1+a)(21\tau_c + 10\tau_0 - 10\tau_i)}{10\tau_i}, \quad \tau_{c\min} \le \tau_c \le 1{,}25 + 2{,}25a$$

Síntesis del Controlador PID 2GdL

- Robustez: $\tau_{c\min} \leq \tau_c \leq 1,25 + 2,25a \qquad \tau_{c\min}\left(M_s, a\right) = k_{21} + k_{22}a^{k_{23}}$

$$k_{21} = 2,442 - 2,219M_S + 0,515{M_S}^2$$

$$k_{22} = 10,518 - 8,990M_S + 2,203{M_S}^2$$

$$k_{23} = 0,949 - 0,197M_S$$

- Respuesta del sistema de control:

$$y(s) = \frac{(\beta T_i s + 1)\,\mathrm{e}^{-Ls}}{(\tau_c T s + 1)^2(0,1\tau_c T s + 1)} r(s) + \frac{K_{yd} s \mathrm{e}^{-Ls}}{(\tau_c T s + 1)^2(0,1\tau_c T s + 1)} d(s)$$

$$K_{yd} = \frac{K_p T[(21\tau_c + 10\tau_o)\tau_o^2 + \tau_c^2(\tau_c + 12\tau_o)]}{10[(1 + a)\tau_o + a + \tau_o^2]}$$

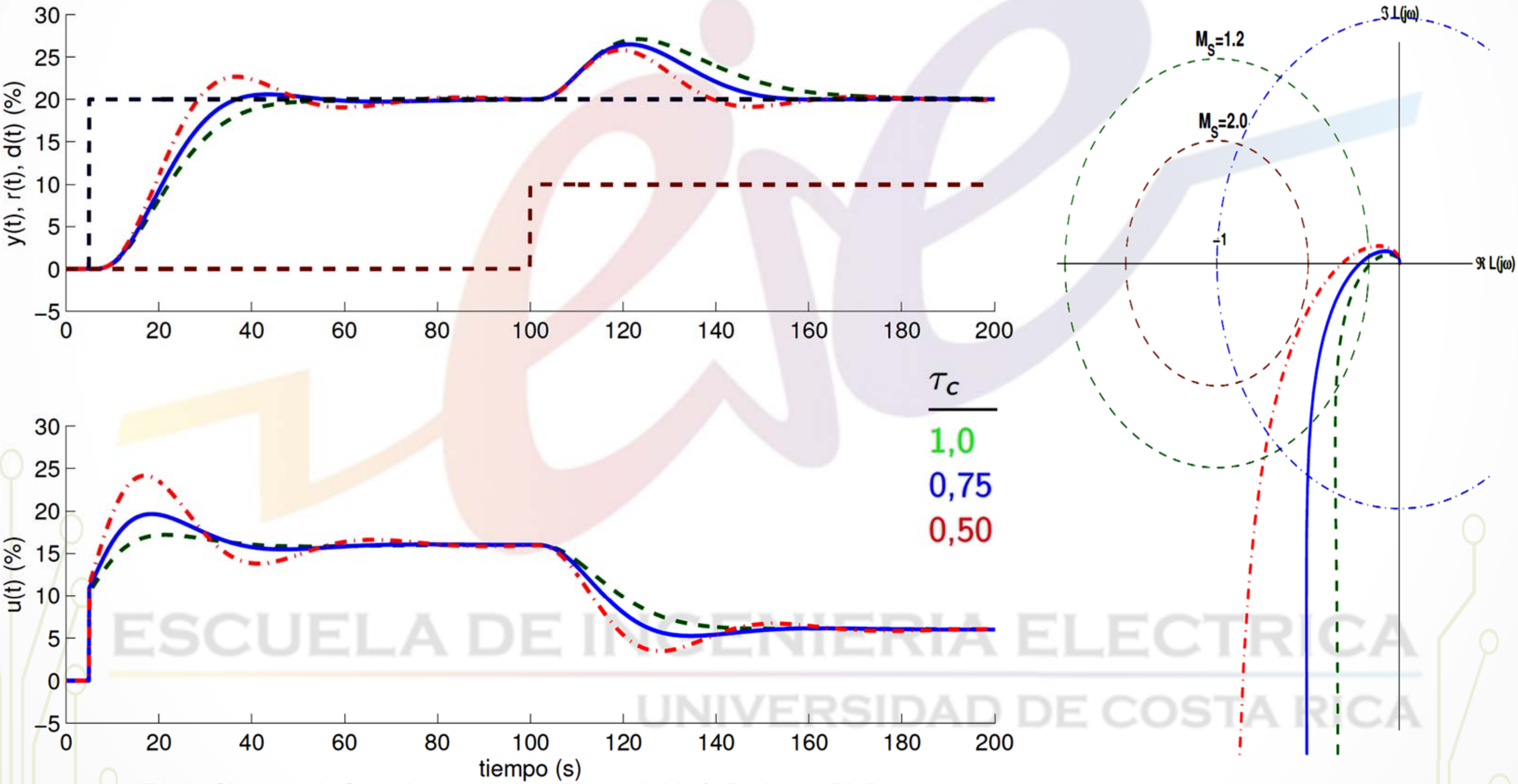
Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Ejemplo: Planta de Primer Orden más tiempo muerto + PI 2GdL
- Proceso Controlado: $P(s) = \dfrac{1,25}{(10s+1)(5s+1)(2s+1)(s+1)(0,5s+1)}$
- Modelo: $P_m(s) = \dfrac{1,25e^{-6,79s}}{12,29s+1}, \quad \tau_0 = 0,55$
- Parámetros del controlador PI2 y robustez del lazo de control:

τ_c	K_p	T_i, s	β	M_S^r
1,0	0,52	12,3	1,0	1,36
0,75	0,70	11,8	0,78	1,51
0,50	0,94	10,3	0,60	1,91

Síntesis del Controlador PI 2GdL

- Ejemplo: Planta de Primer Orden más tiempo muerto + PI 2GdL



Reducción del Orden del Modelo: Regla Half Rule

- Fue propuesto por Skogestad en 2003
- Este método intenta aproximar un sistema de orden alto mediante un sistema de primer o segundo orden más tiempo muerto
- El único requisito del sistema es que todos sus polos sean reales
- Lo que se hace es aproximar los polos no dominantes mediante retardos puros: Se debe reunir todas las constantes de tiempo rápidas (pequeñas) del sistema en un solo retardo
- El método que presenta Skogestad es útil para efectos de control, pero no representa apropiadamente el efecto de los ceros en el sistema.
- Para efectos de este curso, sólo se utilizar la Half Rule para los polos del sistema. Los ceros de fase mínima se conservarán en el modelo reducido.

Reducción del Orden del Modelo: Regla Half Rule

- Regla Half Rule de Skogestad:

$$P_o(s) = \frac{K e^{-L_o s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)\ldots(T_n s + 1)}, \quad T_1 \geq T_2 \geq \cdots \geq T_n$$

- Aproximación de POMTM

$$P_1(s) = \frac{K e^{-Ls}}{Ts + 1}, \quad T = T_1 + \frac{T_2}{2}, \; L = L_o + \frac{T_2}{2} + \sum_{j=3}^{n} T_j$$

- Aproximación de SOMTM

$$P_1(s) = \frac{K e^{-Ls}}{(T_1' s + 1)(T_2' s + 1)}$$

$$T_1' = T_1, \; T_2' = T_2 + \frac{T_3}{2}, \; L = L_o + \frac{T_3}{2} + \sum_{i=4}^{n} T_j$$

Reducción del Orden del Modelo: Regla Half Rule

- Ejemplo "Regla de la mitad" de Skogestad:

$$\boxed{P_o(s) = \frac{1.2}{(0.125s+1)(0.25s+1)(0.5s+1)(s+1)(2s+1)(4s+1)(8s+1)(16s+1)}}$$

- Aproximación de POMTM

$$T_1 = 16 + 0.5(8) = 20$$

$$L = 0 + 0.5(8) + (4 + 2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125) = 11.875$$

$$\boxed{P_1(s) = \frac{1.2e^{-11.875s}}{20s+1}}$$

- Aproximación de SOMTM

$$T_1 = 16$$

$$T_2 = 8 + 0.5(4) = 10$$

$$L = 0 + 0.5(4) + (2 + 1 + 0.5 + 0.25 + 0.125) = 5.875$$

$$\boxed{P_2(s) = \frac{1.2e^{-5.875s}}{(16s+1)(10s+1)}}$$

Reducción del Orden del Modelo: Regla Half Rule

- Ejemplo "Regla de la mitad" de Skogestad: