UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Estabilidad Absoluta: LGR

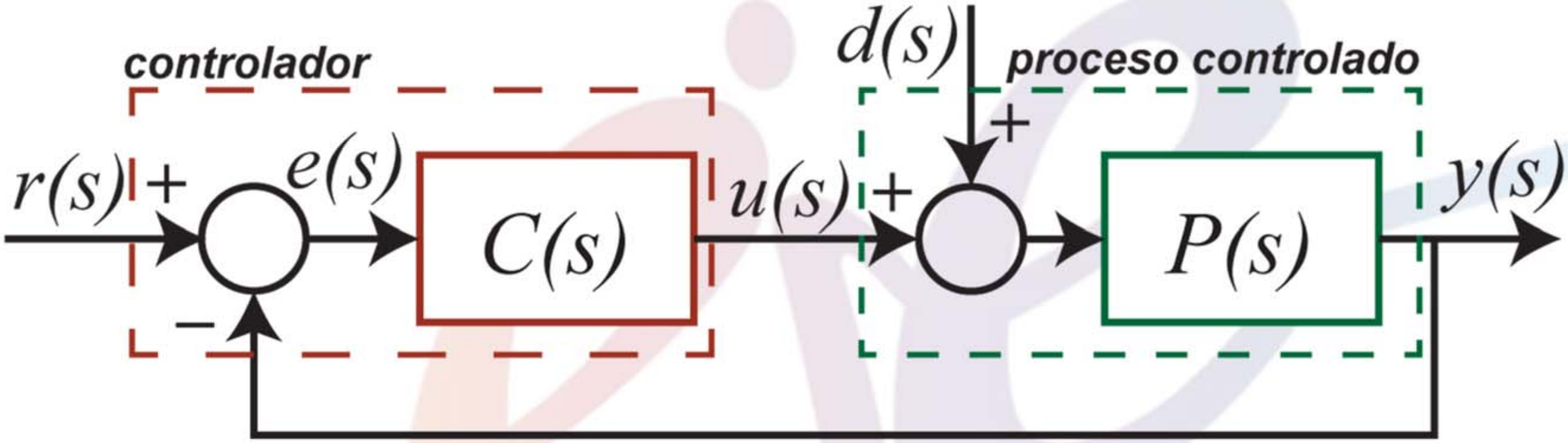
Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.
leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Estabilidad Absoluta

- Lazo de Control Realimentado Monovariable:



- Función de Transferencia Lazo Cerrado:

$$y(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} r(s) + \frac{P(s)}{1+C(s)P(s)} d(s)$$

- Polinomio Característico

$$p_c(s) = 1 + C(s)P(s) = 1 + L(s)$$

Lugar geométrico de las Raíces LGR

- La estabilidad y el comportamiento dinámico del sistema de control, está determinado por las raíces de la ecuación característica del sistema:

$$p_c(s) = 1 + C(s)P(s) = 1 + L(s)$$

(*localización de los polos de lazo cerrado*)

- Normalmente se desea determinar como se ve afectada la localización de los polos de lazo cerrado al variar un parámetro del sistema, usualmente la ganancia del controlador ***Kp***.

$$p_c(s) = 1 + K_p C'(s)P(s)$$

Lugar geométrico de las Raíces LGR

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- El Método del ***Lugar Geométrico de las Raíces*** (**LGR**) desarrollado por Evans es una técnica ***gráfica*** que permite obtener las **raíces** de la ecuación característica de lazo cerrado del sistema de control, en función de un parámetro, sin necesidad de resolverla.

- Tiene como base la relación que existe entre los polos de la función de transferencia de lazo cerrado y los polos y ceros de la función de transferencia de lazo abierto.

$$p_c(s) = 1 + K_p C'(s)P(s) = 0 \Rightarrow K_p C'(s)P(s) = -1$$

Lugar geométrico de las Raíces LGR

- Condición de Magnitud y Angulo

$$p_c(s) = 1 + K_p C'(s)P(s) = 0 \Rightarrow \boxed{K_p C'(s)P(s) = -1}$$

Para satisfacer la igualdad se deben cumplir 2 condiciones:

- La magnitud debe ser unitaria:

$$\left|K_p C'(s)P(s)\right| = 1$$

- El ángulo (argumento) debe ser múltiplo impar de 180°

$$\angle K_p C'(s)P(s) = \left(2k+1\right)180^{\circ}$$

Lugar geométrico de las Raíces LGR

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Condición de Magnitud y Angulo

  Si la FT de Lazo Abierto está dada por:

$$K_p C'(s)P(s) = \frac{\boxed{K_p K'}\left(s+z_1\right)\left(s+z_2\right)\cdots\left(s+z_m\right)}{\left(s+p_1\right)\left(s+p_2\right)\cdots\left(s+p_n\right)} = \boxed{K} C'(s)P'(s)$$

$$\boxed{K = K_p K'}$$

Entonces se definen las condiciones de Magnitud y Ángulo:

Condición de Magnitud:

$$\left|C'(s)P'(s)\right| = \frac{1}{|K|} = \frac{\prod_{i=1}^{m}\left|s+z_i\right|}{\prod_{j=1}^{n}\left|s+p_j\right|}$$

Condición de Ángulo:

$$\angle C'(s)P'(s) = \left(2k+1\right)180^{o}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\angle\left(s+z_i\right) - \sum_{j=1}^{n}\angle\left(s+p_j\right)$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

Lugar geométrico de las Raíces LGR

- El lugar de las raíces puede construirse al encontrar todos los puntos en el plano complejo ***S*** que satisfagan la Condición de ángulo, y los valores de ***K*** a lo largo del lugar pueden determinarse de la Condición de magnitud.

- Para construir el LGR se debe:
  1. Escribir la FT de lazo abierto como un **producto** de polos y ceros.
  2. **Ubicar** en el plano complejo los polos y ceros de lazo abierto
  3. Aplicar las **reglas** de construcción del LGR que se exponen a continuación

Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #1** – Simetría del LGR:

  El lugar de las raíces es simétrico respecto al **eje real**.

- **Regla #2** – Inicio ***K=0*** y Final ***K* = ∞** del LGR:
  - Los polos de lazo abierto son los puntos para ***K=0*** del **LGR** y los ceros de lazo abierto son los puntos ***K* → ∞** del **LGR**.
  - Cuando hay mas polos ***(n)*** de lazo abierto que ceros ***(m)***, entonces ***n-m*** ramas del lugar terminarán en el infinito.

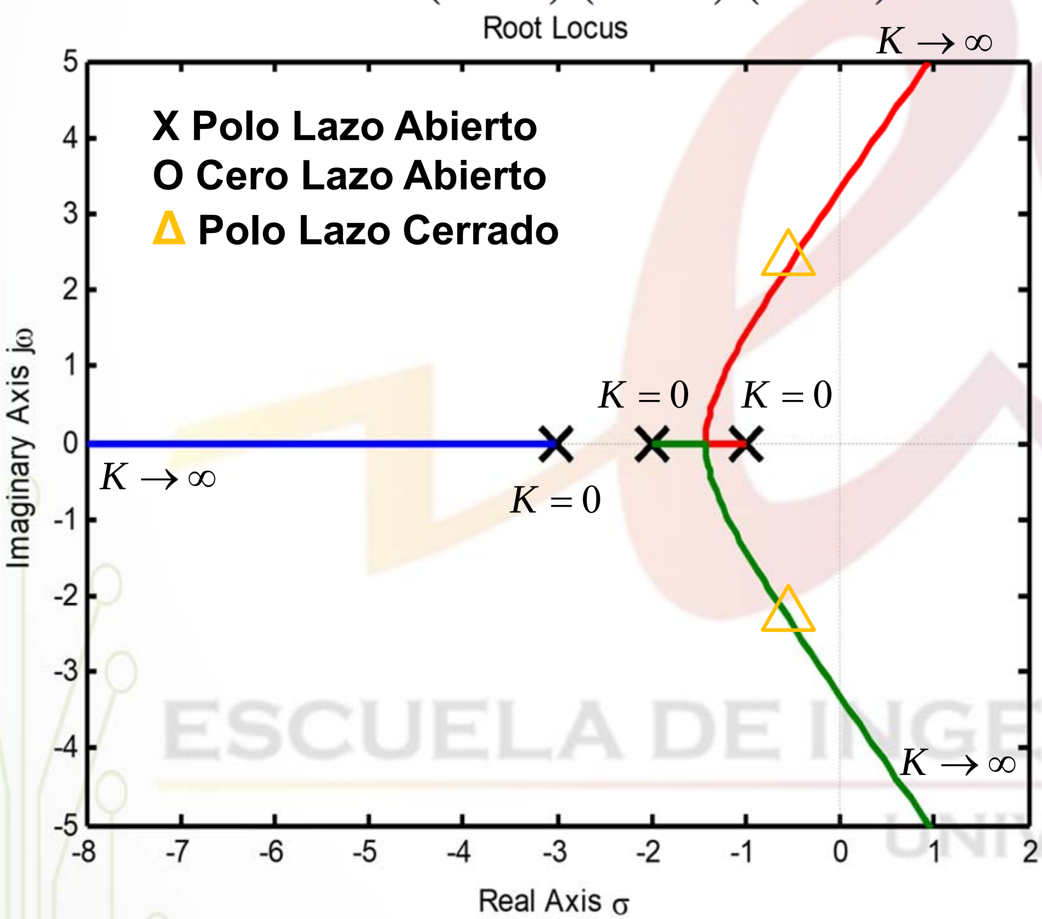
- **Regla #3** – Número de ramas del LGR:
  - El número de ramas del **LGR** = número de **polos** de lazo cerrado = al **orden** de la ecuación característica
  - Cada rama del lugar de las raíces describe el movimiento de un polo de lazo cerrado al variar el parámetro ***K***.

Reglas de Construcción del LGR

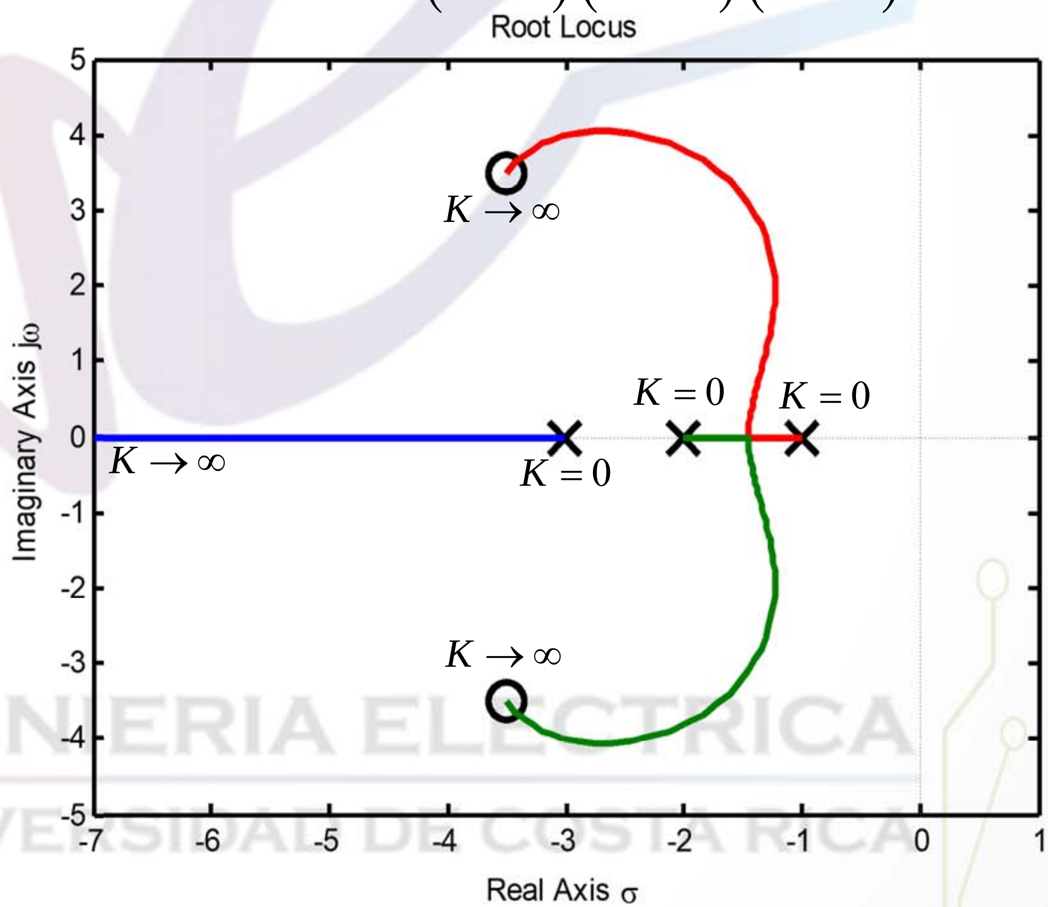
EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Ejemplo: **Reglas #1, #2 y #3**

$$L(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



$$L(s)=\frac{K\left(s^2+7s+24{,}5\right)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #4** – Lugar de las raíces sobre el eje real:

  Un punto sobre el eje real forma parte del **LGR**, si el número de polos y ceros de lazo abierto a su derecha es impar.

- **Regla #5** – Ángulos de las asíntotas:

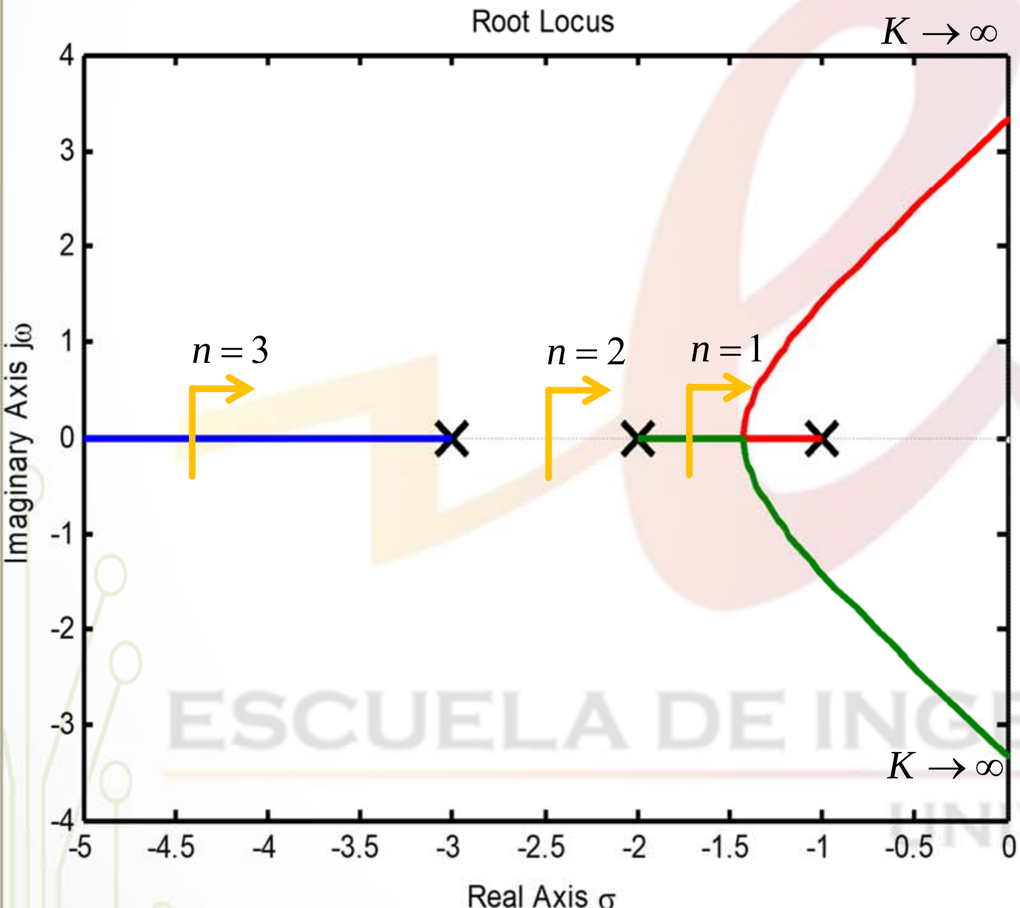
  Para valores grandes de **s**, el lugar de las raíces que tienden a infinito es asintótico a líneas rectas llamadas **asíntotas**, cuyos ángulos están dados por:

$$\alpha_{ak} = \frac{(2k+1)180^{\circ}}{n-m}, \qquad k = 0,1,2,\cdots(n-m-1)$$

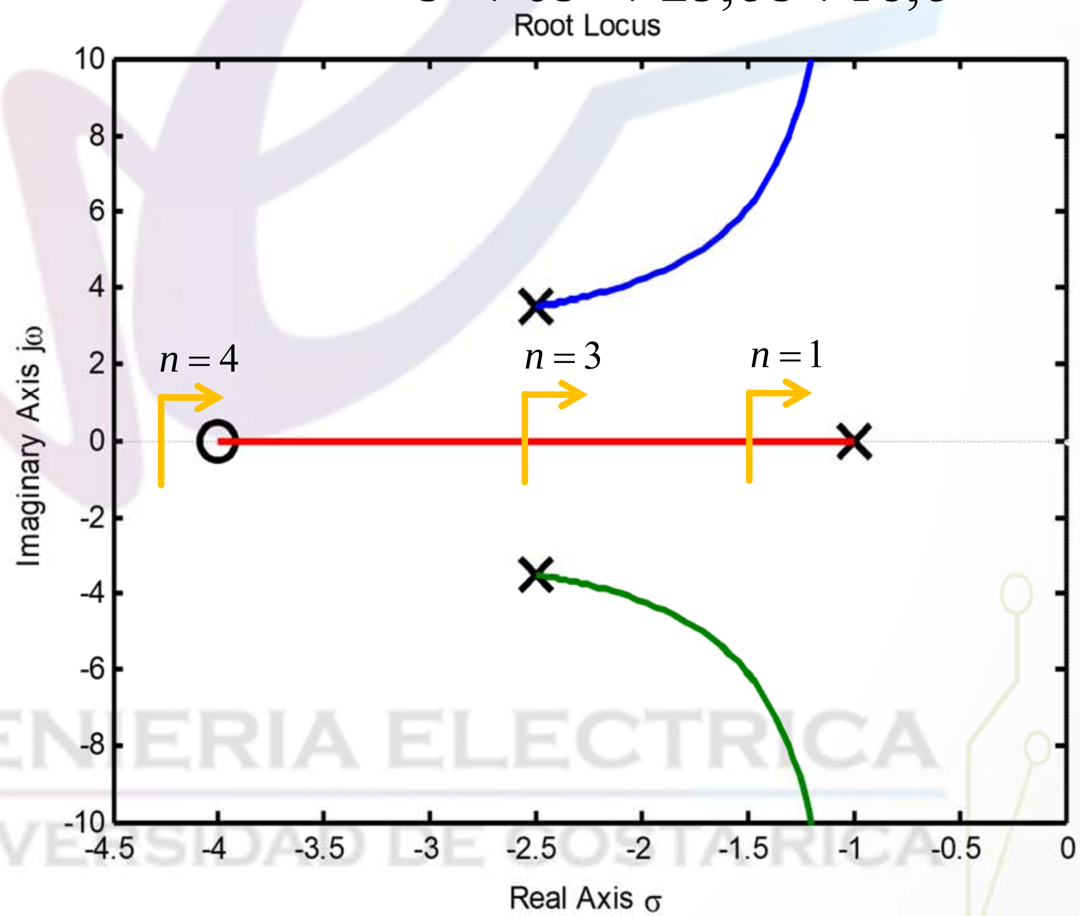
Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #4**

$$L(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$



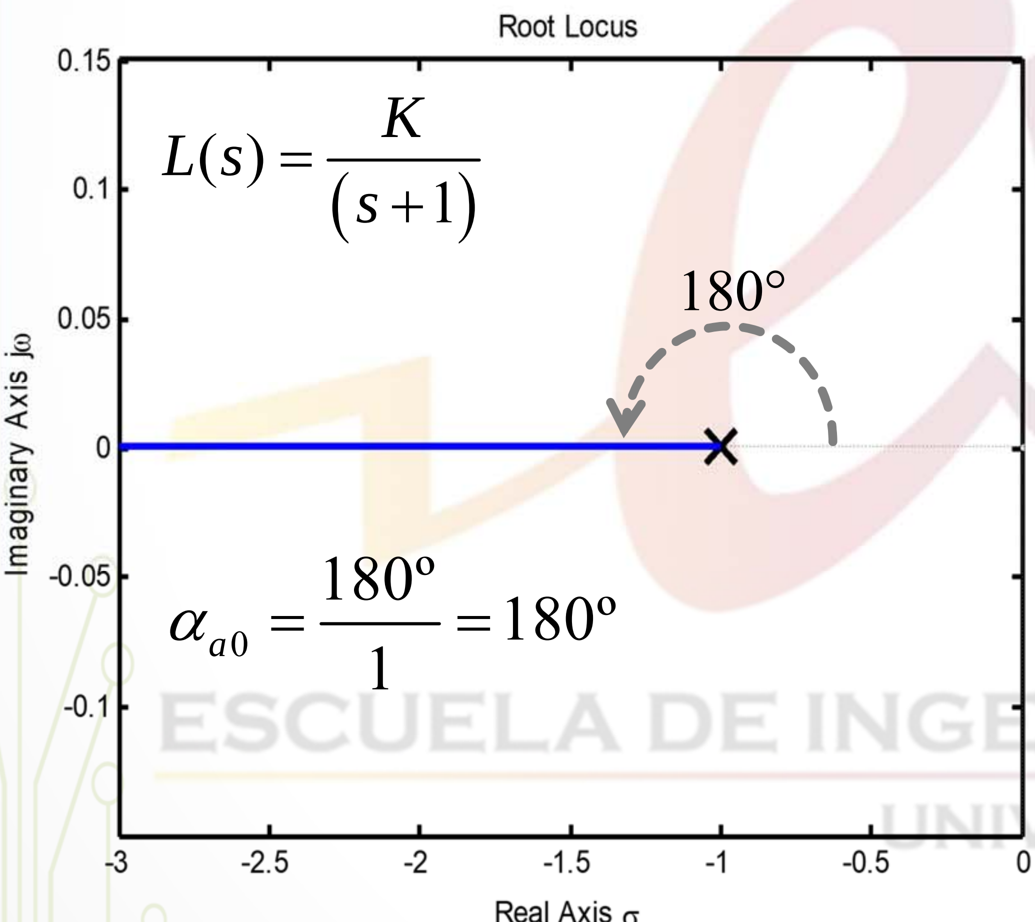
$$L(s)=\frac{K(s+4)}{s^3+6s^2+23,5s+18,5}$$

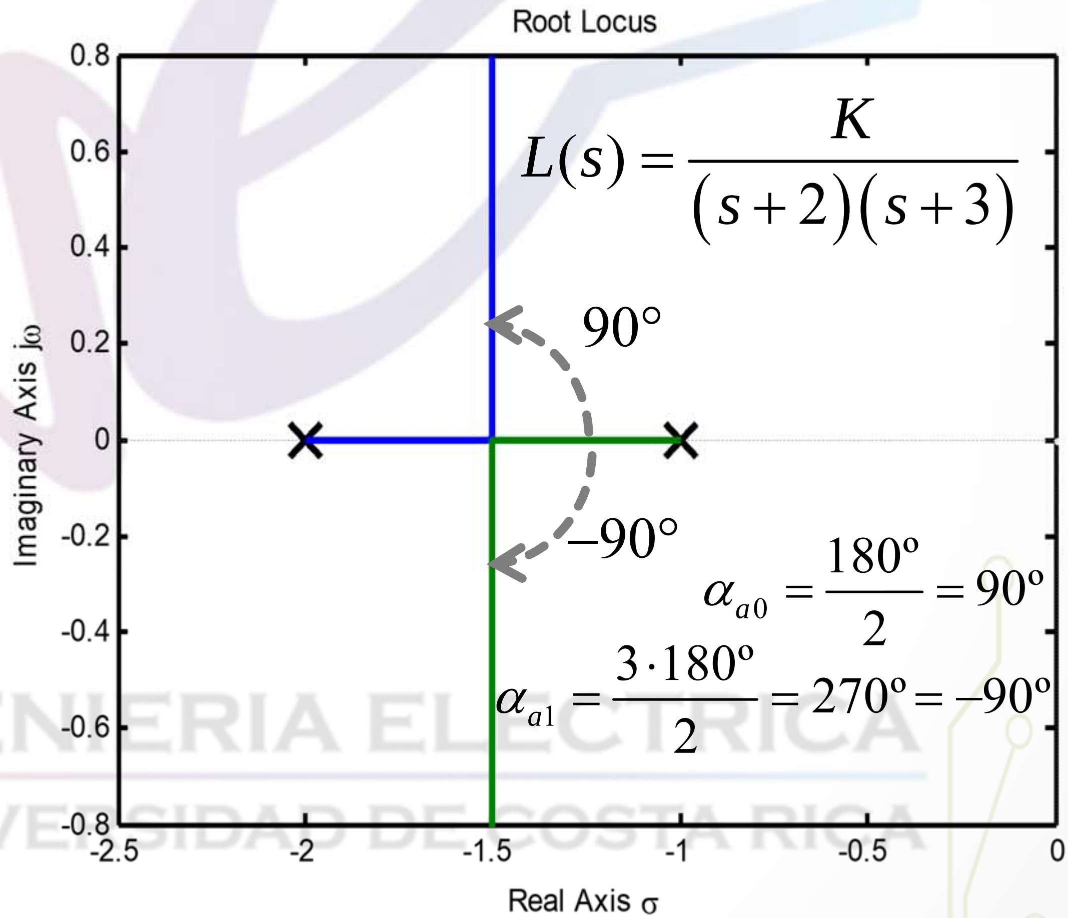


Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #5**

$$\alpha_{ak} = \frac{(2k+1)180^\circ}{n-m}, \qquad k = 0,1,2,\cdots(n-m-1)$$



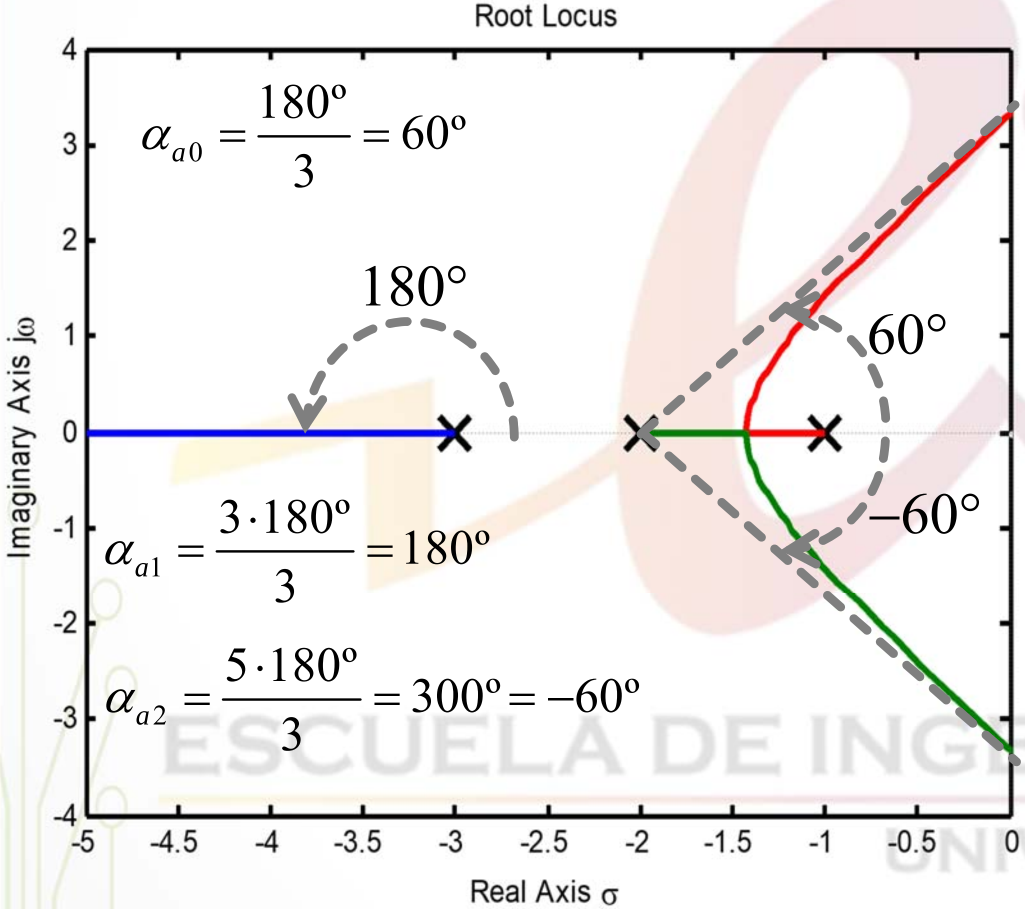


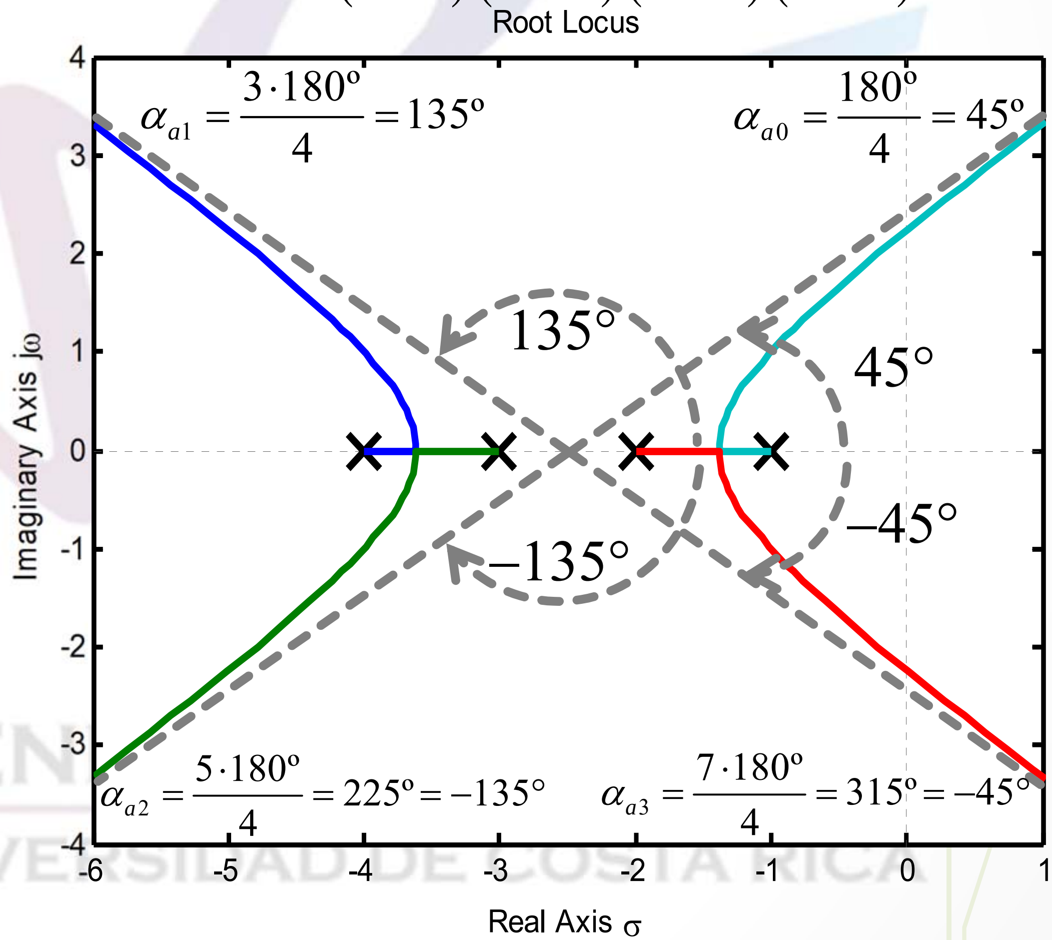
Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #5** $\alpha_{ak} = \frac{(2k+1)180^{\circ}}{n-m}, \quad k = 0,1,2,\cdots(n-m-1)$

$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

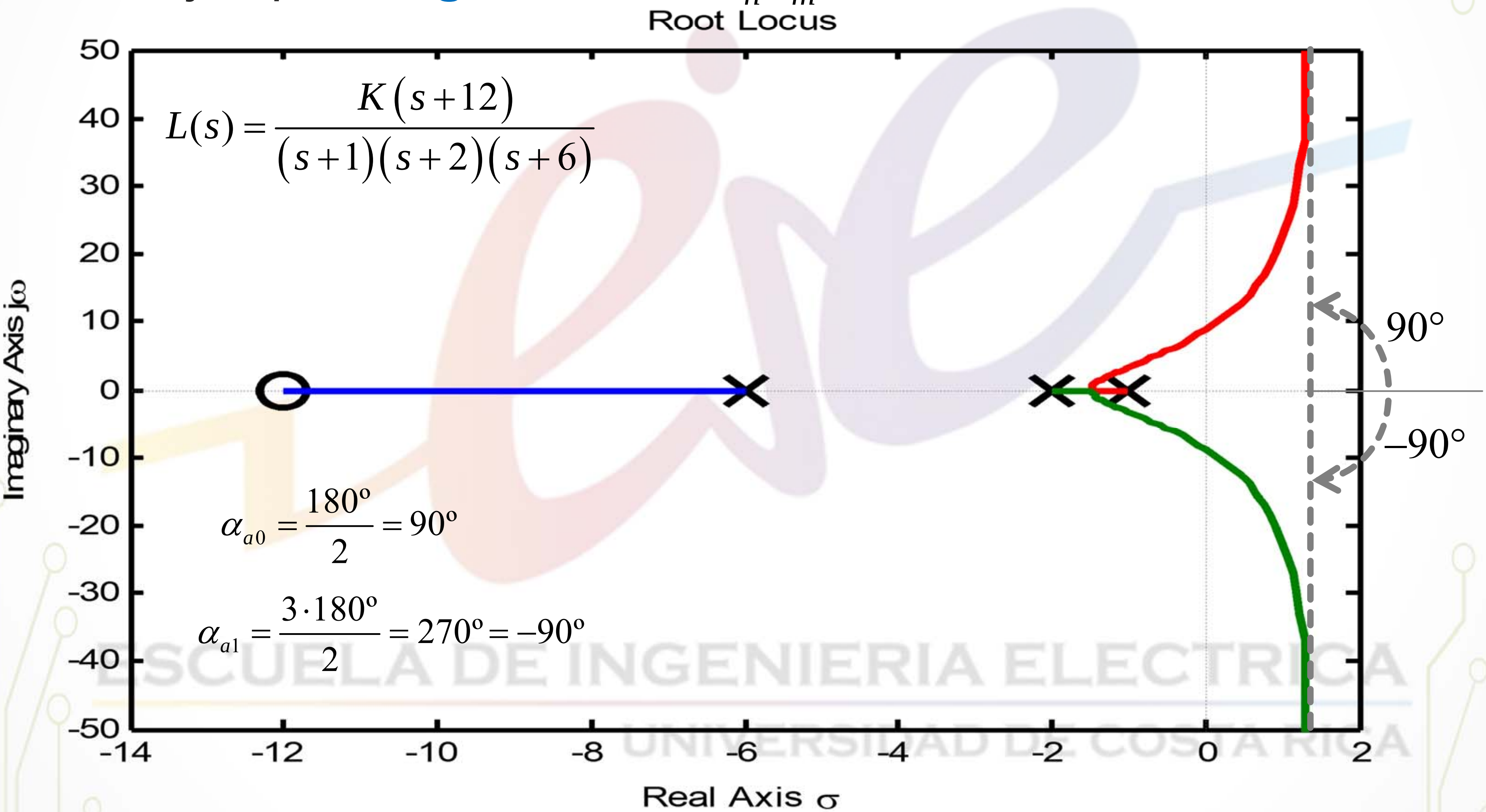
$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$





Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #5** $\alpha_{ak} = \dfrac{(2k+1)180^{\circ}}{n-m}, \quad k = 0,1,2,\cdots(n-m-1)$



Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #6** – Punto de intersección de las asíntotas con el eje real (Centroide de las asíntotas):

  Si $(n\text{-}m)\geq 2$, la intersección de las asíntotas con el eje real o *centroide de las asíntotas* ocurre en el punto:

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Re\left(p_j\right) - \sum_{i=1}^{m} \Re\left(z_i\right)}{n-m}, \qquad (n-m)\geq 2$$

- **Regla #7** – Centroide de las raíces:

  Si $(n\text{-}m)\geq 2$, entonces el centroide de las raíces permanece estacionario cuando ***K*** varía, y está localizado en un punto sobre el eje real dado por:

$$\sigma_r = \frac{\sum_{j=1}^{n} \Re\left(p_j\right)}{n}, \qquad (n-m)\geq 2$$

Reglas de Construcción del LGR

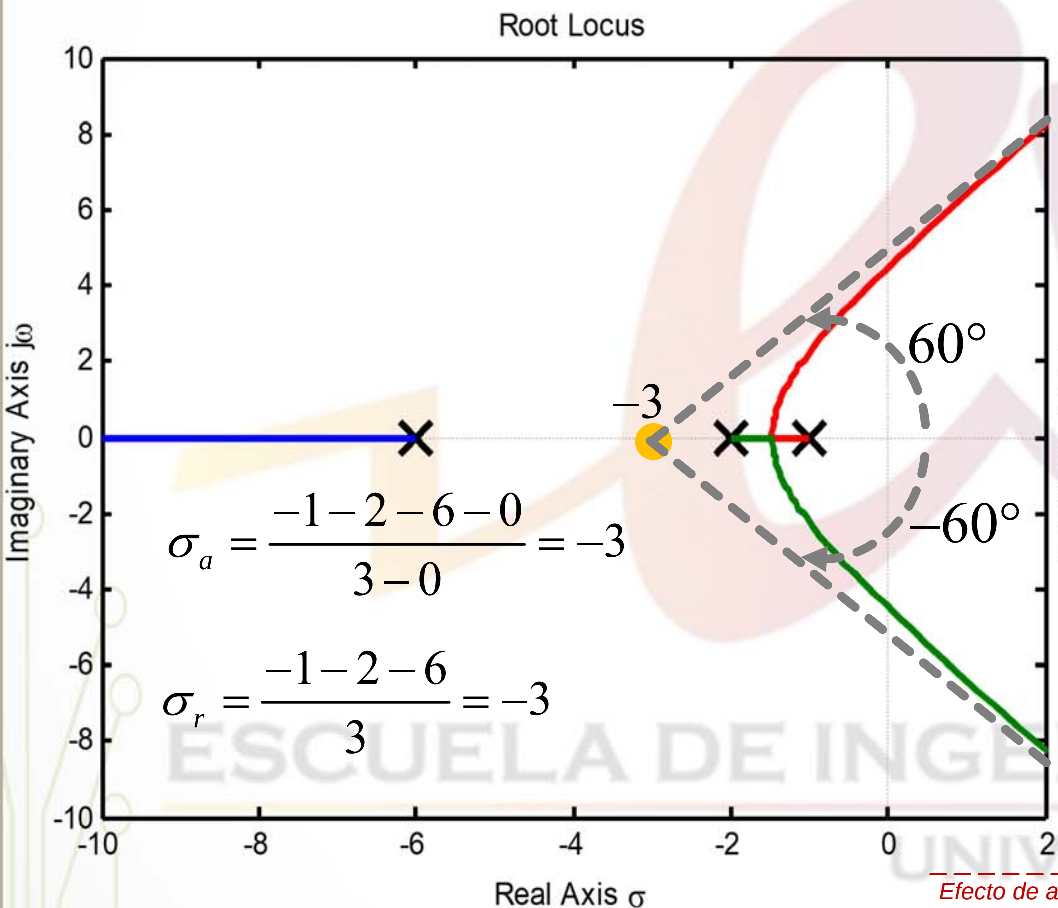
EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Ejemplo: **Regla #6 y #7**

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n}\Re(p_j) - \sum_{i=1}^{m}\Re(z_i)}{n-m}, \sigma_r = \frac{\sum_{j=1}^{n}\Re(p_j)}{n}, \ (n-m) \geq 2$$

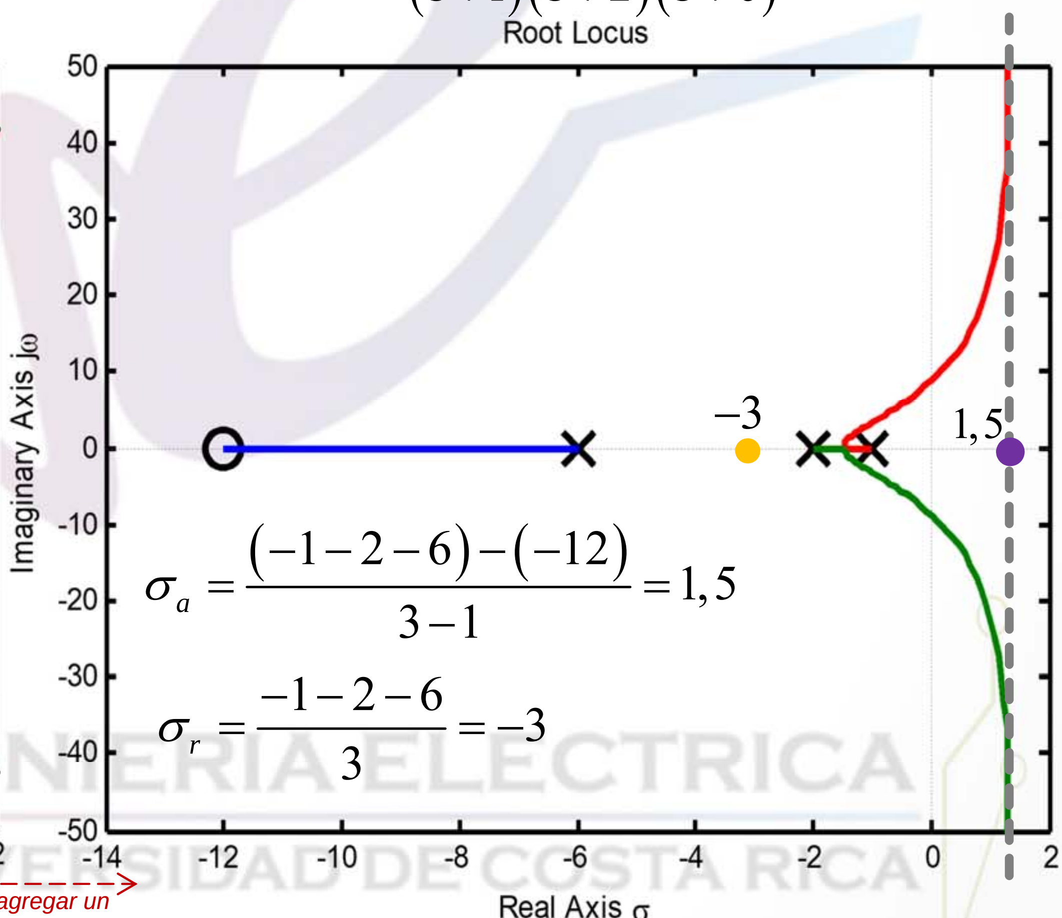
$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$

$$L(s) = \frac{K(s+12)}{(s+1)(s+2)(s+6)}$$



$$\sigma_a = \frac{-1-2-6-0}{3-0} = -3$$

$$\sigma_r = \frac{-1-2-6}{3} = -3$$



$$\sigma_a = \frac{(-1-2-6)-(-12)}{3-1} = 1,5$$

$$\sigma_r = \frac{-1-2-6}{3} = -3$$

Efecto de agregar un cero en el LGR

Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #8** – Puntos de salida o entrada al eje real:
- Para el caso donde el lugar de las raíces tiene ramas sobre el **eje real**:
  - Entre dos polos: existe un punto donde estas ramas dejan el eje real para entrar en la región compleja (***punto de salida***)
  - Entre dos ceros o entre un cero e infinito: las ramas vienen de polos en el área compleja y llegan al eje real (***punto de entrada***)

Ambos puntos se determinan con:

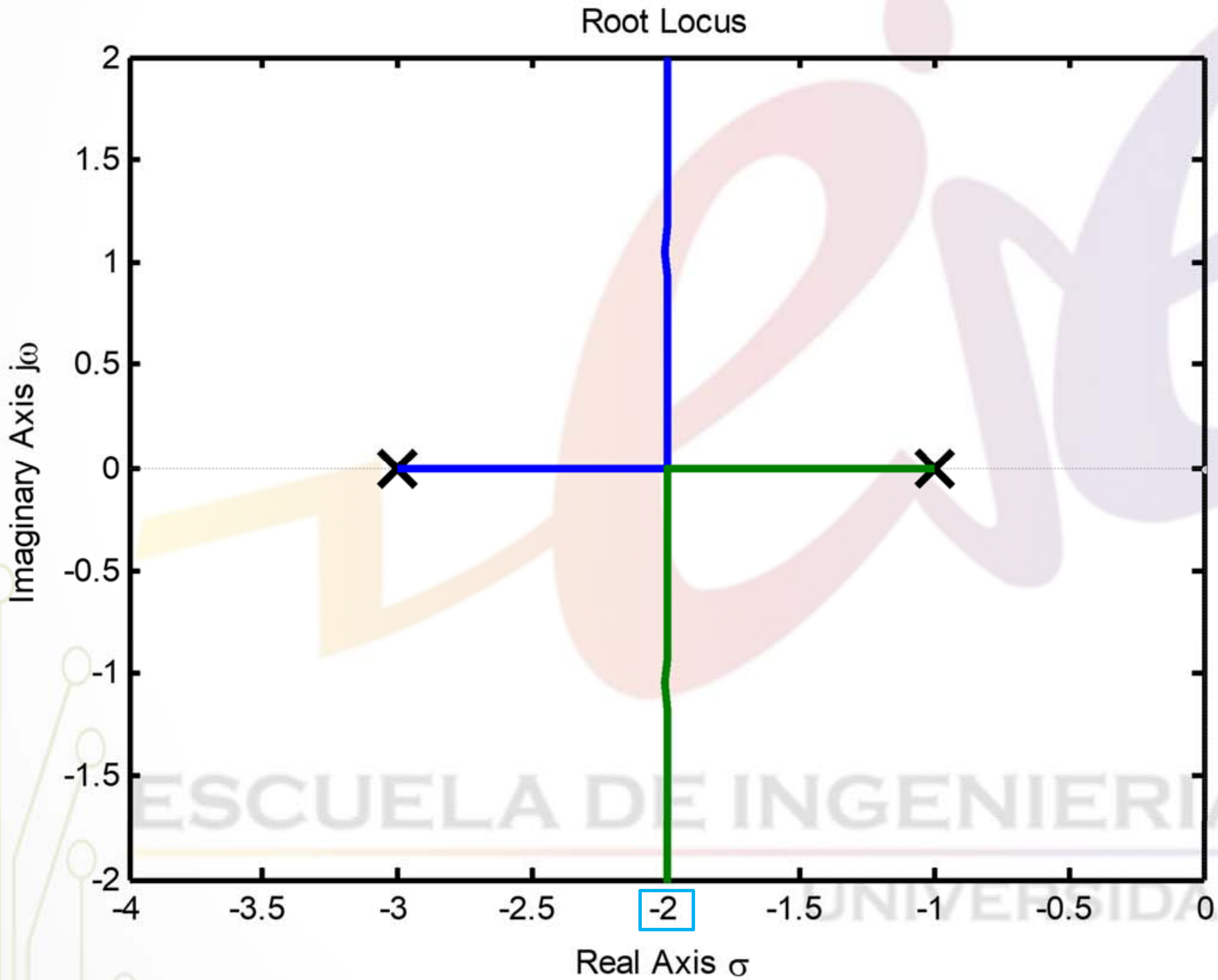
$$\boxed{\frac{dK(\sigma)}{d\sigma}=0}$$

(Los puntos determinados deben cumplir con la Regla #4)

En polinomios de orden alto, se puede utilizar el método de Newton para obtener las raíces del polinomio de forma numérica.

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #8** $\dfrac{dK(\sigma)}{d\sigma}=0$



$$L(s)=\frac{K}{(s+1)(s+3)}$$

$$1+L(s)=0$$

$$(s+1)(s+3)+K=0$$

$$K=-\left(s^2+4s+3\right)$$

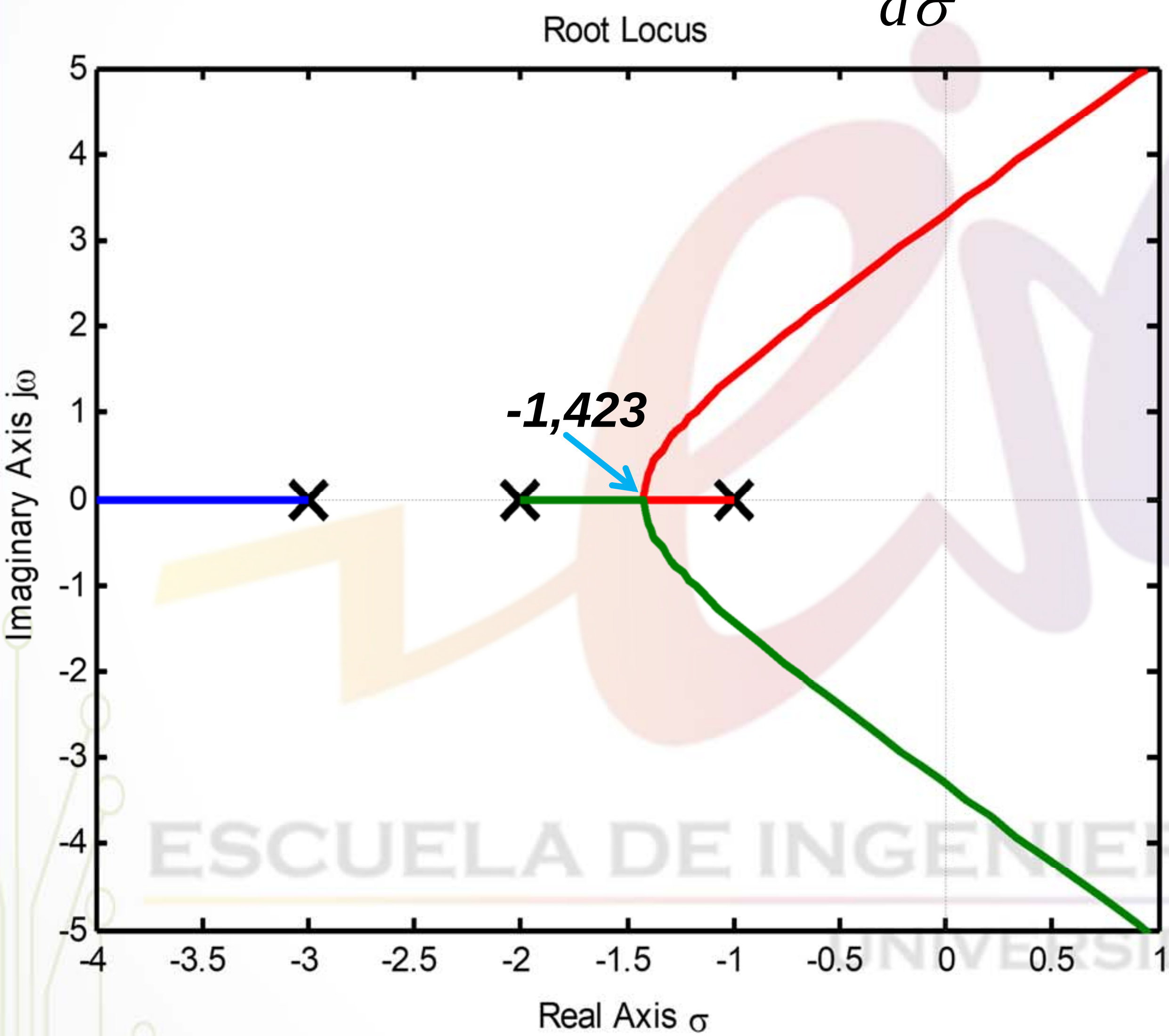
$$\Rightarrow K(\sigma)=-\left(\sigma^2+4\sigma+3\right)$$

$$\frac{dK(\sigma)}{d\sigma}=-(2\sigma+4)=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma=-2}$$

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #8** $\dfrac{dK(\sigma)}{d\sigma} = 0$



$$L(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$1 + L(s) = 0$$

$$(s+1)(s+2)(s+3) + K = 0$$

$$K = -\left(s^3 + 6s^2 + 11s + 6\right)$$

$$\Rightarrow K(\sigma) = -\left(\sigma^3 + 6\sigma^2 + 11\sigma + 6\right)$$

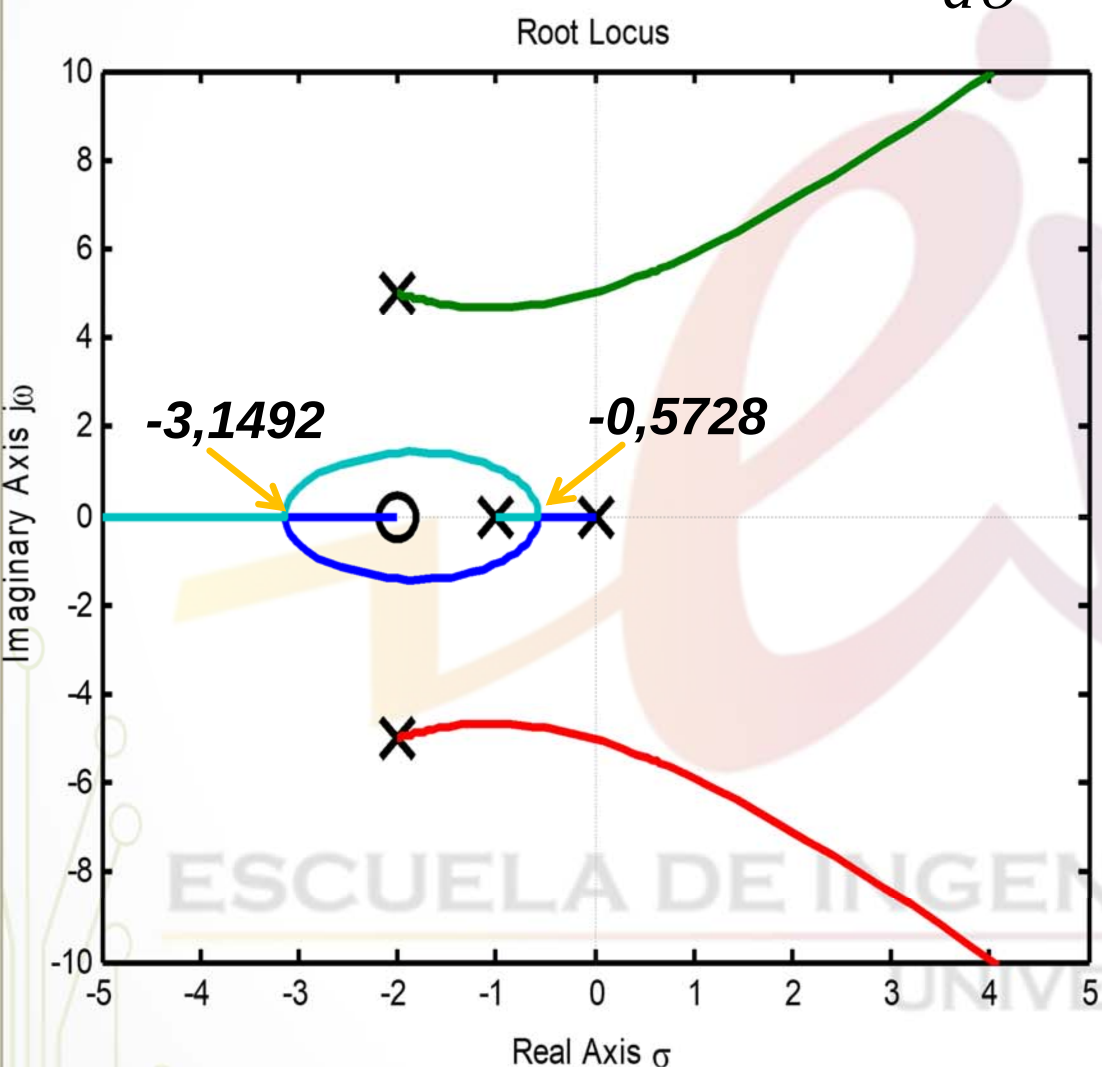
$$\frac{dK(\sigma)}{d\sigma} = -\left(3\sigma^2 + 12\sigma + 11\right) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma = \cancel{-2,577}$$

$$\Rightarrow \sigma = \boxed{-1,423}$$

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #8** $\dfrac{dK(\sigma)}{d\sigma} = 0$



$$L(s) = \frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$

$$p_c(s) = 1 + L(s) = 0$$

$$\boxed{p_c(s) = s(s^2+4s+29)(s+1) + K(s+2) = 0}$$

$$\Rightarrow K(\sigma) = -\frac{(\sigma^4 + 5\sigma^3 + 33\sigma^2 + 29\sigma)}{\sigma + 2}$$

$$\frac{dK(\sigma)}{d\sigma} = -(3\sigma^4 + 18\sigma^3 + 63\sigma^2 + 132\sigma + 58) = 0$$

$\Rightarrow \sigma = -0,5728$ → ***Punto Salida***

$\Rightarrow \sigma = -3,1492$ → ***Punto Entrada***

únicamente raíces reales

Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #9** – Ángulo de salida o entrada al eje real:

Si hay puntos de salida o entrada al eje real, en donde ***p*** lugares geométricos de las raíces (**ramas**) **despegan** (*punto de salida*) o **llegan** (*punto de entrada*), estas lo hacen con un ángulo igual a:

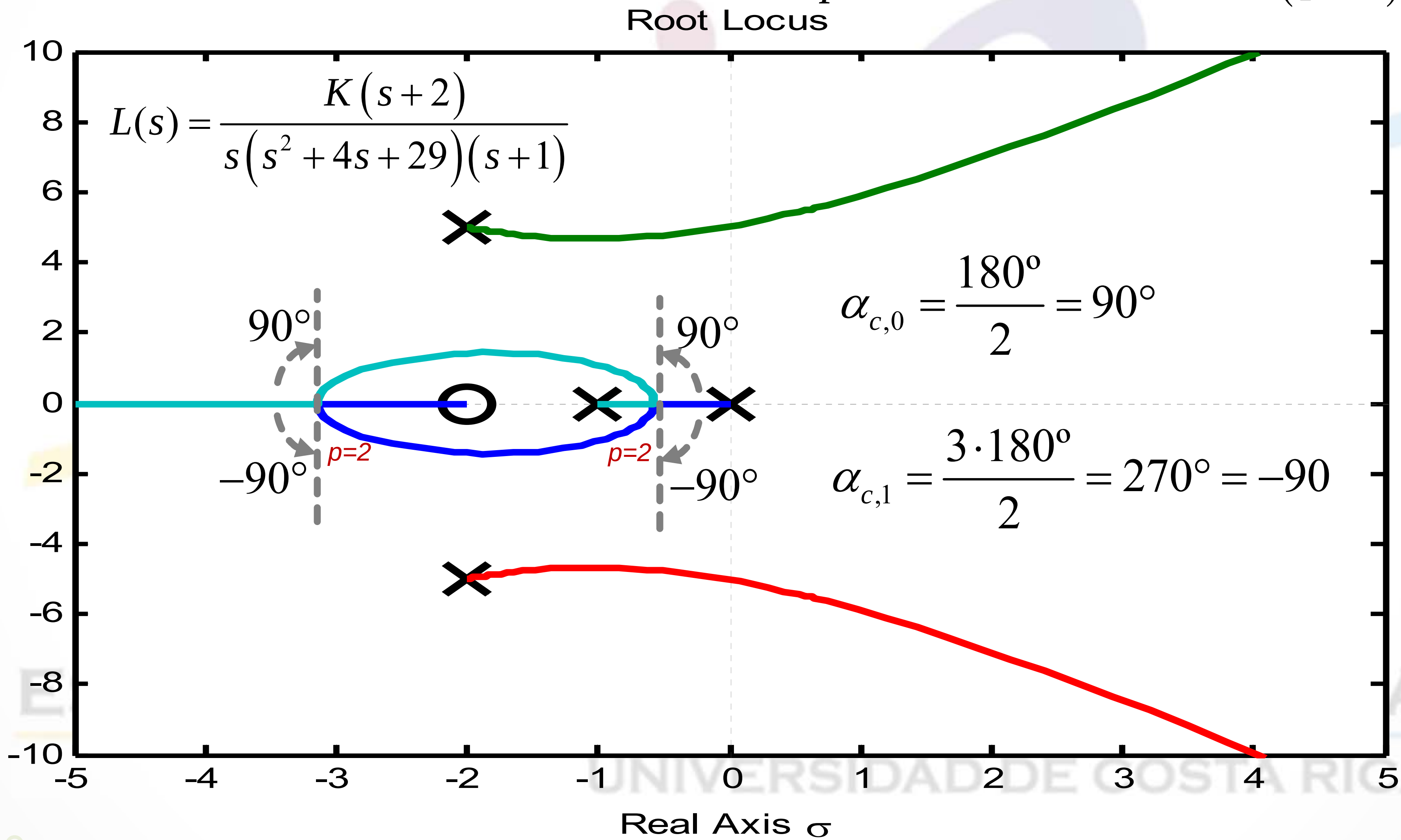
$$\alpha_{c,k} = \frac{(2k+1)180^{\circ}}{p}, \qquad \begin{array}{c} p = 2, 3, \cdots \\ k = 0, 1, 2, \cdots (p-1) \end{array}$$

El cálculo se realiza aplicando la fórmula ***en cada punto*** de salida o entrada al eje real.

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #9**

$$\alpha_{c,k} = \frac{(2k+1)180^{o}}{p}, \qquad p = 2,3,\cdots \qquad k = 0,1,2,\cdots(p-1)$$



Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #10** – Ángulo de partida (*llegada*) de un polo (*a un cero*) complejo:

  Los **ángulos** con que el lugar deja un polo complejo o llega a un cero complejo se obtienen de la condición de ángulo:

  - Salida (**polo** complejo)

$$\angle\left(s+p_x\right)=\sum_{i=1}^{m}\angle\left(s+z_i\right)-\sum_{j=1,\,j\neq x}^{n}\angle\left(s+p_j\right)-180^{\mathrm{o}}$$

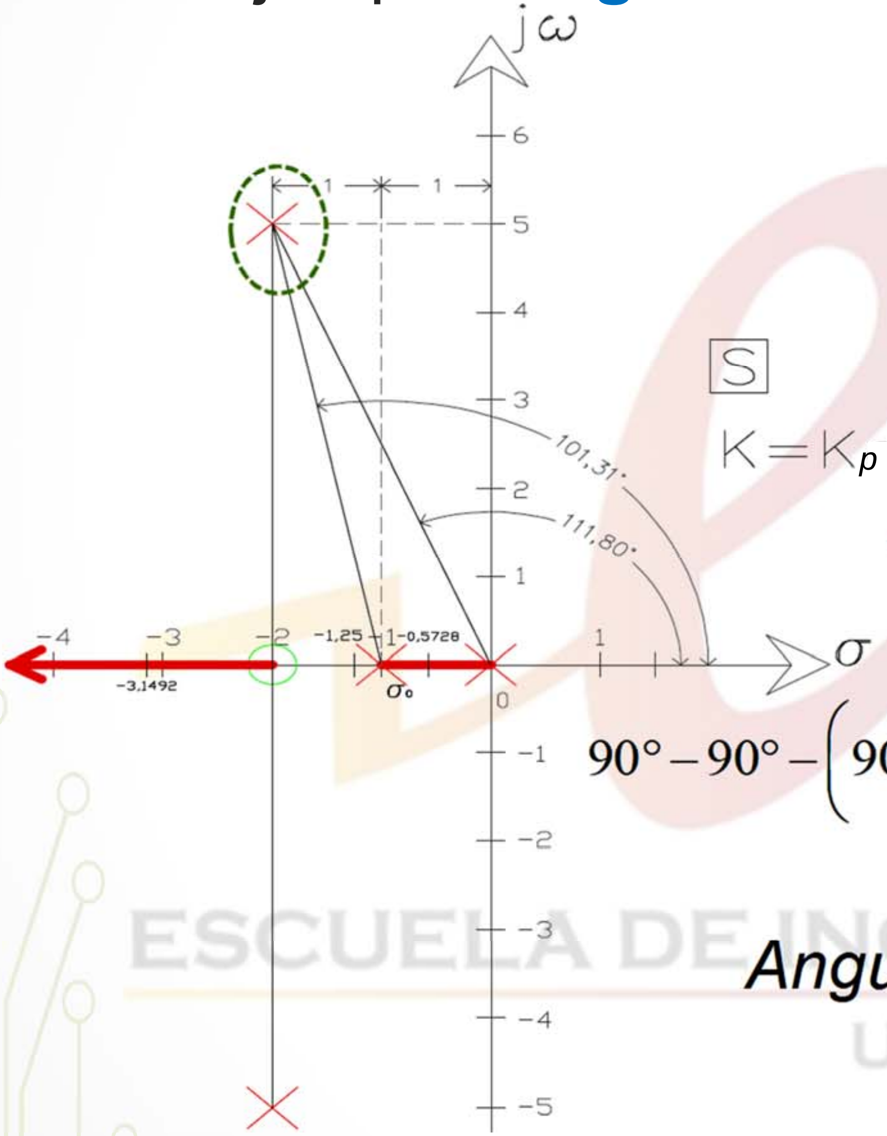
  - Llegada (**cero** complejo)

$$\angle\left(s+z_x\right)=180^{\mathrm{o}}-\left(\sum_{i=1,i\neq x}^{m}\angle\left(s+z_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\angle\left(s+p_j\right)\right)$$

Reglas de Construcción del LGR

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Ejemplo: **Regla #10**



$$L(s)=\frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$

$$\angle(s+p_x)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1,j\neq x}^{n}\angle(s+p_j)-180^\circ$$

$$90^\circ-90^\circ-\left(90^\circ+A\tan\left(\frac{2}{5}\right)\right)-\left(90^\circ+A\tan\left(\frac{1}{5}\right)\right)-180^\circ=-393,11$$

Angulos de Partida: -33,11° y +33,11°

Simetría

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Reglas de Construcción del LGR

- **Regla #11** – Puntos de cruce del eje imaginario:

Los puntos donde el lugar de las raíces interseca el eje imaginario y los correspondientes valores de ***K*** en esos puntos, pueden determinarse aplicando:

- el criterio de estabilidad de *Routh – Hurwitz*
- el criterio de estabilidad de *Liénard – Chipart*
- Por sustitución directa de $s=j\omega$ en la ecuación característica →2 ecuaciones con 2 incógnitas (K_u, ω_u)

Reglas de Construcción del LGR

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Ejemplo: **Regla #11**

$$p_c(s) = s(s^2 + 4s + 29)(s+1) + K(s+2) = 0$$

$$p_c(s) = s^4 + 5s^3 + 33s^2 + 29s + K\cdot s + 2K = 0$$

$$p_c(j\omega) = (j\omega)^4 + 5(j\omega)^3 + 33(j\omega)^2 + 29(j\omega) + K(j\omega) + 2K = 0$$

$$\boxed{p_c(j\omega) = \omega^4 - 5j\omega^3 - 33\omega^2 + 29j\omega + Kj\omega + 2K = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega^4 - 33\omega^2 + 2K = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{-5\omega^3 + 29\omega + k\omega = 0} \Rightarrow -5\omega^2 + 29 + K = 0 \Rightarrow \boxed{K = 5\omega^2 - 29}$$

$$\Rightarrow \omega^4 - 33\omega^2 + 2\boxed{(5\omega^2 - 29)} = 0 \Rightarrow \omega^4 - 33\omega^2 + 10\omega^2 - 58 = 0$$

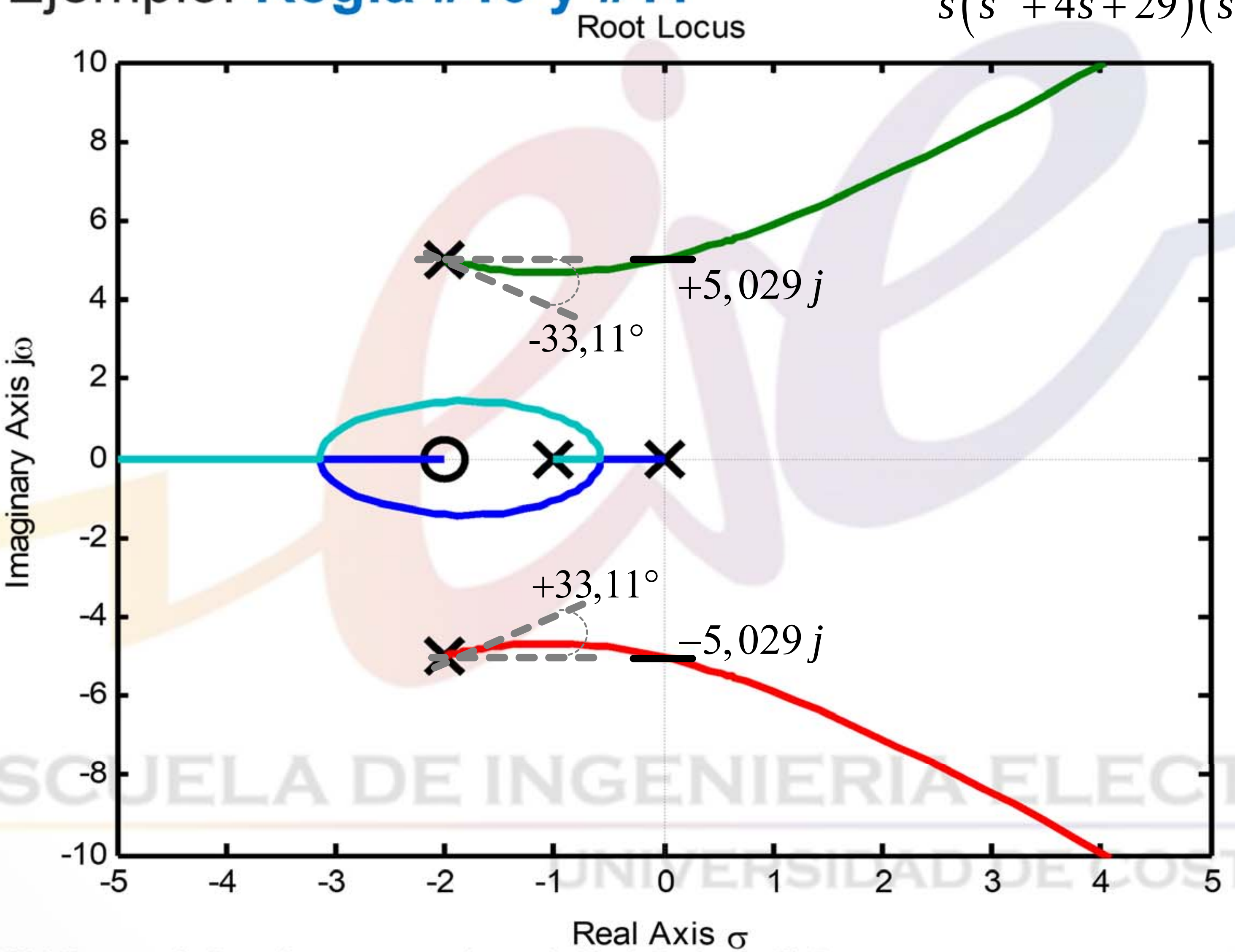
$$\Rightarrow \omega^4 - 23\omega^2 - 58 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \pm 5.029} \Rightarrow K = 5\omega^2 - 29 = \boxed{97,45}$$

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #10 y #11**

$$L(s)=\frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$



Reglas de Construcción del LGR

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- **Regla #12** – Cálculo del valor de la ganancia K sobre un punto s_1 del **LGR**:

El valor de ***K*** en un punto determinado del **LGR**, puede encontrarse aplicando la condición de magnitud:

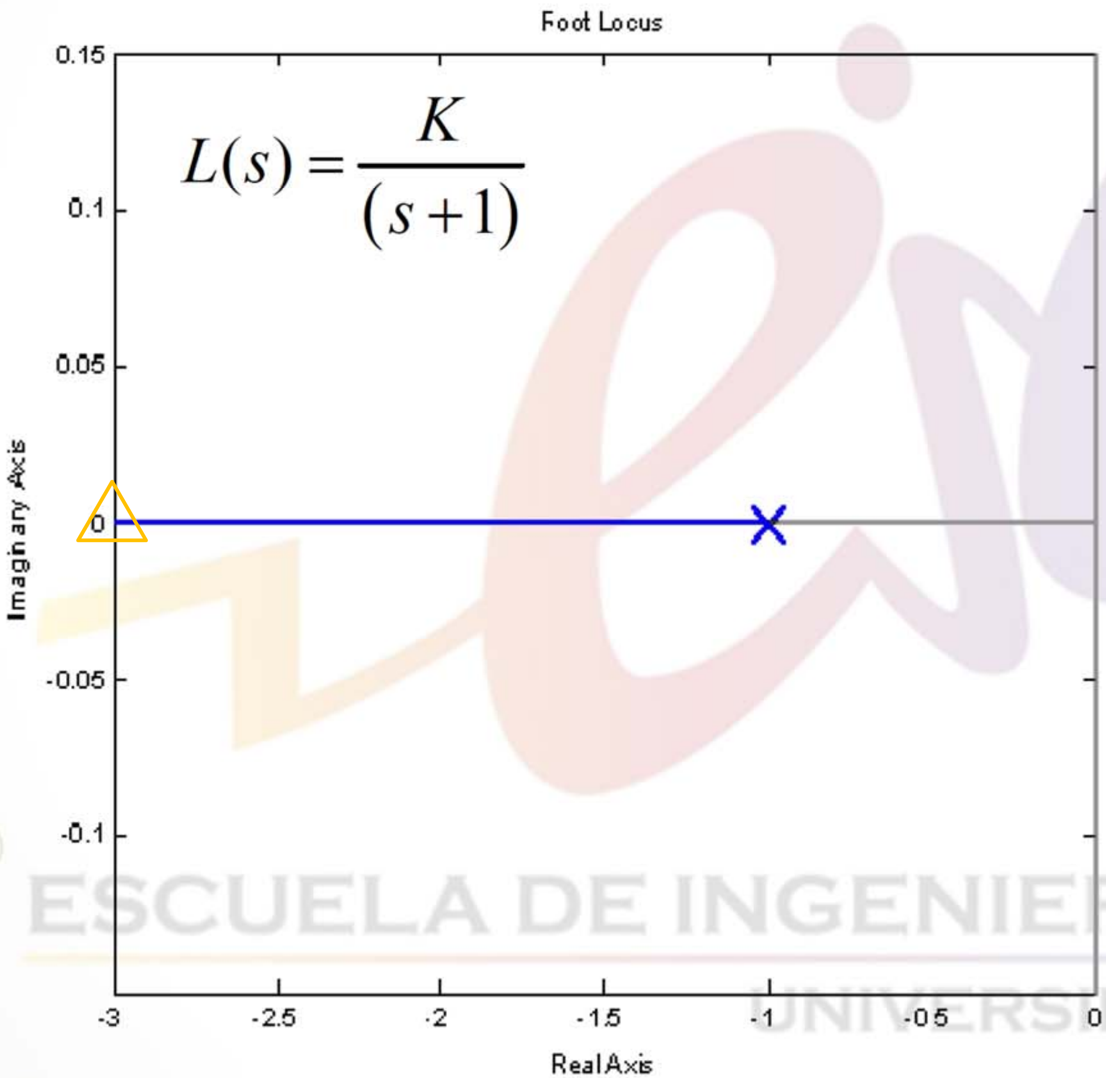
$$\left|K\right|_{s=s_1} = \frac{1}{\left|C'(s_1)P'(s_1)\right|} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left|s_1 + p_j\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|s_1 + z_i\right|}$$

$$K = K_p K' \Rightarrow K_p = \frac{K}{K'} \qquad \prod_{i=1}^{0}\left|c\right| = c^0 = 1 \qquad c = constante$$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #12**



Valor de ***K*** en $\boxed{s_1 = -3}$

$$\left|K\right|_{s=s_1} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(s_1 + p_j\right)}{\prod_{i=1}^{m}\left(s_1 + z_i\right)}$$

$$\left|K\right|_{s=s_1} = \left|\frac{\left|(-3+1)\right|}{1}\right| = \left|\frac{-2}{1}\right| = 2$$

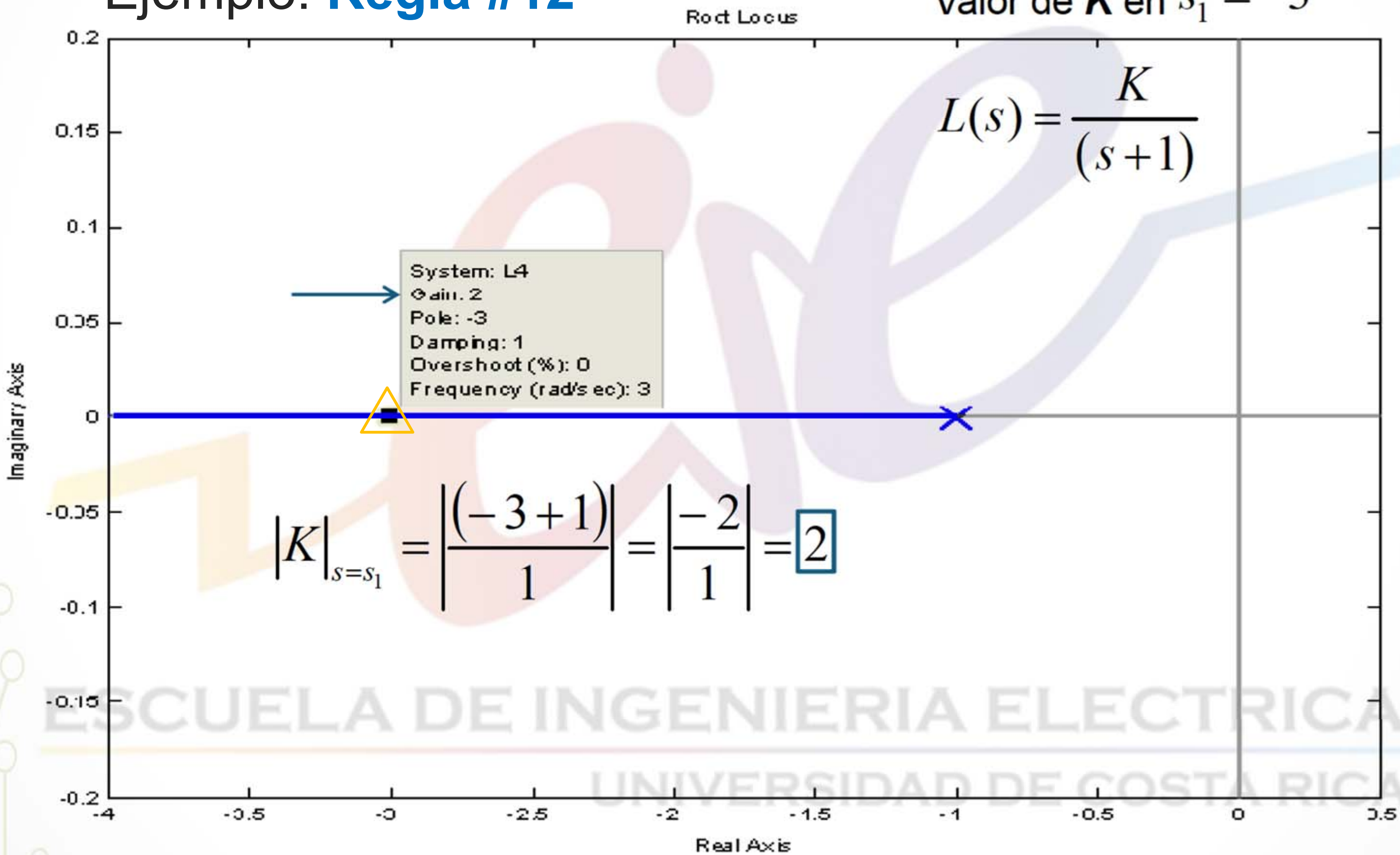
$$\prod_{i=1}^{0}(c) = (c)^0 = 1$$

$$c = \text{constante}$$

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #12**

Valor de $\boldsymbol{K}$ en $s_1 = -3$



$$L(s) = \frac{K}{(s+1)}$$

$$|K|_{s=s_1} = \left|\frac{(-3+1)}{1}\right| = \left|\frac{-2}{1}\right| = \boxed{2}$$

Reglas de Construcción del LGR

- Ejemplo: **Regla #12** $L(s)=\dfrac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$

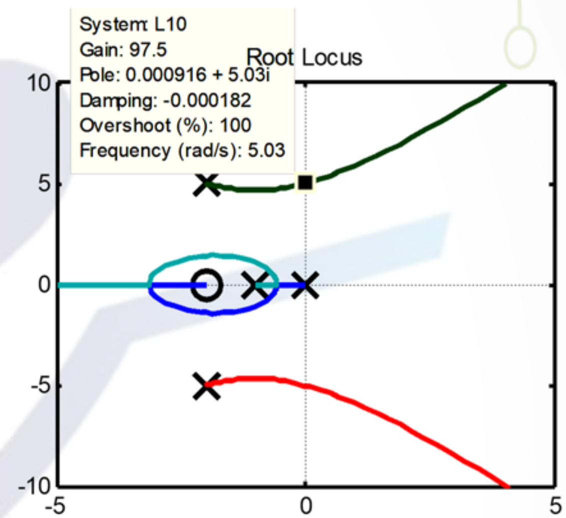
$$s_1=0+5,029j$$

$$|K|_{s=s_1}=\frac{1}{|C'(s_1)P'(s_1)|}=\frac{\prod_{j=1}^{n}|s_1+p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s_1+z_i|}$$

$$|K|_{s=s_1}=\frac{|5,029j+0||5,029j+1||5,029j+2+5j||5,029j+2-5j|}{|5,029j+2|}$$

$$|K|_{s=s_1}=\frac{|5,029j||1+5,029j||2+10,029j||2+0,029j|}{|2+5,029j|}$$

$$|K|_{s=s_1}=\frac{(5,029)(5,1275)(10.2265)(2,0002)}{(5,4121)}=\boxed{97,45}$$



Mismo Resultado al obtenido con la Regla #11

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

ANEXOS

1: Realimentación Positiva

2: Método de Newton

ANEXO 1: Sistemas de Ganancia Negativa (Realimentación Positiva):

$$p_c(s) = 1 - K_p C'(s)P(s) = 0 \Rightarrow K_p C'(s)P(s) = +1$$

- Se Modifica la Condición de Ángulo:

$$\angle C'(s)P'(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle\left(s + z_i\right) - \sum_{j=1}^{n} \angle\left(s + p_j\right) = \left(2k\right)180^{\mathrm{o}} = k360$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$$

Con lo que las siguientes reglas del LGR se modifican:

- **Regla #4** – Lugar de las raíces sobre el eje real:

  Un punto sobre el eje real forma parte del **LGR**, si el número de polos y ceros de lazo abierto a su derecha es par. *(cero es un número par)*

ANEXO 1: Sistemas de Ganancia Negativa (Realimentación Positiva):

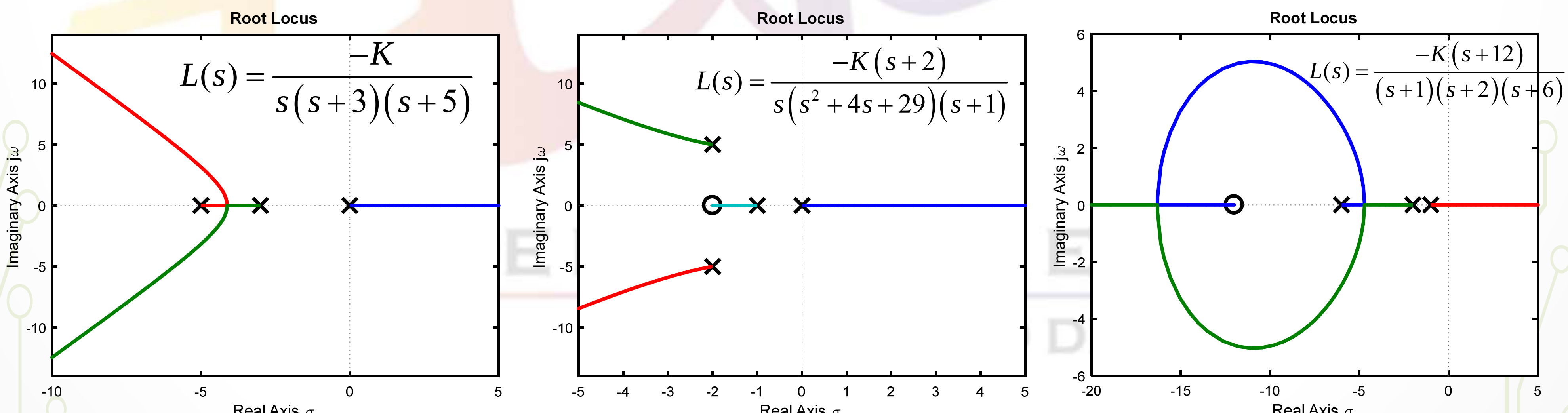
Con lo que las siguientes reglas del LGR se modifican:

- **Regla #5** – Ángulos de las asíntotas:

  Para valores grandes de **s**, el lugar de las raíces que tienden a infinito es asintótico a líneas rectas llamadas **asíntotas**, cuyos ángulos están dados por:

$$\alpha_{ak} = \frac{(2k)180^{\circ}}{n-m} = \frac{k360^{\circ}}{n-m}, \qquad k = 0,1,2,\cdots(n-m-1)$$

Ejemplos:



ANEXO 1: Sistemas de Ganancia Negativa (Realimentación Positiva):

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Con lo que las siguientes reglas del LGR se modifican:

- **Regla #10** – Ángulo de partida (*llegada*) de un polo (*a un cero*) complejo:

  Los **ángulos** con que el lugar deja un polo complejo o llega a un cero complejo se obtienen de la condición de ángulo:

  - Salida (**polo** complejo)

$$\angle(s+p_x)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s+z_i)-\sum_{j=1,\, j\neq x}^{n}\angle(s+p_j)$$

  - Llegada (**cero** complejo)

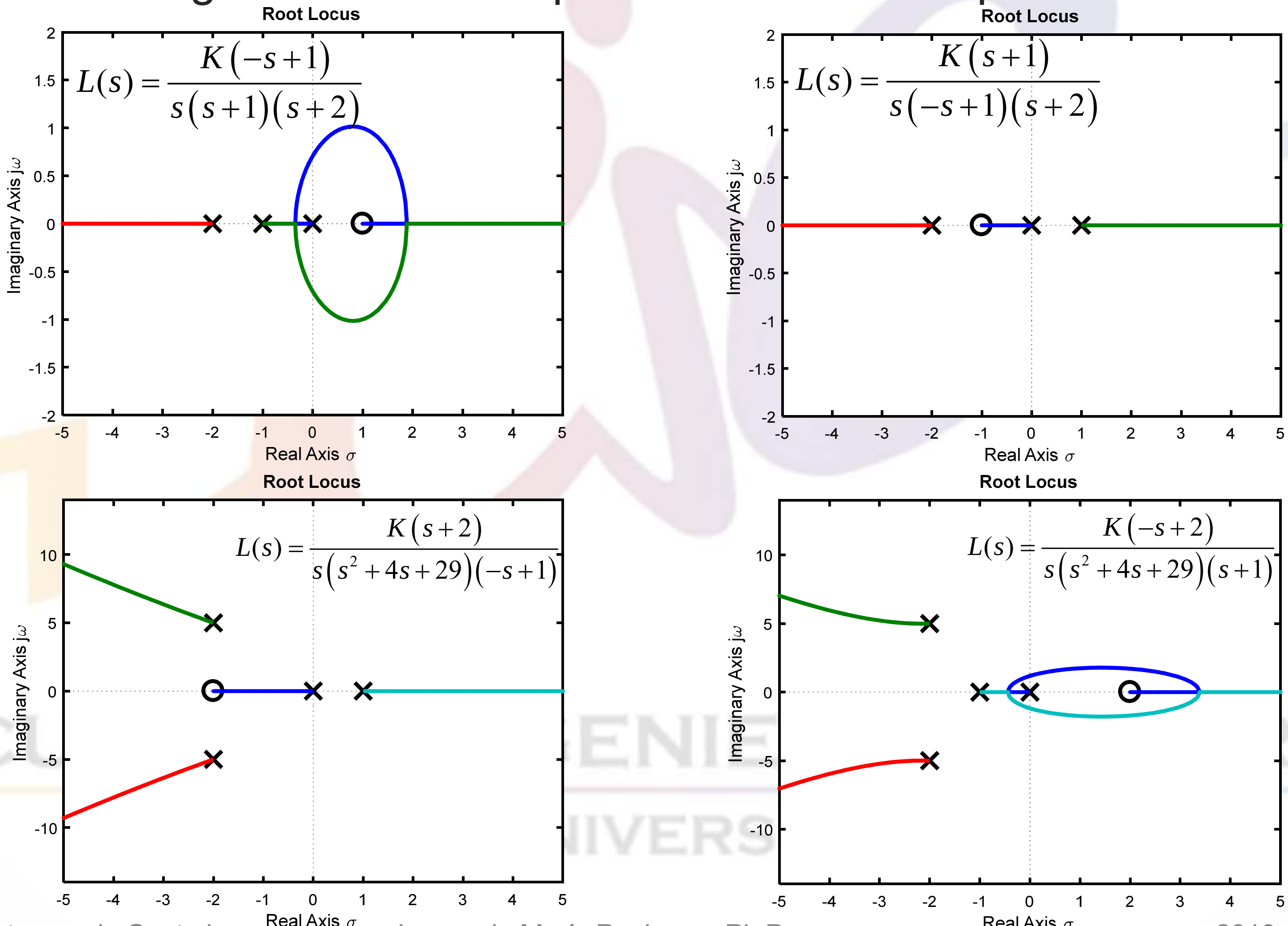
$$\angle(s+z_x)=-\sum_{i=1,i\neq x}^{m}\angle(s+z_i)+\sum_{j=1}^{n}\angle(s+p_j)$$

ANEXO 1: Sistemas de Ganancia Negativa (Realimentación Positiva):

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Para sistemas con ceros o polos de fase no mínima:

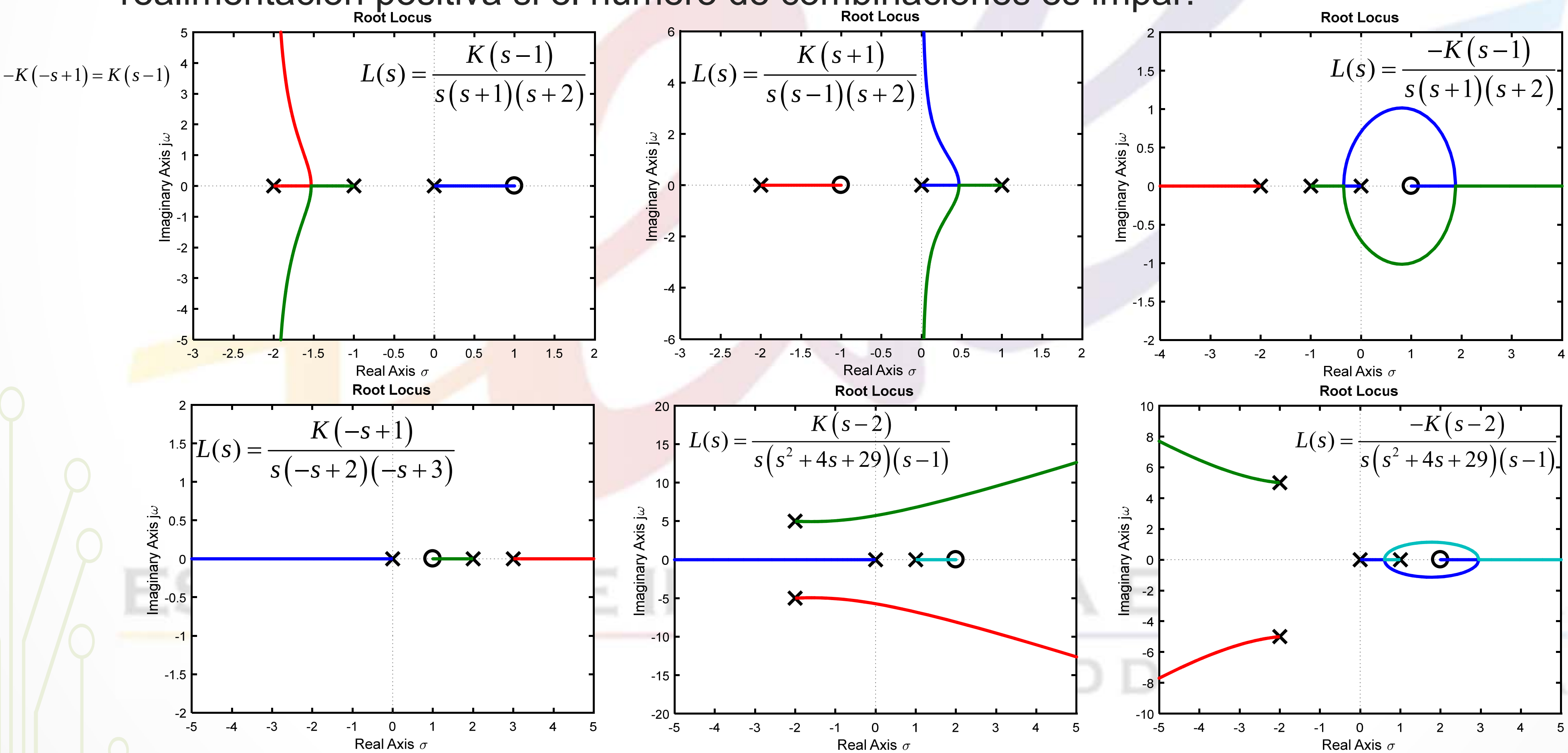
Se aplican las reglas modificadas para realimentación positiva:



ANEXO 1: Sistemas de Ganancia Negativa (Realimentación Positiva):

Combinación de términos:

Cuando se combinan ceros o polos de fase no mínima con ganancia negativa se aplican las reglas originales si se tiene un número par de combinaciones, o las reglas para realimentación positiva si el número de combinaciones es impar:



ANEXO 2: Método de Newton

- A la hora de aplicar la **Regla #8** para encontrar los puntos de salida o entrada al eje real es necesario, la mayoría de las veces, obtener las raíces de un polinomio de orden alto.
- Estas raíces se pueden obtener mediante una calculadora programable o un programa de simulación. Sin embargo, si no se cuenta con estos, se puede utilizar un método manual conocido como el Método de Newton. Este encuentra las raíces de una función de la forma: $f(x) = 0$
- Se define la solución (***raíz***) en la iteración ***K+1*** conociendo la solución en la iteración anterior ***K*** (o condición inicial) como:

$$\boxed{X_{K+1} = X_K - \frac{f(X_K)}{f'(X_K)}}$$

ANEXO 2: Método de Newton

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Al aplicar el método de newton a la **Regla #8** del LGR:

$$f(\sigma) = \frac{dK(\sigma)}{d\sigma} = 0$$

$$g(\sigma) = f'(\sigma) = \frac{d^2K(\sigma)}{d\sigma^2}$$

- Conociendo la condición inicial $\boldsymbol{\sigma_0}$ se tiene que: .

$$\boxed{\sigma_{K+1} = \sigma_K - \frac{f(\sigma_K)}{g(\sigma_K)}}$$

- Se debe compara la respuesta $\boldsymbol{\sigma_{K+1}}$ con la obtenida en la iteración anterior, $\boldsymbol{\sigma_K}$, se detiene el método cuando la solución converge, es decir $\boldsymbol{\sigma_{K+1} \approx \sigma_K}$.
- La condición inicial debe ser un punto perteneciente al LGR, cercano al punto de salida o llegada que se está calculando.

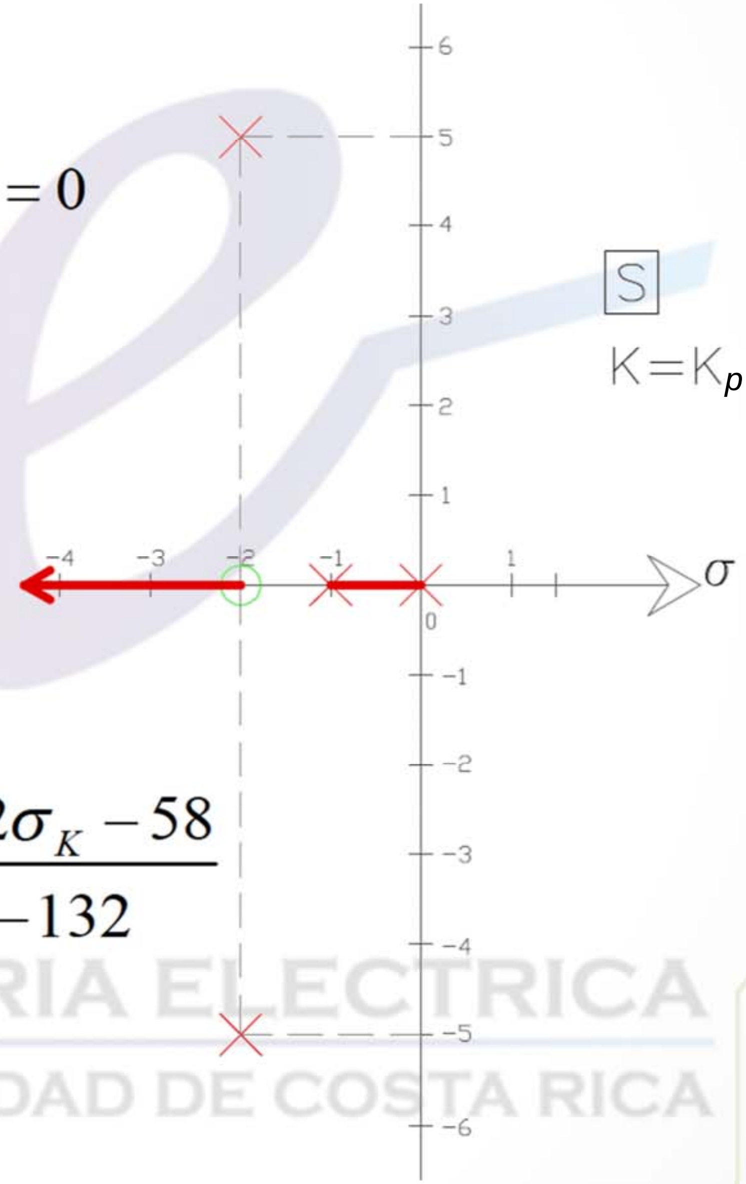
ANEXO 2: Método de Newton

$$L(s)=\frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$

- Ejemplo: Regla #8

$$\frac{dK(\sigma)}{d(\sigma)}=-3\sigma^4-18\sigma^3-63\sigma^2-132\sigma-58=0$$

- Debe haber un punto de salida entre 0 y -1 (se escoge -0,5) y un punto de llegada después de -2 (se escoge -3). Se obtiene la fórmula del método de Newton para iniciar el cálculo iterativo



$$\sigma_{K+1}=\sigma_K-\frac{-3\sigma_K^{\ 4}-18\sigma_K^{\ 3}-63\sigma_K^{\ 2}-132\sigma_K-58}{-12\sigma_K^{\ 3}-54\sigma_K^{\ 2}-126\sigma_K-132}$$

$$\sigma_{K+1}=\frac{-9\sigma_K^{\ 4}-36\sigma_K^{\ 3}-63\sigma_K^{\ 2}+58}{-12\sigma_K^{\ 3}-54\sigma_K^{\ 2}-126\sigma_K-132}$$

ANEXO 2: Método de Newton

$$L(s)=\frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$

- Calculando para las condiciones iniciales seleccionadas:

$$\sigma_{K+1}=\frac{-9\sigma_K^{\ 4}-36\sigma_K^{\ 3}-63\sigma_K^{\ 2}+58}{-12\sigma_K^{\ 3}-54\sigma_K^{\ 2}-126\sigma_K-132}$$

K	σ_K
0	-0,5
1	-0,5702
2	-0,5728
3	**-0,5728**

Detener el método

K	σ_K
0	-3
1	-3,1667
2	-3,1494
3	-3,1492
4	**-3,1492**

- Ambas raíces coinciden con las calculadas en el ejemplo

$\sigma_1=-0{,}5728 \rightarrow$ ***Punto Salida***

$\sigma_2=-3{,}1492 \rightarrow$ ***Punto Entrada***

ANEXO 2: Método de Newton

$$L(s)=\frac{K(s+2)}{s(s^2+4s+29)(s+1)}$$

- Se obtiene el mismo resultado al obtenido mediante la calculadora o mediante el programa de simulación