UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Estabilidad Absoluta: Criterios RH-LC

Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.

leonardo.marin@ucr.ac.cr

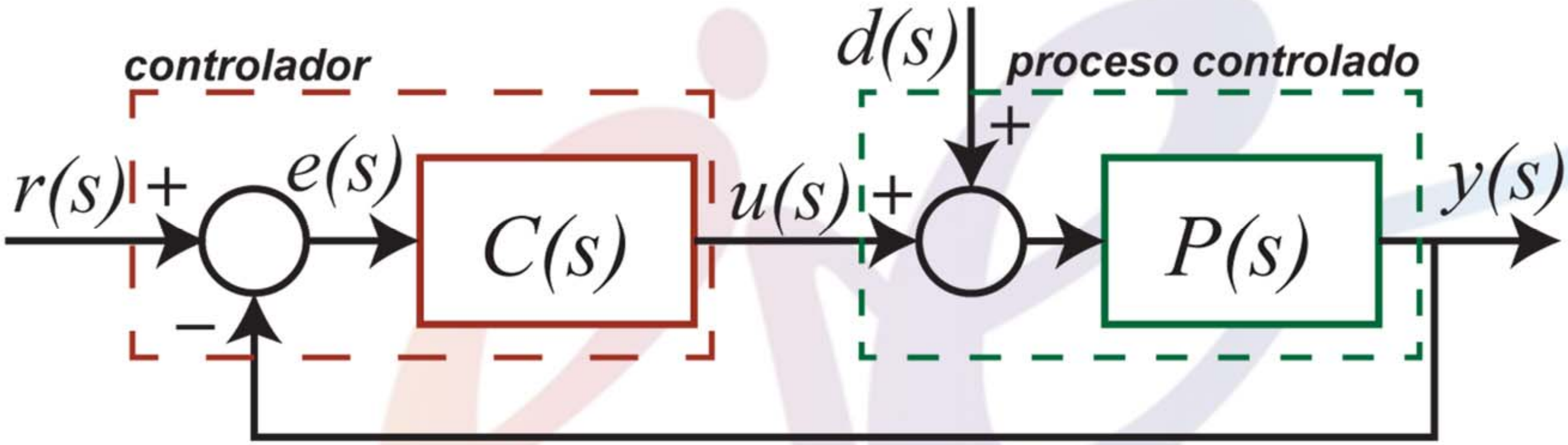
2018

EIE

Escuela de Ingeniería Eléctrica

Estabilidad Absoluta

- Lazo de Control Realimentado Monovariable:



- Función de Transferencia Lazo Cerrado:

$$y(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}r(s)+\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}d(s)$$

- Polinomio Característico

$$p_c(s)=1+C(s)P(s)=1+L(s)$$

Estabilidad Absoluta

- Un sistema de control de lazo cerrado es estable si la FTLC $M_{yr}(s)$ es estable.

$$M_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$$

- Se dice que el sistema de control de lazo cerrado es estable en su *relación entrada – salida* (*externamente estable*) si una entrada acotada produce una salida acotada (es ***BIBO estable*** - *bounded input bounded output*)
- **Una FT es BIBO estable si y solo si**:
  - **Es Propia**: esto es cuando el orden del denominador es igual o mayor que el orden del numerador.
  - **El poliniomio del denominador es Hurwitz**: esto es cuando TODAS sus raíces tienen parte real negativa.

Estabilidad Absoluta

- Un sistema de control es ***internamente estable*** si **todas** las funciones de transferencia de lazo cerrado son ***BIBO estables***.
- La ***estabilidad interna*** garantiza que no haya saltos impulsionales a la salida del controlador y que no se den cancelaciones de polos inestables con ceros del controlador.
- F.T. de lazo cerrado: $M_{yd}(s) = \dfrac{y(s)}{d(s)} = \dfrac{P(s)}{1 + C(s)P(s)}$

$$M_{er}(s) = \frac{e(s)}{r(s)} = \frac{1}{1 + C(s)P(s)} \qquad M_{ur}(s) = \frac{u(s)}{r(s)} = \frac{C(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

$$M_{ed}(s) = \frac{e(s)}{d(s)} = \frac{-P(s)}{1 + C(s)P(s)} \qquad M_{ud}(s) = \frac{u(s)}{d(s)} = \frac{-C(s)P(s)}{1 + C(s)P(s)}$$

Estabilidad Absoluta

- Un sistema de control es ***asintóticamente estable*** si todas las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa (*asintótico = tiende a un valor estable*)
- FT Controlador: $C(s) = \dfrac{N_c(s)}{D_c(s)}$
- FT Planta: $P(s) = \dfrac{N_p(s)}{D_p(s)}$
- Ecuación Característica: $1 + \dfrac{N_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s)} = 0$

$$M_{yr}(s) = \frac{y(s)}{r(s)} = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}$$

$$p_c(s) = 1 + L(s) = 1 + C(s)P(s)$$

$$\underbrace{D_c(s)D_p(s)}_{\text{Polos Lazo abierto}} + \underbrace{N_c(s)N_p(s)}_{\text{Ceros Lazo cerrado}} = 0$$

→ *Las Raíces son los polos de lazo cerrado*

Criterio de Ruth – Hurwitz

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

- Polinomio Característico:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- Las condiciones necesarias pero no suficientes para que las raíces del $p_c(s)$ tengan parte real negativa:
  - Todos los coeficientes a_i deben tener el mismo signo
  - No falta ninguno de los coeficientes del polinomio (ningún $a_i = 0$)
- Construcción del Arreglo de Routh – Hurwitz: este tendrá $n+1$ filas correspondientes a $s^n, s^{n-1}, \ldots, s, s^0$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Criterio de Ruth – Hurwitz

- Arreglo de Routh – Hurwitz:

$$
\begin{array}{llll}
s^{n} & a_{n} & a_{n-2} & a_{n-4} \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \cdots \\
s^{n-2} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\
s^{n-3} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\
s^{n-4} & b_{31} & b_{32} & \\
\vdots & \vdots & & \\
s^{0} & & &
\end{array}
$$

Coeficientes

$$b_{11} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_{n}a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{12} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_{n}a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$b_{21} = \frac{b_{11}a_{n-3} - a_{n-1}b_{12}}{b_{11}}$$

$$\vdots$$

$$b_{31} = \frac{\boxed{b_{21}b_{12}} - \boxed{b_{11}b_{22}}}{b_{21}}$$

$$b_{32} = \frac{\boxed{b_{21}b_{13}} - \boxed{b_{11}b_{23}}}{b_{21}}$$

$$\vdots$$

Criterio de Ruth – Hurwitz

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

- **CRITERIO de Ruth Hurwitz:**

EL NÚMERO DE CAMBIOS DE SIGNO EN LA PRIMERA COLUMNA DEL ARREGLO *R-H* INDICA EL NÚMERO DE RAÍCES DEL POLINOMIO CARACTERÍSTICO CON PARTE REAL POSITIVA

- Una fila se puede multiplicar o dividir por una constante **POSITIVA** sin que se alteren los cambios de signo de la primera columna.

Criterio de Ruth – Hurwitz

- ***Caso Especial #1***: **Primer elemento de una fila se hace cero**

  Solución: se sustituye el elemento por una cantidad positiva muy pequeña, llamada ε. Con esta se termina de construir el arreglo ***R-H*** y luego se hace tender esta cantidad a cero $\varepsilon \rightarrow 0$

  Con esto se observan los cambios de signo de la primera columna.

- ***Caso Especial #2***: **Toda una fila se hace cero**.

  Solución: Se construye un polinomio auxiliar ***A(s)*** con los ***coeficientes*** de la fila anterior a la que dio cero.

  Se deriva la ecuación auxiliar respecto a **s** y se sustituye la fila de ceros con los coeficientes de la derivada de ***A(s)***.

  Con esto se continúa la construcción del arreglo.

Si No hay cambios de signo en los casos especiales *#1* o *#2*, esto indica que el Sistema es oscilatorio, (hay raíces imaginarias puras).

Criterio de Liénard – Chipart

- Determina si el polinomio característico tienen todas sus raíces con parte real negativa:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

- Condiciones necesarias pero no suficientes para que las raíces del ***P.C.*** tengan parte real negativa:
  - Todos los coeficientes deben tener el mismo signo
  - No falta ninguno de los coeficientes del polinomio (ningún $a_i = 0$)

Criterio de Liénard – Chipart

- Todos los determinantes de Hurwitz deben ser mayores a cero:

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 0 & a_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} > 0$$

Criterio de Liénard – Chipart

- Para polinomios de hasta orden 4:

	Condiciones para estabilidad
$p(s) = a_1 s + a_0$	$a_0, a_1 > 0$
$p(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$	$a_0, a_1, a_2 > 0$
$p(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$	$a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$ $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$
$p(s) = a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$	$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$ $a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0$