UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Desempeño del Lazo de Control

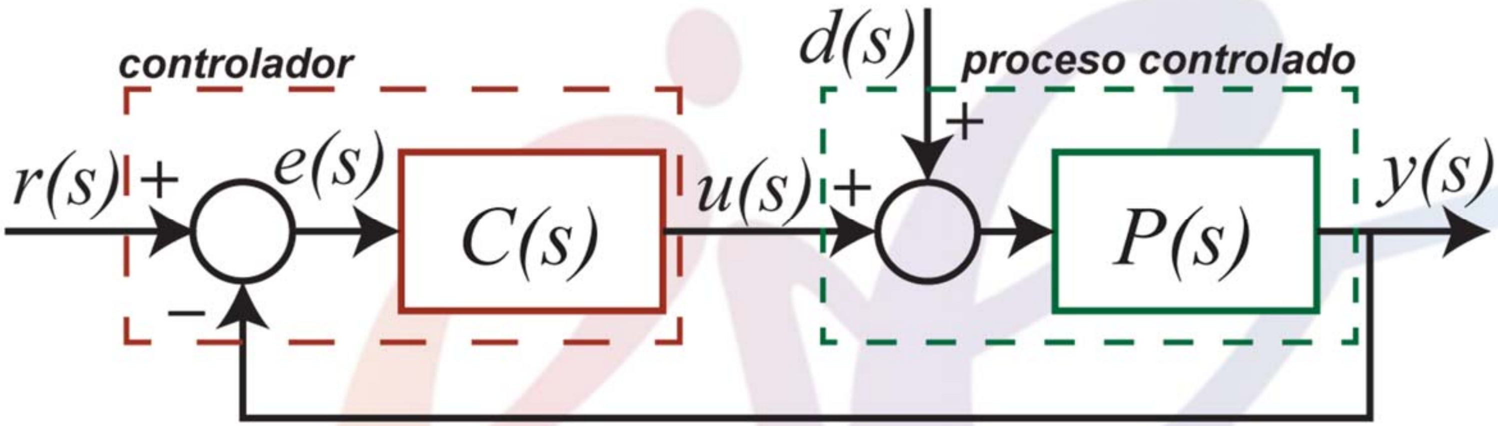
Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.
leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Desempeño de los Lazos de Control

- Sistema de Control Realimentado:



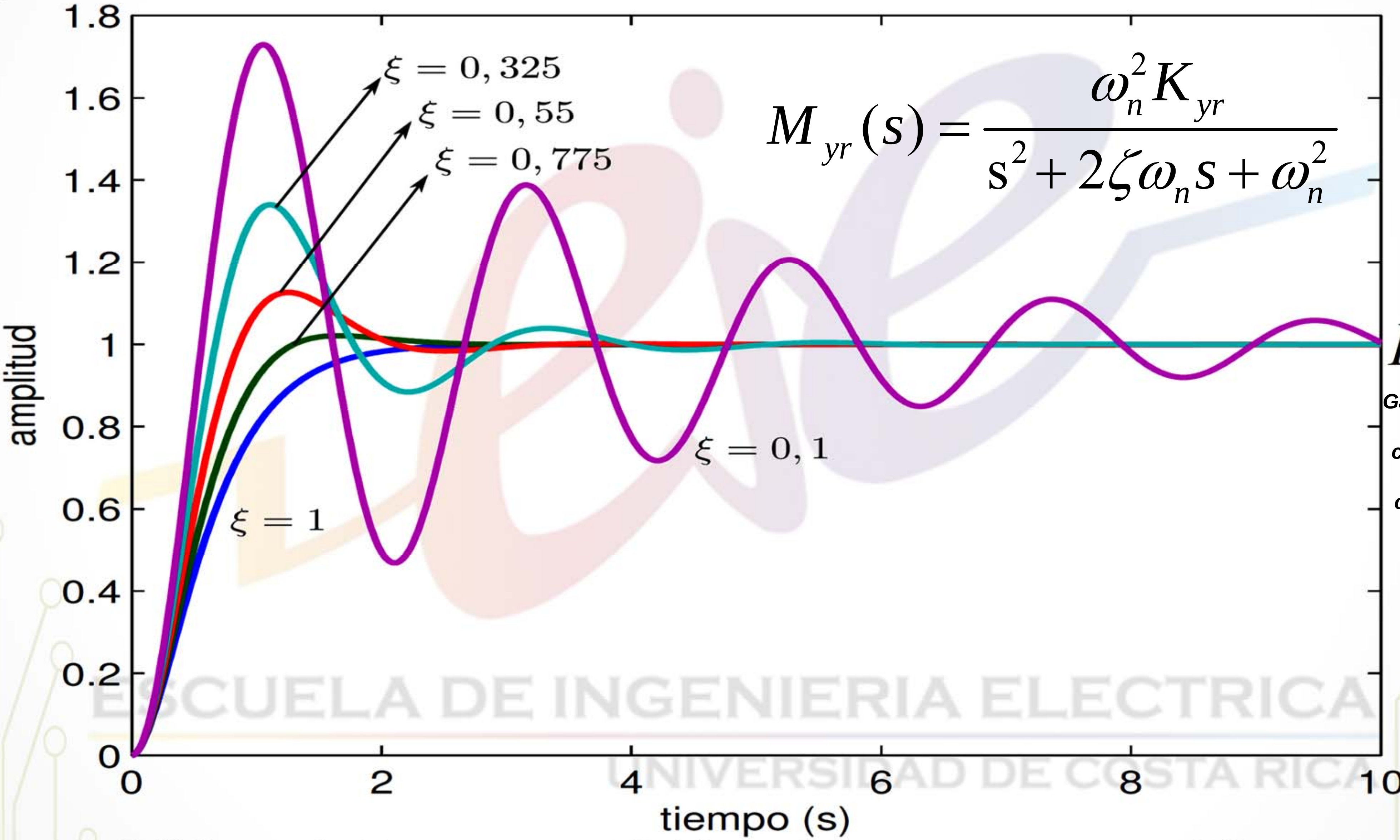
$$y(s)=\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}r(s)+\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}d(s)$$

$$y(s)=M_{yr}(s)r(s)+M_{yd}(s)d(s)$$

- Se supondrá que la respuesta del sistema actuando como ***servomecanismo*** es igual a la respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado:

$$M_{yr}(s)=\frac{\omega_n^2 K_{yr}}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

Respuesta Transitoria Subamortiguada

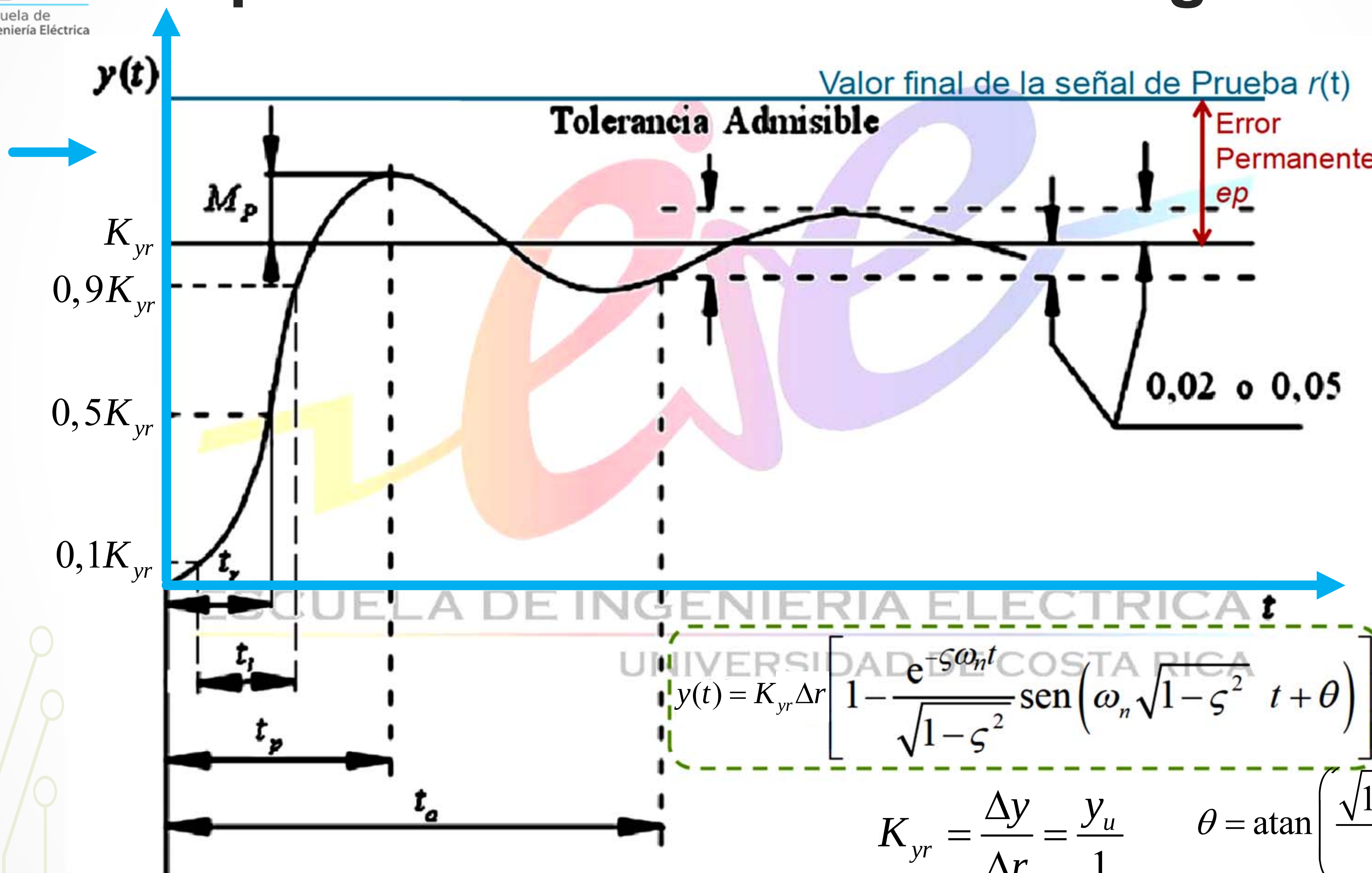


$$M_{yr}(s) = \frac{\omega_n^2 K_{yr}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

K_{yr}

Ganancia lazo cerrado servo control

Respuesta Transitoria Subamortiguada



$$y(t) = K_{yr}\Delta r\left[1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\,\mathrm{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\;t+\theta\right)\right]$$

$$K_{yr} = \frac{\Delta y}{\Delta r} = \frac{y_u}{1} \qquad \theta = \mathrm{atan}\left(\frac{\sqrt{1-\varsigma^2}}{\varsigma}\right)$$

Tiempo de retardo (t_r)

- Tiempo necesario para que la respuesta alcance el 50% de su valor final.
- No existe una expresión analítica para su cálculo, pero se obtiene una aproximación confiable utilizando las expresión:

Más precisa

$$t_r \cong \frac{1,1+0,125\zeta+0,469\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0<\zeta<1$$

Más simple

$$\boxed{t_r = \frac{1+0,7\zeta}{\omega_n} \qquad 0<\zeta<1}$$

Tiempo de levantamiento (t_l)

- Tiempo necesario para que la respuesta pase del **10% al 90%** del valor final, ese tiempo puede aproximarse por la ecuación cuadrática:

Más precisa

$$t_l \cong \frac{1-0,4167\zeta+2,917\zeta^2}{\omega_n} \qquad 0<\zeta<1$$

Más simple

$$\boxed{t_l = \frac{0,6+2,16\zeta}{\omega_n} \qquad 0,4\le\zeta\le 0,8}$$

Tiempo de asentamiento (t_a)

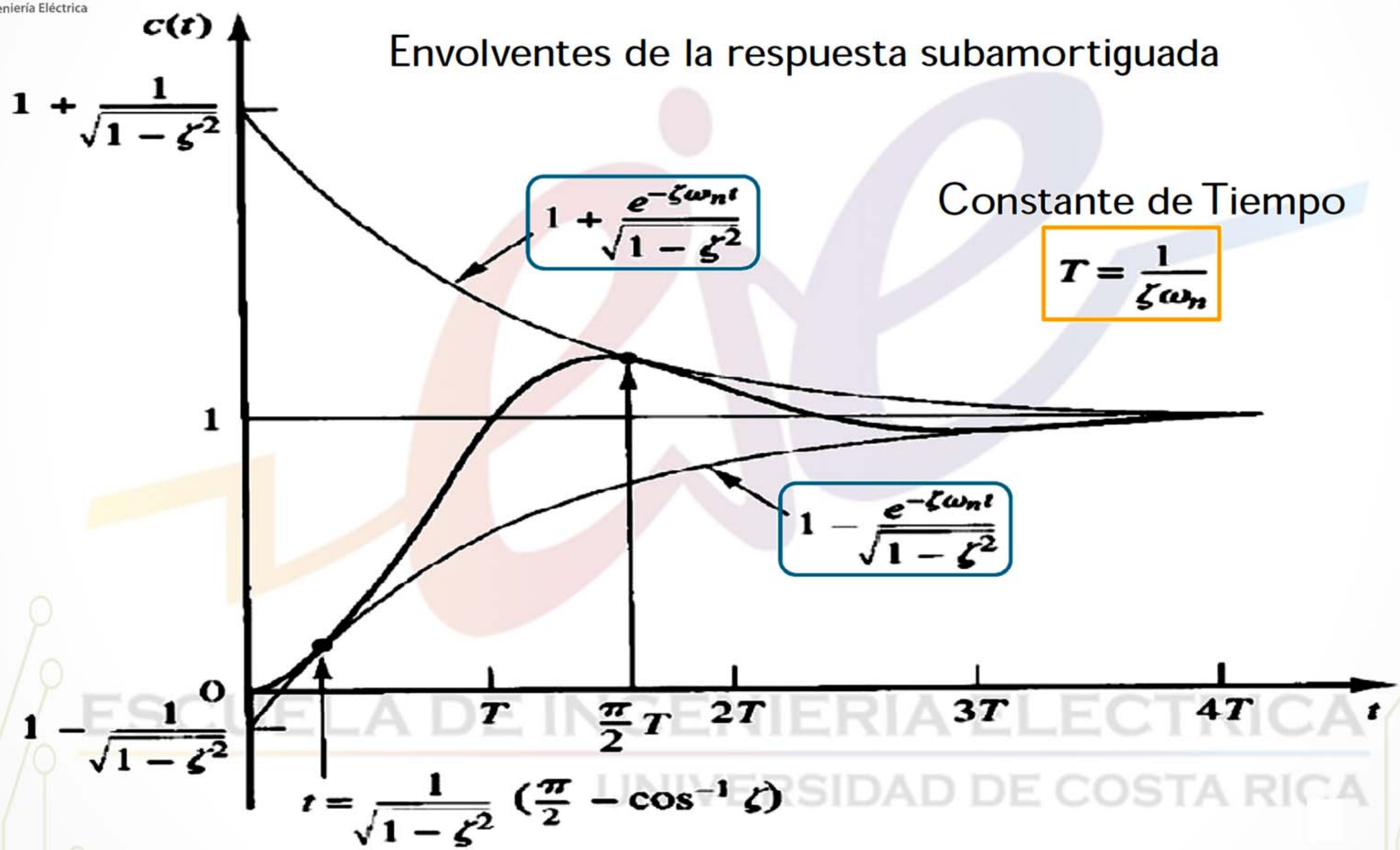
- Es el tiempo necesario para que la respuesta transitoria alcance y se mantenga dentro de una banda (5% o 2%) alrededor del valor final.

- Envolventes de la respuesta subamortiguada son exponenciales del tipo $e^{-t/\boxed{T}}$

$$\boxed{K_{yr}\left(1 \pm \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\right)}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{\varsigma\omega_n}}$$

Tiempo de asentamiento (t_a)



Tiempo de asentamiento (t_a)

- Cuando han transcurrido tres constantes de tiempo, el exponencial $e^{-t/T}$ a decaído aproximadamente un 95%
- Entonces el Tiempo de Asentamiento a una banda del 5% es:

Solo para subamortiguado

Más simple

$$\boxed{t_{a5\%} \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \qquad \zeta \leq 0{,}83} \qquad t_{a5\%} \approx \frac{7\zeta - 2{,}2}{\omega_n} \qquad 0{,}83 < \zeta \leq 1{,}4$$

Más precisa

- De forma similar el Tiempo de Asentamiento a una banda del 2% es:

Más simple

$$\boxed{t_{a2\%} \approx \frac{4}{\varsigma\omega_n} \qquad \zeta \leq 0{,}88} \qquad t_{a2\%} \approx \frac{10\zeta - 2{,}2}{\omega_n} \qquad 0{,}88 < \zeta \leq 1{,}4$$

Más precisa

Solo para subamortiguado

Sobreelongación Porcentual (*Mp*) y *Tp*

- Se le conoce también como <u>*Sobrepaso Máximo*</u> o Desvío dinámico máximo
- Es el máximo valor de la respuesta respecto al valor en régimen permanente.

$$M_{pn\%} = \frac{y_{max} - y_u}{\Delta y} 100$$

(medición desde la gráfica de la respuesta temporal)

- En cada máximo debe cumplirse que $\dfrac{dy}{dt} = 0$, entonces: $t = \dfrac{n\pi}{\omega_n \sqrt{1-\varsigma^2}} \quad \forall n \in N_0$
- Tiempo al primer pico (*tp*) se da cuando *n=1*

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$ Periodo

Sobreelongación Porcentual (*Mp*)

- Sustituyendo el Tiempo al pico (*tp*) en:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}} \longrightarrow y(t) = K_{yr}\left[1 - \frac{e^{-\varsigma\omega_n t}}{\sqrt{1-\varsigma^2}}\operatorname{sen}\left(\omega_n\sqrt{1-\varsigma^2}\; t+\theta\right)\right]\Delta r$$

Se obtiene el sobrepaso <u>máximo porcentual</u>:

Normalizado

$$M_{pn\%} = 100\cdot e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \Rightarrow \varsigma = \sqrt{\frac{\left[\ln\left(\frac{\%Mp}{100}\right)\right]^2}{\pi^2+\left[\ln\left(\frac{\%Mp}{100}\right)\right]^2}}$$

$$M_{pn\%} = 100\cdot M_p$$

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Sobreelongación Porcentual (*Mp*)

- Sobrepaso máximo absoluto:

$$M_{pa\%} = 100 K_{yr} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Delta r_{\%}$$

- Variaciones entre índices de desempeño:

ζ	$M_{pn\%}$
0,20	52,7
0,25	44,4
0,30	37,2
0,35	30,9
0,40	25,4
0,45	20,5
0,50	16,5
0,60	9,5
0,70	4,6
0,80	1,5
0,90	0,15

$K_{yr} = 1$	$\zeta = 0{,}40$		
$\Delta r_{\%}$	$y(t_p)_{\%}$	$M_{pn\%}$	$M_{pa\%}$
10	12,54	25,4	2,54
20	25,08	25,4	5,08
40	50,15	25,4	10,15

ζ	$M_{pn\%}$	$\omega_n t_l$	$\omega_n t_p$	$\omega_n t_{a5}$	$\omega_n t_{a2}$
0,35	30,9	1,36	3,36	8,57	11,43
0,40	25,4	1,46	3,43	7,50	10,00
0,45	20,5	1,57	3,52	6,67	8,89
0,50	16,3	1,68	3,63	6,00	8,00
0,60	9,5	1,90	3,93	5,00	6,67
0,70	4,6	2,11	4,40	4,29	5,72
0,80	1,5	2,33	5,24	3,75	5,00

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Sistema Críticamente Amortiguado *(polo doble)*

- Es la respuesta más rápida posible sin que haya sobrepaso. Tampoco hay tiempo al pico o periodo en la respuesta

$$M_{yr}(s) = \frac{K_{yr}}{\left(T_c s + 1\right)^2}, \qquad \zeta = 1$$

T_c → *Constante de tiempo de lazo cerrado*

$$\boxed{\begin{array}{ll} t_l = 3{,}36T_c & t_{a5\%} = 4{,}74T_c \\ t_r = 1{,}68T_c & t_{a2\%} = 5{,}83T_c \end{array}}$$

Exclusivas para críticamente amortiguado

$$y(t) = K_{yr}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_c}\right)e^{-t/T_c}\right]\Delta r$$

Desempeño del control regulatorio

$$M_{yd}(s) = \frac{P(s)}{1 + C(s)P(s)} = \frac{D_c(s)N_p(s)}{D_c(s)D_p(s) + N_c(s)N_p(s)} = \frac{\omega_n^2 K_{yd} s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- Tiempo de asentamiento al 5%: $t_{a5\%emax}$ entrar y mantenerse en una banda del 5% del e_{max}.
- Sistema sub amortiguado

$$y(t) = \frac{K_{yd}\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \mathrm{e}^{-\zeta\omega_n t} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t\right)\Delta d$$

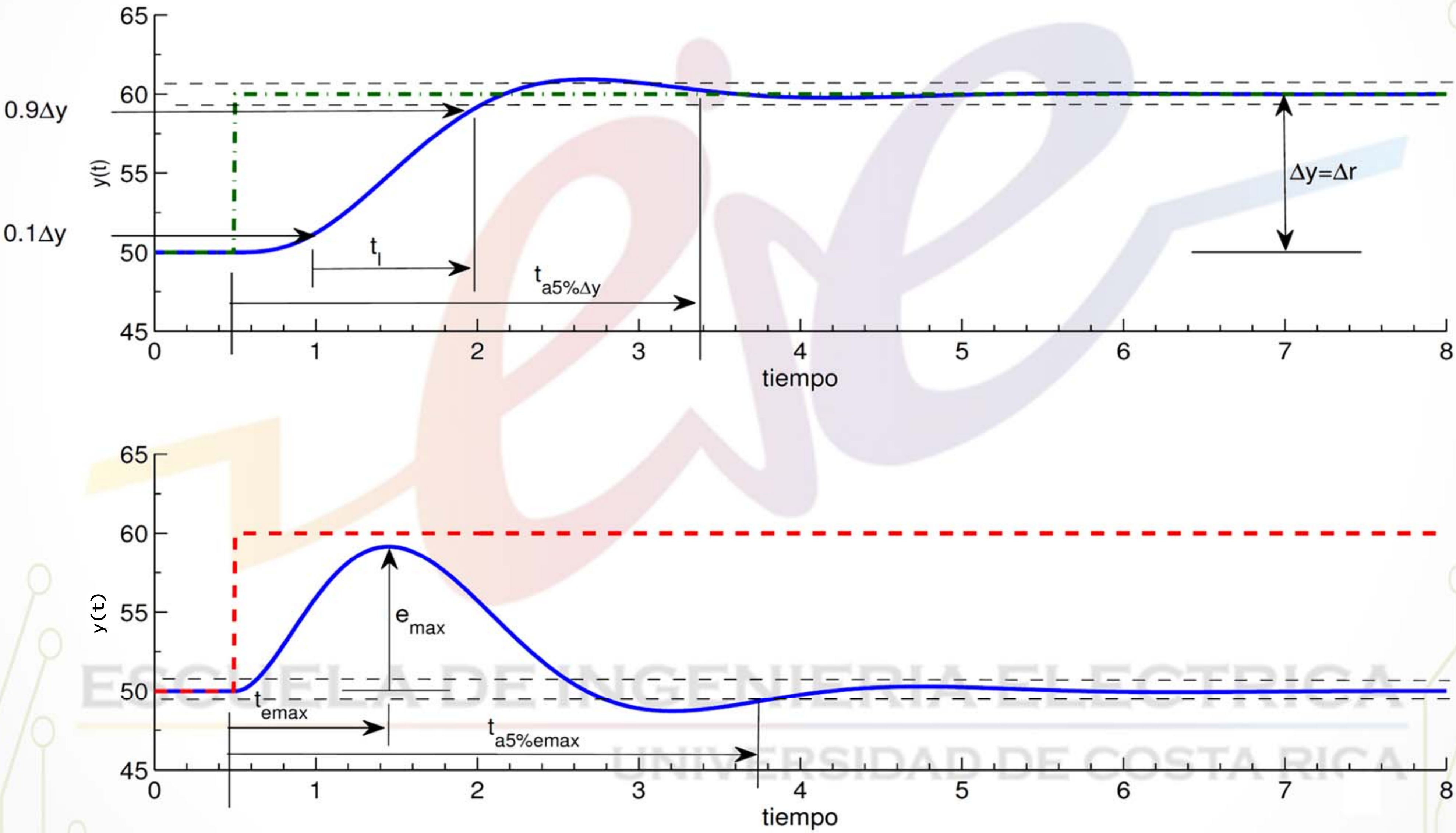
$$\boxed{t_{emax} = \frac{\cos^{-1}(\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}}, \quad \boxed{e_{max} = \omega_n K_{yd} \mathrm{e}^{-\zeta\cos^{-1}(\zeta)/\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

- Sistema críticamente amortiguado:

$$y(t) = K_{yd}\omega_n^2 t\mathrm{e}^{-\omega_n t}\Delta d, \quad \boxed{t_{emax} = \frac{1}{\omega_n}}, \quad \boxed{e_{max} = 0{,}368\omega_n K_{yd}}$$

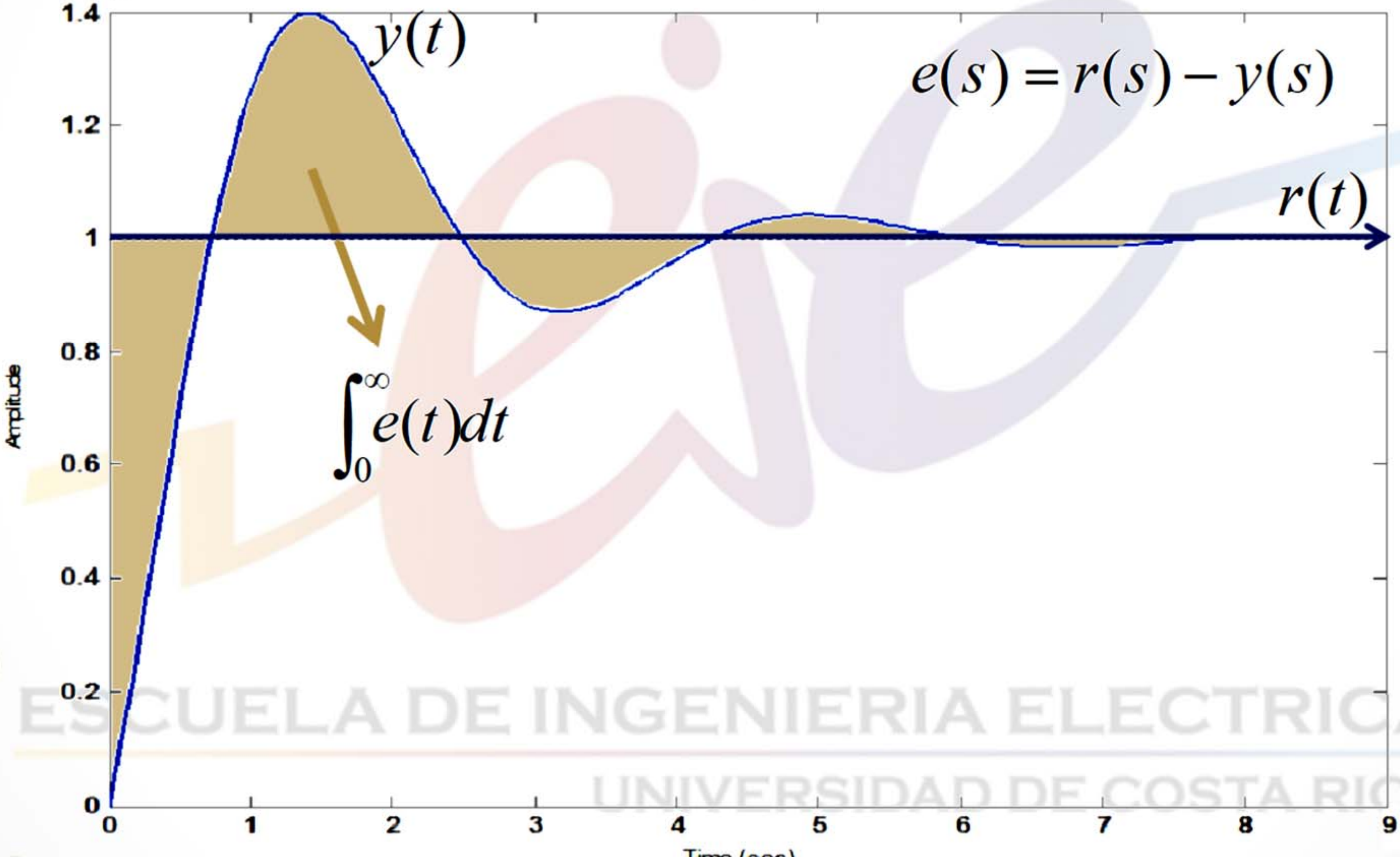
Desempeño del control regulatorio

Servo control y control Regulatorio con Error Permanente Cero



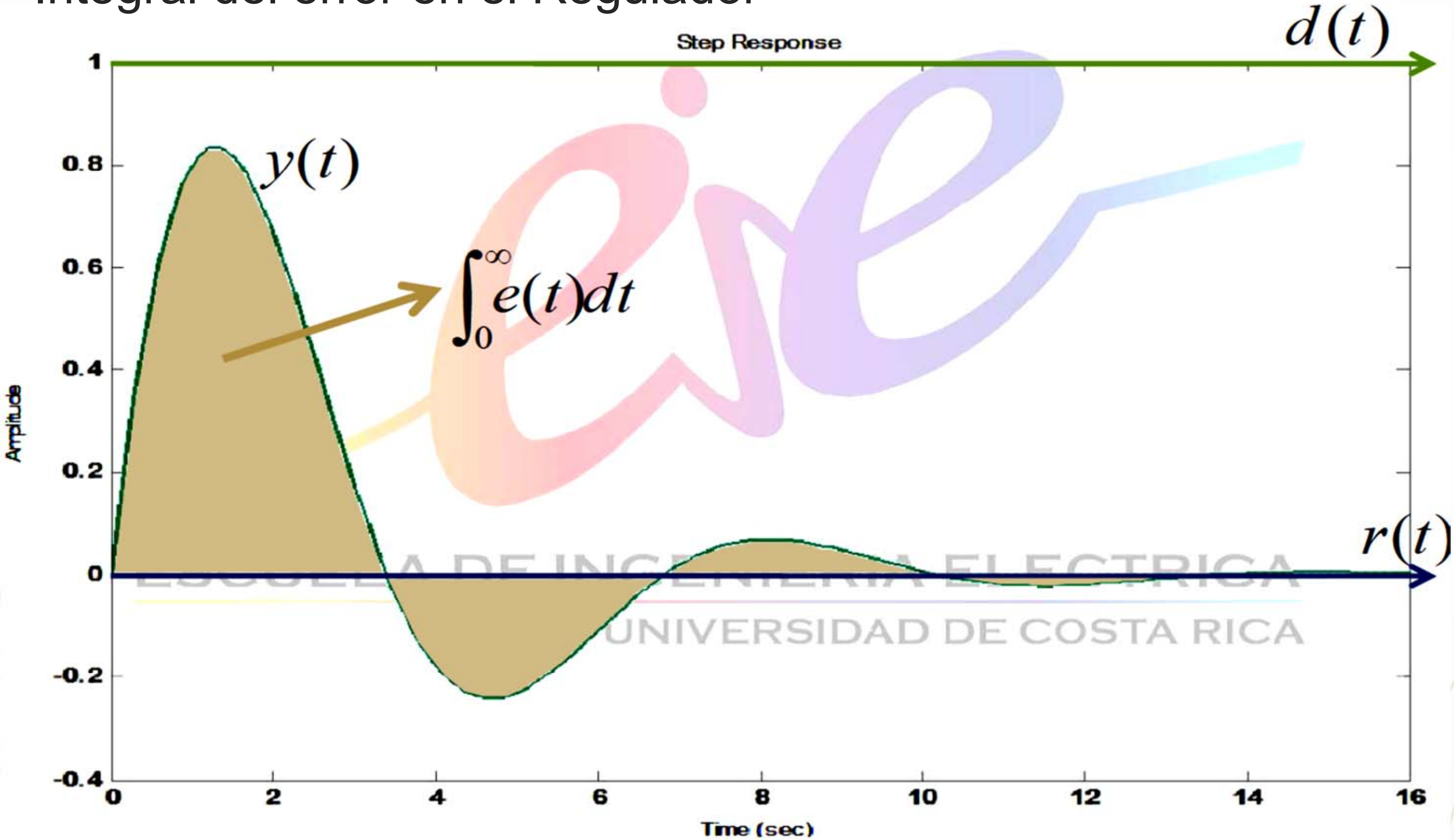
Índices integrales del desempeño

- Integral del error en el Servomecanismo



Índices integrales del desempeño

- Integral del error en el Regulador



EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Índices integrales del desempeño

Los criterios integrales más utilizados son:

- Integral del error absoluto – *IAE*:

$$J_{IAE} = \boxed{IAE = \int_0^{\infty} \left|e(t)\right| dt}$$

- Integral del error cuadrático – *ISE*:

$$J_{ISE} = ISE = \int_0^{\infty} e(t)^2 dt$$

- Integral del tiempo por el error absoluto – *ITAE*:

$$J_{ITAE} = ITAE = \int_0^{\infty} t\left|e(t)\right| dt$$

- Integral del tiempo por el error cuadrático – *ITSE*:

$$J_{ITSE} = ITSE = \int_0^{\infty} te(t)^2 dt$$

- Criterio General IT^mAE^n:

$$J_{IT^m AE^n} = IT^m AE^n = \int_0^{\infty} t^m \left|e(t)\right|^n dt \qquad \begin{array}{l} m = \{0,1,2\} \\ n = \{1,2\} \end{array}$$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Esfuerzo de control

- Variación total del control:

$$\boxed{TV_u = \sum_{k=1}^{\infty} \doteq |u_{k+1} - u_k|}$$

- Evaluada para un cambio en el valor deseado (***Tv**$_{ur}$*), y en la perturbación (***Tv**$_{ud}$*). Mide la suavidad del esfuerzo de control.
- "Salto" inicial a la salida del controlador
  - Derivada aplicada solo a la señal realimentada

$$\Delta u_0 \doteq K_p \beta \Delta r$$

  - Derivada aplicada directamente al error $\Delta u_0 \doteq K_p \left(\beta + \frac{1}{\alpha}\right) \Delta r$
  - Esfuerzo de control máximo ***U**$_{max}$*

Diseño basado en el desempeño

- De la restricción de M_p se puede elegir el valor de ζ
- El Tiempo de Asentamiento estará determinado por la frecuencia natural ω_n
- Se puede modificar la duración del transitorio sin afectar el sobrepaso máximo
- Esto se cumple siempre y cuando el sistema de control realimentado se comporte *de forma similar* a un sistema de segundo orden subamortiguado:

$$M_{yr}(s) = \frac{\omega_n^2 K_{yr}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Error Permanente

- ***Servomecanismo***: *(d(s)=0)*

$$y(s)=\underbrace{\boxed{\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}}}_{\textit{servomecanismo}}r(s)$$

- Se tiene que la señal de error esta dada por: $e(s)=r(s)-y(s)$

$$e(s)=r(s)-\frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)}r(s)=\frac{1}{1+C(s)P(s)}r(s)$$

- Error permanente servomecanismo:

$$\boxed{e_{pr}=\lim_{s\to 0}se(s)=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+C(s)P(s)}r(s)}$$

- Para evaluar este límite se debe conocer el tipo de señal de entrada al sistema

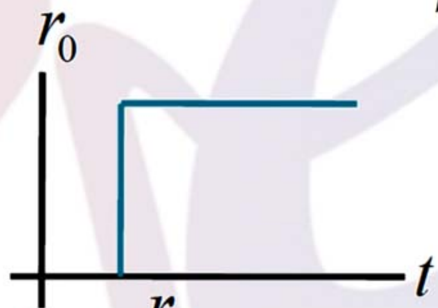
Error Permanente

- Señal de entrada general al sistema:

$$r_m(t) = t^m u_s(t) \Rightarrow r_m(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$$

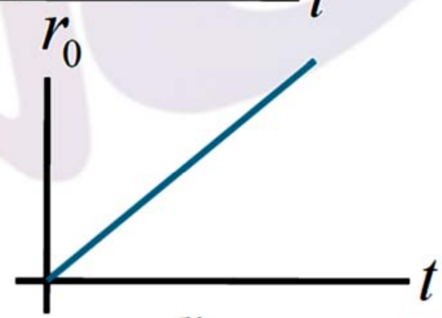
Escalón Unitario *(m=0)*

$$r_0(s) = \frac{1}{s}$$



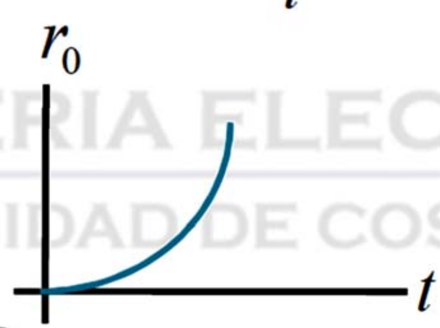
Rampa Unitaria *(m=1)*

$$r_1(s) = \frac{1}{s^2}$$



Parábola Unitaria *(m=2)*

$$r_2(s) = \frac{1}{s^3}$$



EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Error Permanente

- Se utiliza la entrada general r_m para encontrar el error permanente del servomecanismo $r_m(s) = \frac{1}{s^{m+1}}$

$$\Rightarrow e_{prm} = \lim_{s \to 0} \frac{s / s^{m+1}}{1 + C(s)P(s)}$$

$$\Rightarrow e_{prm} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^m + s^m C(s)P(s)}$$

$$\Rightarrow e_{prm} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^m + \lim_{s \to 0} s^m C(s)P(s)}$$

$$\boxed{\therefore e_{prm} = \frac{1}{\lim_{s \to 0} s^m + k_m}}$$

Donde se define la constante del error como: $\boxed{k_m = \lim_{s \to 0} s^m C(s)P(s)}$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Error Permanente

- La evaluación del límite de la constante del error depende la FTLA

$$k_m = \lim_{s\to 0} s^m C(s)P(s) = \lim_{s\to 0} s^m L(s)$$

Suponiendo que

$$P(s) = \frac{k \prod_{i=1}^{n}(z_i s+1)}{s^{\boxed{np}} \prod_{j=1}^{m}(p_j s+1)} = \frac{k}{s^{np}} P'(s)$$

$$C(s) = \frac{K_p \prod_{i=1}^{n}(z_i s+1)}{s^{\boxed{nc}} \prod_{j=1}^{m}(p_j s+1)} = \frac{K_p}{s^{nc}} C'(s)$$

Donde *np* es el # de polos en el origen de la planta y *nc* el # de polos en el origen del controlador. Entonces:

$$L(s) = C(s)P(s) = \frac{K_p k \prod_{i=1}^{n}(\text{Ceros de la planta y del controlador})}{s^{np+nc} \prod_{j=1}^{m}(\text{Polos de la planta y del controlador})}$$

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Error Permanente

- Se define el TIPO de una función de transferencia como el # de polos que tenga en su origen:
  - El Tipo de la planta es *np*
  - El Tipo del controlador es *nc* (tipo 0=P, PD, tipo 1=PI, PID)
  - *El Tipo del sistema de control es igual al # de polos en el origen que tenga su FTLA y esto es igual a* $\boxed{np+nc}$
- Error Permanente Entrada Tipo Escalón:

$$\boxed{e_{pr0} = \frac{1}{1+k_0} \qquad k_0 = \lim_{s\to 0} s^0 L(s) = \lim_{s\to 0} \frac{K_p k}{s^{np+nc}}}$$

*Para que el error permanente a una entrada escalón sea cero, el sistema debe ser tipo **1** o mayor.*

Error Permanente

- Error Permanente Entrada Tipo Rampa:

$$e_{pr1} = \frac{1}{k_1} \qquad k_1 = \lim_{s\to 0} s^1 L(s) = \lim_{s\to 0} \frac{sK_p k}{s^{np+nc}}$$

- *Para que el error permanente a una entrada rampa sea cero, el sistema debe ser tipo 2 o mayor.*

En resumen:

Sistema Tipo	Constante del Error		Error Permanente a	
	k_0	k_1	Escalón $e_{pr0} = \frac{1}{1+k_0}$	Rampa $e_{pr1} = \frac{1}{k_1}$
0	$K_p k$	0	$\frac{1}{1+K_p k}$	∞
1	∞	$K_p k$	0	$\frac{1}{K_p k}$
2	∞	∞	0	0

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Error Permanente

- ***Regulador*** : ***r(s)=0*** $\Rightarrow e(s) = 0 - y(s) = 0 - \underbrace{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}d(s)}_{y(s)}$

$$\boxed{e_{pd} = \lim_{s\to 0} se(s)}$$

Entrada tipo Escalón

- Para una planta tipo 0 (***np=0***) y un controlador tipo 0 (***nc=0***).

$$e_{pd0}(s) = \frac{-k}{1+K_p k}$$

- Para una planta tipo 1 (***np=1***, *plata integrante*) y un controlador tipo 0 (***nc=0***).

$$e_{pd0}(s) = -\frac{1}{K_p}$$

- Para una planta tipo 0 (***np=0***) y un controlador tipo 1 (***nc=1***).

$$e_{pd0}(s) = 0$$

- Para una planta tipo 1 (***np=1***) y un controlador tipo 1 (***nc=1***).

$$e_{pd0}(s) = 0$$

Error Permanente

- **Regulador** : ***r(s)=0*** $\Rightarrow e(s) = 0 - y(s) = 0 - \underbrace{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}d(s)}_{y(s)}$

$$\boxed{e_{pd} = \lim_{s\to 0} se(s)}$$

Entrada tipo Rampa

- Para un controlador tipo 0 (***nc=0***).

$$e_{pd1}(s) = \infty$$

- Para un controlador tipo 1 (***nc=1***).

$$e_{pd1}(s) = -\frac{1}{K_p}$$

Error Permanente

- Servocontrol: Para que el error permanente a un cambio escalón en valor deseado sea cero, $\boldsymbol{e_{pr} = 0}$, se necesita que ***L(s)*** **tenga al menos un polo en el origen** ("***sistema de control Tipo 1***"). El polo en el origen puede ser provisto por el controlador ***C(s)*** o por el proceso controlado ***P(s)***.
- Control Regulatorio: Para que el error permanente a un cambio escalón en la perturbación sea cero, $\boldsymbol{e_{pd} = 0}$, se necesita que ***C(s)*** tenga por lo menos un polo en el origen (PI o PID). Los polos en el origen del proceso, no contribuyen a eliminar el error permanente a un cambio en la perturbación.

Error Permanente normalizado y absoluto

Servo control

- Cambio en la respuesta

$$\Delta y_r = K_{yr} \Delta r$$

- Error permanente

$$\Delta e_{pr} = \Delta r - \Delta y_r = (1 - K_{yr}) \Delta r$$

- Error normalizado

$$\Delta e_{prn} = \frac{\Delta e_{pr}}{\Delta r}$$

- Para tener $\Delta y_r = \Delta r$

$$K_{yr} = 1 \Rightarrow M_{yr}(0) = 1$$

Control regulatorio

- Cambio en la respuesta

$$\Delta y_d = K_{yd} \Delta d$$

- Error permanente

$$\Delta e_{pd} = -\Delta y_d = -K_{yd} \Delta d$$

- Error normalizado

$$\Delta e_{pdn} = \frac{\Delta e_{pd}}{\Delta d}$$

- Para tener $\Delta y_d = 0$

$$K_{yd} = 0 \Rightarrow M_{yd}(0) = 0$$

Consideraciones para el Diseño de un sistema de control:

- Operación del sistema de control: Seguimiento de un valor deseado cambiante o atenuación del efecto de las perturbaciones.
- Algoritmo de control: PI, PID (estándar, serie, ...), de uno o dos grados de libertad.
- Índices de desempeño: Características de la respuesta transitoria o del error, índices de error integral.
- Uso del esfuerzo de control: Variación total, cambio inicial y valor máximo.
- Error permanente: error permanente requerido en la operación de lazo de control de acuerdo a su funcionamiento (servo/regulador) y según el tipo de entrada.