UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Control con Modelo Interno IMC / PID-IMC

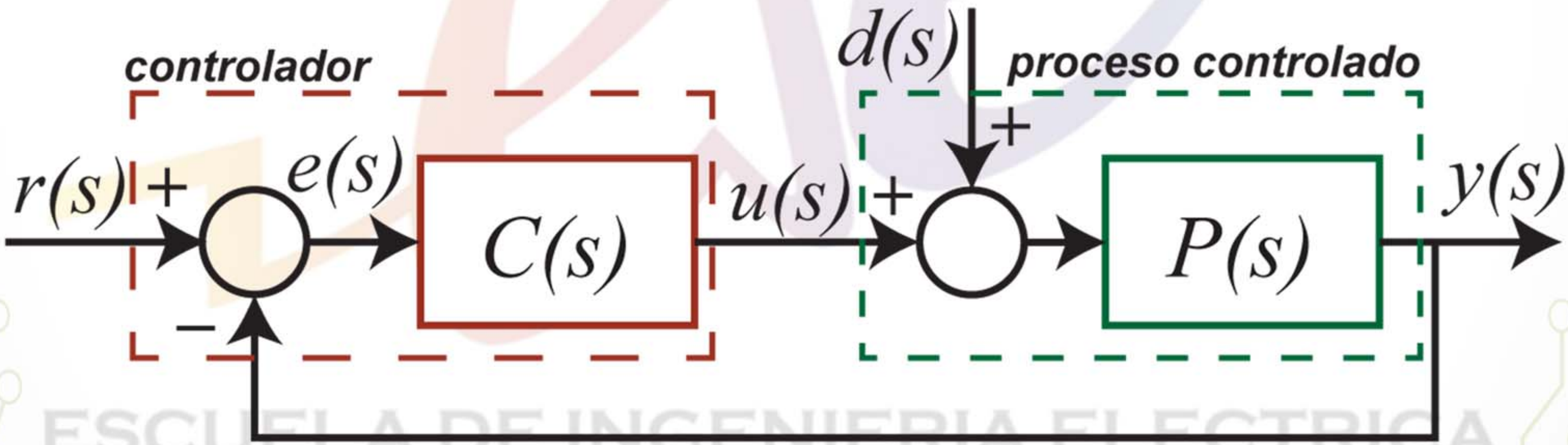
Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.
leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

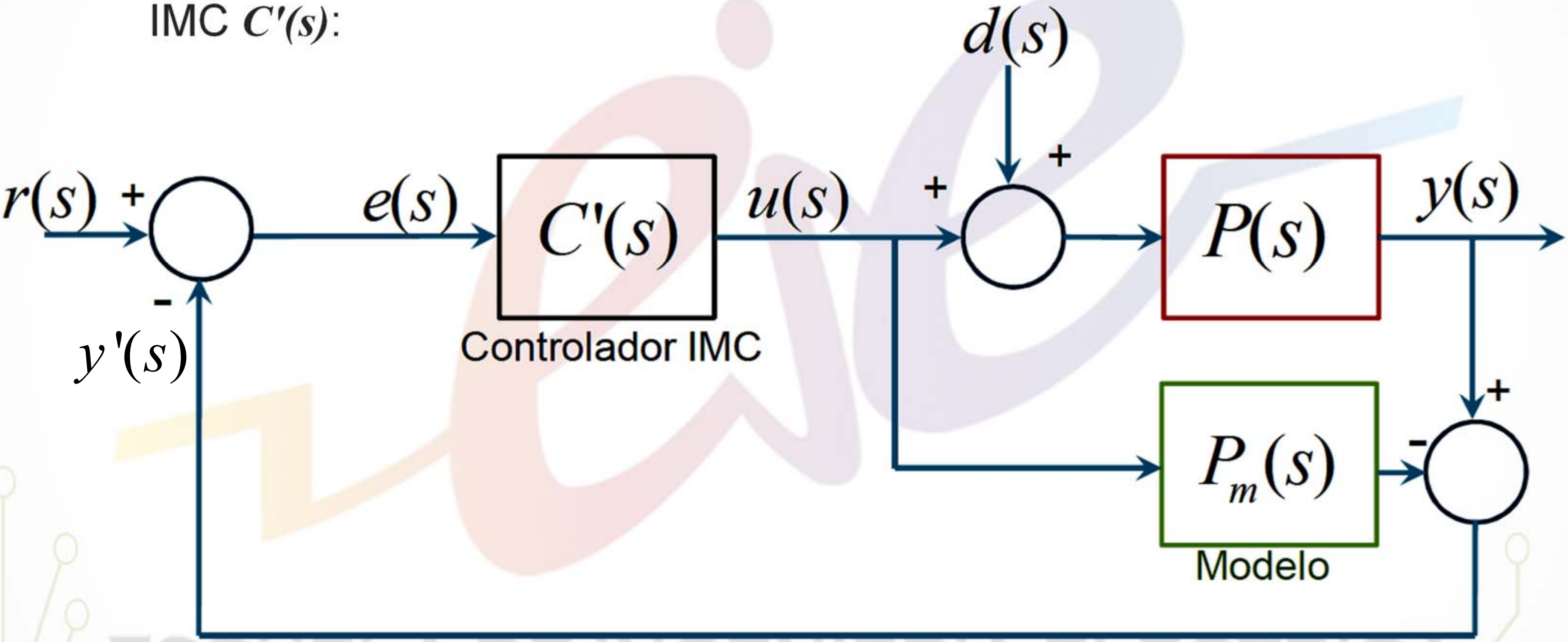
Control con Modelo Interno IMC

- Se tratarán ahora los métodos de sintonización de controladores derivados de la teoría de control con modelo interno como un grupo separado, por compartir todos estos una misma estructura y concepción general en su desarrollo.
- Sistema de control realimentado :



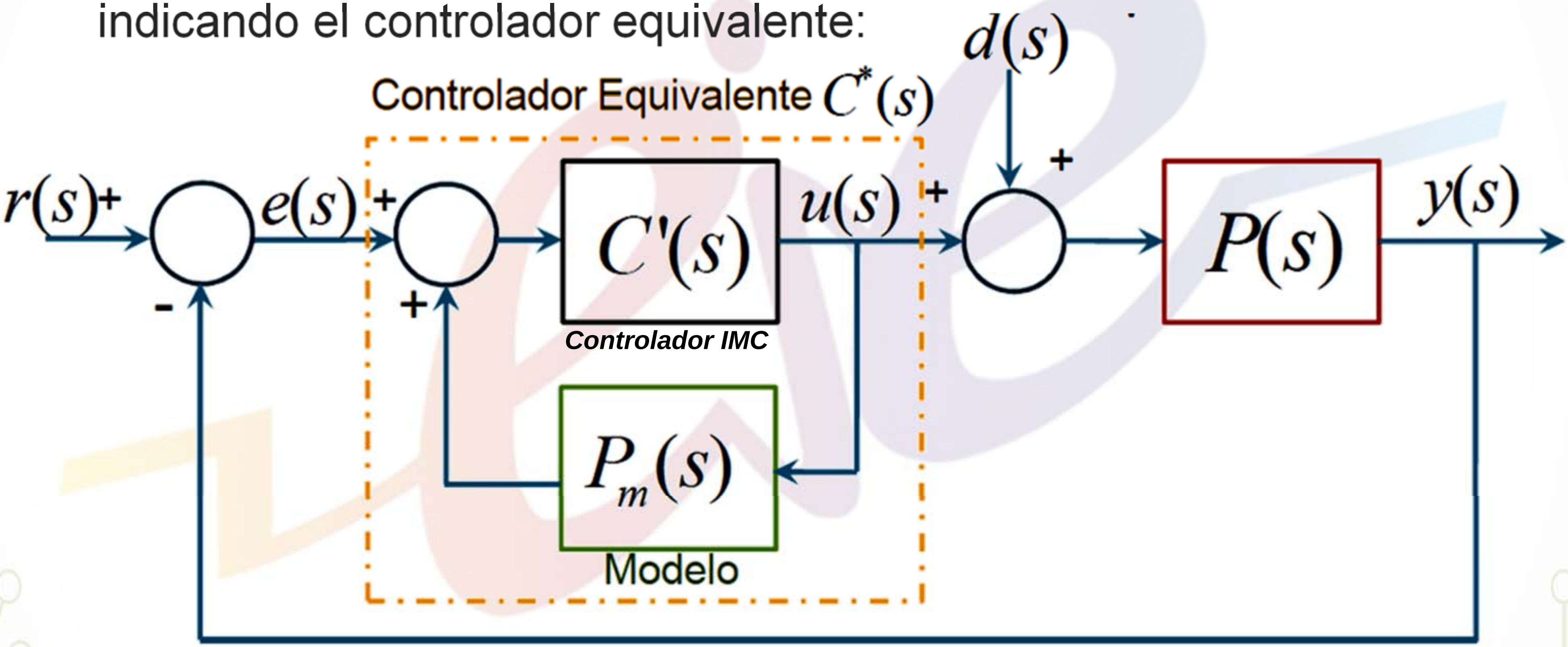
Control con Modelo Interno IMC

- Estructura **IMC** (**Internal Model Control**) Básica con el controlador IMC $C'(s)$:



Control con Modelo Interno IMC

- De la estructura IMC básica se obtiene el **Esquema de control IMC** indicando el controlador equivalente:



- Función de Transferencia del Controlador Equivalente:

$$\boxed{C^*(s) = \frac{C'(s)}{1 - C'(s)P_m(s)}}$$

Control con Modelo Interno IMC

- Del **Esquema de control IMC** se obtiene la respuesta del sistema:

$$y(s)=\frac{C^{*}(s)P(s)}{1+C^{*}(s)P(s)}r(s)+\frac{P(s)}{1+C^{*}(s)P(s)}d(s)$$

- Sustituyendo el controlador equivalente: $C^{*}(s)=\dfrac{C'(s)}{1-C'(s)P_m(s)}$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{C'(s)P(s)}{1+\left[P(s)-P_m(s)\right]C'(s)}r(s)+\frac{\left[1-C'(s)P_m(s)\right]P(s)}{1+\left[P(s)-P_m(s)\right]C'(s)}d(s)$$

- **Para que el control sea perfecto**:

Servo control:

$$y(s)=r(s)\Rightarrow\boxed{\frac{y(s)}{r(s)}=1}$$

Control Regulatorio:

$$\boxed{\frac{y(s)}{d(s)}=0}$$

Control con Modelo Interno IMC

- Para tener un control perfecto se requiere entonces que:
  1. $P_m(s) = P(s)$ ***El modelo es perfecto***
  2. $C'(s)P(s) = 1 \Rightarrow C'(s) = P^{-1}(s)$ ***El controlador IMC es la inversa exacta del modelo perfecto***

$$\Rightarrow C'(0) = P_m^{-1}(0) \Rightarrow C'(0)P_m(0) = 1 \Rightarrow \boxed{M_{yr}(0) = 1, M_{yd}(0) = 0}$$

- Sin embargo, ***<u>ningún</u> modelo es perfecto,*** *y*
- ***No hay un controlador que pueda invertir <u>completamente</u> el modelo:***
  - Si el modelo es una FT propia, la inversa será impropia.
  - Si el modelo tiene tiempo muerto, el inverso sería un predictor.
  - Si el modelo es de fase no mínima, la inversa tendría un polo inestable.
- **Para resolver esto se debe separar el modelo en su parte invertible (–) y en su parte no invertible (+):**

Control con Modelo Interno IMC

- Para resolver esto se debe separar el modelo en su parte invertible (**–**) y en su parte no invertible (**+**):

$$P_m(s) = \underbrace{P_{m-}(s)}_{\text{Parte Invertible}}\underbrace{P_{m+}(s)}_{\text{Parte NO Invertible}}$$

Parte Invertible: conformada por la ***Ganancia*** junto con los polos y ceros en el semiplano ***izquierdo***

Parte NO Invertible: conformada por los ceros en el semiplano ***derecho*** y por el ***tiempo muerto***

- Se define el **Controlador IMC como:**

$$\boxed{C'(s) = C_{IMC}(s) = P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}$$

Control con Modelo Interno IMC

- **Controlador IMC:**

$$C'(s) = C_{IMC}(s) = P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)$$

- Donde:

$$\boxed{G_f(s) = \frac{1}{\left(T_f s + 1\right)^n}}$$

Filtro necesario para que la función de transferencia de $C_{IMC}(s)$ sea propia

- T_f es la constante de tiempo del filtro establecida por el criterio de diseño (afecta la **velocidad** de respuesta y ***robustez*** del lazo)
- ***n*** es el orden necesario del filtro para que ***$C_{IMC}(s)$*** sea <u>propia</u> (cantidad de polos ≥ cantidad de ceros).
- Controlador Equivalente:

$$C^*(s) = \frac{C'(s)}{1 - C'(s)P_m(s)} = \frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1 - P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)P_m(s)} = \frac{G_f(s)}{P_{m-}(s) - G_f(s)P_m(s)}$$

Control con Modelo Interno IMC

- Respuesta del sistema con el controlador equivalente:

$$y(s)=\frac{C^*(s)P(s)}{1+C^*(s)P(s)}r(s)+\frac{P(s)}{1+C^*(s)P(s)}d(s) \quad \text{y} \quad C^*(s)=\frac{G_f(s)}{P_{m-}(s)-G_f(s)P_m(s)}$$

$$\boxed{\Rightarrow y(s)=\frac{G_f(s)P(s)}{P_{m-}(s)+G_f(s)\left[P(s)-P_m(s)\right]}r(s)+\frac{P(s)\left[P_{m-}(s)-G_f(s)P_m(s)\right]}{P_{m-}(s)+G_f(s)\left[P(s)-P_m(s)\right]}d(s)}$$

- **Si el modelo es perfecto**: $P_m(s)=P(s)$

$$\boxed{y(s)=\frac{G_f(s)P(s)}{P_{m-}(s)}r(s)+\frac{P(s)\left[P_{m-}(s)-G_f(s)P_m(s)\right]}{P_{m-}(s)}d(s)}$$

Control con Modelo Interno IMC

- **Si el modelo es completamente invertible**: $P_{m+}(s)=1 \Rightarrow P_m(s)=P_{m-}(s)$
- **Modelo perfecto y completamente invertible**:

$$\Rightarrow \boxed{y(s)=G_f(s)r(s)+P_m(s)\left[1-G_f(s)\right]d(s)}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{yr}(s)=G_f(s)=\frac{1}{\left(T_f s+1\right)^n}}$$

- El valor de la constante de tiempo T_f del filtro varía la ***velocidad*** de la respuesta y afecta la ***robustez*** del lazo de control.
- El rango recomendado para T_f se selecciona según el Criterio de Brosilow para limitar la amplificación de ruido:

$$\boxed{\left|\frac{C_{IMC}(\infty)}{C_{IMC}(0)}\right| \leq 20}$$

Control con Modelo Interno IMC

- Procedimiento de diseño de un sistema de control IMC:

Dada una planta ***P(s)***:

1. Obtener el mejor modelo posible $P_m(s)$
2. Separar el modelo en su parte invertible y no invertible:

$$P_m(s) = P_{m-}(s)P_{m+}(s)$$

3. Controlador IMC:

$$C_{IMC}(s) = P_{m-}^{-1}(s)G_f(s) \longrightarrow G_f(s) = \frac{1}{\left(T_f s + 1\right)^n}$$

Para que $C_{IMC}(s)$ sea propia

4. Se selecciona la constante de tiempo para lograr la velocidad de la respuesta y robustez del servomecanismo, verificando que:

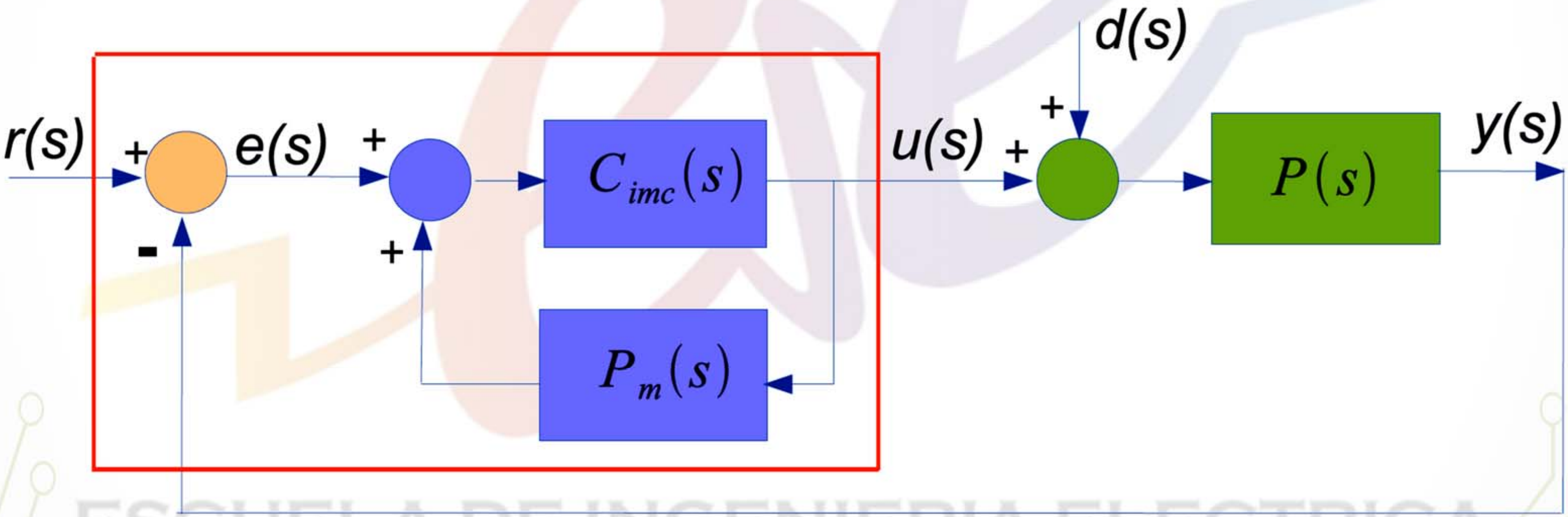
$$\left|\frac{C_{IMC}(\infty)}{C_{IMC}(0)}\right| \leq 20$$

- Ejemplos

Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplos

Sistema de control IMC



Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo

- Proceso controlado

$$P(s) = \frac{1,5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}$$

- Modelo perfecto

$$P_m(s) = P(s)$$

$$P_{m-}(s) = \frac{1,5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}$$

$$P_{m+}(s) = 1$$

- Controlador IMC

$$C_{imc}(s) = \frac{(5s+1)^2(2s+1)}{1,5(s+1)} \frac{1}{(T_f s+1)^2}$$

- Límite inferior de T_f

$$\left| \frac{C_{imc}(\infty)}{C_{imc}(0)} \right| \leq 20$$

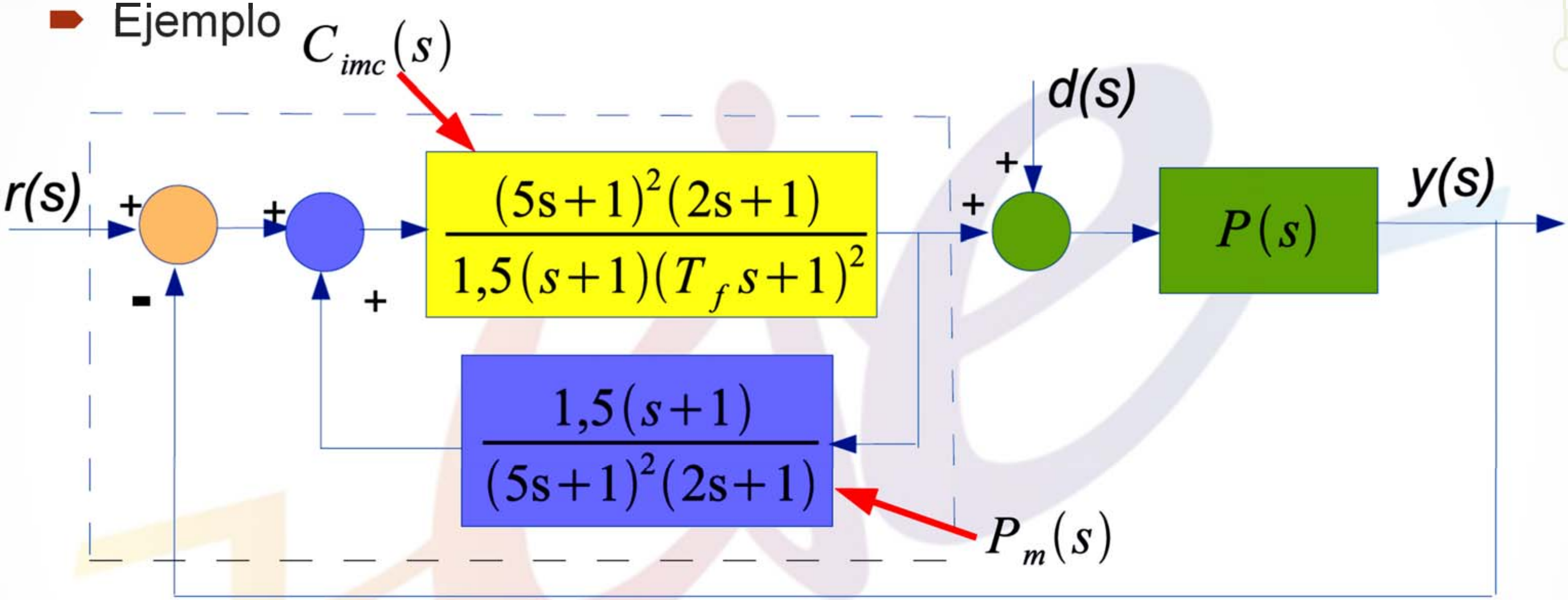
$$\frac{25*2}{1,5*1*T_f^2} \frac{1,5}{1} = \frac{50}{T_f^2} \leq 20$$

$$T_f^2 \geq 2,5 \Rightarrow T_f \geq 1,58$$

(límite recomendado)

Control con Modelo Interno IMC

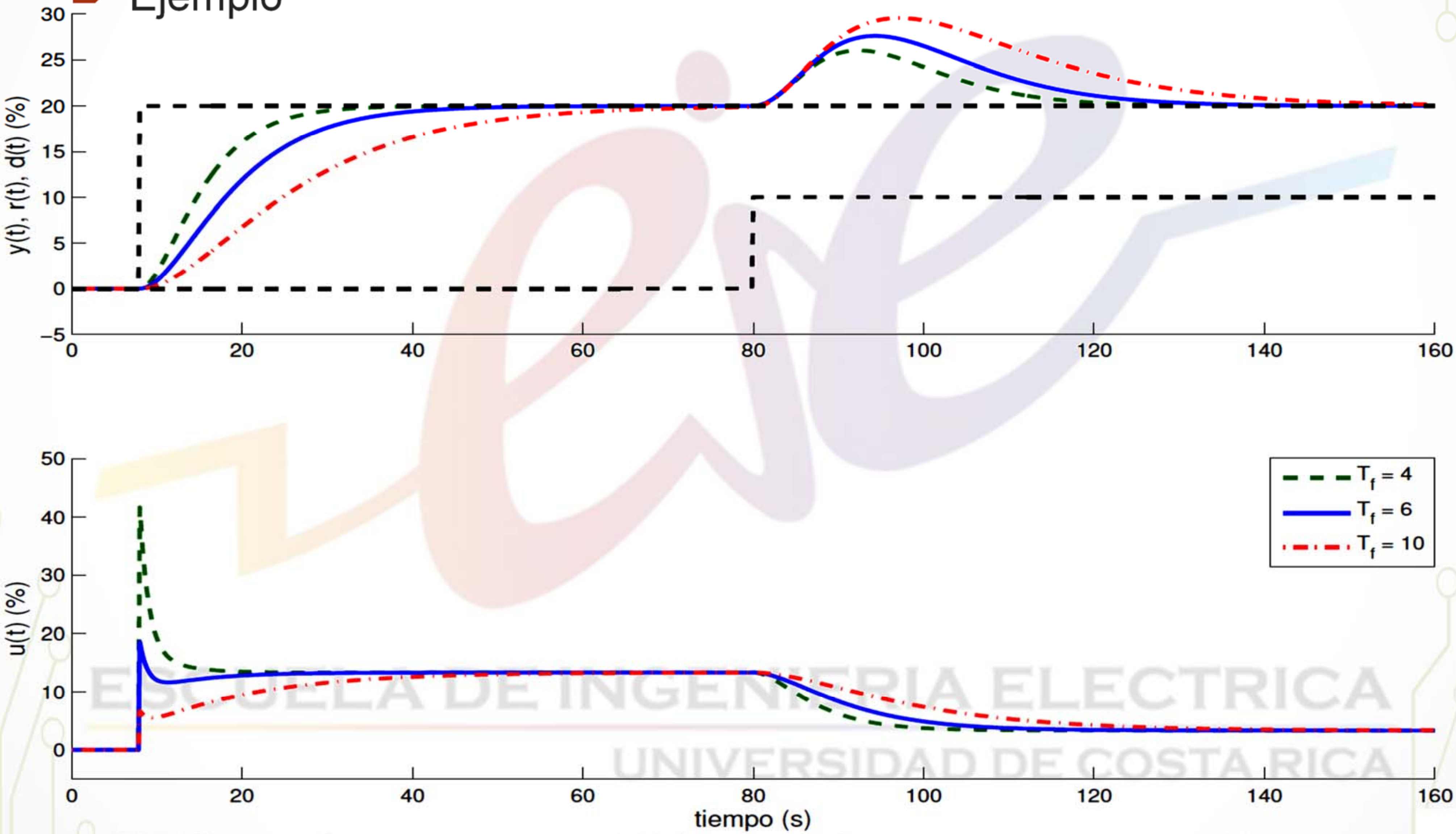
- Ejemplo



$$y(s)=\frac{1}{(T_f s+1)^2}r(s)+\left[1-\frac{1}{(T_f s+1)^2}\right]\left[\frac{1{,}5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}\right]d(s)$$

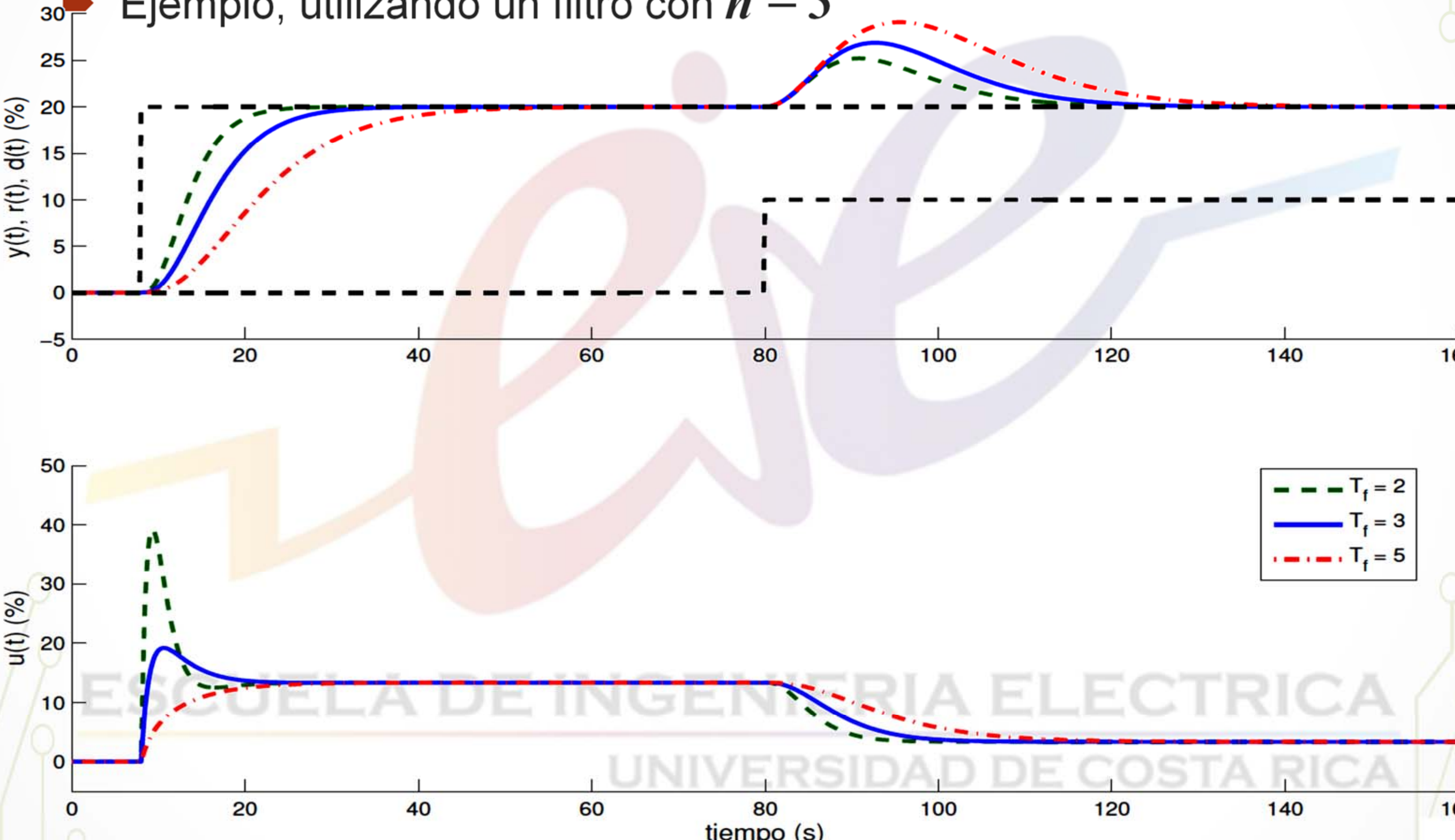
Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo



Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo, utilizando un filtro con $n = 3$



Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo

- Proceso controlado

$$P(s) = \frac{1{,}5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}$$

- Modelo de POMTM

$$P_m(s) = \frac{1{,}5e^{-3{,}31s}}{8{,}184s+1}$$

$$P_{m-}(s) = \frac{1{,}5}{8{,}184s+1}$$

$$P_{m+}(s) = e^{-3{,}31s}$$

- Controlador IMC

$$C_{imc}(s) = \frac{8{,}184s+1}{1{,}5(T_f s+1)}$$

- Límite inferior de T_f

$$\left|\frac{C_{imc}(\infty)}{C_{imc}(0)}\right| \leq 20$$

$$\frac{8{,}184}{1{,}5 * T_f}\frac{1{,}5}{1} = \frac{8{,}184}{T_f} \leq 20$$

$$\Rightarrow T_f \geq 0{,}41$$

Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo

- Proceso controlado

$$P(s) = \frac{1{,}5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}$$

- Mejor modelo (PDMTM)

$$P_m(s) = \frac{1{,}5\mathrm{e}^{-0{,}675s}}{(5{,}193s+1)^2}$$

$$P_{m-}(s) = \frac{1{,}5}{(5{,}193s+1)^2}$$

$$P_{m+}(s) = \mathrm{e}^{-0{,}675s}$$

- Controlador IMC

$$C_{imc}(s) = \frac{(5{,}193s+1)^2}{1{,}5(T_f s+1)^2}$$

- Límite inferior de T_f

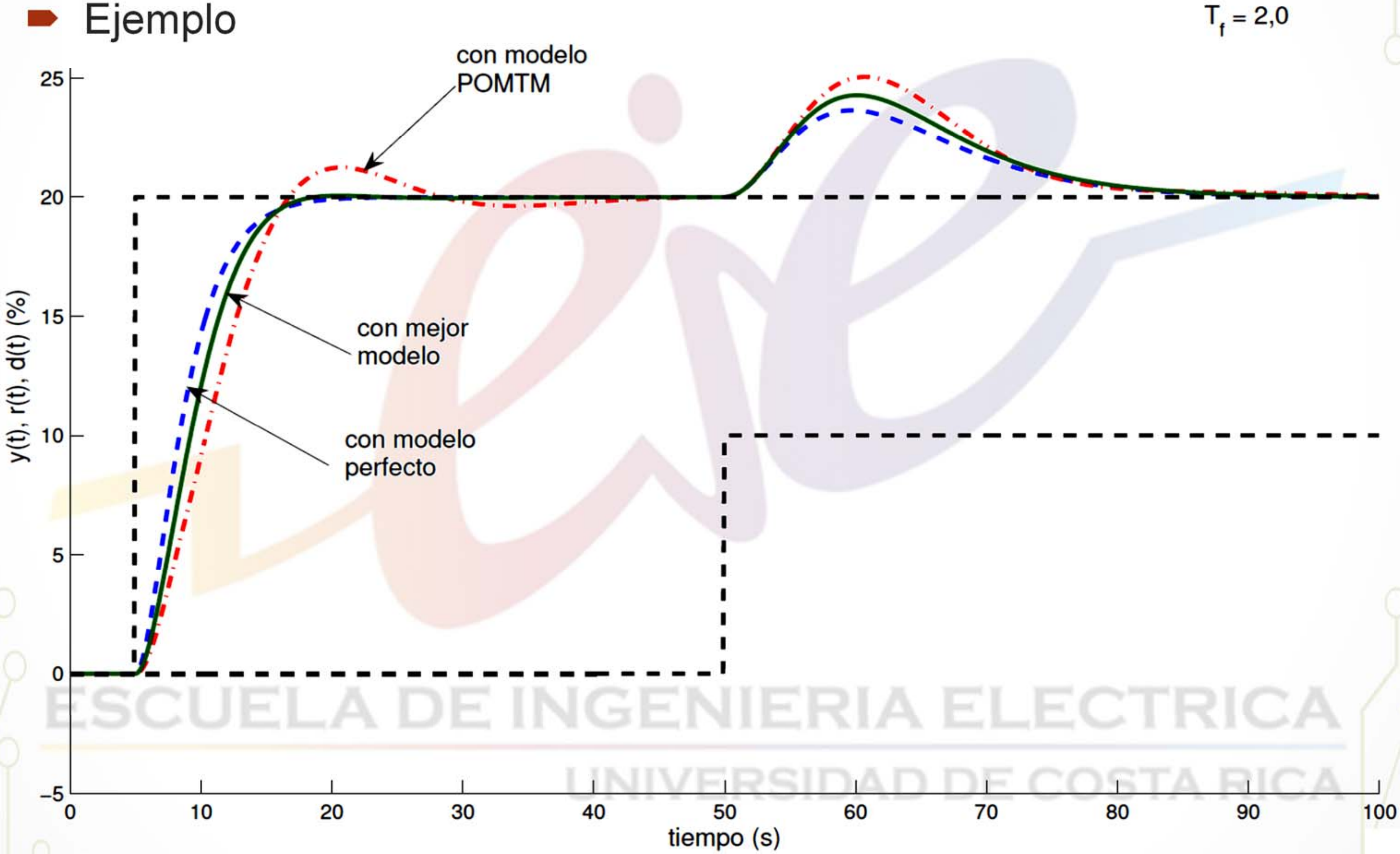
$$\left|\frac{C_{imc}(\infty)}{C_{imc}(0)}\right| \leq 20$$

$$\frac{(5{,}192)^2}{1{,}5 * T_f^2}\frac{1{,}5}{1} = \frac{26{,}96}{T_f^2} \leq 20$$

$$\Rightarrow T_f \geq 1{,}16$$

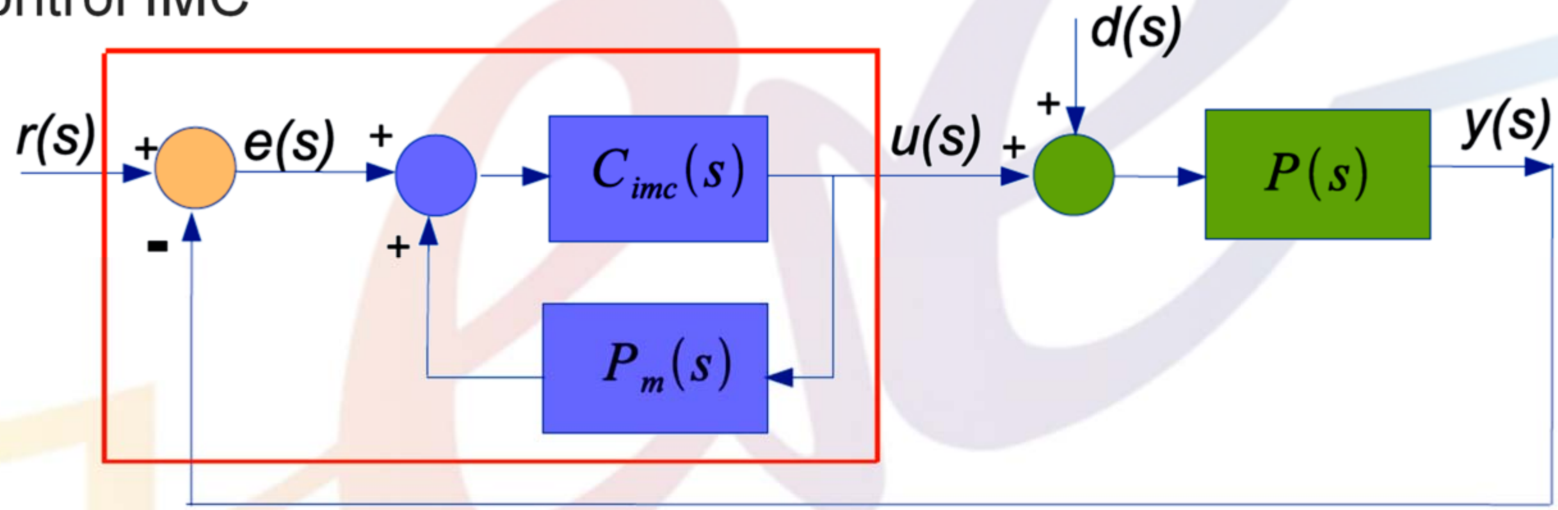
Control con Modelo Interno IMC

- Ejemplo

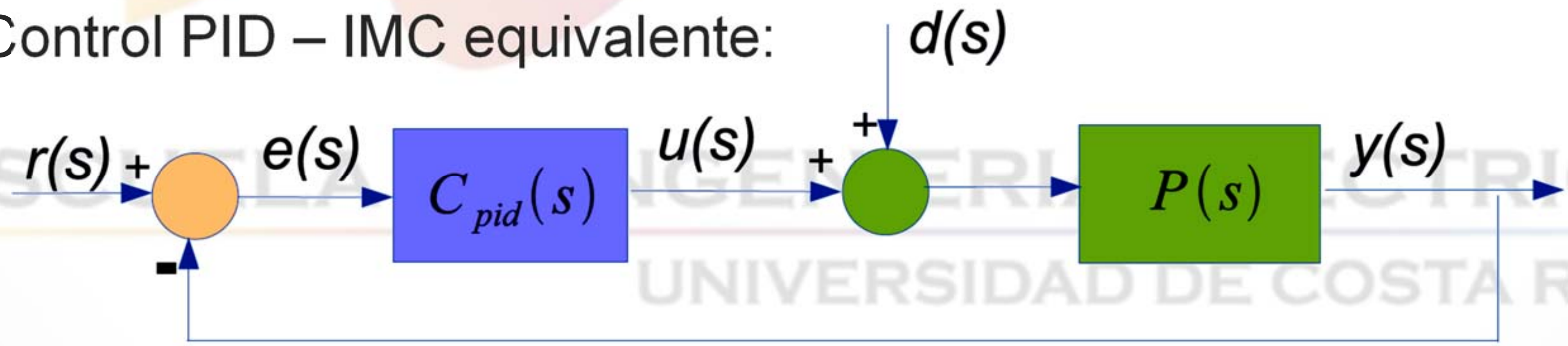


Controladores PID – IMC

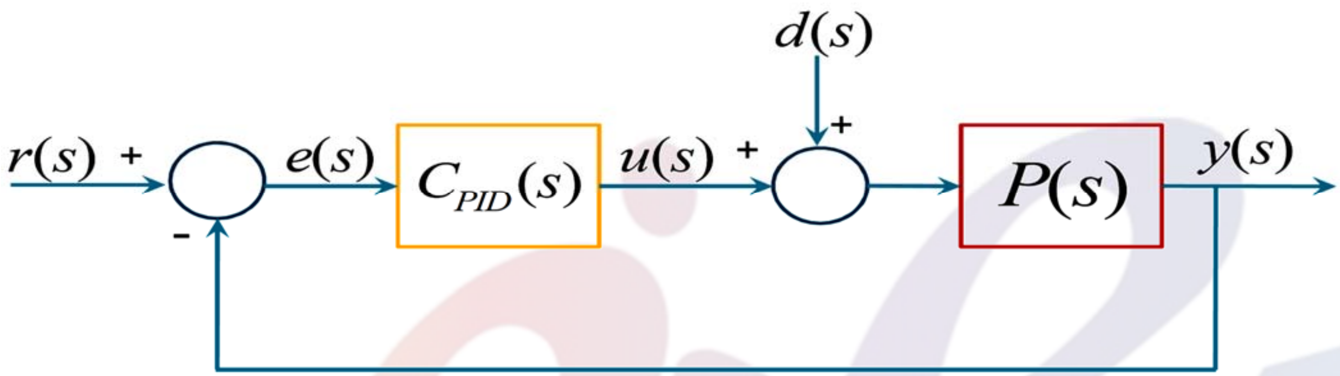
- Se buscará que el controlador IMC produzca un controlador equivalente con estructura PID.
- Control IMC



- Control PID – IMC equivalente:



Controladores PID – IMC



- Control PID – IMC equivalente:

$$C^*(s) = C_{PID}(s) = \frac{C_{IMC}(s)}{1 - C_{IMC}(s)P_m(s)} = \frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1 - P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)P_m(s)}$$

$$P_m(s) = P_{m-}(s)P_{m+}(s) \Rightarrow C_{PID}(s) = \frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1 - P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)P_{m-}(s)P_{m+}(s)}$$

$$\boxed{\therefore C_{PID}(s) = \frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1 - P_{m+}(s)G_f(s)}}$$

Controladores PID – IMC

- Suponiendo un modelo perfecto y completamente invertible: $P_{m+}(s) = 1$

$$\therefore C_{PID}(s) = \frac{1}{P_{m-}(s)}\left[\frac{G_f(s)}{1 - G_f(s)}\right]$$

- <u>Para que los controladores sean de la familia del PID las plantas solo pueden ser de ***primer*** o ***segundo*** orden</u>, para estas se requiere especificar el filtro como:

$$G_f(s) = \frac{1}{T_f s + 1} = \frac{1}{T_c s + 1} \Rightarrow C_{PID}(s) = \frac{1}{P_{m-}(s)}\left[\frac{\frac{1}{T_c s + 1}}{1 - \frac{1}{T_c s + 1}}\right] = \boxed{\frac{P_{m-}^{-1}(s)}{T_c s}}$$

Parámetro Ajustable (velocidad / robustez)
$T_c = \tau_c T$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden: $P(s)=\dfrac{K}{Ts+1}$
- El controlador está dado por:

$$C_{PID}(s)=\frac{P_{m-}^{-1}(s)}{T_c s}=\frac{Ts+1}{KT_c s}=\frac{T}{KT_c}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)$$

- El cual corresponde a un controlador PI: $C(s)=K_p\left(\dfrac{T_i s+1}{T_i s}\right)$

Donde: $K_p=\dfrac{T}{KT_c},\ T_i=T \Rightarrow \boxed{M_{yr}(s)=\dfrac{1}{T_c s+1}}$

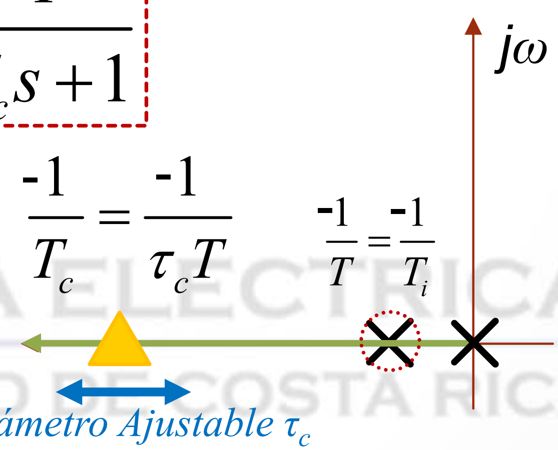
(mismo resultado obtenido en sintonización analítica)

Normalizando

$T_c=\tau_c T$

$0<\tau_c<1$

$$\boxed{K_p K=\frac{1}{\tau_c},\quad \frac{T_i}{T}=1}$$



Controladores PID – IMC

- Planta de Segundo Orden: $P(s) = \dfrac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)} = \dfrac{K}{(Ts+1)(aTs+1)}$

  $T_1 \geq T_2,\quad T_1 = T,\quad a = T_2/T_1,\quad a \leq 1$

- El controlador está dado por:

$$C_{PID}(s) = \frac{P_{m-}^{-1}(s)}{T_c s} = \frac{(Ts+1)(aTs+1)}{KT_c s} = \frac{T}{KT_c}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)(aTs+1)$$

- El cual corresponde a un controlador PID serie: $C(s) = K_p^{'}\left(\dfrac{T_i^{'}s+1}{T_i^{'}s}\right)(T_d^{'}s+1)$

Donde:

$$K_p^{'} = \frac{T}{KT_c},\quad T_i^{'} = T,\quad T_d^{'} = aT \Rightarrow \boxed{M_{yr}(s) = \frac{1}{T_c s+1}}$$

Normalizando

$T_c = \tau_c T,\quad 0 < \tau_c < 1$

(mismo resultado obtenido en sintonización analítica)

PID estándar equivalente:

$$\left.\begin{array}{l} K_p^{'}K = \dfrac{1}{\tau_c},\quad \dfrac{T_i^{'}}{T} = 1,\quad \dfrac{T_d^{'}}{T} = a \end{array}\right\} K_p K = \frac{1+a}{\tau_c},\quad \frac{T_i}{T} = 1+a,\quad \frac{T_d}{T} = \frac{a}{1+a}$$

Controladores PID – IMC

- Comparación con el controlador IMC:

Planta	IMC	PID – IMC
Primer Orden	$M_{yr}(s) = \dfrac{1}{T_f s + 1}$	$M_{yr}(s) = \dfrac{1}{T_c s + 1}$
Segundo Orden	$M_{yr}(s) = \dfrac{1}{\left(T_f s + 1\right)^2}$	$M_{yr}(s) = \dfrac{1}{T_c s + 1}$

- Plantas con Tiempo Muerto: Debe utilizarse una ***aproximación*** para el tiempo muerto y así obtener la FT del controlador PID-IMC:

$$C_{PID}(s) = \frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1 - P_{m+}(s)G_f(s)}$$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s)=\dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0=\dfrac{L}{T}$
- Aproximación del tiempo muerto: $e^{-Ls}=1-Ls$

$$\Rightarrow P_m(s)=\frac{K\left(1-Ls\right)}{Ts+1}\begin{cases}\Rightarrow P_{m+}(s)=1-Ls\\ \Rightarrow P_{m-}(s)=\dfrac{K}{Ts+1}\end{cases}$$

$$G_f(s)=\frac{1}{T_c s+1}$$

- De esta forma, el controlador requerido es: $C_{PID}(s)=\dfrac{P_{m-}^{-1}(s)\overbrace{G_f(s)}}{1-P_{m+}(s)G_f(s)}$

$$\Rightarrow C_{PID}(s)=\frac{\dfrac{Ts+1}{K}\dfrac{1}{T_c s+1}}{1-\left(1-Ls\right)\dfrac{1}{T_c s+1}}=\frac{Ts+1}{K\left(T_c+L\right)s}=\frac{T}{K\left(T_c+L\right)}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)$$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s) = \dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0 = \dfrac{L}{T}$
- Aproximación del tiempo muerto: $e^{-Ls} = 1 - Ls$
- De esta forma, el controlador requerido es:

$$\Rightarrow C_{PID}(s) = \frac{T}{K(T_c+L)}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)$$

- Este corresponde a un controlador tipo ***PI***: $C(s) = K_p\left(\dfrac{T_i s+1}{T_i s}\right)$

En donde:
$$K_p = \frac{T}{K(T_c+L)} \qquad T_i = T$$

(mismo resultado obtenido en sintonización analítica)

Normalizando

$T_c = \tau_c T$

$0 < \tau_c < 1$

$$\boxed{K_p K = \frac{1}{(\tau_c+\tau_0)} \qquad \frac{T_i}{T} = 1 \qquad \tau_c = \frac{T_c}{T}, \quad \tau_0 = \frac{L}{T}}$$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s)=\dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1},\quad \tau_0=\dfrac{L}{T}$
- Aproximación del tiempo muerto: Padé de 1er Orden: $e^{-Ls}=\dfrac{1-0,5Ls}{1+0,5Ls}$

$$\Rightarrow P_m(s)=\frac{K(1-0,5Ls)}{(Ts+1)(1+0,5Ls)}\begin{cases}\Rightarrow P_{m+}(s)=1-0,5Ls\\ \Rightarrow P_{m-}(s)=\dfrac{K}{(Ts+1)(1+0,5Ls)}\end{cases}$$

- De esta forma, el controlador requerido se calcula con $G_f(s)=\dfrac{1}{T_cs+1}$, y:

$$C_{PID}(s)=\frac{P_{m-}^{-1}(s)G_f(s)}{1-P_{m+}(s)G_f(s)}=\frac{\dfrac{(Ts+1)(1+0,5Ls)}{K}\left[\dfrac{1}{T_cs+1}\right]}{1-(1-0,5Ls)\dfrac{1}{T_cs+1}}=\frac{(Ts+1)(1+0,5Ls)}{K(T_c+0,5L)s}$$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s) = \dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0 = \dfrac{L}{T}$
- Aproximación del tiempo muerto: Padé de 1er Orden: $e^{-Ls} = \dfrac{1-0,5Ls}{1+0,5Ls}$
- De esta forma, el controlador requerido es:

$$\Rightarrow C_{PID}(s) = \frac{(Ts+1)(1+0,5Ls)}{K(T_c+0,5L)s} = \frac{T}{K(T_c+0,5L)}\left(\frac{Ts+1}{Ts}\right)(1+0,5Ls)$$

- Este corresponde a un controlador ***PID*** tipo serie: $C(s) = K_p'\left(\dfrac{T_i's+1}{T_i's}\right)(T_d's+1)$

En donde: $K_p' = \dfrac{T}{K(T_c+0,5L)}, \quad T_i' = T, \quad T_d' = 0,5L$

Normalizando

$T_c = \tau_c T, \quad L = \tau_0 T$

$0 < \tau_c < 1$

$$\boxed{K_p'K = \frac{1}{(\tau_c+0,5\tau_0)}, \quad \frac{T_i'}{T} = 1, \quad \frac{T_d'}{T} = 0,5\tau_0}$$

Controladores PID – IMC

- Planta de Primer Orden más tiempo muerto: $P(s) = \dfrac{Ke^{-Ls}}{Ts+1}, \quad \tau_0 = \dfrac{L}{T}$
- Aproximación del tiempo muerto: Padé de 1er Orden: $e^{-Ls} = \dfrac{1-0,5Ls}{1+0,5Ls}$
- De esta forma, el controlador requerido es:

$$\Rightarrow C_{PID}(s) = \frac{(Ts+1)(1+0,5Ls)}{K(T_c+0,5L)s} = \frac{0,5LTs^2+(T+0,5L)s+1}{K(T_c+0,5L)s}$$

- Este corresponde a un controlador ***PID*** estándar: $C(s) = K_p\left(\dfrac{T_iT_ds^2+T_is+1}{T_is}\right)$

En donde:

$$K_p = \frac{T+0,5L}{K(T_c+0,5L)}, \quad T_i = T+0,5L, \quad T_d = \frac{LT}{2T+L}$$

Normalizando

$T_c = \tau_c T, \quad L = \tau_0 T$

$0 < \tau_c < 1$

$$\boxed{K_pK = \frac{1+0,5\tau_0}{\tau_c+0,5\tau_0}, \quad \frac{T_i}{T} = 1+0,5\tau_0, \quad \frac{T_d}{T} = \frac{\tau_0}{2+\tau_0}}$$

Controladores PID – IMC

Ejemplo:

- Proceso Controlado:

$$P(s)=\frac{1,5(s+1)}{(5s+1)^2(2s+1)}$$

- Modelo de POMTM:

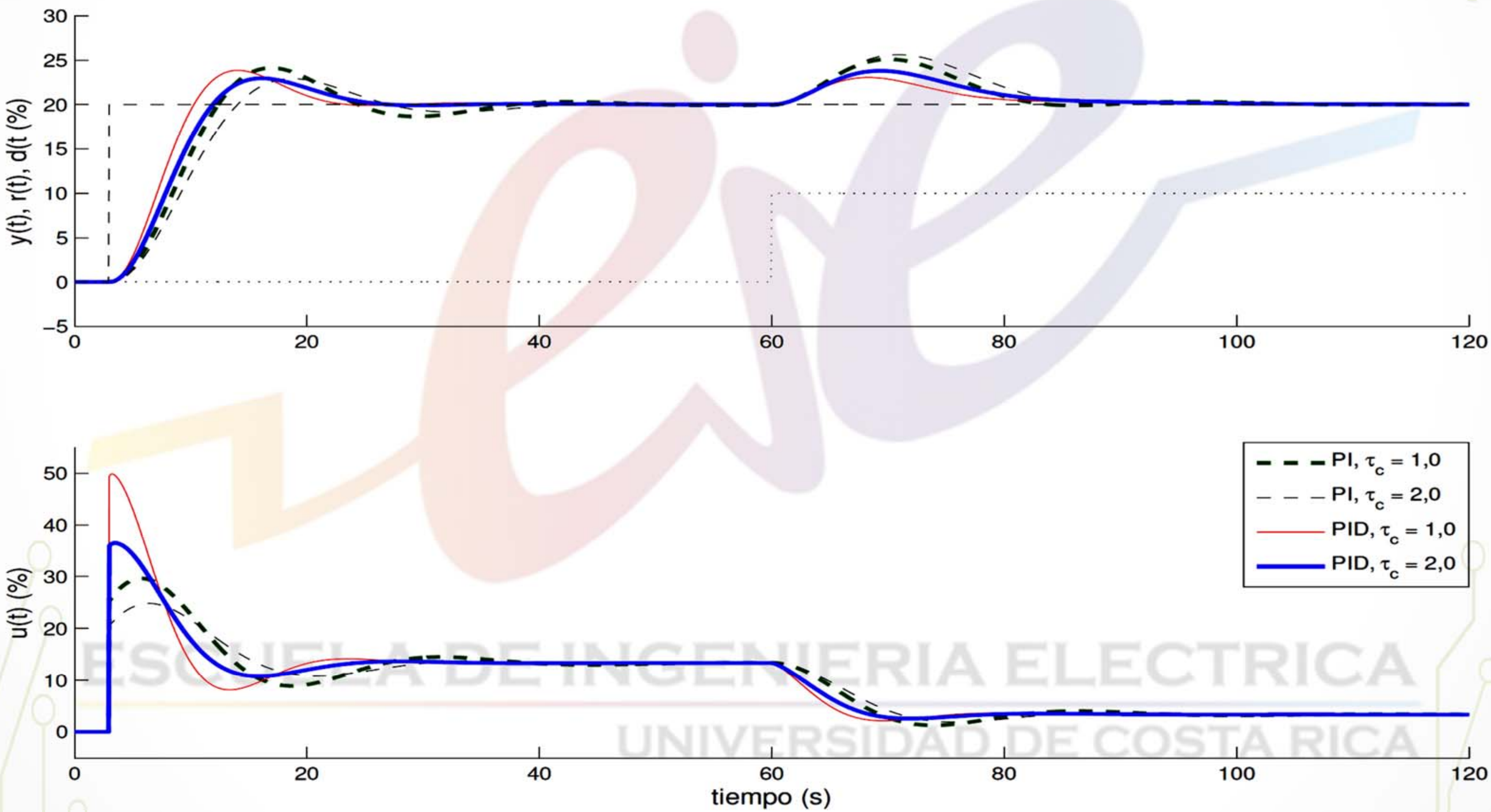
$$P(s)=\frac{1,5e^{-3,31s}}{8,184s+1}$$

PI	$\tau_c = 1$	$\tau_c = 2$
K_p	1,266	1,027
T_i	8,184	8,184

PID	$\tau_c = 1$	$\tau_c = 2$
K_p	2,470	1,794
T_i	9,837	9,837
T_d	1,377	1,377

Controladores PID – IMC

Ejemplo:



Controladores PID – IMC

Simple IMC (SIMC):

- Modelo del Proceso Controlado:

$$P(s)=\frac{Ke^{-Ls}}{(Ts+1)(aTs+1)}$$

- PI/PID Serie 1GdL IMC modificado, mejora la respuesta del regulador :

$$K_pK=\frac{1}{\tau_c+\tau_0},\qquad \frac{T_d}{T}=a,$$

$$\frac{T_i}{T}=\min\{1\ ,\ 4(\tau_c+\tau_0)\}$$

- Recomendación para $\boldsymbol{\tau_c}$: Compromiso entre velocidad de respuesta y robustez: $\boldsymbol{\tau_c = \tau_0}$

$$K_pK=\frac{1}{2\tau_0},\qquad \frac{T_d}{T}=a,$$

$$\frac{T_i}{T}=\min\{1\ ,\ 8\tau_0\}$$

- Robustez

PI y PID Ideal $\boldsymbol{M_S = 1{,}59}$,
PID con filtro derivativo, pierde robustez para $\boldsymbol{\tau_0}$ bajos.