UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Estabilidad Relativa: Robustez

Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.

leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

EIE

Escuela de Ingeniería Eléctrica

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Estabilidad Relativa

- Los criterios de estabilidad absoluta permiten establecer si un sistema es estable no. Sin embargo, hay sistemas que con la variación de un parámetro del modelo de la planta (ej, ganancia, tiempo muerto) pueden volverse **inestables**.
- La **estabilidad relativa** de un sistema busca estudiar que "***tan estable***" es el mismo, permitiendo establecer el riesgo que tiene el sistema de volverse inestable cuando se da un cambio en sus parámetros.
- La estabilidad relativa se puede observar en el dominio del tiempo (sobrepaso máximo, factor de amortiguamiento) o en el dominio de la frecuencia observando la cercanía del diagrama de **Nyquist** con el punto **-1** o del diagrama de **Bode** utilizando los márgenes de **fase** y **ganancia**

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Estabilidad Relativa

- Frecuencia de cruce de ganancia (magnitud) ω_c y cruce de fase ω_π
  - Cruce de Ganancia: ω_c

    Valor positivo de ω para el cual la magnitud de $G(j\omega)$ es igual a la unidad. $\boxed{\omega_c \Rightarrow \left|G(j\omega)\right| = 1}$

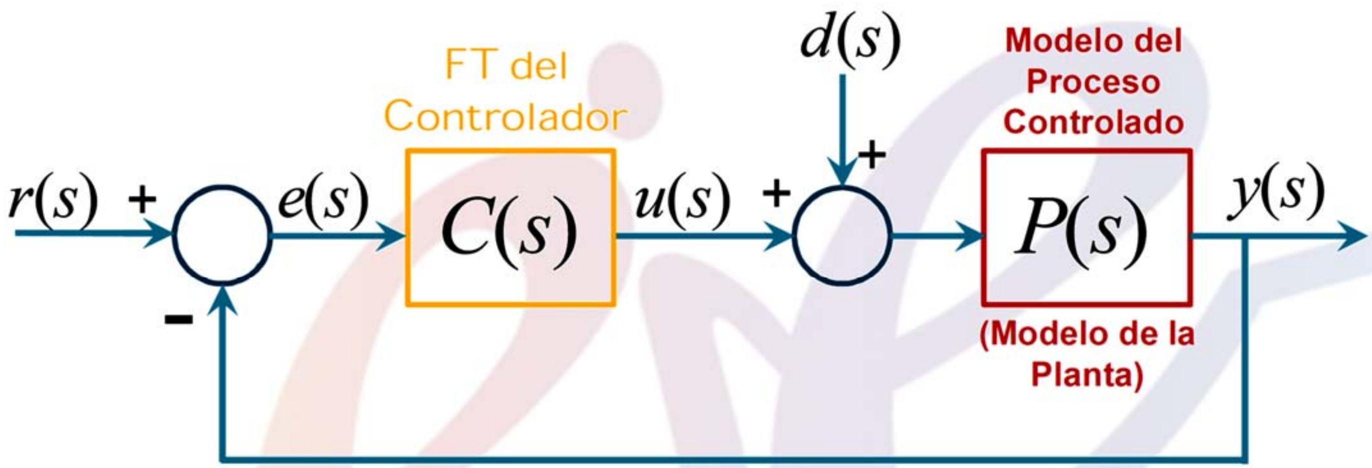
$$\omega_c \Rightarrow \left|G(j\omega)\right|_{\mathrm{dB}} = 20\log(1) = 0\,\mathrm{dB}$$

  - Cruce de Fase: ω_π

    Valor positivo de ω para el cual la fase de $G(j\omega)$ es igual a -180°. $\boxed{\omega_\pi \Rightarrow \angle G(j\omega) = -180}$

Estabilidad Relativa

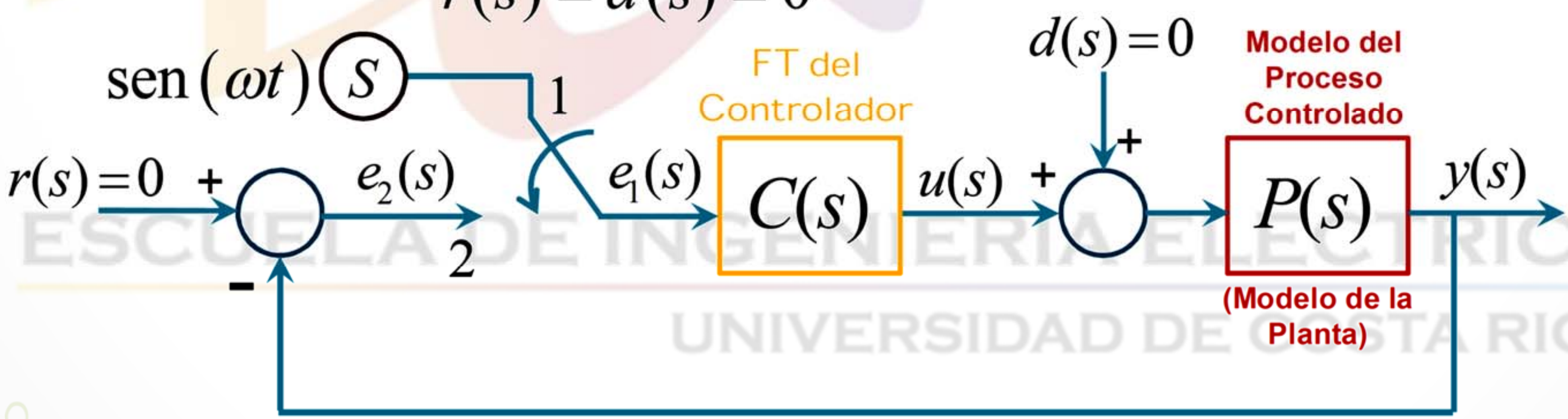
- Lazo de Control Realimentado Monovariable:



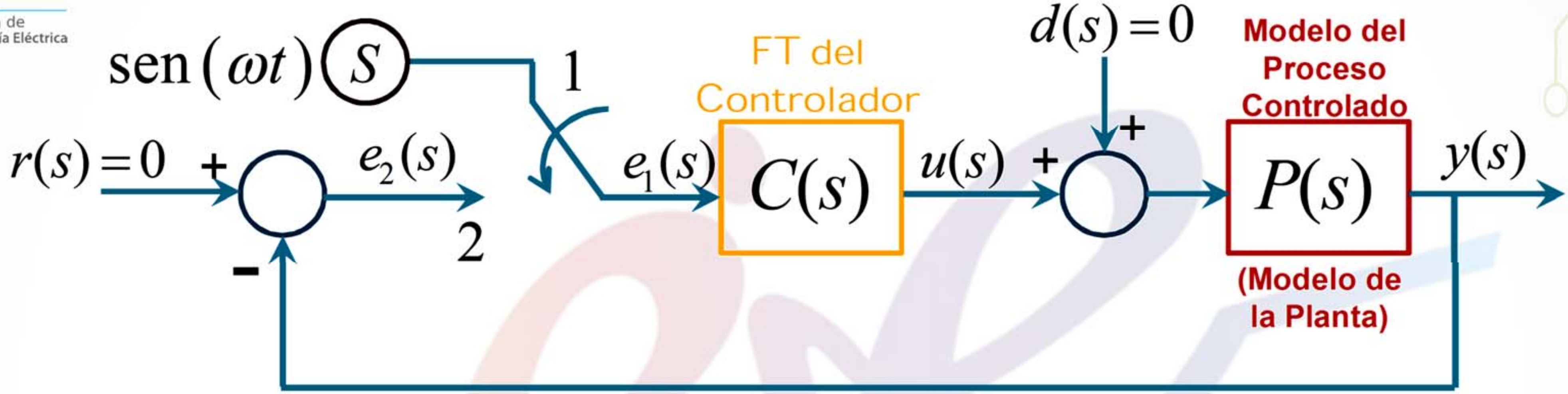
$$e(s) = r(s) - y(s)$$

- Suponiendo que se abre el lazo y se introduce una señal periódica:

$$r(s) = d(s) = 0$$



Estabilidad Relativa



$$L(s)=C(s)P(s)\Rightarrow L(j\omega)=C(j\omega)P(j\omega)$$

$$\boxed{e_1=\operatorname{sen}(\omega t)}$$

$$\left|L(j\omega)\right|=\left|C(j\omega)P(j\omega)\right|$$

$$\angle L(j\omega)=\angle\{C(j\omega)P(j\omega)\}$$

- Se tiene que el error e_2 esta dado por:

$$\left|e_2(j\omega)\right|=\left|L(j\omega)\right|$$

$$\angle e_2(j\omega)=-180^{\circ}+\angle L(j\omega)$$

Estabilidad Relativa

- Suponiendo que $\omega = \omega_\pi \Rightarrow \angle L(j\omega) = -180°$

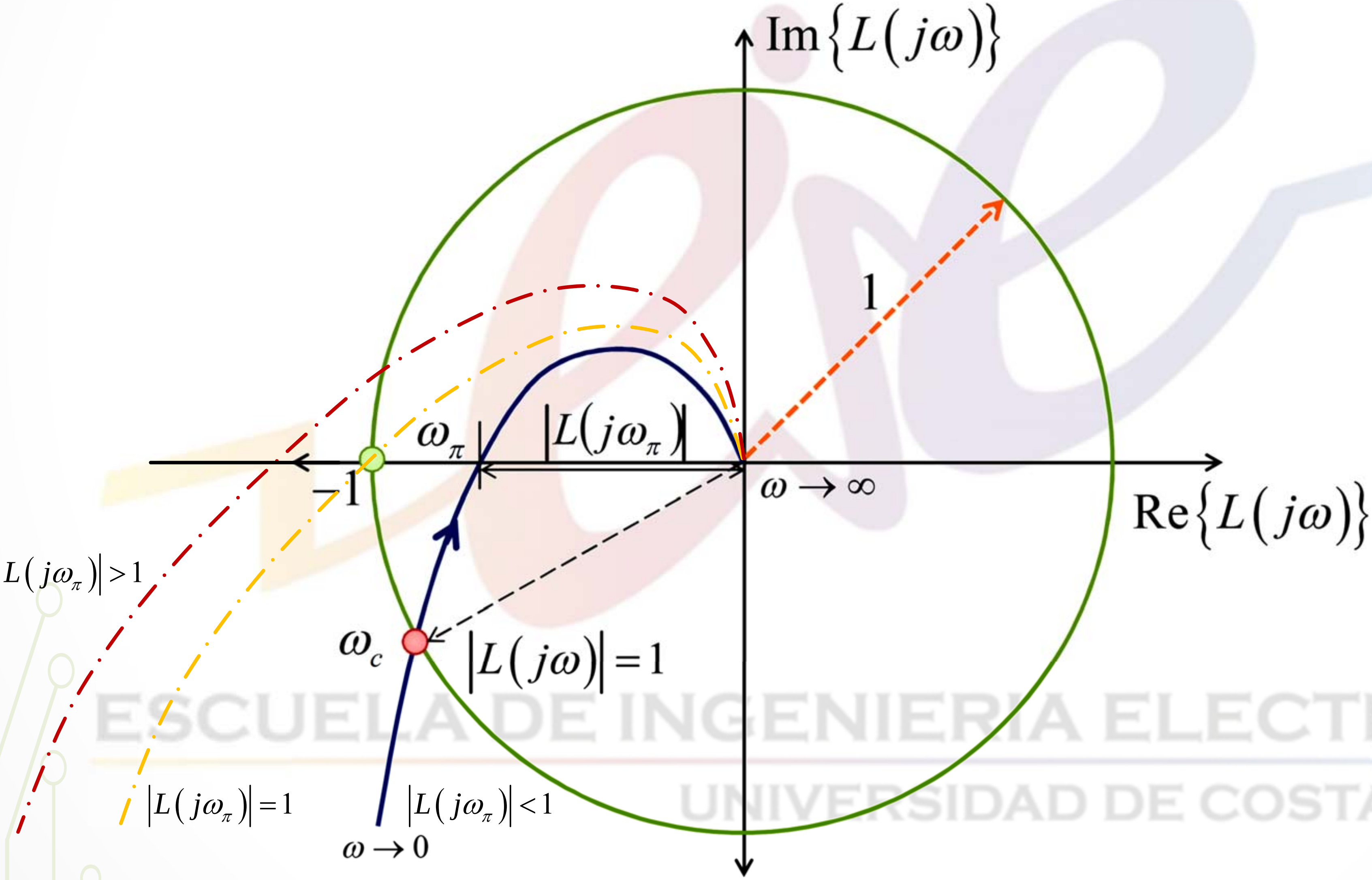
$$\Rightarrow \angle e_2(j\omega_\pi) = -360°$$

$$|e_2(j\omega_\pi)| = |L(j\omega_\pi)|$$

- En este caso el desfase de e_2 es -360° por lo que esta en fase con e_1.
- Se distinguen 3 casos para la magnitud de $|L(j\omega_\pi)| = |e_2(j\omega_\pi)|$
  - Si $|L(j\omega_\pi)| = 1 \Rightarrow |e_2(j\omega_\pi)| = |e_1(j\omega_\pi)|$
    al cambiar de 1 a 2 el sistema sigue oscilando (*sistema oscilatorio*)
  - Si $|L(j\omega_\pi)| < 1 \Rightarrow |e_2(j\omega_\pi)| < |e_1(j\omega_\pi)|$
    al cambiar de 1 a 2 la señal decrece (*sistema estable*)
  - Si $|L(j\omega_\pi)| > 1 \Rightarrow |e_2(j\omega_\pi)| > |e_1(j\omega_\pi)|$
    al cambiar de 1 a 2 la señal crece (*sistema inestable*)

Estabilidad Relativa

- Se observan los 3 casos en el diagrama de Nyquist:



Margen de Ganancia

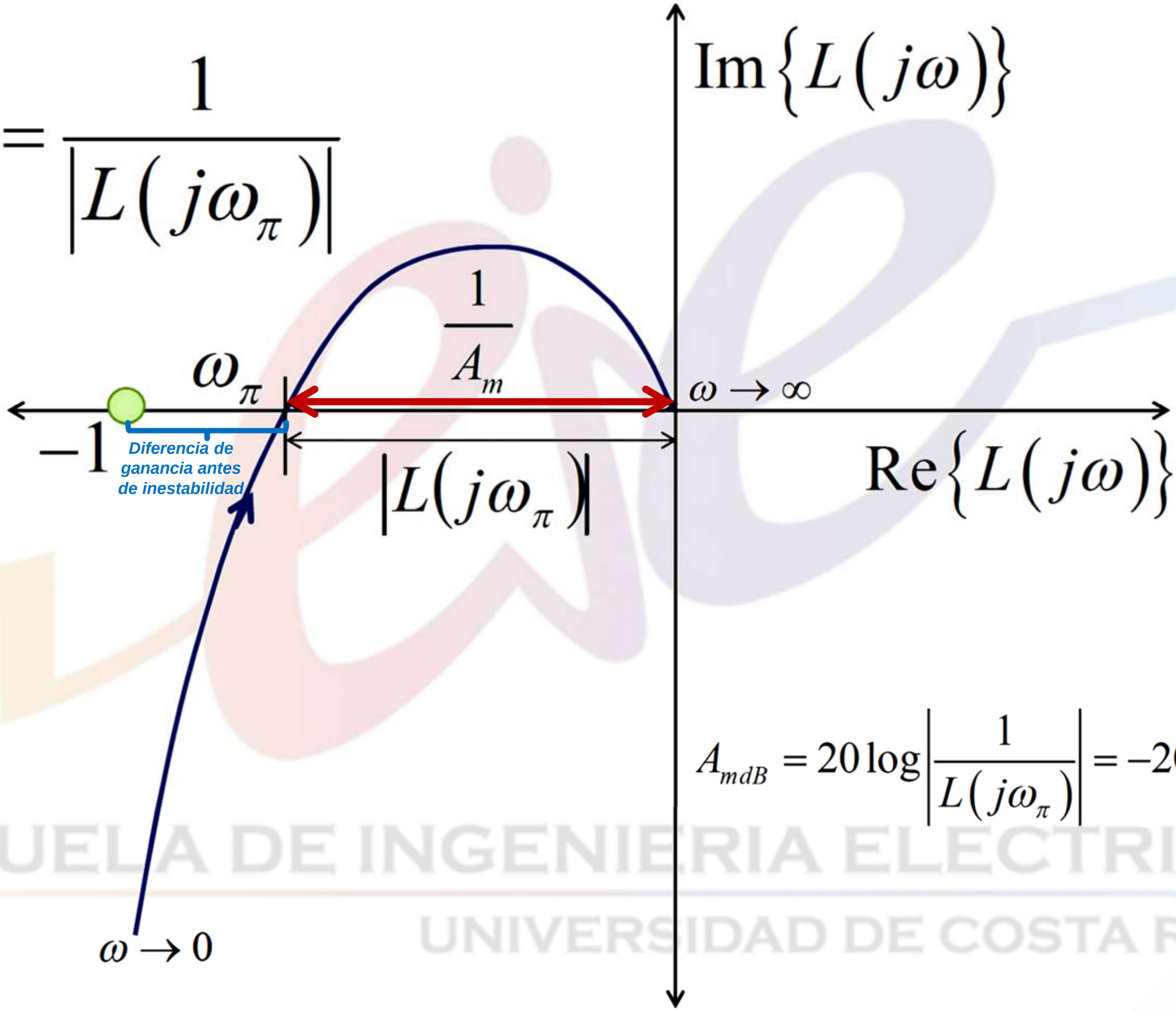
- “*El margen de ganancia es la cantidad de ganancia en decibeles (dB) que se pueden añadir al lazo antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable*”.
- En el diagrama de Nyquist es el inverso de la magnitud de la FTLA cuando la frecuencia es ω_π. En el diagrama de bode es la misma magnitud pero en dB.

$$A_m\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right|=1\Rightarrow \boxed{A_m=\frac{1}{\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right|}}$$

$$A_{mdB}=20\log\left|\frac{1}{L\left(j\omega_\pi\right)}\right|=-20\log\left|L\left(j\omega_\pi\right)\right|$$

Margen de Ganancia

$$A_m = \frac{1}{\left|L(j\omega_\pi)\right|}$$



$$A_{mdB} = 20\log\left|\frac{1}{L(j\omega_\pi)}\right| = -20\log\left|L(j\omega_\pi)\right|$$

Margen de Fase

- “*El margen de fase es el ángulo en grados que se debe rotar el diagrama de Nyquist de la FTLA alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto* ***-1***”.
- “*Cantidad de desfase puro que se puede agregar al sistema antes de que se vuelva inestable*”.
- En el diagrama de Nyquist es el ángulo a rotar para que la gráfica de la FTLA toque el punto **-1**. En el diagrama de bode son los grados que hay a la frecuencia ω_c para que la gráfica de fase alcance -180°

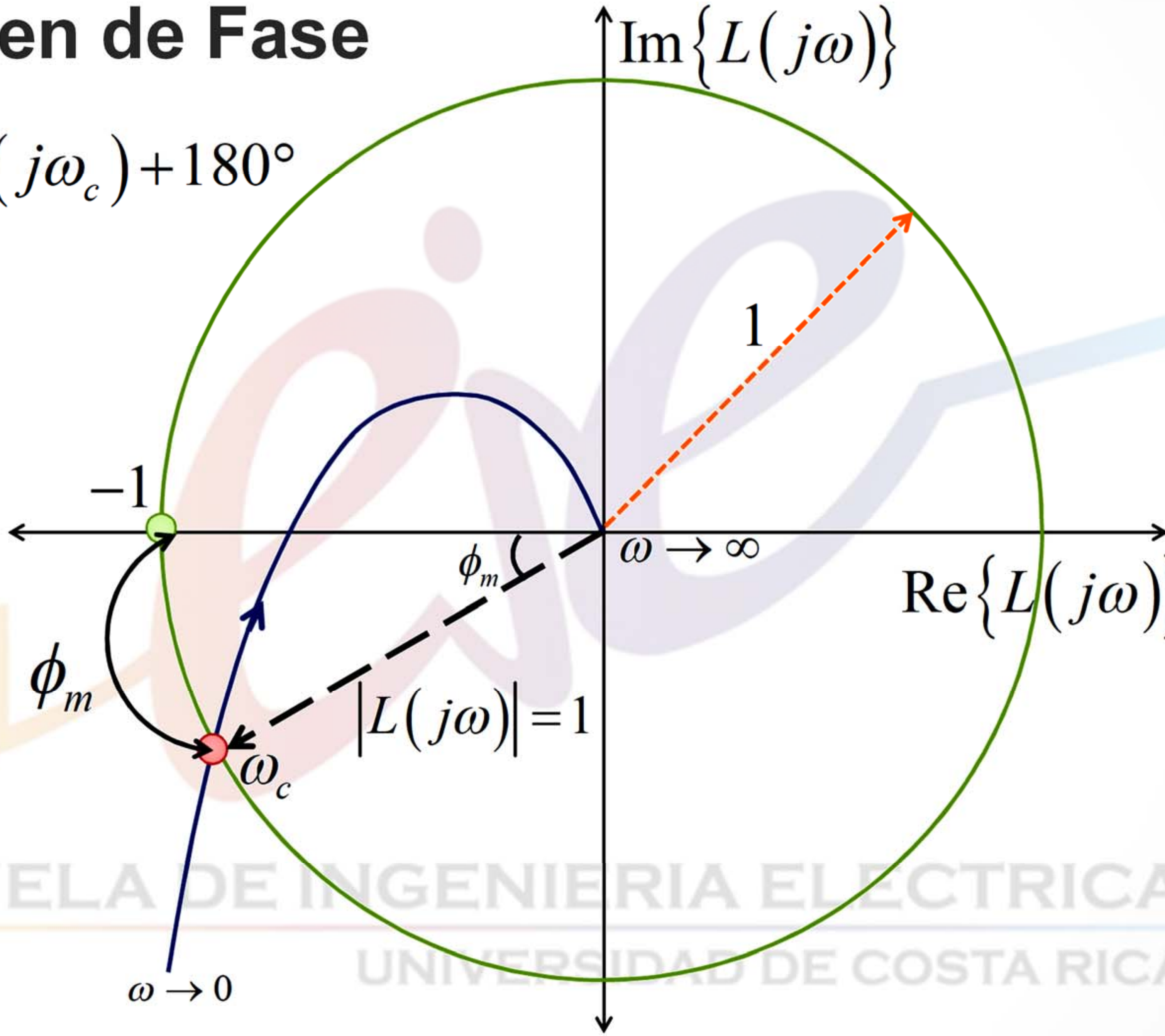
$$\angle L(j\omega_c) - \phi_m = -180^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{\phi_m = \angle L(j\omega_c) + 180^\circ}$$

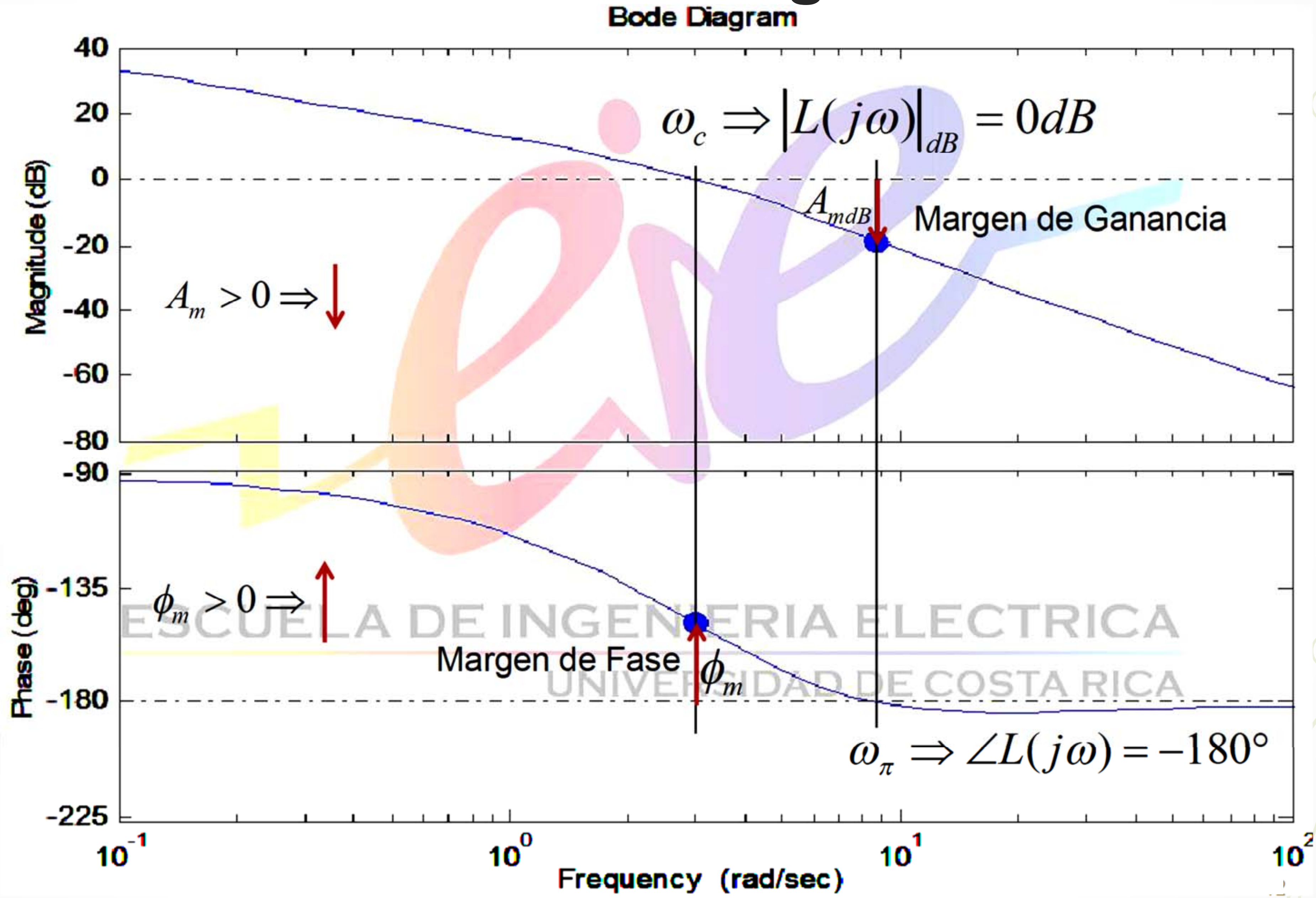
Margen de Fase

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

$$\phi_m = \angle L(j\omega_c) + 180°$$



Estabilidad Relativa: Diagramas de Bode



EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Estabilidad Relativa:

- Para que el sistema sea estable ambos márgenes deben ser mayor que cero: $A_m > 0$, $\phi_m > 0$ $\left(\omega_c < \omega_\pi\right)$
- Se busca que un sistema estable sea lo suficientemente estable para que ante la variación de los parámetros del modelo de la planta (*variación de la Ganancia o del tiempo muerto*) el sistema no sea inestable.
- Esto indica un sistema con un margen de fase y ganancia lo suficientemente grandes, para que ante la variación de los parámetros de la planta, este no llegue tan rápidamente al límite de estabilidad.
- En general se desea que:

$$2 < A_m < 4$$

$$6dB < A_{mdB} < 12dB$$

$$30° < \phi_m < 60°$$

Sensibilidad Máxima:

- Función de sensibilidad: La sensibilidad de la FTLC respecto a la variación en $P(s)$ es:

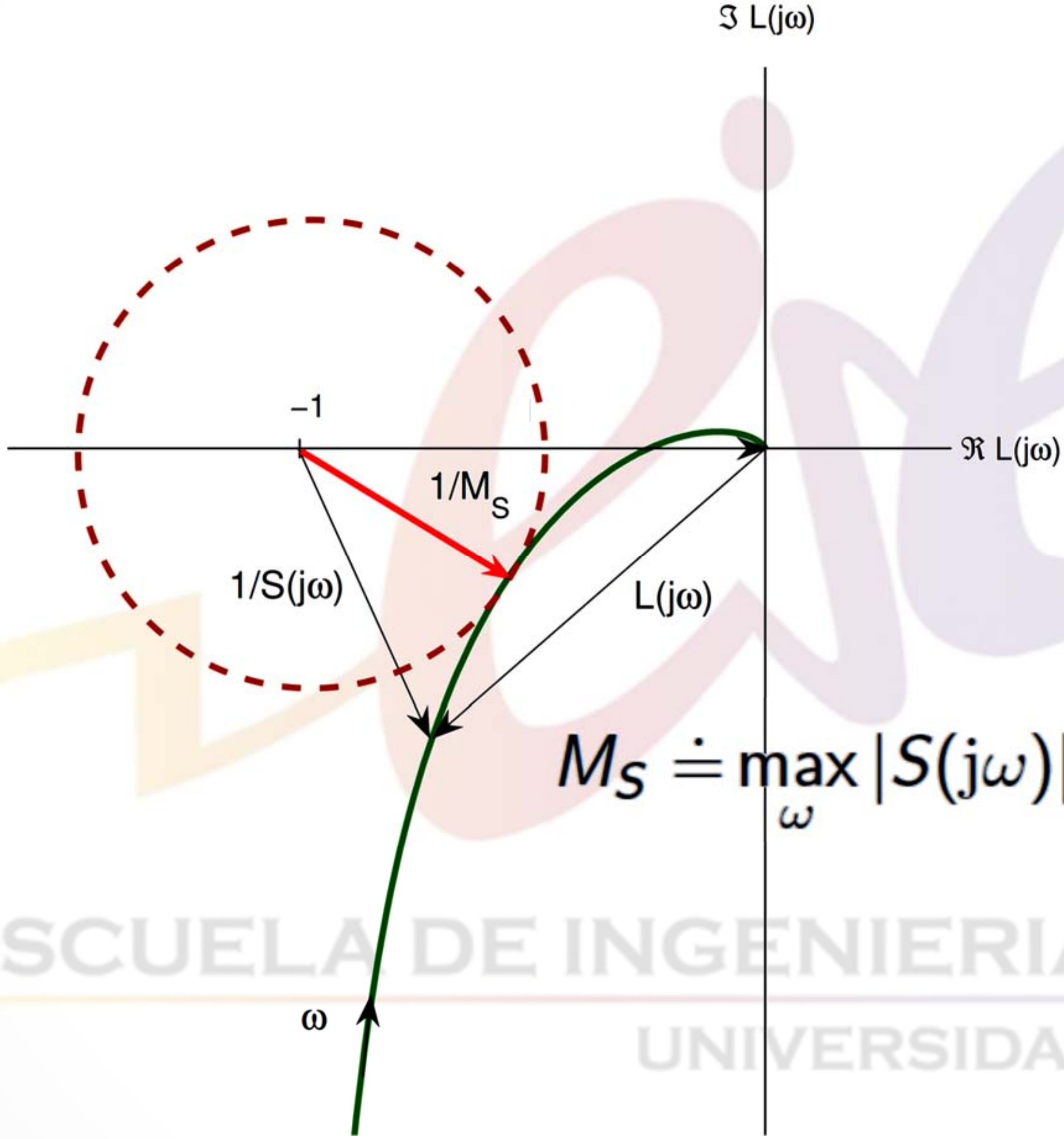
$$S_P^{M_{yr}} = \frac{1}{1+C(s)P(s)}$$

- Sensibilidad Máxima:

$$\boxed{M_s = \max_{\omega} \left| S_P^{M_{yr}}(j\omega) \right| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1+C(j\omega)P(j\omega)} \right|}$$

- El inverso de la sensibilidad máxima es el radio de un círculo con centro en -1 que es tangente a la curva de Nyquist de la FTLA del sistema.

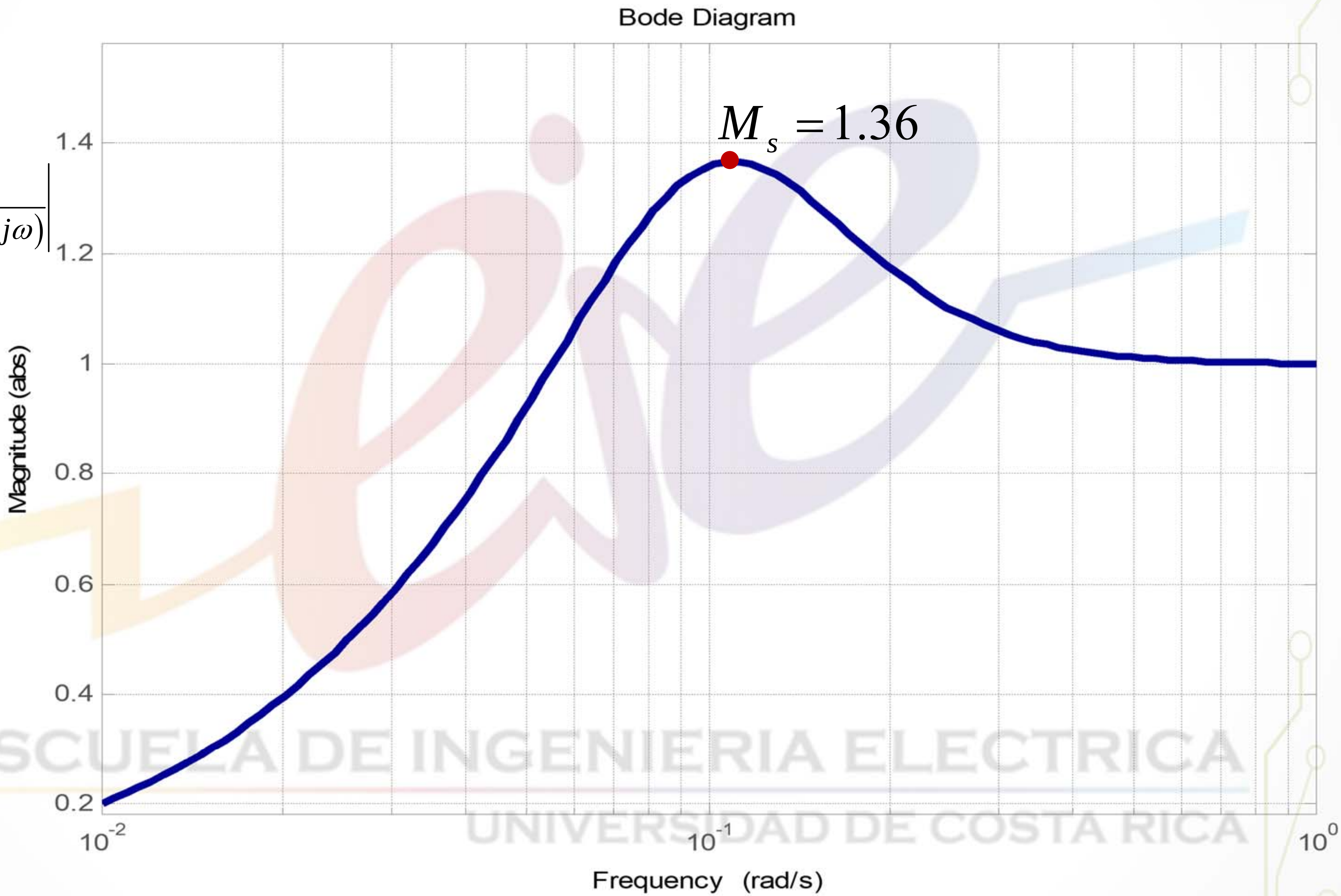
Sensibilidad Máxima:



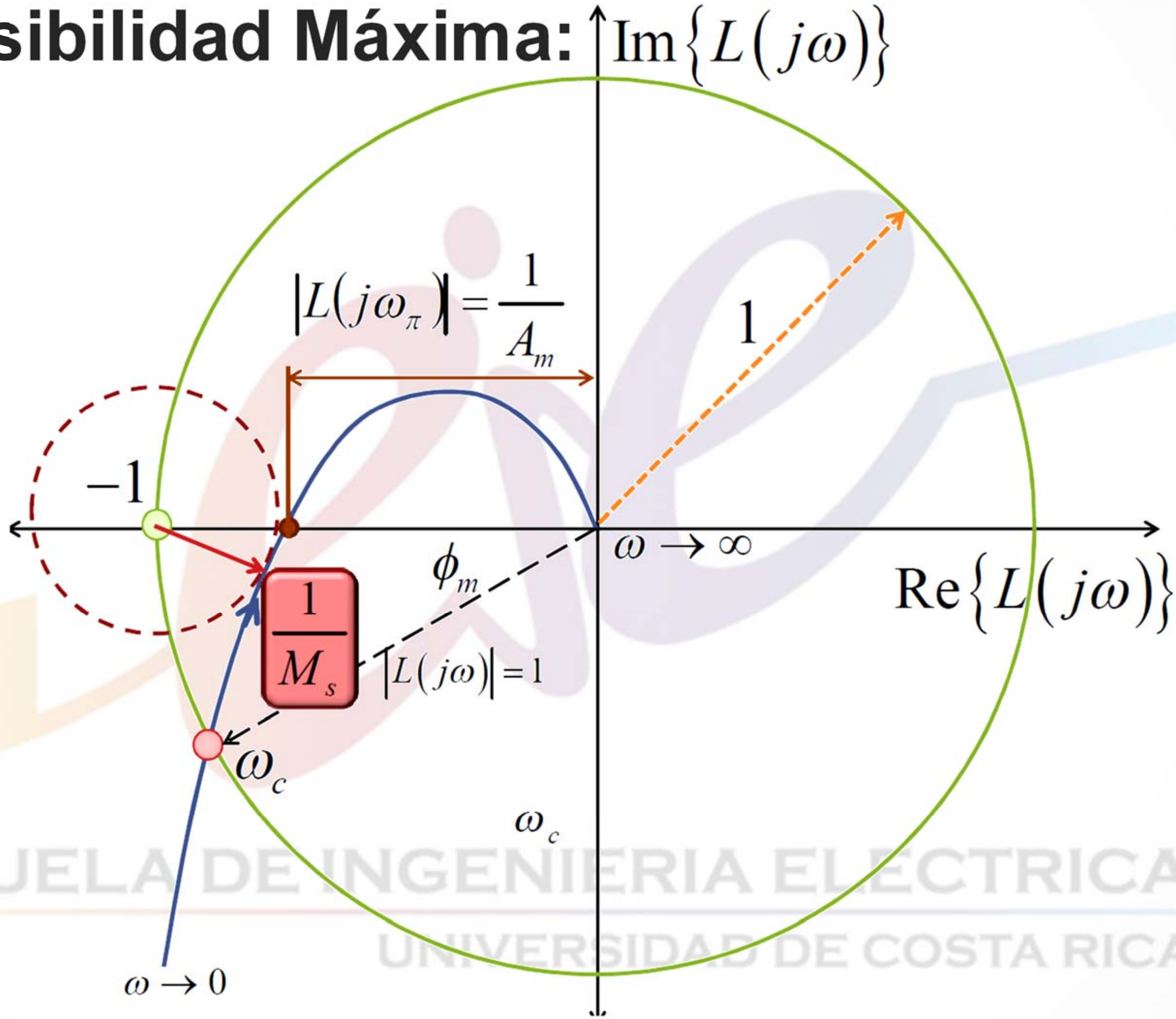
$$M_S \doteq \max_{\omega} |S(j\omega)| = \max_{\omega} \left| \frac{1}{1 + C(j\omega)P(j\omega)} \right|$$

Sensibilidad Máxima:

$$\left|\frac{1}{1+C(j\omega)P(j\omega)}\right|$$



Sensibilidad Máxima:



Sensibilidad Máxima:

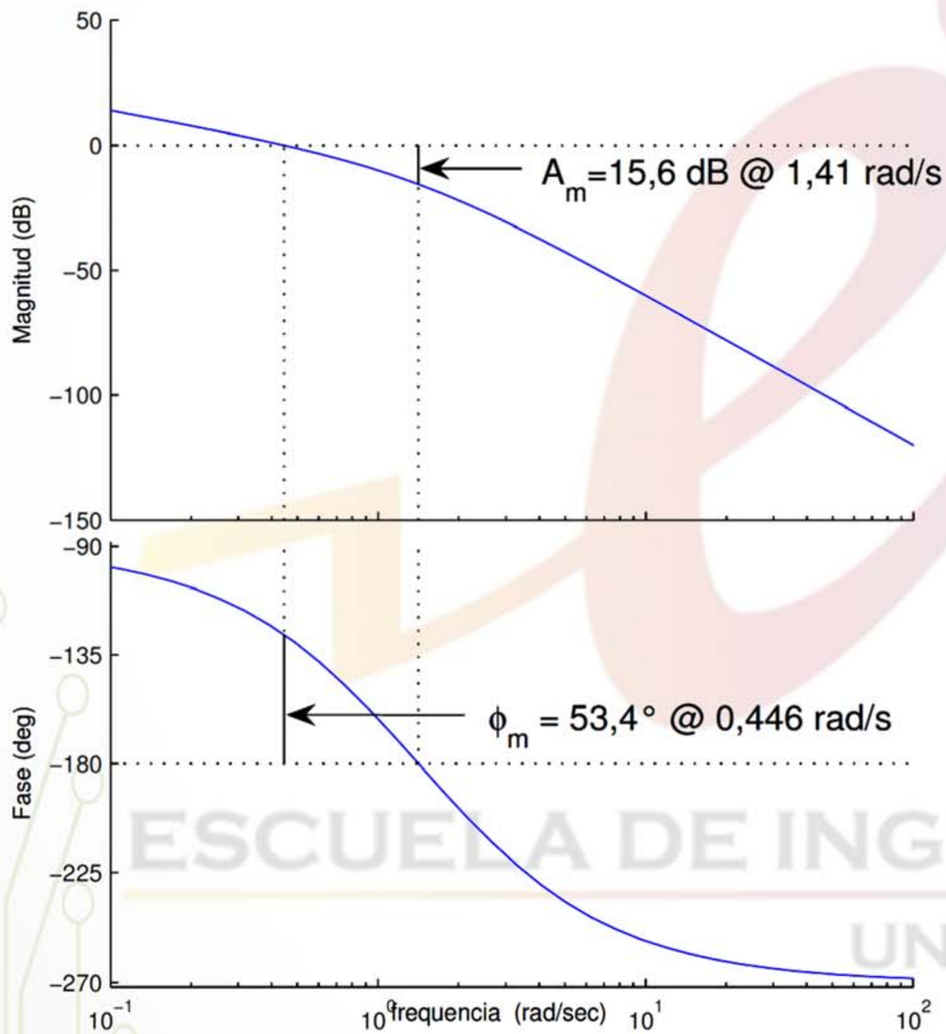
- Valores de Ms: $1,2 \le Ms \le 2,0$
- La Sensibilidad Máxima garantiza que:

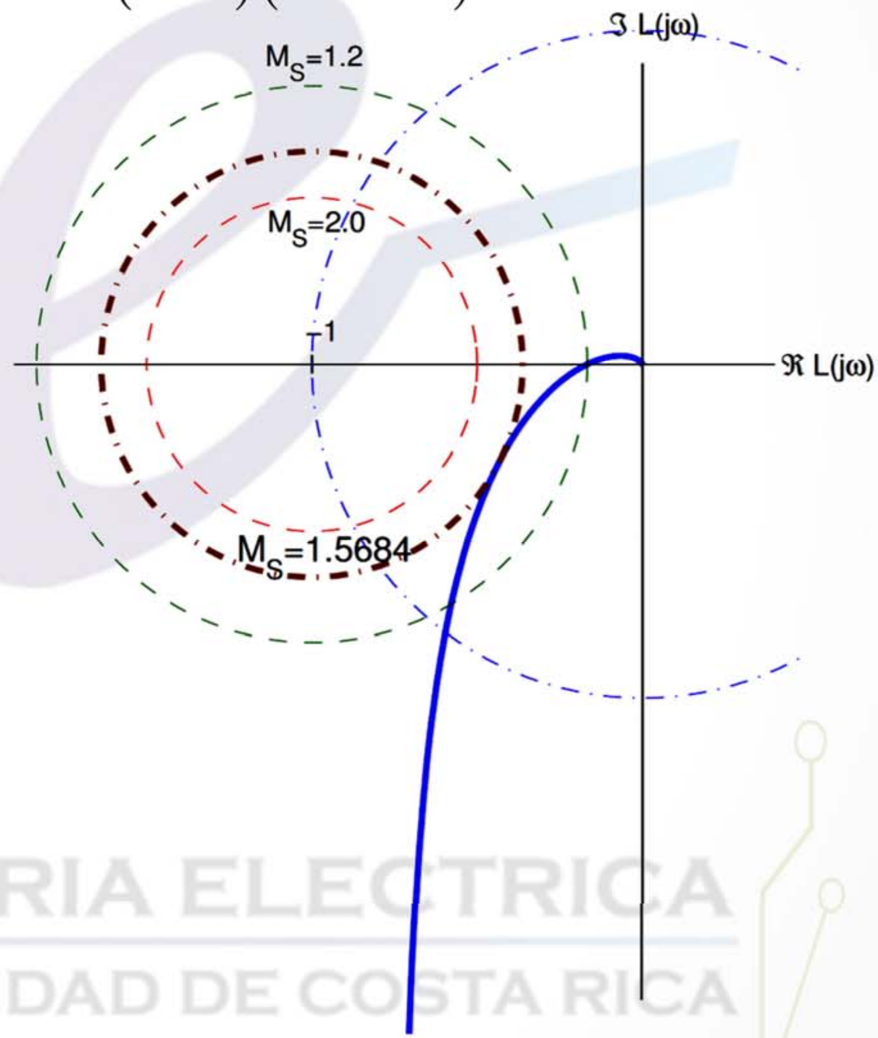
$$A_m > \frac{M_s}{M_s - 1} \qquad \phi_m > 2\,\mathrm{Arcsen}\left(\frac{1}{2M_s}\right)$$

	M_s	A_m	ϕ_m	
mínimos	2	2,0	29,0°	*Sistema poco robusto*
	1,8	2,3	32,3°	
	1,6	2,7	36,4°	
	1,4	3,5	41,8°	
máximos	1,2	6,0	49,2°	*Sistema muy robusto*

Ejemplo Robustez:

- Robustez del sistema de control con: $L(s)=\dfrac{0.5}{s(s+1)(0.5s+1)}$





Ejemplo Robustez:

- Robustez del sistema de control con dos controladores distintos:

$$P(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$C_1(s) = 0{,}5\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

$$C_2(s) = 1{,}5\left(1 + \frac{1}{2s}\right)$$

$$S_1(s) = \frac{1}{1 + C_1(s)P(s)}$$

$$S_2(s) = \frac{1}{1 + C_2(s)P(s)}$$

- Caso 1

$$A_{m1} = 18{,}8\text{dB } (8{,}71) \;@\; 1{,}33\text{rad/s}$$

$$\phi_{m1} = 74{,}1^\circ \;@\; 0{,}255\text{rad/s}$$

$$M_{S1} = 1{,}29$$

- Caso 2

$$A_{m2} = 9{,}23\text{dB } (2{,}89) \;@\; 1{,}33\text{rad/s}$$

$$\phi_{m2} = 38{,}9^\circ \;@\; 0{,}707\text{rad/s}$$

$$M_{S2} = 2{,}14$$