UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Algoritmo de Control PID

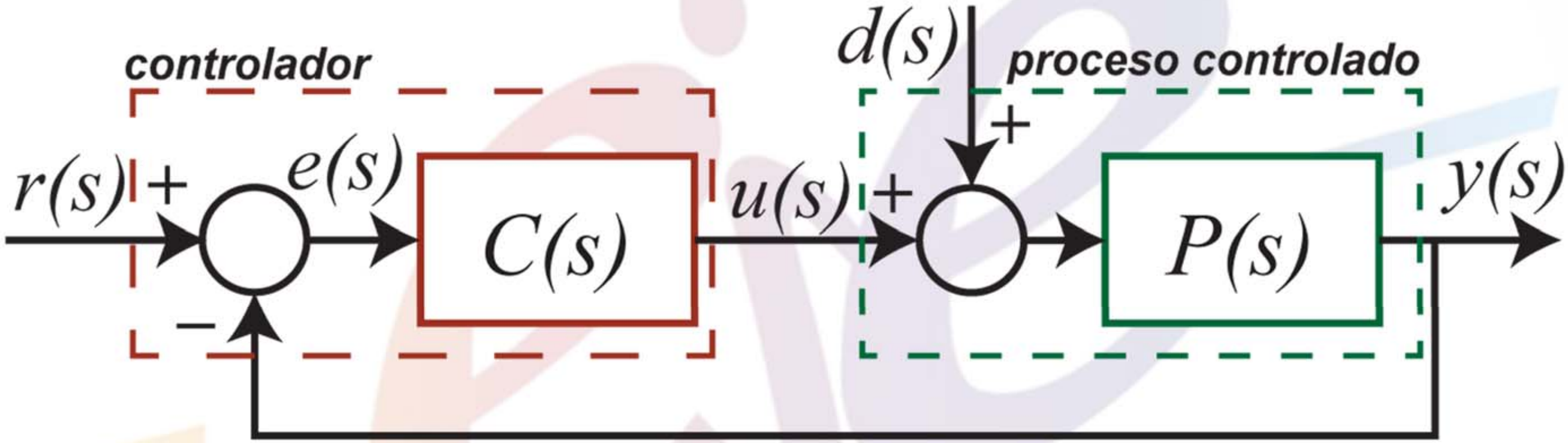
Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.
leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Control Realimentado

- Lazo (Bucle) de control monovariable:



- El modelo del proceso controlado ***P(s)*** incluye el modelo del proceso, del sensor/Transmisor y del elemento final de control.

Control Realimentado

Controlador:

"***Dispositivo que opera automáticamente para regular una variable controlada***"

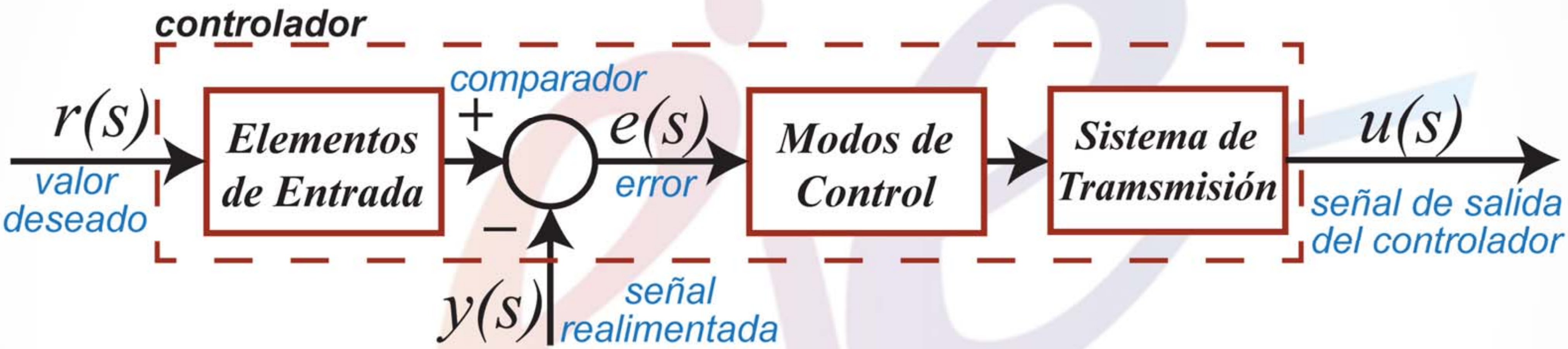
- Compara el valor real de la variable controlada con su valor deseado, para obtener una señal de ***error***.
- El error es procesado por los ***modos de control***, para calcular el cambio necesario de la variable manipulada para restablecer el equilibrio del sistema.

Controlador Industrial

- **Controlador industrial**: incorpora aparte de los *modos de control* varios elementos funcionales adicionales incluyendo:
  - El medio para establecer el valor deseado (referencia)
  - El comparador (obtiene la señal de error).
  - El selector de operación manual o automática.
  - El selector de la acción del controlador.
  - El medio para establecer el valor de sus parámetros.
  - Los indicadores de variables (controlada, valor deseado, señal de salida, etc)
  - Las características especiales según fabricante y aplicación. (*comunicación, protección, etc.*)

Controlador Industrial: Modos de Control

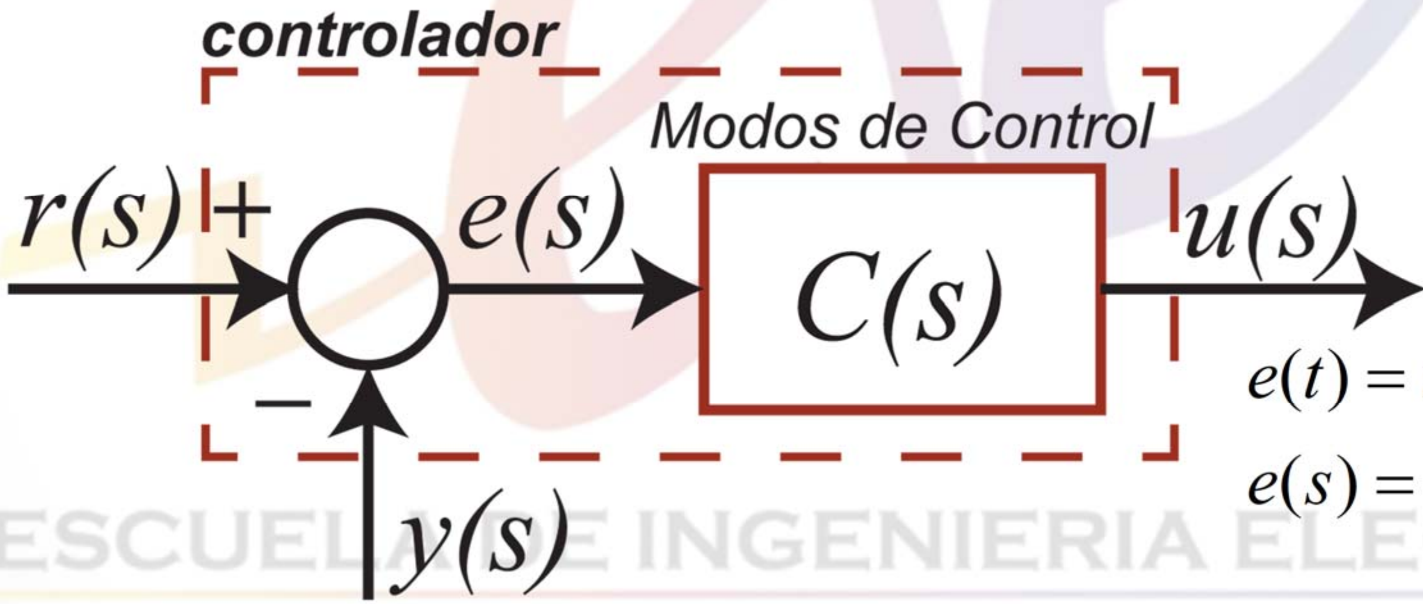
- Diagrama de bloques general (controlador industrial)



- Se supone que las variables y señales dentro del controlador están ***normalizadas*** y son ***adimensionales*** (***sistema por unidad***).
- Se denominará en adelante que **el *Controlador* son los *Modos de Control***.
- Los controladores de uso industrial estarán formados por la combinación de los ***modos de control*** *Proporcional, Integral y Derivativo.*

Controlador Industrial: ecuación

- El controlador recibe dos entradas: el *valor deseado* [***r(t), r(s)***] y la *señal realimentada* [***y(t), y(s)***] y produce una señal de salida llamada simplemente *salida del controlador* [***u(t), u(s)***] , la *señal del error* [***e(t), e(s)***] es una variable interna.



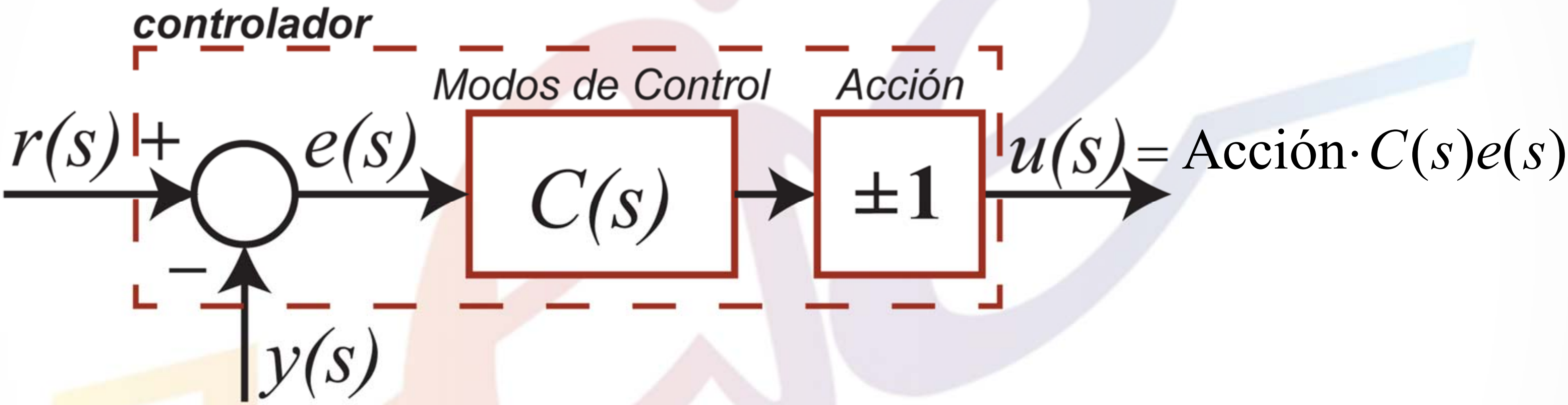
$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$e(s) = r(s) - y(s)$$

- Ecuación del Controlador: $u(s) = C(s)e(s) = C(s)\big(r(s) - y(s)\big)$

Controlador Industrial: Acción de Control

- En la práctica, los controladores comerciales incluyen una selector de ***Acción***:

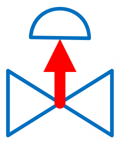


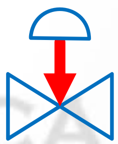
- El selector de ***Acción*** del controlador permite que esta sea:
  - ***Directa***: salida del controlador ***u*** *debe* *crecer* cuando la señal realimentada ***y*** crece
  - ***Inversa***: salida del controlador ***u*** *debe* *decrecer* cuando la señal realimentada ***y*** crece
- La ***Acción*** de controlador debe elegirse en forma adecuada para que el controlador efectúe las correcciones tendientes a **disminuir el error** y no a aumentarlo (*selección incorrecta de la acción*).

EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Controlador Industrial: Acción de Control

- Se requiere:
  - **Acción inversa** (**+1**) cuando la ganancia de la planta es ***positiva***
  - **Acción directa** (**-1**) cuando la ganancia de la planta es ***negativa***.
- Debe considerarse además la acción del actuador en caso de falla del elemento final, esta es:
  - *Normalmente Abierto* ***NA***: cuando se requiere la presencia de una señal para cerrar el elemento)
  - *Normalmente Cerrado* ***NC***: cuando se requiere de la presencia de una señal para abrir el elemento).


NA


NC

Controlador Industrial: Acción de Control

- Se busca que:

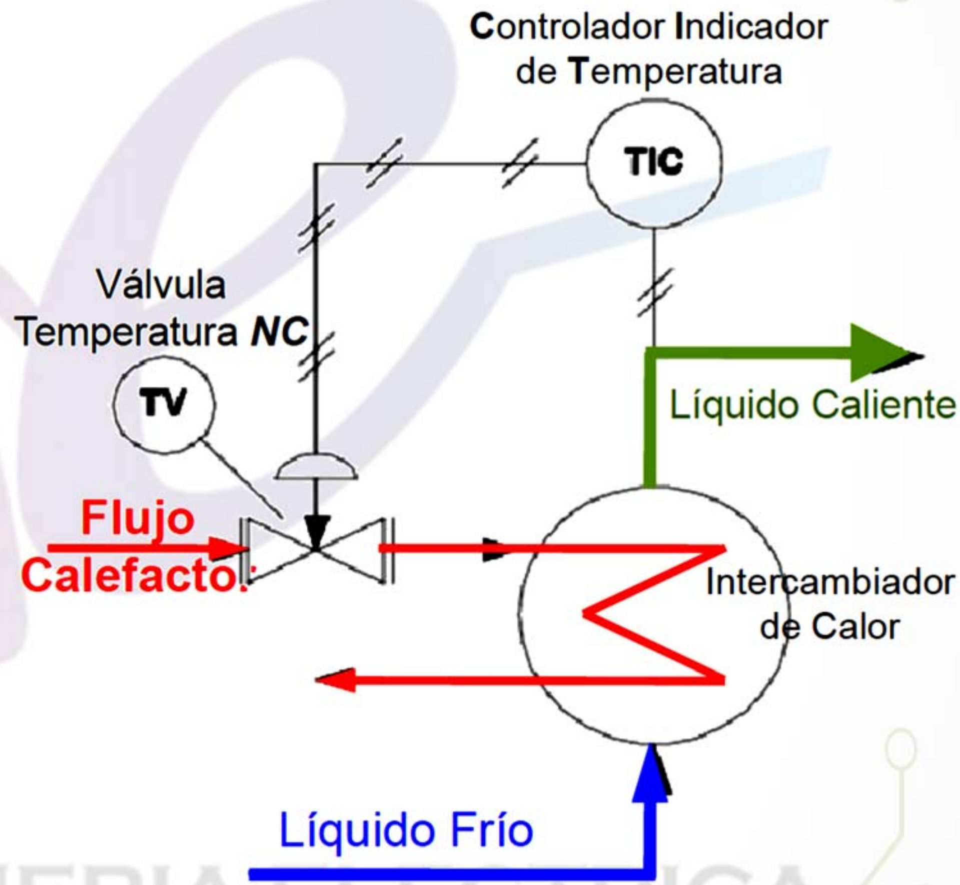
  “el producto de la Acción por la ganancia de la planta siempre sea un número positivo, para garantizar que la realimentación sea negativa”

- Si la acción en mal seleccionada, el sistema de control se hace ***inestable***.
- La selección de la Acción del controlador siempre debe realizarse **antes** de poner el lazo de control en funcionamiento.
- En adelante se supondrá que la Acción del controlador se selecciona correctamente → no se considerará en los diagramas de bloques de los controladores.

Controlador Industrial: Acción de Control

Ejemplo:

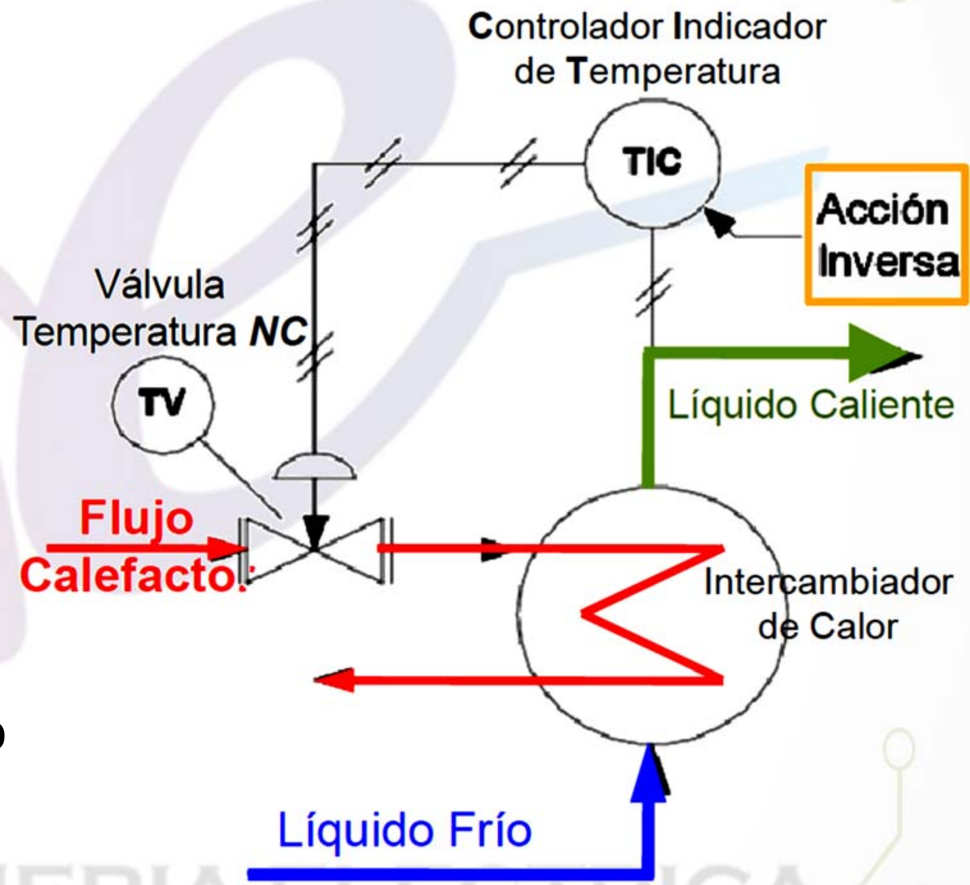
- El sistema debe calentar el líquido frío (entrando) de forma que el líquido caliente (saliendo) alcance la temperatura deseada.
- La temperatura de salida del líquido caliente se controla al aumentar o disminuir el flujo calefactor → válvula ***TV***.
- Si al medir la temperatura en el líquido caliente esta es **mayor** de la deseada, se debe disminuir (<u>cerrar</u>) la apertura de la válvula ***TV*** para que entre menos flujo calefactor al sistema → temperatura del líquido caliente disminuye.



Controlador Industrial: Acción de Control

Ejemplo:

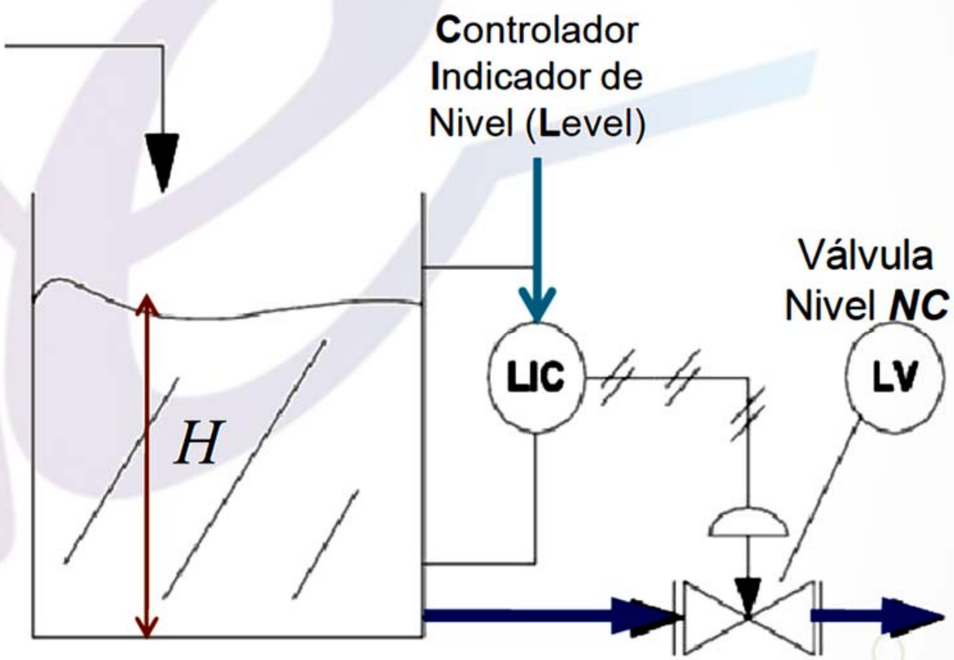
- Como la válvula ***TV*** es ***NC***, la señal que llega a esta debe **disminuir** para que la válvula cierre y así disminuya el flujo calefactor.
- Como la temperatura del liquido caliente sobrepasó el valor deseado, esto indica que la señal realimentada aumentó (+ temperatura).
- Se requiere entonces que la señal de salida del controlador **disminuya** cuando la señal realimentada crezca.
- Por lo que la acción del controlador debe ser **INVERSA (+1)**



Controlador Industrial: Acción de Control

Ejemplo:

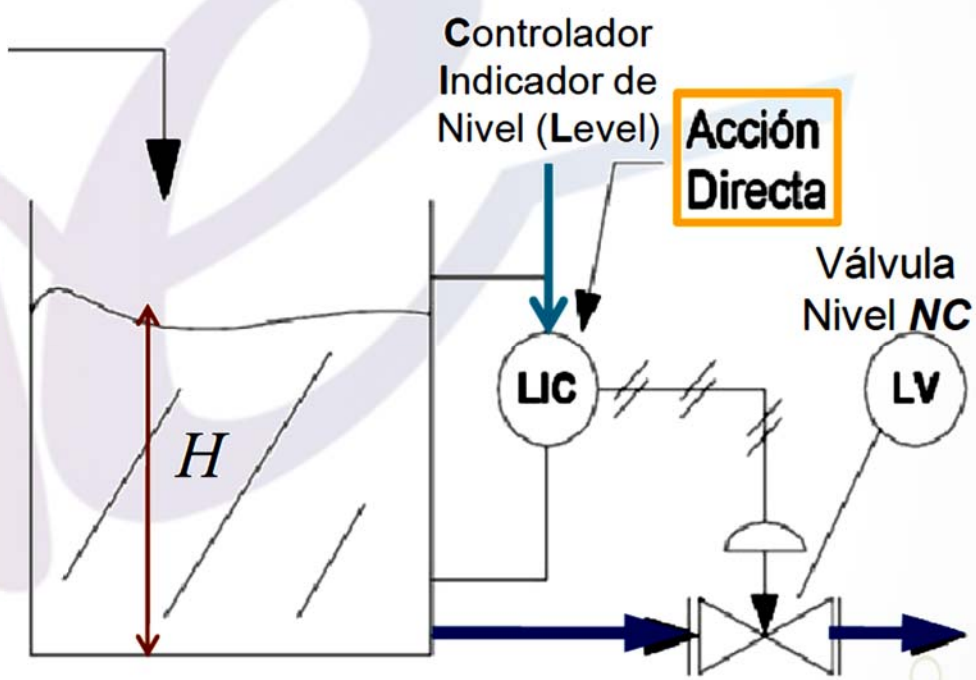
- El sistema debe mantener el **nivel del tanque *(H)*** de manera que se encuentre en el valor deseado.
- El nivel en el tanque se controla al aumentar o disminuir el caudal de salida, esto al abrir o cerrar la válvula ***LV***.
- Si al medir el nivel del tanque este resulta **mayor** del deseado, se debe aumentar (abrir) la apertura de la válvula LV para que aumente el caudal de salida del tanque y así el nivel del tanque disminuya al valor deseado.



Controlador Industrial: Acción de Control

Ejemplo:

- Como la válvula ***LV*** es ***NC***, la señal que llega a esta debe **aumentar** para que la válvula abra y así aumente el caudal de salida del tanque.
- Como el nivel del tanque sobrepasó el valor deseado, esto indica que la señal realimentada aumentó (+ nivel).
- Se requiere entonces que la señal de salida del controlador **aumente** cuando la señal realimentada crezca.
- Por lo que la acción del controlador debe ser **Directa (-1)**.



Controlador Proporcional *P*

- Controlador formado por solamente el modo proporcional → *controlador proporcional / controlador* ***P***
  - Ecuación:

$$u(t) = K_p e(t) \begin{cases} K_p & \text{Ganancia Controlador} \\ e(t) & \text{Error} \\ u(t) & \text{Salida del Controlador} \end{cases}$$

  - El comportamiento dinámico del sistema de control se investigará para pequeñas variaciones de las variables en torno al punto de operación deseado del sistema, para este caso la FT del controlador ***P*** es:

$$\boxed{C_p(s) = \frac{u(s)}{e(s)} = K_p}$$

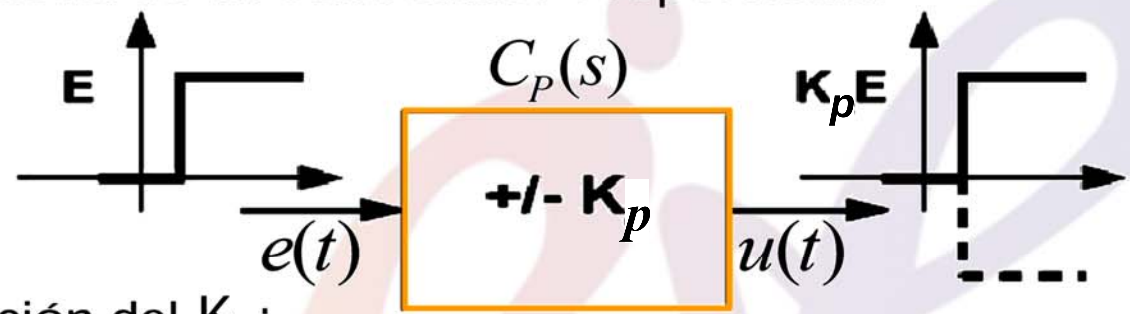
  - FT del Lazo de Control Realimentado para el controlador P:

$$y(s) = \frac{K_p P(s)}{1+K_p P(s)} r(s) + \frac{P(s)}{1+K_p P(s)} d(s)$$

Controlador Proporcional *P*

- El controlador Proporcional utiliza la información <u>Presente del error</u>.

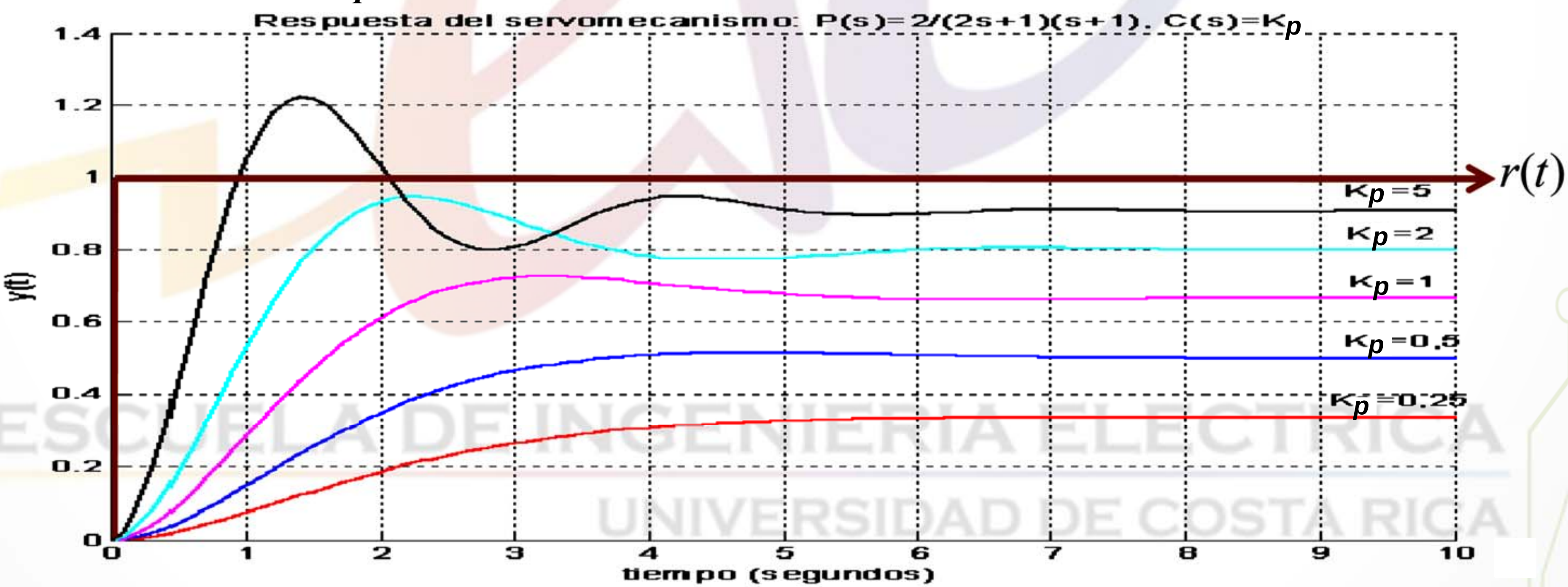
Respuesta de un controlador Proporcional:



Banda Proporcional

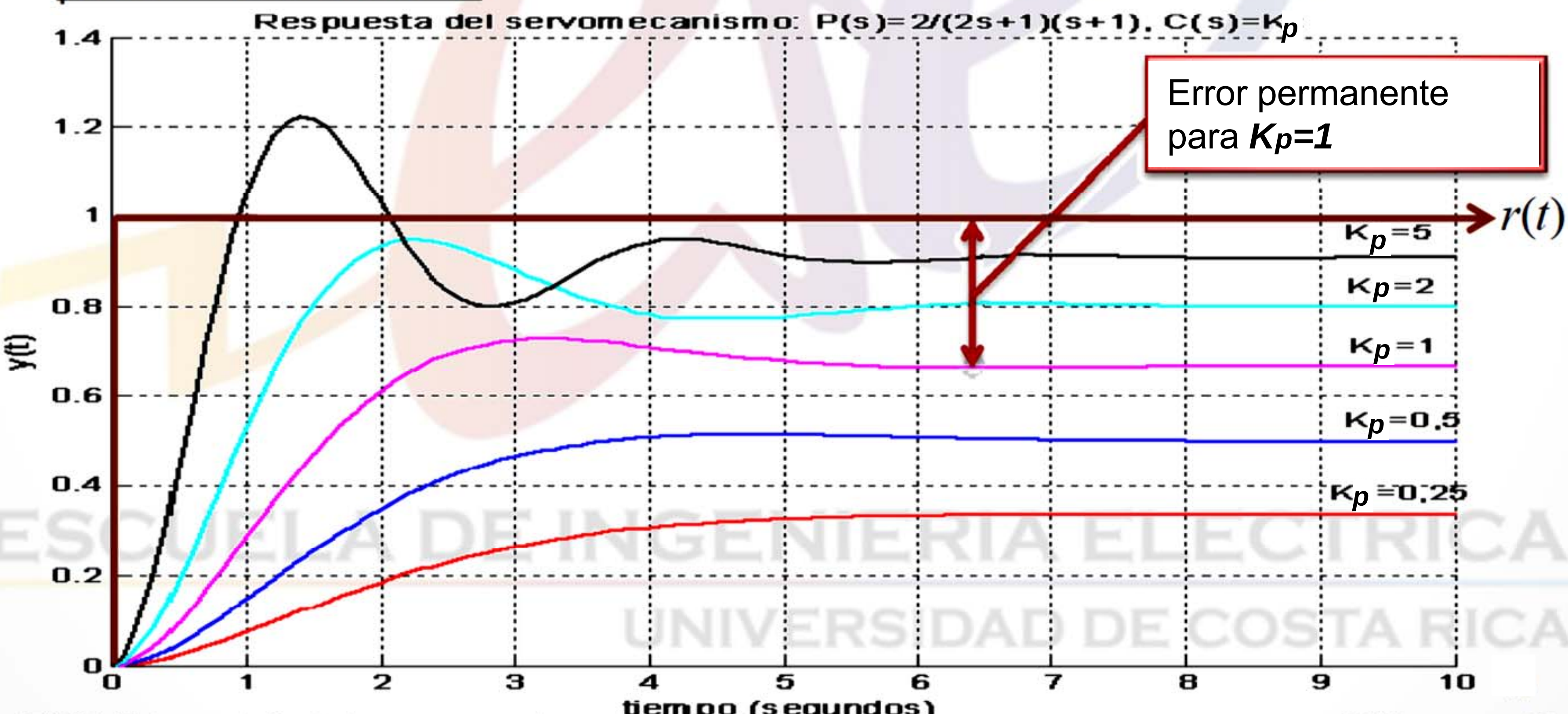
$$B_p = \frac{100}{K_p}$$

- Variación del K_p:



Controlador Proporcional *P*

- Se observa que al aumentar la ganancia del controlador P disminuye el error permanente (*diferencia entre el valor deseado de la variable controlada y el valor final de la señal realimentada*), pero a su vez el sistema se vuelve cada vez más oscilatorio, pudiendo llegar a la inestabilidad.
- Sin importar cuanto se aumente K_p, el error permanente no se puede eliminar para un controlador P ***(en este caso de particular de P(s))***



Controlador Proporcional Integral *PI*

- Un controlador formado por el modo proporcional e integral se denomina *controlador proporcional integral* o simplemente *controlador PI*.
- El modo integral toma en cuenta la historia anterior (valores pasados) del error.
- La salida del modo integral no alcanzará un valor estacionario hasta que el error sea cero y permanezca siendo cero.
- El modo integral adicionará a la salida del controlador una cantidad que es proporcional a la integral del error.
- La ecuación para el controlador PI es la siguiente:

$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right]$$

Controlador Proporcional Integral *PI*

- Si el error es cero y permanece en cero, esto es si se está en estado estacionario, la contribución del modo proporcional es cero y el valor de la integral (modo integral) es un número finito positivo o negativo.
- El modo integral garantiza que el error permanente sea cero, ya que su contribución en la salida del controlador no alcanza un valor constante, a menos que el error sea cero y permanezca siendo cero.

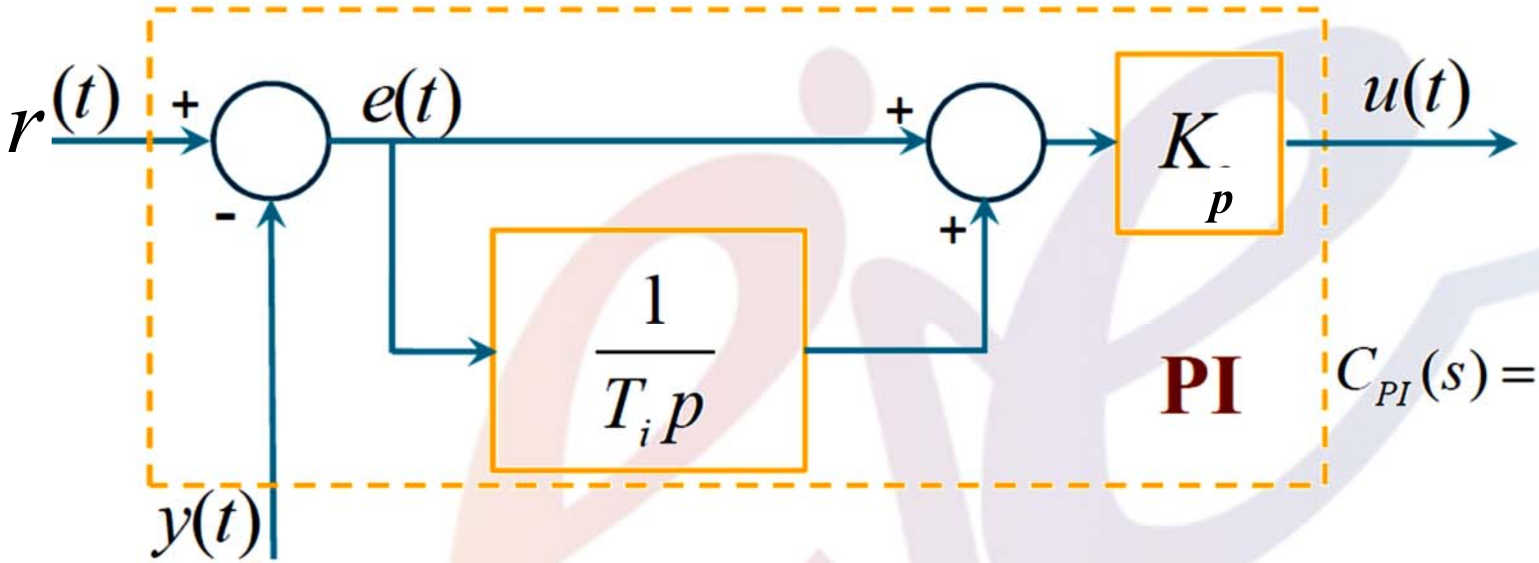
$$u(t) = K_p\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)d\tau\right]$$

- Para pequeñas variaciones de las variables la función de transferencia del controlador *PI* será:

$$\boxed{C_{PI}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right)} \begin{cases} K_p & \text{Ganancia del Controlador} \\ T_i & \text{Tiempo Integral} \end{cases}$$

Controlador Proporcional Integral *PI*

- Diagrama de bloques:

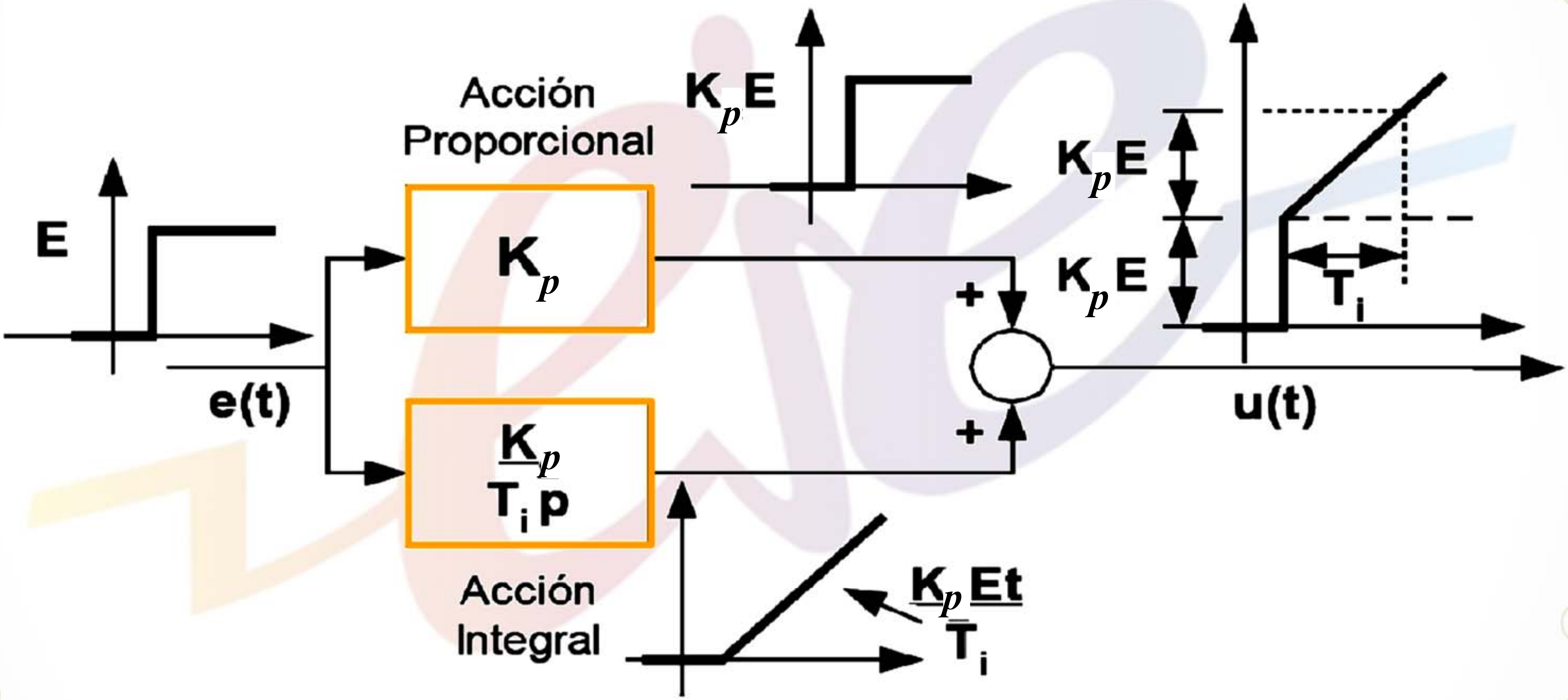


$$C_{PI}(s) = K_p \left(\frac{T_i s + 1}{T_i s} \right)$$

- El tiempo integral es el tiempo que tarda la salida del modo integral en repetir en magnitud la salida del modo proporcional.
- En algunos controladores antiguos, se utilizaba el Tiempo de Restablecimiento (rep/unidad tiempo, ej. repeticiones/minuto), en lugar del Tiempo Integral (unidad de tiempo).

Controlador Proporcional Integral *PI*

- Respuesta del controlador a un cambio escalón en el error:

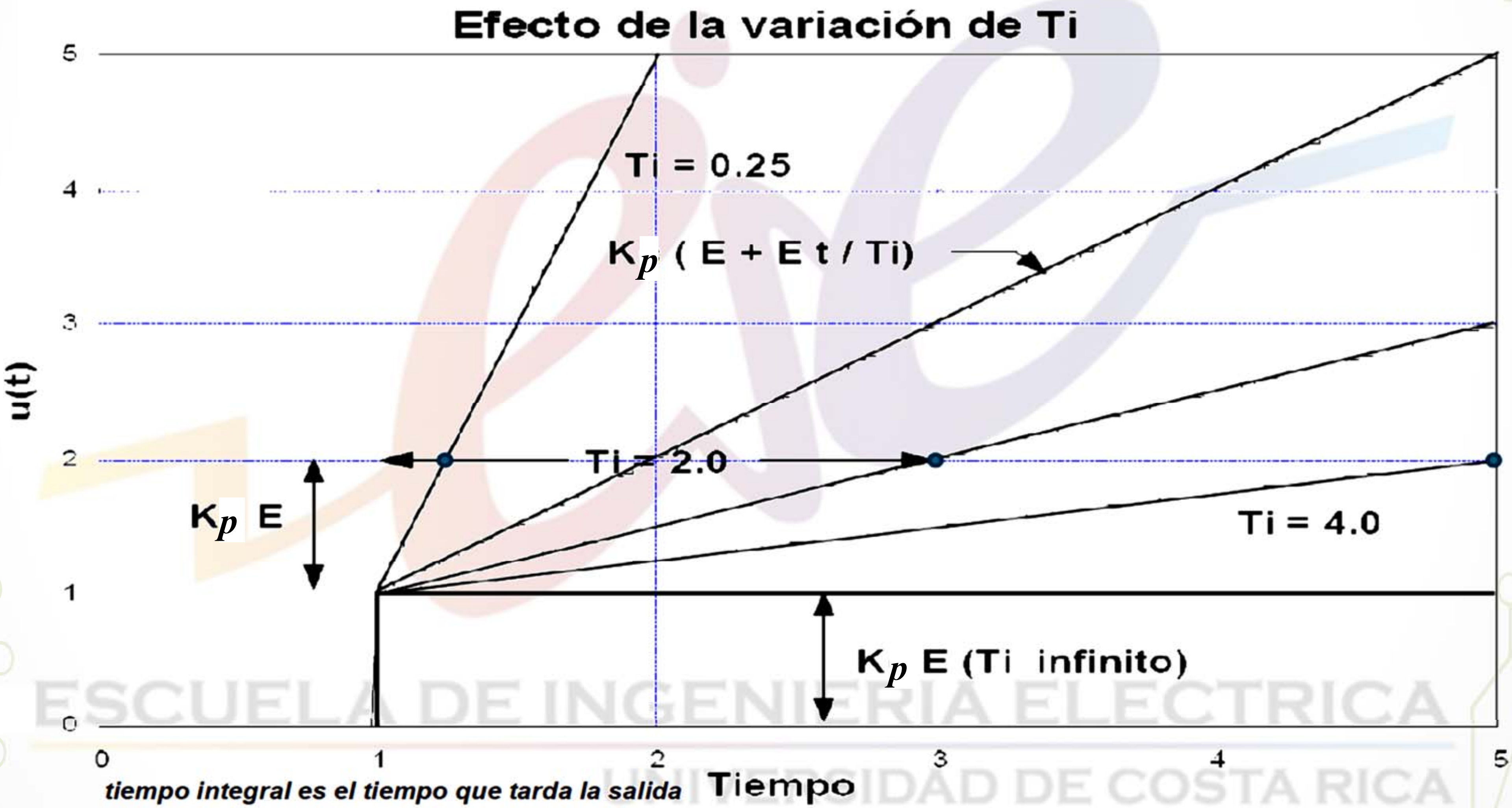


Tiempo de Restablecimiento:

$$\boxed{T_r = \frac{1}{T_i}}$$

Controlador Proporcional Integral *PI*

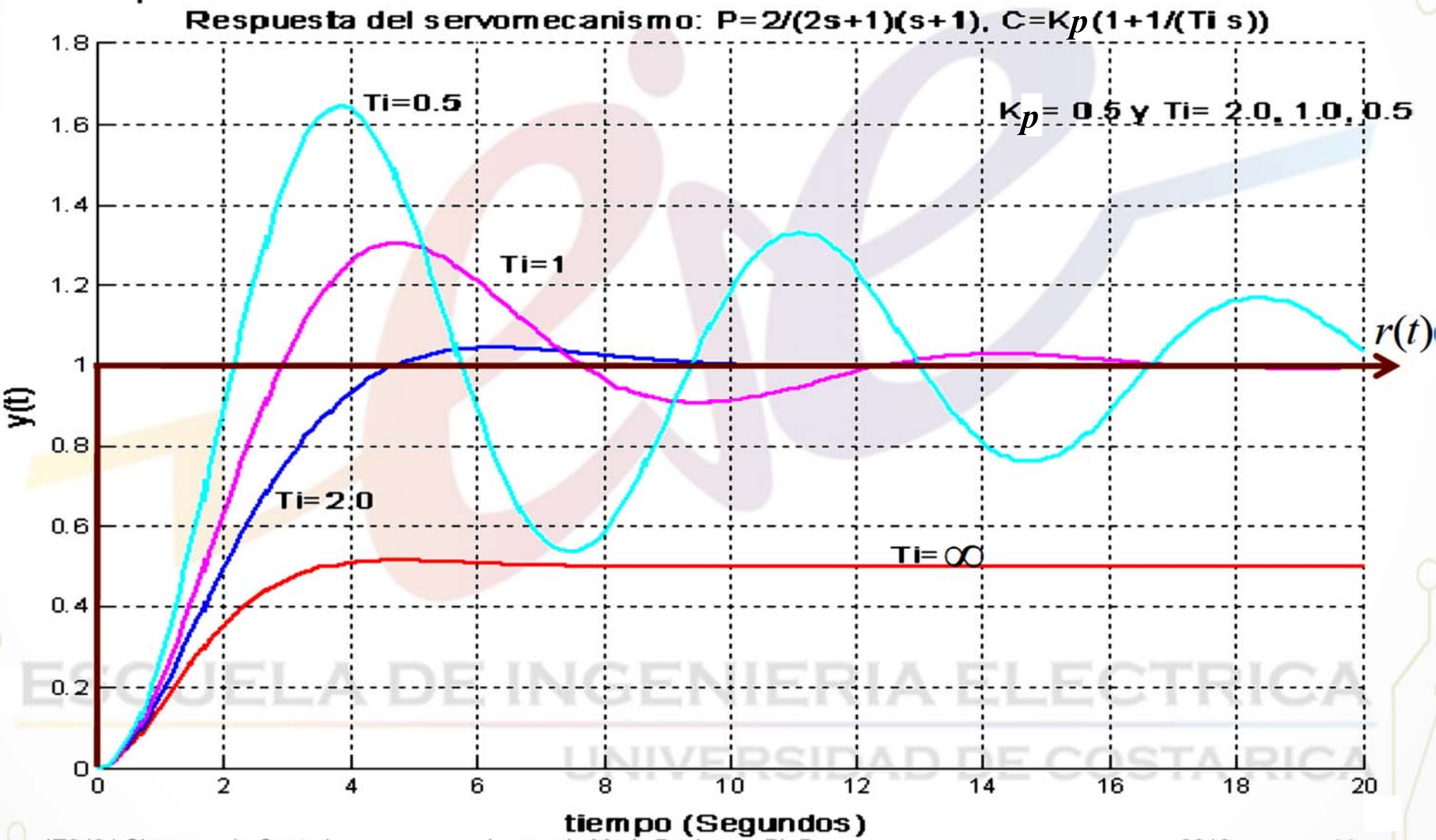
- Variación del Ti:



tiempo integral es el tiempo que tarda la salida del modo integral en repetir en magnitud la salida del modo proporcional

Controlador Proporcional Integral *PI*

- Respuesta del sistema de control con un controlador PI



Controlador Proporcional Derivativo *PD*

- Un controlador formado por el modo proporcional y derivativo se denomina *controlador proporcional derivativo* o simplemente *controlador* ***PD****.*
- El modo **derivativo** toma en cuenta el **futuro** (tendencia) del error.
- En los sistemas que tienden fácilmente a la inestabilidad, es conveniente introducir una compensación dinámica estabilizadora. Una acción de este tipo es la derivativa.
- El modo derivativo toma en cuenta la velocidad con que cambia el error, aumentando la amplitud de la acción correctiva cuando el error cambia rápidamente y disminuyéndola cuando cambia lentamente.
- Además, toma en cuenta la dirección en que cambia el error, es decir, las cantidades de acción correctiva grandes o pequeñas, dependiendo de la velocidad de cambio, se suman si el error aumenta y se restan si el error disminuye.

Controlador Proporcional Derivativo *PD*

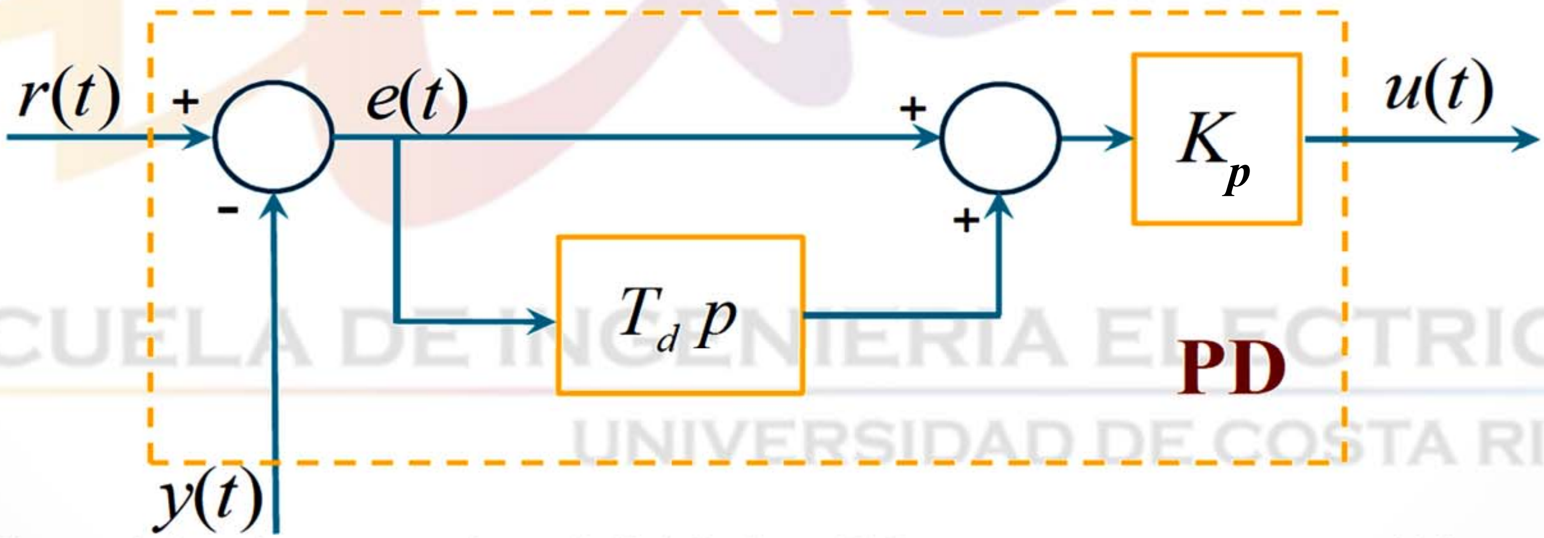
- La ecuación para el controlador PD es

$$u(t) = K_p\left[e(t) + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$

- Para pequeñas variaciones de las variables la función de transferencia del controlador PD será:

$$\boxed{C_{PD}(s) = K_p(1 + T_d s)} \begin{cases} K_p & \text{Ganancia del Controlador} \\ T_d & \text{Tiempo Derivativo} \end{cases}$$

- Diagrama de Bloques:



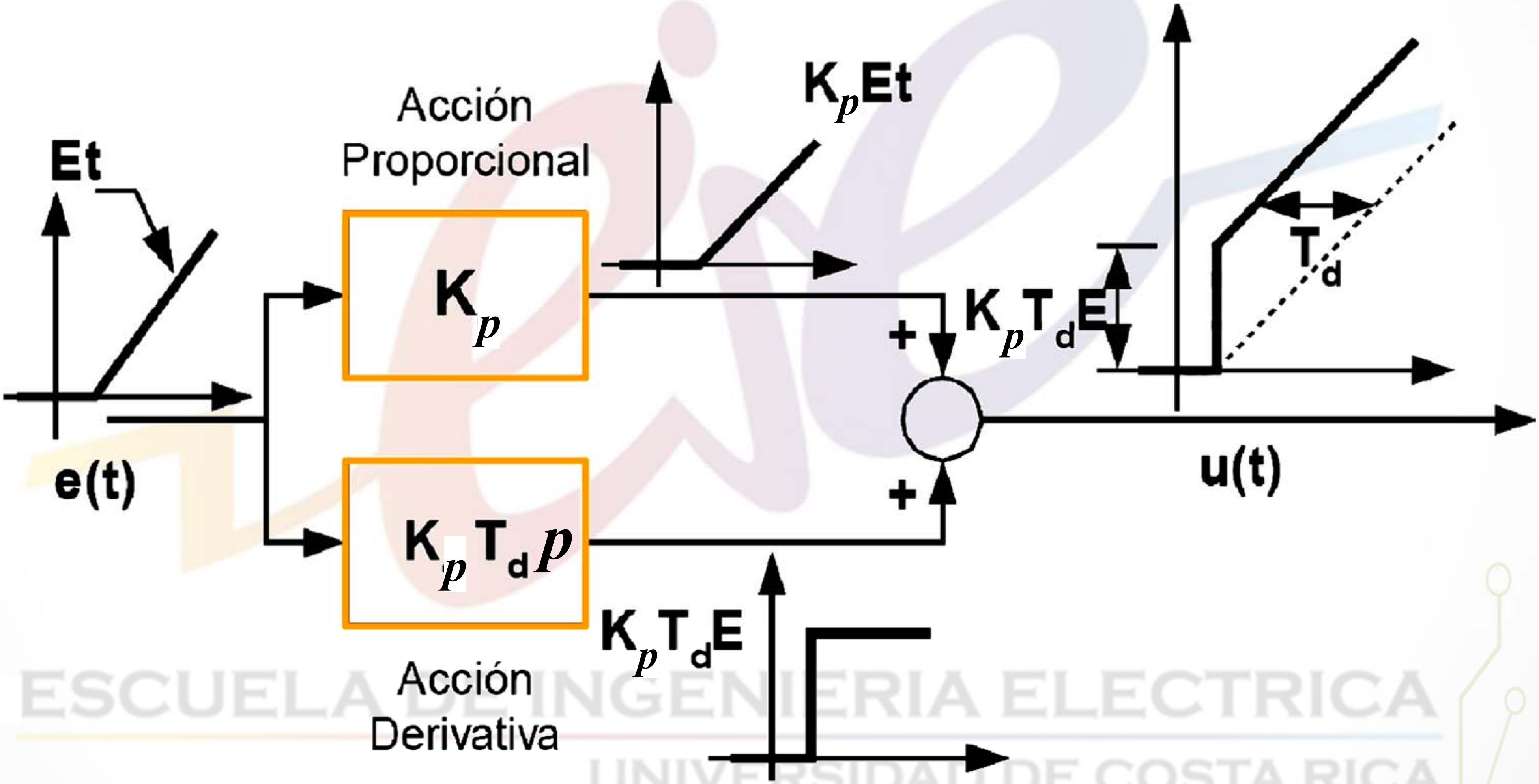
EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Controlador Proporcional Derivativo *PD*

- Al adicionar la acción derivativa, se está adicionando adelanto en el controlador para compensar el retraso en el lazo.
- El uso del modo derivativo se limita usualmente a aquellos casos con un retraso extremo en el proceso (ej *control de temperatura*), **evitando** utilizarlo en los sistema con ruido de medición (el modo derivativo amplifica el ruido).
- El ajuste del tiempo derivativo tiene que ver con cuanto **adelanto** se introduce en la acción de control.
- El tiempo derivativo es ese **adelanto en tiempo** que se logra con la acción derivativa.

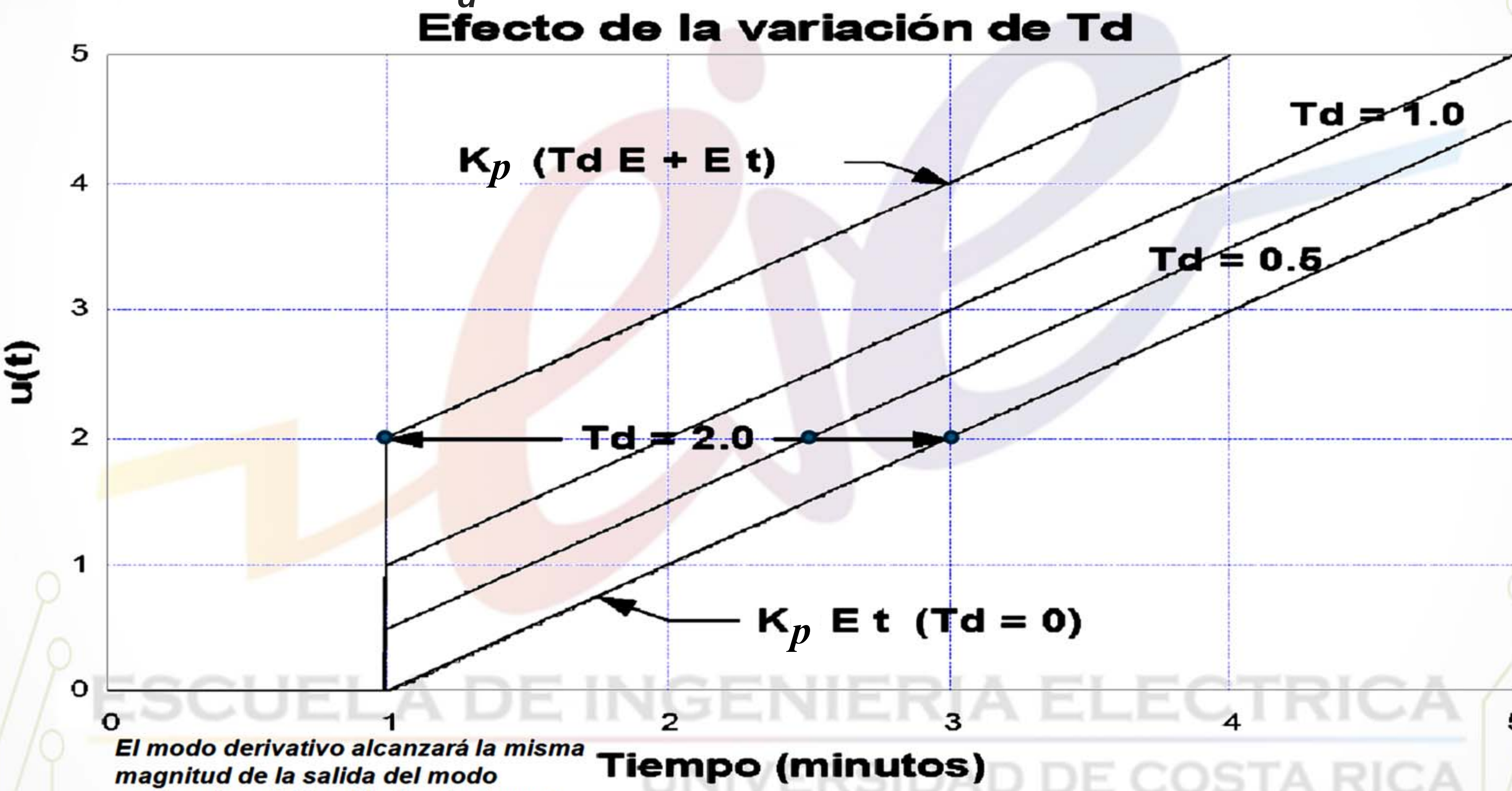
Controlador Proporcional Derivativo *PD*

- Respuesta del controlador **PD** a un cambio **rampa** en el error:



Controlador Proporcional Derivativo *PD*

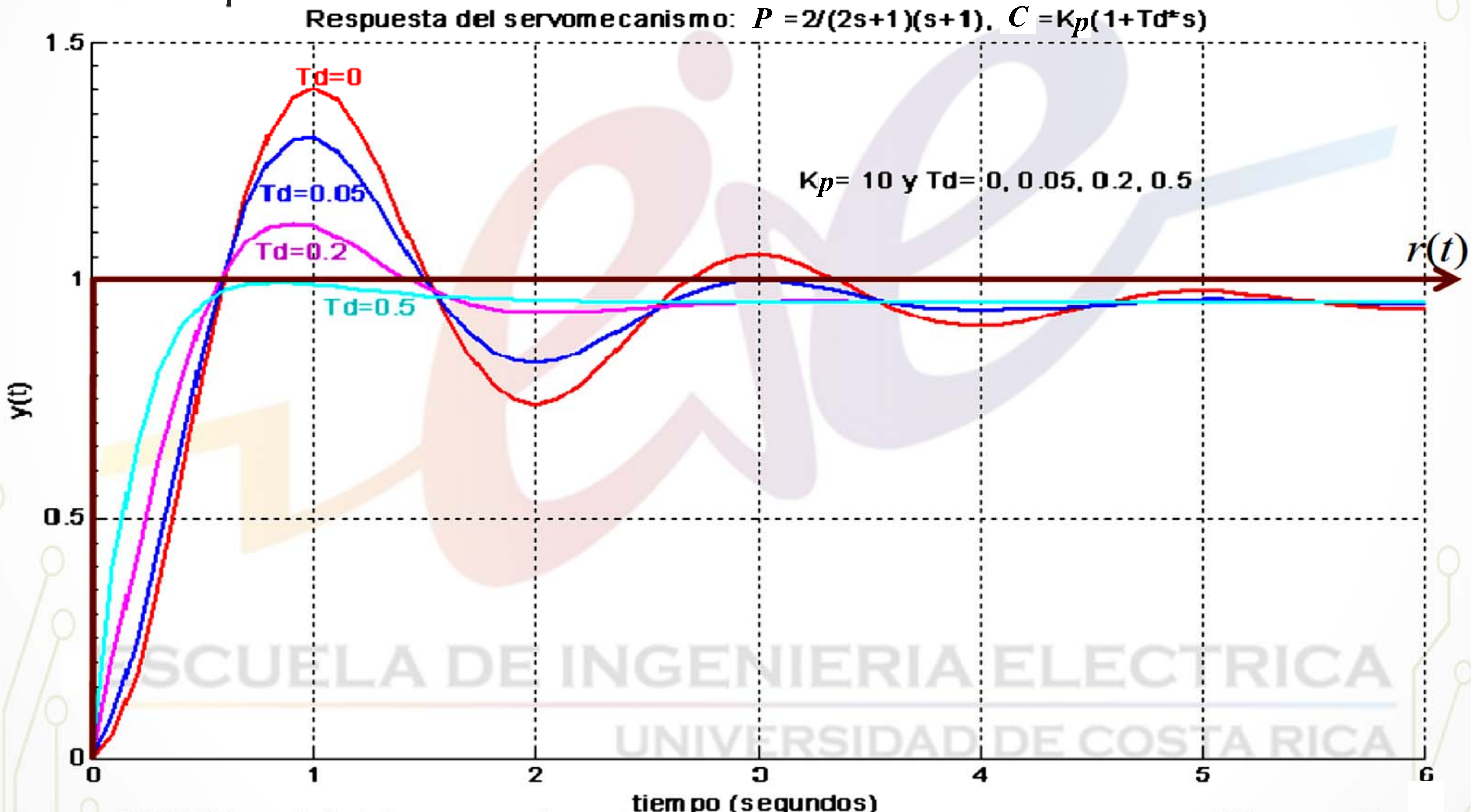
- Variación del T_d:



El modo derivativo alcanzará la misma magnitud de la salida del modo proporcional Td unidades de tiempo antes. El sistema es anticipativo

Controlador Proporcional Derivativo *PD*

- Respuesta del sistema de control con un controlador **PD**



Controlador Proporcional Derivativo *PD*

- La adición del modo derivativo en el controlador hace normalmente que el lazo sea **más estable** si está ajustado correctamente.
- Si el lazo es más estable, la ganancia puede ser mayor y el error permanente será menor que el que se tendría con un controlador puramente proporcional.
- Al aumentar la acción derivativa, aumentando **Td**, el sistema es más estable, es más rápido y el sobrepaso máximo disminuye.
- El cambio del tiempo derivativo **no** tiene ningún efecto sobre el **error permanente**.
- El modo derivativo ***ideal*** (puro) no puede ser implementado físicamente, debe utilizarse un ***filtro paso bajo*** para este fin.

Controlador Proporcional Integral Derivativo *PID*

- Los tres modos de control enumerados anteriormente pueden combinarse para formar un controlador ***P****roporcional* – ***I****ntegral* – ***D****erivativo*, usualmente conocido simplemente como *controlador* ***PID***.
- **No** existe una única ecuación para representar a ***todos*** los controladores ***PID***. La razón principal estriba en que normalmente se ha utilizado una ecuación para explicar su funcionamiento en los libros de texto, mientras que los controladores reales, fueron fabricados empleando otra ecuación por consideraciones principalmente económicas.
- Se verán diversos tipos de controladores PID según se definen a continuación

EIE
Escuela de Ingeniería Eléctrica

Controlador *PID* estándar

- Ecuación: $u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_o^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right]$

- Función de Transferencia:

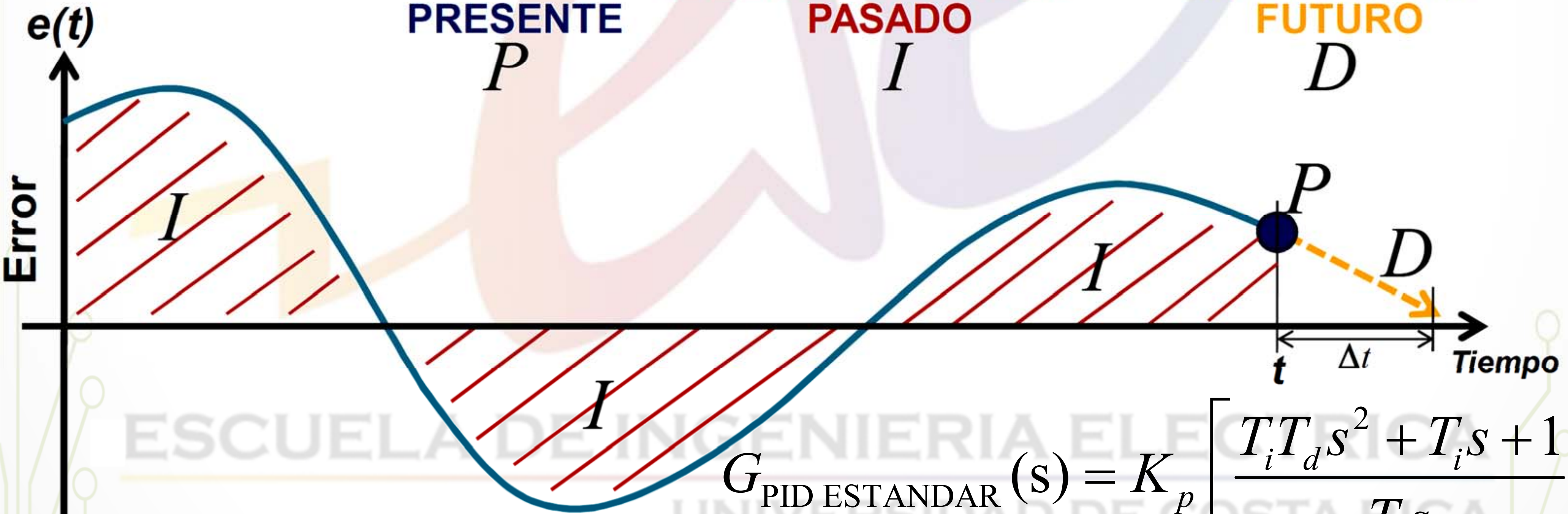
$$G_{\text{PID ESTANDAR}}(\text{s}) = K_p \left[1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right] \begin{cases} K_p & \text{Ganancia Controlador} \\ T_i & \text{Tiempo Integral} \\ T_d & \text{Tiempo Derivativo} \end{cases}$$

- El controlador PID estándar ***No*** es *interactuante en el dominio del* ***tiempo*** *(cada modo de control actúa por separado en la señal del error)*, pero ***Sí*** es *interactuante en el dominio de la* ***frecuencia*** *(la FT se puede reescribir con un numerador común con raíces dependiendo de Ti y Td, al variar alguno de estos parámetros se modifica la ubicación de los ceros de forma simultánea)*.

Controlador *PID* estándar

- Funcionamiento del controlador:

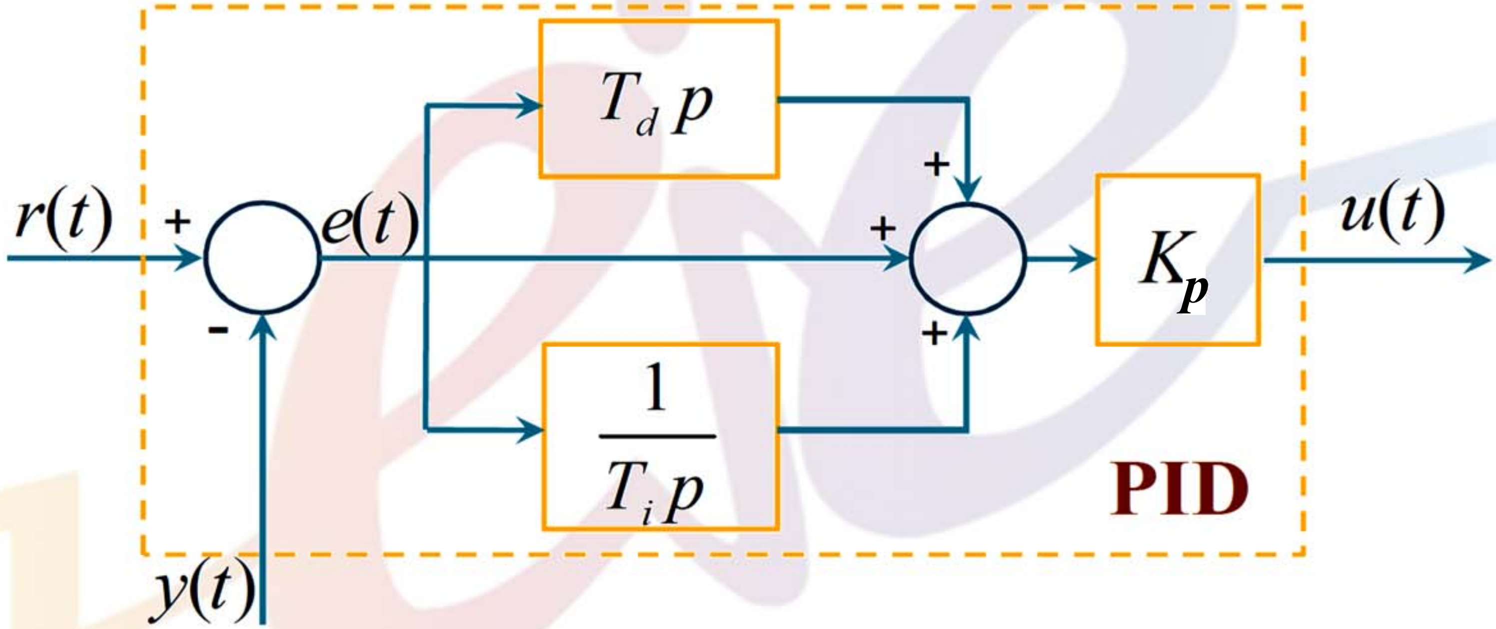
$$u(t) = K_p\left[\underbrace{\boxed{e(t)}}_{\substack{\text{PRESENTE}\\ P}} + \underbrace{\boxed{\frac{1}{T_i}\int_0^t e(\tau)\,d\tau}}_{\substack{\text{PASADO}\\ I}} + \underbrace{\boxed{T_d\,\frac{de(t)}{dt}}}_{\substack{\text{FUTURO}\\ D}}\right]$$



$$G_{\text{PID ESTANDAR}}(s) = K_p\left[\frac{T_i T_d s^2 + T_i s + 1}{T_i s}\right]$$

Controlador *PID* estándar

- Diagrama de bloques del controlador PID estándar:



- Cuando los fabricantes implementaron el PID, encontraron que se podía utilizar únicamente un amplificador para incorporar los modos Integral y derivativo si estos se interconectaban de forma distinta a la mostrada en el PID estándar, de esta y otras modificaciones surgen los distintos tipos de controlador PID.
- Se exponen a continuación algunas de estas variantes.

Controlador *PID* serie

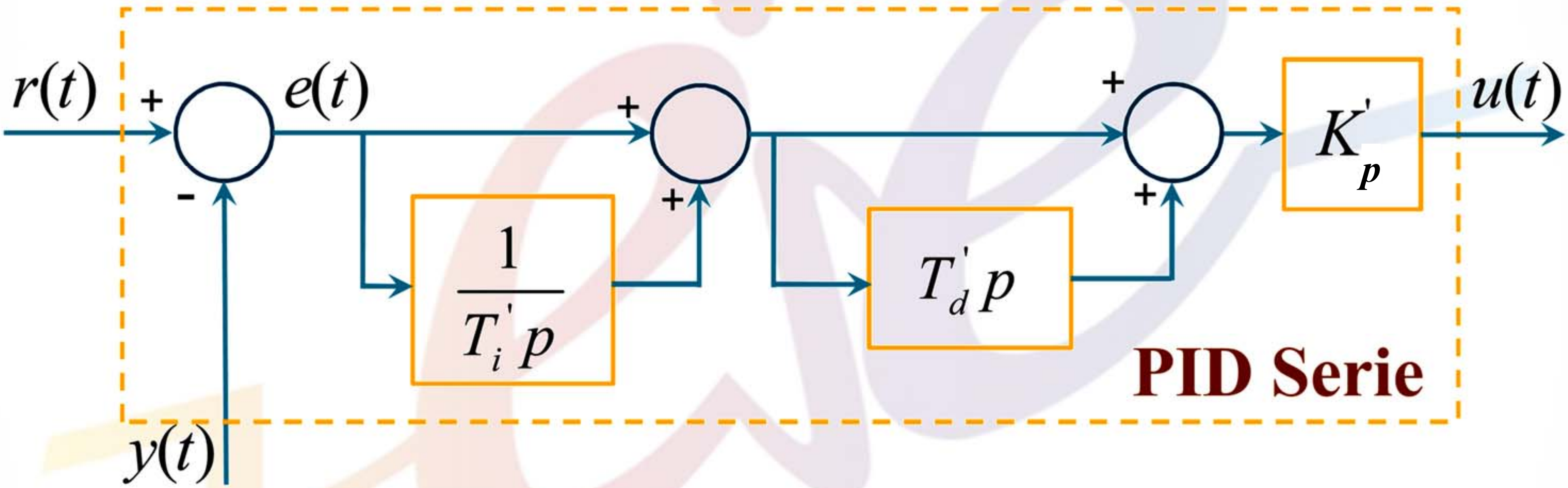
- Controlador ***PI*** en **serie** con un ***PD***:
- Ecuación: $u(t) = K_p^{'}\left[1+\frac{1}{T_i^{'}p}\right]\left[1+T_d^{'}p\right]e(t)$
- Función de Transferencia:

$$G_{\text{PID SERIE}}^{'}(s) = K_p^{'}\left(1+\frac{1}{T_i^{'}s}\right)\left(1+T_d^{'}s\right) \quad \begin{cases} K_p^{'} & \text{Ganancia Controlador} \\ T_i^{'} & \text{Tiempo Integral} \\ T_d^{'} & \text{Tiempo Derivativo} \end{cases}$$

- El controlador PID serie ***Sí*** es *interactuante en el dominio del **tiempo***, pero ***NO*** es *interactuante en el dominio de la **frecuencia***. (*ubicación de los ceros se modifica de forma independiente*).

Controlador *PID* serie

- Diagrama de Bloques:



- Parámetros del Controlador PID Serie son ***distintos*** a los del PID estándar y a los del PID paralelo.
- El controlador PID Serie es de los más utilizados en la industria.

Controlador *PID* paralelo

- En este controlador cada modo tiene una ganancia de ajuste independiente.
- Ecuación:

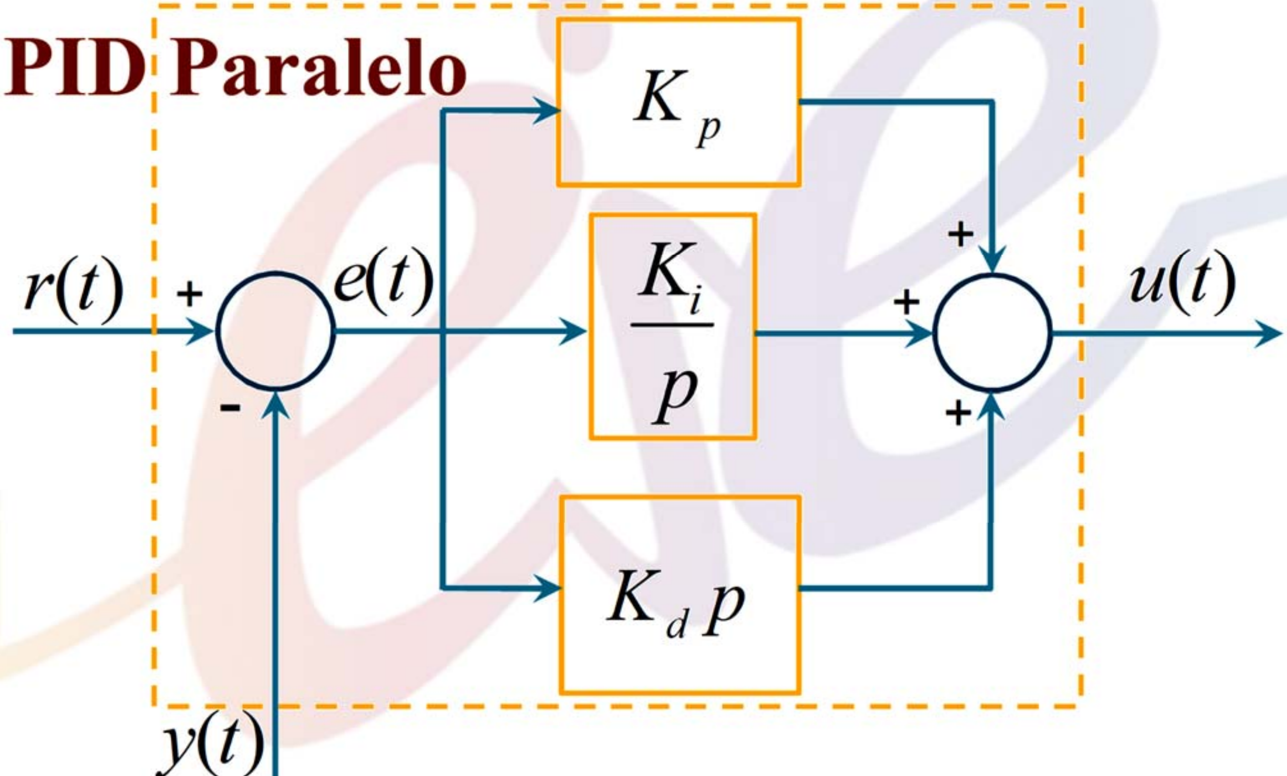
$$u(t) = \left[K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p \right] e(t)$$

- Función de Transferencia:

$$G_{\text{PID PARALELO}}(\text{s}) = \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s \right) \begin{cases} K_p & \text{Ganancia Proporcional} \\ K_i & \text{Ganancia Integral} \\ K_d & \text{Ganancia Derivativa} \end{cases}$$

Controlador *PID* paralelo

- Diagrama de Bloques:



- El efecto de la variación de las diferentes ganancias del controlador paralelo no tiene el mismo efecto que el asociado a la ganancia y constantes de tiempo integral y derivativo de los demás controladores *PID, siendo normalmente* ***más difícil de sintonizar*** mediante procedimientos de prueba y error.

Controlador *PID* realizable

- Los controladores expuestos hasta el momento se consideran ***idealizados*** ya que sus ecuaciones ***NO*** pueden implementarse directamente.
- Para poder **implementar** los distintos modos de los controladores PID ***Estándar***, ***Serie*** o ***Paralelo***, se deben agregar ciertas características a las funciones de transferencia y Diagramas de bloques de los mismos:
  - Protección contra el desbordamiento del modo integral
  - Filtro derivativo.
  - Acción derivativa sobre el error o la señal realimentada

Controlador *PID* realizable

- Protección contra el desbordamiento del modo integral:
  - Si el **Error ≠ 0** → la contribución del modo integral a la salida del controlador seguirá variando y dejará de hacerlo solo cuando éste sea cero y permanezca en cero.
  - Existen ocasiones en que *Error ≠ 0* y en las cuales deba evitarse que se siga incrementando (*o decrementando*) la integral del mismo para prevenir la saturación del integrador.
  - ***Saturación del integrador*** → se requerirá que el error se mueva en la dirección contraria y cambie de signo por un tiempo que podría llegar a ser grande, antes de que la contribución del modo integral regrese a valores normales.

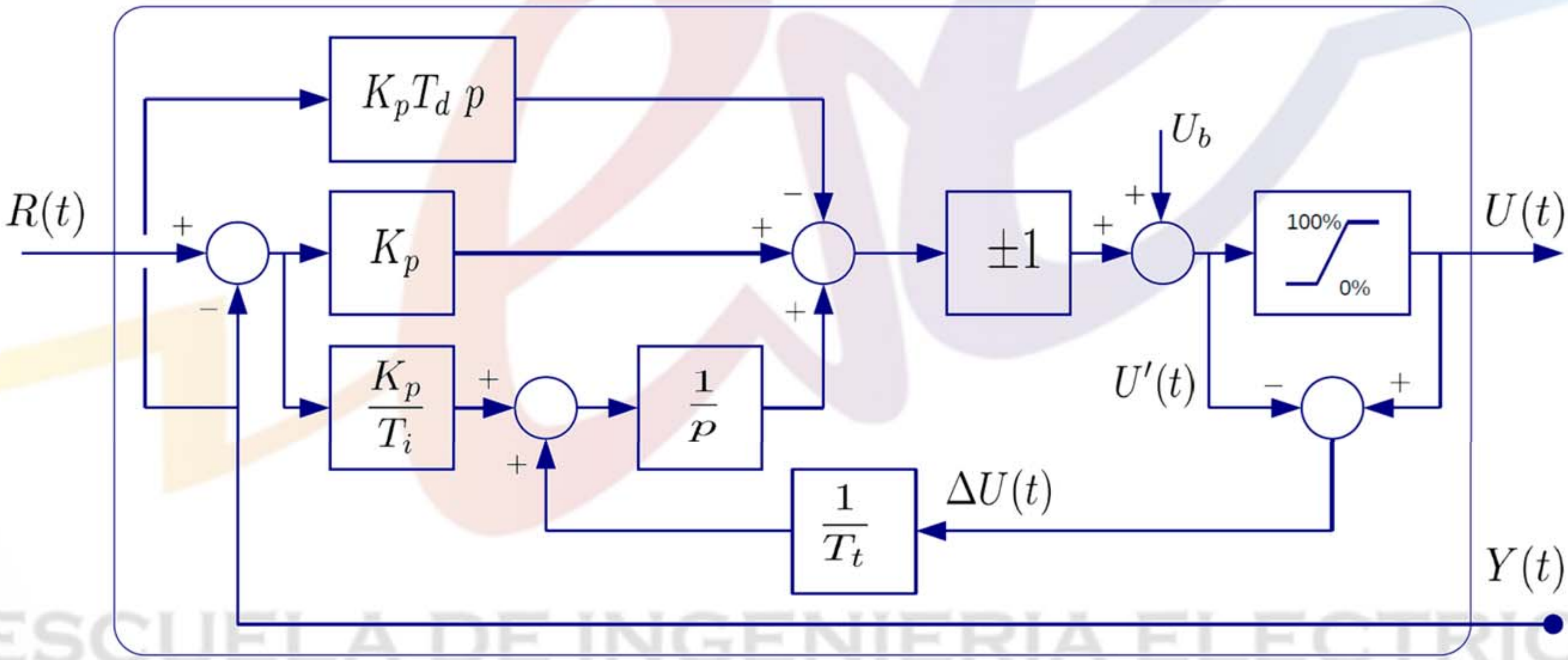
EIE
Escuela de
Ingeniería Eléctrica

Controlador *PID* realizable

- Protección contra el desbordamiento del modo integral:
  - ***Saturación del integrador***: ocurre cuando el controlador se opera en modo manual, cuando el elemento final de control ha alcanzado una posición extrema, (ej válvula completamente abierta) y en el caso de los sistemas de control selectivo.
  - Los fabricante incorporan casi de manera estándar dentro de sus controladores, un mecanismo para prevenir este desbordamiento del modo integral denominado en inglés "***anti-reset windup***"

Controlador *PID* realizable

- Protección contra el desbordamiento del modo integral:
  - ***Ej. Saturación del integrador***: "***anti-reset windup***"



Åström y Hägglund 1995

Controlador *PID* realizable

- Filtro Derivativo:
  - Un derivador puro (***ideal***) no es físicamente realizable → puede ser implementado mediante un ***filtro paso bajo*** en el modo derivativo.
  - El filtro paso bajo permite la acción del derivador y limita a su vez el *ruido de alta frecuencia*, presente normalmente en la variable medida.
  - Funciones de Transferencia:

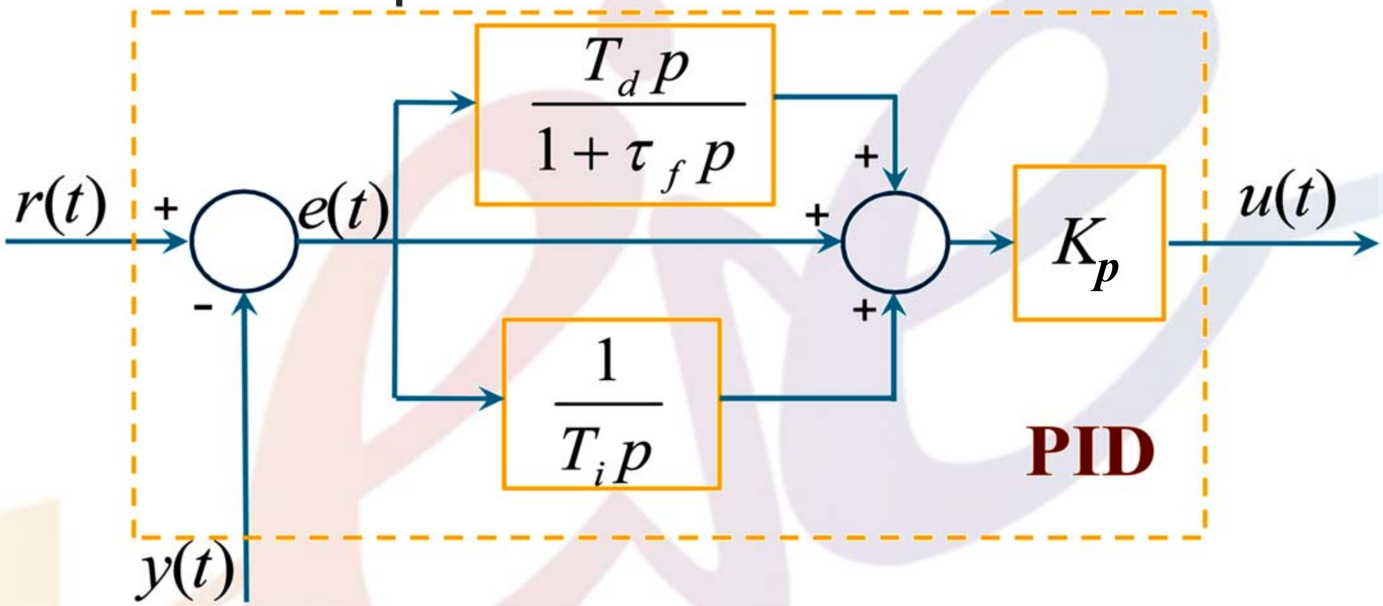
1.PID ESTÁNDAR: $G_{\text{PID ESTANDAR}}(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right)$ $\boxed{\tau_f = \alpha T_d}$

2.PID SERIE: $G'_{\text{PID SERIE}}(s) = K'_p\left(1+\frac{1}{T'_i s}\right)\left(\frac{1+T'_d s}{1+\tau_f s}\right)$ $\boxed{\tau_f = \alpha' T'_d}$

3.PID PARALELO: $G_{\text{PID PARALELO}}(s) = \left(K_p+\frac{K_i}{s}+\frac{K_d s}{1+\tau_f s}\right)$ $\boxed{\tau_f = \alpha_p K_d}$

Controlador *PID* realizable

- Diagrama de Bloques:



- La constante de tiempo del filtro τ_f se debe ajustar para que el modo derivador ***no*** amplifique el ruido de alta frecuencia.
- Normalmente se hace que la constante sea de 8 a 10 veces más pequeña que el tiempo derivativo, limitando así el ruido de alta frecuencia. $\boxed{\tau_f = \alpha T_d \approx 0{,}1T_d \quad (T_d, T_d' \text{ o } K_d) \quad 0{,}05 \le \alpha \le 0{,}2}$

Controlador *PID* industrial

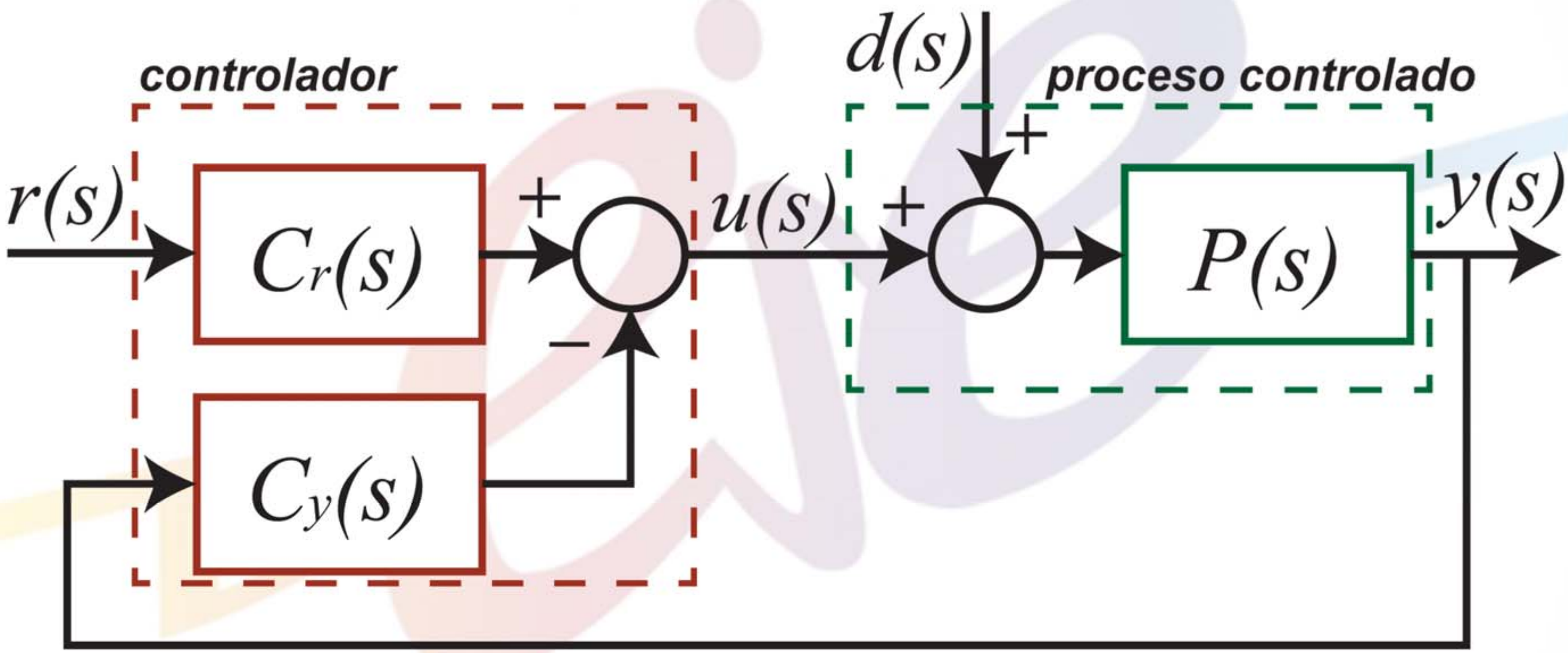
- Acción derivativa sobre la señal realimentada:
  - Si el modo derivativo se aplica sobre la señal de error se produce un ***salto*** en la salida del controlador cuando se introduce un cambio escalón en el valor deseado.
  - Es frecuente que el modo derivativo se aplique sólo sobre la señal realimentada. Para el caso del PID Serie, su ecuación quedaría como:

$$u(s) = K_p^{'}\left(1+\frac{1}{T_i^{'}s}\right)\left(r(s)-\frac{1+T_d^{'}s}{1+\tau_f s}y(s)\right) \qquad \boxed{\tau_f = \alpha^{'}T_d^{'}}$$

  - Éste controlador se conoce como ***PID Industrial*** por ser el más empleado en la industria.
  - Responde igual al PID Serie (*mismos parámetros*) para un cambio en la perturbación, pero es más lento ante un cambio en el valor deseado.
  - La mayoría de lazos de control en la industria opera como regulador y no como servomecanismo.

Controlador *PID* industrial

- Acción derivativa sobre la señal realimentada:



$$u(s) = C_r(s)r(s) - C_y(s)y(s)$$

Controlador Valor Deseado

$$C_r(s) = K_p'\left(1 + \frac{1}{T_i's}\right)$$

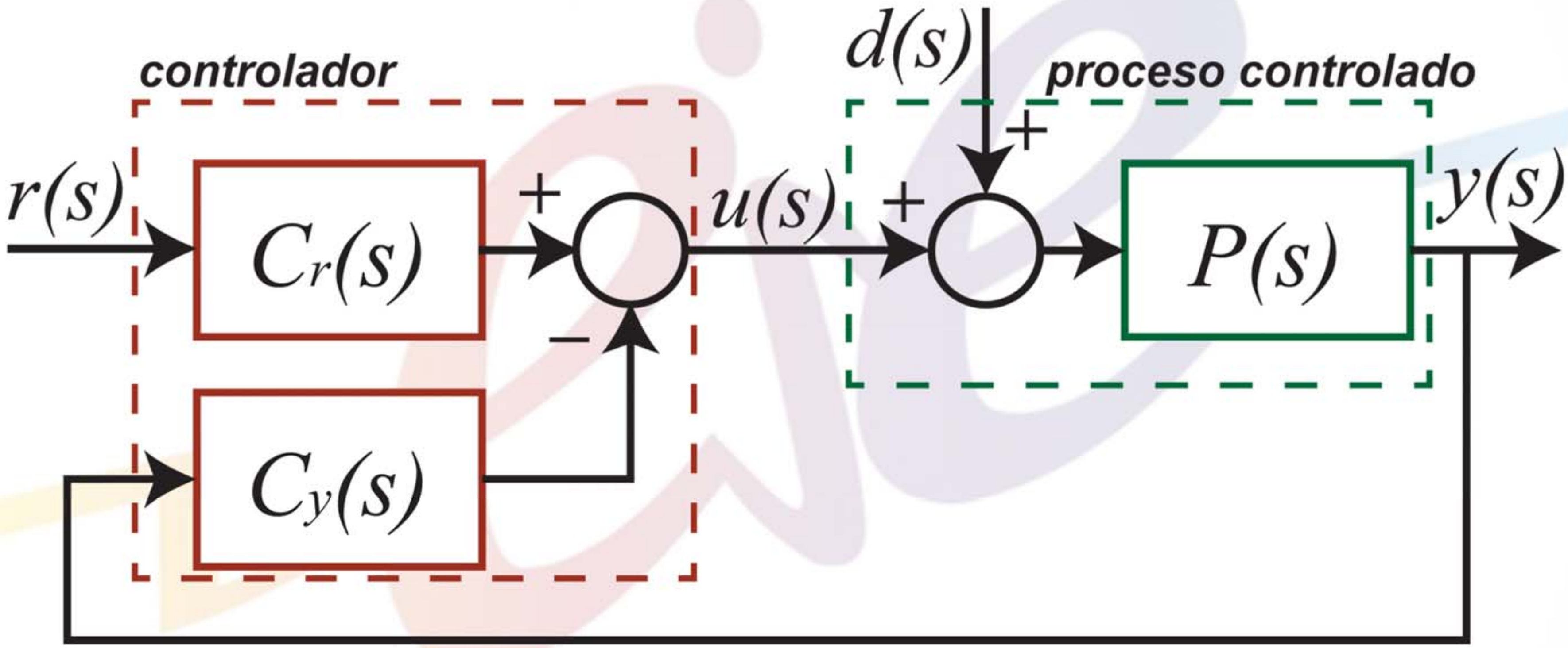
Controlador de realimentación

$$C_y(s) = K_p'\left(1 + \frac{1}{T_i's}\right)\left(\frac{1 + T_d's}{1 + \tau_f s}\right)$$

$$\boxed{\tau_f = \alpha' T_d'}$$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **ESTÁNDAR 1** grado de libertad:



$$u(s) = C_{r1}(s)r(s) - C_{y1}(s)y(s)$$

Controlador Valor Deseado

$$C_{r1}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i\, s}\right)$$

Controlador de realimentación

$$C_{y1}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i\, s} + \frac{T_d\, s}{1 + \tau_f s}\right)$$

$$\boxed{\tau_f = \alpha T_d}$$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **ESTÁNDAR 1** grado de libertad:
  - ***FTLC*** para el controlador PID estándar de **1** Grado de Libertad con el Modo derivativo aplicado sólo sobre la señal realimentada:

$$y(s)=\underbrace{\frac{C_{r1}(s)P(s)}{1+C_{y1}(s)P(s)}}_{\textbf{FTLC Servocontrol}}r(s)+\underbrace{\frac{P(s)}{1+C_{y1}(s)P(s)}}_{\textbf{FTLC Regulador}}d(s)$$

$$M_{yr}(s) \qquad\qquad M_{yd}(s)$$

$$\boxed{M_{yr}(s)=C_{r1}M_{yd}(s)}$$

  - Si alguno de los controladores anteriores (1 grado de libertad – 1GdL) se sintoniza para que funcione como ***servomecanismo***, su funcionamiento como ***regulador*** queda totalmente definido, lo mismo ocurre a la inversa

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad (2GdL):
  - Los Controladores PID de 2 Grados de Libertad son controladores donde se incluye un ***factor de peso en el valor deseado*** sobre el cual se aplica el ***modo proporcional***.
  - Para un controlador de 2 grados de libertad, como se agrega el factor de peso sobre el valor deseado, se podrá sintonizar el controlador para lograr, *con ciertas restricciones*, diferentes desempeños como regulador y como servomecanismo.
  - El factor de peso del valor deseado se define como β :

$$\boxed{0 \leq \beta \leq 1}$$

Límite impuesto por los Fabricantes

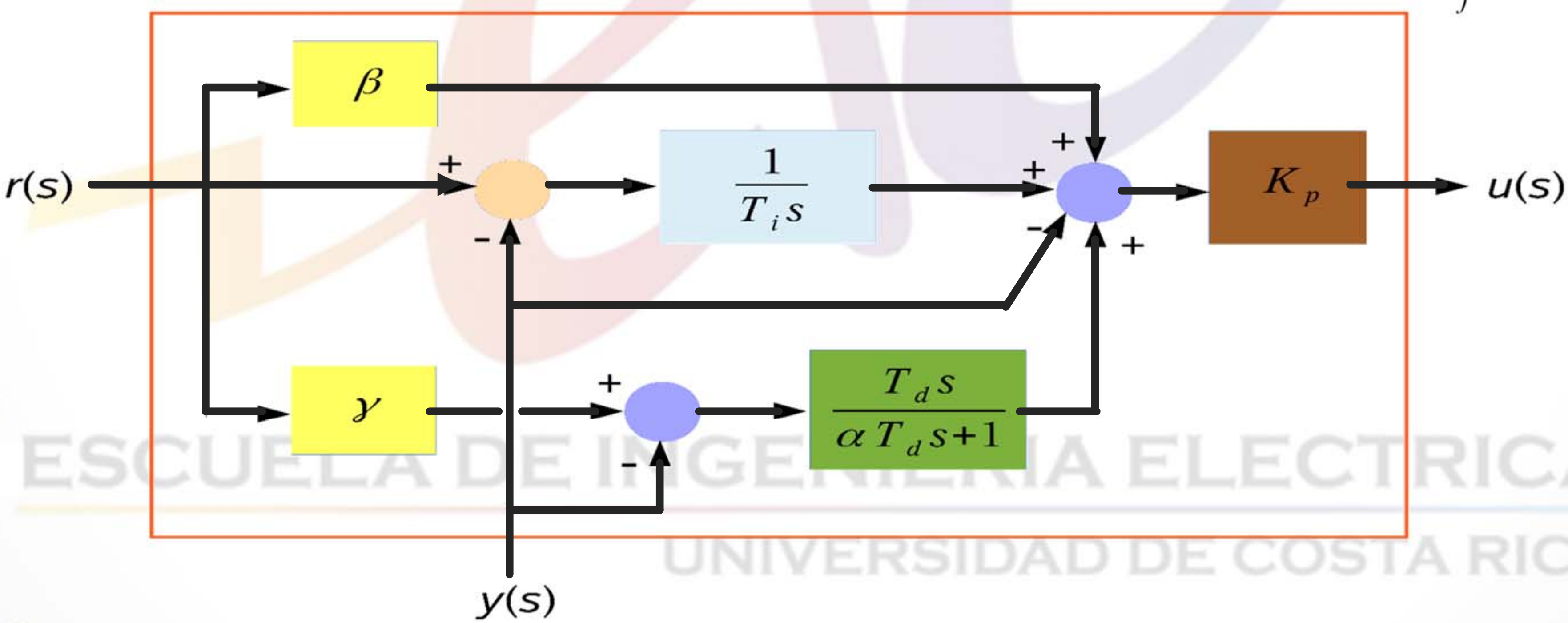
  - En estos controladores se pueden ***seleccionar*** si la acción derivativa se aplica únicamente sobre la señal realimentada mediante el valor de una constante γ : $\boxed{\gamma = \{0;1\}}$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad:
  - Función de Transferencia, PID ***ESTÁNDAR***:

$$u(s)=K_p\left\{\beta r(s)-y(s)+\frac{1}{T_i s}\left[r(s)-y(s)\right]+\left(\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right)\left[\gamma r(s)-y(s)\right]\right\}$$

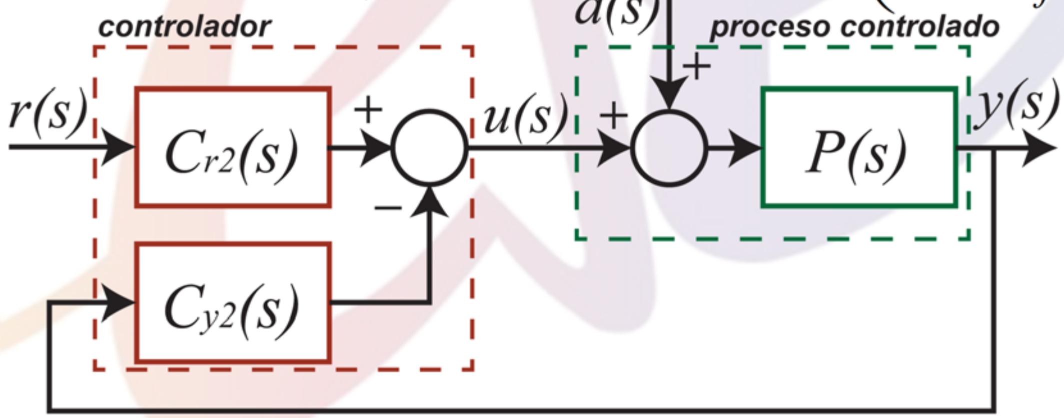
$$\tau_f=\alpha T_d$$



Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad:
  - PID ***ESTÁNDAR***, derivada aplicada solo a la señal realimentada (γ=0)

$$u(s)=K_p\left\{\beta r(s)-y(s)+\frac{1}{T_i s}\left[r(s)-y(s)\right]-\left(\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right)y(s)\right\}\quad \tau_f=\alpha T_d$$



$$u(s)=C_{r2}(s)r(s)-C_{y2}(s)y(s)$$

Controlador Valor Deseado

Controlador de realimentación

$$C_{r2}(s)=K_p\left(\boxed{\beta}+\frac{1}{T_i s}\right)\qquad C_{y2}(s)=K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right)\qquad \boxed{\tau_f=\alpha T_d}$$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **ESTÁNDAR 2** grados de libertad:
  - ***FTLC*** para el controlador PID estándar de **2** Grados de Libertad con el Modo derivativo aplicado sólo sobre la señal realimentada:

$$y(s)=\underbrace{\frac{C_{r2}(s)P(s)}{1+C_{y2}(s)P(s)}}_{\textbf{FTLC Servocontrol}}r(s)+\underbrace{\frac{P(s)}{1+C_{y2}(s)P(s)}}_{\textbf{FTLC Regulador}}d(s)$$

$$M_{yr2}(s) \qquad M_{yd2}(s)$$

$$\boxed{M_{yr2}(s)=C_{r2}M_{yd2}(s)}$$

  - ***C$_{r2}$(s)*** tiene un parámetro (***β***) que **no** está dentro de ***C$_{y2}$(s)*** (comportamientos se pueden modificar de forma independiente dentro de ciertos límites)

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad ***(PID 2GdL)***:
  - PID ***ESTÁNDAR***

$$u(s) = K_p \left\{ \beta r(s) - y(s) + \frac{1}{T_i s}\left[r(s) - y(s)\right] + \left(\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right)\left[\gamma r(s) - y(s)\right] \right\}$$

$$\tau_f = \alpha T_d$$

  - PID ***ESTÁNDAR*** derivada aplicada solo a la señal realimentada ($\gamma = 0$)

$$u(s) = K_p \left\{ \beta r(s) - y(s) + \frac{1}{T_i s}\left[r(s) - y(s)\right] - \left(\frac{T_d s}{1+\tau_f s}\right) y(s) \right\}$$

$$\tau_f = \alpha T_d$$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad ***(PID 2GdL)***:
  - PID ***PARALELO***

$$u(s)=\left\{K_p\left[\beta_p r(s)-y(s)\right]+\frac{K_i}{s}\left[r(s)-y(s)\right]+\left(\frac{K_d s}{1+\tau_f s}\right)\left[\gamma r(s)-y(s)\right]\right\}$$

$$\tau_f=\alpha_p K_d$$

  - PID ***PARALELO*** derivada aplicada solo a la señal realimentada (γ = 0)

$$u(s)=\left\{K_p\left[\beta_p r(s)-y(s)\right]+\frac{K_i}{s}\left[r(s)-y(s)\right]-\left(\frac{K_d s}{1+\tau_f s}\right)y(s)\right\}$$

$$\tau_f=\alpha_p K_d$$

Controlador *PID* 2 grados de libertad

- PID **2** grados de libertad ***(PID 2GdL)***:
  - PID SERIE ***INDUSTRIAL***

$$u(s) = K_p' \left\{ \beta' r(s) - \left[\frac{1 + T_d' s}{1 + \tau_f s} \right] y(s) + \left(\frac{1}{T_i' s} \right) \left(r(s) - \left[\frac{1 + T_d' s}{1 + \tau_f s} \right] y(s) \right) \right\}$$

$$\tau_f = \alpha' T_d'$$

Conversión entre algoritmos PID

PID PARALELO → PID Estándar

$$K_p = K_p,$$

$$T_i = \frac{K_p}{K_i},$$

$$T_d = \frac{K_d}{K_p},$$

$$\alpha = \alpha_p K_p,$$

$$\beta = \beta_p,$$

$$\gamma = \gamma_p = 0.$$

PID SERIE → PID Estándar

$$K_p = F_c' K_p',$$

$$T_i = F_c' T_i',$$

$$T_d = \frac{(1 - \alpha' F_c') T_d'}{F_c'},$$

$$\alpha = \frac{F_c' \alpha'}{1 - \alpha' F_c'}, \quad \alpha' < 1 + \frac{T_i'}{T_d'},$$

$$\beta = \frac{\beta'}{F_c'},$$

$$\gamma = \gamma' = 0,$$

$$F_c' = 1 + \frac{(1 - \alpha') T_d'}{T_i'}.$$

PID Estándar → PID Serie

$$K_p' = F_c K_p,$$

$$T_i' = F_c T_i,$$

$$T_d' = \frac{(1 + \alpha) T_d}{F_c}$$

$$\alpha' = \frac{\alpha F_c}{1 + \alpha},$$

$$\beta' = \frac{\beta}{F_c},$$

$$\gamma' = \gamma = 0,$$

$$F_c = f(T_i, T_d, \alpha).$$

- Siempre existe un PID Estándar equivalente a un PID Serie.
- No siempre existe un PID Serie equivalente a un PID Estándar.

Conversión entre algoritmos PID

- PID Estándar a PID Serie:
  - Factor de conversión:

$$F_c = 0{,}5\left[1 + \frac{\alpha T_d}{T_i} + \sqrt{1 - \frac{(4+2\alpha)T_d}{T_i} + \frac{\alpha^2 T_d^2}{T_i^2}}\right]$$

Existe un PID Serie equivalente a un PID Estándar solo si

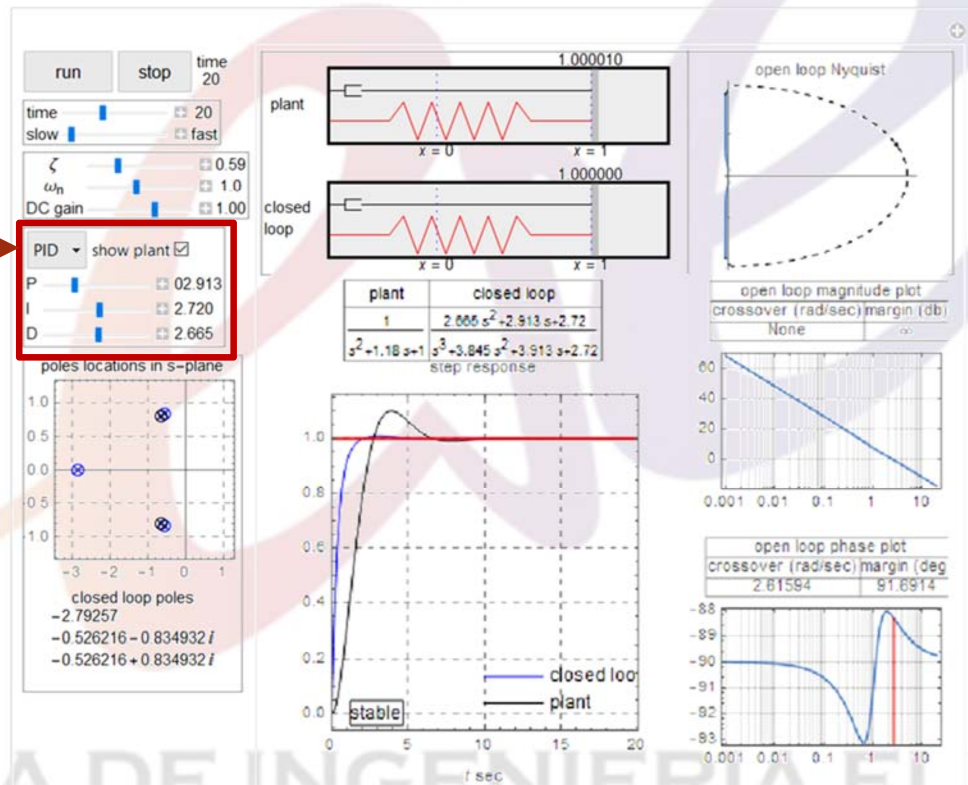
$$\alpha^2\left(\frac{T_d}{T_i}\right)^2 - (4+2\alpha)\left(\frac{T_d}{T_i}\right) + 1 > 0$$

  - Para el caso de un PID Estándar con $\boxed{\alpha = 0{,}1}$, existe un PID Serie equivalente solo si $\boxed{T_i > 4{,}20\,T_d}$.
  - La desigualdad cuadrática se puede aproximar por una línea recta $\boxed{\frac{T_i}{T_d} > 4{,}05 + 1{,}80\,\alpha, \text{ para } 0 \le \alpha \le 1{,}0}$.

Ejemplo

Simulador sistema mecánico de orden 2 (N. Abbasi)

Simulation of Feedback Control System with Controller and Second-Order Plant



- Descargar en: http://demonstrations.wolfram.com/SimulationOfFeedbackControlSystemWithControllerAndSecondOrde/
- Debe tener instalado Mathemática para poder ejecutarlo, seguir las siguientes instrucciones para utilizar la licencia campus UCR: http://www.emate.ucr.ac.cr/LICENCIAS-WOLFRAM

Algoritmos PID

Anexo: PID Discreto

Controlador *PID* Discreto

- Algoritmo PID Estándar

$$u(t) = K_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau)\mathrm{d}\tau + T_d \frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t} \right]$$

- Tiempo de muestreo

$$\Delta t = t_k - t_{k-1}$$

- Aproximación de la integral

$$\int_0^{t_k} e(\tau)\mathrm{d}\tau \approx \sum_{j=1}^{k} e_j \Delta t$$

- Aproximación de la derivada

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_k} \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{\Delta t}$$

Controlador *PID* Discreto

- Algoritmo de posición (absoluto)

$$u_k = K_p \left[e_k + \frac{\Delta t}{T_i} \sum_{j=1}^{k} e_j + \frac{T_d}{\Delta t}(e_k - e_{k-1}) \right]$$

- Algoritmo de velocidad (incremental)

$$\Delta u_k = u_k - u_{k-1}$$

$$\Delta u_k = K_p \left[e_k - e_{k-1} + \frac{\Delta t}{T_i} e_k + \frac{T_d}{\Delta t}(e_k - 2e_{k-1} + e_{k-2}) \right]$$

$$\boxed{u_k = u_{k-1} + K_p \left[\left(1 + \frac{\Delta t}{T_i} + \frac{T_d}{\Delta t}\right) e_k - \left(1 + \frac{2T_d}{\Delta t}\right) e_{k-1} + \frac{T_d}{\Delta t} e_{k-2} \right]}$$