

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

ESCUELA DE INGENIERÍA ELÉCTRICA, DEPARTAMENTO DE AUTOMÁTICA

IE-0431 Sistemas de Control

Sintonización de Controladores PID para el Control de procesos integrantes, inestables y con respuesta inversa

Leonardo Marín Paniagua, Ph.D.

leonardo.marin@ucr.ac.cr

2018



EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



Introducción

- Existen procesos que debido a sus características, son un desafío para el diseño de un sistema de control, entre los que se encuentran:
 - Autorregulados con respuesta inversa (modelos estables con **ceros** en el *semiplano derecho*).
 - Integrantes más tiempo muerto (modelos con **polos** en el *origen*).
 - Inestables más tiempo muerto (modelos con **polos** en el *semiplano derecho*).
 - Con un tiempo muerto normalizado grande (modelos con $\tau_0 \gg 1$).



Sistemas con Respuesta Inversa

- Modelos con ceros de fase no mínima: generados por ejemplo cuando el proceso tiene 2 dinámicas en competencia:

$$y(s) = \left(\frac{K_1}{T_1 s + 1} - \frac{K_2}{T_2 s + 1} \right) u(s) = \frac{(K_1 T_2 - K_2 T_1)s + K_1 - K_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} u(s)$$

$$y(s) = \frac{(K_1 - K_2) \left[\left(\frac{K_1 T_2 - K_2 T_1}{K_1 - K_2} \right) s + 1 \right]}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} u(s) = \frac{K(-bTs + 1)}{(Ts + 1)(aTs + 1)} u(s)$$

- Se debe cumplir con: $K_1 > K_2 \Rightarrow K_1 T_2 - K_2 T_1 < 0$

$$1 < \frac{K_1}{K_2} < \frac{T_1}{T_2} \left\{ \begin{array}{l} \text{Se requiere una dinámica lenta } (T_1) \text{ con} \\ \text{ganancia alta } (K_1) \text{ y una dinámica} \\ \text{rápida } (T_2) \text{ con ganancia baja } (K_2) \end{array} \right.$$



Sistemas con Respuesta Inversa

► Modelos con ceros de fase no mínima:

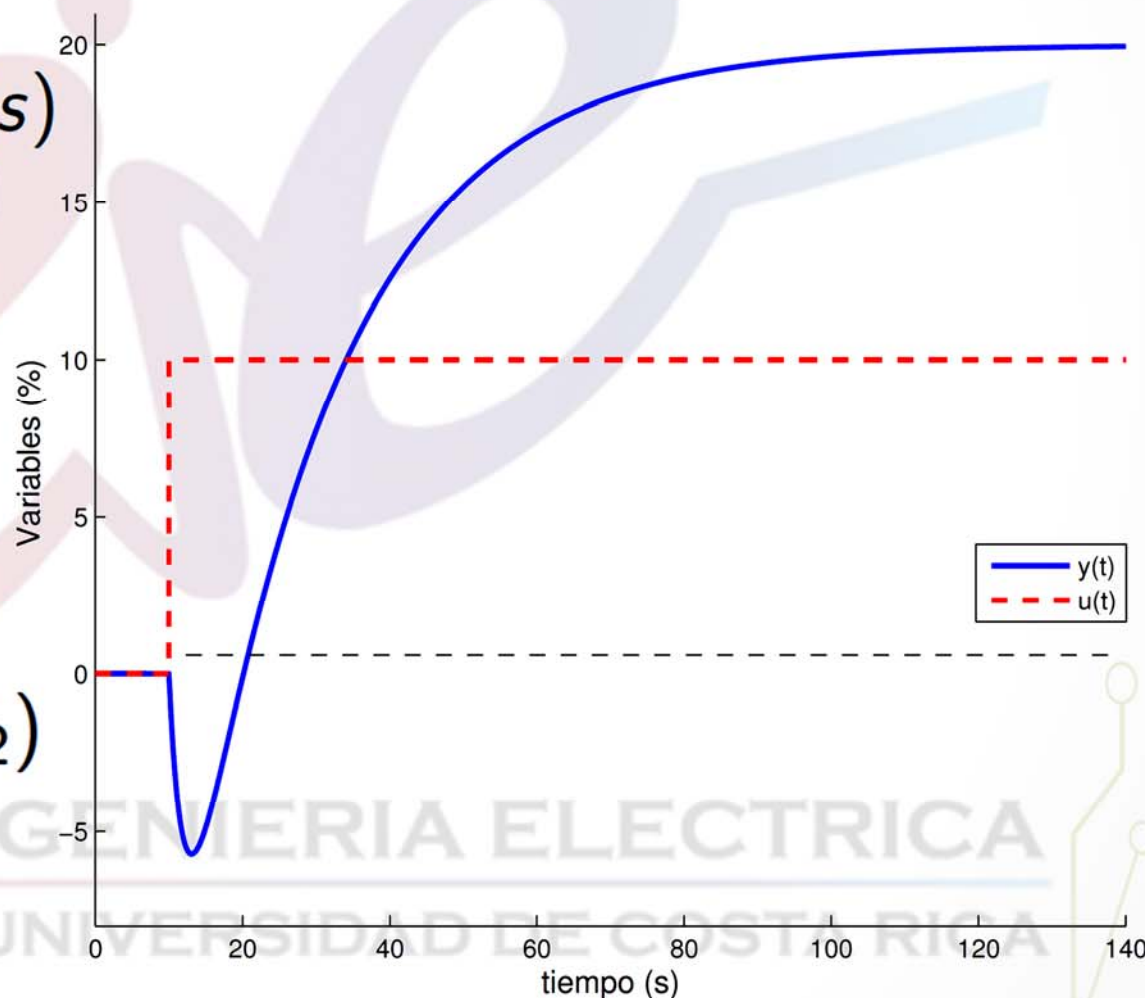
$$y(s) = \frac{K(-bTs + 1)}{(Ts + 1)(aTs + 1)}u(s)$$

$$K = K_1 - K_2$$

$$T = T_1$$

$$a = T_2/T_1$$

$$b = (K_2 - aK_1)/(K_1 - K_2)$$





Sistemas con Respuesta Inversa

➤ Control mediante síntesis de controladores: **Regulador**

$$\kappa_p \doteq K_p K = \frac{-3\tau_c^2 b + [a + (1 + a)b](3\tau_c + b) - \tau_c^3}{(\tau_c + b)^3}$$

$$\tau_i \doteq \frac{T_i}{T} = \frac{-3\tau_c^2 b + [a + (1 + a)b](3\tau_c + b) - \tau_c^3}{a + (1 + a + b)b}$$

$$\tau_d \doteq \frac{T_d}{T} = \frac{(-b - 1 - a)\tau_c^3 + 3\tau_c^2 a + ab(3\tau_c + b)}{-3\tau_c^2 b + [a + (1 + a)b](3\tau_c + b) - \tau_c^3}$$

τ_c
**Parámetro
de Diseño**
(velocidad
relativa del
lazo)

Ver método en: *Chen, D. y D.E. Seborg (2002) - "PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis and Disturbance Rejection", Ind. Eng. Chem. Res., 421, 4807-4822*



Sistemas con Respuesta Inversa

➤ Síntesis de controladores robusta: **Regulador**

Para garantizar robustez, se debe establecer la velocidad máxima de diseño: $\tau_{c,min}$ para $M_s \leq 2,0$

$$\tau_{cmin} = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

a	b_{max}	a_0	a_1	a_2	a_3
0,20	1,25	0,2212	0,5386	-0,1377	0,04800
0,40	2,50	0,3263	0,6437	-0,2792	0,06578
0,60	3,25	0,3947	0,7064	-0,2804	0,05164
0,80	3,75	0,4388	0,7648	-0,2795	0,04405
1,0	4,0	0,4659	0,8250	-0,2850	0,40860

Si $b \leq -0,2 + 8,2a - 2a^2$, $\tau_{cmin} \approx 0,05 + 0,75a + 0,475b - 0,1875ab$

Ver método en: Alfaro, V.M., P. Balaguer y O. Arrieta (2012) - "Robustness Considerations on PID Tuning for Regulatory Control of Inverse Response Processes", IFAC Conference on Advances in PID Control (PID'12), marzo 28-30, Brescia, Italia.



Sistemas con Respuesta Inversa

➤ Síntesis de controladores robusta: **Regulador**, Ejemplo:

➤ Modelo del proceso:

$$P(s) = \frac{1,5(-10s + 1)}{(5s + 1)(2s + 1)}, \quad K = 1,5, \quad T = 5 \text{ s}, \quad a = 0,4, \quad b = 2$$

➤ Velocidad máxima para $M_s \leq 2,0$:

$$\tau_{c,min} = 1,023$$

➤ Parámetros del controlador (utilizando $\tau_c = 1,1$)

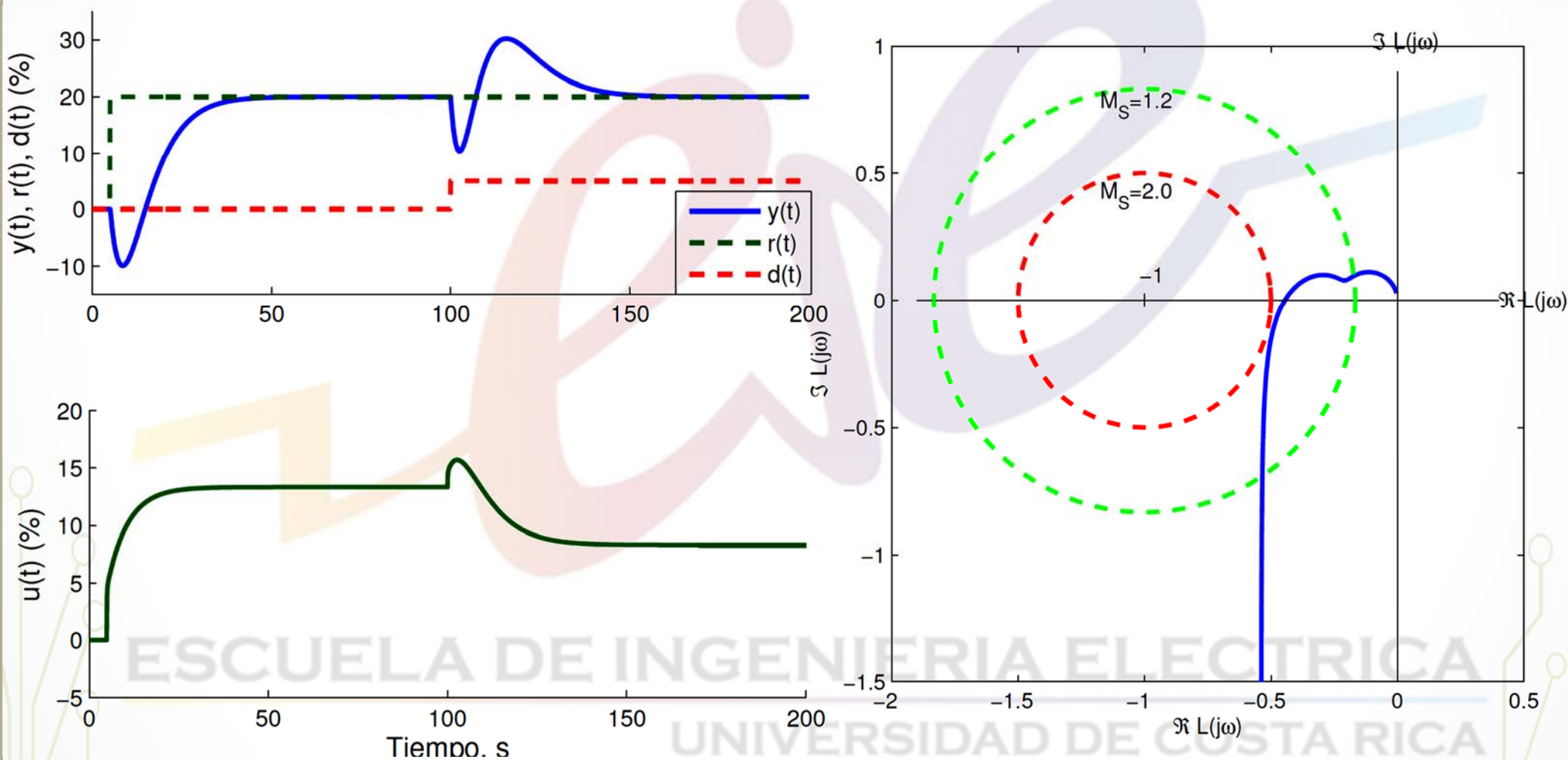
$$K_p = 0,187, \quad T_i = 5,812 \text{ s}, \quad T_d = 0,697 \text{ s}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 0$$

➤ Robustez del sistema de control: $M_s^r = 1,92$



Sistemas con Respuesta Inversa

➤ Síntesis de controladores robusta: Regulador, Ejemplo





Sistemas con Respuesta Inversa

Control PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**)

- Modelo de segundo orden y Controlador de primer orden
- Respuesta de los modelos de referencia ($\tau_c \rightarrow$ *parámetro de diseño*)

$$y_d^t = \frac{(T_i/K_p)s(-bTs + 1)}{(\tau_c Ts + 1)^2(a\tau_c T + 1)} d(s), \quad y_r^t(s) = \frac{-bTs + 1}{(\tau_c Ts + 1)(a\tau_c Ts + 1)} r(s)$$

- Funcional de Costo: $J_T(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p) \doteq J_r(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p) + J_d(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p)$

$$J_r(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p) \doteq \int_0^\infty [y_r^t(\tau_c, \bar{\theta}_p, t) - y_r(\bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p, t)]^2 dt$$

$$J_d(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p) \doteq \int_0^\infty [y_d^t(\tau_c, \bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p, t) - y_d(\bar{\theta}_c, \bar{\theta}_p, t)]^2 dt$$

Ver método en: Alfaro, V.M. y R. Vilanova (2012) - "Two-Degree-of-Freedom Proportional Integral Control of Inverse Response Second-Order Processes", 16th International Conference on Systems Theory, Control and Computing (ICSTCC), octubre 12-14, Sinaia, Rumanía



Sistemas con Respuesta Inversa

Control PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**)

■ Parámetros:

$$\kappa_p \doteq K_p K = a_0 + a_1 b^{a_2}$$

$$\tau_i \doteq \frac{T_i}{T} = \frac{b_0 + b_1 b}{b_2 + b_3 b + b_4 b^2 + b_5 b^3 + b_6 b^4}$$

$$\beta = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + c_3 b^3$$

Las constantes a_i , b_i y c_i dependen de a ($0,1 \leq a \leq 1,0$) y M_S^t

Posiciones del cero de fase
no mínima, admisibles para
las ecuaciones de
sintonización \rightarrow

M_S^t	2,0	1,8	1,6	1,4
b_{min}	0,25	0,25	0,25	0,25
b_{max}	2,5	2,0	1,5	1,0



Sistemas con Respuesta Inversa

Control PI de 2GdL por modelo de referencia (MoReRT)

Ejemplo:

- Modelo del proceso

$$P(s) = \frac{2,0(-12,5s + 1)}{(10s + 1)(5s + 1)}, \quad K = 2,0, \quad T = 10 \text{ s}, \quad a = 0,5, \quad b = 1,25$$

- Parámetros del controlador $M_S^t = 2,0$

$$K_p = 0,233, \quad T_i = 14,319 \text{ s}, \quad \beta = 0,926 \rightarrow M_S^r = 2,03$$

- Parámetros del controlador $M_S^t = 1,6$

$$K_p = 0,151, \quad T_i = 11,679 \text{ s}, \quad \beta = 1,301 \rightarrow M_S^r = 1,60$$



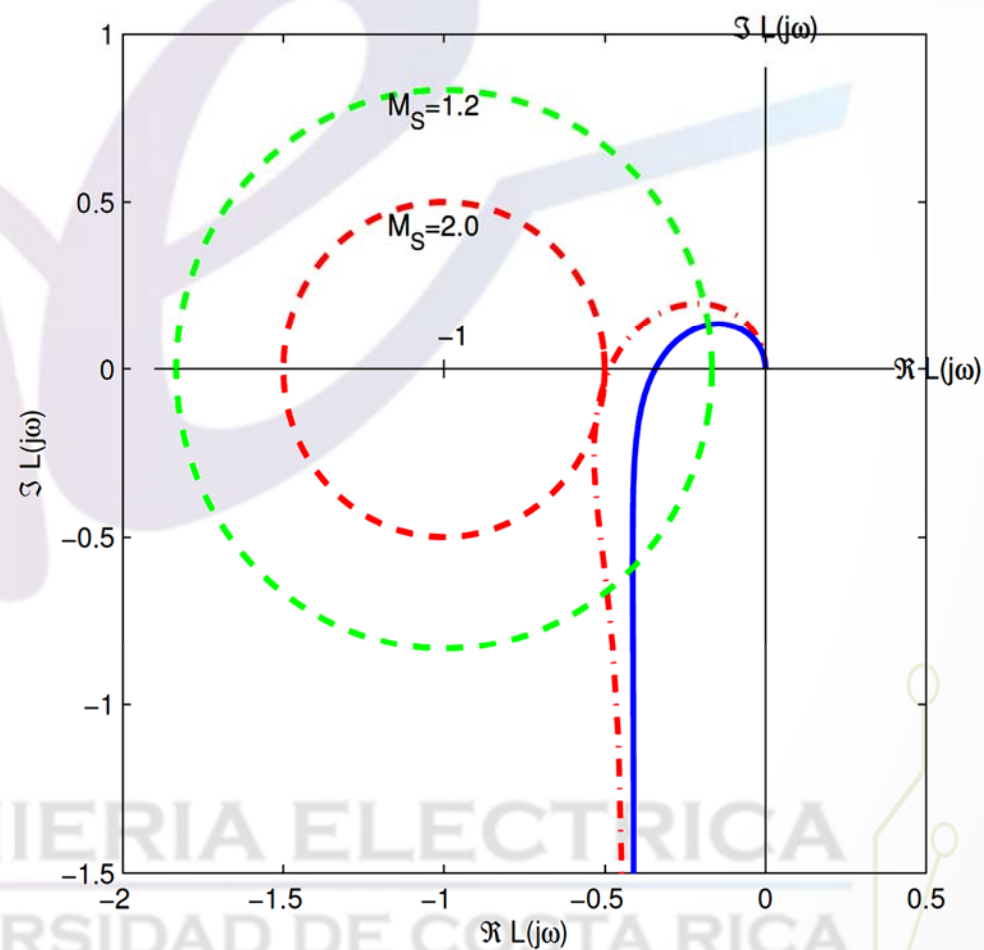
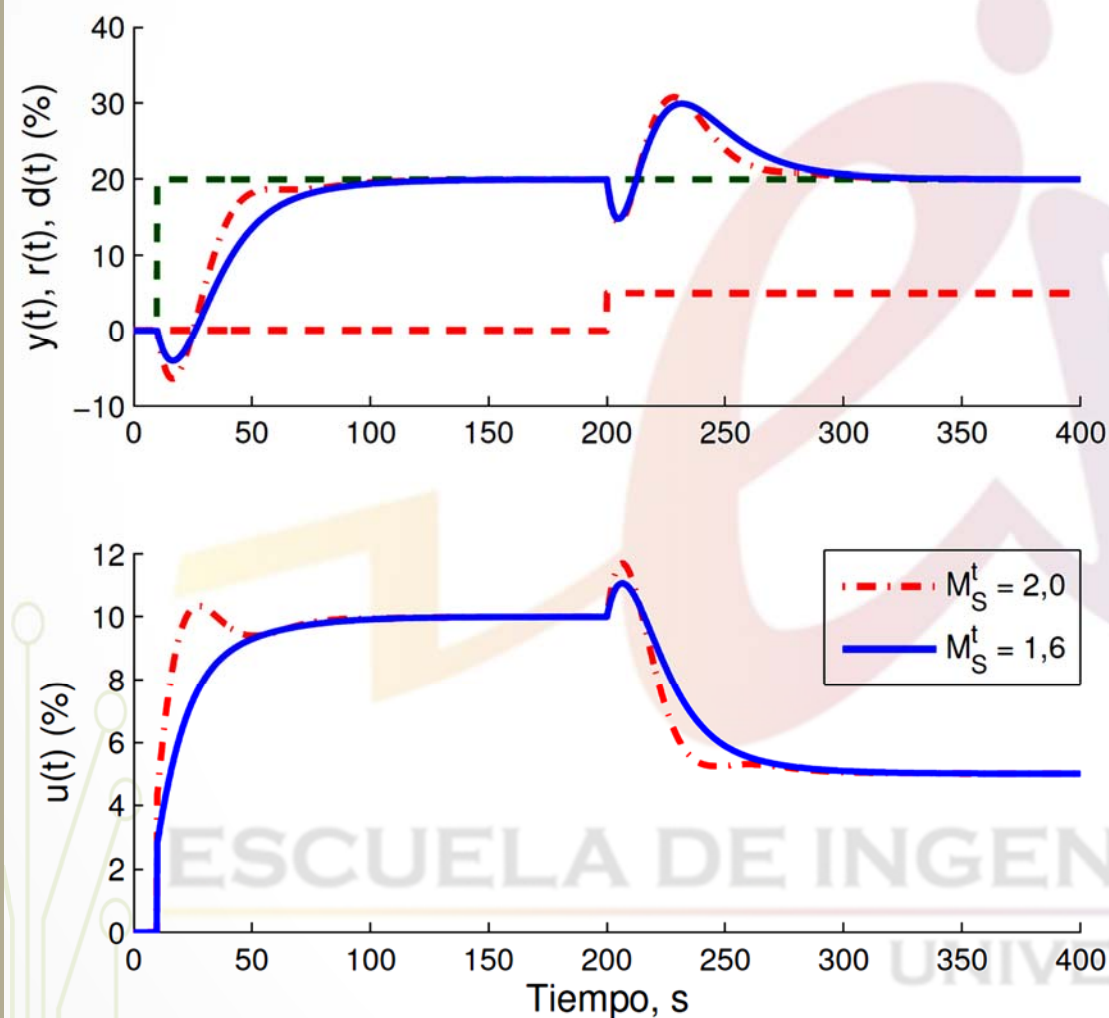
EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica



Sistemas con Respuesta Inversa

Control PI de 2GdL **MoReRT**, Ejemplo:





Sistemas Integrantes

■ Síntesis de controladores → control “**Simple**” PID

- Proceso Integrante de Primer orden: Servomecanismo :

$$P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s} \quad C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad \tau_c = \frac{T_c}{L} \quad \text{Parámetro de Diseño (velocidad relativa del lazo)}$$

- Sintonización General:

$$\kappa_p \doteq K_p K L = \frac{1}{\tau_c + 1} \quad \tau_i \doteq \frac{T_i}{L} = 4(\tau_c + 1)$$

- Se recomienda $\tau_c = 1$ ($T_c = L$) para obtener $M_s = 1.7$, con esto:

$$\kappa_p \doteq K_p K L = 0,5 \quad \tau_i \doteq \frac{T_i}{L} = 8$$

Ver método en: Skogestad, S. (2003) - “Simple analytic rules for model reduction and PID tuning”, *Journal of Process Control*, 13, 291-309.



Sistemas Integrantes

➤ Síntesis de controladores → control “**Simple**” PID:

- Proceso Integrante de Segundo orden: Servomecanismo

$$P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s(Ts + 1)}, \quad \tau_o = \frac{L}{T} \quad C(s) = K'_p \left(1 + \frac{1}{T'_i s} \right) (T'_d s + 1)$$
$$\tau_c = \frac{T_c}{L} \quad \text{Parámetro de Diseño (velocidad relativa del lazo)}$$

- Sintonización General (PID serie):

$$\kappa'_p \doteq K'_p K T = \frac{1}{\tau_c + \tau_o} \quad \tau'_i \doteq \frac{T'_i}{T} = 4(\tau_c + \tau_o) \quad \tau'_d \doteq \frac{T'_d}{T} = 1$$

- Para $M_s=1.7$, entonces: $\tau_c = \tau_o$ ($T_c = L$)

$$\kappa'_p \doteq K'_p K T = \frac{0,5}{\tau_o} \quad \tau'_i \doteq \frac{T'_i}{T} = 8\tau_o \quad \tau'_d \doteq \frac{T'_d}{T} = 1$$



Sistemas Integrantes

► Síntesis de controladores:

- Proceso Integrante de Primer o Segundo orden: Regulador

$$P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s} \longrightarrow M_{yd1}^t(s) = \frac{K_d se^{-Ls}}{(T_c s + 1)^2}$$

$$P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{s(Ts + 1)}, \tau_o = \frac{L}{T} \longrightarrow M_{yd2}^t(s) = \frac{K_d se^{-Ls}}{(T_c s + 1)^3}$$

- Aproximación del tiempo muerto: $e^{-Ls} \approx 1 - Ls$
 - Planta de primer orden, controlador Requerido \rightarrow PI
 - Planta de segundo orden, controlador Requerido \rightarrow PID
- Parámetro de diseño: T_c (no se indica cómo seleccionarlo o la robustez resultante en el sistema de control)

Ver método en: *Chen, D. y D.E. Seborg (2002) - "PI/PID Controller Design Based on Direct Synthesis and Disturbance Rejection", Ind. Eng. Chem. Res., 421, 4807-4822*



Sistemas Integrantes

► PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**):

- Proceso Integrante de Primer orden más tiempo muerto, Modelos de Referencia:

$$y^t(s) = \frac{(\tau_c Ls + 1)e^{-Ls}}{\tau_c^2 L^2 s^2 + 2\zeta \tau_c Ls + 1} r(s) + \frac{(T_i/K_p)se^{-Ls}}{\tau_c^2 L^2 s^2 + 2\zeta \tau_c Ls + 1} d(s)$$

- Del compromiso **IAE** y Acción de control **TVu**: $\zeta=0.8$.

- Ecuaciones de Sintonización:

$$\kappa_p \doteq K_p K L = a$$

$$\tau_i \doteq \frac{T_i}{L} = b$$

$$\beta = c$$

M_S^t	1,4	1,6	1,8	2,0
a	0,312	0,415	0,498	0,566
b	8,086	6,217	5,320	4,802
c	0,544	0,516	0,495	0,477

Ver método en: Alfaro, V.M. y R. Vilanova (2012) - "Robust tuning and Performance analysis of 2DoF PI Controllers for Integrating controlled Processes", *Ind. Eng. Chem Res.*, 51, 13182-13194



Sistemas Integrantes

► PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**):

- Proceso Integrante de Segundo orden más tiempo muerto, Modelos de Referencia:

$$y^t(s) = \frac{e^{-Ls}}{\tau_c^2 T^2 s^2 + 2\zeta \tau_c T s + 1} r(s) + \frac{(T_i/K_p) s e^{-Ls}}{(\tau_c^2 T^2 s^2 + 2\zeta \tau_c T s + 1)(\tau_c T s + 1)} d(s)$$

- Del compromiso **IAE** y Acción de control **TVu**: $\zeta=0.8$.
- Ecuaciones de Sintonización: $0,1 \leq \tau_o \leq 2,0$

$$\kappa_p \doteq K_p K T = \frac{a_0 + a_1 \tau_o}{a_2 + a_3 \tau_o + \tau_o^2}$$

$$\tau_i \doteq \frac{T_i}{T} = b_0 e^{b_1 \tau_o} + b_2 e^{b_3 \tau_o}$$

$$\beta = \frac{c_0 + c_1 \tau_o}{c_2 + \tau_o}$$



Sistemas Integrantes

► PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**):

- Proceso de Segundo orden más tiempo muerto:

M_S^t	1,4	1,6	1,8	2,0
a_0	0,1040	0,1365	0,3886	1,0730
a_1	0,2800	0,3740	0,4670	0,5955
a_2	0,2539	0,2092	0,4455	0,9721
a_3	1,1970	1,1410	1,7280	3,3320
b_0	16,6700	10,9800	9,7360	8,3220
b_1	0,2070	0,2533	0,2477	0,2708
b_2	-10,0600	-5,9460	-5,4550	-4,5330
b_3	-0,4497	-0,6769	-0,6914	-0,8444
c_0	0,4673	0,5192	0,5853	0,6714
c_1	0,3093	0,3001	0,2927	0,2860
c_2	1,2150	1,3490	1,5360	1,7870



Sistemas Integrantes

► Ejemplo:

- Modelo del proceso $P(s) = \frac{1,5e^{-2s}}{s}$
- Parámetros del Controlador

Método	K_p	T_i	β	M_S^r
SIMC ($M_S^t = 1,7$)	0,167	16,0	1	1,71
MoReRT ($M_S^t = 2,0$)	0,188	9,604	0,477	1,99
MoReRT ($M_S^t = 1,6$)	0,138	12,434	0,516	1,60

ESCUELA DE INGENIERIA ELECTRICA
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

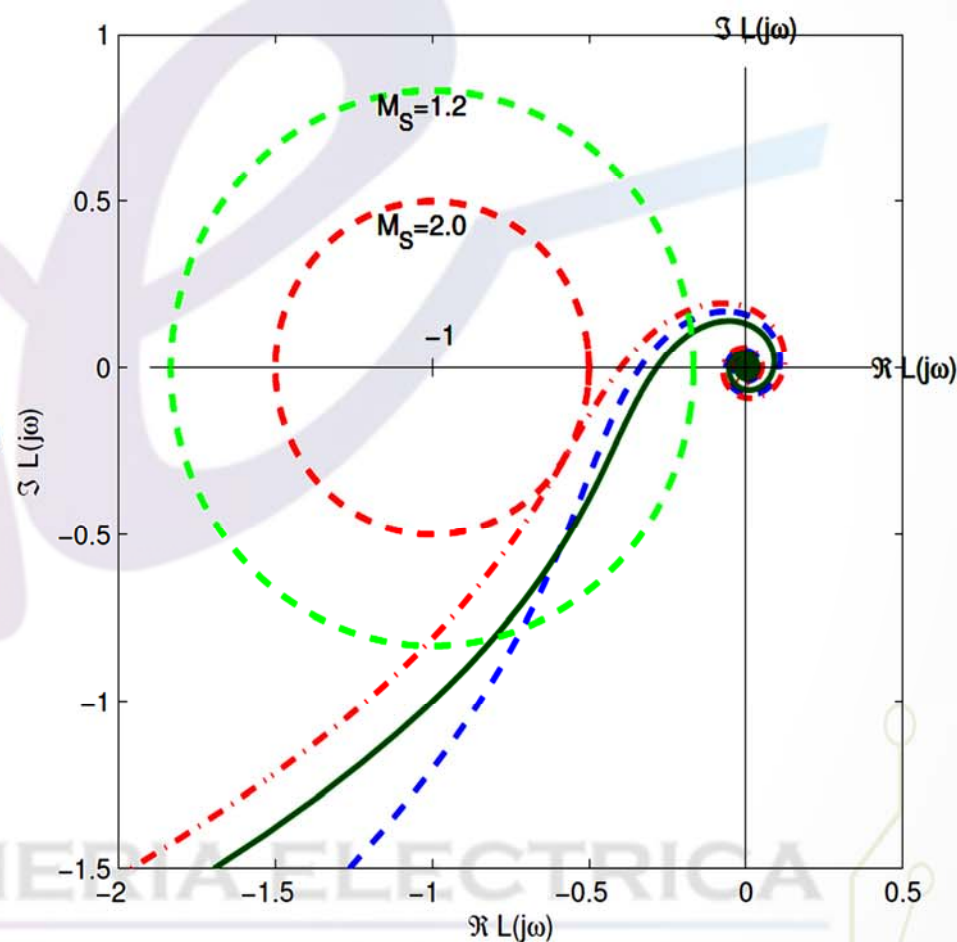
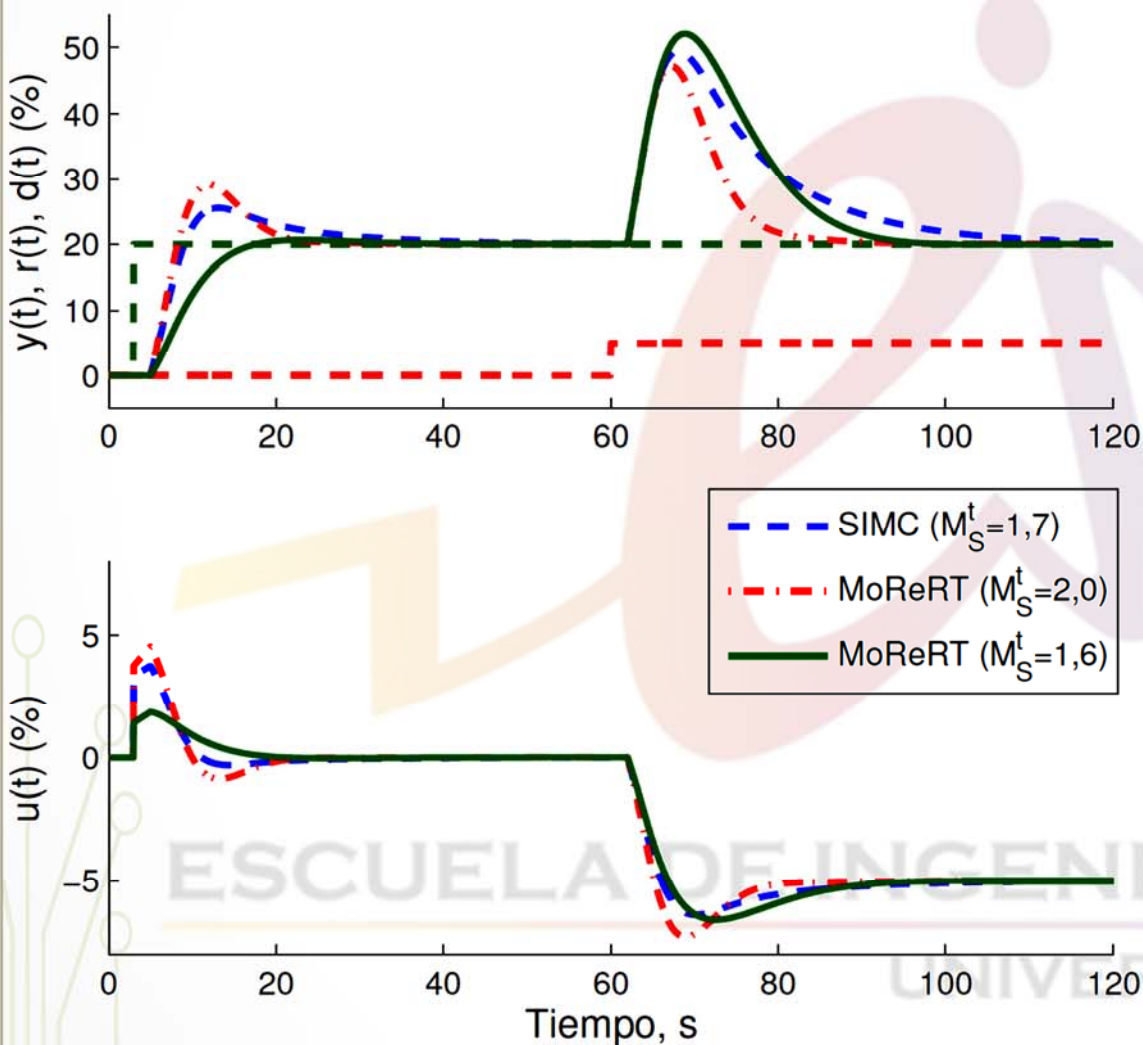


Sistemas Integrantes

EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica

➤ Ejemplo:





Sistemas Inestables

► PI de 2GdL por modelo de referencia (MoReRT):

- Proceso: $P(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts-1}$
- Modelos de referencia:

$$y^t(s) = \frac{(\beta T_i s + 1)e^{-Ls}}{(\tau_c Ts + 1)^2} r(s) + \frac{(T_i/K_p)se^{-Ls}}{(\tau_c Ts + 1)^2} d(s)$$

- Robustez Alcanzable:

$$M_S = 1,4 \ (\tau_o \leq 0,1), \ M_S = 1,6 \ (\tau_o \leq 0,15), \ M_S = 2,0 \ (\tau_o \leq 0,26)$$

Tiempos muerto
normalizados del modelo

inestable, admisibles para la
sintonización →

M_S^t	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
τ_{omin}	0,10	0,10	0,10	0,10	0,10
τ_{omax}	0,25	0,35	0,45	0,50	0,55

Ver método en: Alfaro, V.M. y R. Vilanova (2012) - "Robustness-Based Tuning of Two-Degree-of-Freedom Proportional Integral Controllers for Unstable Processes", *Int. Conf. Sys. Theory, Control (ICSTCC)*, octubre 12-14, Sinaia, Rumanía



Sistemas Inestables

► PI de 2GdL por modelo de referencia (**MoReRT**):

▪ Ecuaciones de Sintonización:

$$\kappa_p \doteq K_p K = a_0 + a_1 \tau_o^{a_2}, \quad \tau_i \doteq \frac{T_i}{T} = \frac{b_0 + b_1 \tau_o}{b_2 + b_3 \tau_o + \tau_o^2}, \quad \beta = 0$$

M_S^t	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
a_0	-1,149	-0,5287	-0,5091	-0,4010	-0,3995
a_1	0,9560	0,8898	0,9986	1,010	1,070
a_2	-0,8468	-0,9564	-0,9525	-0,9684	-0,9559
b_0	0,03242	0,004109	-0,03222	-0,01103	-0,0226
b_1	0,0	2,90	4,722	3,008	3,237
b_2	0,08534	0,8081	1,40	1,023	1,101
b_3	-0,5698	-2,166	-3,10	-2,285	-2,347



Sistemas Inestables

■ Ejemplo:

- Modelo del proceso $P(s) = \frac{0,75e^{-1,6s}}{8s - 1}$, $\tau_o = 0,2$
- Parámetros del Controlador

M_S^t	K_p	T_i	β	M_S^r
4,0	5,490	8,90	0	4,0
2,0	3,499	22,791	0	1,99

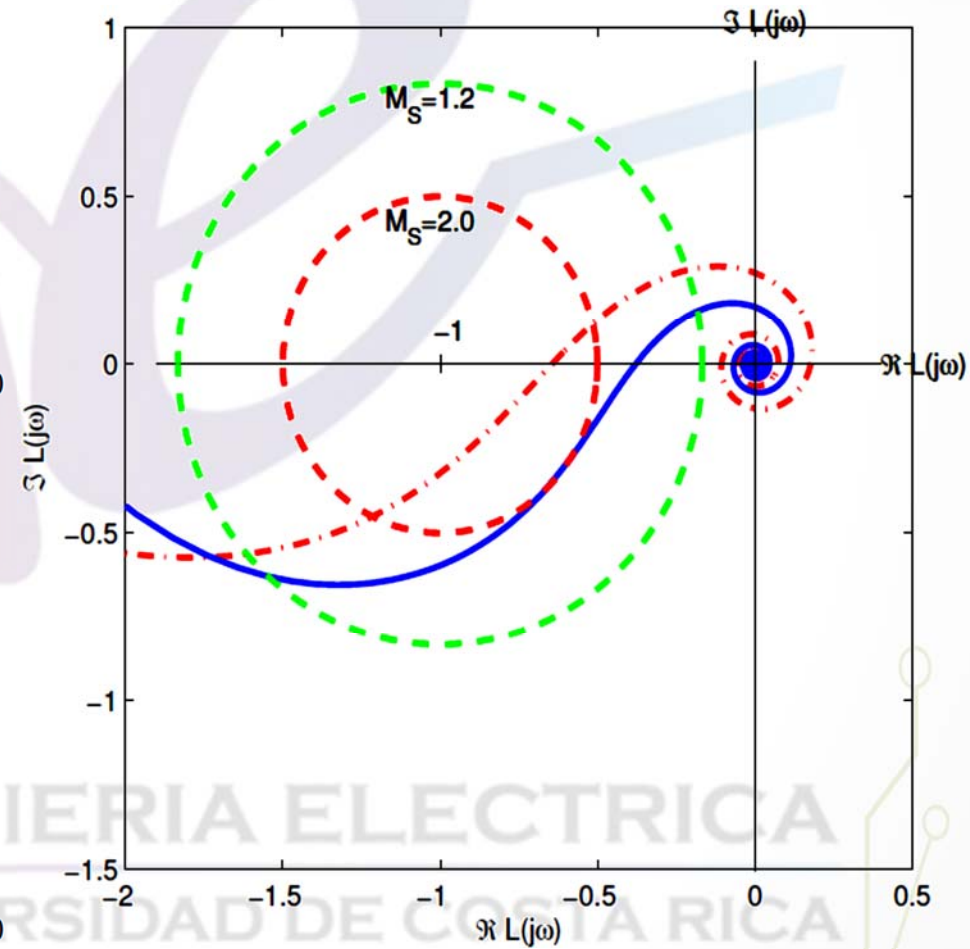
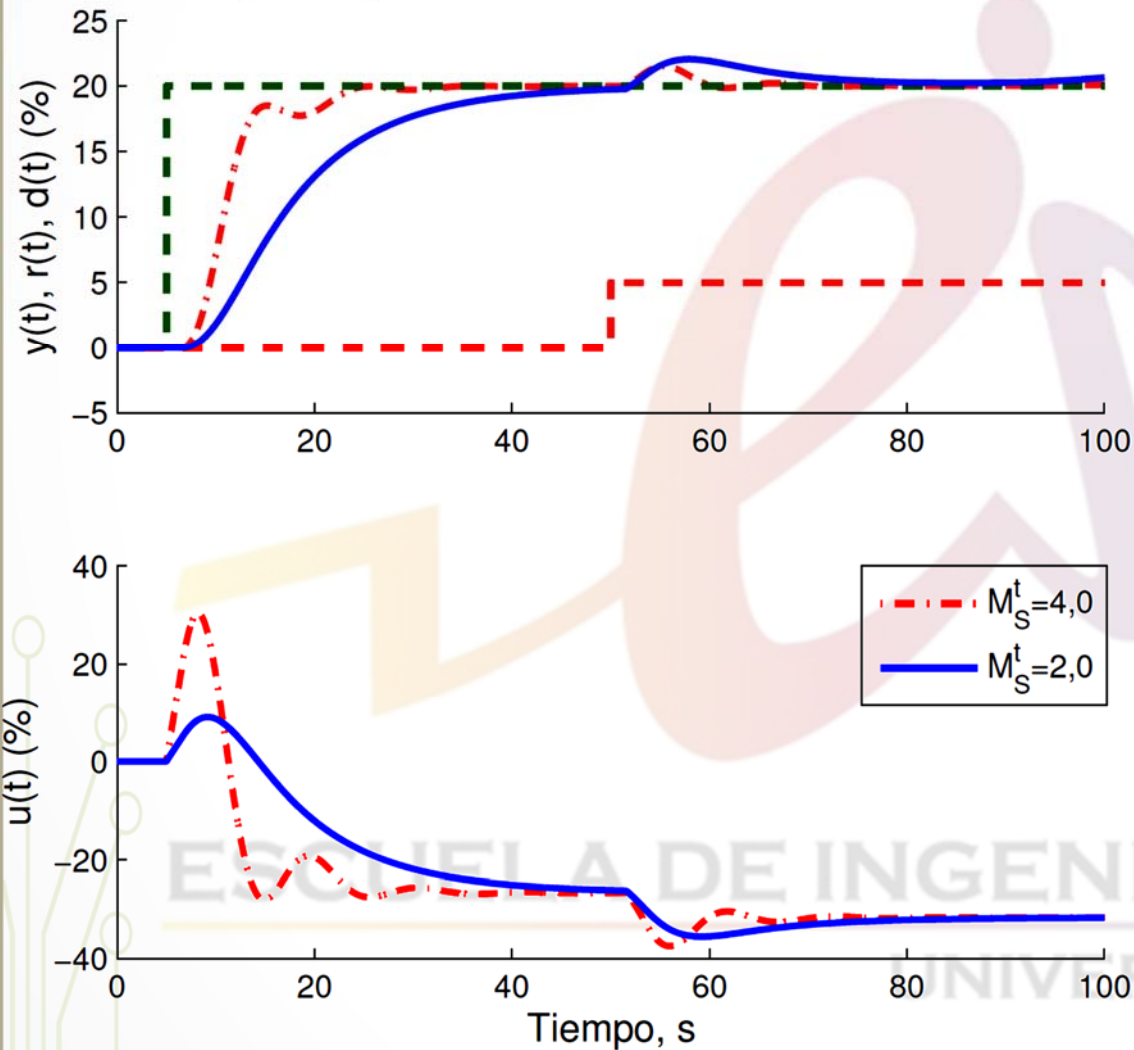


Sistemas Inestables

EIE

Escuela de
Ingeniería Eléctrica

➡ Ejemplo:





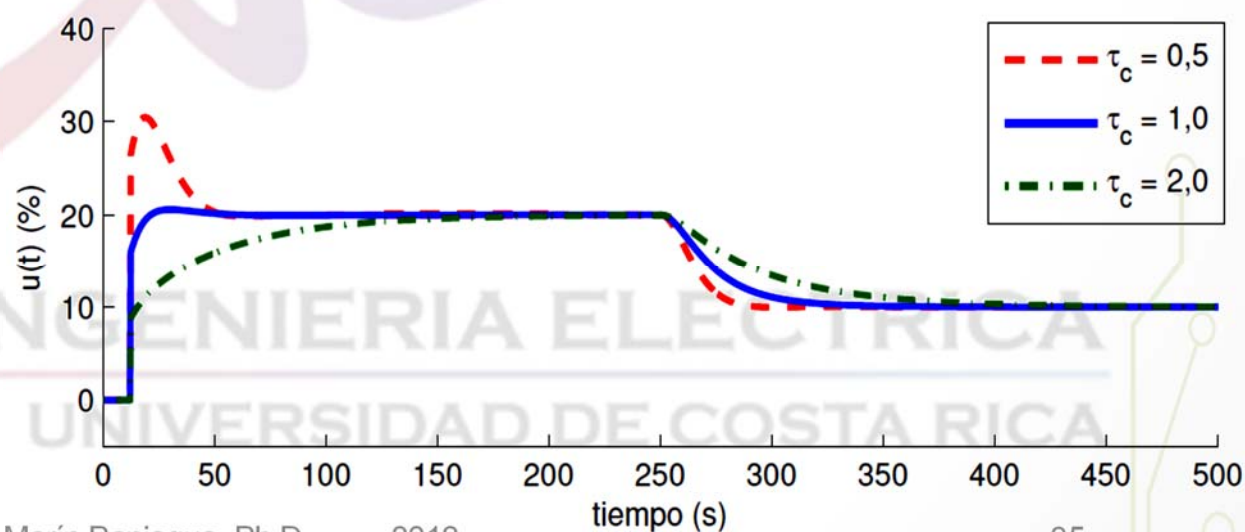
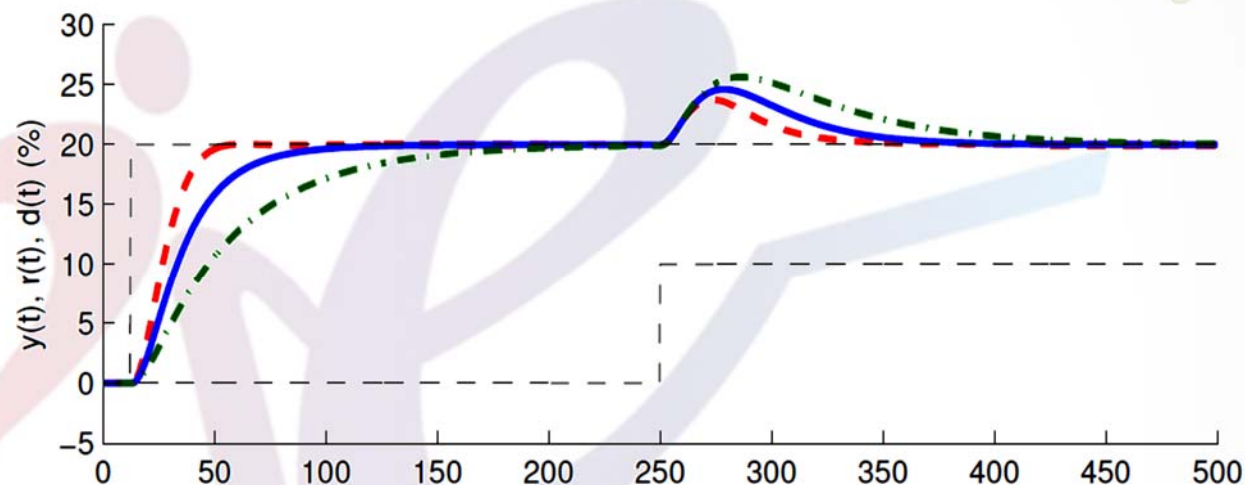
Sistemas con un Tiempo Muerto Normalizado grande

► Síntesis del servo control, planta original

$$P(s) = \frac{1}{(20s + 1)(5s + 1)(s + 1)}$$

$$P_m(s) = \frac{e^{-5,4s}}{20,97s + 1}, \quad \tau_o = 0,26$$

$$\kappa_c = K_p K, \quad \tau_i = T_i / T$$



τ_c	K_p	T_i, s	M_S^r
0,5	1,32	20,97	1,25
1,0	0,80	20,97	1,16
2,0	0,44	20,97	1,09



Sistemas con un Tiempo Muerto Normalizado grande

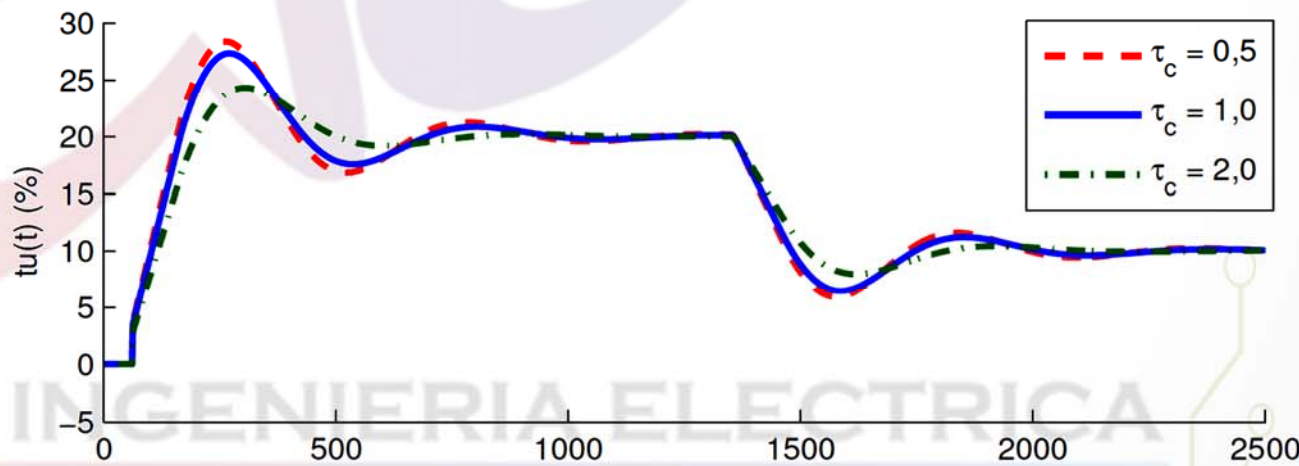
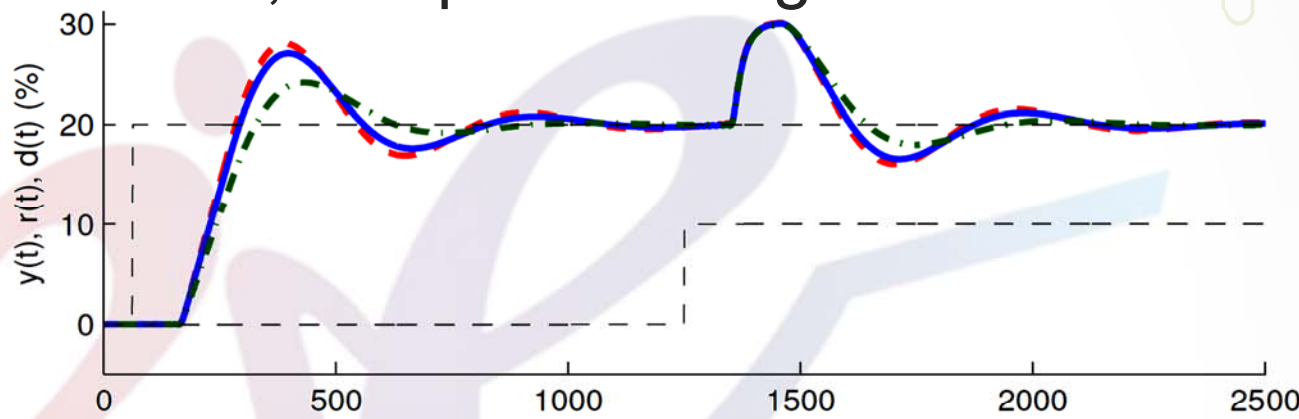
► Síntesis del servo control, tiempo muerto grande

$$P(s) = \frac{e^{-100s}}{(20s + 1)(5s + 1)(s + 1)}$$

$$P_m(s) = \frac{e^{-105,4s}}{20,97s + 1}, \tau_o = 5,03$$

$$\kappa_c = K_p K, \tau_i = T_i / T$$

τ_c	K_p	T_i, s	M_S^r
0,5	0,18	20,97	2,65
1,0	0,17	20,97	2,45
2,0	0,14	20,97	2,00



Se requieren esquemas de control con “compensación de tiempo muerto” (*predictor de Smith* y similares)