

Chapter 0

第1部分 数学归纳法

要证明:

$P(n)$ 对于任意数 n 为真

过程:

1. 证明基本情况 ($n = 1$) 为真
2. 假设 $P(k)$ 为真
3. 推导出 $P(k+1)$ 为真
4. 因此, 证明了 $P(n)$ for $n = 1, 2, 3, 4...$ 的真实性

第2部分 递归函数

定义:

1. 基本情况, 例如:

$$f(0) = 1$$

2. 递归公式, 例如:

$$f(n+1) = 2f(n) + 3, \forall n \geq 1$$

寻找封闭形式 (解决) :

1. 展开:

$$f(n) = 2f(n-1) + 3 = 2(2f(n-2) + 3) + 3 = \dots$$

2. 归纳法与猜测, 例如:

$$\begin{aligned} f(0) &= 2, f(1) = 3 \\ \forall n \geq 1, f(n+1) &= 3f(n) - 2f(n-1) \end{aligned}$$

我们发现:

$$f(0) = 2$$

$$f(1) = 3$$

$$f(2) = 5$$

$$f(3) = 9$$

假设:

$$f(n) = 2^n + 1$$

然后用归纳法:

$$f(1) = 2^1 + 1, f(2) = 2^2 + 1, f(3) = 2^3 + 1$$

$$\text{Assume } f(k) = 2^k + 1, \forall n \geq 3$$

$$\text{then, } f(k+1) = 3(2^k + 1) - 2(2^{k-1} + 1) = 2^{k+1} + 1$$

第 3 部分 反证法

原因:

1. 不容易直接证明一个命题
2. 容易证明命题的矛盾