結構商品開發與高速運算應用

Structured Products Development with HPC Application

昀騰金融科技

技術長

董夢雲 博士

dongmy@ms5.hinet.net

昀騰金融科技股份有限公司

技術長
金融博士、證券分析師

董夢雲 Andy Dong

Line/WeChat:andydong3137
E:andydong1209@gmail.com
https://github.com/andydong1209
M:(T)0988-065-751(C)1508-919-2872
10647 台北市大安區辛亥路一段 50 號 4 樓

現職：國立台灣大學財務金融研究所兼任教授級專家
台灣金融研訓院 2023 年菁英講座

經歷：中國信託商業銀行交易室研發科主管
凱基證券風險管理部主管兼亞洲區風險管理主管
中華開發金控、工業銀行風險管理處處長
永豐金控、商業銀行風險管理處處長
永豐商業銀行結構商品開發部副總經理

學歷：國立台灣大學電機工程學系學士
國立中央大學財務管理學研究所博士

專業：證券暨投資分析人員合格(1996)

專長：Basel III 交易簿市場風險資本計算、銀行簿利率風險計算
風險管理理論與實務，資本配置與額度規劃、資產負債管理實務
外匯與利率結構商品評價實務，股權與債權及衍生商品評價實務
GPU 平行運算與結構商品系統開發，CUDA、OpenCL
CPU 平行運算與 ALM 系統開發，C#/C++/C、.Net Framework、SQL
人工智慧(Deep Learning)交易策略開發，Python、Keras、TensorFlow

Part I 零息增值可贖回債券

Zero Coupon Accreting Callable Note

大　綱

一、結構商品的發展趨勢

◆ 財富管理業務的興起

- 資訊／網路革命後，全球生產力大增，財富大量不平衡的累積
  - 投資理財活動全面興盛
  - 政府退休保險準備體系面臨重大挑戰
- 非標準型的客製化產品大量產出
  - 配合投資人的經濟走勢判斷
  - 金融工程技術大量的應用
- 結構商品已成為市場主要投資商品
  - 結構型保單
  - 結構型債券
  - 結構型存款

◆ 財務評價模型取得重要的進展

- 傳統 Black-Scholes 模型的缺點已為市場充分理解
  - ✓ 波動性 Smile 的現象為典型現象
- 隨機波動模型已成為市場的標準價格模型
  - ✓ Heston(1993)的現貨模型
  - ✓ SABR(2002)的期貨模型
  - ✓ SLV 模型蓄式待發
- 國際上，外匯、權益等市場的主流模型

◆ 隨機利率模型也趨近完備

- 利率期限結構一致模型，已經成為市場的標準配備
  - ✓ 即期利率單因子 Hull-White 模型是入門款
  - ✓ 即期利率雙因子 G2++模型是進階款
  - ✓ 遠期利率多因子 LMM 模型是豪華款
- 不同產品的特性，使用不同的模型
  - ✓ ZCN 為看跌、漲利率走勢，使用 Hull-White 模型即可
  - ✓ Fixed Coupon Callable(FCN)類同 ZCN，也是看跌、漲利率走勢，也是使用 Hull-White 模型
  - ✓ Range Accrual Callable Note(RACN)判斷利率陡峭或平坦，需使用 G2++或 LMM 模型
  - ✓ Spread Callable Note(SCN)判斷利率陡峭或平坦，需使用 G2++或 LMM 模型
- 國際上，利率市場的主流模型

◆ 高速運算電腦硬體

- ➢ 多核 CPU 已經成為市場主流
  - ✓ AMD 已提供 96 核 CPU，EPYC 9664 TDP
  - ✓ 一般 Desktop CPU 都有 8 核已上
- ➢ 遊戲產業的 GPU 已成為高速運算的主角。
  - ✓ 500 大超級電腦中大量使用
  - ✓ 6144 Stream Processors，AMD Radeon™ RX 7900 XTX
  - ✓ 10496 CUDA Cores，NVIDIA RTX 3090
- ➢ FPGA 等高速元件，共構一個異質性高速運算平台
  - ✓ Xilinx(AMD)市場上主要供應商
  - ✓ Altera(Intel)市場上次要供應商

◆ 電腦開發系統的完備

- CPU 平行運算的提供
  - ✓ .Net Framework 的 Task Parallel Library
  - ✓ C/C++ POSIX threads，Pthreads
  - ✓ C/C++ OpenMP
  - ✓ Clusters，MPI & MPI.NET
- GPU & FPGA 的統一開發平台
  - ✓ OpenCL
  - ✓ 可以搭配 OpenGL
- NVIDIA GPU 開發架構
  - ✓ CUDA

二、蒙地卡羅模擬法在金融計算的應用趨勢

- 客製化的結構商品通常不具備簡單的解析解
  - 財務模型的發展，已經摒棄早期簡單的 GBM
    - 現代市場的主流模型都過於複雜，沒有簡單的定價公式
  - 簡單的數值方法也不具可行性
    - 多因子與路徑相依性使 Tree 方法不可行
    - 可提前贖回使一般模擬法不可行
  - 多因子的美式模擬法成為市場的主流數值方法
    - ZCN & RACN 的評價，市場上皆使用美式模擬法

◆ 模擬法的主要缺點與救贖

- 大量的隨機抽樣與路徑模擬，計算速度才為瓶頸
  - ✓ 但每一模擬路徑彼此為獨立無關
- 平行運算是解救良方
  - ✓ CPU 的多核架構對症下藥
  - ✓ 多 CPU 的集群架構可有效改善
- 高速運算元件的使用可進一步改善
  - ✓ GPU 的眾核處理架構
- 程式的撰寫難度大幅上升
  - ✓ CPU 平行處理
  - ✓ GPU 眾核處理

◆ 全面性的量化風險管理已經成為監理的標準要求

- Basel III 中的銀行簿利率風險管理
  - ✓ 要求對存、放業務，現金流量價格變動的風險進行控管
  - ✓ NPV & DV01 的計算
  - ✓ 對 ΔEVE & ΔNII 進行控管
  - ✓ SVB 等美國銀行就是典型的利率風險管理失敗
- Basel III 中的交易簿市場風險管理
  - ✓ 要求對每筆交易價格變動的風險進行控管
  - ✓ NPV & Greeks 的計算
  - ✓ 對市場風險資本數量進行要求
- 保險業的 ESG(Economic Scenarios Generation)
  - ✓ 也就是 VaR 的另一個應用

三、零息增值可贖回債券的產品特性

◆ 產品範例

產品名稱	零息增值可贖回債券
產品代號	ZCNXXXX
賣方	XXXX 股份有限公司
本金總額	美元 120,000,000
發行單位	美元 1,000,000
發行日	2019 年 5 月 15 日(T)
交割日	2019 年 5 月 29 日(T+9)
到期日	2049 年 5 月 29 日(30 年)
發行人贖回	適用(本債券需全部贖回，不可部分贖回)
發行人贖回日期	由 2024 年 5 月 29 日開始，每年的 5 月 29 日，到(含)2048 年 5 月 29 日
發行人贖回通知日期間	最短通知期間 10 天，最長通知期間 60 天
債息	零息每年增值
應計利息	4.70%每年
計息基準	每年，30/360，無調整(Unadjusted)
契約本金	美元壹佰萬元整（USD1,000,000）
發行價	100%
淨收入	美元 120,000,000
最終贖回金額	美元 396.643599%的發行本金總額，即美元 3,966,435.99

➢ 發行人贖回金額：下表中攤提面值數量適用於，發行人當日贖回的數量

編號	發行人贖回日期	攤提面值數量(每一發行單位)	贖回價格
1	2024/5/29	1,258,152.86	125.815286%
2	2025/5/29	1,317,286.04	131.728604%
3	2026/5/29	1,379,198.49	137.919849%
4	2027/5/29	1,444,020.81	144.402081%
5	2028/5/29	1,511,889.79	151.188979%
6	2029/5/29	1,582,948.61	158.294861%
7	2030/5/29	1,657,347.20	165.734720%
8	2031/5/29	1,735,242.52	173.524252%
9	2032/5/29	1,816,798.91	181.679891%
10	2033/5/29	1,902,188.46	190.218846%
11	2034/5/29	1,991,591.32	199.159132%
12	2035/5/29	2,085,196.11	208.519611%
13	2036/5/29	2,183,200.33	218.320033%
14	2037/5/29	2,285,810.75	228.581075%
15	2038/5/29	2,393,243.85	239.324385%
16	2039/5/29	2,505,726.31	250.572631%
17	2040/5/29	2,623,495.45	262.349545%
18	2041/5/29	2,746,799.74	274.679974%
19	2042/5/29	2,875,899.32	287.589932%
20	2043/5/29	3,011,066.59	301.106659%
21	2044/5/29	3,152,586.72	315.258672%
22	2045/5/29	3,300,758.30	330.075830%
23	2046/5/29	3,455,893.94	345.589394%
24	2047/5/29	3,618,320.95	361.832095%
25	2048/5/29	3,788,382.04	378.838204%

- 另一種型式為 Fixed Coupon Callable
  - 每期有固定 Coupon，本金不增值
  - 一樣可提前贖回
- 發行人動機
  - 鎖定長期資金來源成本
  - 利率走低可以贖回發行新債
  - 五年凍結期，確保投資人基本收益
- 投資人動機
  - 高收益
  - 五年凍結期，確保投資人基本收益

四、Hull-White 單因子利率模型的模擬性質

(一)隨機亂數產生器

- 首先，要有高品質的亂數產生器
  - 假亂數(Pseudo-Random Number)
    - MT19937 是一個業界推崇的高品質亂數產生器
    - CPU & GPU 版的程式碼都可網路下載
  - 準亂數(Quasi-Random Number)
    - Sobol 是金工領域認可的高品質亂數產生器
    - CPU & GPU 版的程式碼都可網路下載

◆ 要求的性質有三

- 長周期
  - ✓ MT19937：2^19937 – 1，約 10^6000。
- 均勻分布
  - ✓ MT：623 Dim
  - ✓ Sobol：256 Dim
- 高速
  - ✓ Register 運算

◆ 天然的亂數未必好

- 原子核衰變過程中，放射出來的粒子的方位，便是一個天然的亂數源。
  - ✓ 網路上有網站提供(氪 85)產生的數列，這是一個有趣的網站。http://www.fourmilab.ch/hotbits/
- 速度太慢為致命傷

(二)利率隨機過程

◆ Hull & White 模型的短期利率連續極限如下，

$$dr = [\theta(t) - \alpha r] \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad \text{..........} (4.1)$$

- 此模型隱含常態分配的利率與對數常態的債券價格
  - ✓ 又被稱之為"Vasicek fitted to the term structure"、"HL with mean reversion"。
- $f(0,T)$ 表期初 T 時點的瞬間遠期利率，可知

$$f(0,T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln[P(0,T)]$$

$$f(0,T) = e^{-\alpha T} r(0) + \int_0^T e^{-\alpha(T-u)} \theta(u) du - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2} \left[1 - e^{-\alpha T}\right]^2$$

- $\theta(T)$ 代表一時變量的漂移率，反應初始遠期利率的斜率與波動參數，可由此求得

$$\theta(T) = \alpha \cdot f(0,T) + \frac{\partial f(0,T)}{\partial T} + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha T}) \quad \text{..........} (4.2)$$

  - ✓ 其中的偏微分表期初遠期曲線在 T 時點的斜率。
  - ✓ 此時變量的參數允許模型產生出市場上觀察到的債券價格。

◆ 短期利率的移轉方程式為，

$$r(t+\tau)=r(t)e^{-\alpha\tau}+e^{-\alpha(t+\tau)}\int_t^{t+\tau}e^{\alpha u}\theta(u)du+\sigma e^{-\alpha(t+\tau)}\int_t^{t+\tau}e^{\alpha u}dW(u)$$

$$=r(t)e^{-\alpha\tau}+a(t+\tau)-e^{-\alpha\tau}a(t)+\sigma e^{-\alpha(t+\tau)}\int_t^{t+\tau}e^{\alpha u}dW(u) \quad \text{......(4.3)}$$

➢ 其中，

$$a(t)=f(0,T)+\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1-e^{-\alpha T})^2$$

◆ 由上可知 r(t)為常態分配，期望值與變異數如下，

$$\mathrm{E}[\mathrm{r}(\mathrm{t}+\tau)\,|\,\mathrm{r}(\mathrm{t})]=r(t)e^{-\alpha\tau}+a(t+\tau)-e^{-\alpha\tau}a(t) \quad \text{......(4.4)}$$

$$Var[r(t+\tau)\,|\,r(t)]=\frac{\sigma^2}{2\alpha}[1-e^{-2\alpha T}] \quad \text{......(4.5)}$$

- 定義$t_1 = t$ ，$t_2 = t + \tau$ ，(4.3)式可以表示如下，

$$r(t_2) = r(t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)} + a(t_2) - e^{-\alpha(t_2-t_1)}a(t_1) + \sigma e^{-\alpha t_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha u}dW(u)$$

$$= r(t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)} + f(0,t_2) - e^{-\alpha(t_2-t_1)}f(0,t_1) + \frac{\sigma^2}{\alpha^2}e^{-\alpha t_2}[\cosh(\alpha t_2) - \sinh(\alpha t_1)] + \sigma e^{-\alpha t_2}\int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha u}dW(u)$$

- $r(t_2)$的分配如下，

$$r(t_2) \sim r(t_1)e^{-\alpha(t_2-t_1)} + f(0,t_2) - e^{-\alpha(t_2-t_1)}f(0,t_1)$$

$$+ \frac{\sigma^2}{\alpha^2}e^{-\alpha t_2}[\cosh(\alpha t_2) - \cosh(\alpha t_1)] + \frac{\sigma}{\sqrt{2\alpha}}\sqrt{1 - e^{-2\alpha(t_2-t_1)}}N(0,1) \quad \text{...(4.6)}$$

- (4.4)、(4.5)或(4.6)式，便是模擬時的擴散方程式。
  - QuantLib 中的 HullWhiteProcess.cs 便是根據如此撰寫的。
    - ✓ 注意，a 與 alpha 的稱呼互異。

(三)零息債券選擇權與 Caplet 之關係

- HW 模型下，s 時點到期的單位面值零息債券，在未來 T>t 時點的市場價格為，

$$P(T,s)=A(T,s)\cdot Exp\left[-r(T)\cdot B(T,s)\right]$$

$$B(T,s)=\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(s-T)})$$

$$\ln A(T,s)=\ln\frac{P(t,s)}{P(t,T)}-B(T,s)\frac{\partial\ln P(t,T)}{\partial T}-\frac{1}{4\alpha^3}\sigma^2(e^{-\alpha(s-t)}-e^{-\alpha(T-t)})^2(e^{2\alpha(T-t)}-1)$$

  - $r(T)$ 為 T 時點的短期利率。
  - 即期利率與遠期利率的波動性結構皆為

$$\sigma_R(t,s)=\frac{\sigma}{\alpha(s-t)}(1-e^{-\alpha(s-t)})$$ 。

◆ HW 模型下的零息債券歐式選擇權價格可求得為，

$$c(t,T,s) = P(t,s)N(d_1) - KP(t,T)N(d_2)$$

$$p(t,T,s) = KP(t,T)N(-d_2) - P(t,s)N(-d_1)$$

➢ 其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{P(t,s)}{KP(t,T)}\right)}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_P$$

$$\sigma_P^2 = \frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})(1-e^{-\alpha(s-T)})^2$$

◆ 考慮一 Caplet，利率上限為 R_{cap}，期限為 t_k 到 t_{k+1}，另 R_k 為市場實際利率。

➢ 則此 Caplet 在 t_{k+1} 時點之償付如下，

$$\Delta\tau \times Max\left[R_k - R_{cap}, 0\right]$$

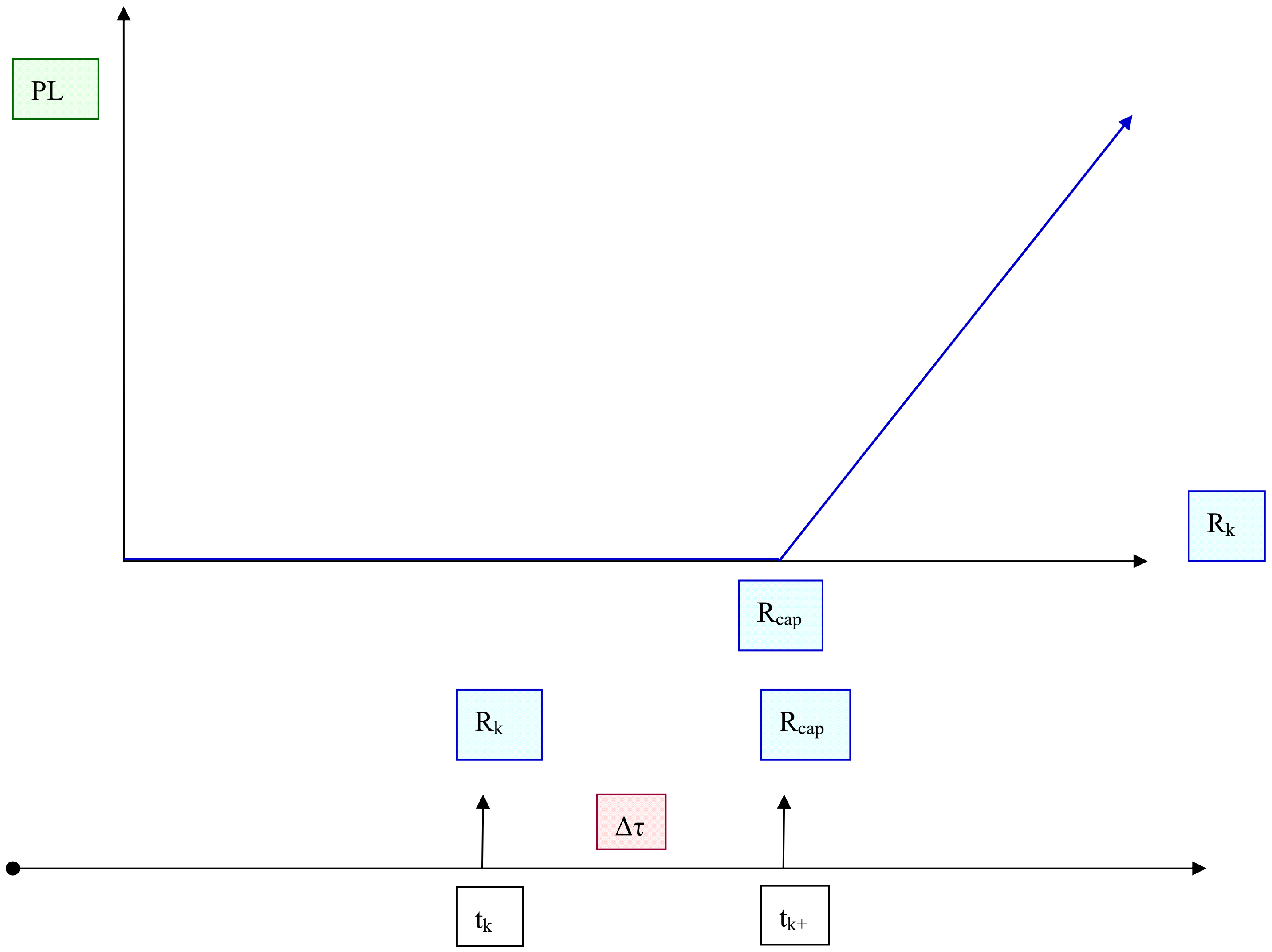
➢ 在 t_k 時點之折現值為，

$$\frac{\Delta\tau}{1 + R_k \Delta\tau} \times Max\left[R_k - R_{cap}, 0\right]$$

➢ 可改寫為，

$$\left(1 + R_{cap}\Delta\tau\right) \times Max\left[\frac{1}{1 + R_{cap}\Delta\tau} - \frac{1}{1 + R_k \Delta\tau}, 0\right] \qquad (4.7)$$

➢ Caplet 損益圖



- (4.7)式可看成$(1+R_{cap}\Delta\tau)$單位在 t_k 到期之歐式零息債券賣權，此債券在 t_{k+1} 到期，數量為一單位，執行價格 K_c，

$$K_c = \frac{1}{1+R_{cap}\Delta\tau} \ ,$$

$$(1+R_{cap}\Delta\tau)\times Max[K_c - P(t_k, t_{k+1}), 0]$$

- (4.7)亦可改寫為，

$$Max\left[\frac{(1+R_{cap}\Delta\tau)}{1+R_{cap}\Delta\tau} - \frac{(1+R_{cap}\Delta\tau)}{1+R_k\Delta\tau}, 0\right] = Max\left[1 - \frac{(1+R_{cap}\Delta\tau)}{1+R_k\Delta\tau}, 0\right] \text{...}(4.8)$$

- ✓ (4.8)可看成 1 單位在 t_k 到期之歐式零息債券賣權，
- ✓ 此債券在 t_{k+1} 到期，數量為$(1+R_{cap}\Delta\tau)$單位，執行價格 K_c =1。

(四)息票債券選擇權與零息債券選擇權

- Jamshidian(1989)建議對於息票債券選擇權可視為零息債券選擇權之組合。
  - 在單因子模型下，我們可導出零息債券價格與其歐式選擇權之關係式。

- 一息票債券在 s_i 時點支付債息 c_i，則以期為標的之執行價格為 K，到期日為 T 之買入選擇權，$c_{CB}(t,T,\{s_i\})$，其價格可表示為

$$c_{CB}(t,T,\{s_i\}) = \sum_{i=1}^{n} c_i c(t,T,s_i,K_i) \quad \text{......(4.9)}$$

  - n 表息票債券到期前支付債息的次數。
  - 第 i 筆零息債券選擇權之執行價格 K_i，由下式決定。

$$K_i = P(r^*,T,s_i)$$

  - 上式中決定債券價格的短期利率 r^*，由下式決定。

$$\sum_{i=1}^{n} c_i P(r^*,T,s_i) = K$$

- 息票債券買入選擇權可視為個別零息債券選擇權之組合，這些零息債券選擇權的到期日即為息票支付日且其執行價格需適當的調整。
  - 一息票債券在 s_i 時點支付債息 c_i，則以期為標的之執行價格為 K，到期日為 T 之賣出選擇權，$p_{CB}(t,T,\{s_i\})$，其價格可表示為

$$p_{CB}(t,T,\{s_i\}) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, p(t,T,s_i,K_i) \qquad (4.10)$$

(五)參數市場校正息票債券選擇權

- 一個 Receiver Swaption 可以視為是息票債券的 Call Option
  - Jamshidian(1989)已經告訴我們，息票債券選擇權可視為零息債券選擇權之組合
  - HW 模型下的零息債券選擇權的解析解已經求得
  - 因此可以得到 Receiver Swaption 的價格

- 在 HW 模型中只有二個參數，可由市場上交易的利率交換選擇權價格來推估
  - 假設市場上有 M 個利率交換選擇權，其價格分別為 Market_i，I=1…M。
    - ✓ 令 Model(α ， σ)$_i$ 為由 HW 模型所求的的價格，則如下校準參數，

$$\min_{\alpha,\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\text{model}_i(\alpha,\sigma)-\text{market}_i}{\text{market}_i}\right)^2} \quad \text{……(4.11)}$$

◆ 市場校正流程圖

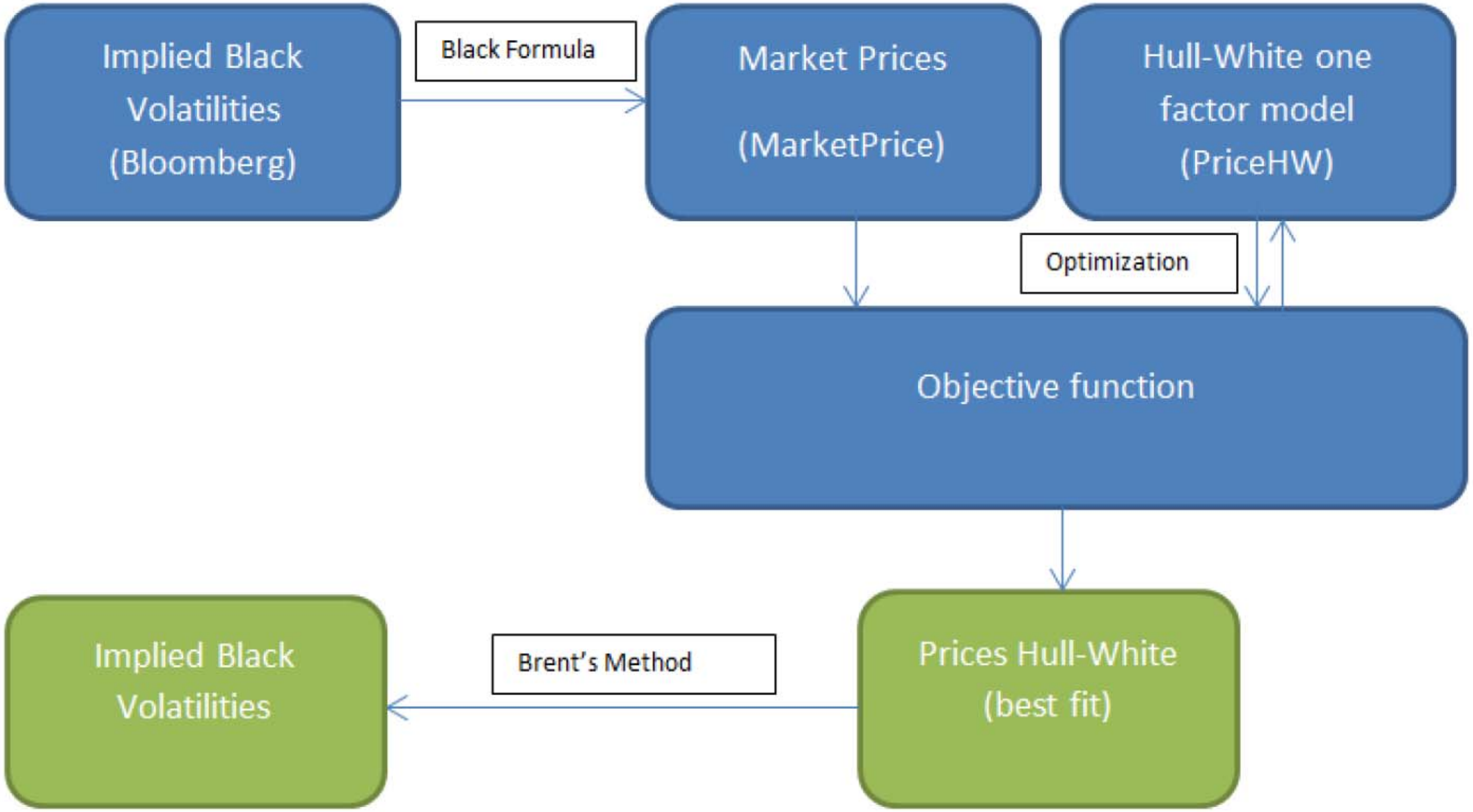


Figure 4.1: Flowchart of the calibration process

◆ Bloomberg 的 Swaption 波動性報價頁面

Expiry	1 YR	2 YR	3 YR	4 YR	5 YR	6 YR	7 YR	8 YR	9 YR	10 YR	12 YR
1 MO	29.18	36.98	41.39	46.92	48.90	51.34	52.53	54.13	55.66	57.11	59.68
3 MO	28.60	36.79	42.11	48.07	51.53	53.77	55.17	57.00	58.68	60.36	62.82
6 MO	30.36	40.30	45.41	49.82	53.75	55.65	57.00	58.60	60.27	61.99	64.29
9 MO	33.15	41.07	47.21	51.69	56.14	57.69	59.41	61.21	62.85	64.55	66.53
1 YR	36.27	41.59	48.72	53.27	58.32	59.59	61.71	63.77	65.39	67.06	68.40
2 YR	46.96	52.07	56.78	60.64	63.14	64.66	67.06	67.34	68.72	70.38	70.99
3 YR	57.65	63.03	66.81	68.27	70.49	70.95	71.46	72.01	72.19	72.17	72.59
4 YR	68.08	70.78	70.62	71.80	73.15	73.02	73.20	73.20	72.97	73.13	72.47
5 YR	72.62	72.58	73.22	73.75	74.10	74.13	74.18	73.80	73.91	74.11	72.61
6 YR	70.83	72.70	73.58	73.88	74.23	73.81	73.45	73.47	73.67	72.97	71.73
7 YR	72.29	71.75	72.60	73.08	72.66	72.22	72.06	72.55	71.87	71.36	70.16

Figure 4.2: Swaption volatilities from Bloomberg terminal on 23 may 2013

- (4.11)式可以使用非線性最適化演算法來估計參數
  - Levenberg-Marquardt(LM)法是金融領域實務界首選的方法。
  - 神經網路的權數訓練方法，SGD 通常也是用此方法。
- 使用市場上交易的交換選擇權價格來校正。
  - 本程式依循 QuantLib 的範例，使用 Swaption Vol 來校正。
  - Swaption 已成為市場高流動性的工具。
  - 使用 Co-Terminal 的 Swaption 報價
    - ✓ Option Length + Swap Length = Bond Length
    - ✓ 5 X 25、10 X 20、15 X 15、20 X 10、25 X 5
- 以前是使用 Caps/Floors 的 Vol 報價來校正
  - 現在不傾向使用，流動性較差

(六)提前贖回的美式蒙地卡羅模擬法

- 是否提前贖回，是以投資人最大利益為判斷，涉及對未來的預期
  - Longstaff & Schwartz(2000)使用迴歸分析做為預期的判斷
  - 迴歸分析中的自變數，可用一般高次多項式，3~4 次即可
  - 路徑數量一般 20,000 條足夠

- 步驟一
  - 依據利率隨機過程，一年一步，模擬 20,000 條路徑
    - 計算每一結點上單期 Discount Function，df_t，$0 <= t <= 30$
- 步驟二
  - 期末 t = 30 決定終端條件
  - 由期末往前推算，t = 29…5，判斷是否提前執行
    - 對於模擬為 ITM 的路徑，計算立刻執行價值(EV)
    - 對於模擬為 OTM 的路徑，計算持有價值(HV)
  - 對 ITM 路徑進行迴歸估計
    - 因變數為 EV，自變數為 df_t 及其高次項
  - 以估計之參數，評估是否提前執行，作為該點價值
- 步驟三
  - 凍結期 t=5 之前不須考慮提前執行
    - 直接將 t=5 之後的現金流量折現到期初
  - 算出此 ZCN 的 MTM

(七)敏感性的計算

- 在 Basel III 中，IRRBB(利率風險)與 SBM(市場風險)都需要計算 DV01
  - IRRBB 將現金流分到 19 個時間帶
    - ✓ ON、1M、3M、6M、9M、1Y、1.5Y、2Y、3Y、4Y、5Y、6Y、7Y、8Y、9Y、10Y、15Y、20Y、20Y+
  - SBM 採 10 個利率點作為風險因子
    - ✓ 3M、6M、1Y、2Y、3Y、5Y、10Y、15、20Y、30Y

◆ 使用差分的方式計算 Greeks

- 一般 Delta 與 Gamma
  - ✓ 使用 Center Difference 的方法，以減少誤差。

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C(S+h) - C(S-h)}{2h} \quad \cdots\cdots (4.12)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \approx \frac{C(S+h) - 2C(S) + C(S-h)}{h^2} \quad \cdots\cdots (4.13)$$

  - ✓ 使用同一組亂數可使估計誤差較小。
- 其他避險參數可類似求得。

- Basel 中對於一般利率風險(GIRR)資本計算中，敏感性的計算有嚴格定義
  - GIRR 的敏感性(Delta)定義就是萬倍的 PV01
  - PV01 表無風險收益曲線上，期限 t 的利率，r_t 上升 1bp，價值(V_i)的變動量，除以 0.0001，

$$s_{k,r_t} = \frac{V_i(r_t + 0.0001, cs_t) - V_i(r_t, cs_t)}{0.0001} \quad \text{...(4.14)}$$

    - ✓ 其中，r_t 表無風險收益曲線期限 t 的利率。
    - ✓ cs_t 表期限 t 的信用價差。
    - ✓ Vi 為 i 工具的市場價值。
  - (4.14)式中的利率選擇，需與評價原則一致，一般情況使用即期利率，Spot Rate(Zero Rate)。
  - 不能隨便簡化使用 Coupon Rate。

五、評價程式的模擬實作

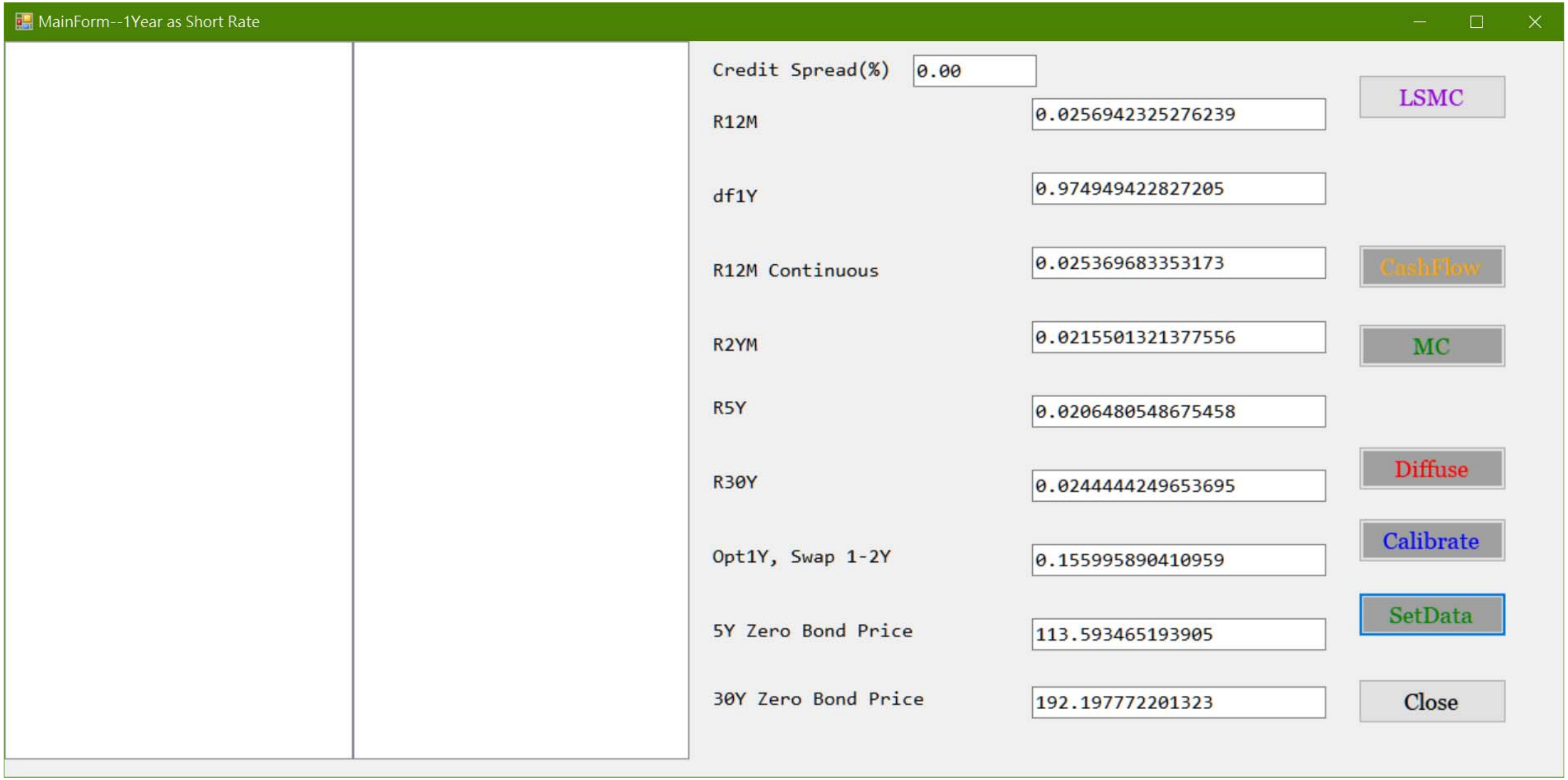
◆ 測試範例市場資料，2019/5/27

```
public RateDatum[] depositData = new RateDatum[]
{
    new RateDatum { n = 3, units = TimeUnit.Months, rate = 2.52175 },
    new RateDatum { n = 6, units = TimeUnit.Months, rate = 2.52438 },
    new RateDatum { n = 12, units = TimeUnit.Months, rate = 2.57075 }
};

public RateDatum[] swapData = new RateDatum[]
{
    new RateDatum { n =  2, units = TimeUnit.Years, rate = 2.1537 },
    new RateDatum { n =  3, units = TimeUnit.Years, rate = 2.0763 },
    new RateDatum { n =  5, units = TimeUnit.Years, rate = 2.0685 },
    new RateDatum { n =  7, units = TimeUnit.Years, rate = 2.1190 },
    new RateDatum { n =  10, units = TimeUnit.Years, rate = 2.2159 },
    new RateDatum { n =  15, units = TimeUnit.Years, rate = 2.3375 },
    new RateDatum { n =  20, units = TimeUnit.Years, rate = 2.3933 },
    new RateDatum { n =  30, units = TimeUnit.Years, rate = 2.4180 },
    new RateDatum { n =  50, units = TimeUnit.Years, rate = 2.3700 }
};
```

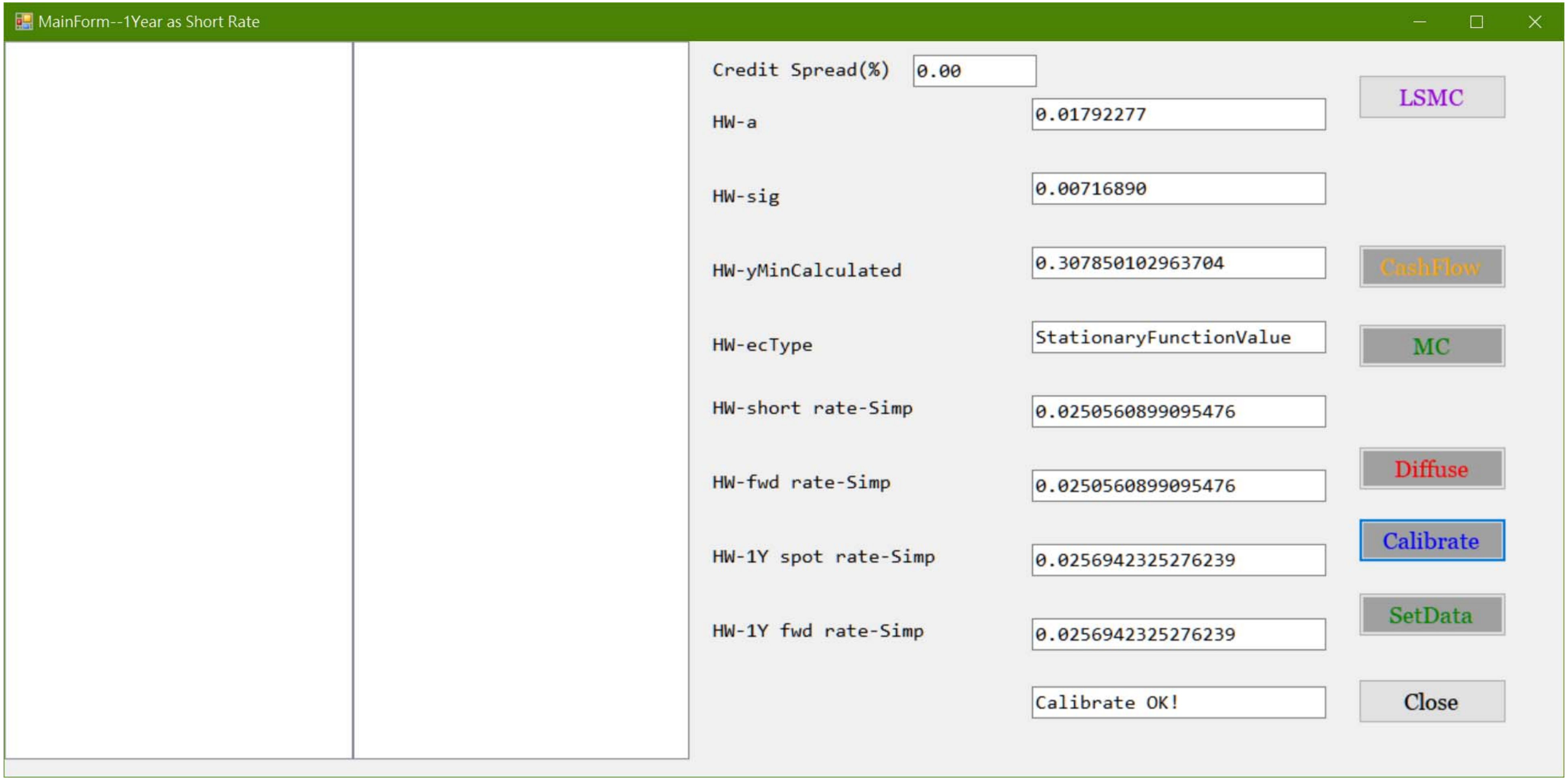
```
public VolDatum[] swaptionData = new VolDatum[]
{
    //coterminal 2019/5/27
    new VolDatum { optlen = 1, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 30,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2618 },
    new VolDatum { optlen = 5, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 25,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2670 },
    new VolDatum { optlen = 10, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 20,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2576 },
    new VolDatum { optlen = 15, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 15,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2413 },
    new VolDatum { optlen = 20, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 10,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2329 },
    new VolDatum { optlen = 25, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 5,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2295 },
    new VolDatum { optlen = 30, optlenunits = TimeUnit.Years, swplen = 1,
        swplenunits = TimeUnit.Years, vol = 0.2726 }
};
```

◆ 讀入市場資料



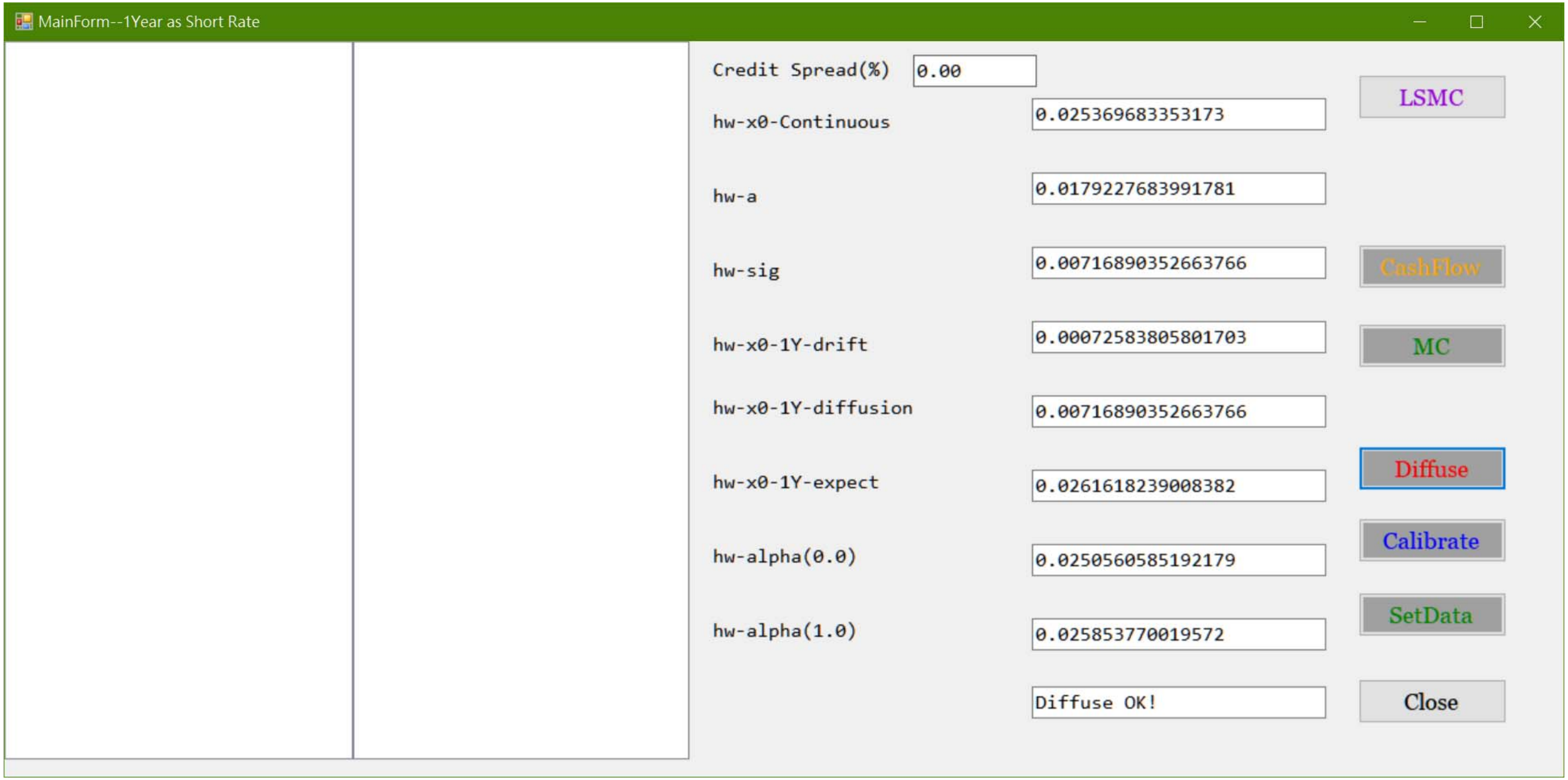
MainForm--1Year as Short Rate
Credit Spread(%)
0.00
R12M
0.0256942325276239
df1Y
0.974949422827205
R12M Continuous
0.025369683353173
R2YM
0.0215501321377556
R5Y
0.0206480548675458
R30Y
0.0244444249653695
Opt1Y, Swap 1-2Y
0.155995890410959
5Y Zero Bond Price
113.593465193905
30Y Zero Bond Price
192.197772201323
LSMC
CashFlow
MC
Diffuse
Calibrate
SetData
Close

◆ 市場校正

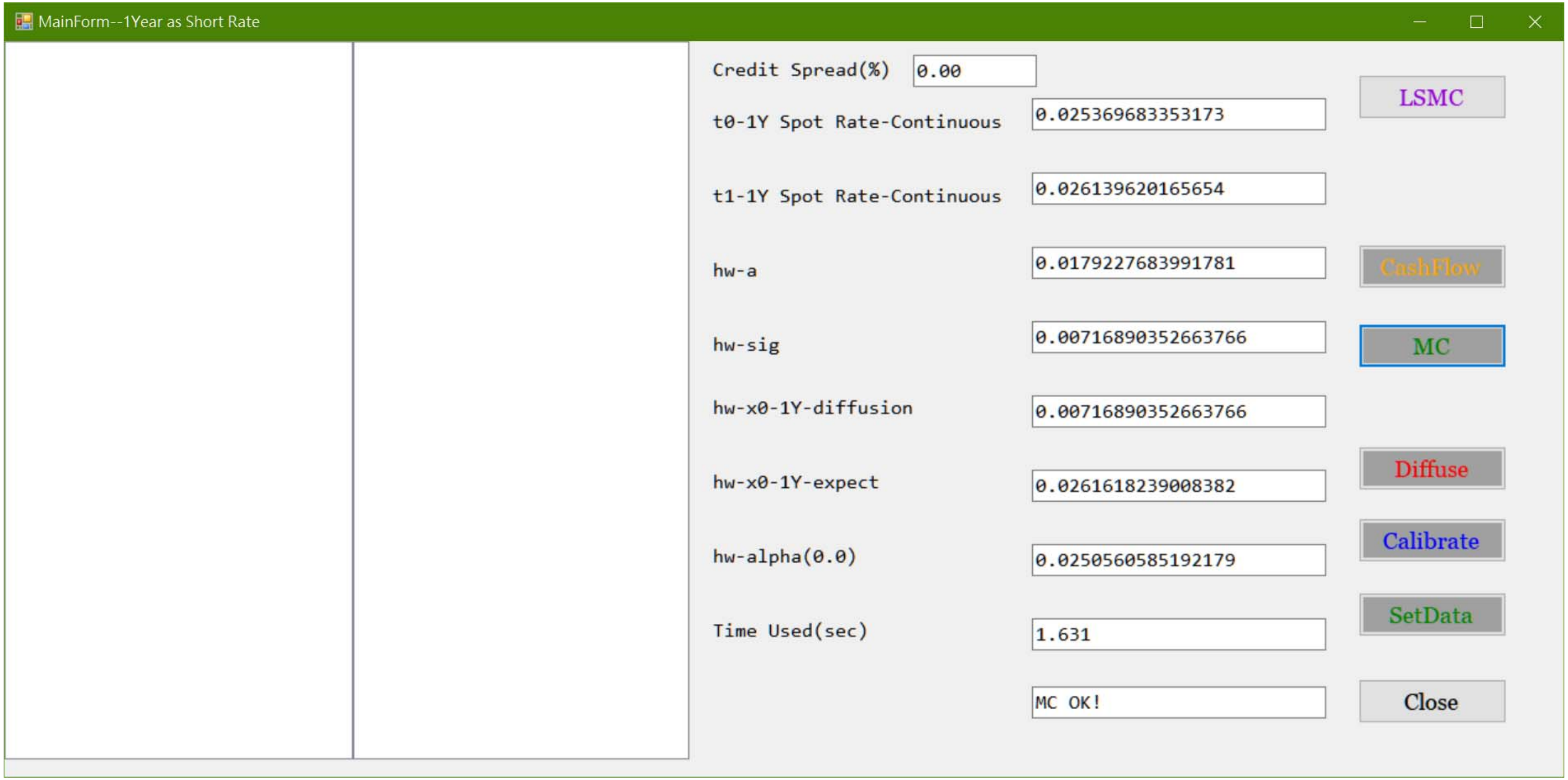


MainForm--1Year as Short Rate
Credit Spread(%)
0.00
HW-a
0.01792277
HW-sig
0.00716890
HW-yMinCalculated
0.307850102963704
HW-ecType
StationaryFunctionValue
HW-short rate-Simp
0.0250560899095476
HW-fwd rate-Simp
0.0250560899095476
HW-1Y spot rate-Simp
0.0256942325276239
HW-1Y fwd rate-Simp
0.0256942325276239
Calibrate OK!
LSMC
CashFlow
MC
Diffuse
Calibrate
SetData
Close

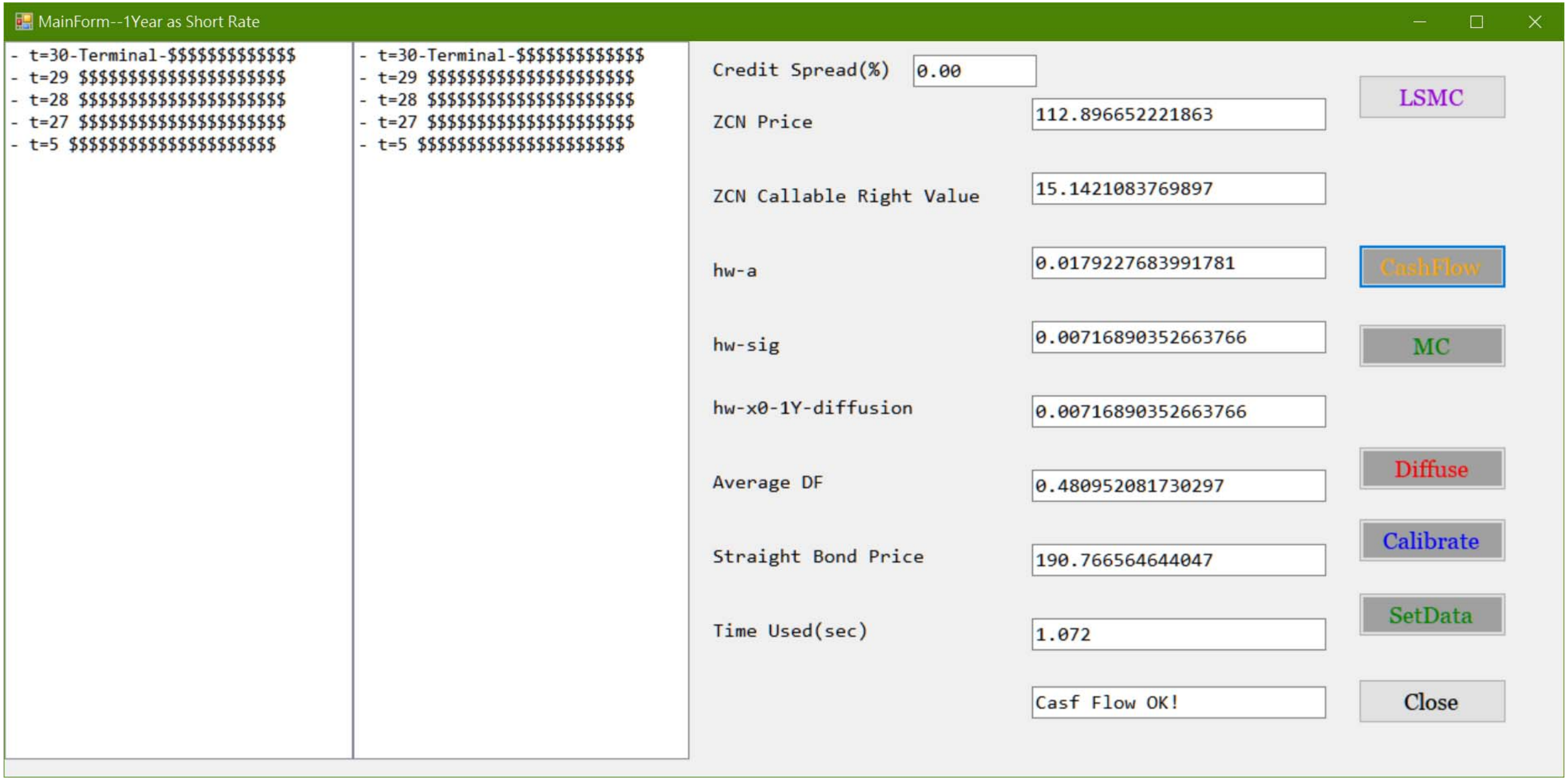
◆ 準備擴散路徑


MainForm--1Year as Short Rate
Credit Spread(%)
0.00
hw-x0-Continuous
0.025369683353173
hw-a
0.0179227683991781
hw-sig
0.00716890352663766
hw-x0-1Y-drift
0.00072583805801703
hw-x0-1Y-diffusion
0.00716890352663766
hw-x0-1Y-expect
0.0261618239008382
hw-alpha(0.0)
0.0250560585192179
hw-alpha(1.0)
0.025853770019572
Diffuse OK!
LSMC
CashFlow
MC
Diffuse
Calibrate
SetData
Close

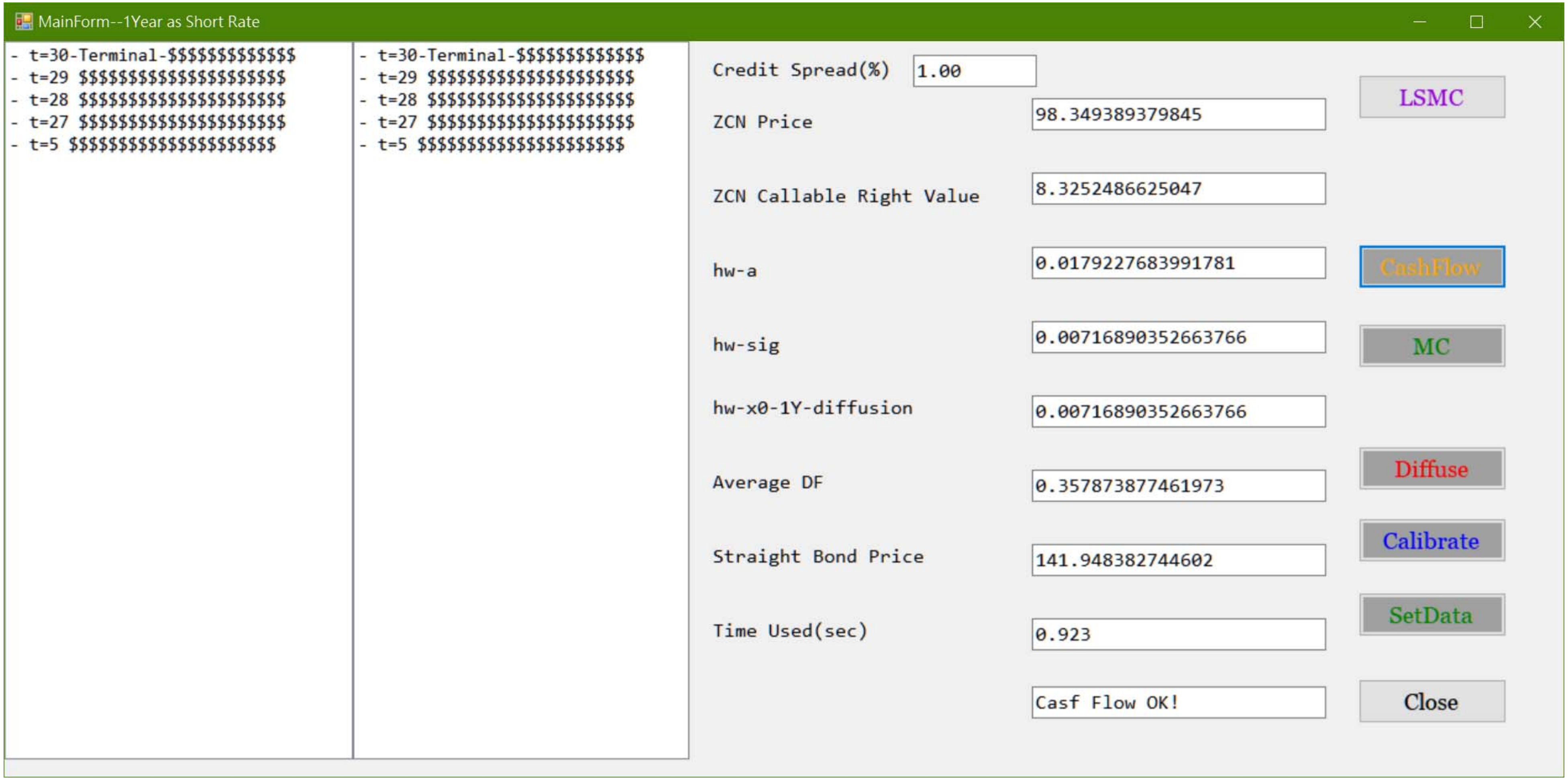
◆ 模擬利率 r_t 與計算 df_t



◆ 無信用加碼，MTM = 112.8966



◆ 信用加碼 100b.p.，MTM = 98.3493



◆ 我的臉書，https://www.facebook.com/andy.dong.735