模擬法在財務工程上的應用

Monte Carlo Methods in Financial Engineering

昀騰金融科技

技術長

董夢雲 博士

dongmy@ms5.hinet.net

大　綱

第十三章、測度調整補充：風險中立訂價理論

(一)軼性方法

- 令 R_t 為一證券之 t 期報酬率，r_t 為無風險報酬率，RP 表風險溢酬，令 E[RP]= α 。

$$E[R_t] = r_f + E[RP] = r_t + \alpha$$

$$E_t\left[\frac{1}{(1+R_t)} S_{t+1}\right] = S_t$$

  - 但是 R_t 本身可能無法事前確定。

- 令 t 期無風險債券 $B_t = 1$，則 $B_{t+1} = 1+r_t$。令 $X_t = S_t / B_t$，
  - 如果我們經過某種處理，可以得到 $E_t[X_{t+1}] = X_t$。
  - 由於 r_t 可由市場上得知，因此易於處理。

- $E_t[X_{t+1} | X_t] = X_t$，此性質稱為軼性(martingale)，為一公平賭局(fair game)。
  - 可視 X_t 為 t 期末之財富。

問題：可否轉換R_t之期望值？以便於由S_{t+1}計算S_t。

- 作法一：改變可能的出象值，將 R_t加上常數項，

$$\widetilde{R}_t = R_t + \mu$$

$$E[\widetilde{R}_t] = r_t + \alpha + \mu$$

  - 若 $\mu = -\alpha$，

$$E[\widetilde{R}_t] = r_t$$

  - 但無法事前得知α。

- 作法二：改變出象值的機率。

(二)測度轉換

- 一標準常態分配隨機亂數 z_t，其機率密度函數 $f(z_t)$，為

$$z_t \sim N(0,1)$$

$$f(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_t^2}$$

  - 在 z_t 附近微小變動下 dz_t，相對應的機率變動量 $dP(z_t)$，為一機率的測度

$$dP(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z_t^2} dz_t$$

- 定義下面轉換函數 $\xi(z_t)$，對 $dP(z_t)$ 運作

$$\xi(z_t) = e^{z_t\mu - \frac{1}{2}\mu^2}$$

$$d\widetilde{P}(z_t) = [dP(z_t)][\xi(z_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z_t^2) + \mu \cdot z_t - \frac{1}{2}\mu^2} dz_t$$

$$d\widetilde{P}(z_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}[z_t - \mu]^2} dz$$

- $d\widetilde{P}(z_t)$ 為一新的機率測度，
  - $P(z_t)$ 與 $\widetilde{P}(z_t)$ 為不同的測度，兩者分配形狀相同，但平均數不同。
  - 對不同出象，$P(z_t)$ 與 $\widetilde{P}(z_t)$ 給予不同的機率權數。

$$E^{P}[z_t]=0, \quad E^{P}[z_t^2]=1$$

$$E^{\widetilde{P}}[z_t]=\mu, \quad E^{\widetilde{P}}[z_t^2]=1$$

- 測度的轉換是可逆的，

$$d\widetilde{P}(z_t)=dP(z_t)\xi(z_t)$$

$$\xi(z_t)^{-1}d\widetilde{P}(z_t)=dP(z_t)$$

- $P(z_t)$ 與 $\widetilde{P}(z_t)$ 稱之為等量的測度(Equivalent Measures)，條件為

$$\widetilde{P}(dz)>0 \quad if\_and\_only\_if \quad P(dz)>0$$

  - Radon-Nikodym derivative，$\xi(z_t)$，存在

$$\xi(z_t)=\frac{d\widetilde{P}(z_t)}{dP(z_t)}$$

(三)The Girsanov Theorem

- 定義 ξ_t 如下式

$$\xi_t = e^{\left(\int_0^t X_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t X_u^2 du \right)}, \quad t \in [0,T]$$ ……………………….(6.2.1)

- 對於資訊集合 I_t 與機率 P， ξ_t 為鞅性的，W_t 為機率 P 下的一個 Wiener 過程，則定義另一 Wiener 過程如下

$$\widetilde{W}_t = W_t - \int_0^t X_u du, \quad t \in [0,T]$$ ………………………….(6.2.2)

- $\widetilde{W}_t$ 為資訊集合 I_t 與機率測度 $\widetilde{P}_T$ 下的一個 Wiener 過程，

$\widetilde{P}_T(A) = E^P[1_A \xi_T]$ 。

◆ 簡述之，要將W_t轉到$\tilde{W}_t$，需要將 dP 乘上一個機率轉換數，ξ_t，如(1)式，W_t的相對效果為(2)式所示，或如下面微分式所示

$$d\tilde{W}_t = dW_t - X_t dt, \quad t \in [0, T]$$

(四)Girsanov 定理在 ABM 之應用

- 算術布朗運動之股價變化，令 $W_0=0$，

$$dS_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

$$dP(W_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{1}{2t}(W_t)^2} dW_t$$

- 若 μ 不為 0，則 S_t 不為鞅性，

$$S_t = \mu \cdot t + \sigma \cdot W_t$$

$$E[S_{t+s} \mid S_t] = S_t + \mu \cdot s$$

- 消除偏移量，將 S_t 轉為鞅性，
  - 方法一：

$$\widetilde{S}_t = S_t - \mu \cdot t$$

  - 方法二：運用 Girsanov 定理。

$$E^{\widetilde{P}}[S_{t+s} \mid S_t] = S_t$$

- 在 P 測度下，S_t 之 pdf 如下

$$f_S = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t - \mu \cdot t)^2}$$

  - 希望消去偏移量，在新的測度下 S_t 為鞅性的。

$$dS_t = \sigma \cdot d\widetilde{W}_t$$

  - 在新測度下，S_t 之 pdf 如下

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2 t}(S_t)^2}$$

- 可得 Radon-Nikodym Derivative 如下

$$\xi(S_t) = \frac{d\widetilde{P}(S_t)}{dP(S_t)} = e^{-\frac{1}{\sigma^2}[\mu \cdot S_t - \frac{1}{2}\mu^2 t]}$$

$$d\widetilde{W}_t = dW_t - \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)dt, \quad X_t = -\frac{\mu}{\sigma}$$

(五)Girsanov 定理在 GBM 之應用

- 股價變動過程以下式描述之

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \quad t \in [0, \infty)$$

$$Y_t \sim N(\mu \cdot t, \sigma^2 \cdot t)$$

- 隨機變數 Y_t 之動差函數 M(λ)定義為

$$M(\lambda) = E[e^{Y_t \lambda}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Y_t \lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(Y_t - \mu t)^2}{\sigma^2 t}} dY_t$$

$$M(\lambda) = e^{\lambda \cdot \mu \cdot t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot t \cdot \lambda^2}$$

◆ S_t 與 S_u 之關聯可表為

$$S_t = S_u e^{Y_u + \int_u^t dY_s}$$

➢ 定義下式，

$$\Delta Y_t = \int_u^t dY_s \sim N(\mu(t-u), \sigma^2(t-u))$$

$$E\left[\frac{S_t}{S_u} \middle| S_u, u < t\right] = E\left[e^{\Delta Y_t} \mid S_u\right] = E\left[e^{\Delta Y_t}\right]$$

➢ 動差函數 M(λ)，在 λ=1 取值

$$E[e^{\Delta Y_t}] = M(1) = e^{\mu(t-u)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)}$$

$$E[S_t \mid S_u, u < t] = S_u e^{\mu(t-u)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)} \quad \text{.................................(6.2.3)}$$

- 定義股價折現過程，Z_t，如下

$$Z_t = e^{-rt} S_t$$

  - 在 P 測度下，不為鞅性的
  - 轉換到新測度下，使之成為鞅性的

$$E^{\tilde{P}}[Z_t \mid Z_u, u < t] = Z_u$$

  - 在新測度下，Y_t，之分配為

$$N(\rho t, \sigma^2 t)$$

◆ 由(3)式可得下面之條件預期

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t-u)}S_t \mid S_u, u < t] = S_u e^{-r(t-u)} e^{\rho(t-u)+\frac{1}{2}\sigma^2(t-u)}$$

➢ 選擇適當之 ρ 值，使得股價折現過程為鞅性的

$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$E^{\tilde{P}}[e^{-r(t-u)}S_t \mid S_u, u < t] = S_u$$

$$E^{\tilde{P}}[e^{-rt}S_t \mid S_u, u < t] = e^{-ru}S_u$$

◆ 在新測度下，Y_t，之分配為

$$N\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \quad \sigma^2 t\right)$$

◆ P 測度下，S_t的隨機微分方程為

$$S_t = S_0 e^{Y_t}, \quad t \in [0, \infty)$$

$$dY_t = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t$$

➢ 由 Ito's Lemma

$$dS_t = S_0 e^{Y_t}[\mu \cdot dt + \sigma \cdot dW_t] + [S_0 e^{Y_t}]\frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

$$dS_t = \left[\mu S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t\right]dt + \sigma S_t dW_t$$

◆ 新測度下，S_t的隨機微分方程為

$$dS_t = \left[\rho \cdot S_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S_t\right]dt + \sigma \cdot S_t \cdot d\widetilde{W}_t$$

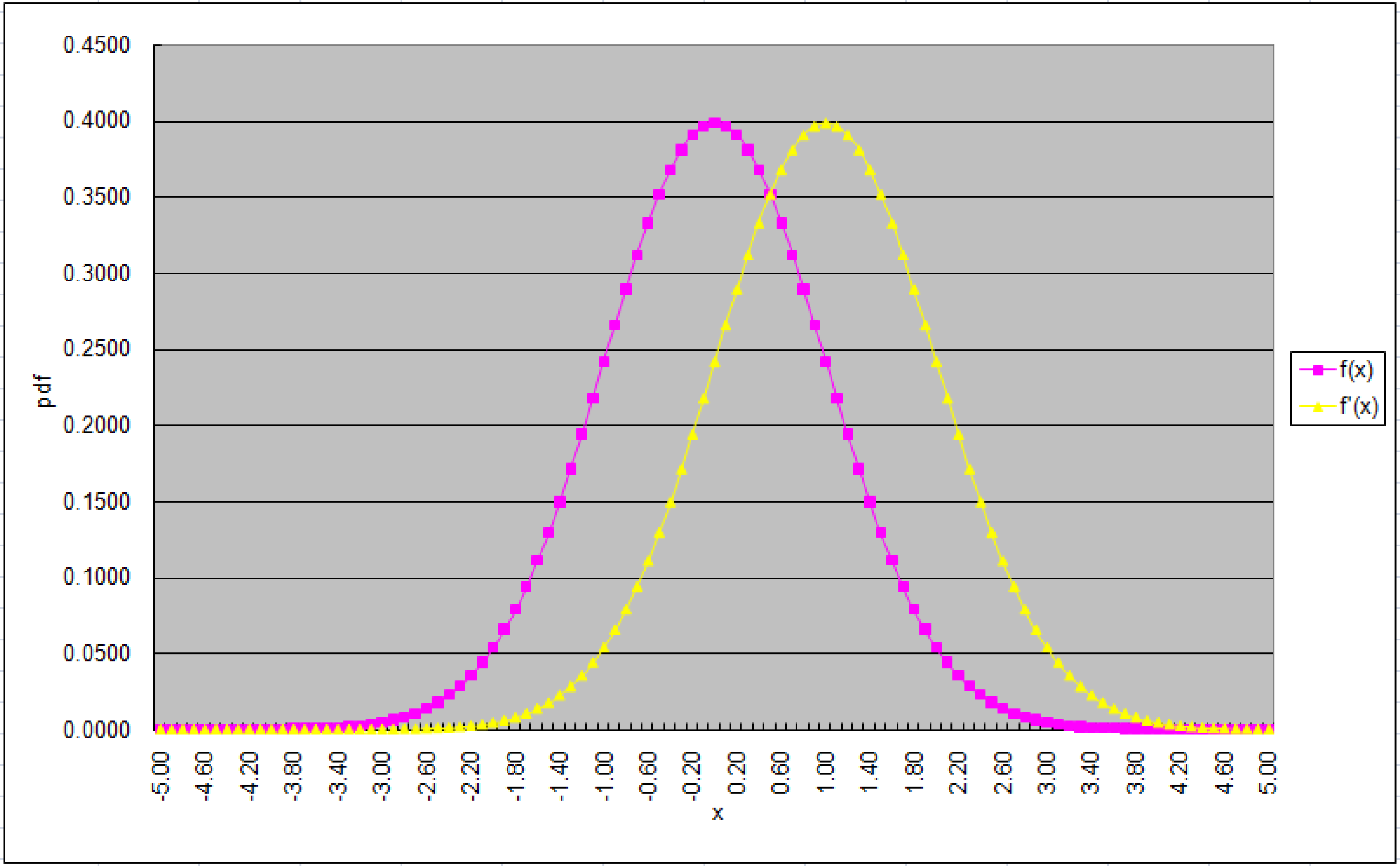
$$\rho = r - \frac{1}{2}\sigma^2$$

$$dS_t = r \cdot S_t \cdot dt + \sigma \cdot S_t \cdot d\widetilde{W}_t$$

$$d\widetilde{W}_t = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} dt + dW_t$$

$$dX_t = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma} dt$$

◆ 不同測度的機率分配


0.4500
0.4000
0.3500
0.3000
0.2500
0.2000
0.1500
0.1000
0.0500
0.0000
pdf
-5.00
-4.60
-4.20
-3.80
-3.40
-3.00
-2.60
-2.20
-1.80
-1.40
-1.00
-0.60
-0.20
0.20
0.60
1.00
1.40
1.80
2.20
2.60
3.00
3.40
3.80
4.20
4.60
5.00
x
f(x)
f'(x)

◆ 此二測度的 Radon-Nikodym derivative