長天期結構型債券的分析

Analysis of Long-term Structured Notes

中華開發工業銀行

財務部 資深協理

董夢雲 博士

andydong@cdibank.com

目　錄

PART II：長天期 FX-Linked 結構債的分析

一、長天期外匯連結產品的產品規格

(一)契約規格

- 標的資產為 USD/JPY，為 Participating KO Accumulator，期初可收取權利金。
  - 名目金額：USD 3 百萬/每月。
  - 期限：六個月。
  - 比價日：每日比價，每月交割。
  - 類型：1 比 1，沒有槓桿。
  - 最佳執行匯率：126.00。
  - KO 阻隔匯率：122.00。

- 只要標的資產匯率不低於或等於 KO 阻格匯率，在每一交割日，客戶可以下面遠期匯率賣出 USD 3 百萬。
  - 遠期匯率 = [126 * n1 / N + 相關遠期匯率 * n2 / N]
    - n1：比價匯率介於 122-126 間的營業日天數。
    - n2：比價匯率等於或大於 126 的營業日天數。
    - N：總營業日天數。
  - USD/JPY 相關市場資訊如下：
    - Spot Ref：124.00。
    - 1mth Fwd：123.51，2mth Fwd：123.02，3mth Fwd：122.55。
    - 4mth Fwd：122.08，5mth Fwd：121.62，6mth Fwd：121.20。
- 如果任何時點，標的資產匯率等於或低於 KO 阻隔匯率，所有之前累積的賣出部位都將出局失效。之後客戶與銀行之間也沒有任何義務。

二、Volatility Surface

(一)股票市場

◆ Google's Smile Curve，2006/7/6。

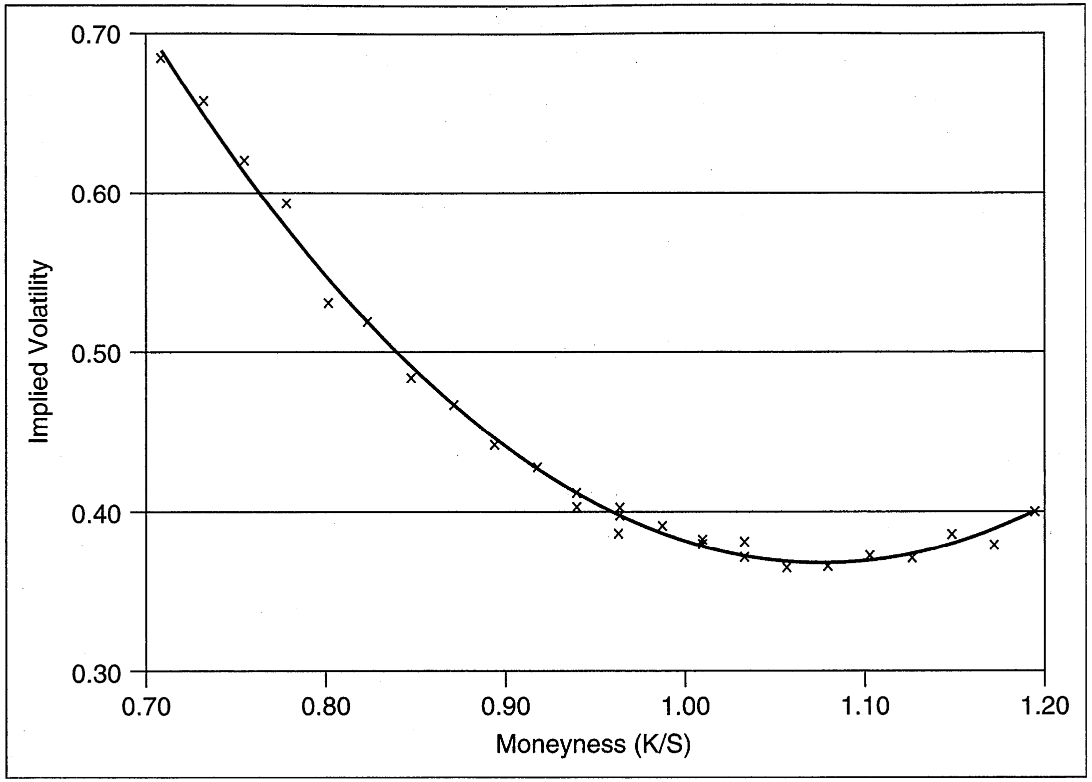


FIGURE 10.3 Implied Volatility Curve for Google Option Prices

Source: finance.yahoo.com

◆ Market Quotation

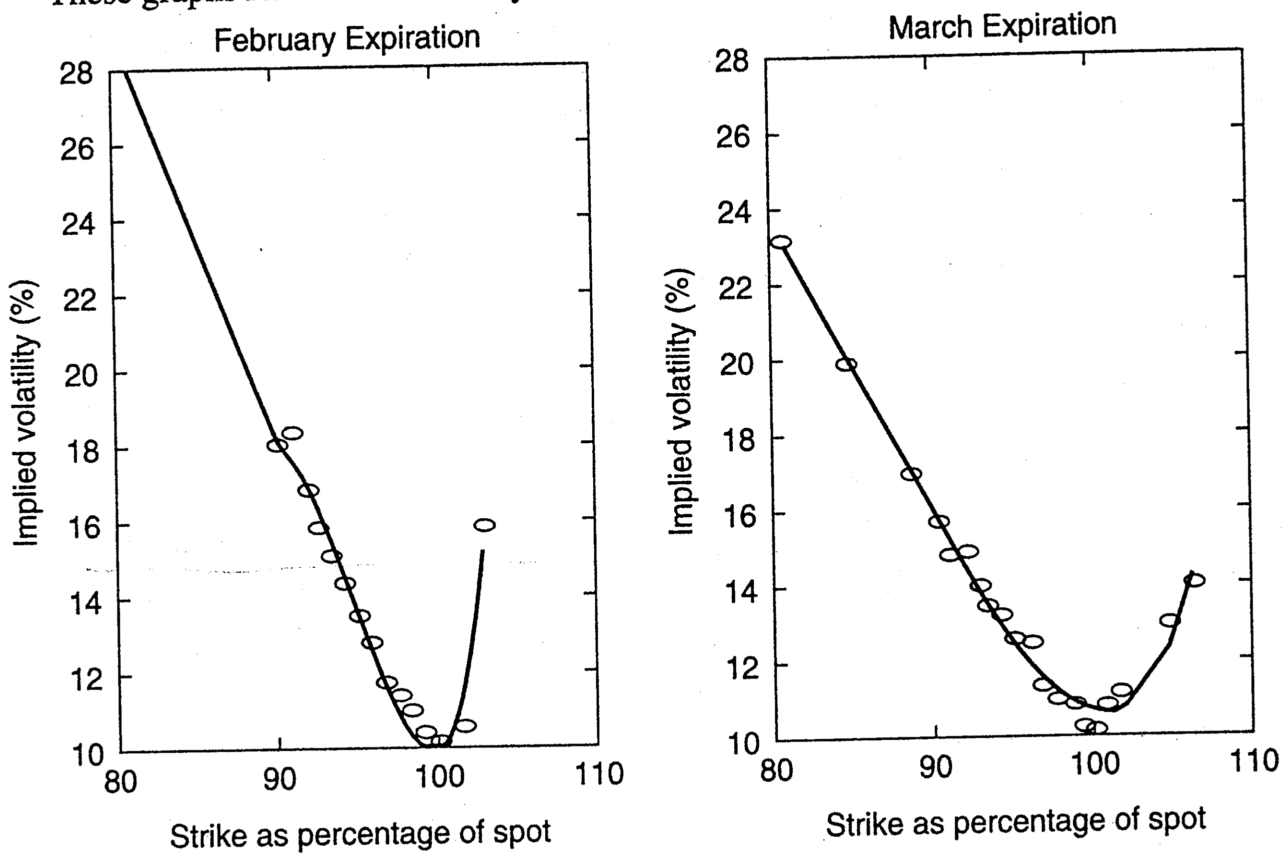
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Implied Volatility Using Call and Put Prices on Google**						
3								
4		Date:	6-Jul-06					
5		Exp. Date:	21-Jul-06	Risk-Free Rate (r)	0.05185			
6		Maturity (T)	0.041096	Spot Price (S)	423.19			
7					Implied Volatility			
8		Strike	Market	Moneyness	Bisection	Newton-	Newton-Raphson	Newton-Raphson
9		Price (K)	Price*	K/S	Method	Raphson	Vega	Bisection
10								
11	**PUTS**	300	0.10	0.709	0.6842	0.6842	0.6842	0.6842
12		310	0.15	0.733	0.6566	0.6566	0.6566	0.6566
13		320	0.20	0.756	0.6197	0.6197	0.6197	0.6197
14		330	0.30	0.780	0.5928	0.5928	0.5928	0.5928
15		340	0.30	0.803	0.5311	0.5311	0.5311	0.5311
16		350	0.55	0.827	0.5205	0.5205	0.5205	0.5205
17		360	0.75	0.851	0.4838	0.4838	0.4838	0.4838
18		370	1.25	0.874	0.4669	0.4669	0.4669	0.4669
19		380	1.91	0.898	0.4420	0.4420	0.4420	0.4420
20		390	3.10	0.922	0.4267	0.4267	0.4267	0.4267
21		400	4.90	0.945	0.4120	0.4120	0.4120	0.4120
22		410	7.50	0.969	0.3974	0.3974	0.3974	0.3974
23		420	11.40	0.992	0.3918	0.3918	0.3918	0.3918
24		430	16.30	1.016	0.3815	0.3815	0.3815	0.3815
25		440	22.40	1.040	0.3714	0.3714	0.3714	0.3714
26		450	29.70	1.063	0.3643	0.3643	0.3643	0.3643
27								
28	**CALLS**	400	28.70	0.945	0.4027	0.4027	0.4027	0.4027
29		410	21.70	0.969	0.4019	0.4019	0.4019	0.4019
30		420	15.40	0.992	0.3894	0.3894	0.3894	0.3894
31		430	10.30	1.016	0.3783	0.3783	0.3783	0.3783
32		440	6.80	1.040	0.3802	0.3802	0.3802	0.3802
33		450	3.90	1.063	0.3663	0.3663	0.3663	0.3663
34		460	2.25	1.087	0.3653	0.3653	0.3653	0.3653
35		470	1.35	1.111	0.3730	0.3730	0.3730	0.3730
36		480	0.70	1.134	0.3705	0.3705	0.3705	0.3705
37		490	0.45	1.158	0.3857	0.3857	0.3857	0.3857
38		500	0.20	1.182	0.3783	0.3783	0.3783	0.3783
39		510	0.15	1.205	0.4006	0.4006	0.4006	0.4006
40		* Denotes end-of-day closing prices						

FIGURE 10.2 Implied Volatilities from Google Call Prices
Source: finance.yahoo.com

◆ Index's Smile Curve

FIGURE 8.4.1

The volatility smile for the S&P 500 index for two different expiration dates
These graphs reflect the volatility smile on January 24, 1996.



(二)外匯市場報價資訊

- 外匯選擇權市場的流動性很高，即使長天期的契約亦是如此，下面資訊可由市場取得。
  - At-The-Money，ATM，的波動性，
  - 25ΔCall 與 Put 的 Risk Reversal，RR，
  - 25ΔWings 的 Vega-Weighted Butterfly，VWB。
- 由上面資訊，我們可推導出三個基本的隱含波動性，
  - 使用這三個波動性，我們可建構出整個 Smile。
- 市場資訊可分別如下取得，
  - Currency Volatility Quote: Bloomberg: XOPT
  - 美元 LIBOR: RT: LIBOR01
  - NDF Swap Point: RT: TRADNDF

◆ Currency Volatility Quote: Bloomberg: XOPT

XOPT

<HELP> for explanation. P167c Curncy **OVDV**
Enter 1<GO> to Save

Currency Volatility Surface

Save | Send | Download | Options | 3D Graph | * Bloomberg (BGN) USDCNY

Currencies: USD-CNY Date: 5/ 7/08
USD Calls/Puts Deltas Format: 1 RR/BF
Calendar: 3 Weekends Side: 1 Bid/Ask

EXP	ATM(50D)		25D RR		25D BF		10D RR		10D BF	
	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask	Bid	Ask
1W	2.050	4.155	-2.170	0.545	-0.930	1.175	-4.140	1.120	-0.625	1.475
2W	2.360	3.980	-1.845	0.210	-0.645	0.965	-3.475	0.430	-0.255	1.355
3W	2.570	3.970	-1.715	0.055	-0.525	0.870	-3.200	0.125	-0.100	1.295
1M	3.245	3.745	-1.150	-0.520	-0.070	0.425	-2.130	-0.985	0.365	0.865
2M	3.480	3.980	-1.215	-0.590	-0.050	0.445	-2.260	-1.115	0.440	0.940
3M	3.785	4.135	-1.160	-0.725	0.040	0.390	-2.135	-1.335	0.550	0.900
4M	4.060	4.470	-1.295	-0.785	0.015	0.420	-2.320	-1.395	0.525	0.935
6M	4.555	4.980	-1.465	-0.930	0.005	0.430	-2.455	-1.485	0.515	0.940
9M	4.940	5.320	-1.510	-1.035	0.055	0.435	-2.580	-1.720	0.595	0.970
1Y	5.420	5.720	-1.440	-1.060	0.110	0.410	-2.610	-1.930	0.665	0.965
18M	5.790	6.255	-1.580	-1.000	0.045	0.505	-2.810	-1.755	0.685	1.150
2Y	6.760	7.260	-1.770	-1.140	0.015	0.515	-3.025	-1.885	0.790	1.290
5Y	7.870	9.620	-2.825	-0.625	-0.565	1.180	-4.905	-0.885	0.430	2.175

5.57.

*Default RR = USD Call - USD Put

◆ 美元 LIBOR: RT: LIBOR01

REUTERS BBA LIBOR RATES LIBOR01
BRITISH BANKERS ASSOCIATION INTEREST SETTLEMENT RATES Alternative to <3750>
[06/05/08] RATES AT 11:00 LONDON TIME 06/05/2008 Disclaimer <LIBORDISC>
BBA Guide <BBAMENU>

	USD	GBP	CAD	EUR	JPY	EUR 365
O/N	2.36500	5.10000	3.02667	4.07750	SN 0.55625	4.13413
1WK	2.58500	5.11938	3.09667	4.26250	0.59875	4.32170
2WK	2.63000	5.24750	3.12500	4.30188	0.62000	4.36163
1MO	2.67375	5.45000	3.21000	4.38625	0.67375	4.44717
2MO	2.72375	5.67750	3.33000	4.68000	0.81656	4.74500
3MO	2.75750	5.80563	3.38833	4.85563	0.92125	4.92307
4MO	2.79125	5.80563	3.40000	4.86688	0.94406	4.93448
5MO	2.83625	5.80500	3.40000	4.87313	0.96406	4.94081
6MO	2.87625	5.80625	3.40500	4.88188	0.98375	4.94968
7MO	2.89875	5.80625	3.43333	4.89063	1.00625	4.95856
8MO	2.91813	5.80563	3.43667	4.90375	1.02625	4.97186
9MO	2.94000	5.80438	3.45500	4.91563	1.04500	4.98390
10MO	2.96375	5.80250	3.49333	4.92813	1.06438	4.99658
11MO	2.99000	5.80188	3.51500	4.94375	1.08313	5.01241
12MO	3.01500	5.80188	3.55000	4.95750	1.10375	5.02635

<0#LIBORSUPERRICS> RICs for above <0#LIBORRICS> Contributor RICs

◆ NDF Swap Point: RT: TRADNDF

15:18 07MAY08 Tradition Asia Ltd SP01881 TRADNDF
ASIAN NON-DELIVERABLE FORWARDS

	FWD TWD USD/TWD	FWD CNY USD/CNY	OUT PHP USD/PHP	OUT INR USD/INR	OUT KRW USD/KRW
SP	30.495	6.9858	42.39/42.40	41.16/41.17	****** /******
1W	-0.000/+0.000	6.9800 /6.9850	42.42/42.45	41.19/41.22	****** /******
1M	-0.060/-0.030	6.9700 /6.9750	42.54/42.59	41.32/41.37	****** /******
2M	-0.140/-0.110	6.9370 /6.9420	42.66/42.71	41.39/41.44	****** /******
3M	-0.245/-0.215	6.9000 /6.9050	42.79/42.84	41.43/41.48	****** /******
6M	-0.455/-0.415	6.7670 /6.7750	43.11/43.21	41.62/41.72	****** /******
9M	-0.680/-0.630	6.6150 /6.6250	43.44/43.54	41.74/41.84	****** /******
1Y	-0.850/-0.800	6.4680 /6.4730	43.72/43.82	41.89/41.99	****** /******

CONTACT : DANNY / PAULINE TEL: 852-2521-2303

HKG DEALING : TRND
SGP DEALING : TRSA

◆ UBS Volatility Quote Page。

http://ibol01.ibb.ubs.com - USDJPY VolCast from UBS Investment Bank - Microsoft Internet Explorer

Ccy pair	USDJPY
JPY per USD	121.76
Update date	11-Jul-2007
Update time	02:05:08
Cut time	TKY
Face	USD

Connect Status:
Bid / Ask
Mid price
Select pair (200 loaded)

- Vol Grid
- RiskReversals
- Strangles
- ButterFlys

HiLoView
VolHistory
ProbView
VolView

VOL	ON	1W	2W	3W	1M	6W	2M	3M	4M	6M	9M	1Y	2Y
Prem Ccy	12-Jul-2007	18-Jul-2007	25-Jul-2007	01-Aug-2007	09-Aug-2007	22-Aug-2007	11-Sep-2007	11-Oct-2007	09-Nov-2007	10-Jan-2008	10-Apr-2008	10-Jul-2008	09-Jul-2009
USD	Thu:1	Wed:7	Wed:14	Wed:21	Thu:29	Wed:42	Tue:62	Thu:92	Fri:121	Thu:183	Thu:274	Thu:365	Thu:729
10D USD C	11.69	7.42	7.20	6.90	6.65	6.48	6.41	6.49	6.51	6.53	6.51	6.57	6.49
15D USD C	11.78	7.48	7.23	6.92	6.67	6.50	6.43	6.48	6.50	6.52	6.52	6.56	6.39
20D USD C	11.97	7.63	7.35	7.04	6.79	6.63	6.57	6.62	6.59	6.56	6.53	6.54	6.38
25D USD C	12.12	7.75	7.45	7.12	6.87	6.72	6.65	6.67	6.65	6.62	6.60	6.60	6.46
35D USD C	12.50	8.06	7.71	7.38	7.13	6.97	6.91	6.92	6.89	6.87	6.85	6.85	6.81
ATM	**13.00**	**8.50**	**8.10**	**7.75**	**7.50**	**7.35**	**7.30**	**7.30**	**7.28**	**7.25**	**7.25**	**7.25**	**7.15**
35D USD P	13.65	9.08	8.63	8.27	8.02	7.88	7.83	7.84	7.83	7.81	7.82	7.83	7.59
25D USD P	14.37	9.75	9.25	8.87	8.62	8.49	8.45	8.47	8.49	8.48	8.50	8.52	8.36
20D USD P	14.78	10.12	9.60	9.22	8.98	8.85	8.82	8.86	8.88	8.87	8.91	8.95	8.89
15D USD P	15.27	10.58	10.02	9.63	9.38	9.25	9.22	9.27	9.34	9.39	9.47	9.55	9.54
10D USD P	15.81	11.08	10.50	10.10	9.85	9.72	9.69	9.76	9.95	10.13	10.27	10.41	10.63

Risk Reversals

10D R/R	4.20P	3.63P	3.28P	3.19P	3.20P	3.23P	3.28P	3.27P	3.43P	3.60P	3.75P	3.84P	4.13P
15D R/R	3.45P	3.09P	2.79P	2.71P	2.71P	2.75P	2.79P	2.79P	2.84P	2.86P	2.94P	2.98P	3.15P
20D R/R	2.83P	2.50P	2.25P	2.19P	2.18P	2.22P	2.26P	2.25P	2.29P	2.31P	2.37P	2.40P	2.51P
25D R/R	**2.24P**	**1.99P**	**1.80P**	**1.74P**	**1.75P**	**1.78P**	**1.80P**	**1.80P**	**1.84P**	**1.85P**	**1.90P**	**1.92P**	**1.90P**
35D R/R	1.15P	1.02P	0.91P	0.89P	0.89P	0.90P	0.92P	0.91P	0.94P	0.95P	0.96P	0.98P	0.79P

Strangles

10D Strg	13.75	9.25	8.85	8.50	8.25	8.10	8.05	8.12	8.23	8.33	8.39	8.49	8.56
15D Strg	13.52	9.03	8.63	8.28	8.03	7.88	7.83	7.88	7.92	7.96	7.99	8.06	7.97
20D Strg	13.37	8.87	8.48	8.13	7.88	7.74	7.69	7.74	7.74	7.71	7.72	7.75	7.64
25D Strg	**13.25**	**8.75**	**8.35**	**8.00**	**7.75**	**7.60**	**7.55**	**7.57**	**7.57**	**7.55**	**7.55**	**7.56**	**7.41**
35D Strg	13.08	8.57	8.17	7.82	7.57	7.43	7.37	7.38	7.36	7.34	7.34	7.34	7.20

Butterflys

10D Fly	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.75	0.82	0.95	1.08	1.14	1.24	1.41
15D Fly	0.52	0.53	0.53	0.53	0.53	0.52	0.53	0.58	0.64	0.71	0.74	0.81	0.82
20D Fly	0.37	0.37	0.38	0.38	0.38	0.39	0.39	0.44	0.46	0.46	0.47	0.50	0.49
25D Fly	**0.25**	**0.25**	**0.25**	**0.25**	**0.25**	**0.25**	**0.25**	**0.27**	**0.29**	**0.30**	**0.30**	**0.31**	**0.26**
35D Fly	0.08	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.07	0.08	0.09	0.09	0.09	0.09	0.05

網際網路

◆ 在外匯市場中，所謂 ATM 波動性，是指使 Straddle 策略為 0Δ 的執行價格時的波動性。

- Straddle 策略為 Call(K,T)+Put(K,T)。
- 此 Straddle 策略因為 0Δ，因此無需 Delta Hedge。
- 由於 $\Delta_C = -\Delta_P$，因此有下面關係，

$$e^{-r_f T}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_{ATM}}\right)+\left(r_d - r_f + \frac{\sigma_{ATM}^2}{2}\right)T}{\sigma_{ATM}\sqrt{T}}\right) = e^{-r_f T}\Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_{ATM}}\right)+\left(r_d - r_f + \frac{\sigma_{ATM}^2}{2}\right)T}{\sigma_{ATM}\sqrt{T}}\right) \quad \text{............(2.1)}$$

  - ✓ σ_{ATM} 為 ATM 的波動性，K_{ATM} 為 ATM 的值型價格。
  - ✓ Φ 為常態分配的累積機率密度函數。

- 由(2.1)可得，

$$K_{ATM} = S_0 e^{\left(r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma_{ATM}^2\right)T} \quad \text{..(2.2)}$$

- RR 為同時買入一個 Call 與賣出一個 Put，兩者有對稱的Δ。
  - RR 通常以$\sigma_{25\Delta c}$與$\sigma_{25\Delta p}$的差額報價。因此，我們有下面關係，

$$\sigma_{RR}=\sigma_{25\Delta c}-\sigma_{25\Delta p} \quad \text{(2.3)}$$

- VWB 為賣出一個 ATM 的 Straddle，同時買入一個 25Δ的 Strangle。
  - 為達到 Vega-weighted，前者的數量必需小於後者的數量。
    - ✓ 因為 Straddle 的 Vega 大於 Strangle 的 Vega。
  - VWB 的波動性關係可表示為，

$$\sigma_{VWB}=\frac{\sigma_{25\Delta c}+\sigma_{25\Delta p}}{2}-\sigma_{ATM} \quad \text{(2.4)}$$

◆ 由(2.3)與(2.4)式，可求得$\sigma_{25\Delta c}$與$\sigma_{25\Delta p}$這兩個隱含波動性如下，

$$\sigma_{25\Delta c} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} + \frac{1}{2}\sigma_{RR} \quad \text{(2.5)}$$

$$\sigma_{25\Delta p} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} - \frac{1}{2}\sigma_{RR} \quad \text{(2.6)}$$

◆ 利用(2.5)與(2.6)式，可求得$K_{25\Delta c}$如下式，

$$e^{-r_f T}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_{25\Delta c}}\right) + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma_{25\Delta c}^2}{2}\right)T}{\sigma_{25\Delta c}\sqrt{T}}\right) = 0.25$$

$$K_{25\Delta c} = S_0 e^{-\alpha\sigma_{25\Delta c}\sqrt{T} + \left(r_d - r_f + \frac{1}{2}\sigma_{25\Delta c}^2\right)T} \quad \text{(2.7)}$$

$$\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}e^{r_f T}\right)$$

◆ $K_{25\Delta p}$如下式，

$$-e^{-r_f T}\Phi\left(-\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K_{25\Delta p}}\right)+\left(r_d-r_f+\frac{\sigma_{25\Delta p}^2}{2}\right)T}{\sigma_{25\Delta p}\sqrt{T}}\right)=-0.25$$

$$K_{25\Delta p}=S_0 e^{-\alpha\sigma_{25\Delta p}\sqrt{T}+\left(r_d-r_f+\frac{1}{2}\sigma_{25\Delta p}^2\right)T} \quad \text{...(2.8)}$$

$$\alpha=-\Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}e^{r_f T}\right)$$

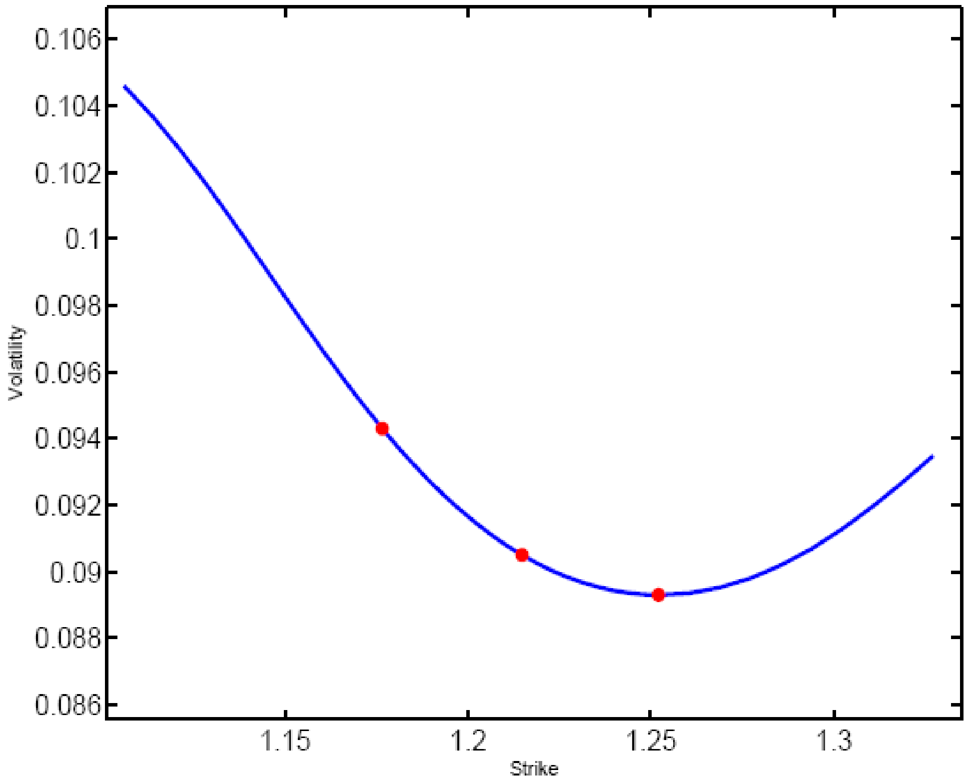
➢ 通常我們有 $\alpha>0$ 且 $K_{25\Delta p}<K_{ATM}<K_{25\Delta c}$ 。

(三)Smile Effect

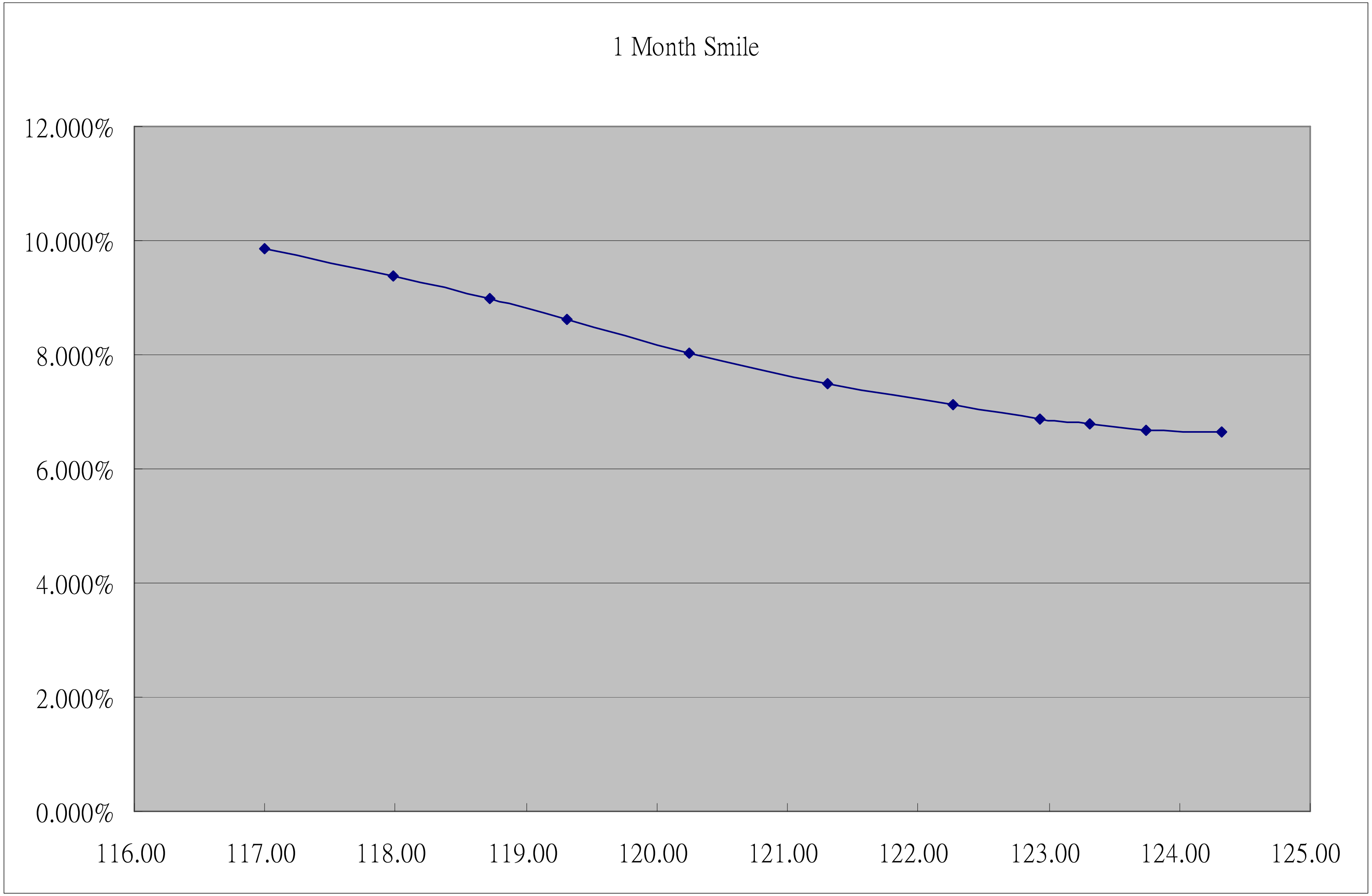
◆ 波動性 v.s.執行價格(EURUSD, 2005/7/1)

EURUSD data as of 1 July 2005

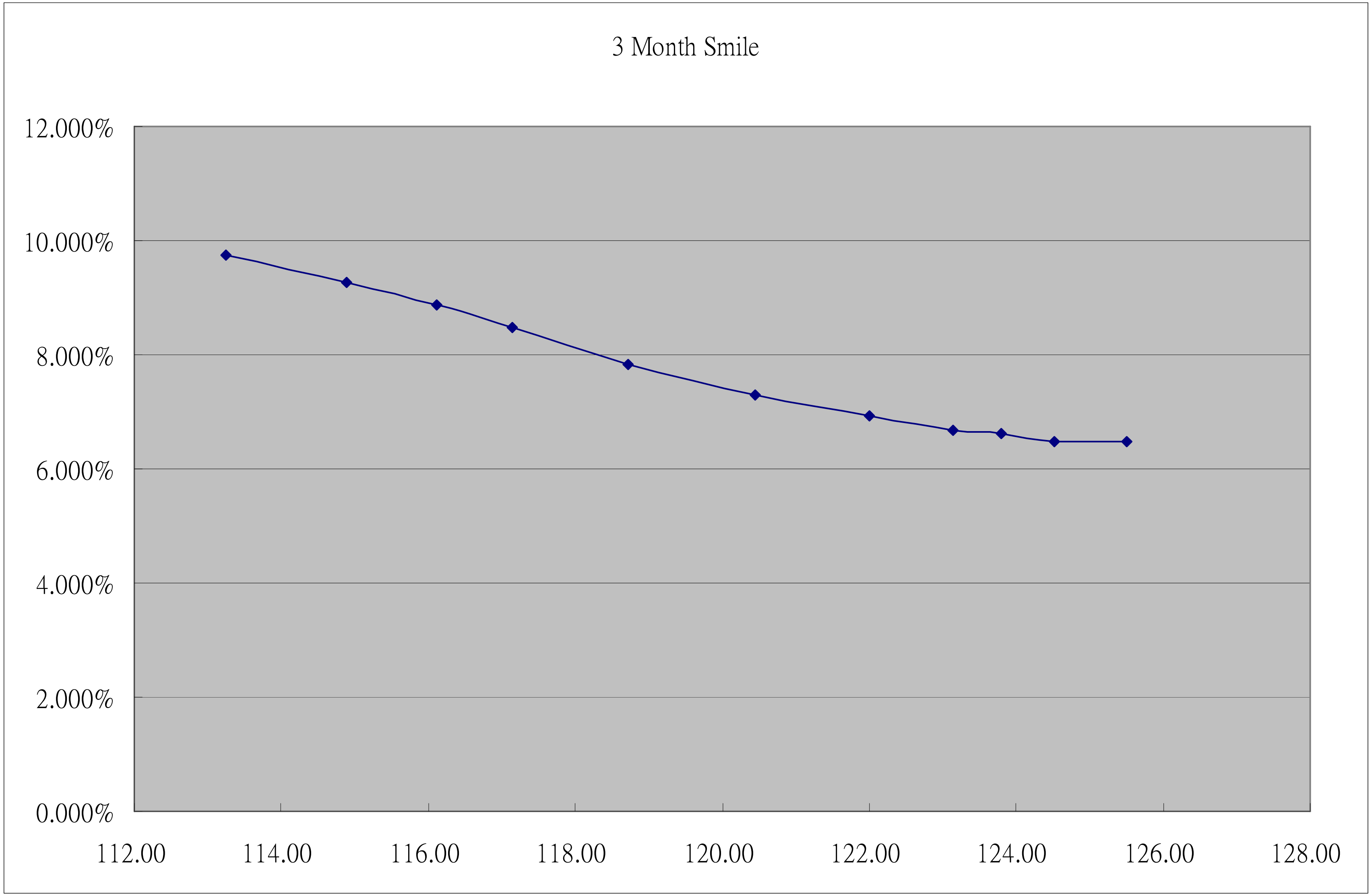
$$T = 3m \ (= 94/365y)$$
$$S_0 = 1.205$$
$$\sigma_{\mathrm{ATM}} = 9.05\%$$
$$\sigma_{\mathrm{RR}} = -0.50\%$$
$$\sigma_{\mathrm{VWB}} = 0.13\%$$
$$\Rightarrow$$
$$\sigma_{50\Delta c} = 8.93\%$$
$$\sigma_{25\Delta c} = 9.05\%$$
$$\sigma_{25\Delta p} = 9.43\%$$
$$K_{\mathrm{ATM}} = 1.2148$$
$$K_{25\Delta c} = 1.1767$$
$$K_{25\Delta p} = 1.2521$$



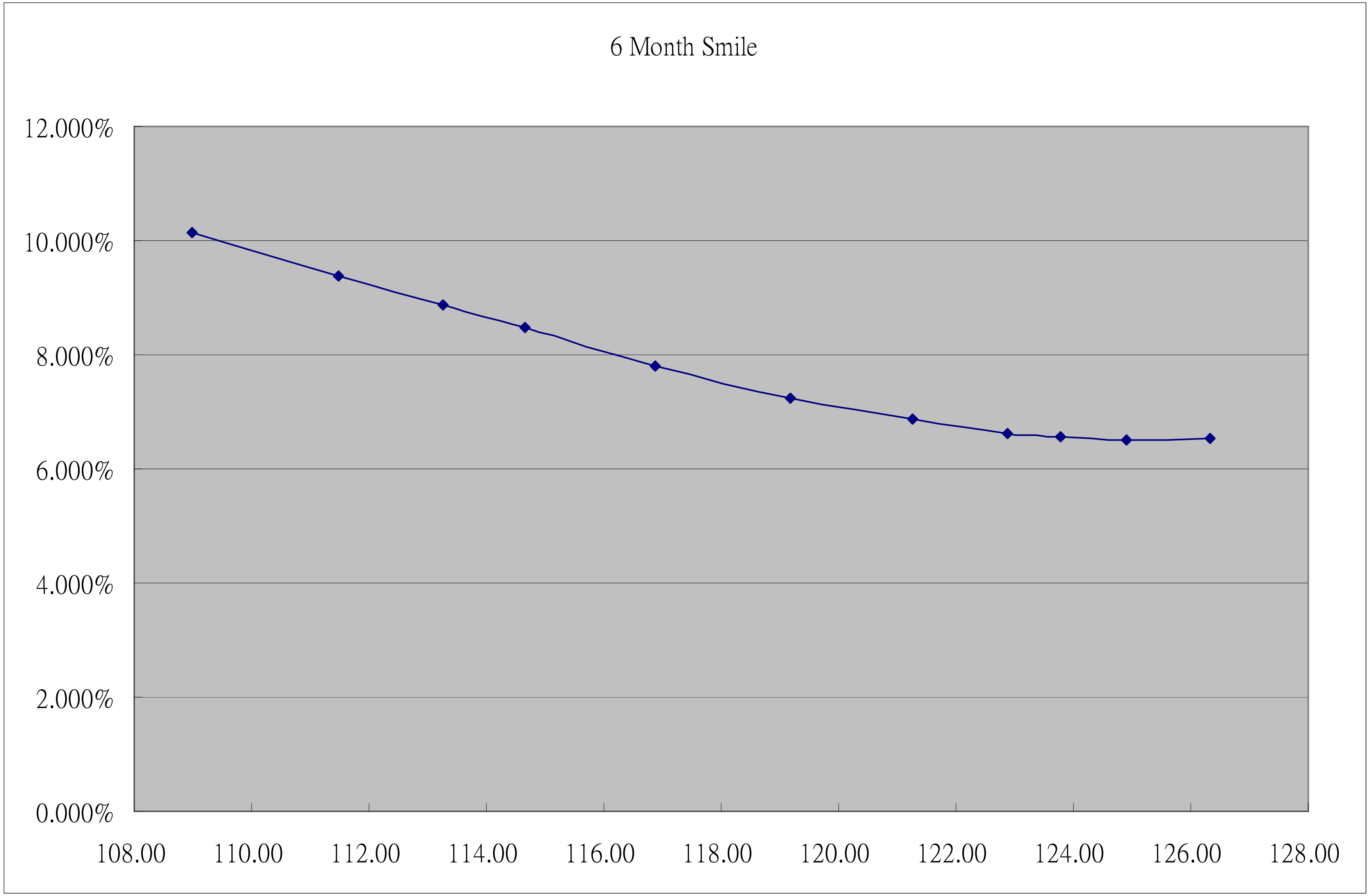
◆ 波動性 v.s.執行價格(USDJPY, 2007/7/11)



◆ 波動性 v.s.執行價格(USDJPY, 2007/7/11)

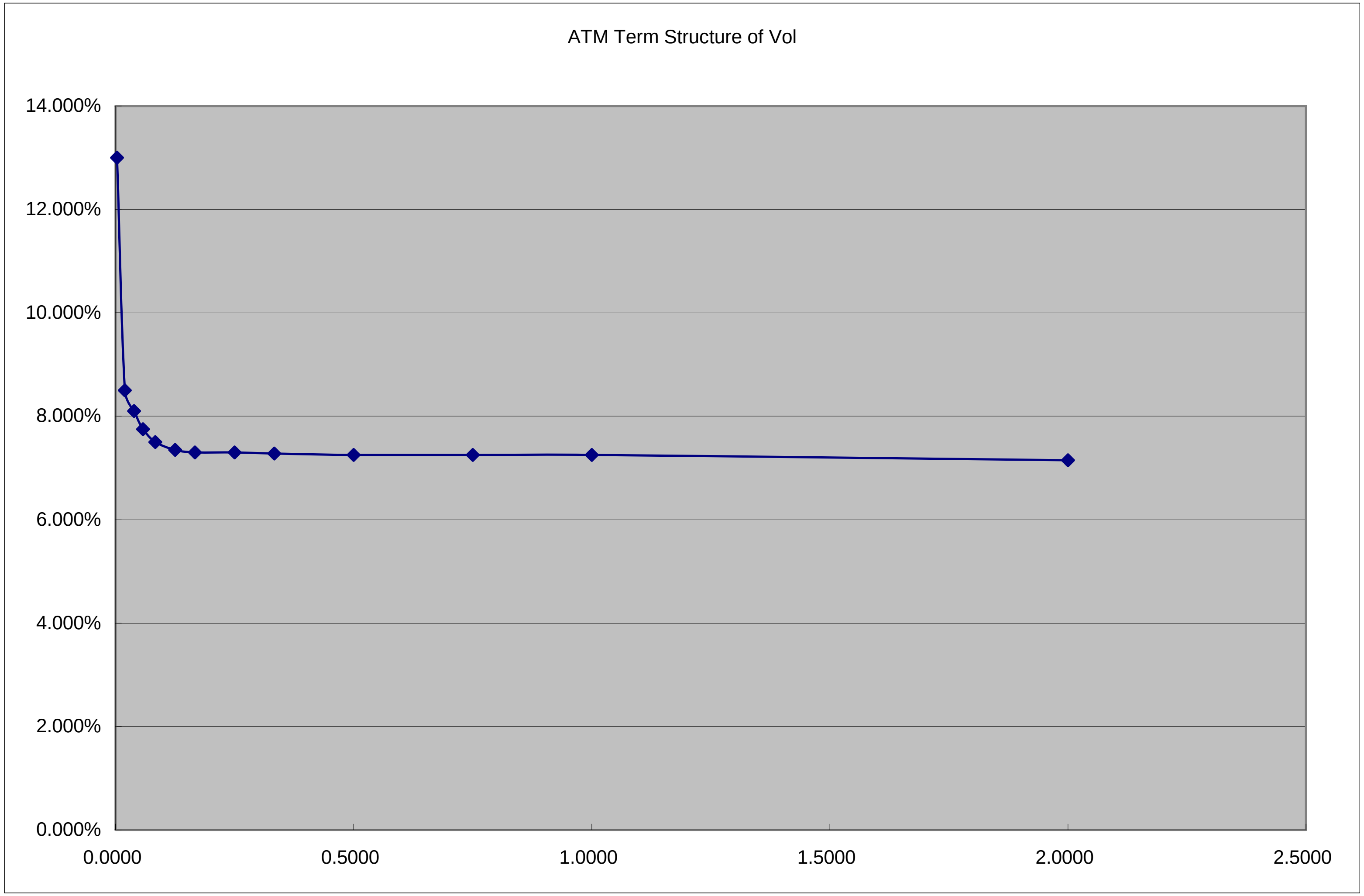


◆ 波動性 v.s.執行價格(USDJPY, 2007/7/11)



(四)Term Structure

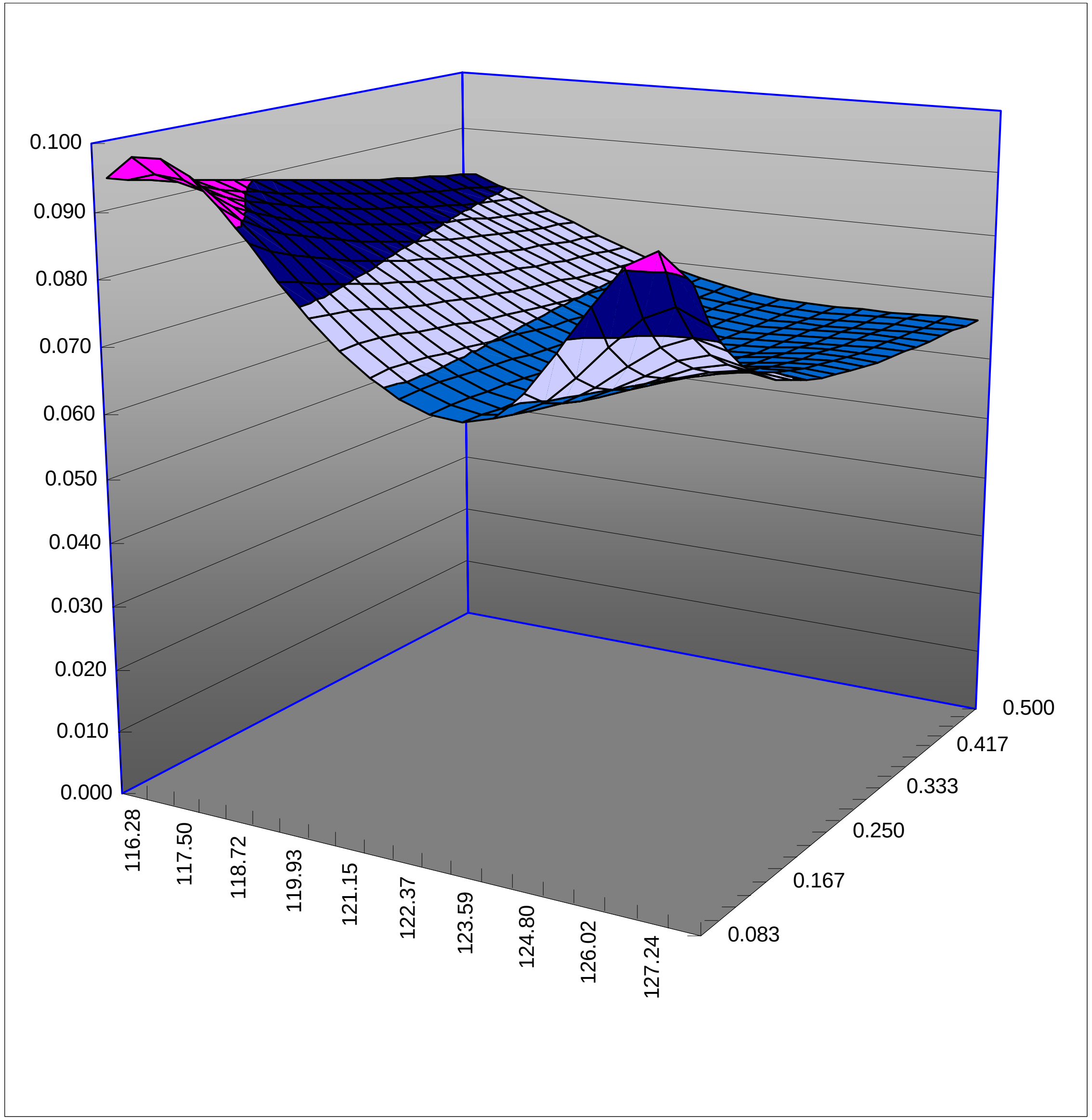
◆ ATM Term Structure of Vol(USDJPY, 2007/7/11)



(四)Surface

◆ 將不同時點的 Smile Curve 畫在同一立體圖上，形成一個曲面。

	0.083	0.104	0.125	0.146	0.167	0.188	0.208	0.229	0.250	0.271	0.292	0.313	0.333	0.354	0.375	0.396	0.417	0.438	0.458	0.479	0.500
116.28	0.095	0.094	0.094	0.093	0.092	0.091	0.091	0.090	0.089	0.089	0.088	0.087	0.087	0.086	0.085	0.085	0.084	0.084	0.083	0.083	0.082
116.89	0.099	0.096	0.094	0.092	0.091	0.090	0.089	0.089	0.088	0.087	0.086	0.085	0.085	0.084	0.083	0.083	0.082	0.082	0.081	0.081	0.080
117.50	0.099	0.095	0.093	0.091	0.090	0.089	0.088	0.087	0.086	0.085	0.084	0.084	0.083	0.082	0.082	0.081	0.081	0.080	0.080	0.079	0.079
118.11	0.097	0.093	0.091	0.089	0.088	0.087	0.086	0.085	0.084	0.083	0.082	0.082	0.081	0.080	0.080	0.079	0.079	0.078	0.078	0.077	0.077
118.72	0.093	0.090	0.088	0.087	0.085	0.084	0.083	0.082	0.082	0.081	0.080	0.079	0.079	0.078	0.078	0.077	0.077	0.076	0.076	0.076	0.075
119.32	0.088	0.086	0.085	0.084	0.083	0.082	0.081	0.080	0.079	0.078	0.078	0.077	0.077	0.076	0.076	0.075	0.075	0.074	0.074	0.074	0.073
119.93	0.083	0.082	0.081	0.080	0.079	0.079	0.078	0.077	0.076	0.076	0.075	0.075	0.074	0.074	0.074	0.073	0.073	0.073	0.072	0.072	0.072
120.54	0.078	0.078	0.078	0.077	0.076	0.076	0.075	0.074	0.074	0.073	0.073	0.073	0.072	0.072	0.072	0.071	0.071	0.071	0.071	0.070	0.070
121.15	0.074	0.075	0.074	0.074	0.073	0.073	0.072	0.072	0.072	0.071	0.071	0.071	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.069	0.069	0.069	0.069
121.76	0.071	0.071	0.071	0.071	0.071	0.070	0.070	0.070	0.070	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068
122.37	0.069	0.069	0.069	0.069	0.069	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067
122.98	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
123.59	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
124.20	0.068	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
124.80	0.072	0.070	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
125.41	0.078	0.074	0.071	0.070	0.069	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
126.02	0.085	0.078	0.075	0.073	0.071	0.070	0.069	0.069	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
126.63	0.091	0.083	0.078	0.075	0.073	0.072	0.071	0.070	0.069	0.068	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
127.24	0.093	0.085	0.080	0.077	0.074	0.072	0.071	0.070	0.069	0.069	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066
127.85	0.089	0.083	0.079	0.076	0.073	0.072	0.071	0.070	0.069	0.068	0.068	0.067	0.067	0.067	0.067	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066	0.066


0.100
0.090
0.080
0.070
0.060
0.050
0.040
0.030
0.020
0.010
0.000
116.28
117.50
118.72
119.93
121.15
122.37
123.59
124.80
126.02
127.24
0.500
0.417
0.333
0.250
0.167
0.083

三、Heston 93 模型與隨機波動性下的匯率行爲

(一)資產價格行為

◆ Steven Heston(1993)提出下面模型，

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \quad \text{......(3.1)}$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^2 \quad \text{......(3.2)}$$

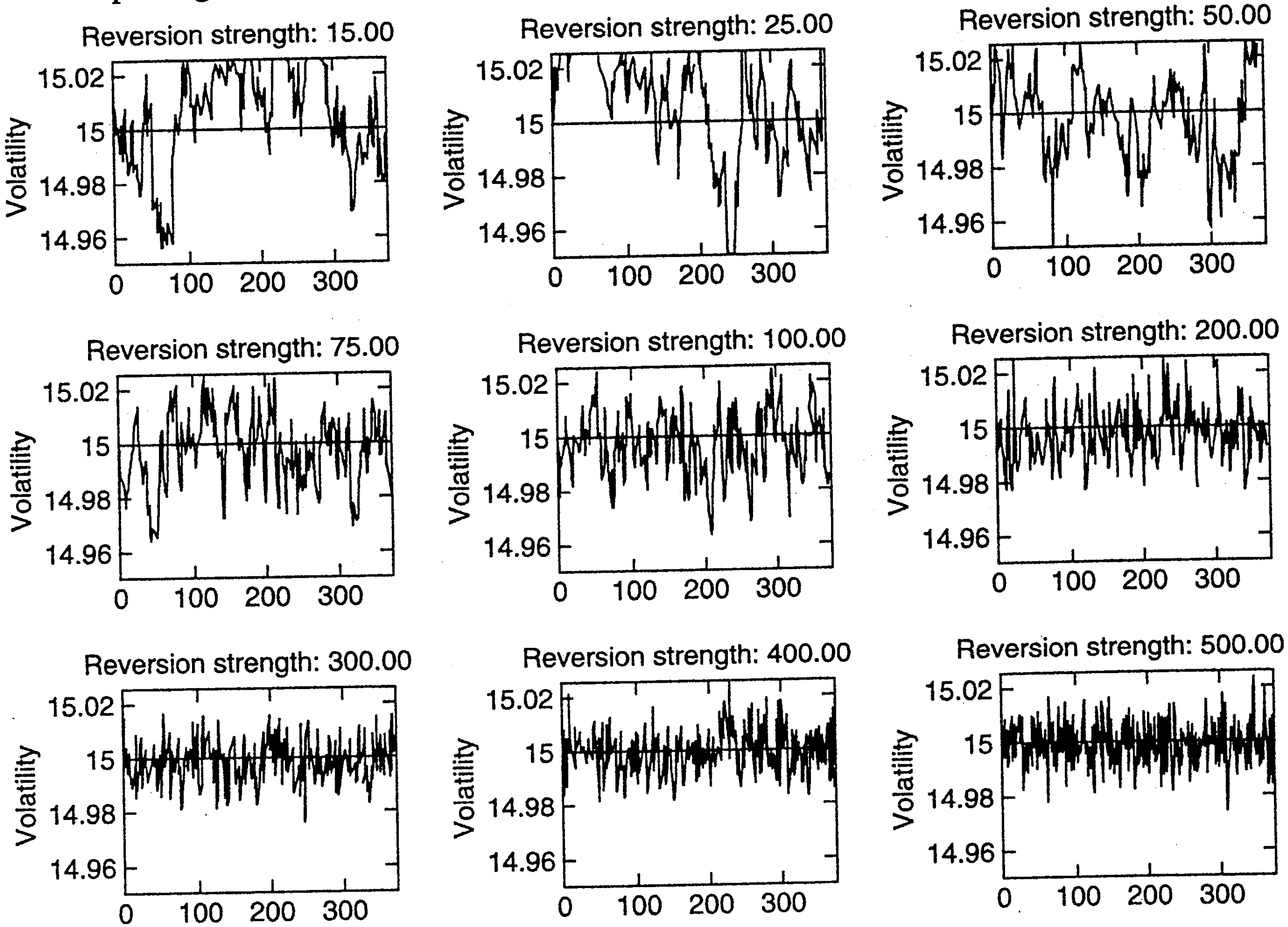
$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho \cdot dt \quad \text{......(3.3)}$$

- 其中 $\{S_t\}_{t\geq 0}$ 表價格過程，$\{V_t\}_{t\geq 0}$ 表波動性過程。
- 以 P 測度表示此真實世界下的機率測量。
- $\{W_t^1\}_{t\geq 0}$ 與 $\{W_t^2\}_{t\geq 0}$ 表真實世界中兩相關的布朗運動過程，相關係數為 ρ。
- $\{V_t\}_{t\geq 0}$ 為一平方根均數回覆過程，長期平均為 θ，回覆速率為 κ，σ 稱之為波動性之波動性。
- μ、ρ、θ、κ、σ 均為常數。

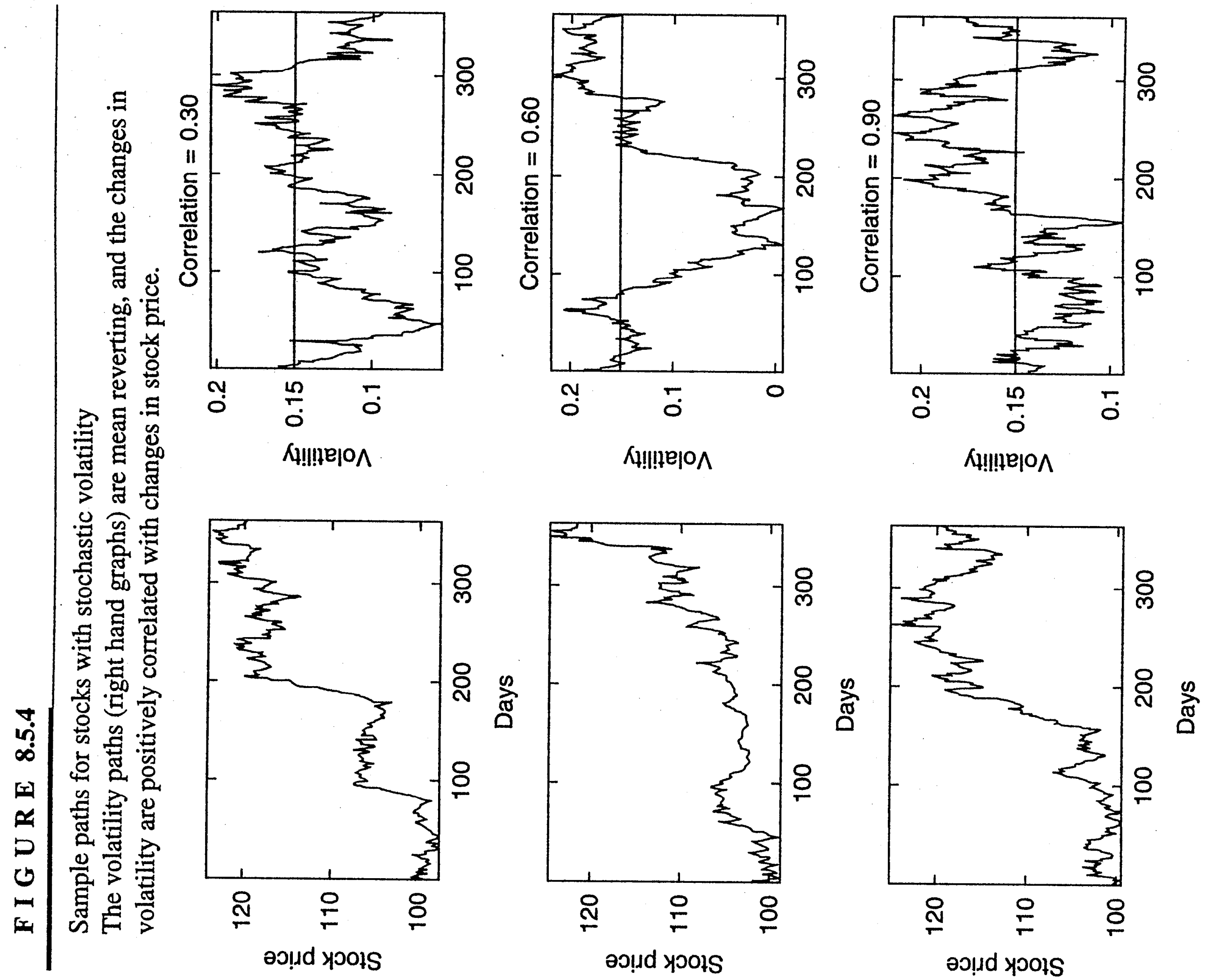
◆ Kappa 的效果

FIGURE 8.5.2

Computer-generated mean-reverting volatility processes

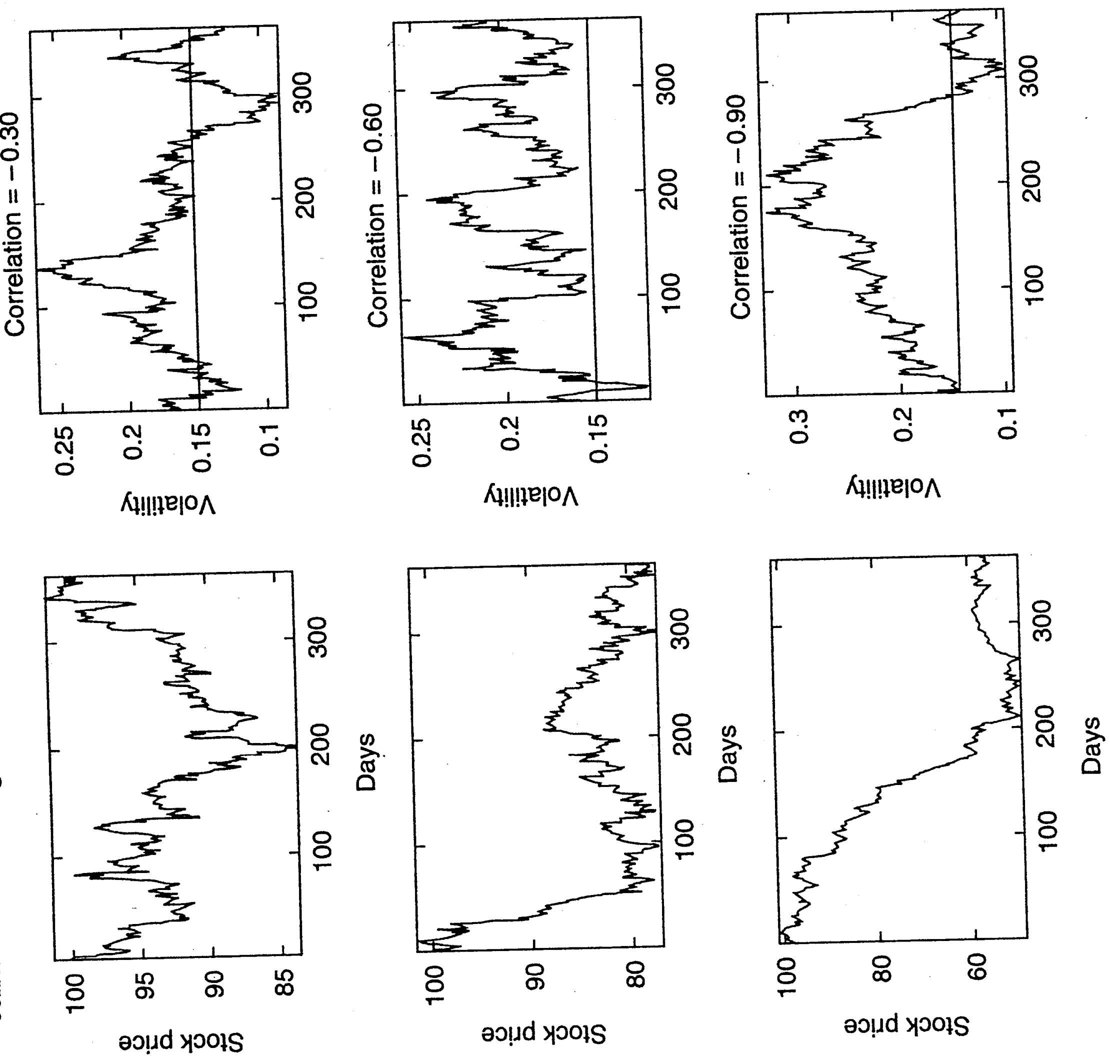


◆ 資產價格與波動性正相關



◆ 資產價格與波動性負相關

FIGURE 8.5.5 Sample paths for stocks with stochastic volatility
The volatility paths are mean reverting, and the changes in volatility are negatively correlated with changes in stock price.



(二)風險中立下的資產價格行為

◆ 根據風險中立的定價理論，一或有請求權的價格可以表示為折現償付之期望值，此預期乃在相當執性測度(Equivalent Martingale Measure)下求得。

$$C_t = E^Q\left[e^{-(T-t)}H(T)\right]$$

- 以 Q 測度表示此風險中立世界下的機率測量。
- $H(T)$ 表 T 時點之償付，r 表融資成本。

◆ 根據 Girsanov's 定理，P 測度與 Q 測度的關聯為，

$$dW^{*1}_t = dW^1_t + \eta_t \cdot dt$$

$$dW^{*2}_t = dW^2_t + \xi_t \cdot dt$$

- $\{W^{*1}_t\}_{t\geq 0}$ 與 $\{W^{*2}_t\}_{t\geq 0}$ 表風險中立世界中兩相關的布朗運動過程，相關係數為 ρ。
- η_t 為 market price of risk，ξ_t 為 market price of volatility risk，可由下式求得，

$$\eta_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \text{，} \xi_t = \xi(S,V,t) = k\sqrt{V}$$ ，k 為常數。

- 定義參數 λ_t 如下，

$$\xi_t \sigma \sqrt{V_t} = k\sigma V_t = \lambda_t$$

- 則我們有下面關聯，

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t (\eta_s{}^2 + \xi_s{}^2) ds - \int_0^t \eta_s dZ_s^1 - \int_0^t \xi_s dZ_s^2 \right\}$$

◆ 在 Q 測度下，(3.1)、(3.2)、(3.3)式成為，

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^{*1} \quad \text{......(3.4)}$$

$$dV_t = \kappa^*(\theta^* - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^{*2} \quad \text{......(3.5)}$$

$$dZ_t^1 dZ_t^2 = \rho \cdot dt \quad \text{......(3.6)}$$

- 其中，$\kappa^* = \kappa + \lambda$，$\theta^* = \dfrac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$。
- 由於我們所在意的為評價問題，因此所處理的測度為 Q 測度。
  - ✓ 後面的市場校準也是求得 Q 測度下的參數。
  - ✓ 參數 λ_t 的數值並不是重要的，因為已經吸收在 κ*與 θ*中，沒有明白的出現在(3.4)、(3.5)、(3.6)。

四、Heston 93 模型封閉解與 BS 模型隱含波動性

(一)封閉解公式

◆ 對不發放股利的歐式買權，Heston 模型的封閉解為，

$$C(S_t,V_t,t,T)=S_tP_1-Ke^{-r(T-t)}P_2 \quad \text{(4.1)}$$

$$P_j(x_t,V_t,T,K)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\phi\ln(K)}f_j(x_t,V_t,T,\phi)}{i\phi}\right)d\phi \quad \text{(4.2)}$$

$x_t=\ln(S_t)$，$\tau=T-t$，

$$f_j(x_t,V_t,\tau,\phi)=\exp\{C(\tau,\phi)+D(\tau,\phi)V_t+i\phi x_t\} \quad \text{(4.3)}$$

$$C(\tau,\phi)=r\phi i\tau+\frac{a}{\sigma^2}\left[(b_j-\rho\sigma\phi i+d)\tau-2\ln\left(\frac{1-ge^{d\tau}}{1-g}\right)\right] \quad \text{(4.4)}$$

$$D(\tau,\phi)=\frac{b_j-\rho\sigma\phi i}{\sigma^2}\left(\frac{1-e^{d\tau}}{1-ge^{d\tau}}\right) \quad \text{(4.5)}$$

$$g=\frac{b_j-\rho\sigma\phi i+d}{b_j-\rho\sigma\phi i-d} \qquad (4.6)$$

$$d=\sqrt{(\rho\sigma\phi i-b_j)-\sigma^2(2u_j\phi i-\phi^2)} \qquad (4.7)$$

- $j=1,2$ ，其中

$u_1=\frac{1}{2}$ ，$u_2=-\frac{1}{2}$ ，$a=k^*\theta^*$ ，$b_1=k^*-\rho\sigma$ ，$b_2=k^*$

◆ (4.2)積分式中 Integrand 對 Phi 的作圖。

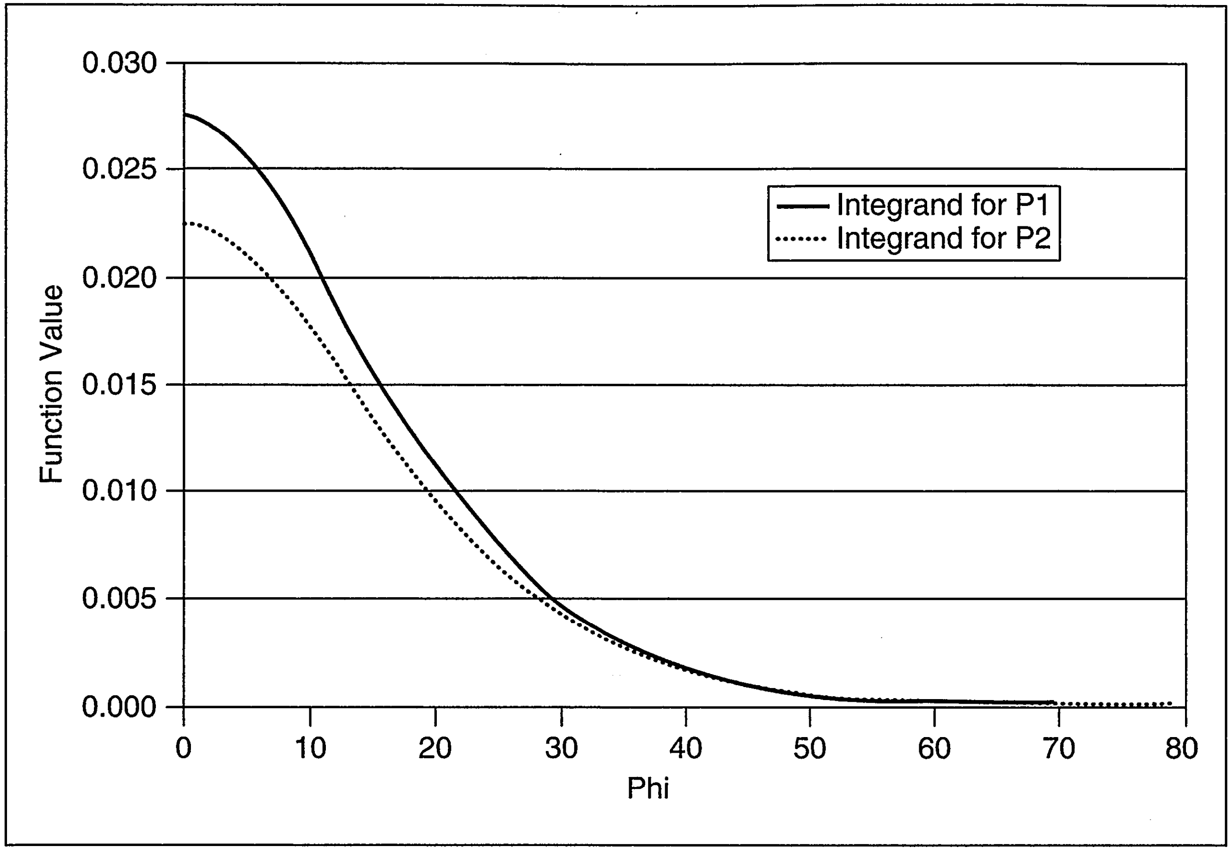


FIGURE 5.4 Convergence of Functions Used in Integration

◆ (4.1)式Call價格與Black-Scholes計算之Call價格的差距，H_C-BS_C。

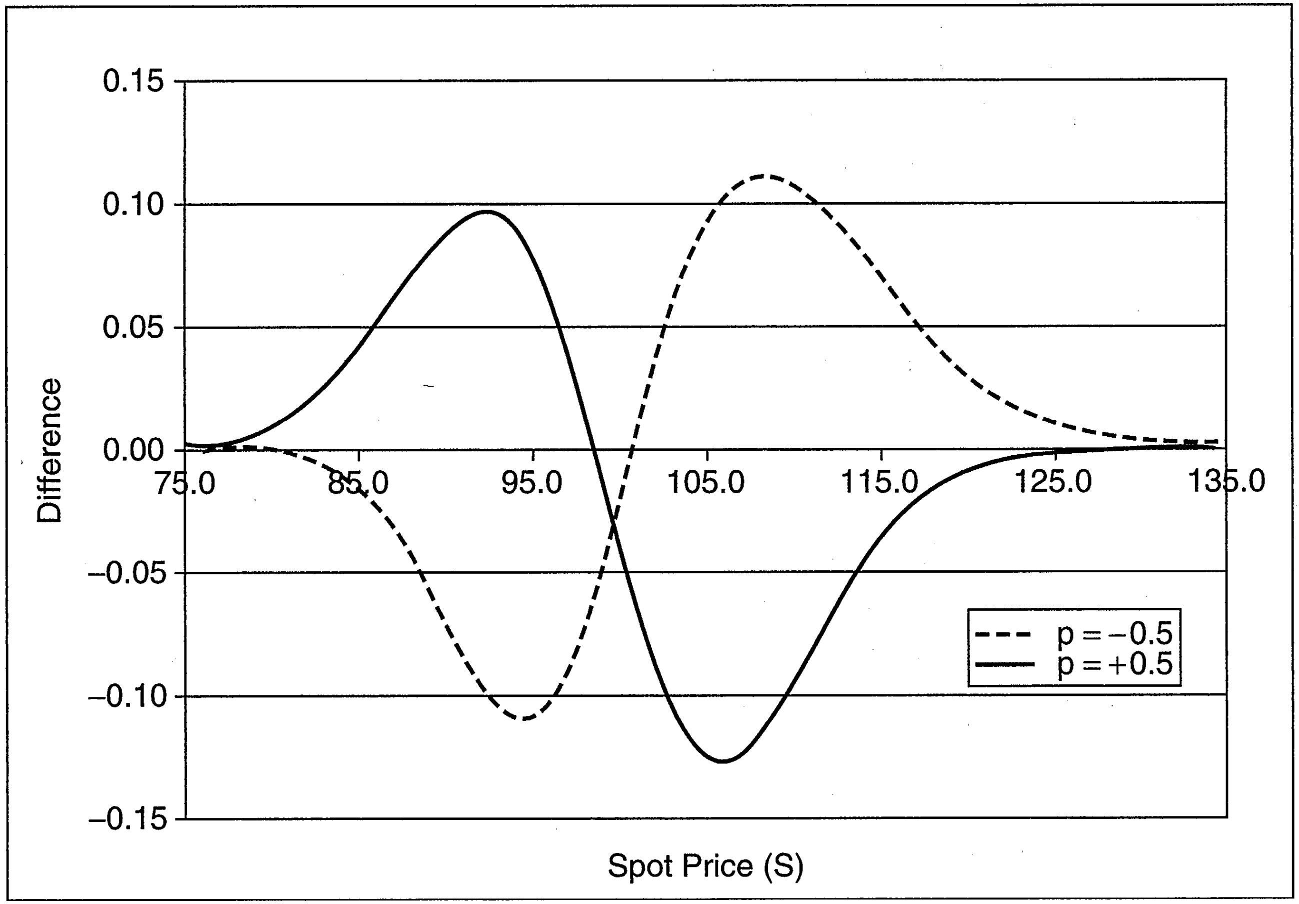


FIGURE 5.8 Plots of Call Price Differences with Varying Correlation

(二)複數運算

◆ 前面(4.2)~(4.7)式中，涉及複數的運算，下面簡單摘要其規則。

$z = x + iy$ ， $i = \sqrt{-1}$ ， $\mathrm{Re}(z) = x$ ， $\mathrm{Im}(z) = y$ 。

$z = (x, y)$

$z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1)$ ， $z_2 = x_2 + iy_2 = (x_2, y_2)$

◆ 四則運算，

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

$$z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$z_1 / z_2 = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \times \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

◆ 極座標、冪次與根

$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ ， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\theta = \arctan\dfrac{y}{x} = \arg z$ ，

$x = r\cos\theta$ ， $y = r\sin\theta$ ，

$\bar{z} = x - iy$ ， $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = r$

$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$ ， $k = 0,1,\ldots,n-1$

◆ 指數函數、尤拉公式與對數函數

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ , } r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ , } \theta = \arctan\frac{y}{x} = \arg z \text{ ,}$$

$$\exp(z) = \exp(x + iy) = \exp(x)\cdot\exp(iy) = \exp(x)\cdot(\cos y + i\sin y)$$

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$\ln(z) = \ln(x + iy) = \ln(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = \ln(r) + i\theta$$

(三)數值積分：Gauss-Laguerre求值法

- (4.2)式的計算涉及半無限區間的積分，可使用 Gauss-Laguerre 法計算，以加速計算效率，
  - 令積分運算式如下式，

$$G = \int_0^{\infty} f(x)dx$$

  - 令 n 點 Gauss-Laguerre 求值公式為

$$G = \int_0^{\infty} f(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f(x_i) \quad \text{.......(4.8)}$$

    - ✓ 其中x_i為下面n 階Laguerre多項式的n個零點，λ_i為求積係數。

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}) \text{，} 0 \le x \le +\infty \quad \text{.......(4.9)}$$

◆ 當 n=5，5 階 Gauss-Laguerre 求積公式的結點為，

$x_0=0.26355990$，$x_1=1.41340290$，$x_2=3.59642600$，$x_3=7.08580990$，$x_4=12.64080000$。

➢ 相對應的求積系數為，

$\lambda_0=0.6790941054$，$\lambda_1=1.638487956$，$\lambda_2=2.769426772$，$\lambda_3=4.315944000$，$\lambda_4=7.104896230$。

(四)市場資料校準

- (3.4)、(3.5)、(3.6)式中隨機過程中的參數，必需使用市場參數估計之。
  - 由於市場上乃以 Black-Scholes 模型來報價，因此我們須先以 BS 模型計算選擇權的權利金，

    $$BSC(S_t, K, T-t, \sigma_M, r_t, y_t) = BSC(\sigma_M)$$

    - ✓ $\sigma_M(K)$ 為市場上的波動性報價，為執行價格的函數。
  - 根據(4.1)式與(3.4)、(3.5)、(3.6)式，可知 Heston 模型的選擇權權利金可表示為，

    $$HC(S_t, K, T-t, V_t, r_t, y_t, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho) = HC(V_t, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho)$$

- 設定下面目標函購，假設市場上有 n 個選擇權報價，以隨機過程中的參數為控制變數。

$$\min_{V_t, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(BSC_i(\sigma_M) - HC_i(V_t, \kappa^*, \theta^*, \sigma, \rho) \right)^2 \right) \quad \text{...(4.10)}$$

  - 利用非線性最適化演算法，如 Powell 法，求得控制變數之最佳解。
  - 可使用模擬退火法(Simulated Annealing)，避免局部最佳解。

- 使用 2007/7/11 USD/JPY 市場資訊，
  - 1M、2M、3M、6M 四個時點。
  - 10D Call、25D Call、ATM、25D Put、10D Put 五個 Strikes。
  - 求得數值如下，

    $V_t = 0.0061126543$，$\theta^* = 0.0072726465$，$\sigma = 0.2639879042$，

    $\kappa^* = 2.0675040055$，$\rho = -0.5363162751$。
  - 誤差值為 0.00787682644。

五、異種選擇權 Monte-Carlo 模擬評價法的實作

- 在 Heston 93 模型下，大部份的異種選擇權並沒有解析解。
  - 我們需要根據(3.4)~(3.6)的隨機過程，配合估計的參數，使用蒙地卡羅模擬法來計算權利金。
  - 此模擬乃在 Q 測度下進行的，下面重述這些隨機過程。
- 在 Q 測度下，(3.1)、(3.2)、(3.3)式成為，

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^1 \quad \text{......(3.4)}$$

$$dV_t = \kappa^*(\theta^* - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_t^2 \quad \text{......(3.5)}$$

$$dZ_t^1 dZ_t^2 = \rho \cdot dt \quad \text{......(3.6)}$$

(一)Euler Scheme

- 令中間時點$t_i = i*h$，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = T$，(3.4)、(3.5)在Euler法下的近似式可表示為，
  - 以 S 為模擬對象，

$$S_{i+1} = S_i + rS_i[t_{i+1} - t_i] + \sqrt{V_i}S_i\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}^1$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa^*(\theta^* - V_i)[t_{i+1} - t_i] + \sigma\sqrt{V_i}\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1}^2$$

  - 可以表示為，

$$S_{i+1} = S_i + rS_i h + \sqrt{V_i}S_i\sqrt{h}Z_{i+1}^1 \quad \text{.......(5.1)}$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa^*(\theta^* - V_i)h + \sigma\sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^2 \quad \text{.......(5.2)}$$

◆ 以 ln(S)為模擬對象，

$$\ln S_{i+1} = \ln S_i + rh - \frac{1}{2}V_i h + \sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^1 \quad \text{......(5.3)}$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa^*(\theta^* - V_i)h + \sigma\sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^2 \quad \text{......(5.4)}$$

➢ 可以進一步表示為，

$$\ln S_{i+1} = \ln S_i + rh - \frac{1}{2}V_i h + \sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^1 \quad \text{......(5.5)}$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa^*(\theta^* - V_i)h + \sigma\sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^2 \quad \text{......(5.6)}$$

(二)Milstein Scheme

◆ 針對(5.3)、(5.4)式隨機項進一步修正，可得如下式，

$$\ln S_{i+1} = \ln S_i + rh - \frac{1}{2}V_i h + \sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^1 + \frac{1}{2}\sqrt{V_i}\cdot\sqrt{V_i}\cdot h\left(\left[Z_{i+1}^1\right]^2 - 1\right) \quad \text{......................................(5.7)}$$

$$V_{i+1} = V_i + \kappa^*(\theta^* - V_i)h + \sigma\sqrt{V_i}\sqrt{h}Z_{i+1}^2 + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{V_i}\cdot\sigma\sqrt{V_i}\cdot h\left(\left[Z_{i+1}^2\right]^2 - 1\right) \quad \text{......................................(5.8)}$$

(三)Second-Order Method

- 將 Heston 模型改寫如下式，

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_1$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sqrt{V_t}(\sigma_1 dZ_1 + \sigma_2 dZ_2)$$

$$dZ_1 dZ_2 = 0$$

- 針對(5.1)、(5.2)的二階近似方法，可以下式估計，

$$S_{i+1} = S_i(1 + rh + \sqrt{V_i}\Delta Z_1) + \frac{1}{2}r^2 S_i h^2 + \left(\left[r + \frac{\sigma_1 - \kappa}{4}\right]S_i\sqrt{V_i} + \left[\frac{\kappa\theta}{4} - \frac{\sigma^2}{16}\right]\frac{S_i}{\sqrt{V_i}}\right)\Delta Z_1 h$$

$$+\frac{1}{2}S_i\left(V_i + \frac{\sigma_1}{2}\right)(\Delta Z_1^2 - h) + \frac{1}{4}\sigma_2 S_i(\Delta Z_2 \Delta Z_1 + \xi)$$

$$V_{i+1} = \kappa\theta h + (1-\kappa h)V_i + \sqrt{V_i}(\sigma_1 \Delta Z_1 + \sigma_2 \Delta Z_2) - \frac{1}{2}\kappa^2(\theta - V_i)h^2$$

$$+\left(\left[\frac{\kappa\theta}{4} - \frac{\sigma^2}{16}\right]\frac{1}{\sqrt{V_i}} - \frac{3\kappa}{2}\sqrt{V_i}\right)(\sigma_1 \Delta Z_1 + \sigma_2 \Delta Z_2)h$$

$$+\frac{1}{4}\sigma_1^2(\Delta Z_1^2 - h) + \frac{1}{4}\sigma_2^2(\Delta Z_2^2 - h) + \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 \Delta Z_2 \Delta Z_1$$

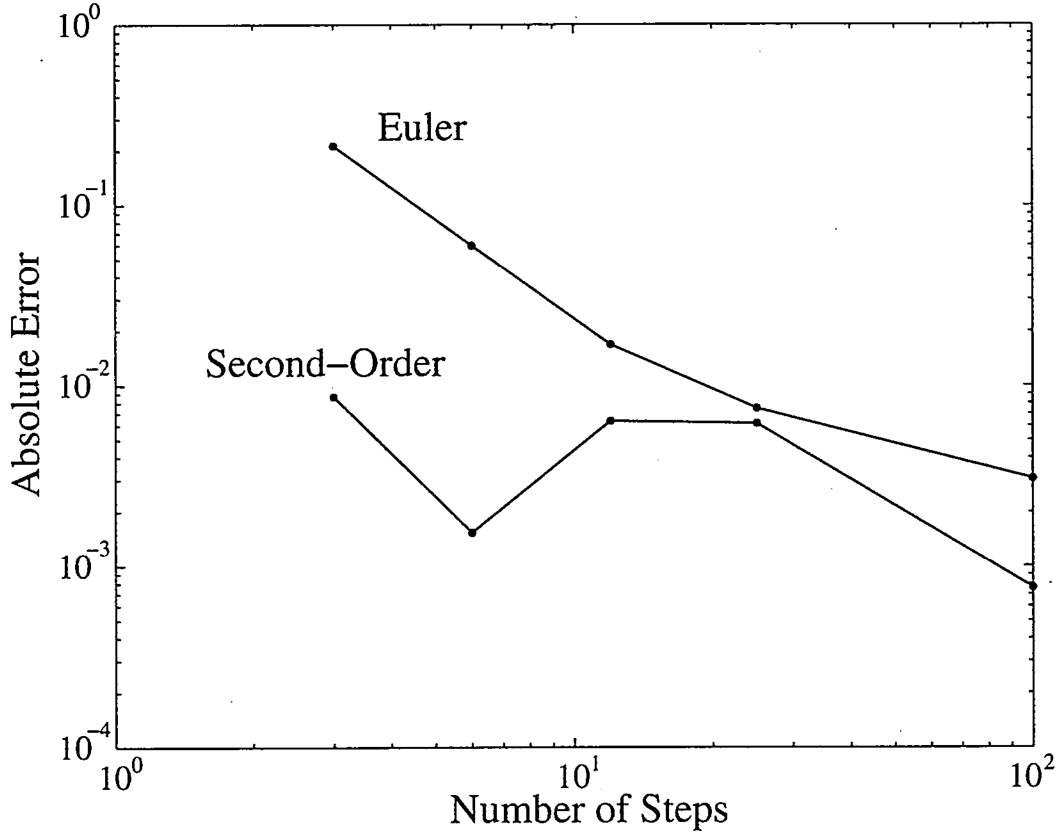
- 其中，ξ為獨立於布朗增量之隨機變數，

$$\xi = \begin{cases} h, & p = 0.5 \\ -h, & 1 - p = 0.5 \end{cases}$$

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

◆ 下圖為 Euler 法、二階近似法與 Closed-form 的誤差比較圖。

➢ S=100, V=0.04, r=5%, κ=1.2, θ=0.04, σ=0.30, ρ=-0.5, T=1.0, K=100，C=10.2300。



六、避險參數的計算

(一)有限差分法(Finite-Difference Approximations)

◆ Delta 與 Gamma

- 使用 Center Difference 的方法，以減少誤差。

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{C(S+h) - C(S-h)}{2h} \quad \text{...}(6.1)$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \approx \frac{C(S+h) - 2C(S) + C(S-h)}{h^2} \quad \text{...}(6.2)$$

- 使用同一組亂數可使估計誤差較小。

(二)路徑微分估計(Pathwise Derivative Estimates)

- 如果微分運算與期望運算是可交換的，亦即

$$E\left[\frac{d}{d\phi}C(\phi)\right] = \frac{d}{d\phi}E[C(\phi)]$$

  - 則微分的運算可在同一組亂數下，對每一路徑先進行微分，再以平均求得期望值。

◆ 以 Black-Scholes 選擇權 Delta 為例，

$$\frac{dC}{dS(0)} = \frac{dC}{dS(T)}\frac{dS(T)}{dS(0)}$$

➢ RHS 第一項可得，

$$C = e^{-rT}[S(T)-K]^+ \text{，} \frac{d}{dS(T)}\max[0, S(T)-K] = \begin{cases} 0, & S(T) < K \\ 1, & S(T) > K \end{cases}$$

✓ 在 S=K 不可微，但此機率為 0。因此，

$$\frac{dC}{dS(T)} = e^{-rT}1_{\{S(T)>K\}}$$

➢ RHS 第二項可得，

$$\frac{dS(T)}{dS(0)} = \frac{S(T)}{S(0)} \text{，} S(T) = S(0)\exp\left(\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma\sqrt{T}Z\right) \quad \text{...(6.3)}$$

➢ 可得下面結果，

$$\Delta = \frac{dC}{dS(0)} = e^{-rT}\frac{S(T)}{S(0)}1_{\{S(T)>K\}}$$

- Black-Scholes 選擇權 Vega 為例，

$$\frac{dC}{d\sigma}=\frac{dC}{dS(T)}\frac{dS(T)}{d\sigma}$$

  - 由(6.3)求得 RHS 第二項可得，

$$\Lambda=\frac{dC}{d\sigma}=e^{-rT}(-\sigma T+\sqrt{T}Z)S(T)1_{\{S(T)>K\}}$$

    - ✓ 利用(6.3)式，消除上式中的 Z 項，可得

$$\Lambda=\frac{dC}{d\sigma}=e^{-rT}\left(\frac{\ln\left(\frac{S(T)}{S(0)}\right)-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma}\right)S(T)1_{\{S(T)>K\}}$$

七、涉險值 VaR 的計算

(一) Monte Carlo模擬法計算VaR

- VaR 的計算需在真實世界的 P 測度下執行。
  - 可以歷史資料估計(3.1)~(3.3)式之參數。

- 模擬執行的步驟，
  - 執行 n 次獨立複製，對每一次的獨立複製，
    - 產生市場變動向量 ΔS 。
    - 重估組合價值，並計算損失 $L = V_P(S+\Delta S, t) - V_P(S, t)$ 。
  - 以下式估計 $\Pr(L > x)$ ，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{L_i > x\}}$$

    - L_i 表第 i 次的損失。

(二)增進效率的方法

- 使用 Variance Reduction 方法減少模擬的次數。
  - Antithetic Variate，
  - Control Variate，
  - Importance Sampling，
  - Stratified Sampling。
- 使用近似方法重估組合價值。
  - 進行適度模擬，使用非線性迴歸或內差，配湊出價值曲面的函數。