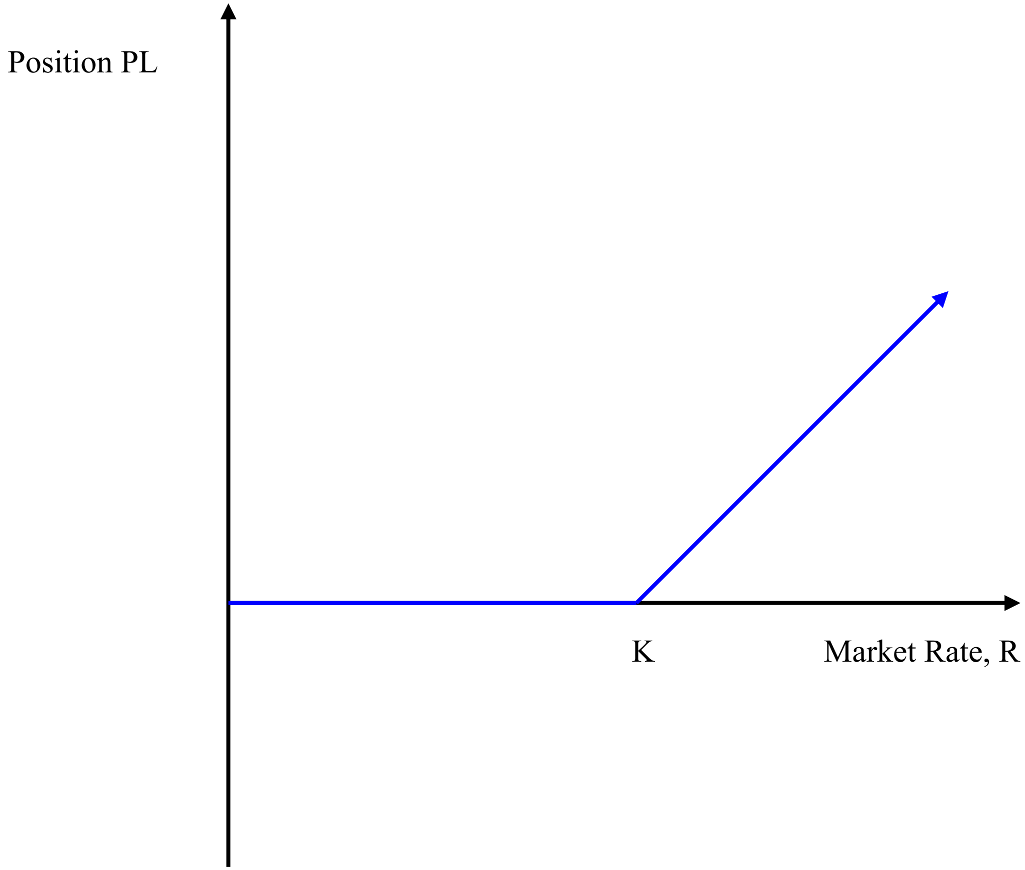
附錄一、利率選擇權

(一)利率上限

- Interest Rate Caps（利率上限）是由一連串的 Interest Rate Caplets（利率買入選擇權）所組成。
  - 利率買入選擇權允許買方以事先預定的協議利率 K，向賣方借入一定的金額一段期間。
  - 此協議利率為一上限利率(Caps)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間 (Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率買入選擇權名目本金 L，利率上限為 K，有效期間為δ，若比價之利率為 R，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

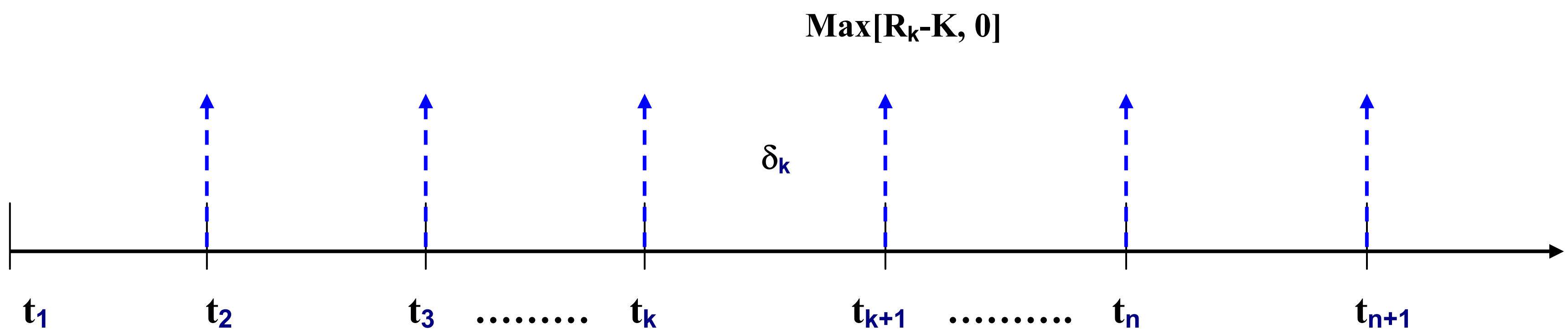
$$\delta \times L \times Max[R-K,0]$$

◆ Caplet 之 Risk Profile



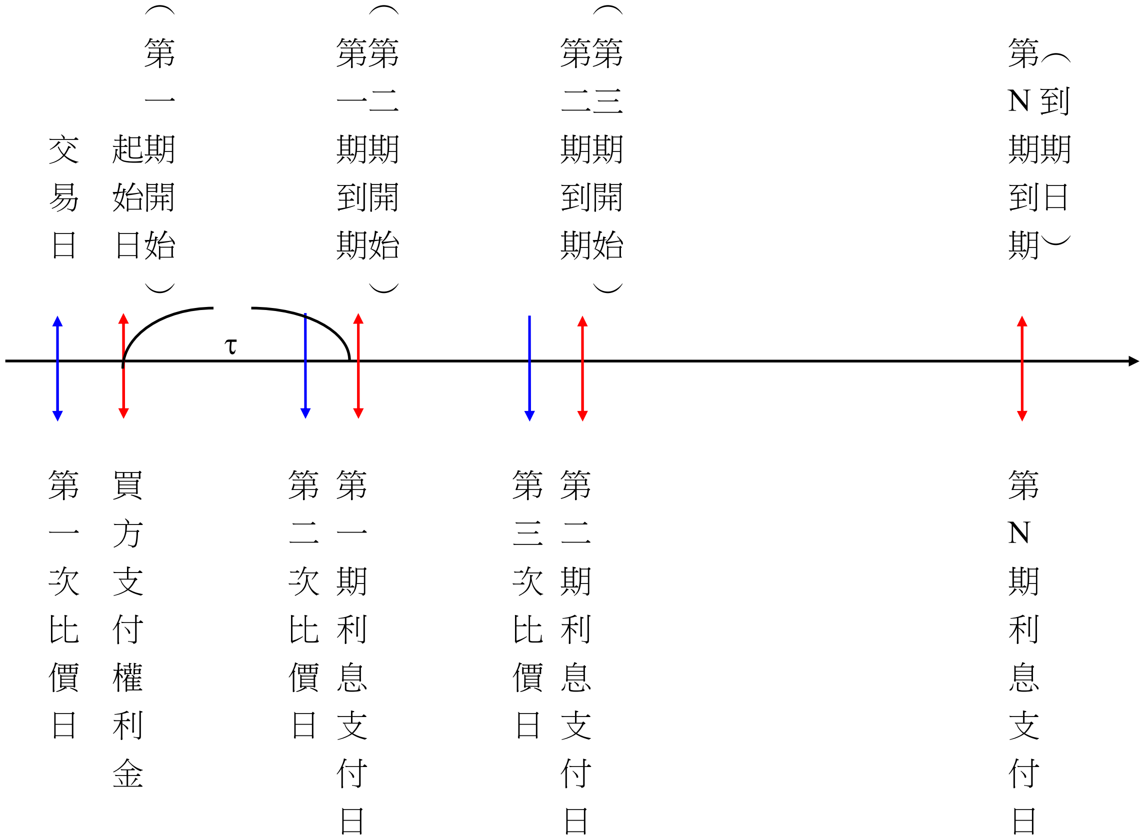
◆ 一利率上限名目本金 L，期限為 T，上限利率為 K。若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 t_1 , t_2 , t_3 , …, t_n，且定義 t_{n+1}=T。令 R_k 為 t_k 與 t_{k+1} 時點間的比價利率，$\delta_k = t_{k+1}-t_k$，則在 t_{k+1} 時點賣方必須支付買方如下利息金額，

$$\delta_k \times L \times Max[R_k - K, 0]$$



◆ 契約涉及之相關時點

➢ 第一次比價日為起始日前兩個營業日。



(二)利率下限

- Interest Rate Floors（利率下限）是由一連串的 Interest Rate Floorlets（利率賣出選擇權）所組成。
  - 利率賣出選擇權允許買方以事先預定的利率協議，向賣方借出一定的金額一段期間。
  - 此利率協議為一下限利率(Floors)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間 (Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率賣出選擇權名目本金 L，利率下限為 K，有效期間為δ，若比價之利率為 R，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

$$\delta \times L \times Max[K - R, 0]$$

- 一利率下限名目本金 L，期限為 T，下限利率為 K。若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 t_1 , t_2 , t_3 , …, t_n，且定義 $t_{n+1}=T$。令 R_k 為 t_k 與 t_{k+1} 時點間的比價利率，$\delta_k = t_{k+1}-t_k$，則在 t_{k+1} 時點賣方必須支付買方如下利息金額，

$$\delta_k \times L \times Max[K - R_k, 0]$$

(三)Black 76 定價模型

- 遠期資產價格為對數常態分配，

$$\frac{dF}{F} = \sigma dZ$$

  - 由於遠期價格為即期價格之不偏估計值，因此沒有漂移項。

- 遠期價格與即期價格間的關係，可由 Cost-of-carry Model 描述，

$$F = Se^{(r-y)T}$$

◆ Black 76 的遠期價格歐式選擇權公式如下，

$$C = e^{-rT}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right],$$

$$P = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - FN(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

➢ 遠期價格的到期日與選擇權到期日相同。

➢ 避險參數 Delta 為，

$$\Delta_C = N(d_1) \text{，} \Delta_P = N(d_1) - 1 \text{。}$$

(四)利率上限訂價理論

- 由前述，t_k 時點開始，在 t_{k+1} 到期之利率買入選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

$$\delta_k \times L \times \max[R_k - K, 0]$$

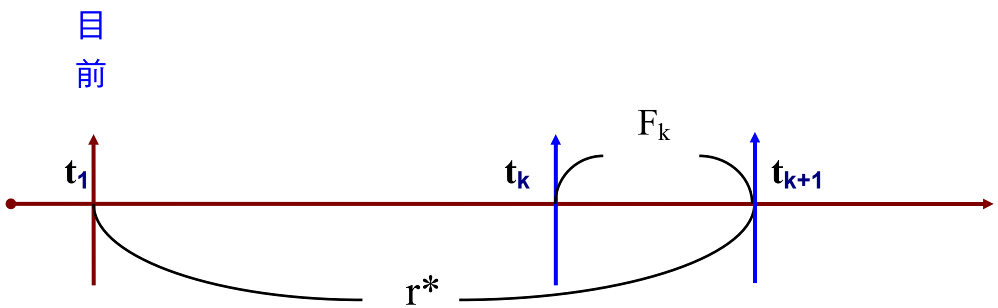
- 根據 Black(1976)選擇權訂價理論，如果 F_k 服從對數常態分配，且其波動性為σ_k，則此利率買入選擇權之價格 c_k 為

$$c_k = \delta_k \bullet L \bullet e^{-r^* t_{k+1}} \left[F_k N(d_1) - K N(d_2) \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_k / K) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k / K) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

➢ 其中 F_k 為 t_k 時點開始，t_{k+1} 到期之遠期利率，r*為 t_{k+1} 時點到期之即期利率，K 與 F_k 都以δ_k 頻率複利。



◆ 根據前式利率上限的價格 c 為利率買入選擇權價格 c_k，$k \in [1 \ldots n]$，之和

$$c = \sum_{n=1}^{n} c_k$$

➢ 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率上限契約會設計的使得第一次的 Payoff 為 0。

(五)利率下限訂價理論

- 由前述，t_k 時點開始，在 t_{k+1} 到期之利率賣出選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

$$\delta_k \times L \times \max[K - R_k, 0]$$

- 根據 Black(1976)選擇權訂價理論，如果 F_k 服從對數常態分配，且其波動性為σ_k，則此利率買入選擇權之價格 p_k 為

$$p_k = \delta_k \bullet L \bullet e^{-r^* t_{k+1}} \left[KN(-d_2) - F_k N(-d_1) \right]$$

  - 其中 F_k 為 t_k 時點開始，t_{k+1} 到期之遠期利率，r*為 t_{k+1} 時點到期之即期利率，K 與 F_k 都以 δ_k 頻率複利。

- 根據前式利率下限的價格 p 為利率賣出選擇權價格 p_k，$k \in [1 \ldots n]$，之和

$$p = \sum_{n=1}^{n} p_k$$

  - 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率下限契約會設計的使得第一次的 Payoff 為 0。

附錄二、Implied Caplet Volatility Curve

- 市場上報價的波動性為 Cap & Floor 的 Vol，不是訂價公式中需要的 Caplet & Floorlet Vol。
  - 訂價公式中的 Vol 為遠期利率的波動性，如 0M~3M 遠期利率的 0 個月的波動性σ_1、3M~6M 遠期利率的 3 個月的波動性σ_2、6M~9M 遠期利率的 6 個月的波動性σ_3、9M~12M 遠期利率的 9 個月的波動性σ_4 等等。
  - 以一年期的 Cap 為例，市場報價的波動性σ_{1Y}，為滿足下面關係的波動性。

$$c_2(\sigma_2)+c_3(\sigma_3)+c_4(\sigma_4)=c_2(\sigma_{1Y})+c_3(\sigma_{1Y})+c_4(\sigma_{1Y})$$

    - ✓ σ_i 稱之為 Spot Vol，σ_{1Y} 稱之為 Flat Vol。
  - 使用下面關係，求得σ_5、σ_6、σ_7、σ_8。

$$\sigma_6=\frac{\sigma_4+\sigma_8}{2}\ ,\ \sigma_5=\frac{\sigma_4+\sigma_6}{2}\ ,\ \sigma_7=\frac{\sigma_6+\sigma_8}{2}$$

$$\sum_{i=2}^{8}c_i(\sigma_i)=\sum_{i=2}^{8}c_i(\sigma_{2Y})$$

  - 如此，求得七年的 Spot Vol。

◆ 我們使用 Bootstrap 方法，由短期的 Futures Option 的 Spot Vol，與長期的 Cap 的 Flat Vol，求得各天期的 Spot Vol。

<<EXCEL Case 13>>

Microsoft Excel - VolBootstrap.xls

J2 0.09

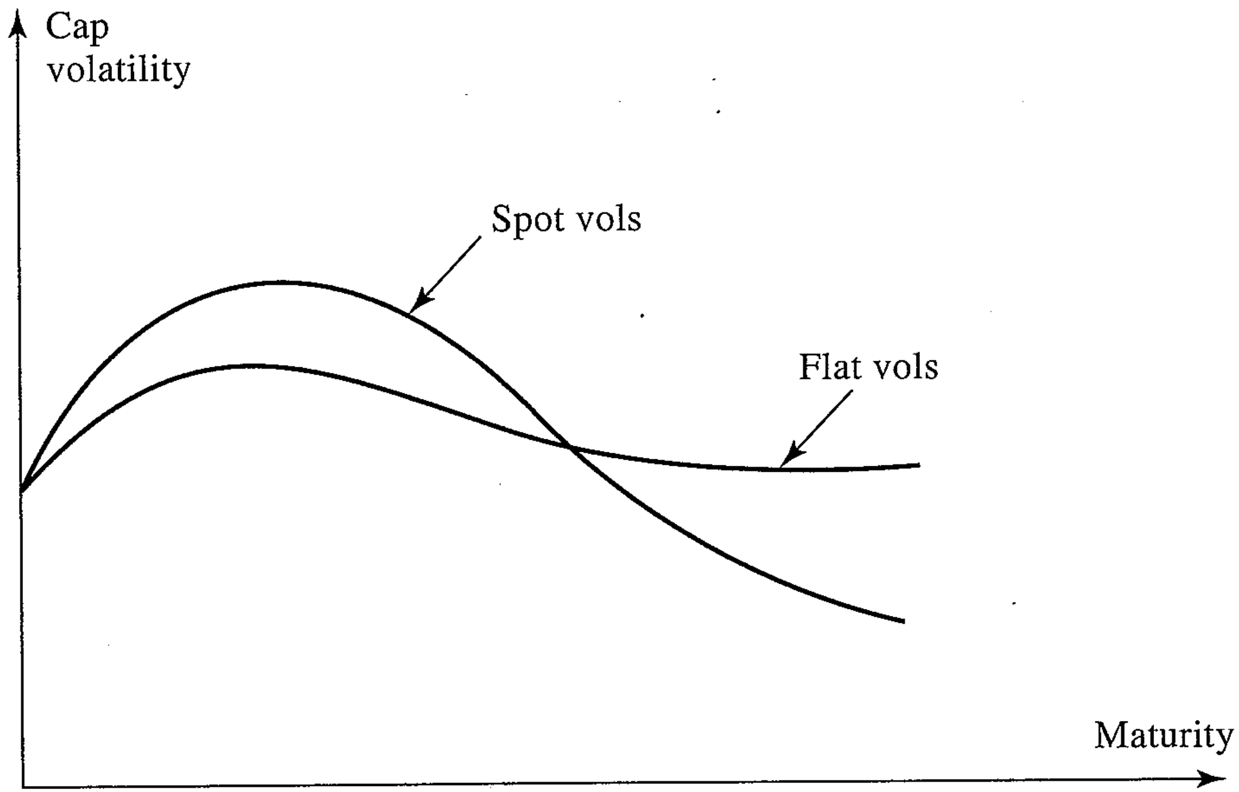
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Today	2006/7/31		Freq	Q		Caps Value	Caps Value	Caps Value	Vaplet Vol	Caplet Value
2	DayCount	365				1				0.09	0
3				BootstrapVol		2				0.09	4.7140E-14
4	TWD		ATM			3				0.09	1.2487E-09
5		Tenor	Caps_Vol			4		0.00054351	0.00054351	0.09	1.7206E-07
6		1Yr	9.00%			5				0.10282	1.1103E-05
7		2Yr	11.40%			6				0.11565	4.7053E-05
8		3Yr	13.40%			7				0.12847	1.2305E-04
9		4Yr	14.00%			8	0.00210918	0.00210918	0.00210918	0.14129	2.0214E-04
10		5Yr	14.70%			9				0.14437	2.8523E-04
11		6Yr	14.90%			10				0.14745	3.8576E-04
12		7Yr	15.10%			11				0.15053	4.7767E-04
13						12	0.00464267	0.00464267	0.00464267	0.15361	6.0771E-04
14						13				0.15030	5.8801E-04
15						14				0.14698	6.6218E-04
16						15				0.14367	7.1214E-04
17						16		0.00758664	0.00758664	0.14036	8.1045E-04
18						17				0.14809	9.3437E-04
19						18				0.15583	1.0604E-03
20						19				0.16356	1.1481E-03
21						20		0.01138212	0.01138212	0.17129	1.3142E-03
22						21				0.16393	1.2768E-03
23						22				0.15658	1.1020E-03
24						23				0.14922	1.1012E-03
25						24		0.01501805	0.01501805	0.14186	9.0981E-04
26						25				0.14765	1.2253E-03
27						26				0.15345	1.3123E-03
28						27				0.15924	1.3530E-03
29						28	0.01913526	0.01913526	0.01913526	0.16504	1.4850E-03
30											
31											

Data / FRA / IRS / Caplet / IRO

◆ 圖為典型的 Volatility Term Structure 的關係圖。

➢ Flat Vol 可由市場報價取得。Spot Vol 可以使用 Bootstrap 方式求得。

Figure 26.3 The volatility hump.



◆ 特定的函數關係可以用來描繪 Spot Volatility Curve。

➢ $p(s)=(a+bs)e^{-cs}+d$ 為常用的函數關係，s 為遠期利率的起始時間間距。

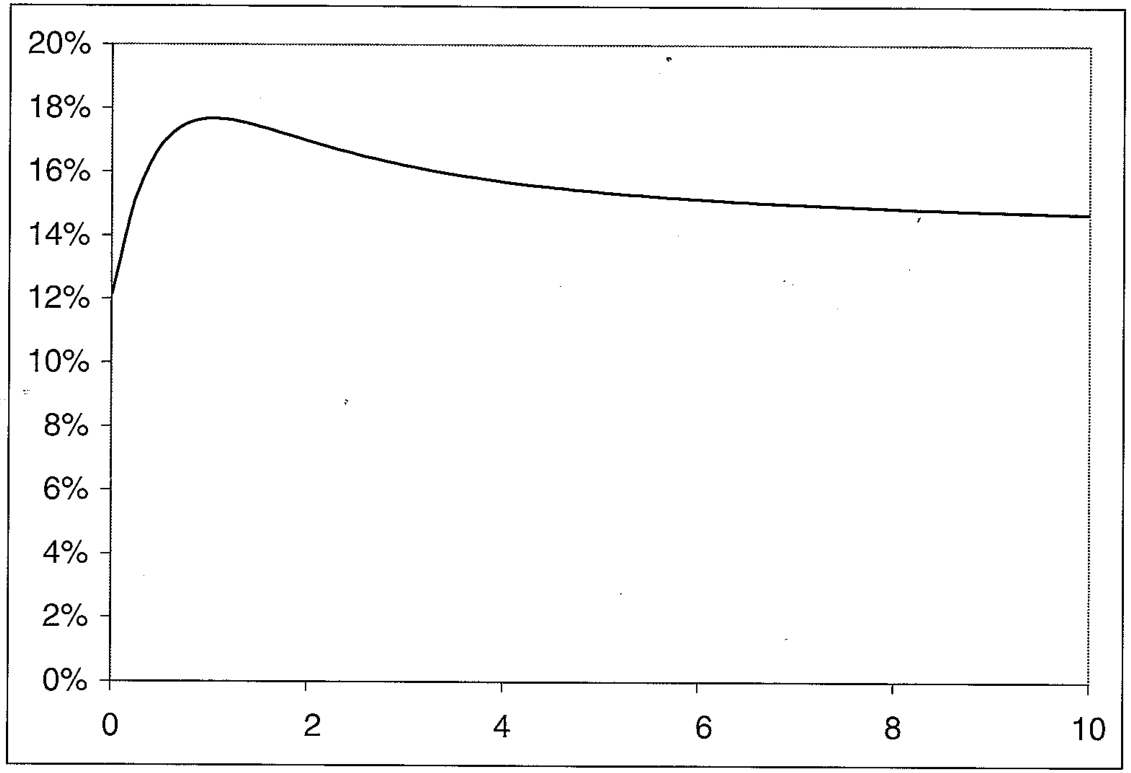
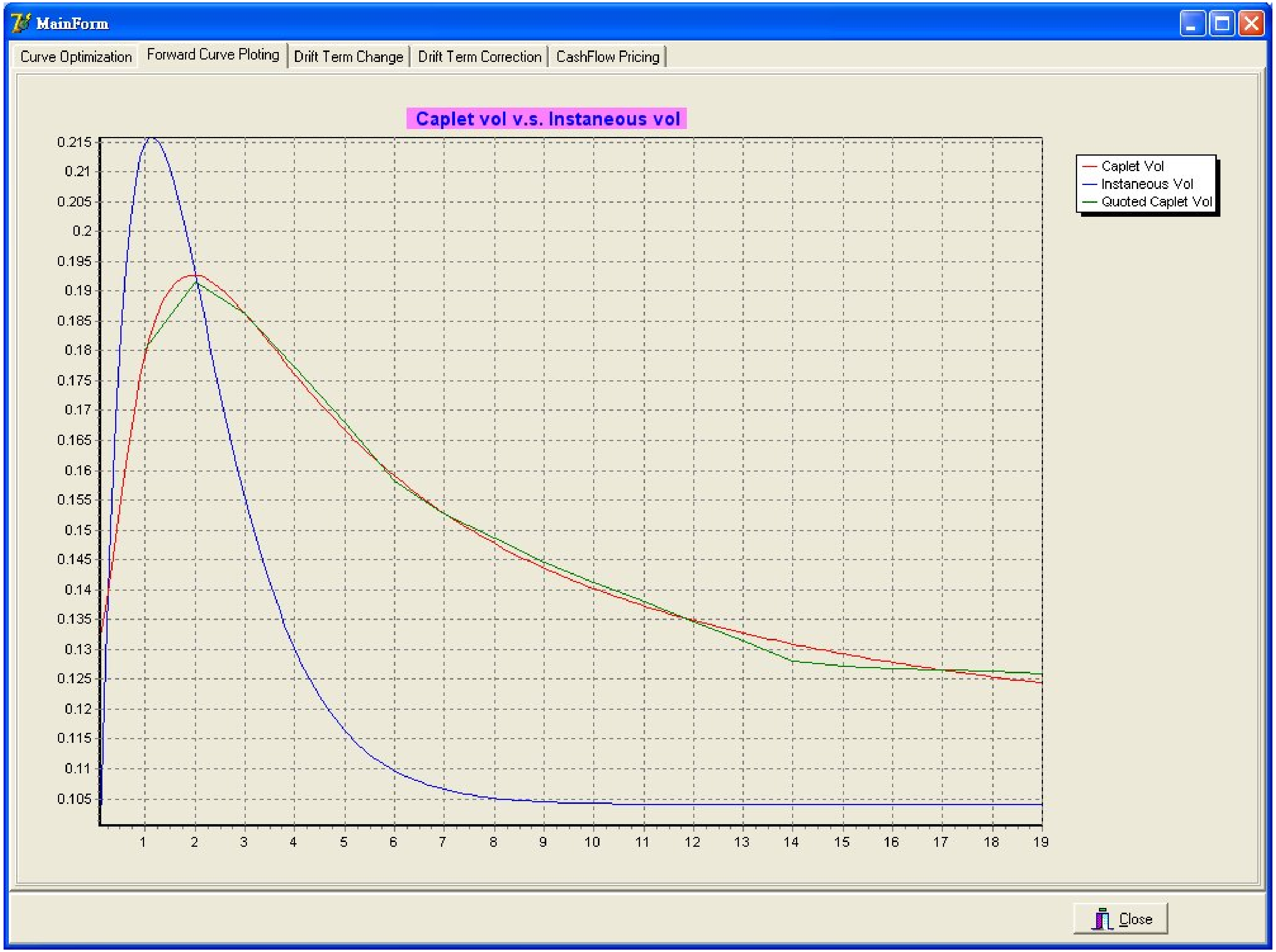


Fig. 14.1. The term structure of implied volatilities of caplets implied by the functional form (14.21), with $a=-0.02$, $b=0.3$, $c=2$, and $d=0.14$.


MainForm
Curve Optimization
Forward Curve Ploting
Drift Term Change
Drift Term Correction
CashFlow Pricing
Caplet vol v.s. Instaneous vol
Caplet Vol
Instaneous Vol
Quoted Caplet Vol
0.215
0.21
0.205
0.2
0.195
0.19
0.185
0.18
0.175
0.17
0.165
0.16
0.155
0.15
0.145
0.14
0.135
0.13
0.125
0.12
0.115
0.11
0.105
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
Close