



國立台灣科技大學

財務金融研究所

碩士學位論文

學號：M10818005

---

以 Heston 模型評價雙資產區間計息結構型  
商品

Implementation of Heston Model for Dual  
Range Accrual Note Pricing

研 究 生： 蔡祥恩

指導教授： 繆維中、董夢雲 博士

中 華 民 國 一 一 〇 年 六 月



# 碩士學位論文指導教授推薦書

Master's Thesis Recommendation Form



M10818005

系所：財務金融研究所  
Department/Graduate Institute Graduate Institute of Finance

姓名：蔡祥恩  
Name TSAI, HSIANG-EN

論文題目：以Heston模型評價雙資產區間計息結構型商品  
(Thesis Title) Implementation of Heston Model for Dual Range Accrual Note Pricing

係由本人指導撰述，同意提付審查。

This is to certify that the thesis submitted by the student named above, has been written under my supervision. I hereby approve this thesis to be applied for examination.

指導教授簽章：

Advisor's Signature

共同指導教授簽章（如有）：

Co-advisor's Signature (if any)

日期：

Date(yyyy/mm/dd)

2021 / 06 / 18



碩士學位考試委員審定書  
Qualification Form by Master's Degree Examination Committee



M10818005

系所：財務金融研究所  
Department/Graduate Institute Graduate Institute of Finance  
姓名：蔡祥恩  
Name TSAI, HSIANG-EN  
論文題目：以Heston模型評價雙資產區間計息結構型商品  
(Thesis Title) Implementation of Heston Model for Dual Range Accrual Note Pricing

經本委員會審定通過，特此證明。

This is to certify that the thesis submitted by the student named above, is qualified and approved by the Examination Committee.

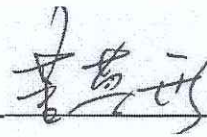
學位考試委員會

Degree Examination Committee

委員簽章：

Member's Signatures

  
呂育道  


  
王之彥

指導教授簽章：

Advisor's Signature

共同指導教授簽章（如有）：

Co-advisor's Signature (if any)

系所（學程）主任（所長）簽章：

Department/Study Program/Graduate Institute Chair's Signature

日期：

Date(yyyy/mm/dd)


財務金融研究所所長張光第

張光第

2021 / 06 / 21

## 摘要

本研究使用 Heston (1993) 隨機波動度模型評價連結雙資產區間計息結構型商品，並使用市場資料逐一說明評價過程及其結果。評價前，簡單介紹外匯市場選擇權報價慣例與意義，以及如何轉換成模型校正所需的波動度和履約價資料。接著使用市場資料進行模型校正，利用最小平方法對價格建立目標函數校準參數，並運用 Longstaff 和 Schwartz (2001) 提出的最小平方蒙地卡羅法搭配歷史對數報酬相關係數進行評價。結果發現，和 Black-Scholes 模型相比主要影響價值的因素為變異數的波動性，資產報酬和變異數的相關性影響較小方向也缺乏一致性，兩資產間相關性對於價值的影響不大。另外，標準普爾 500 指數對於參數的敏感性較歐元兌美元高。由於 Heston 的分配則較右偏且具厚尾型態，因此計算結果平均持有期間較長、平均利息成本較低。若投資人因為考慮的價外機率比市場還要低而投資該商品，雖然保本但可能損失投資資金機會成本。此外，發行機構的提前買回權價值高，若其執行此權利，投資人將面臨再投資風險，也是需考慮的因素之一。

**關鍵字：**Heston 模型、最小平方蒙地卡羅法、區間計息結構型商品

# ABSTRACT

This study applies the Heston (1993) stochastic volatility model to price a daily dual range accrual note, and uses market data to explain the pricing procedure and results step by step. Before pricing, the convention and meanings of the market foreign exchange options quotes, and how it is converted into the volatility and strike price data required for model calibration will be illustrated. Next, the least-squares method is used to build the objective function for calibrating parameters to the market prices. The note is then priced with the least-squares Monte Carlo method proposed by Longstaff and Schwartz (2001) and the correlation coefficient of historical logarithmic returns. It turns out that the main factor that affected difference of the net present value between Heston and Black-Scholes model is the volatility of the variance. The correlation between asset returns and variances has less influence and lacks consistency. The correlation between the two assets has little effect on net present value. In addition, the S&P 500 index is more sensitive to parameters than the EUR/USD. Because the Heston model's price distribution is more skewed to the right with a fat tail, the calculation results have a longer average holding period and a lower average interest cost on the note. If investors invest the note with less consideration given to the out-of-money probability, the opportunity cost of the investment may be lost despite that it is a guaranteed note. Moreover, the issuer's call premium is high. If the note is called, investors will face reinvestment risk, which is also one of the factors to be considered.

**Keywords:** Heston model, Least-Squares Monte Carlo, range accrual notes

## 誌謝

首先，感謝我的指導教授繆維中老師給予我紮實的理論訓練，以及共同指導教授董夢雲老師傳授我豐富的實務經驗。再者，謝謝口試委員：呂育道老師、王之彥老師和林昌碩老師，在口試中提供的寶貴建議。以上幾位老師，也是我求學過程中，帶領增進財務工程實力的良師。此外，也要感謝我的父母，在背後默默地無條件支持，還有研究室的伙伴們，陪伴我度過這兩年來的喜怒哀樂，以及許許多多直接或間接幫助過我的人們，使我不斷地成長。研究所生涯即將在此告一段落，希望老師們繼續春風化雨、保持身體健康，同學們鵬程萬里、飛黃騰達，未來各奔前程仍情誼依舊，海內存知己，天涯若比鄰，期待有緣再相逢。

蔡祥恩 謹誌於

國立臺灣科技大學財務金融研究所

中華民國一一〇年六月

# 目錄

摘要.....	I
ABSTRACT.....	II
誌謝.....	III
目錄.....	IV
圖目錄.....	V
表目錄.....	VI
第壹章 緒論.....	1
第一節 研究背景與動機.....	1
第二節 研究目的.....	2
第三節 研究架構與流程.....	2
第貳章 文獻回顧與模型 .....	4
第一節 Black-Scholes 模型 .....	4
第二節 Heston 模型 .....	5
第參章 研究方法.....	9
第一節 外匯市場資料處理.....	9
第二節 Heston 模型校正 .....	11
第三節 蒙地卡羅模擬法.....	13
第肆章 商品評價與分析 .....	15
第一節 商品簡介.....	15
第二節 資料選取及前處理.....	16
第三節 模型校正.....	21
第四節 最小平方蒙地卡羅法模擬.....	24
第五節 評價結果比較.....	28
第伍章 研究結論與建議 .....	40
第一節 研究結論.....	40
第二節 研究限制及建議.....	41
參考文獻.....	42

## 圖目錄

圖 1 臺灣近十年衍生性金融商品名目本金總交易量 .....	1
圖 2 研究流程圖 .....	3
圖 3 道瓊工業平均指數(1987-07-01, 1987-12-31) .....	5
圖 4 隱含波動度微笑曲線 .....	6
圖 5 美元利率期間結構 .....	18
圖 6 歐元利率期間結構 .....	18
圖 7 美元交換利率期間結構 .....	21
圖 8 Heston 模型校正後歐元兌美元市場與模型買權價格比較 .....	22
圖 9 Heston 模型校正後歐元兌美元市場與模型賣權價格比較 .....	23
圖 10 Heston 模型校正後標準普爾 500 指數市場與模型買權價格比較 .....	23
圖 11 Heston 模型校正後標準普爾 500 指數市場與模型買權價格比較 .....	24
圖 12 Heston 模型評價雙資產計息結構型商品 LSM 演算法 .....	27
圖 13 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬一年標準普爾 500 指數價格分配 .....	31
圖 14 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬二年標準普爾 500 指數價格分配 .....	31
圖 15 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬三年標準普爾 500 指數價格分配 .....	32
圖 16 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬一年歐元兌美元匯率分配 .....	32
圖 17 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬二年歐元兌美元匯率分配 .....	33
圖 18 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬三年歐元兌美元匯率分配 .....	33
圖 19 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬期末歐元兌美元匯率分配 .....	34
圖 20 Black-Scholes ( $\theta$ ) 模型 100000 次模擬下標準普爾 500 指數價格期末分配 .....	36
圖 21 Heston 模型 100000 次模擬下標準普爾 500 指數價格期末分配 .....	36
圖 22 Black-Scholes ( $\theta$ ) 模型 100000 次模擬下歐元兌美元匯率期末分配 .....	37
圖 23 Heston 模型 100000 次模擬下歐元兌美元匯率期末分配 .....	37



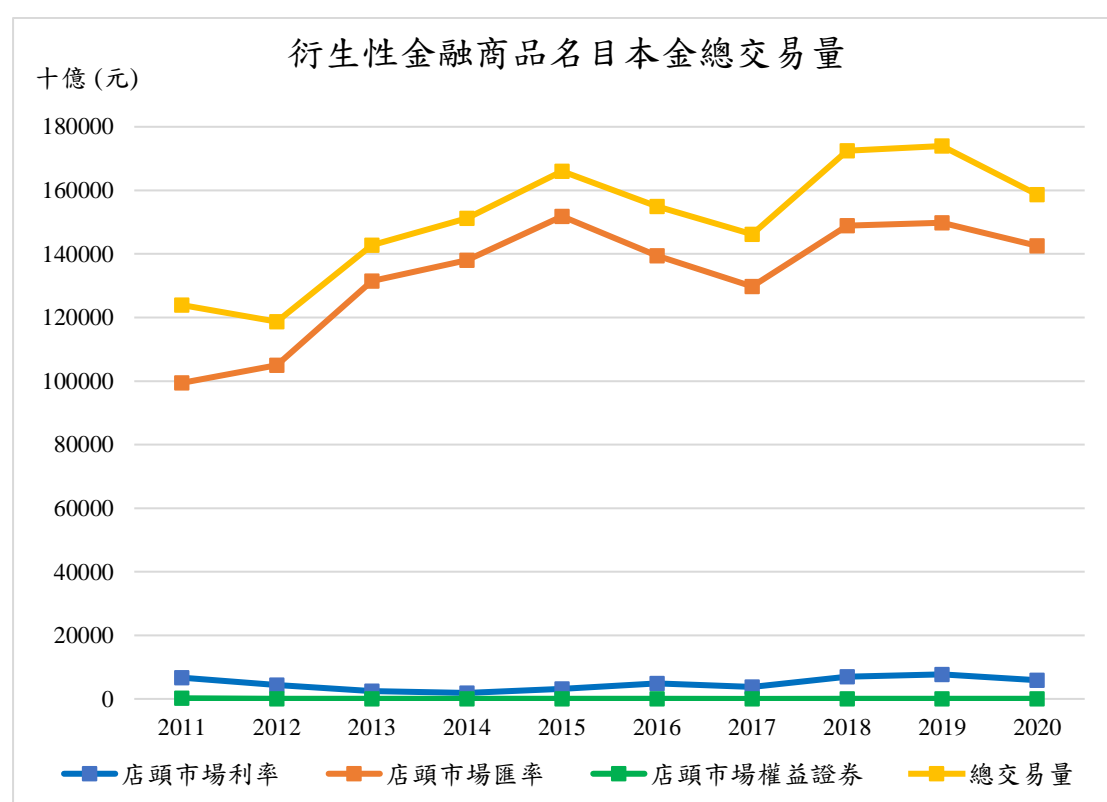
## 表目錄

表 1 初始值分組 .....	12
表 2 尤拉法調整 .....	13
表 3 結構型商品條件 .....	15
表 4 模型設定及校正資料 .....	17
表 5 歐元兌美元選擇權報價 (2015/12/09) .....	19
表 6 歐元兌美元選擇權履約價及波動度 .....	19
表 7 標準普爾 500 指數股利率 (2010-2014) .....	20
表 8 Heston 模型參數校準結果 .....	22
表 9 價格模擬轉換配息計算 .....	26
表 10 結構型商品評價結果 .....	28
表 11 Black-Scholes 模型 $\rho_{1,2}$ 對價值的影響 .....	29
表 12 Heston 模型 $\rho_{1,2}$ 對價值的影響 .....	29
表 14 $\rho_1$ 對價值的影響 .....	29
表 15 $\rho_2$ 對價值的影響 .....	30
表 13 $\sigma$ 上升 1%對價值的影響 .....	30
表 16 $\kappa$ 上升 1%對價值的影響 .....	34
表 22 結構型商品評價結果 (沒有提前買回) .....	35
表 23 結構型商品提前買回權價值 .....	35
表 17 標準普爾 500 指數增加 1%對價值的影響 .....	38
表 18 歐元兌美元匯率增加 1%對價值的影響 .....	38
表 19 $v_0$ 波動度上升 1%對價值的影響 .....	39
表 20 $\theta$ 波動度上升 1%對價值的影響 .....	39
表 21 兩模型 $\theta$ 波動度調整前後差異 .....	39

# 第壹章 緒論

## 第一節 研究背景與動機

隨著金融市場蓬勃發展，衍生性金融商品的交易也愈趨熱絡，如下圖 1 所示，近十年來衍生性金融商品名目本金總交易量有逐年上升的趨勢，其中以外匯衍生性商品為大宗。另外利率持續低迷，傳統型固定收益工具報酬率太低，越來越多複雜的結構型商品推陳出新。金融監督管理委員會 (2019) 更於 2019 年推出「財富管理新方案」，放寬總資產逾一億元之高端客戶可投資之金融商品，並於 2020 年發布《銀行辦理高資產客戶適用之金融商品及服務管理辦法》(金融監督管理委員會，2020)，其中放寬銀行對高資產客戶提供的商品多為連結各式標的的結構型商品。國內各大銀行、券商積極申請此牌照，希望可以透過這項新服務，為高資產客戶提供更完善的財富管理規劃，因此商品定價日趨重要。



資料來源：中央銀行

圖 1 臺灣近十年衍生性金融商品名目本金總交易量

## 第二節 研究目的

隨著財富管理方案逐步放寬投資標的限制，高資產客群對財富管理的需求日益增加，結構型商品市場將日益茁壯，商品自行發行及定價能力將會是國內銀行未來發展的目標。本研究期望透過實際使用市場資料評價結構型商品，將操作 Heston 模型的評價過程逐一說明並比較和 Black-Scholes 模型的差異、各個參數對結果的影響以及敏感性分析。藉此了解在使用市場真實資料評價的困難，以及 Heston 模型是否合適區間計息結構型商品 (Range Accrual Note)。

## 第三節 研究架構與流程

本研究第一章為緒論，介紹研究背景與動機、研究目的和研究架構與流程；第二章為文獻回顧與模型，介紹 Black-Scholes 模型和 Heston 模型；第三章為研究方法，包含外匯市場資料處理、Heston 模型校正及蒙地卡羅模擬法；第四章為商品評價與分析，從市場資料選取及前處理、模型校正、評價到結果比較；第五章為結論。下圖 2 為研究流程圖。

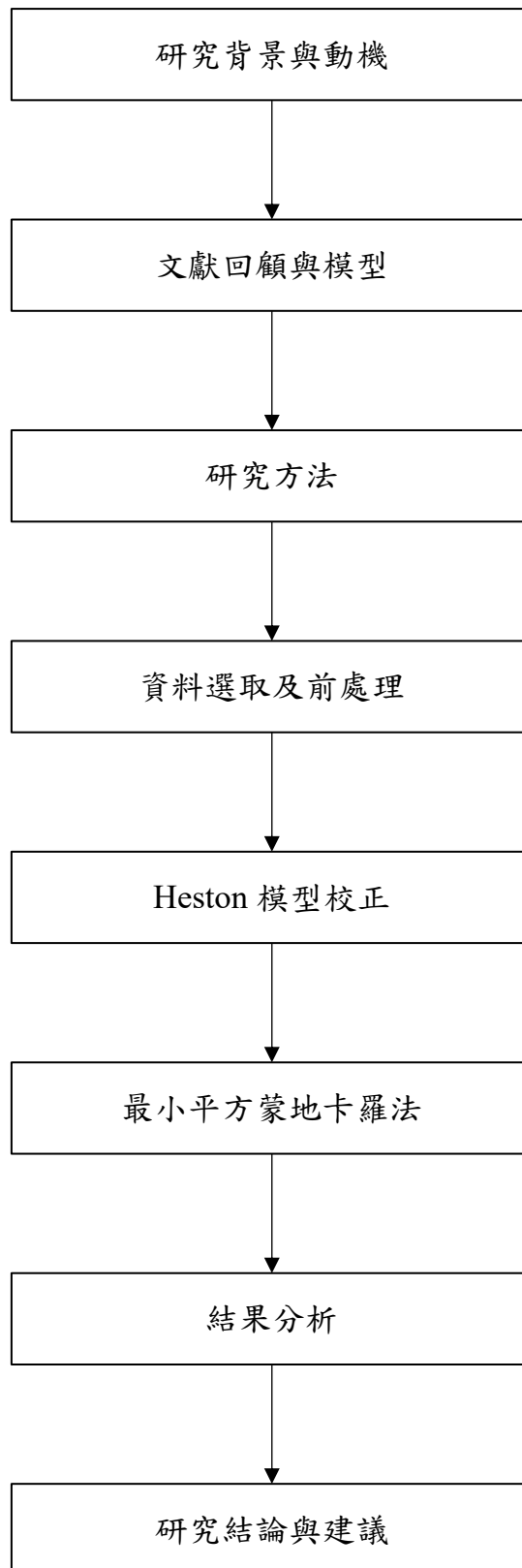


圖 2 研究流程圖

## 第貳章 文獻回顧與模型

### 第一節 Black-Scholes 模型

1973 年 Black 和 Scholes (1973) 提出選擇權定價理論，適用於不發股利的歐式選擇權情況下並滿足特定條件可導出公式解，而經 Merton (1973) 修改後，在發放股利的情況亦可推出公式解。其限制條件如下：

1. 金融市場：

- 不存在套利機會 (arbitrage-free)
- 能以無風險利率借入或借出任何金額，且利率固定不變
- 無交易成本

2. 金融資產：

- 價格符合對數常態分配 (lognormal distribution) 且遵循幾何布朗運動 (Geometric Brownian Motion)
- 沒有買進、賣出或放空限制
- 交易連續進行不中斷

在上述的條件下，股價的隨機過程 (stochastic process) 如下：

$$dS_t = S_t \mu dt + S_t \sigma dW_t \quad (1)$$

其中：

$S_t$  為第  $t$  期股價

$\mu$  為股票期望報酬

$\sigma$  為股票波動度 (volatility)

$dW$  為維納過程 (Wiener process)

根據 Ito's lemma (1) 式的解為下列式 (2)：

$$S_T = S_t e^{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma\sqrt{\tau}Z} \quad (2)$$

其中，

$r$  為無風險利率

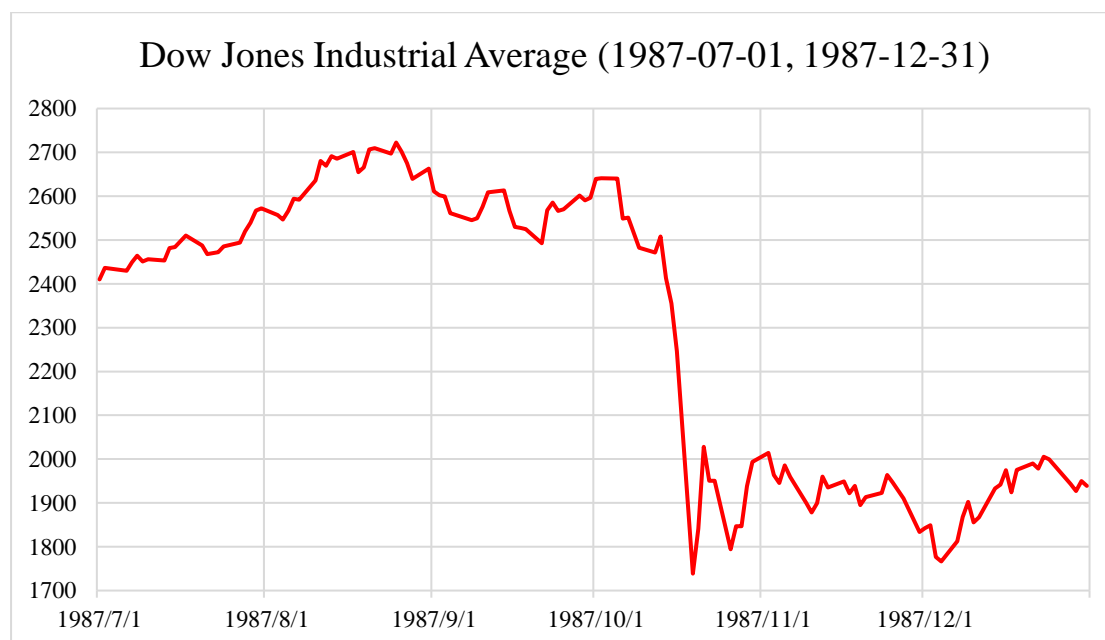
$q$  為股利率

$\tau = T - t$  且  $Z \sim N(0, 1)$

此模型對於歐式選擇權定價是一個很重大的突破，其憑公式即可評價的方便特性，每天有成千上萬交易員或投資者藉由此模型評價股票選擇權，對於從事選擇權交易或是使用衍生商品避險有著深遠的影響，基於上述理由 1997 年 Merton 和 Scholes 獲頒諾貝爾經濟學獎，表揚其對衍生性商品市場的重要貢獻。

## 第二節 Heston 模型

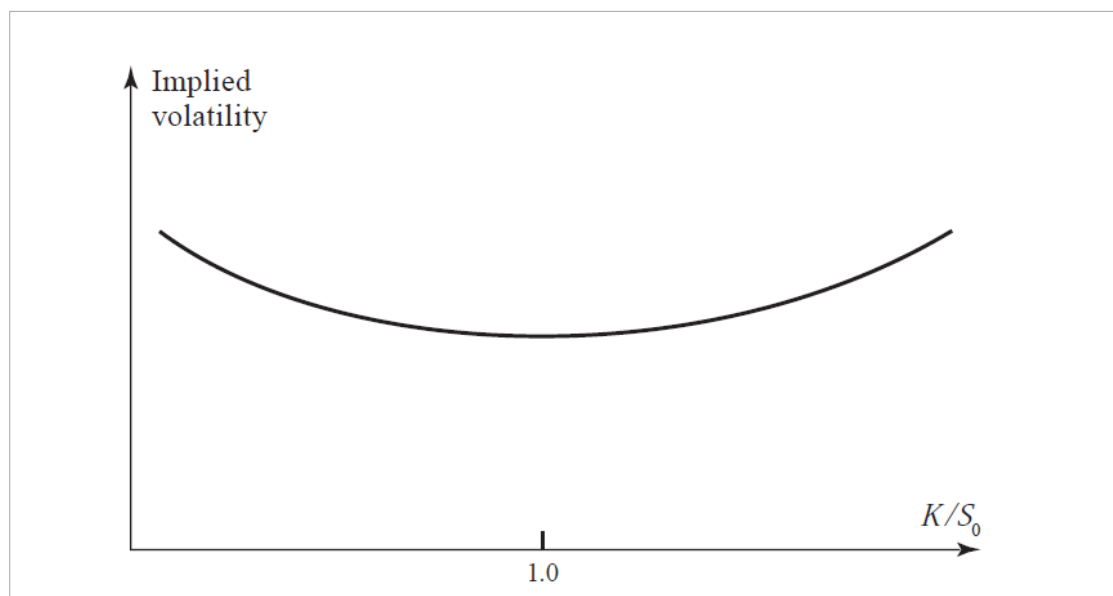
從 Black-Scholes 模型問世，華爾街的交易員們並不覺得此模型有何大問題。直到 1987 年 10 月 9 日「黑色星期一」，道瓊工業平均指數 (Dow Jones Industrial Average, DJIA) 單日下跌 508 點，跌幅高達 22.6%，如下圖 3 所示。



資料來源：Department of Computer Science, Princeton University

圖 3 道瓊工業平均指數(1987-07-01, 1987-12-31)

Weatherall (2013) 認為罪魁禍首是當時的新型投資商品——投資組合保險 (portfolio insurance)，根據 Black-Scholes 模型的假設，「黑色星期一」事件不太可能會發生。然而並非所有投資者都蒙受損失，O'Connor & Associates 的共同創辦人 Michael Greenbaum 及風控長 Clay Struve 察覺假設的問題而調整模型，躲過此次大崩盤。此後，華爾街的交易員們及研究學者們開始設法修正，他們發現 Black-Scholes 模型的假設中最大的問題在於假設波動度為常數，而將市場上觀察到的選擇權報價透過 Black-Scholes 模型回推參數  $\sigma$  ( $Y$  軸)，又被稱為隱含波動度 (implied volatility)，搭配履約價除以股價 ( $K/S_0$ ) 為  $X$  軸，如下圖 4 所示，可發現價內 (in the money) 及價外 (out of the money) 選擇權的隱含波動度會大於價平 (at the money) 的隱含波動度，此現象被稱為隱含波動度微笑曲線 (volatility smile)，不符合 Black-Scholes 模型的波動度假設。



資料來源：(Hull, 2018)

圖 4 隱含波動度微笑曲線

研究學者們開始發展隨機波動度模型 (stochastic volatility model)，包含 Hull 和 White (1987)、Wiggins (1987)、Scott (1987) 以及 Johnson 和 Shanno (1987)，但當時是使用數值方法來評價，尚未像 Black 和 Scholes (1973) 找到公式解的解法。幾年後，Jarrow 和 Esienberg (1991) 及 Stein 和 Stein (1991) 在假設股價與波

動度間無相關性的情況下，推導出類似 Black-Scholes 模型的封閉解，然而此假設無法精準捕捉到偏態 (skewness) 的現象。直到 1993 年 Heston (1993) 使用傅立葉轉換 (Fourier transform) 求出隨機波動度模型歐式選擇權公式解。

在 Heston 模型假設中，股價遵循幾何布朗運動而波動度遵循 Ornstein-Uhlenbeck 過程 (Stein and Stein, 1991)，股價和波動度之間存在相關性，模型的隨機過程如下：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{t1} \quad (3)$$

$$d\sqrt{v_t} = -\beta\sqrt{v_t}dt + \delta dW_{t2} \quad (4)$$

根據 Ito's lemma (4) 式改寫為下式 (5)：

$$dv_t = (\delta^2 - 2\beta v_t)dt + 2\delta\sqrt{v_t}dW_{t2} \quad (5)$$

若定義  $k = 2\beta$ 、 $\theta = \delta^2/2\beta$  以及  $\sigma = 2\delta$ ，(5) 式可改寫為類似 Cox、Ingersoll 和 Ross (1985) 的方根過程 (square-root process)：

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{t2} \quad (6)$$

$$E^{\mathbb{P}}[dW_{t1}dW_{t2}] = \rho dt \quad (7)$$

其中，

$S_t$  為第  $t$  期股價

$\mu$  為股票期望報酬

$v_t$  為股票變異數 (波動度的平方)

$\theta > 0$  為股票變異數長期平均

$\kappa > 0$  為股票變異數均數回歸 (mean reversion) 的速率， $\kappa$  值越大代表股票變異數回到長期平均所需時間越短

$\sigma$  為股票變異數的波動度

$\rho \in [-1, 1]$  為兩個幾何布朗運動  $W_{t1}$  及  $W_{t2}$  的相關係數



若將上述的隨機微分方程式 (stochastic differential equations, SDEs) 使用 Girsanov 定理轉換至風險中立測度 (risk-neutral measure)：

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{t1}^{RN} \quad (8)$$

$$dW_{t1}^{RN} = dW_{t1} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt \quad (9)$$

$$dv_t = [\kappa(\theta - v_t) - \lambda(S_t, v_t, t)]dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{t2}^{RN} \quad (10)$$

$$dW_{t2}^{RN} = dW_{t2} + \frac{\lambda(S_t, v_t, t)}{\sigma\sqrt{v_t}} dt \quad (11)$$

其中， $\lambda(S_t, v_t, t) = \lambda v_t$  為波動度風險的價格 (price of volatility risk)，Heston (1993) 提到 Breeden (1979) 的消費模型 (consumption-based model) 解釋一部分的風險溢酬，不過評價公式仍是以無套利機會的角度切入建構無風險資產組合，不受該消費模型假設影響。

將  $\lambda v_t$  帶入式，並定義  $k^* = k + \lambda$  以及  $\theta^* = k\theta/(k + \theta)$ ，風險中立下股價變異數隨機過程為：

$$dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{t2}^{RN} \quad (12)$$

綜合上述公式，在風險中立測度下的 Heston 模型如下：

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{t1}^{RN} \quad (13)$$

$$dv_t = \kappa^*(\theta^* - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{t2}^{RN} \quad (14)$$

$$dW_{t1}^{RN} = dW_{t1} + \frac{\mu - r}{\sqrt{v_t}} dt \quad (15)$$

$$dW_{t2}^{RN} = dW_{t2} + \frac{\lambda\sqrt{v_t}}{\sigma} dt \quad (16)$$

$$E^{\mathbb{Q}}[dW_{t1}^{RN}dW_{t2}^{RN}] = \rho dt \quad (17)$$

## 第參章 研究方法

### 第一節 外匯市場資料處理

外匯遠期價格頁面通常會有兩國貨幣利率及遠期價格，根據利率平價理論 (Interest Rate Parity Theory)，可將遠期價格表示如下式 (18)：

$$F_0 = S_0 \frac{(1 + r_d)^T}{(1 + r_f)^T} \quad (18)$$

其中， $r_d$  為本國貨幣利率、 $r_f$  為外國貨幣利率

不過，兩國利率及遠期價格的報價套用上式 (18) 後，通常等號兩邊會有誤差，為了使其吻合、一致，建議選擇市場流動性較佳的貨幣利率及遠期價格作為基準，回推另一國利率，以本國貨幣市場流動性較佳為例，外國貨幣利率計算如下式 (19)：

$$r_f = \left[ \frac{S_0}{F_0} (1 + r_d)^T \right]^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (19)$$

此外，外匯選擇權市場慣例報價比較特別，迥異於股票選擇權，並非按履約價、買權和賣權報價，而是使用 ATM、RR 和 BF 等術語。根據 Bakshi、Carr 和 Wu (2008) 的文獻，ATM 報價指的是履約價滿足 Black-Scholes 模型 Delta-neutral 的跨式 (straddle) 策略的隱含波動度，由於  $\Delta_C + \Delta_P = 0$ ，因此可得下列等式 (20)：

$$\begin{aligned} & e^{-r_f T} \Phi \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_{ATM}} \right) + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_{ATM}^2}{2} \right) T}{\sigma_{ATM} \sqrt{T}} \right] \\ & = -e^{-r_f T} \Phi \left[ -\frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_{ATM}} \right) + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_{ATM}^2}{2} \right) T}{\sigma_{ATM} \sqrt{T}} \right] \end{aligned} \quad (20)$$

由式 (20) 可得：

$$K_{ATM} = S_0 e^{\left(r_d - r_f + \frac{\sigma_{ATM}^2}{2}\right)T} \quad (21)$$

25D RR、10D RR 分別表示 25-delta 和 10-delta risk-reversal，risk-reversal 報價是用來衡量價外買權和價外賣權 Black-Scholes 模型隱含波動度之差，交易員使用此報價來量化隱含波動率微笑曲線的不對稱性，也就是 risk-neutral 部位報酬分配的偏態。risk-reversal 報價可以表示成以下關係：

$$\sigma_{RR}^{25D} = \sigma_C^{25D} - \sigma_P^{25D} \quad (22)$$

25D BF、10D BF 分別表示 25-delta 和 10-delta butterfly spread，butterfly spread 報價是衡量價外選擇權和 Delta-neutral 跨式策略隱含波動度的平均差，此報價用於捕捉隱含波動率微笑曲線的曲度 (curvature)，也就是 risk-neutral 部位報酬分配的峰態 (kurtosis)。butterfly spread 報價可以表示成以下關係：

$$\sigma_{BF}^{25D} = \frac{\sigma_C^{25D} + \sigma_P^{25D}}{2} - \sigma_{ATM} \quad (23)$$

由 (22) 與 (23) 式可得到  $\sigma_C^{25D}$  和  $\sigma_P^{25D}$  如下：

$$\sigma_C^{25D} = \sigma_{BF}^{25D} + \sigma_{ATM} + \frac{\sigma_{RR}^{25D}}{2} \quad (24)$$

$$\sigma_P^{25D} = \sigma_{BF}^{25D} + \sigma_{ATM} - \frac{\sigma_{RR}^{25D}}{2} \quad (25)$$

再使用 (24) 與 (25) 式可求得  $K_C^{25D}$  和  $K_P^{25D}$  如下：

$$e^{-rT} \Phi \left[ \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_C^{25D}} \right) + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_C^{25D^2}}{2} \right) T}{\sigma_C^{25D} \sqrt{T}} \right] = 0.25 \quad (26)$$

$$e^{-rT} \Phi \left[ - \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_P^{25D}} \right) + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_P^{25D^2}}{2} \right) T}{\sigma_P^{25D} \sqrt{T}} \right] = 0.25 \quad (27)$$

$$K_C^{25D} = S_0 e^{\alpha \sigma_C^{25D} \sqrt{T} + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_C^{25D^2}}{2} \right) T} \quad (28)$$

$$K_P^{25D} = S_0 e^{-\alpha \sigma_P^{25D} \sqrt{T} + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_P^{25D^2}}{2} \right) T} \quad (29)$$

$$\alpha = -\Phi^{-1}(0.25e^{rT}) \quad (30)$$

同理可證， $\sigma_C^{10D}$  和  $\sigma_P^{10D}$  及  $K_C^{10D}$  和  $K_P^{10D}$  如下：

$$\sigma_C^{10D} = \sigma_{BF}^{10D} + \sigma_{ATM} + \frac{\sigma_{RR}^{10D}}{2} \quad (31)$$

$$\sigma_P^{10D} = \sigma_{BF}^{10D} + \sigma_{ATM} - \frac{\sigma_{RR}^{10D}}{2} \quad (32)$$

$$K_C^{10D} = S_0 e^{\alpha \sigma_C^{10D} \sqrt{T} + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_C^{10D^2}}{2} \right) T} \quad (33)$$

$$K_P^{10D} = S_0 e^{-\alpha \sigma_P^{10D} \sqrt{T} + \left( r_d - r_f + \frac{\sigma_P^{10D^2}}{2} \right) T} \quad (34)$$

## 第二節 Heston 模型校正

模型校正前需先建立目標函數，再透過目標函數最佳化，使得模型參數貼近市場真實樣貌。建立目標函式有兩種方式，一種是使 Heston 模型理論價貼近市場報價，另一種則是使 Heston 模型理論價反推之隱含波動度貼近市場的隱含波動度。兩種目標函數使用最小平方法如下式(35)、(36)所示，將不同價性、到期日之選擇權價格或隱含波動度誤差加總，並找出一組參數使得所有選擇權誤差之和最小，代表模型的價格最貼近市場價格，或模型隱含波動度曲面最貼近市場之隱含波動度曲面，即可得到模型校正的結果。

$$\min S(\Omega) = \min \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [P_{i,j}^{\Omega}(K_i, T_j) - P_{i,j}^{Mkt}(K_i, T_j)]^2 \quad (35)$$

$$\min S(\Omega) = \min \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [IV_{i,j}^{\Omega}(K_i, T_j) - IV_{i,j}^{Mkt}(K_i, T_j)]^2 \quad (36)$$

其中，

$\Omega = (\theta, \kappa, \sigma, \rho, v_0)$  為 Heston 模型待估計之參數組合

$K$  為履約價

$T$  為距到期日時間

$Mkt$  代表市場資料

$M$ 、 $N$  分別為選擇權不同履約價、到期日數量

在模型校正演算法部分，以 Levenberg (1944) 和 Marquardt (1963) 提出的阻尼最小平方方法 (damped least square method) 較為常見 (Python 的 Scipy 函式庫有提供 Levenberg-Marquardt 方法)。此方法在計算時，需事先給定初始值，且只能求得區域最小值 (local minimum)，而非全域最小值 (global minimum)，因此設定初始值的設定變得極為重要，不同的初始值將會影響模型校正的結果。

為了解決此問題，夏漢權 (2017) 提出將 Heston 模型的五個待估計參數各分成五組，共有 3125 組，如下表 1 所示。接著利用程式迴圈將每一組參數分別帶入誤差函數內計算，選出能讓誤差函數最小的那一組參數，設定為初始參數，再使用此組參數進行區域最佳化。雖然此方法所耗費時間較長，但透過這樣分組設定初始值再配合 Levenberg-Marquardt 演算法可以精準地進行模型校正，找出最適合市場波動度曲面的一組參數，即可解決程式只能計算區域最小值的問題。

表 1 初始值分組

$\kappa$	$\theta$	$\sigma$	$\rho$	$v_0$
5	0.01	0.01	-1	0.01
15	0.21	1.01	-0.75	0.21
25	0.41	2.01	-0.5	0.41
35	0.61	3.01	-0.25	0.61
45	0.81	4.01	0	0.81

資料來源：(夏漢權，2017)

### 第三節 蒙地卡羅模擬法

蒙地卡羅模擬法是一種抽樣方法，透過產生為數眾多的隨機亂數，以模擬真實情境。Dongarra 和 Sullivan (2000) 提到蒙地卡羅模擬法是實務上處理高維度問題的唯一選擇。使用此方法評價選擇權的概念是在無套利的假設前提，選擇權價值應等於風險中立世界下的選擇權期望值以無風險利率折現，而透過蒙地卡羅模擬上萬條標的資產價格路徑後的平均，即是選擇權期望值 (Boyle, Broadie and Glasserman, 1997)。此外，Hull (2018) 也提到蒙地卡羅模擬法是非常合適評價路徑相依 (path-dependent) 選擇權及有眾多隨機變數的選擇權。

在產生模擬時，會使用尤拉法 (Euler Scheme) 將連續變化切割成離散形式，但在 Heston 模型下模擬時會出現變異數出現負值的情況，此現象違背平方根過程在符合 Feller condition 下任何值皆不會小於等於零的事實。因此，需要做一些調整改善此問題，下表 2 為文獻中對 (37) 式調整的幾種方式。

$$v_{t+\Delta t} = f_1(v_t) + \kappa(\theta - f_2(v_t))\Delta t + \sigma\sqrt{f_3(v_t)}\Delta t Z^v \quad (37)$$

表 2 尤拉法調整

方法 (Scheme)	文獻	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
Absorption	未知	$x^+$	$x^+$	$x^+$
Reflection	Diop (2003), Bossy and Diop (2004), Berkaoui et al. (2008)	$ x $	$ x $	$ x $
Higham and Mao	Higham and Mao (2005)	$x$	$x$	$ x $
Partial truncation	Deelstra and Delbaen (1998)	$x$	$x$	$x^+$
Full truncation	Lord, Koekkoek and Van Dijk (2010)	$x$	$x^+$	$x^+$

註： $x^+ = \text{Max}(x, 0)$

資料來源：(Lord, Koekkoek and Van Dijk, 2010)

在標準的蒙地卡羅模擬法僅適用於評價歐式選擇權，因為蒙地卡羅模擬的每條路徑應視為彼此獨立，不可以僅憑一條路徑就決定是否提前履約。Longstaff 和

Schwartz (2001) 提出的最小平方法可以解決蒙地卡羅模擬法無法計算提前履約的問題，其概念是使用跨路徑的價格資訊估計選擇權的持有價值，將可以提前履約時點的價內選擇權價值做為應變數，和當時標的資產價格及其相關參數為自變數進行迴歸，預測當時選擇權的持有價值，再和執行價值進行比較決定是否提前履約。

## 第肆章 商品評價與分析

### 第一節 商品簡介

區間計息結構型商品一般可以分為兩種形式，一種是每日計息區間計息結構型商品，另一種則是每期計息區間計息結構型商品。這種商品通常會以連結標的價格或指標是否在合約訂定的區間內作為配息的參考依據，像是：利率、匯率或股價等，每日計息的形式為每天觀察價格或指標是否落於區間內，若有則計一天的利息；每期計息的形式則只觀察每一計息期間內價格或指標是否曾落於區間內，若有就可以計息。此種商品的特色在於當價格或指標落於區間內，投資人可以獲得較高的配息，因此若投資人對於連結標未來走勢的看法為區間震盪、上下波動不大則較適合購買此類商品。此外，由於此種商品的配息通常高於市場利率水準，因此商品設計的形式為投資人賣出連結標的數位選擇權 (digital options)，以此權利金作為較高配息的來源。

本研究選定由瑞士信貸倫敦分行 (Credit Suisse AG, London Branch) 發行可提前買回 (callable) 連結外匯及股價指數每日計息結構型商品作為評價標的，商品條件如下表 3 所示：

表 3 結構型商品條件

契約名目本金	USD 10,000
連結標的 1	歐元兌美元即期匯率 (EUR/USD Spot)
連結標的 2	標準普爾 500 指數 (S&P 500 Index)
商品年期	12 年
發行日	2015 年 12 月 11 日
到期日	2027 年 12 月 11 日
配息頻率	每季 (3/11、6/11、9/11 和 12/11)



計息基礎	30/360 (每月 30 日、每年 360 日)
連結標的 1 條件	歐元兌美元即期匯率 $\leq 1.35$
連結標的 2 條件	$1000 \leq \text{標準普爾 500 指數} \leq 2350$
利息水準	$7.3\% \times (90/360) \times n/N$ (符合條件天數/總觀察天數)
提前買回權	發行後第二個配息日(含)起，每季可提前買回
提前買回價格	名目本金 $\times 100\%$

資料來源：本研究整理

除上述基本條件外，依合約規定有其他細節，像是：觀察期間為計息期間往前平移兩個交易日、觀察日之認定為兩個連結標的同時為交易日，連結標的 1 採用泛歐自動即時總額清算系統 (TARGET2) 營業日，連結標的 2 採用交易所營業日，以及連結標的 1 報價來源使用 Reuters “ECB37” 頁面於中歐時間下午 2 點 15 分顯示之即期匯率，連結標的 2 來源使用 Bloomberg “SPX Index” 頁面於紐約時間下午 4 點 15 分之指數正式收盤價，以及執行提前買回權需在配息日五個交易日告知。

## 第二節 資料選取及前處理

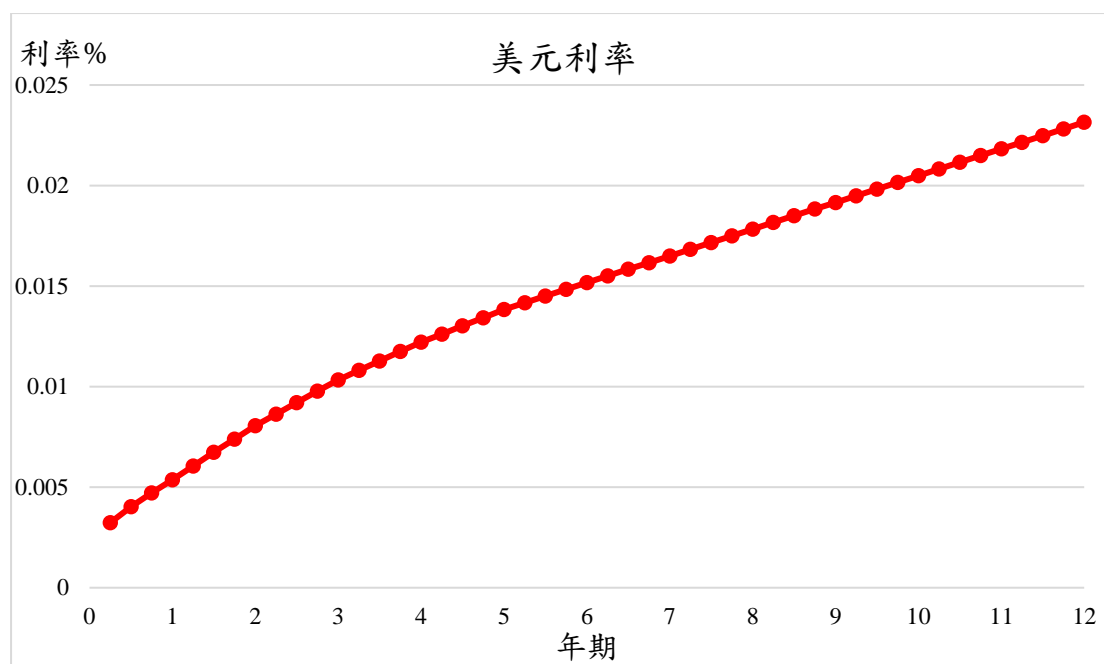
本研究欲評價之結構型商品連結歐元兌美元即期匯率與標準普爾 500 指數，於模型設定及校正時，需使用利率、外匯和股票指數相關資料，因此在利率部分需取得歐元、美元利率資料，外匯及股價指數部分需取得歷史價格及選擇權資料，如下表 4 所示，由於從遠期外匯報價畫面取得的歐元及美元利率為存款利率，較不適合商品評價折現時使用的無風險利率，因此額外取得銀行間常作為無風險利率的交換利率 (Swap rate)，以供評價時使用。另外，依商品合約規定，歐元兌美元即期匯率需採用 Reuters 報價資料，但本研究受限資料庫不易取得，因此以 Bloomberg 報價資料代替。

表 4 模型設定及校正資料

標的資產	標的資料	資料日期/區間	資料來源
歐元兌美元匯率	日收盤價	2014/12/09 ~ 2015/12/09	Bloomberg
	遠期收盤價	2015/12/09	
	選擇權波動度	2015/12/09	
標準普爾 500 指數	日收盤價	2014/12/09 ~ 2015/12/09	OptionMetrics
	股利率	2010-2014	
	選擇權波動度	2015/12/09	
美元交換利率	利率期間結構	2015/12/09	Bloomberg

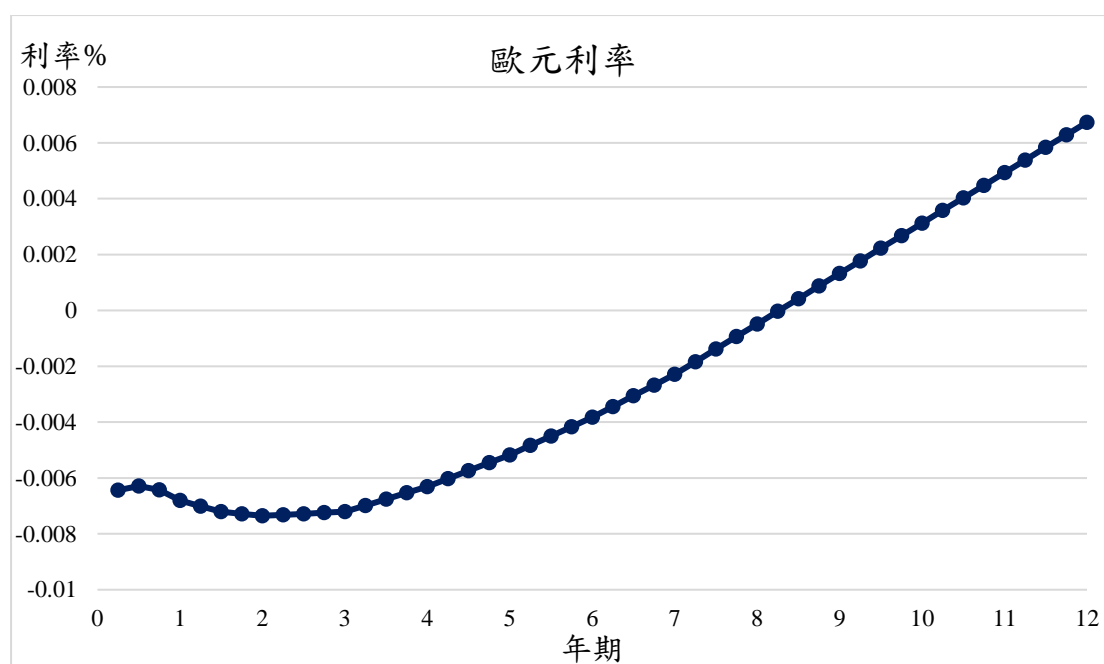
資料來源：本研究整理

在外匯部分，由於美元屬於流動性較佳的貨幣，美元利率的取得，使用歐元兌美元遠期報價頁面提供的利率。至於歐元利率，為了使遠期報價和兩國利率具一致性，本研究根據利率平價理論，使用遠期報價和美元利率回推取得。此外，市場資料並非每個時間點都有，本研究將沒有資料的時間點，使用分段線性內插法 (Piecewise linear interpolation) 求解到季頻率，時間期長和商品年限相同 (12 年)，如下圖 5、圖 6 所示。



資料來源：本研究整理

圖 5 美元利率期間結構



資料來源：本研究整理

圖 6 歐元利率期間結構

歐元兌美元選擇權報價如下表 5 所示，距到期日從 3 個月到最長 10 年的資料。本研究使用買賣中價並依照外匯市場資料處理方法，將以下報價資料轉換為履約價及隱含波動度的形式，如下表 6，以便後續模型校正使用。

表 5 歐元兌美元選擇權報價 (2015/12/09)

單位 %	ATM		25D RR		25D BF		10D RR		10D BF	
	買價	賣價	買價	賣價	買價	賣價	買價	賣價	買價	賣價
距到期日										
3M	9.885	10.225	-1.11	-0.87	0.14	0.31	-1.845	-1.44	0.495	0.77
6M	9.855	10.155	-1.47	-1.26	0.185	0.335	-2.485	-2.125	0.67	0.91
1Y	9.785	10.09	-1.725	-1.515	0.225	0.38	-2.98	-2.615	0.82	1.065
2Y	9.59	10.04	-1.585	-1.27	0.205	0.43	-2.815	-2.275	0.85	1.21
3Y	9.755	10.5	-0.985	-0.46	0.09	0.465	-1.74	-0.845	0.785	1.385
4Y	10.205	10.84	-0.6	-0.15	0.125	0.445	-1.07	-0.305	0.835	1.345
5Y	10.225	10.89	-0.385	0.075	0.115	0.445	-0.71	0.085	0.82	1.345
6Y	10.726	11.299	-0.567	-0.169	0.174	0.46	-1.166	-0.48	0.407	0.862
7Y	11.055	11.555	-0.645	-0.295	0.25	0.5	-1.45	-0.85	0.13	0.53
10Y	11.355	12.005	-0.655	-0.2	0.155	0.48	-1.165	-0.385	0.145	0.665

資料來源：Bloomberg

表 6 歐元兌美元選擇權履約價及波動度

距到期日	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度
3M	1.03 11.51%	1.07 10.78%	1.11 9.89%	1.14 9.79%	1.18 9.87%
6M	1.00 11.95%	1.05 10.95%	1.11 9.86%	1.16 9.58%	1.21 9.64%
1Y	0.96 12.28%	1.04 11.05%	1.12 9.79%	1.19 9.43%	1.27 9.48%
2Y	0.93 12.12%	1.04 10.85%	1.15 9.59%	1.25 9.42%	1.36 9.57%
3Y	0.92 11.86%	1.05 10.77%	1.18 9.76%	1.32 10.04%	1.49 10.57%
4Y	0.91 11.96%	1.06 11.00%	1.21 10.21%	1.3 10.62%	1.61 11.27%

距到期日	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度	履約價 波動度
5Y	0.91	1.08	1.25	1.45	1.72
	11.80%	10.92%	10.23%	10.76%	11.48%
6Y	0.90	1.09	1.28	1.51	1.80
	12.06%	11.51%	10.73%	11.15%	11.24%
7Y	0.90	1.10	1.31	1.56	1.87
	12.21%	11.92%	11.06%	11.45%	11.06%
10Y	0.90	1.17	1.40	1.69	2.15
	12.47%	12.21%	11.36%	11.78%	11.70%

資料來源：本研究整理

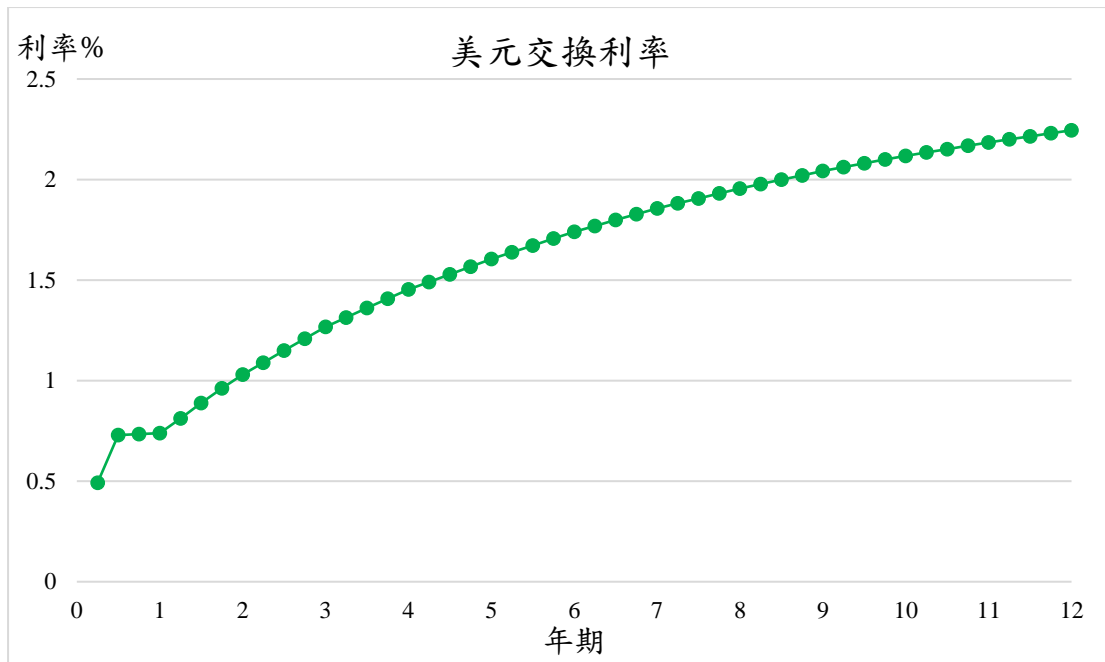
處理完外匯資料，接著是股票指數資料，標準普爾 500 指數於評價日過去五年股利率如下表 7 所示，幾何平均股利率為 1.98%，以此作為未來標準普爾 500 指數股利率參數，進行後續模型校正。至於標準普爾 500 指數選擇權波動度則是使用 OptionMetrics 提供之隱含波動度，距到期日從 10 天到最長 2 年的資料。

表 7 標準普爾 500 指數股利率 (2010-2014)

年份	標準普爾 500 指數	股利	股利率
2010	1257.64	22.65	1.80%
2011	1257.6	26.53	2.11%
2012	1426.19	31.25	2.19%
2013	1848.36	34.9	1.89%
2014	2058.9	39.55	1.92%
平均			1.98%

資料來源：Leonard N. Stern School of Business, New York University

美元交換利率期間結構則作為無風險利率（假設無對手交易風險），使用於商品現金流及權利價值折現，市場資料無資料的時間點如上述處理方式，使用分段線性內插法求解到季頻率，使得每季都有利率資料，時間期長和商品年限相同 (12 年)，如下圖 7 所示。



資料來源：本研究整理

圖 7 美元交換利率期間結構

### 第三節 模型校正

本研究欲評價之商品連結外匯及股價指數，歐元兌美元外匯選擇權和標準普爾 500 指數選擇權都是具流動性的交易商品，但同時以這兩個標的為資產的選擇權在市場上幾乎找不到，因此本研究採用 Dimitroff、Lorenz 和 Szimayer (2011) 的作法，分別使用選擇權資料對單一資產估計 Heston 模型的參數，再使用歷史資料估計兩資產間報酬的相關係數。本研究對 Heston 模型的校正以價格誤差最小化為目標函數，利用 Quantlib 建立上述三條利率期間結構和 Heston 評價模組，並加入市場選擇權資料作為目標函數最小化的比較基準，最後運用 Scipy 函式庫中的 Levenberg-Marquardt 方法進行最佳化求解。初始值設定參考夏漢權 (2017) 的方法，將 5 個待估計參數個分成 5 組共 3125 組，使用程式的迴圈進行估算，再選出最小的那參數，作為評價時使用的模型參數，減少演算法只找尋區域最小值產生的誤差，結果如下表 8 所示，歐元兌美元匯率和標準普爾 500 指數的平

均誤差分別為 6.4312%和 2.7573%。由於歐元兌美元匯率使用長達 10 年的選擇權資料，因此誤差較標準普爾 500 指數僅使用 2 年的選擇權資料大。

表 8 Heston 模型參數校準結果

	$\theta$	$\kappa$	$\sigma$	$\rho$	$v_0$	平均誤差 (%)
歐元兌美元匯率	0.0149	0.6581	0.2502	-0.1869	0.0103	6.4312
標準普爾 500 指數	0.0822	2.1888	1.8518	-0.8111	0.0529	2.7573

資料來源：本研究整理

模型與市場價格比較如下圖 8、圖 9、圖 10 及圖 11，可以觀察到距到期日越長價格誤差越大，不過整體而言模型價格仍貼合於市場價格。

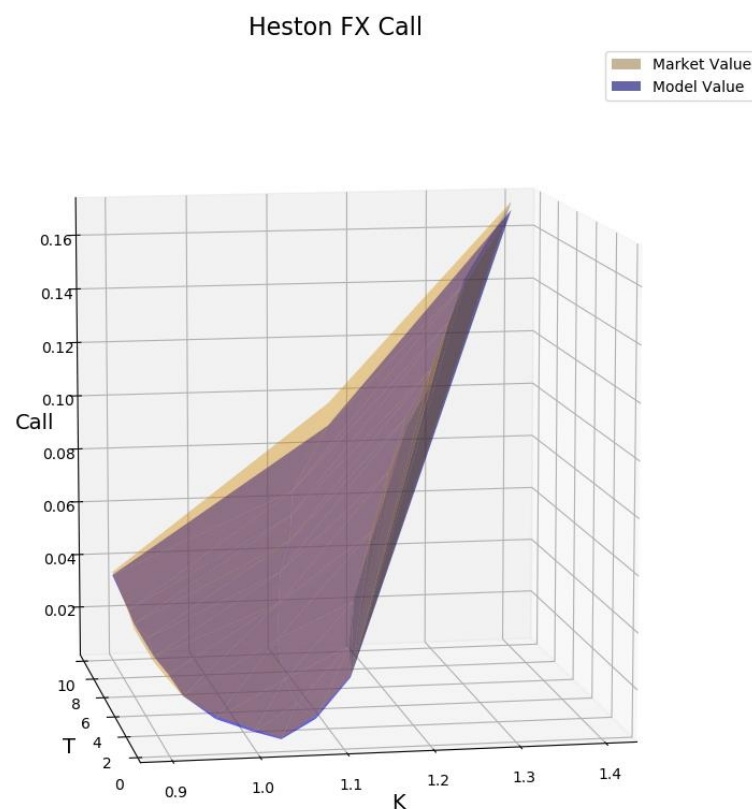


圖 8 Heston 模型校正後歐元兌美元市場與模型買權價格比較

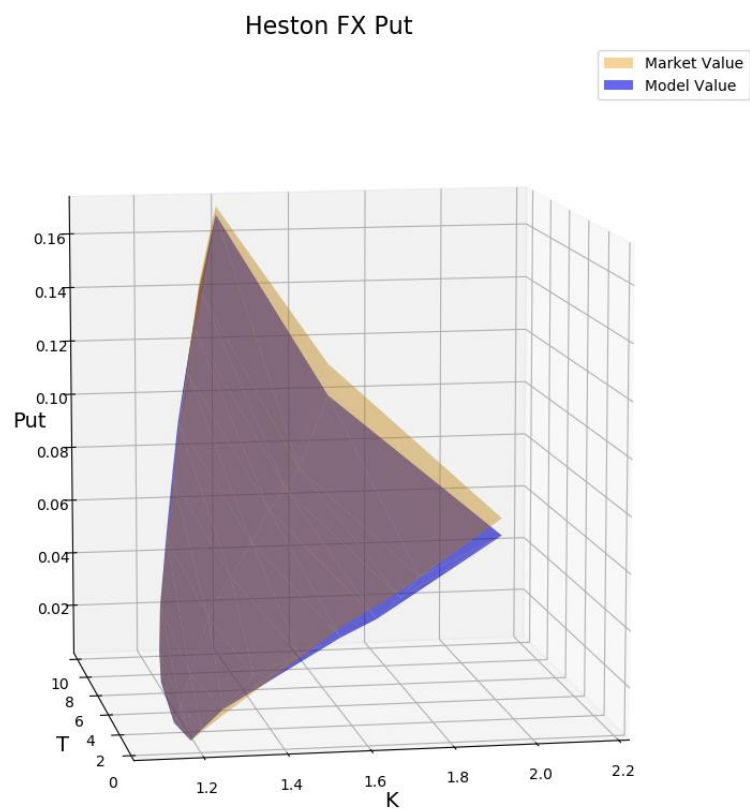


圖 9 Heston 模型校正後歐元兌美元市場與模型賣權價格比較

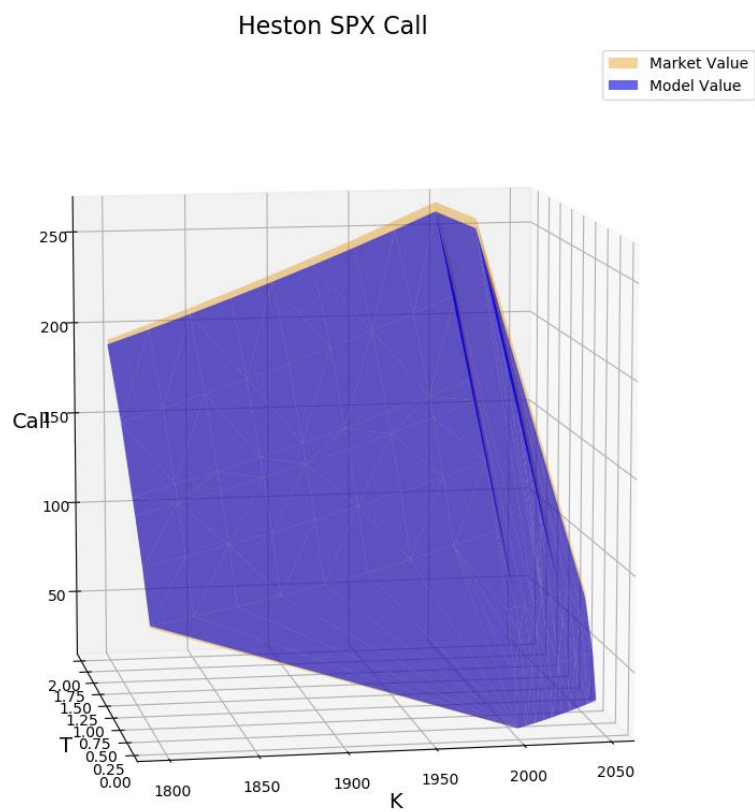


圖 10 Heston 模型校正後標準普爾 500 指數市場與模型買權價格比較



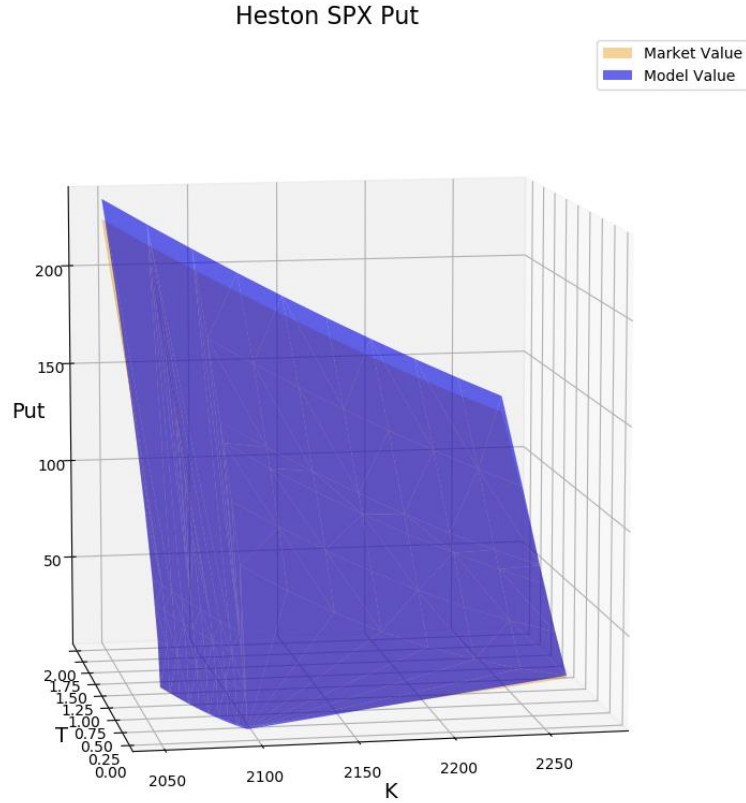


圖 11 Heston 模型校正後標準普爾 500 指數市場與模型買權價格比較

在兩資產間報酬的相關係數估計，本研究以評價日往前回推一年的歷史對數報酬率 (log return) 作為估計參數的資料，如下式 (38)。兩資產間變異數的相關係數則簡略使用資產間報酬及各報酬與變異數間的相關係數相乘 $\rho_{1,2}\rho_1\rho_2$ 。

$$\rho_{1,2} = \text{Corr}[R_{SPX}, R_{EURUSD}] = -0.2089 \quad (38)$$

#### 第四節 最小平方蒙地卡羅法模擬

經過模型校正後，將使用最接近市場環境的一組參數進行蒙地卡羅模擬。由於本研究評價標的為「可提前買回連結外匯及股價指數計息結構型商品」，使用 Heston 模型評價時，需考慮具相關性的兩種資產及其各自波動性的隨機過程，維度較高很難求得公式也不易使用多元樹模型評價。本研究採用 Lord、Koekkoek 和 Van Dijk (2010) 提出的方法 (Full truncation)，並加入兩資產的相關係數 $\rho_{1,2}$ ，得到完整的蒙地卡羅模擬式如下：

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \ln S_1(t + \Delta t) \\ v_1(t + \Delta t) \\ \ln S_2(t + \Delta t) \\ v_2(t + \Delta t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \ln S_1(t) + \left( r(t) - q(t) - \frac{1}{2} v_1^+(t) \right) \\ v_1(t) + \kappa_1(\theta_1 - v_1^+(t)) \\ \ln S_2(t) + \left( r_d(t) - r_f(t) - \frac{1}{2} v_2^+(t) \right) \\ v_2(t) + \kappa_2(\theta_2 - v_2^+(t)) \end{bmatrix} \Delta t \\
&+ \text{diag} \begin{bmatrix} \sqrt{v_1^+(t)\Delta t} \\ \sigma_1 \sqrt{v_1^+(t)\Delta t} \\ \sqrt{v_2^+(t)\Delta t} \\ \sigma_2 \sqrt{v_2^+(t)\Delta t} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \rho_1 & \sqrt{1 - \rho_1^2} & 0 & 0 \\ \rho_{1,2} & 0 & \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} & 0 \\ \rho_2 \rho_{1,2} & 0 & \rho_2 \sqrt{1 - \rho_{1,2}^2} & \sqrt{1 - \rho_2^2} \end{bmatrix}}_{:= L} \begin{bmatrix} Z_1^S \\ Z_1^v \\ Z_2^S \\ Z_2^v \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{39}$$

其中，

$Z_1^S$ 、 $Z_1^v$ 、 $Z_2^S$ 和 $Z_2^v$ 為四個互相獨立且符合標準常態分配的隨機亂數

$L$ 為對相關係數矩陣使用丘列斯基分解 (Cholesky decomposition) 後得到的下三角矩陣。相關係數矩陣如下式 (40)：

$$C = LL^T = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,2}\rho_2 \\ \rho_1 & 1 & \rho_{1,2} & \rho_{1,2}\rho_1\rho_2 \\ \rho_{1,2} & \rho_{1,2} & 1 & \rho_2 \\ \rho_{1,2}\rho_2 & \rho_{1,2}\rho_1\rho_2 & \rho_2 & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

依商品合約規定，觀察日之認定為兩個連結標的同時為交易日，長達 12 年的合約很難確定歐元兌美元外匯市場及美國股票市場的交易日，因此本研究選用 Quantlib 程式庫中 UnitedState NYSE 日曆及 TARGET 日曆取交集，計算合約開始到結束會經過多少交易日，每個交易日模擬一步價格，總共會模擬 2973 步。再依配息日日期坐落於其中的位置，切成 48 個區間 (合約每季配息，每年 4 季乘以 12 年)。按照蒙地卡羅模擬出 100000 條價格的結果，分別計算每個區間中符合條件天數 (n) 及區間總天數 (N)，以便計算各個季度的配息金額，如下表 9。

表 9 價格模擬轉換配息計算

模擬 次數	48 季			
	Q1	...	Q47	Q48
1	$\frac{n_{1,1}}{N_{1,1}}$	...	$\frac{n_{1,47}}{N_{1,47}}$	$\frac{n_{1,48}}{N_{1,48}}$
		...		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
		...		
99999	$\frac{n_{99999,1}}{N_{99999,1}}$	...	$\frac{n_{99999,47}}{N_{99999,47}}$	$\frac{n_{99999,48}}{N_{99999,48}}$
		...		
100000	$\frac{n_{100000,1}}{N_{100000,1}}$	...	$\frac{n_{100000,47}}{N_{100000,47}}$	$\frac{n_{100000,48}}{N_{100000,48}}$
		...		

此外，發行機構從第二季開始，每季都可以執行提前買回，屬於百慕達式買權 (Bermudian Call Options)，本研究應用 Longstaff 和 Schwartz (2001) 的方法進行價格模擬後的商品評價，演算法如下圖 12 所示。首先，先進行標準普爾 500 指數價格和歐元兌美元匯率的模擬，接著計算價格和匯率同時落於區間內天數，將其轉換為配息現金流，確定每期的現金流後，透過倒推歸納法 (backward induction) 並在每個可提前買回時點進行迴歸，其中自變數使用標準普爾 500 指數價格和歐元兌美元匯率的一次方、兩次方和交乘項，將預測的提前買回權和執行價值相比，取最有利於發行機構的選擇，求得結構型商品價值。

### Heston 模型評價雙資產計息結構型商品 LSM 演算法

```

1  for  $i = 1, 2, \dots, N$  do
2     $P_1 := S_1(0); V_1 := v_1(0); P_2 := S_2(0); V_2 := v_2(0);$ 
3    for  $j = 1, 2, \dots, n$  do
4       $P_1 := P_1 e^{\left(r - q - \frac{V_1^+}{2}\right)\left(\frac{T}{n}\right) + \sqrt{V_1^+ T/n} \xi};$ 
5       $V_1 := V_1 + \kappa_1(\theta_1 - V_1^+)\left(\frac{T}{n}\right) + \sigma_1 \sqrt{V_1^+ T/n} \xi;$ 
6       $P_2 := P_2 e^{\left(r_d - r_f - \frac{V_2^+}{2}\right)\left(\frac{T}{n}\right) + \sqrt{V_2^+ T/n} \xi};$ 
7       $V_2 := V_2 + \kappa_2(\theta_2 - V_2^+)\left(\frac{T}{n}\right) + \sigma_2 \sqrt{V_2^+ T/n} \xi;$ 
8    end for
9  end for
10 for  $g = 1, 2, \dots, Q$  do
11    $C := NPA \times R \times t \times m/M;$ 
12 end for
13  $CF(Q) := NPA + C(Q);$ 
14  $HV(Q - 1) := CF(Q) \times e^{-rt};$ 
15 if  $HV(Q - 1) > CV(Q - 1)$  then
16    $EV(Q - 1) := HV(Q - 1) - CV(Q - 1);$ 
17    $CF(Q - 1) := CV(Q - 1) + C(Q - 1);$ 
18 else
19    $EV(Q - 1) := 0; CF(Q - 1) := HV(Q - 1) + C(Q - 1);$ 
20 end if
21  $OP(Q - 1) := EV(Q - 1);$ 
22 for  $h = Q - 2, Q - 1, \dots, 1$  do
23    $HV(h) := CF(h + 1) \times e^{-rt};$ 
24   if  $HV(h) > CV(h)$  then
25      $EV(h) := HV(h) - CV(h);$ 
26   else
27      $EV(h) := 0;$ 
28   end if
29   do regression
30      $Y := OP(h + 1) \times e^{-rt}; X := P_1(h) + P_2(h) + \dots;$ 
31      $CF(h) := HV(h) + C(h); OP(h) := OP(h + 1) \times e^{-rt};$ 
32     if  $EV(h) > \hat{Y}(h)$  then
33        $CF(h) := CV(h) + C(h); OP(h) := EV(h);$ 
34     end if
35   end for
36 return  $CF(1) \times e^{-rt};$ 

```

圖 12 Heston 模型評價雙資產計息結構型商品 LSM 演算法

## 第五節 評價結果比較

本研究以 Black-Scholes 模型搭配 Heston 模型的 $v_0$ 及 $\theta$ 為變異數和 Heston 模型做比較，評價結果如下表 10 所示，以 Black-Scholes ( $v_0$ ) 的價值最高、Black-Scholes ( $\theta$ ) 次之、Heston 最低。平均持有期間代表發行機構買回時間點的平均，其中以 Heston 時間最久，相對的平均年化利息成本最低。

表 10 結構型商品評價結果

	價值	標準誤	平均持有期間 (年)	平均利息成本 (年化%)
Black-Scholes ( $v_0$ )	10072.3801	2.0594	3.89	4.9068
Black-Scholes ( $\theta$ )	9981.5442	2.1947	4.78	4.3038
Heston	9950.7234	2.4402	5.89	4.3025

資料來源：本研究整理

Black-Scholes ( $\theta$ ) 的變異數是固定在 Heston 變異數的長期平均，在 $v_0$ 小於 $\theta$ 的情況下，Heston 的價值卻是三個之中最小，其差別可能來自 Heston 變異數隨機過程中的隨機項，若將隨機項設為 0，得到的價值為 10015.8388 元，介於 Black-Scholes ( $v_0$ ) 和 Black-Scholes ( $\theta$ ) 之間，因此需要進一步確認是相關係數 $\rho$ 或變異數的波動性 $\sigma$ 所造成的影響。

首先，兩資產間的相關係數 $\rho_{1,2}$ 在 Black-Scholes 模型和 Heston 模型下對價值的影響分別如表 11、表 12 所示，原始估計的 $\rho_{1,2}$ 為-0.2089，在 Black-Scholes 模型下當 $\rho_{1,2}$ 設成 1 時價值減少，其餘情況皆增加；在 Heston 模型下當 $\rho_{1,2}$ 設成-0.5 時價值增加、-1 時價值卻減少， $\rho_{1,2}$ 設成 0、0.5 和 1 時價值皆減少。整體而言，可以發現不論在 Black-Scholes 模型和 Heston 模型下相關係數 $\rho_{1,2}$ 為正相關或是負相關對價值改變的差異皆不大。

表 11 Black-Scholes 模型  $\rho_{1,2}$  對價值的影響

$\rho_{1,2}$	-1	-0.5	0	0.5	1
價值	9983.0526	9983.2740	9983.3746	9983.3630	9980.8698
差異	1.5084	1.7298	1.8304	1.8188	-0.6744

資料來源：本研究整理

表 12 Heston 模型  $\rho_{1,2}$  對價值的影響

$\rho_{1,2}$	-1	-0.5	0	0.5	1
價值	9949.0391	9950.7720	9949.4734	9950.6762	9948.7154
差異	-1.6843	0.0486	-1.25	-0.0472	-2.008

資料來源：本研究整理

接著，觀察標準普爾 500 指數及歐元兌美元匯率和其各自變異數間的相關係數 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 對價值的影響，如下表 13、表 14。對 $\rho_1$ 而言，估計的 $\rho_1$ 是-0.8111，當 $\rho_1$ 變得更負時價值是增加的， $\rho_1$ 減少到-0.5 價值會減少，當 $\rho_1$ 等於 0、0.5 和 1 的時候，價值大幅增加；對 $\rho_2$ 而言，估計的 $\rho_2$ 是-0.1869，當 $\rho_2$ 變成-0.5、-1，價值越是減少。兩者並沒有一致的方向性，差異也不大，唯獨 $\rho_1$ 等於 0 或為正時，價值增加幅度大，但通常報酬和變異數相關性為負，因此 $\rho_1$ 、 $\rho_2$ 為負的情形下對價值的影響不是很大。

表 13  $\rho_1$  對價值的影響

$\rho_1$	-1	-0.5	0	0.5	1
價值	9963.2355	9945.6003	10083.2141	10218.6498	10443.2292
差異	12.5121	-5.1231	132.4907	267.9264	492.5058

資料來源：本研究整理

表 14  $\rho_2$  對價值的影響

$\rho_2$	-1	-0.5	0	0.5	1
價值	9946.6987	9950.3725	9948.4248	9945.0046	9947.4294
差異	-4.0247	-0.3509	-2.2986	-5.7188	-3.294

資料來源：本研究整理

再確認相關係數 $\rho$ 對價值影響不大之後，觀察將 $\sigma$ 調升 1%對價值的影響，不論是標準普爾 500 指數或歐元兌美元匯率的 $\sigma$ 都會有負的影響，如下表 15，當兩資產 $\sigma$ 調升 1%後，只比調升標準普爾 500 指數 $\sigma$  1%再減少一些，顯示標準普爾 500 指數所帶來的影響較大。

表 15  $\sigma$  上升 1%對價值的影響

	價值	差異
S&P 500 $\sigma$ 上升 1%	9948.8798	-1.8436
EURUSD $\sigma$ 上升 1%	9950.2327	-0.4907
兩資產 $\sigma$ 上升 1%	9948.8474	-1.876

資料來源：本研究整理

為進一步確認 $\sigma$ 所帶來的影響，本研究比較 Heston 模型的變異數隨機過程在有無隨機項下的資產價格分配，下圖 13、圖 14 和圖 15 分別是模擬標準普爾 500 指數兩種情況在一年、二年和三年的價格分配，圖中藍色代表變異數隨機過程有隨機項，而橘色則代表變異數隨機過程無隨機項，可以發現隨著時間拉長，藍色分配比橘色分配超出紅色上下界的機率越來越高。另外，觀察歐元兌美元兩種情況的在一年、二年和三年的匯率分配，如下圖 16、圖 17 和圖 18，藍色分配比橘色分配超出紅色上界的機率不如標準普爾 500 指數明顯，不過從期末分配則可以較清楚的觀察到相同的現象，如下圖 19。綜上所述，可以確認 $\sigma$ 會對資產價格分配帶來影響。

Heston 模型波動度有無隨機項比較  
模擬一年標準普爾 500 指數價格分配

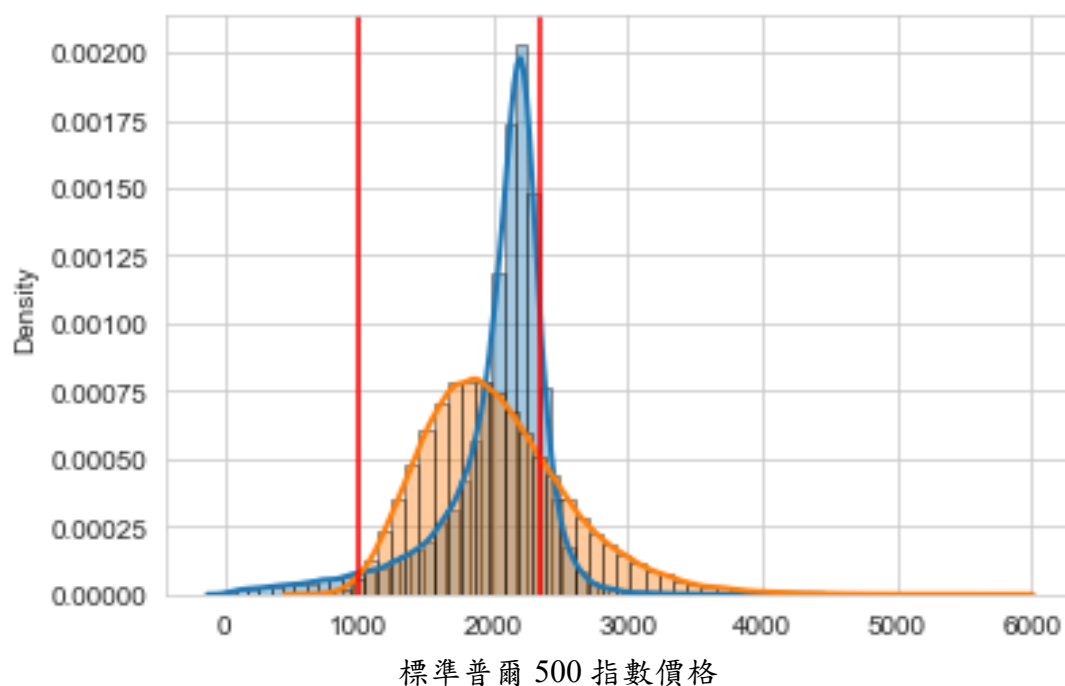


圖 13 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬一年標準普爾 500 指數價格分配

Heston 模型波動度有無隨機項比較  
模擬二年標準普爾 500 指數價格分配

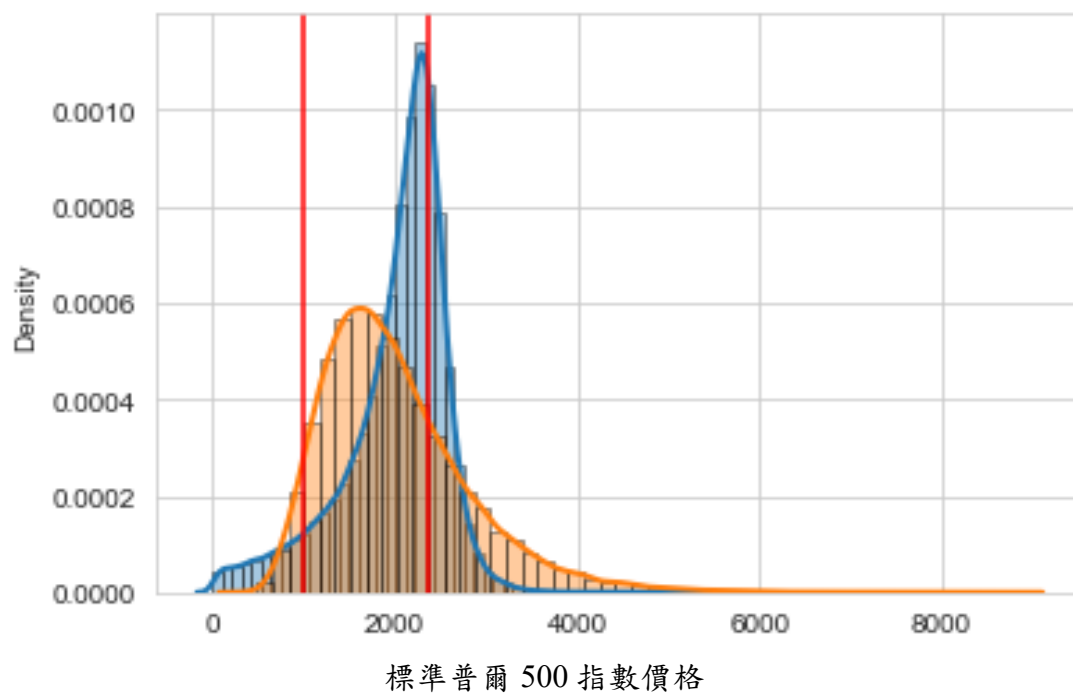


圖 14 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬二年標準普爾 500 指數價格分配



Heston 模型波動度有無隨機項比較  
模擬三年標準普爾 500 指數價格分配

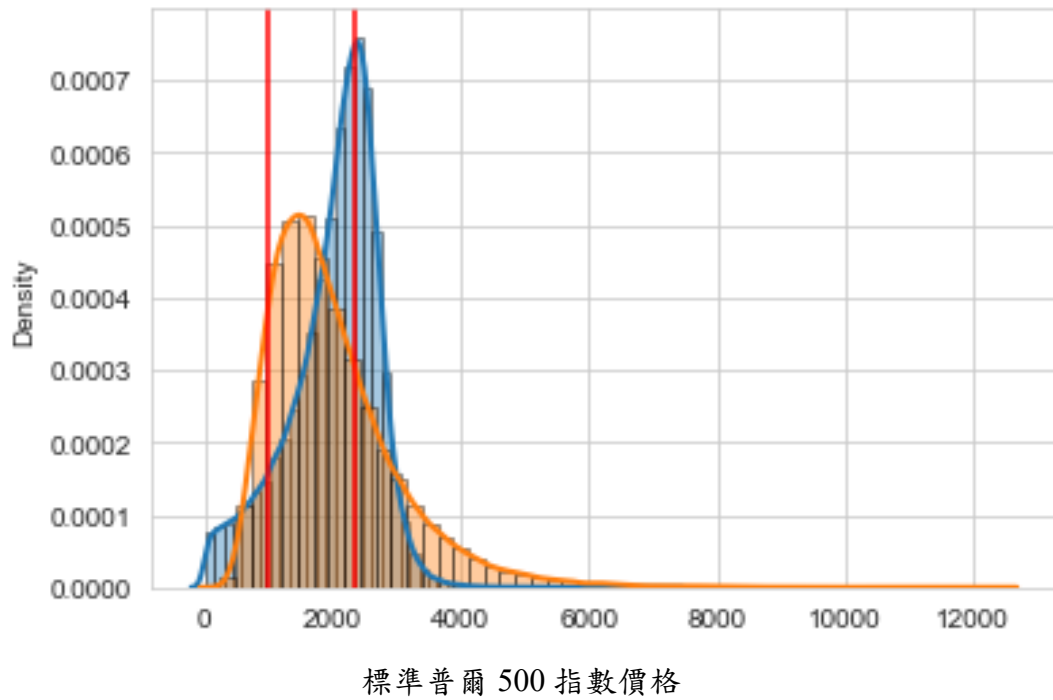


圖 15 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬三年標準普爾 500 指數價格分配

Heston 模型波動度有無隨機項比較  
模擬一年歐元兌美元匯率分配

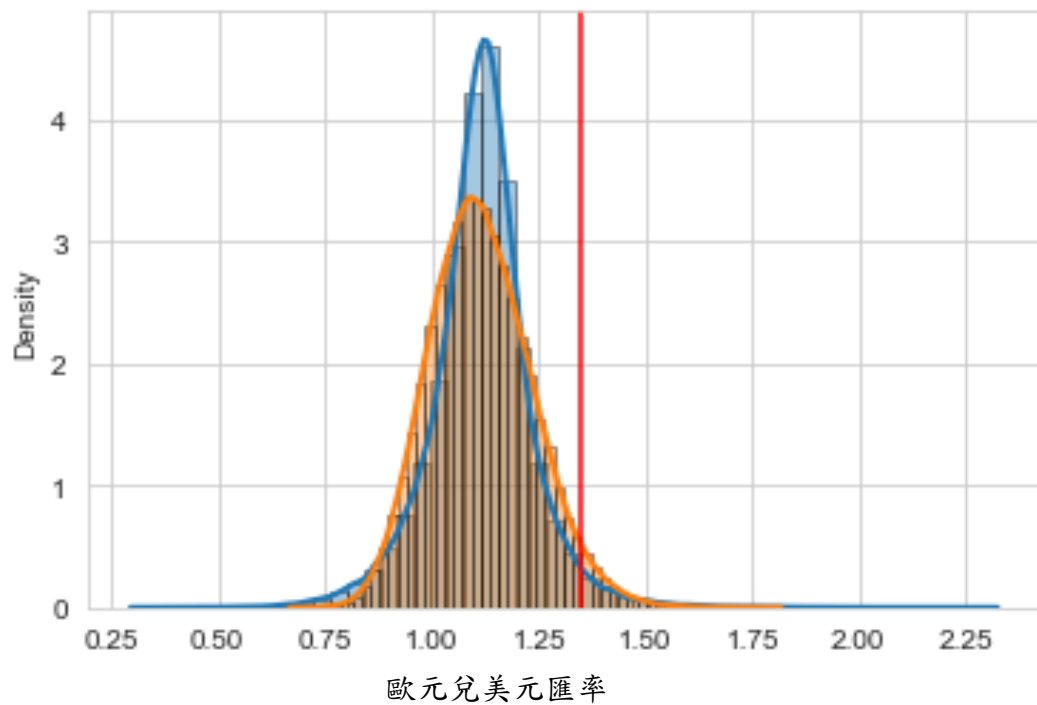


圖 16 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬一年歐元兌美元匯率分配

### Heston 模型波動度有無隨機項比較 模擬二年歐元兌美元匯率分配

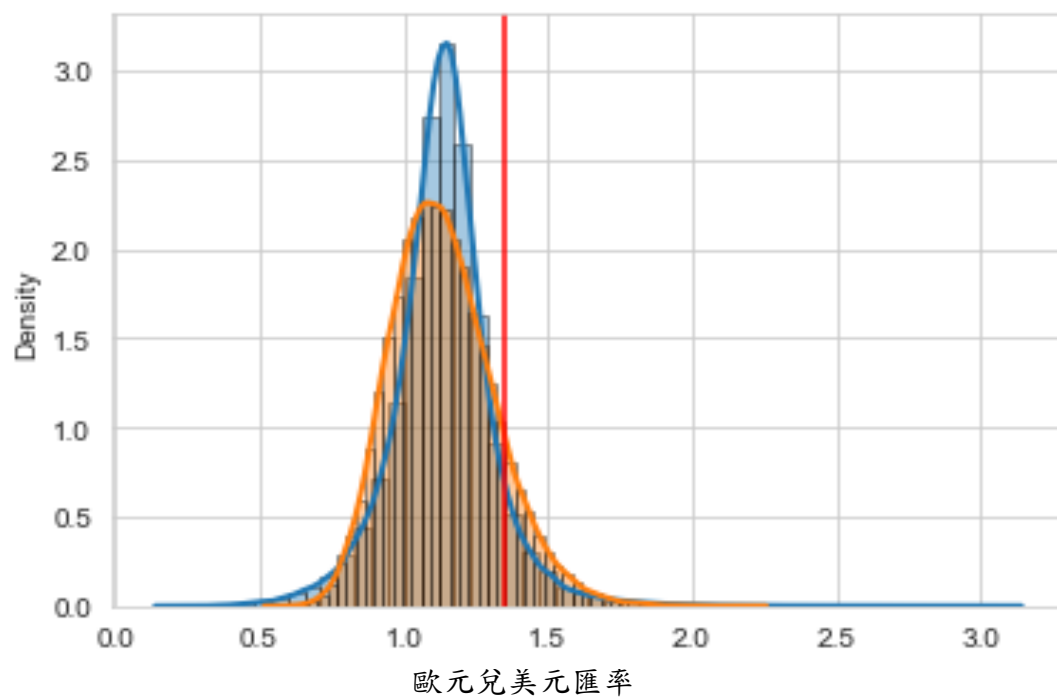


圖 17 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬二年歐元兌美元匯率分配

### Heston 模型波動度有無隨機項比較 模擬三年歐元兌美元匯率分配

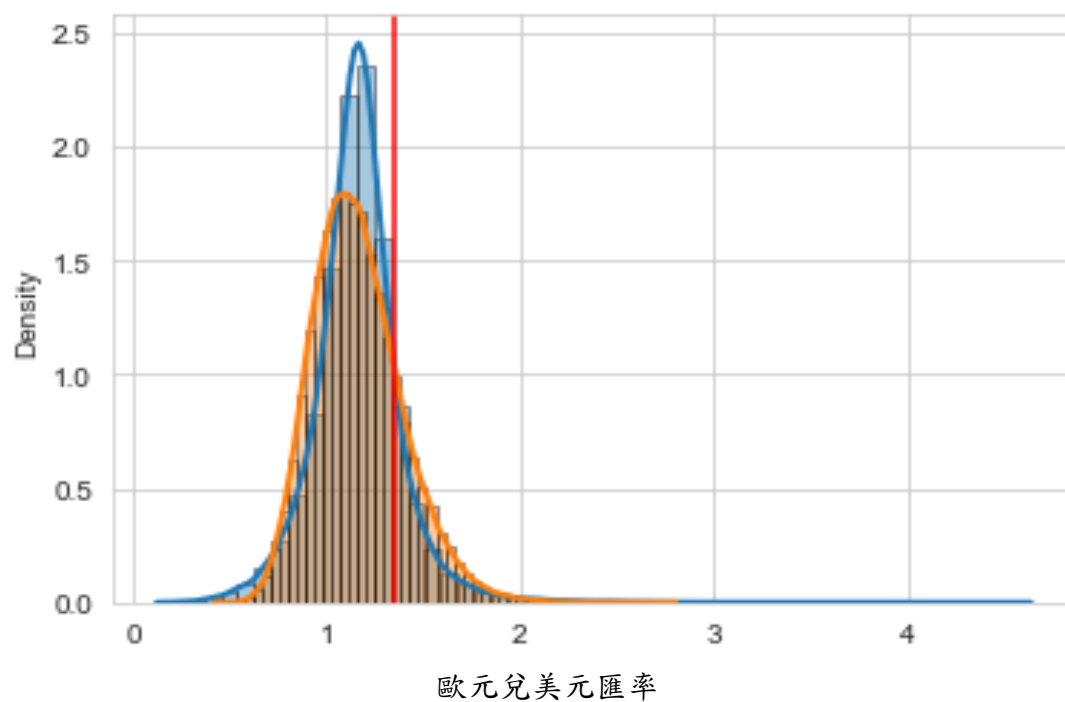


圖 18 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬三年歐元兌美元匯率分配

### Heston 模型波動度有無隨機項比較 模擬期末歐元兌美元匯率分配

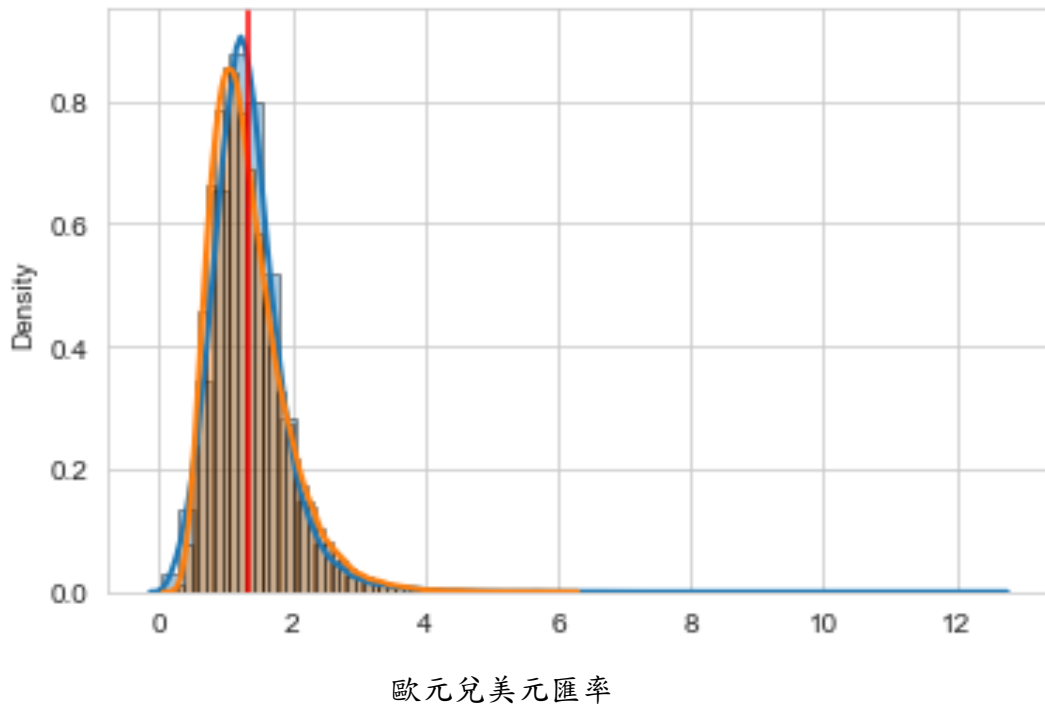


圖 19 Heston 模型波動度有無隨機項比較-模擬期末歐元兌美元匯率分配

另外，本研究也比較 Heston 模型中 $\kappa$ 的影響，如下表 16，標準普爾 500 指數和歐元兌美元的 $\kappa$ 上升對價值都是負影響，其中以標準普爾 500 指數改變的影響較大。

表 16  $\kappa$  上升 1%對價值的影響

	Heston	差異
S&P 500 $\kappa$ 上升 1%	9947.2057	-3.5177
EURUSD $\kappa$ 上升 1%	9950.2726	-0.4508

資料來源：本研究整理

接下來將提前買回權捨去，確認落入計息區間的差異是由資產價格分配所造成，評價結果顯示三種模型價值大小的順序和有提前買回權一樣，如下表 17。平均年化利息成本以 Heston 最低，由此可以發現使用 Black-Scholes 模型和 Heston

模型評價的差異，在於 Heston 模型下資產價格落入計息區間的機率低於其他兩種 Black-Scholes 模型。

表 17 結構型商品評價結果 (沒有提前買回)

	價值	標準誤	平均持有期間 (年)	平均利息成本 (年化%)
Black-Scholes ( $v_0$ )	12222.4663	6.7659	12	4.2057
Black-Scholes ( $\theta$ )	11625.9197	6.3142	12	3.6426
Heston	11508.4237	7.1270	12	3.5219

資料來源：本研究整理

基於表 10、表 17 的結果可以得到提前買回權的價值，如表 18。Black-Scholes 模型下資產價格落入計息區間的機率較高，因此提前買回權的價值也較高，其中 Black-Scholes ( $v_0$ ) 模型佔商品價值高達 21.3464%，Heston 模型也有達 15.6541%。

表 18 結構型商品提前買回權價值

	Black-Scholes ( $v_0$ )	Black-Scholes ( $\theta$ )	Heston
提前買回權價值	2150.0862	1644.3755	1557.7003
比例	21.3464%	16.4742%	15.6541%

資料來源：本研究整理

下圖 20、圖 21、圖 22 和圖 23 為標準普爾 500 指數價格和歐元兌美元匯率，可以發現相較於 Black-Scholes 模型，Heston 模型模擬的資產價格屬於較為右偏且厚尾的分配型態，因此模擬結果出現價外的機率上升，導致不會計息。

BS ( $\theta$ ) 模型模擬標準普爾 500 指數價格期末分配

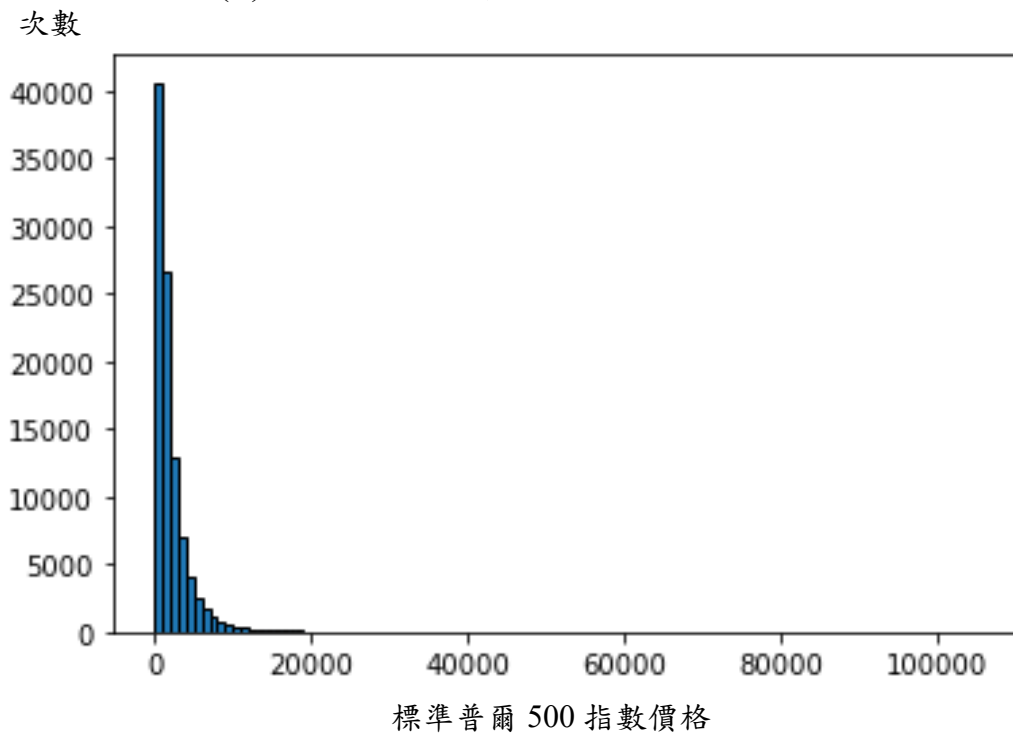


圖 20 Black-Scholes ( $\theta$ ) 模型 100000 次模擬下標準普爾 500 指數價格期末分配

Heston 模型模擬標準普爾 500 指數價格期末分配

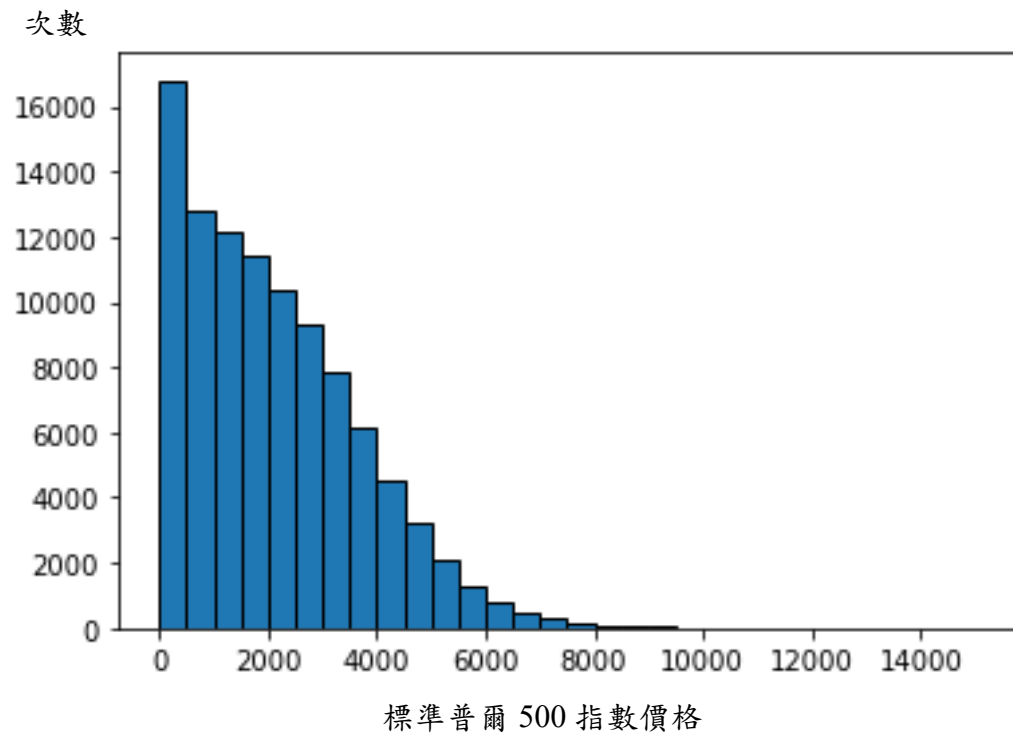


圖 21 Heston 模型 100000 次模擬下標準普爾 500 指數價格期末分配

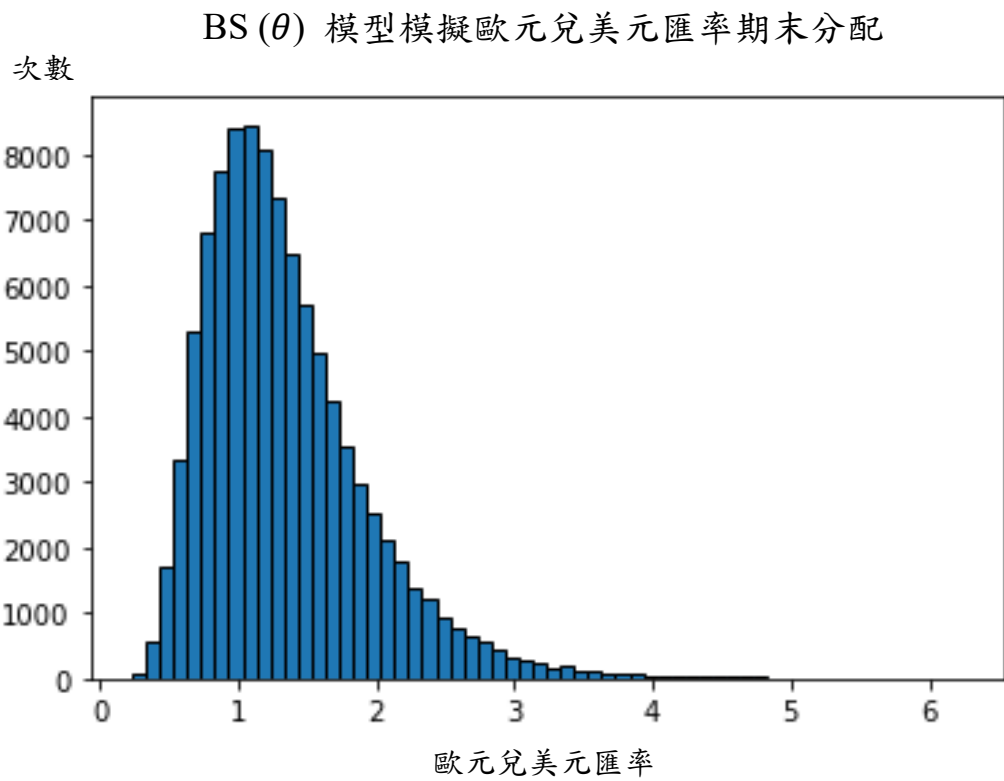


圖 22 Black-Scholes ( $\theta$ ) 模型 100000 次模擬下歐元兌美元匯率期末分配

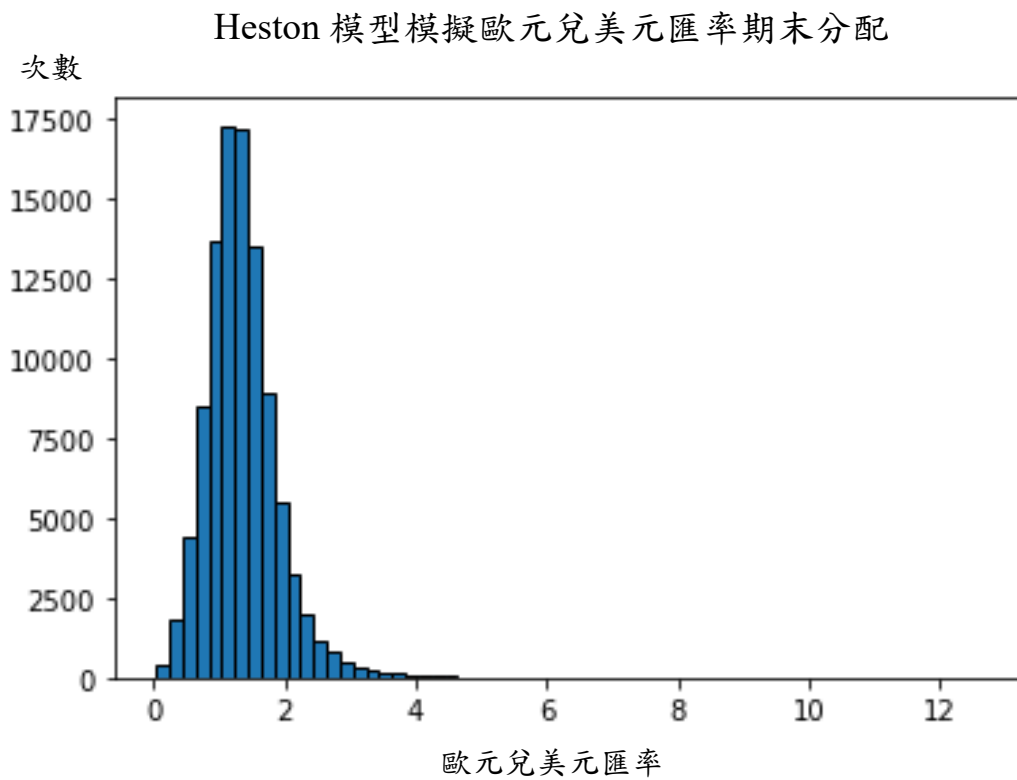


圖 23 Heston 模型 100000 次模擬下歐元兌美元匯率期末分配

除了 Heston 模型參數調整對價值的影響，本研究也分別對標準普爾 500 指數及歐元兌美元匯率做敏感性分析，如表 19、表 20，觀察當標的資產增加 1% 對商品價值的影響，在標準普爾 500 指數部分，三種模型 Delta 皆為負值，其中以 Heston 模型影響最大；在歐元兌美元匯率部分，三種模型 Delta 皆為 0，代表對價值沒有影響。

表 19 標準普爾 500 指數增加 1% 對價值的影響

	Black-Scholes ( $v_0$ )	Black-Scholes ( $\theta$ )	Heston
S&P 500 增加 1%	10057.7092	9970.0250	9913.9496
Delta (元)	-1467.09	-1151.92	-3677.38

資料來源：本研究整理

表 20 歐元兌美元匯率增加 1% 對價值的影響

	Black-Scholes ( $v_0$ )	Black-Scholes ( $\theta$ )	Heston
EURUSD 增加 1%	10072.3801	9981.5442	9950.7234
Delta (元)	0	0	0

資料來源：本研究整理

在波動度部分的影響都為負向，如下表 21 和表 22 所示， $v_0$  對 Heston 而言只是期初變異數，但對 Black-Scholes 的影響則是長期的，因此其影響較 Heston 大，此外，Heston 在標準普爾 500 指數變異數變動的影響較歐元兌美元大。而  $\theta$  對 Heston 來說則是長期的變異數，其對 Black-Scholes 和 Heston 的影響都會是長期的，結果顯示 Heston 變異數變動的影響較大，其影響可能會傳遞到隨機項，比較標準普爾 500 指數和歐元兌美元匯率變動前後兩個模型的差異如下表 23，兩種資產的差異都較變動前增加，而標準普爾 500 指數變異數變動的影響也都較歐元兌美元匯率大。

表 21  $v_0$  波動度上升 1%對價值的影響

	Black-Scholes ( $v_0$ )	Heston
S&P 500 $v_0$ 上升 0.01%	9981.5442	9949.6122
Vega (元)	-9083.59	-111.12
EURUSD $v_0$ 上升 0.01%	9981.5442	9950.3441
Vega (元)	-9083.59	-37.93

資料來源：本研究整理

表 22  $\theta$  波動度上升 1%對價值的影響

	Black-Scholes ( $\theta$ )	Heston
S&P 500 $\theta$ 上升 0.01%	9981.4203	9949.2176
Vega (元)	-12.39	-150.58
EURUSD $\theta$ 上升 0.01%	9981.5302	9950.2658
Vega (元)	-1.4	-45.76

資料來源：本研究整理

表 23 兩模型  $\theta$  波動度變動前後差異

	原始差異	變動後差異
S&P 500 $\theta$ 上升 0.01%	30.8208	32.2027
EURUSD $\theta$ 上升 0.01%	30.8208	31.2644

資料來源：本研究整理



## 第五章 研究結論與建議

### 第一節 研究結論

本研究使用 Heston (1993) 隨機波動度模型評價連結雙資產區間計息結構型商品，並使用市場資料逐一說明評價過程及其結果。在外匯市場資料處理部分，說明市場外匯選擇權報價慣例與意義，以及如何轉換成模型校正所需的波動度和履約價資料；在外匯利率資料處理，使用具市場流動性貨幣利率和外匯遠期價格回推，避免兩國貨幣利率不具一致性的問題；在參數校準方面，使用最小平方方法對價格建立目標函數，初始值的設定參考夏漢權 (2017) 分組的方法，解決 Levenberg-Marquardt 演算法只能計算區域最小值的問題；在評價計算上，使用 Longstaff 和 Schwartz (2001) 提出的最小平方蒙地卡羅法搭配歷史對數報酬相關係數。

研究結果發現，和 Black-Scholes 模型相比主要影響價值的因素為變異數的波動性，其中以標準普爾 500 指數變異數的波動性影響較大。在兩資產間相關性部分，此商品不論在 Black-Scholes 模型或 Heston 模型下，正相關、無相關或負相關對於價值的影響皆不大；Heston 模型中資產報酬和變異數的相關性除標準普爾 500 指數的相關性為無相關或正相關時，會有較大幅度的增幅，其他變化影響較小方向也缺乏一致性；變異數均數回歸速率參數 $\kappa$ 則對價值有負向的影響。此外，從敏感度分析結果觀察，使用 Heston 模型評價的 Delta 金額較其他兩個 Black-Scholes 模型大變動方向為負；在波動度部分，Black-Scholes ( $v_0$ ) 模型的 Vega 金額高於 Heston 模型方向為負，Black-Scholes ( $\theta$ ) 模型則低於 Heston 模型方向為負，理由為 $v_0$ 對 Heston 模型而言只是期初變異數，影響較小， $\theta$ 則是 Heston 模型長期平均變異數，且還會受變異數的波動性影響，因此影響較大；此外，標準普爾 500 指數對於參數的敏感性較高，歐元兌美元的 Delta 甚至為 0。

本研究商品標的為可提前買回保本每日區間計息結構型商品，對投資人而言是賣出數位選擇權賺取更高的報酬，當價格超出區間時，投資人則無法獲得該日利息，若波動性不大，發行機構擁有提前買回的權利，且此權利價值以 Heston 模型評價達商品價值的 15.6541%。造成兩種模型評價的差異在於 Black-Scholes 的模型下價格為對數常態分配，Heston 的分配則較右偏且具厚尾型態，後者出現價外的機率較大，因此計算結果平均持有期間較長、平均利息成本較低。若投資人因為考慮的價外機率比市場還要低而投資該商品，雖然保本但可能損失投資資金的機會成本。此外，發行機構的提前買回權價值高，若其執行此權利，投資人將面臨再投資風險，也是需考慮的因素之一。

## 第二節 研究限制及建議

本研究使用 Heston 模型對標準普爾 500 指數及歐元兌美元匯率模擬資產價格，並使用評價日當天的利率期間結構折現做評價，而沒有對折現利率進行建模，因此建議後續研究可再加入利率模型進行比較。再者，Heston 模型屬於隨機波動性模型，後續可以比較局部波動模型 (Local Volatility Model) 的評價效果。

## 參考文獻

### 中文文獻

夏漢權 (2017)，以 Heston model 隨機波動度模型評價結構型商品與目標可贖回遠期契約，國立中央大學財務金融研究所碩士論文。

金融監督管理委員會(2020)，銀行辦理高資產客戶適用之金融商品及服務管理辦法。

### 英文文獻

Bakshi, Gurdip, Peter Carr and Liuren Wu (2008). Stochastic risk premiums, stochastic skewness in currency options, and stochastic discount factors in international economies. *Journal of Financial Economics* 87(1), 132-156.

Berkaoui, Abdel, Mireille Bossy and Awa Diop (2008). Euler scheme for SDEs with non-Lipschitz diffusion coefficient: strong convergence. *ESAIM: Probability and Statistics*, 12, 1-11.

Black, Fischer and Myron Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

Bossy, Mireille and Awa Diop (2004). An efficient discretization scheme for one dimensional SDEs with a diffusion coefficient function of the form  $|x|^\alpha, \alpha \in [1/2, 1)$ . *Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique Working Paper*, 5396.

Boyle, Phelim, Mark Broadie and Paul Glasserman (1997). Monte Carlo methods for security pricing. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21(8-9), 1267-1321.

Breeden, Douglas T. (1979). An intertemporal asset pricing model with stochastic consumption and investment opportunities. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 265-296.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll Jr and Stephen A. Ross (1985). A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2), 385-407.

- Deelstra, Griselda and Freddy Delbaen (1998). Convergence of discretized stochastic (interest rate) processes with stochastic drift term. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*, 14(1), 77-84.
- Diop, Awa (2003). *Sur la discrétisation et le comportement à petit bruit d'EDS unidimensionnelles dont les coefficients sont à dérivées singulières*. PhD thesis, Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.
- Dongarra, Jack and Francis Sullivan (2000). Guest editors' introduction: The top 10 algorithms. *IEEE Annals of the History of Computing*, 2(1), 22-23.
- Eisenberg, Laurence K. and Robert A. Jarrow, (1991). Option pricing with random volatilities in complete markets. *Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper* 91-16.
- Heston, Steven L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Higham, Desmond J. and Xuerong Mao (2005). Convergence of Monte Carlo simulations involving the mean-reverting square root process. *Journal of Computational Finance*, 8(3), 35-61.
- Hull, John and Alan White (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *The Journal of Finance*, 42(2), 281-300.
- Hull, John C. (2018). Volatility Smiles. *Options, Futures, and other Derivatives*, 432-435. Pearson Education.
- (2018). More on Models and Numerical Procedures. *Options, Futures, and other Derivatives*, 642-646. Pearson Education.
- Johnson, Herb and David Shanno (1987). Option pricing when the variance is changing. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 143-151.
- Levenberg, Kenneth (1944). A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2), 164-168.

- Longstaff, Francis A. and Eduardo S. Schwartz (2001). Valuing American options by simulation: a simple least-squares approach. *The Review of Financial Studies*, 14(1), 113-147.
- Lord, Roger, Remmert Koekkoek and Dick Van Dijk (2010). A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantitative Finance*, 10(2), 177-194.
- Marquardt, Donald W. (1963). An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11(2), 431-441.
- Merton, Robert Cox (1973). Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 141-183.
- Scott, Louis O. (1987). Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 419-438.
- Stein, Elias M. and Jeremy C. Stein (1991). Stock price distributions with stochastic volatility: an analytic approach. *The Review of Financial Studies*, 4(4), 727-752.
- Wiggins, James B. (1987). Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates. *Journal of Financial Economics* 19(2), 351-372.

#### 網路資料

- Weatherall, James (2013). It is not the maths that causes the crisis. *Financial Times*.  
<https://www.ft.com/content/30fc4ece-760b-11e2-9891-00144feabdc0>
- 金融監督管理委員會 (2019)。金管會推出財富管理新方案。  
[https://www.fsc.gov.tw/ch/home.jsp?id=96&parentpath=0,2&mcustomize=news\\_view.jsp&dataserno=201912310001&dtable=News](https://www.fsc.gov.tw/ch/home.jsp?id=96&parentpath=0,2&mcustomize=news_view.jsp&dataserno=201912310001&dtable=News)