

五、美式模擬法的特性

(一)美式路徑相關選擇權的定價

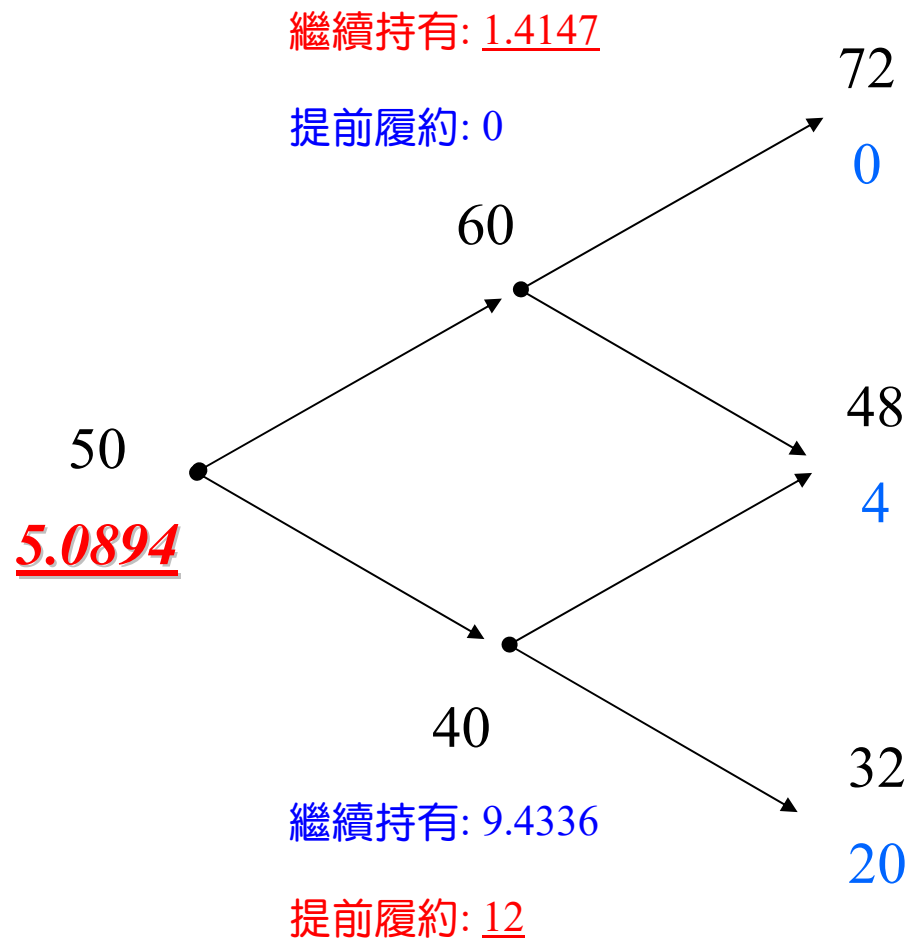
◆ 美式選擇權在任何時點皆可執行之

- 必須評估立刻執行的價值， V_e ，與繼續持有的價值， V_h 。

$$V_t = \text{Max}[V_e, V_h]$$

- ✓ 立刻執行的價值通常可由股票的價格模擬程序求得。
- ✓ 繼續持有的價值則涉及對未來預期。

◆ 在樹狀模型中，由於選擇權價格是由期末往前算，因此可以得知繼續持有的價值



- 美式賣權
 - $K=52$
 - 風險中立機率
- $$p = [\text{Exp}(0.05 \times 1 - 0.8)] / (1.2 - 0.8) = 0.6282$$

◆ 在模擬法中，如果要判斷是否應提前執行，則必須形成預期。

- 以最小平方法(Least-Squares Approach, LSM)形成預期，來評估繼續持有的價值，為目前的主流方法。
 - ✓ Longstaff and Schwartz，(*Review of Financial Studies*, 2001 Spring, Vol. 14, No. 1, pp. 113-47)，為一完整的參考資料。
- 下面以一個三期模擬的數值範例，說明此方法。

(二) 最小平方法的美式選擇權定價

◆ 一美式賣權，其標的資產價格模擬程序如下， $S_0 = 1.0$ ， $K=1.10$ ， $r = 6\%$ 。

Stock price paths ($X=1.10$, $r=0.06$, $T=3$)

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | 1.00 | 1.09 | 1.08 | 1.34 |
| 2 | 1.00 | 1.16 | 1.26 | 1.54 |
| 3 | 1.00 | 1.22 | 1.07 | 1.03 |
| 4 | 1.00 | 0.93 | 0.97 | 0.92 |
| 5 | 1.00 | 1.11 | 1.56 | 1.52 |
| 6 | 1.00 | 0.76 | 0.77 | 0.90 |
| 7 | 1.00 | 0.92 | 0.84 | 1.01 |
| 8 | 1.00 | 0.88 | 1.22 | 1.34 |

- ◆ 每一時點執行選擇權，產生的現金流量。

Cash flow matrix

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | | 0.01 | 0.02 | 0 |
| 2 | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 0.03 | 0.07 |
| 4 | | 0.17 | 0.13 | 0.18 |
| 5 | | 0 | 0 | 0 |
| 6 | | 0.34 | 0.33 | 0.20 |
| 7 | | 0.18 | 0.26 | 0.09 |
| 8 | | 0.22 | 0 | 0 |

- ◆ 在時點 2 中，選擇 ITM 的選擇權進行回歸估計，作為預期的根據。

The Regression at Time 2

| <u>Path</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|-------------|------------|
| 1 | <u>1.08</u> | 1.34(0.00) |
| 2 | 1.26 | 1.54 |
| 3 | <u>1.07</u> | 1.03(0.07) |
| 4 | <u>0.97</u> | 0.92(0.18) |
| 5 | 1.56 | 1.52 |
| 6 | <u>0.77</u> | 0.90(0.20) |
| 7 | <u>0.84</u> | 1.01(0.09) |
| 8 | 1.22 | 1.34 |

◆ 利用時點 2 的資訊(股價...), 預測時點 3 的選擇權價值, 作為判斷是否繼續持有

- 只有在時點 2 ITM 的股價才需考慮, Path 1, 3, 4, 6, 7。
- 需將時點 3 的選擇權價值折現至時點 2。
- 以時點 2 的股價 S 與 S^2 為自變數, 時點 3 的選擇權價 C 為因變數, 回歸估計。

| Regression at time 2 | | |
|----------------------|---------------------|------|
| Path | Y | X |
| 1 | $.00 \times .94176$ | 1.08 |
| 2 | — | — |
| 3 | $.07 \times .94176$ | 1.07 |
| 4 | $.18 \times .94176$ | .97 |
| 5 | — | — |
| 6 | $.20 \times .94176$ | .77 |
| 7 | $.09 \times .94176$ | .84 |
| 8 | — | — |

◆ 回歸結果如下

| <u>Path</u> | <u>Y</u> | <u>X</u> |
|-------------|--------------|----------|
| 1 | 0.00*0.94176 | 1.08 |
| 2 | | |
| 3 | 0.07*0.94176 | 1.07 |
| 4 | 0.18*0.94176 | 0.97 |
| 5 | | |
| 6 | 0.20*0.94176 | 0.77 |
| 7 | 0.09*0.94176 | 0.84 |
| 8 | | |

Note: $\exp(-0.06*1)=0.94176$

Independent variables: constant, X, X^2 .

Dependent variable: Y

Conditional expectation fcn: $E[Y|X] = -1.070 + 2.983X - 1.813 X^2$

◆ 利用回歸結果判斷是否需立刻執行或繼續持有

➤ 繼續持有之價值係由前述之回歸所形成的預期。

| Optimal early exercise decision at time 2 | | |
|-------------------------------------------|----------|--------------|
| Path | Exercise | Continuation |
| 1 | .02 | .0369 |
| 2 | — | — |
| 3 | .03 | .0461 |
| 4 | .13 | .1176 |
| 5 | — | — |
| 6 | .33 | .1520 |
| 7 | .26 | .1565 |
| 8 | — | — |

◆ Path 4, 6, 7 應執行之，

➤ 因立刻執行價值高於繼續持有之價值。

The Optimal Early Exercise Decision at Time 2

| Path | Exercise value | Continuation (Holding value) $E[Y X] = -1.070 + 2.983X - 1.813X^2$ |
|------|----------------|-----------------------------------------------------------------------|
| 1 | 0.02 | 0.0369 |
| 2 | | |
| 3 | 0.03 | 0.0461 |
| 4 | 0.13 > | 0.1176 |
| 5 | | |
| 6 | 0.33 > | 0.1520 |
| 7 | 0.26 > | 0.1565 |
| 8 | | |

◆ 時點 2 以後的現金流量

➤ Path 4, 6, 7 時點 2 的現金流量由立刻執行的 CF 取代之

Cash flow matrix at Time 2

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | | | 0 | 0 |
| 2 | | | 0 | 0 |
| 3 | | | 0 | 0.07 |
| 4 | | | 0.13 | <u>0</u> |
| 5 | | | 0 | 0 |
| 6 | | | 0.33 | <u>0</u> |
| 7 | | | 0.26 | <u>0</u> |
| 8 | | | 0 | 0 |

◆ 在時點 1 中，選擇 ITM 的選擇權進行回歸估計

➤ Path 1, 4, 6, 7, 8 為 ITM

Time 1

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|-------------|------------|------------|
| 1 | 1.00 | <u>1.09</u> | 1.08 | 1.34 |
| 2 | 1.00 | 1.16 | 1.26 | 1.54 |
| 3 | 1.00 | 1.22 | 1.07 | 1.03 |
| 4 | 1.00 | <u>0.93</u> | 0.97 | 0.92 |
| 5 | 1.00 | 1.11 | 1.56 | 1.52 |
| 6 | 1.00 | <u>0.76</u> | 0.77 | 0.90 |
| 7 | 1.00 | <u>0.92</u> | 0.84 | 1.01 |
| 8 | 1.00 | <u>0.88</u> | 1.22 | 1.34 |

◆ 利用時點 2 的選擇權價值，作為判斷是否繼續持有

➤ 取 Path 1, 4, 6, 7, 8 時點 2 的 CF 回歸之。

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | | | 0 | 0 |
| 2 | | | 0 | 0 |
| 3 | | | 0 | 0.07 |
| 4 | | | 0.13 | <u>0</u> |
| 5 | | | 0 | 0 |
| 6 | | | 0.33 | <u>0</u> |
| 7 | | | 0.26 | <u>0</u> |
| 8 | | | 0 | 0 |

The Regression at Time 1

◆ 相關變數如下

| Regression at time 1 | | |
|----------------------|---------------------|------|
| Path | Y | X |
| 1 | $.00 \times .94176$ | 1.09 |
| 2 | — | — |
| 3 | — | — |
| 4 | $.13 \times .94176$ | .93 |
| 5 | — | — |
| 6 | $.33 \times .94176$ | .76 |
| 7 | $.26 \times .94176$ | .92 |
| 8 | $.00 \times .94176$ | .88 |

◆ 回歸結果如下

| <u>Path</u> | <u>Y</u> | <u>X</u> |
|-------------|--------------|----------|
| 1 | 0.00*0.94176 | 1.09 |
| 2 | | |
| 3 | | |
| 4 | 0.13*0.94176 | 0.93 |
| 5 | | |
| 6 | 0.33*0.94176 | 0.76 |
| 7 | 0.26*0.94176 | 0.92 |
| 8 | 0.00*0.94176 | 0.88 |

$$E[Y|X]= 2.038-3.335X+1.356 X^2$$

◆ Path 4, 6, 7, 8 應執行之，

➤ 因立刻執行價值高於繼續持有之價值。

The Optimal Early Exercise Decision at Time 1

| Path | Exercise value | | Continuation (Holding value) $E[Y X] = 2.038 - 3.335X + 1.356X^2$ |
|------|----------------|---|----------------------------------------------------------------------|
| 1 | 0.01 | | 0.0139 |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | 0.17 | > | 0.1092 |
| 5 | | | |
| 6 | 0.34 | > | 0.2866 |
| 7 | 0.18 | > | 0.1175 |
| 8 | 0.22 | > | 0.1533 |

◆ 時點 1 以後的現金流量

➤ Path 4, 6, 7, 8 時點 1 的現金流量由立刻執行的 CF 取代之

Option Cash Flow Matrix

| <u>Path</u> | <u>t=0</u> | <u>t=1</u> | <u>t=2</u> | <u>t=3</u> |
|-------------|------------|------------|------------|------------|
| 1 | | 0 | 0 | 0 |
| 2 | | 0 | 0 | 0 |
| 3 | | 0 | 0 | 0.07 |
| 4 | | 0.17 | 0 | 0 |
| 5 | | 0 | 0 | 0 |
| 6 | | 0.34 | 0 | 0 |
| 7 | | 0.18 | 0 | 0 |
| 8 | | 0.22 | 0 | 0 |

Option Value= 0.1144

◆ 選擇權的期初價值可求得為

$$\frac{1}{8} \left(0.07e^{-0.06*3} + 0.17e^{-0.06*1} + 0.34e^{-0.06*1} + 0.18e^{-0.06*1} + 0.22e^{-0.06*1} \right) = 0.1144$$