長天期利率衍生商品之評價(四)

利率期限結構模型的傳統方法

昀騰金融科技

技術長

董夢雲 博士

dongmy@ms5.hinet.net

目　　錄

Part VI 傳統多因子利率模型與參數估計

Part VI 傳統多因子利率模型

與參數估計

五、雙因子模型

(一) Fong & Vasicek模型

- 兩個驅動因子分別為短期利率與短期利率的變異數，其風險中立的程序如下。

$$dr = \alpha(\bar{r} - r)\cdot dt + \sqrt{v}dz_1$$

$$dv = \gamma(\bar{v} - v)\cdot dt + \xi\sqrt{v}dz_2$$

$$dz_1 \cdot dz_2 = \rho \cdot dt$$

- 在無套利的均衡條件下，可導出零息債券價格如下

$$P(t,s) = \exp\left(-rD(t,s) + vF(t,s) + G(t,s)\right)$$

$$D(t,s) = \frac{\left(1 - e^{-\alpha(s-t)}\right)}{\alpha}$$

  - 即期利率的波動性為

$$\sigma_R(t,s) = \frac{1}{(s-t)}\sqrt{v\left(D(t,s)^2 - 2\rho\xi F(t,s)D(t,s) + \xi^2 F(t,s)^2\right)}$$

APPENDIX 6.1 *F* AND *G* FUNCTIONS FOR FONG AND VASICEK MODEL

$$F(t,s) = -\frac{2i\alpha\kappa\delta}{\xi^2}e^{-\alpha\tau} + \frac{2\alpha\sum_{j=1}^{2}K_j e^{-\beta_j\alpha\tau}\left(\beta_j M(d_j, e_j, i\kappa e^{-\alpha\tau}) + i\kappa e^{-\alpha\tau}\frac{d_j}{e_j}M(d_j+1, e_j+1, i\kappa e^{-\alpha\tau})\right)}{\sum_{j=1}^{2}K_j e^{-\beta_j\alpha\tau}M(d_j, e_j, i\kappa e^{-\alpha\tau})}$$

where

$$
\begin{aligned}
\tau &= s - t \\
\kappa &= \frac{\xi}{\alpha^2}\sqrt{1-\rho^2} \\
\delta &= \frac{1}{2} - \frac{i}{2}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} \\
d_j &= \frac{1}{2}e_j - \frac{i}{2}\frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{\xi}{\alpha^2}(1-\alpha\lambda) - \rho(\theta-1)\right) \quad \text{for } j = 1, 2 \\
e_j &= 2\beta_j - \theta + 1 \\
\beta_1 &= \beta \\
\beta_2 &= \theta - \beta \\
i &= \sqrt{-1}
\end{aligned}
$$

and where

$$\beta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sqrt{\theta^2 - \frac{\xi^2}{\alpha^4} + 2\lambda\frac{\xi^2}{\alpha^3}}$$

$$\theta = \frac{\gamma + \xi\eta}{\alpha} + \frac{\rho\xi}{\alpha^2}$$

The constants K_1 and K_2 are chosen to satisfy the boundary condition $F(0) = 0$. The function M is the confluent hypergeometric function with

$$M(d, e, z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(d+1)\ldots(d+n)z^n}{e(e+1)\ldots(e+n)n!}$$

The expression for G is found as the solution to

$$G(\tau) = -\alpha\bar{r}\int_t^s D(u)du + \gamma\bar{v}\int_t^s F(u)du$$

(二) Longstaff & Schwartz模型

- 短期利率下面兩個驅動因子所決定，

$$dx = (\gamma - \delta x) \cdot dt + \sqrt{x} dz_1$$

$$dy = (\eta - \theta y) \cdot dt + \sqrt{y} dz_2$$

$$r = \alpha x + \beta y \text{ ， } \alpha \neq \beta$$

  - 短期利率的波動性為

$$v = \alpha^2 x + \beta^2 y$$

- 在一般均衡的架構下，可導出零息債券價格如下

$$P(t,s) = \exp\big(G(t,s) + rC(t,s) + vD(t,s)\big)$$

where

$$
\begin{aligned}
\tau &= s - t \\
G(t, s) &= \kappa\tau + 2\gamma \ln A(t, s) + 2\eta \ln B(t, s) \\
A(t, s) &= \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(e^{\phi\tau} - 1) + 2\phi} \\
B(t, s) &= \frac{2\psi}{(\theta + \psi)(e^{\psi\tau} - 1) + 2\psi} \\
C(t, s) &= \frac{\alpha\phi(e^{\psi\tau} - 1)B(t, s) - \beta\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(t, s)}{\phi\psi(\beta - \alpha)} \\
D(t, s) &= \frac{\psi(e^{\phi\tau} - 1)A(\tau) - \phi(e^{\psi\tau} - 1)B(t, s)}{\phi\psi(\beta - \alpha)}
\end{aligned}
$$

and where

$$
\begin{aligned}
\phi &= \sqrt{2\alpha + \delta^2} \\
\psi &= \sqrt{2\beta + \theta^2} \\
\kappa &= \gamma(\delta + \phi) + \eta(\theta + \psi)
\end{aligned}
$$

➢ 即期利率的波動性為

$$\sigma_R(t,s)=\frac{1}{\tau}\sqrt{\left(\frac{\alpha\beta\psi^2(e^{\phi\tau}-1)^2A^2(t,s)-\alpha\beta\phi^2(e^{\psi\tau}-1)^2\beta^2(t,s)}{\phi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)r+\left(\frac{\beta\phi^2(e^{\psi\tau}-1)^2B^2(t,s)-\alpha\psi^2(e^{\phi\tau}-1)^2A^2(t,s)}{\phi^2\psi^2(\beta-\alpha)}\right)\nu}$$

◆ 歐式零息債券選擇權的封閉解為，

$$c(t,T,s) = P(t,s)\Psi(\theta_1,\theta_2;4\gamma,4\eta,\omega_1,\omega_2) - KP(t,T)\Psi(\theta_3,\theta_4;4\gamma,4\eta,\omega_3,\omega_4) \quad (6.40)$$

where

$$\theta_1 = \frac{4\zeta\phi^2}{\alpha(e^{\phi(T-t)}-1)^2A(t,s)}, \qquad \theta_2 = \frac{4\zeta\psi^2}{\beta(e^{\psi(T-t)}-1)^2B(t,s)}$$

$$\theta_3 = \frac{4\zeta\phi^2}{\alpha(e^{\phi(T-t)}-1)^2A(t,T)}, \qquad \theta_4 = \frac{4\zeta\psi^2}{\beta(e^{\psi(T-t)}-1)^2B(t,T)}$$

$$\omega_1 = \frac{4\phi e^{\phi(T-t)}A(t,s)(\beta r-\nu)}{\alpha(\beta-\alpha)(e^{\phi(T-t)}-1)A(t,T-s)}, \qquad \omega_2 = \frac{4\psi e^{\psi(T-t)}B(t,s)(\nu-\alpha r)}{\beta(\beta-\alpha)(e^{\psi(T-t)}-1)B(t,T-s)}$$

$$\omega_3 = \frac{4\phi e^{\phi(T-t)}A(t,T)(\beta r-\nu)}{\alpha(\beta-\alpha)(e^{\phi(T-t)}-1)}, \qquad \omega_4 = \frac{4\psi e^{\psi(T-t)}B(t,T)(\nu-\alpha r)}{\beta(\beta-\alpha)(e^{\psi(T-t)}-1)}$$

$$\zeta = \kappa(s-T) + 2\gamma\ln A(t,s-T) + 2\eta\ln B(t,s-T) - \ln K$$

➢ 其中 Ψ 為 Bivariate Non-central Chi-square 分配。

◆ Bivariate Non-central Chi-square 分配之累積機率密度函數可以如下求得，

$$\Psi(\theta_1,\theta_2;c_1,c_2,d_1,d_2)=\int_0^{\theta_1} f_{\chi^2(c_1,d_1)}(u)\left[\int_0^{\theta_2-u\theta_2/\theta_1} f_{\chi^2(c_2,d_2)}(s)ds\right]du$$

- $f_{\chi^2(c,d)}$ 表自由度為 c，non-centrality 參數為 d，之卡方分配 PDF 函數。
- 計算與實作細節可參考下面論文。
  - ✓ Chen & Scott(1992), "Pricing Interest Rate Options in a Two-Factor Cox-Ingersoll-Ross Model of the Term Structure, ***The Review of Financial Studies***, 5(4), 613-636.

六、多因子利率模型

- Balduzzi, Das, Foresi, & Sundaram(1996)提出三因子 affine 模型。
  - 短期利率、短期利率的常期水平、短期利率的瞬間變異數。
- Chen (1996)提出三因子 CIR 模型。
  - 短期利率、短期利率的常期水平、短期利率的瞬間變異數。

七、利率模型參數的估計

(一)傳統學術界的方法

- 使用下面的迴歸式估計參數

$$\Delta r = A + Br + \varepsilon$$

  - 利用最短且可觀察到的利率，作為 r 的替代變數。
  - 對比模型，相關參數可以得到

$$dr_t = \alpha(\bar{r} - r_t) \cdot dt + \sigma \cdot dZ_t$$

$$\alpha = -B \text{ ，} \bar{r} = -\frac{A}{B} \text{ ，} \sigma = \sigma_\varepsilon$$

- 迴歸式的解釋能力很低，以加拿大為例，1987~1996，R^2=0.07%。

Figure 13.1 Historical Movements in Canadian Government Bond Rates, 1987–1996

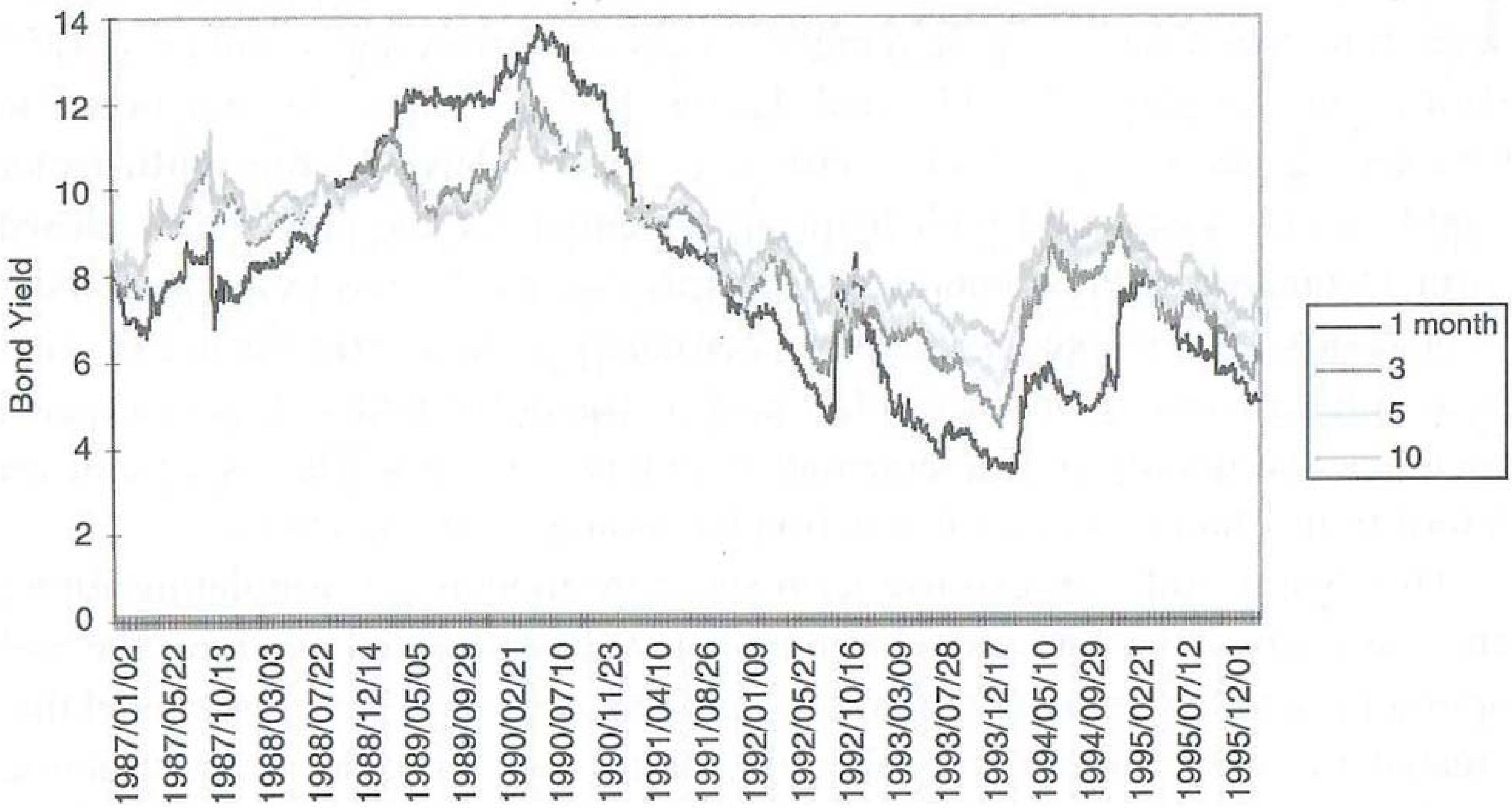

Figure 13.2 Change in One-Month Canadian Treasury Bill Rate versus Level of One-Month Rate, 1987–1996

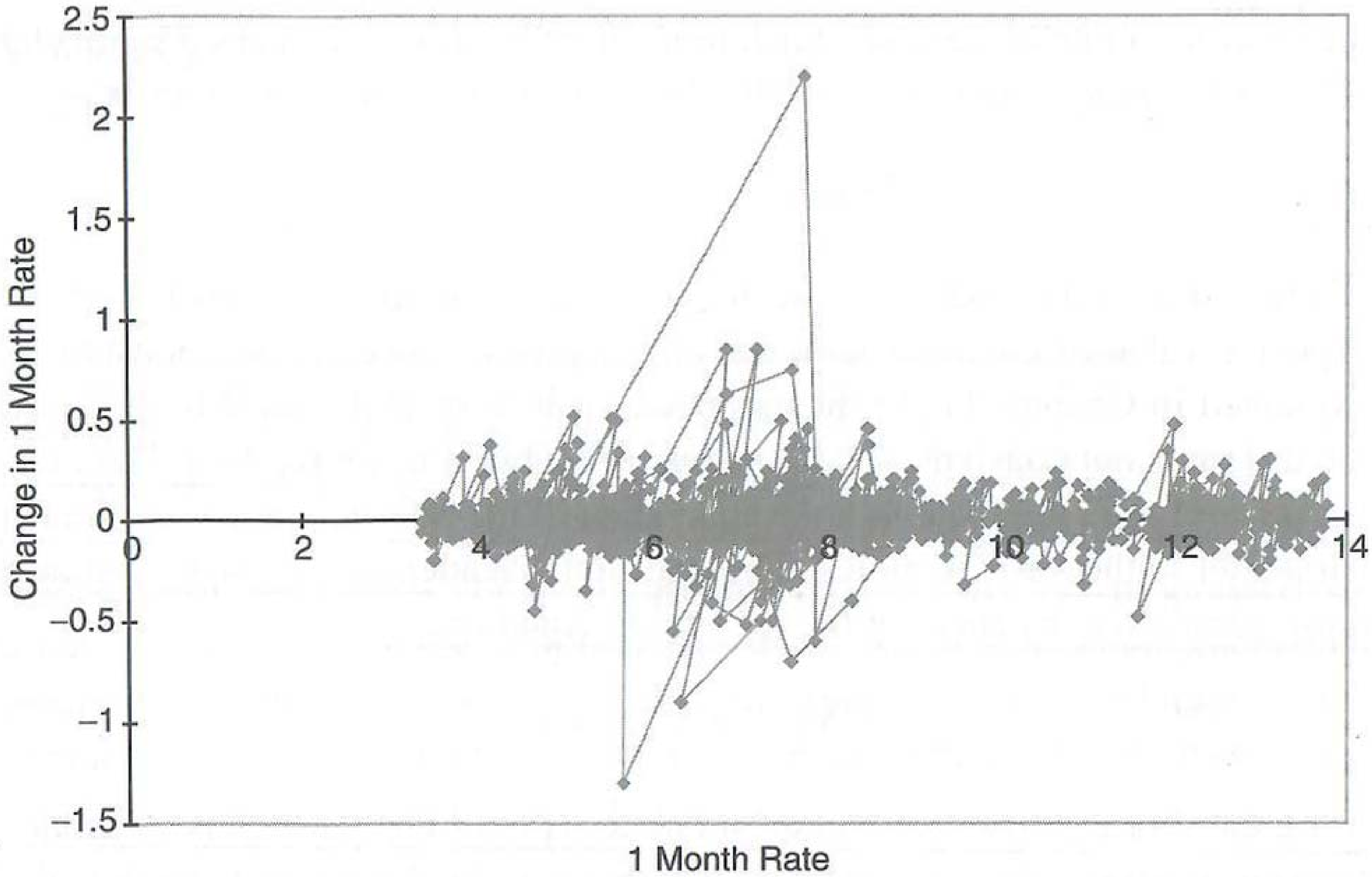

Table 13.1 Variance in Canadian Government Interest Rates (January 2 1987 to March 6 1996: Interest Rates and Variance are in Percent)

	Canadian Treasury Bills					Canadian Government Bond Years to Maturity						
	1 month	2 months	3 months	6 months	1 year	2	3	4	5	7	10	25
Actual Variance	7.677	8.346	7.433	6.842	6.529	3.880	3.044	2.623	2.237	1.909	1.471	0.996
Estimated Variance	7.943	7.745	7.552	7.008	6.051	4.564	3.496	2.717	2.143	1.389	0.794	0.140
Error	–0.266	0.602	–0.119	–0.166	0.478	–0.684	–0.452	–0.095	0.094	0.520	0.677	0.856
Squared Error	0.071	0.362	0.014	0.028	0.228	0.468	0.204	0.009	0.009	0.270	0.458	0.732
Best Fitting Parameter Values:												
Alpha	0.305172											
Sigma	2.854318%											
Maturity Tau	0.083333	0.166667	0.25	0.5	1	2	3	4	5	7	10	25

(二)波動性曲線的方法

- 以 Vasicek 模型為例，即期利率波動性為

$$\sigma_R(t,s)=\frac{\sigma}{\alpha(s-t)}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]$$

$$\sigma_R(s-t)=f(s-t)\sigma$$

- 步驟如下：
  - 收集各天期的即期利率波動性 market_i，i=1…M，
  - 設定 α 、 σ 起始值，通常令 $\alpha_0=0.10$ ， $\sigma_0=0.01$ ，計算模型的即期利率波動性 $\text{model}_i(\alpha，\sigma)$。
  - 利用迭代法，最適化如下的估計式，

$$\min_{\alpha,\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\text{model}_i(\alpha,\sigma)-\text{market}_i}{\text{market}_i}\right)^2}$$

(三)波動性曲線的進階方法

- 即期利率本身為短期利率的線性關係，

$$R(t,s)=-\frac{\ln A(t,s)}{s-t}+\frac{B(t,s)}{s-t}r$$

$$B(t,s)=\frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]，\ln A(t,s)=\frac{R_\infty}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]-(s-t)R_\infty-\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]^2$$

$$R(s-t)=f(s-t)r+g(s-t)$$

  - 針對不同到期日的即期利率，利用下面迴歸式估計參數，得到不同天期之 B(τ)。

$$dR(\tau)=A(\tau)+B(\tau)r$$

$$B(\tau)=f(\tau)$$

  - 選定最適之 α ，使得不同天期之 B(τ)有最適的配湊。

(四)由可觀察到的收益曲線求得隱含的參數

- 對實務工作者而言，由可觀察的證券價格隱含而得的參數資料，遠優於由歷史資料估得的參數值。
  - 如果可觀察的資料就是收益曲線本身，我們仍可根據理論模型，藉由最佳化的配湊方式，將此市場資料配湊出理論參數。
- 以 Vasicek 模型而言，s 時點到期的單位面值零息債券，在 t 時點的市場價格與即期利率可求得為，

$$P(t,s) = A(t,s)\cdot Exp\left[-r\cdot B(t,s)\right]$$

$$B(t,s) = \frac{1}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]$$

$$\ln A(t,s) = \frac{R_\infty}{\alpha}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]-(s-t)R_\infty-\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}\left[1-e^{-\alpha(s-t)}\right]^2$$

$$R(t,s) = -\frac{\ln A(t,s)}{s-t}+\frac{B(t,s)}{s-t}r$$

- 極小化觀察值與理論值的誤差，
  - 假設市場上有 M 個零息債券選擇權，其價格分別為 Market_i，I=1…M。令 $\text{Model}(\alpha,\sigma,\bar{r})_i$ 為由 Vasicek 模型所求的的價格，則如下校準波動性，

$$\min_{\alpha,\sigma,\bar{r}} \sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\text{model}_i(\alpha,\sigma,\bar{r}) - \text{market}_i}{\text{market}_i}\right)^2}$$

(五)最適方法：對波動性敏感工具的參數配湊

- 由可觀察到的衍生商品價格，如 Caps、Floors、Swaptions 的資料，去配湊出模型的參數值。
    - 先導出模型的理論價格，為模型參數的函數，使用最適化配湊方法，由市場觀察的價格資料，配湊出估計的參數數值。

八、一致性單因子利率模型

- 一致性模型的目標在模型化整個利率結構,使得期初觀察的市場資料能自動的與模型吻合一致。
  - 此類模型可概分為兩大類，分別為只配湊(Fitting)利率期限結構以及同時配湊利率期限結構與波動性期限結構。
- 在只配湊利率期限結構的模型中，有兩類方法可以達成此目標，
  - 描述短期利率程序，利用時變量的因子增加模型的參數，使得所有市場資料都被滿足。
  - 描述期初收益曲線及其波動結構，由之決定使模型無套利條件之漂移率結構。

(一)Ho & Lee(1986)

- Ho & Lee 首先以二元樹架構提出此模型，此模型的短期利率連續極限如下，

$$dr = \theta(t) \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad \text{(8.1)}$$

- $\theta(t)$ 代表一時變量的漂移率，反應初始遠期利率的斜率與波動參數，

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \sigma^2 \cdot t$$

  - ✓ 其中的偏微分，表期初遠期利率曲線，在 t 時點的斜率。
  - ✓ 此時變量的參數 $\theta(t)$ ，允許模型產生出市場上觀察到的債券價格。

◆ HL 模型下，s 時點到期的單位面值零息債券，在未來 T>t 時點的市場價格為，

$$P(T,s) = A(T,s)\cdot Exp\left[-r(T)\cdot B(T,s)\right] \text{..}(8.2)$$

$$B(T,s) = (s-T)$$

$$\ln A(T,s) = \ln\frac{P(t,s)}{P(t,T)} - B(T,s)\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)B(T,s)^2$$

➢ $r(T)$ 為 T 時點的短期利率。

➢ 即期利率與遠期利率的波動性結構皆為

$\sigma_R(t,s) = \sigma$ 。

➢ 偏微分項次可以差分近似。

$$\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} = \frac{\ln P(t,T+\Delta t) - \ln P(t,T-\Delta t)}{2\Delta t}$$

◆ 數值範例

FIGURE 7.1 Calculations for Ho and Lee Model

	maturity	rate	pdb price		
				B(1,5)	4.00
	0.00	5.00%	1.0000		
				slope	–0.05
	0.90	5.00%	0.9560	lnA(1,5)	–0.0008
T	1.00	5.00%	0.9512		
	1.10	5.00%	0.9465	**P(1,5)**	**0.8181**
s	5.00	5.00%	0.7788		
				c(0,1,5)	
	σ	1.00%			
				K	0.8187
				d1	0.0200
				d2	–0.0200
				σp	0.0400
				c(0,1,5)	**0.0124**

◆ HL 模型下的零息債券歐式選擇權價格可求得為，

$$c(t,T,s) = P(t,s)N(d_1) - KP(t,T)N(d_2) \quad \text{(8.3)}$$

$$p(t,T,s) = KP(t,T)N(-d_2) - P(t,s)N(-d_1)$$

➢ 其中

$$d_1 = \frac{\ln\left(\dfrac{P(t,s)}{KP(t,T)}\right)}{\sigma_P} + \frac{\sigma_P}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_P$$

$$\sigma_P = \sigma(s-t)\sqrt{T-t}$$

- 在 HL 模型中只有一個波動性的參數，可由市場上交易的利率選擇權價格來推估。
  - 假設市場上有 M 個零息債券選擇權，其價格分別為 Market_i，I=1…M。令 $\text{Model}(\sigma)_i$ 為由 HL 模型所求的的價格，則如下校準波動性，

$$\min_{\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\text{model}_i(\sigma)-\text{market}_i}{\text{market}_i}\right)^2}$$

◆ 數值範例

TABLE 7.1 US Dollar Cap Data for 21 January 1995

Caplet maturity	Cap vol. Black (1976) (%)
21 Jan 95	
21 Mar 95	15.25
21 Jun 95	17.25
21 Sep 95	17.25
21 Dec 95	17.50
21 Mar 96	18.00
21 Jun 96	18.00
21 Sep 96	18.00
21 Dec 96	18.00
21 Mar 97	17.75
21 Jun 97	17.50
21 Sep 97	17.50
21 Dec 97	17.50
21 Mar 98	17.25
21 Jun 98	17.25

FIGURE 7.2 Recovering Cash Prices from Black (1976) Volatilities

Date 21 Jan 95

Cap Rate	7.00%
Principal	1
Face Value Bond	**1.0175**

Caplet Maturity	Maturity in Years	Cap Vol Black 76	PDB Price	Spot	Forward Price	Cap Price (Black 76) cash
21 Jan 95	0.00		1.0000			
21 Mar 95	0.16	15.25%	0.9898	0.0635	0.0671	0.0002
21 Jun 95	0.41	17.25%	0.9733	0.0654	0.0738	0.0015
21 Sep 95	0.67	17.25%	0.9555	0.0683	0.0781	0.0037
21 Dec 95	0.92	17.50%	0.9370	0.0711	0.0814	0.0067
21 Mar 96	1.16	18.00%	0.9182	0.0733	0.0816	0.0098
21 Jun 96	1.42	18.00%	0.8996	0.0747	0.0817	0.0129
21 Sep 96	1.67	18.00%	0.8815	0.0756	0.0816	0.0160
21 Dec 96	1.92	18.00%	0.8637	0.0764	0.0818	0.0192
21 Mar 97	2.16	17.75%	0.8462	0.0772	0.0810	0.0223
21 Jun 97	2.42	17.50%	0.8292	0.0775	0.0810	0.0254
21 Sep 97	2.67	17.50%	0.8126	0.0778	0.0810	0.0284
21 Dec 97	2.92	17.50%	0.7963	0.0781	0.0815	0.0316
21 Mar 98	3.16	17.25%	0.7803	0.0784	0.0809	0.0346
21 Jun 98	3.42		0.7647			

- 由市場取得前表資料，利用 Black 76 模型計算出 Caplet 價格。
  - Cap Rate 為 7%，R_{Cap}=7%。
  - 由 $k\Delta\tau$到$(k+1)\Delta\tau$期的 Caplet，相當於 $k\Delta\tau$到期的 Put Option，標的物為$(k+1)\Delta\tau$到期的零息債券。
  - 此零息債券的面值為 NPA*(1+R_{Cap}*$\Delta\tau$)。

$$1(1+0.07\times 0.25)=1.0175$$

◆ 下表誤差為百分比誤差，

FIGURE 7.3 Results of Ho and Lee Calibration to Caps Data

Date	21 Jan 95
Cap Rate	7.00%
Principal	1
Face Value Bond	**1.0175**

Ho and Lee Calibration

Overall Volatility

Caplet Maturity	Maturity in Years	Cap Vol Black 76	PDB Price	Cap Price (Black 76) cash	HL vol **0.947%**	HL Price	Diff. (HL-B'76)
21 Jan 95	0.00		1.0000				
21 Mar 95	0.16	15.25%	0.9898	0.0002	0.95%	0.0002	0.0041
21 Jun 95	0.41	17.25%	0.9733	0.0015	0.95%	0.0014	0.0005
21 Sep 95	0.67	17.25%	0.9555	0.0037	0.95%	0.0036	0.0005
21 Dec 95	0.92	17.50%	0.9370	0.0067	0.95%	0.0065	0.0005
21 Mar 96	1.16	18.00%	0.9182	0.0098	0.95%	0.0095	0.0009
21 Jun 96	1.42	18.00%	0.8996	0.0129	0.95%	0.0124	0.0014
21 Sep 96	1.67	18.00%	0.8815	0.0160	0.95%	0.0153	0.0020
21 Dec 96	1.92	18.00%	0.8637	0.0192	0.95%	0.0182	0.0027
21 Mar 97	2.16	17.75%	0.8462	0.0223	0.95%	0.0210	0.0033
21 Jun 97	2.42	17.50%	0.8292	0.0254	0.95%	0.0238	0.0038
21 Sep 97	2.67	17.50%	0.8126	0.0284	0.95%	0.0265	0.0044
21 Dec 97	2.92	17.50%	0.7963	0.0316	0.95%	0.0294	0.0050
21 Mar 98	3.16	17.25%	0.7803	0.0346	0.95%	0.0321	0.0054
21 Jun 98	3.42		0.7647				
					Sum of squared errors		0.03458

(二)Hull & White(1993)

- Hull & White 模型的短期利率連續極限如下，

$$dr = [\theta(t) - \alpha r] \cdot dt + \sigma \cdot dz \quad \text{.......(8.4)}$$

- 此模型隱含常態分配的利率與對數常態的債券價格。
  - ✓ 又被稱之為"Vasicek fitted to the term structure"或"HL with mean reversion"。
- $\theta(t)$ 代表一時變量的漂移率，反應初始遠期利率的斜率與波動參數，

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \alpha \cdot f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$$

  - ✓ 其中的偏微分表期初遠期曲線在 t 時點的斜率。
- 此時變量的參數 $\theta(t)$ 允許模型產生出市場上觀察到的債券價格。

◆ HW 模型下，s 時點到期的單位面值零息債券，在未來 T>t 時點的市場價格為，

$$P(T,s) = A(T,s)\cdot Exp\left[-r(T)\cdot B(T,s)\right] \quad \text{(8.5)}$$

$$B(T,s) = \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha(s-T)})$$

$$\ln A(T,s) = \ln\frac{P(t,s)}{P(t,T)} - B(T,s)\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} - \frac{1}{4\alpha^3}\sigma^2(e^{-\alpha(s-t)} - e^{-\alpha(T-t)})^2(e^{2\alpha(T-t)}-1)$$

- $r(T)$ 為 T 時點的短期利率。
- 即期利率與遠期利率的波動性結構皆為

$$\sigma_R(t,s) = \frac{\sigma}{\alpha(s-t)}(1-e^{-\alpha(s-t)})\text{ 。}$$

◆ 數值範例

FIGURE 7.4 Calculations for the Hull and White Model

	maturity	rate	pdb price		
				B(1,5)	3.30
	0.00	5.00%	1.0000	slope	–0.05
				lnA(1,5)	–0.03565
	0.90	5.00%	0.9560		
T	1.00	5.00%	0.9512	**P(1,5)**	**0.8183**
	1.10	5.00%	0.9465		
s	5.00	5.00%	0.7788	**c(0,1,5)**	
α		10.00%		K	0.8187
σ		1.00%			
				d1	0.0157
				d2	–0.0157
				σp	0.0314
				c(0,1,5)	**0.0098**

◆ HW 模型下的零息債券歐式選擇權價格可求得為，

$$c(t,T,s)=P(t,s)N(d_1)-KP(t,T)N(d_2) \quad \text{.......(8.6)}$$

$$p(t,T,s)=KP(t,T)N(-d_2)-P(t,s)N(-d_1)$$

➢ 其中

$$d_1=\frac{\ln\left(\dfrac{P(t,s)}{KP(t,T)}\right)}{\sigma_P}+\frac{\sigma_P}{2}$$

$$d_2=d_1-\sigma_P$$

$$\sigma_P^2=\frac{\sigma^2}{2\alpha^3}(1-e^{-2\alpha(T-t)})(1-e^{-\alpha(s-T)})^2$$

◆ 在 HW 模型中只有二個參數，可由市場上交易的利率選擇權價格來推估。

➢ 假設市場上有 M 個零息債券選擇權，其價格分別為 Market_i，I=1…M。令 $\text{Model}(\alpha，\sigma)_i$ 為由 HW 模型所求的的價格，則如下校準參數，

$$\min_{\alpha,\sigma}\sqrt{\sum_{i=1}^{M}\left(\frac{\text{model}_i(\alpha,\sigma)-\text{market}_i}{\text{market}_i}\right)^2}$$

◆ 數值範例

FIGURE 7.5 Results of Hull and White Calibration to Caps Data

Date	21 Jan 95	
Cap Rate		7.00%
Principal		1
Face Value Bond		**1.0175**

Calculations based on Δt=0.25

Hull and White Calibration

α	**–29.94%**
σ	**0.87%**

Caplet Maturity	Maturity in Years	Cap Black Vol	PDB Price	Spot	Cap Price (Black 76) cash	HW Price	% Diff.
21 Jan 95	0.00		1.0000				
21 Mar 95	0.16	15.25%	0.9898	0.0635	0.000153	0.000155	0.000234
21 Jun 95	0.41	17.25%	0.9733	0.0654	0.001478	0.001444	0.000548
21 Sep 95	0.67	17.25%	0.9555	0.0683	0.003729	0.003668	0.000267
21 Dec 95	0.92	17.50%	0.9370	0.0711	0.006689	0.006597	0.000189
21 Mar 96	1.16	18.00%	0.9182	0.0733	0.009757	0.009598	0.000263
21 Jun 96	1.42	18.00%	0.8996	0.0747	0.012881	0.012657	0.000302
21 Sep 96	1.67	18.00%	0.8815	0.0756	0.016021	0.015738	0.000313
21 Dec 96	1.92	18.00%	0.8637	0.0764	0.019219	0.018893	0.000287
21 Mar 97	2.16	17.75%	0.8462	0.0772	0.022288	0.022017	0.000149
21 Jun 97	2.42	17.50%	0.8292	0.0775	0.025354	0.025220	0.000028
21 Sep 97	2.67	17.50%	0.8126	0.0778	0.028431	0.028492	0.000005
21 Dec 97	2.92	17.50%	0.7963	0.0781	0.031587	0.031901	0.000099
21 Mar 98	3.16	17.25%	0.7803	0.0784	0.034636	0.035371	0.000450
21 Jun 98	3.42		0.7647				
						Sum of squared errors	0.003133

(三)Black, Derman & Toy(BDT, 1990)

- BDT 模型的短期利率連續極限如下，

$$d\ln r(t) = [\theta(t) + \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)}\ln r(t)]\cdot dt + \sigma(t)\cdot dz \quad \text{......(8.7)}$$

  - 令波動性為常數可簡化模型成為，

$$d\ln r(t) = \theta(t)\cdot dt + \sigma\cdot dz$$

(四)Black & Karasinski(BK, 1991)

- BK 模型的短期利率連續極限如下，

$$d\ln r = [\theta(t) - \alpha(t)\ln r]\cdot dt + \sigma(t)\cdot dz \quad \text{(8.8)}$$

  - 令波動性為常數可簡化模型成為，

$$d\ln r(t) = [\theta(t) - \alpha\ln r]\cdot dt + \sigma\cdot dz$$