八、Variance Reduction Techniques

(一)Antithetic Variates

✦ 假設我們使用模擬法去估計 θ=E[X]，且已產生兩個期望值為 θ 之相同分配的隨機變數 X_1、X_2。則我們有

$$Var\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\frac{1}{4}\left[Var(X_1)+Var(X_2)+Cov(X_1,X_2)\right]$$

若 X_1、X_2 彼此負相關，則對估計較為有利。

✦ 假設 X_1 由 m 個隨機數字所產生，亦即

$$X_1=h(U_1,U_2,\ldots,U_m)$$

U_i 為獨立之[0, 1)均等分佈，則如下產生之 X_2 應與 X_1 具有負相關的性質

$$X_2=h(1-U_1,1-U_2,\ldots,1-U_m)$$

h 對其每一參數，應為嚴格單調函數。

(二)Control Variates

- 使用一個相似但較為簡單的問題之解析解，去提升答案的效率。

- 假設我們使用模擬法去估計 θ=E[X]，且已知另一變數 Y 之期望值，E[Y]= μ ，則對任一常數 c，

  $$X + c(Y - \mu)$$

  亦為 θ 之不偏估計值。

- 最適 c 值的估計值，c*，可由下式微分求得

  $$Var[X + c(Y - \mu)] = Var(X + cY)$$

  $$= Var(X) + c^2 Var(Y) + 2cCov(X,Y)$$

  $$c^* = -\frac{Cov(X,Y)}{Var(Y)}$$

  最小之變異數為

  $$Var(X) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(Y)} = (1 - \rho_{X,Y}^2)Var(X)$$

  Y 稱為模擬估計值 X 之控制變數。

- Arithmetic average-rate 選擇權的定價，可以使用相同條件之 Geometric average-rate 選擇權作為其控制變數，且令 c = -1。(Kemna, A. G. Z., “A Pricing Method for Option Based on Average Asset Values.” JBF, vol.14, no.1, (March 1990), 113-129.)