長天期利率衍生商品之評價

Pricing of Long-term Interest Rate Derivatives

中華開發工業銀行

風險管理處 處長

董夢雲 博士

目　錄

Part III 線性利率衍生商品的評價

八、利率交換(IRS)

九、固定利率CP(FRCP)與浮動利率Note(FRN)

十、FRN with LIBOR Index (Quanto Swap)

Part IV 非線性利率衍生商品的評價

十一、利率選擇權

十二、反浮動債券

十三、交換選擇權

Part I 基本概念

一、折現與複利

- 現值與折現率
  - 現值(Present Value, PV)：現金流量在折現之後的價值。
  - 折現率(Discount Rate)：反應投資人時間偏好(Time Preference)的比率。
  - 折現因子(Discount Factor, DF)：未來一元目前的現值。
- 範例：一年後有 100 元的現金收入，若市場上一年期存款利率為 6%，現值為

$$100\times\left(\frac{1}{1+0.06}\right)=94.34$$

◆ 折現（複利）的頻率

- 不同複利頻率，產生不同效果，投資實際天數 Act，市場利率 r，本金 A，
- 簡單複利：貨幣市場

$$PV_S = A\times\left(1+r\times\frac{Act}{365}\right)$$

- 一般複利：資本市場

$$PV_G = A\times(1+r)^{\frac{Act}{365}}$$

- 連續複利：選擇權相關交易，連續交易假說

$$PV_C = A\times e^{r\times\frac{Act}{365}}$$

- $PV_C \geq PV_G \geq PV_S$ 。

二、到期收益率與即期利率

◆ 到期收益率的定義

- 到期收益率(Yield To Maturity, YTM)：一項金融投資(債券)的內部報酬率(Internal Rate of Return)

$$P=\frac{CF_1}{1+y}+\frac{CF_2}{(1+y)^2}+\frac{CF_3}{(1+y)^3}+\cdots+\frac{CF_N}{(1+y)^N}$$

  - ✓ CF_t：t期現金流量
  - ✓ P：投資的價格(成本)
  - ✓ N：投資的年限(期數)
  - ✓ y：到期收益率

- 收益率不適合成為折現率，必需使用即期利率折現。

◆ 範例一：債券發行日為 2002/9/6，五年後到期，到期日為 2007/9/6，評價日為 2005/9/6，兩年後到期，面值$1,000,000，債息 4%每年付息一次，市場收益率報價 3.25%，則此債券價格多少？

$$P = \frac{4}{(1+0.0325)^1} + \frac{104}{(1+0.0325)^2} = 101.4299$$

◆ 範例二：同範例一，若目前市場價格為 1,020,000，則此債券之到期收益率多少？

$$102.0000 = \frac{4}{(1+y)^1} + \frac{104}{(1+y)^2}$$

◆ 即期利率的定義

- 即期利率(Spot Rate)：零息債券(Zero-Coupon Bond)的到期收益率。

$$P=\frac{CF_N}{(1+z_N)^N}=\frac{1}{(1+z_N)^N}\bullet CF_N=DF_N\bullet CF_N$$

  - ✓ z_N: N期的即期利率
  - ✓ DF_N: N期的折現因子

- 即期利率為計算現值的基礎，利用即期利率計算出折現因子。

◆ 範例三：同範例一，若一年期零息債券 YTM=3.00%，若有一筆兩年後現金流量$100，則此筆現金流量現值多少？

$$P=\frac{4}{(1+0.0325)^1}+\frac{104}{(1+0.0325)^2}=\frac{4}{(1+0.03)^1}+\frac{104}{(1+z_2)^2}$$

$$101.4299=3.8835+(101.4299-3.8835)$$

$$(1+z_2)^2=\frac{104}{97.5465}=1.0661582$$

$$z_2=3.25498\%$$

三、遠期利率與遠期利率協議

(一)遠期利率

◆ 遠期利率的定義

➢ 遠期利率(Forward Rate)：未來 t 時點開始，到 t+1 時點的即期利率，稱為 t 時點之單期遠期利率，以 f_t 表示之。未來 t 時點開始，到 t+n 時點的即期利率，稱為 t 時點之 n 期遠期利率，以 $f_{t,t+n}$ 表示之。

◆ 無套利理論

➢ 六個月投資期限之投資策略

✓ 方案一：直接買六個月到期之工具。

✓ 方案二：買三個月到期工具，三個月後再續約三個月。

◆ 無套利定價與預期理論

- 未來即期利率未必等於遠期利率。
- FRA 市場的出現，確保遠期利率等於預期未來即期利率。
- 以六個月投資期限之投資策略為例，方案二可改為，
  - ✓ 方案二 A：買三個月到期工具，同時購買三個月後開始的三個月期的 FRA。
- 市場上的套利交易確保下式成立，

$$\left(1+z_{6M}\times\frac{Act_{0,6M}}{365}\right)=\left(1+z_{3M}\times\frac{Act_{0,3M}}{365}\right)\left(1+f_{3M,6M}\times\frac{Act_{3M,6M}}{365}\right)$$

$$f_{3M,6M}=\left[\frac{\left(1+z_{6M}\times\frac{Act_{0,6M}}{365}\right)}{\left(1+z_{3M}\times\frac{Act_{0,3M}}{365}\right)}-1\right]\times\frac{365}{Act_{3M,6M}}$$

◆ 無套利定價可得到遠期利率與即期利率的一般關係式

$$(1+z_{m+n})^{m+n}=(1+z_m)^m(1+f_{m,m+n})^n$$

$$f_{m,m+n}=\sqrt[n]{\frac{(1+z_{m+n})^{m+n}}{(1+z_m)^m}}-1$$

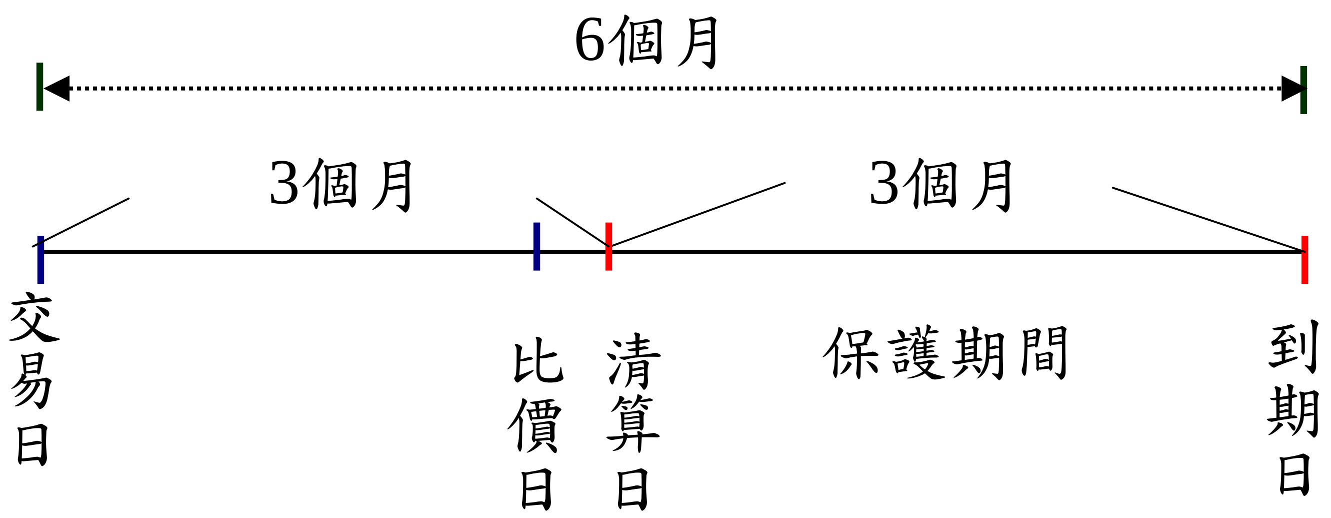
◆ 範例四：三個月期即期利率 4.00%，六個月期即期利率 5.00%，則 3×6 遠期利率多少？假設 T(0,3M)=91 天，T(0,6M)= 181 天。

(二)遠期契約協議

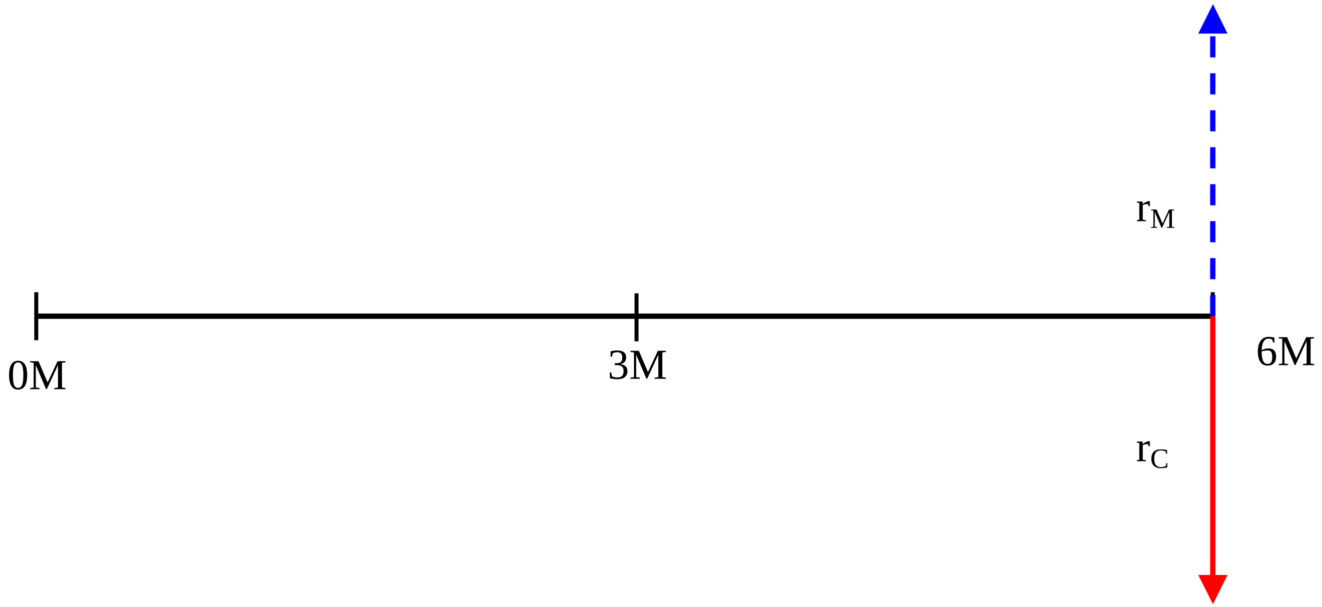
- 交易雙方在交易日約定，於未來某一特定期間，以特定利率進行特定幣別與金額的借貸。
  - 特性：到期時通常不進行實質借貸，而僅就市場利率(r_M)與約定利率(r_C)進行差額結算。適用於對利率走勢較確定時。
  - 買方：Pay Fixed, Rec Float，表借入資金的一方，$(r_M - r_C)*NPA*T$。
  - 賣方：Rec Fixed, Pay Float，表借出資金的一方，$(r_C - r_M)*NPA*T$。

◆ 3×6 的 FRA 交易的相關時點

3×6的FRA



◆ 3×6 的 FRA 交易的現金流量圖



◆ FRA 的市價評估

- 2002/10/22 交易一 3×6 之FRA，z_{3M}=2.4%，z_{6M}=2.80%，$f_{3\times6}$=?
- 2002/11/22 市價重估，z_{2M}=2.2%，z_{5M}=2.50%，Long Position之MTM=?

◆ FRA 的 DV01

- 2002/11/22 市價重估，z_{2M}=2.2%，z_{5M}=2.50%，Long Position之MTM=V_0
- z_{2M}=2.21%，z_{5M}=2.51%，Long Position之MTM=V_1
- DV01 = $V_1 - V_0$

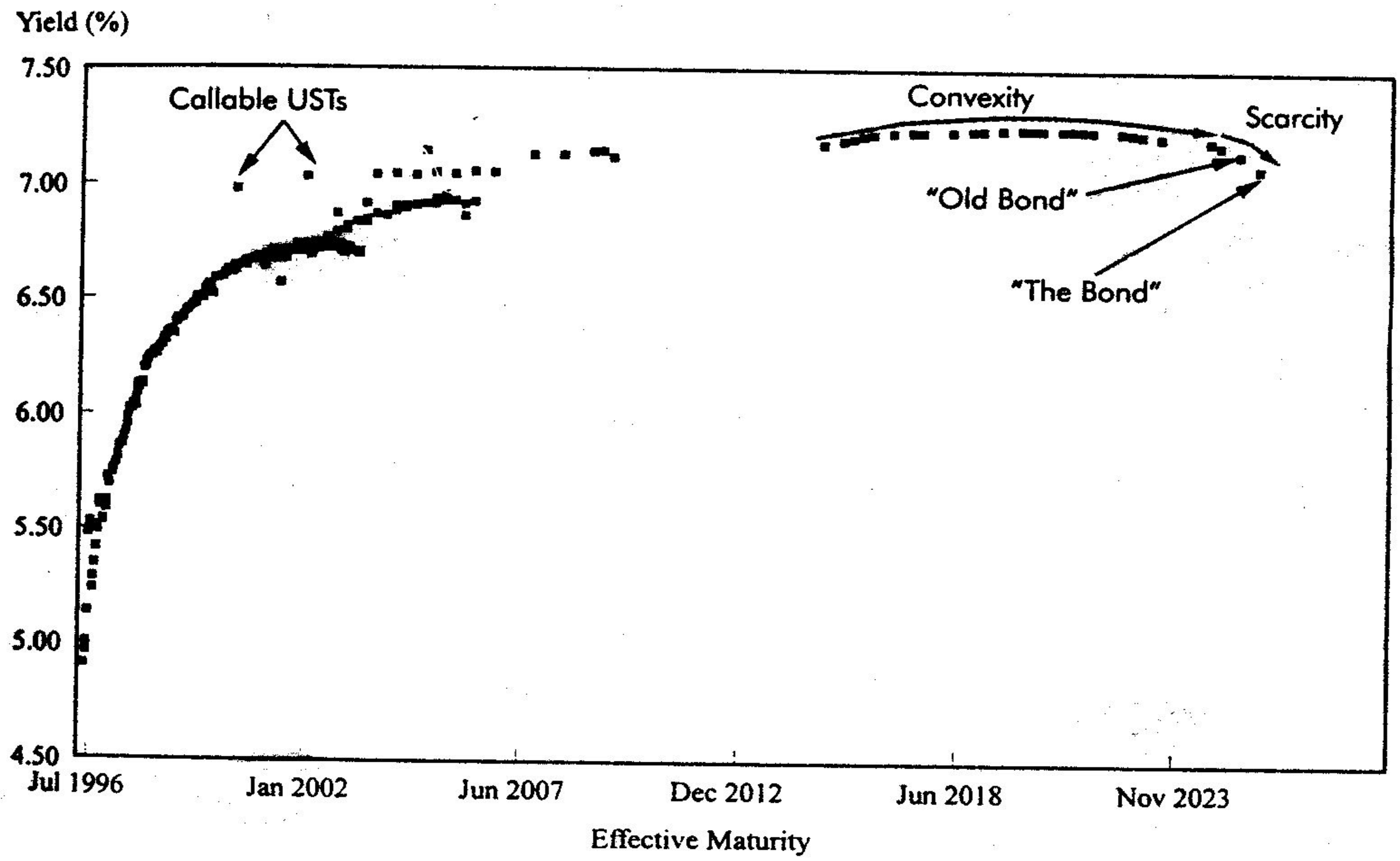
◆ FRA 應用時機

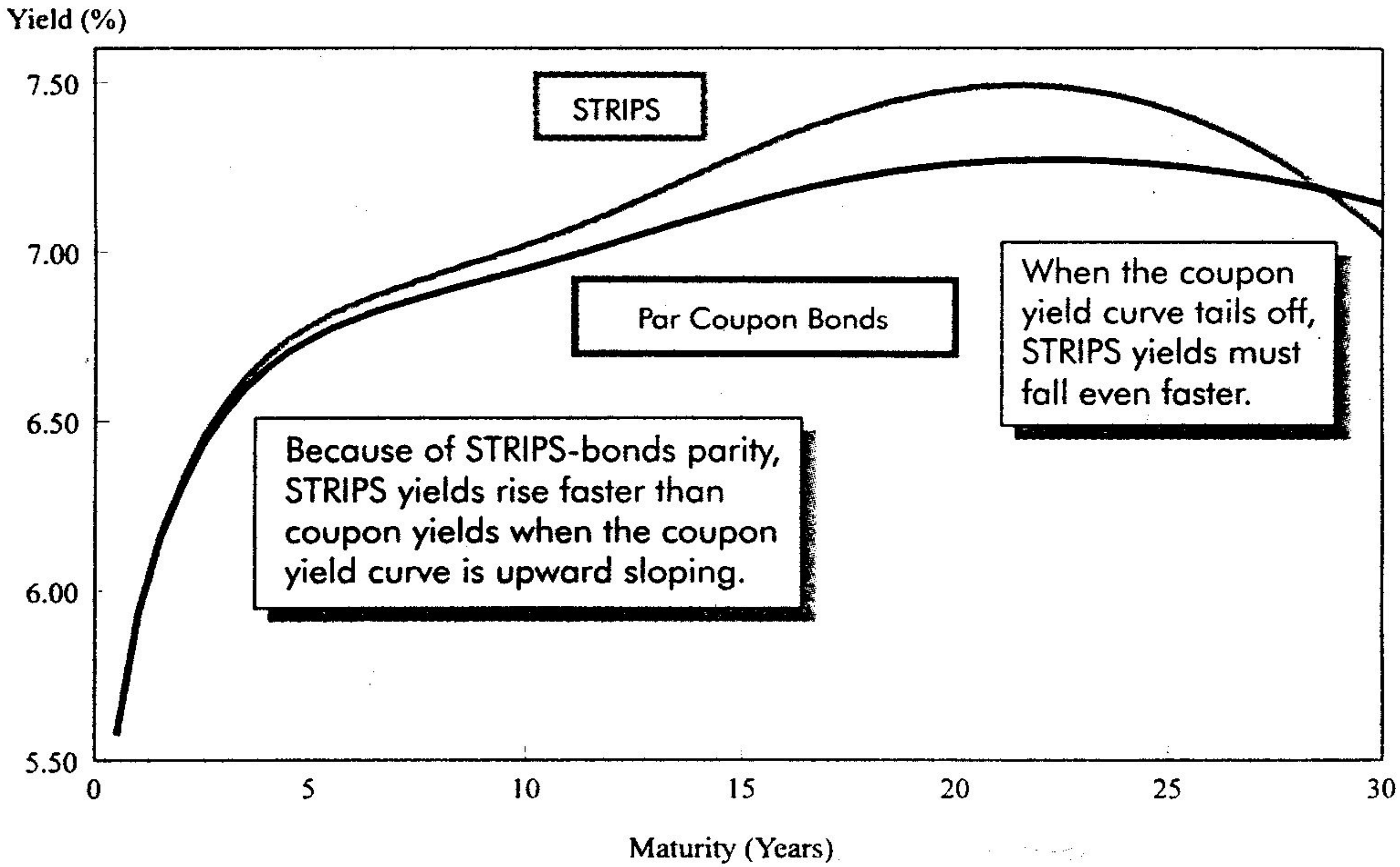
- 契約的買方為規避利率上漲的一方，契約的賣方為規避利率下跌的一方。
- 應用一：票券業者預防利率上漲，買入 FRA。
- 應用二：企業資金籌措預防利率上漲，買入 FRA。
- 應用三：企業資金投資預防利率下漲，賣出 FRA。

Part II 利率期限結構的建構

四、利率期限結構

- 收益曲線的內涵
  - 收益曲線(Yield Curve)：不同到期日債券收益率對到期日的作圖。
- STRIPS 市場與期限結構
  - 期限結構(Term Structure)：不同期限即期利率對期限的作圖，包含的訊息較為廣泛。

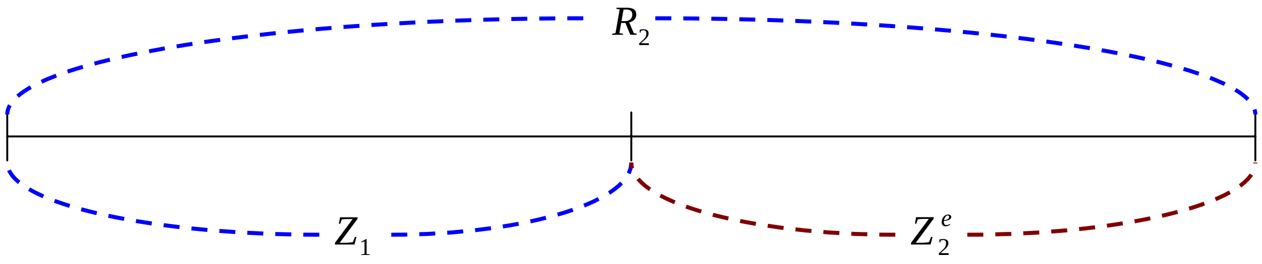

Yield (%)
7.50
7.00
6.50
6.00
5.50
5.00
4.50
Callable USTs
Convexity
Scarcity
"Old Bond"
"The Bond"
Jul 1996
Jan 2002
Jun 2007
Dec 2012
Jun 2018
Nov 2023
Effective Maturity


Yield (%)
7.50
7.00
6.50
6.00
5.50
0
5
10
15
20
25
30
Maturity (Years)
STRIPS
Par Coupon Bonds
Because of STRIPS-bonds parity, STRIPS yields rise faster than coupon yields when the coupon yield curve is upward sloping.
When the coupon yield curve tails off, STRIPS yields must fall even faster.

五、利率期限結構理論

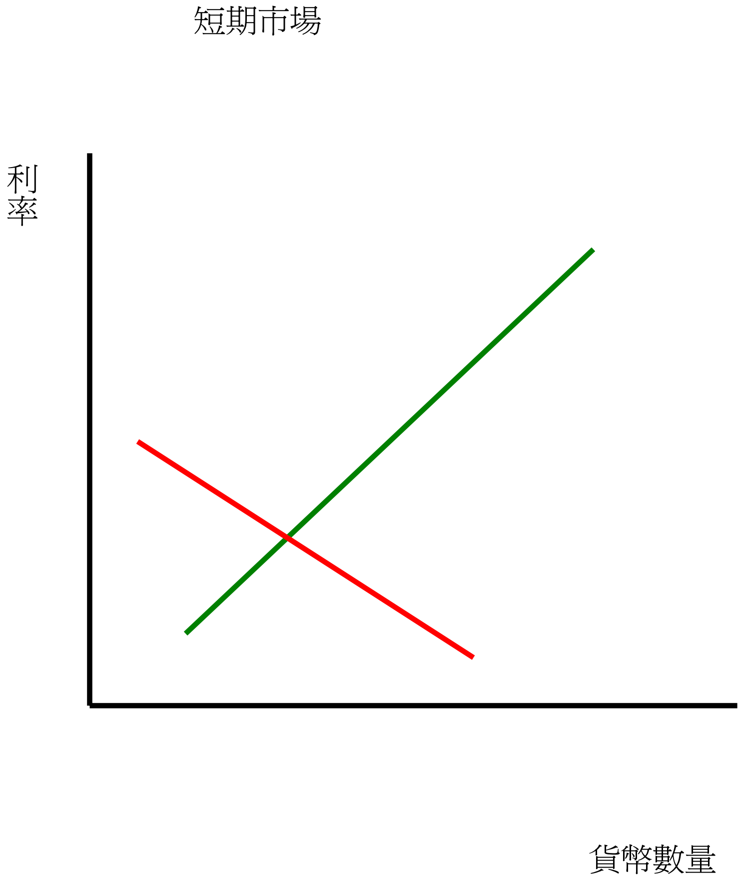
- 利率期限結構理論：解釋不同期限即期利率其利率高低與到期日之間的關係。可分為兩大類：預期理論(Expectation Theory)與市場區隔理論(Market Segmentation Theory)。
- 預期理論：多種相關理論
  - 純粹預期理論(Pure Expectation Theory)
  - 流動性理論(Liquidity Theory)
  - 習性偏好理論(Preferred Habitat Theory)
- 純粹預期理論：遠期利率充分代表預期未來即期利率。
  - 此理論隱含不同期限的投資策略有相同的報酬率。
  - 在有衍生性產品的市場中得到市場的支撐。

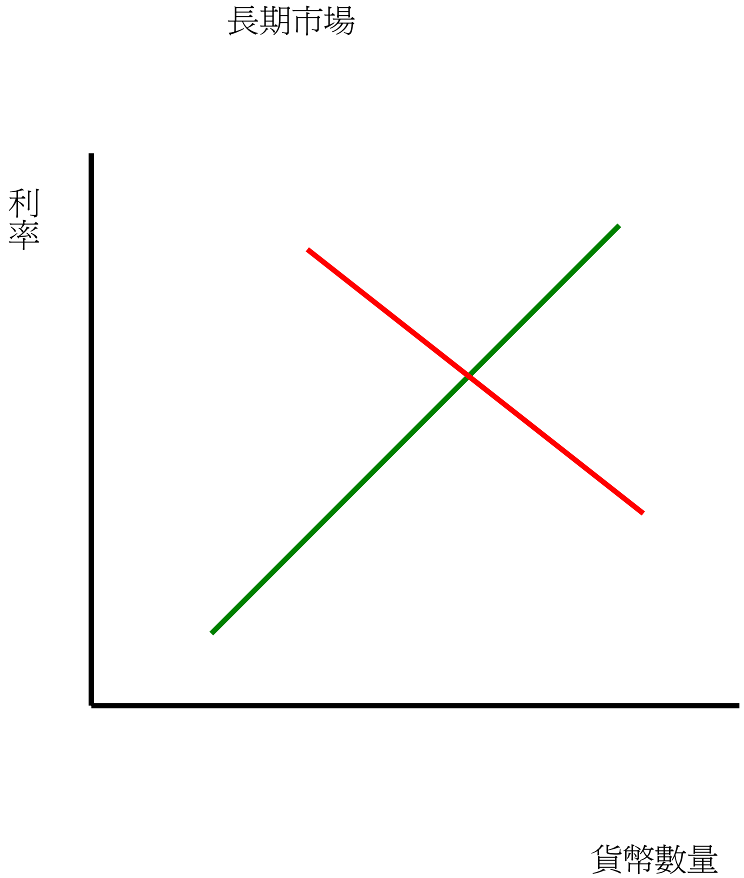
◆ 純粹預期理論概要



- $(1+R_2)^2 = (1+Z_1)(1+Z_2^e)$
- 上升型的期限結構代表預期短期利率上漲。

◆ 市場區隔理論：常短天期資金市場各有其供需，各自決定其市場利率。

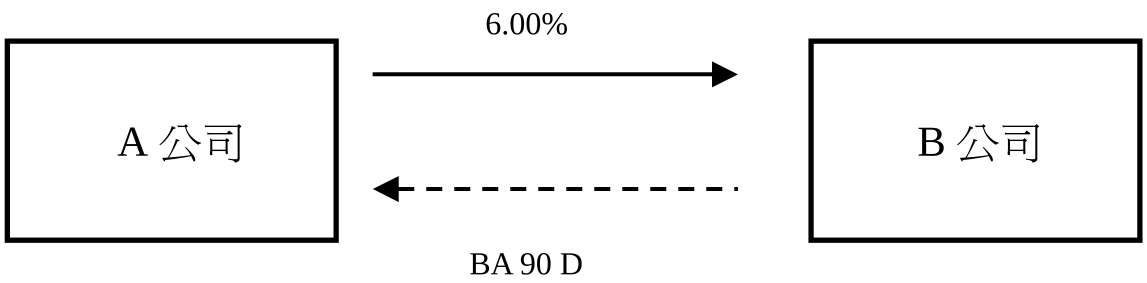




六、利率交換契約與即期利率曲線之建構

(一)利率交換契約

◆ 定義：一金融交易合約，交易雙方約定在未來的一段期間內，交換一定金額之利息收入。

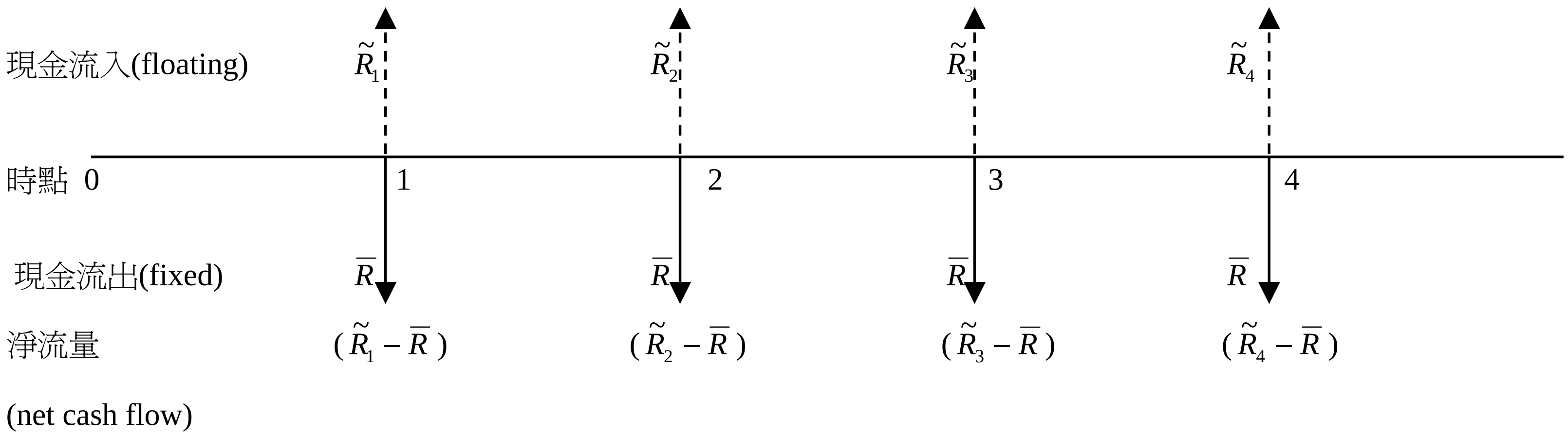


- 承作一 IRS 相當於訂約雙方相互承諾，在未來一固定期間內，雙方交換同一名目本金計算下的一系列利息。
- 利率交換之型態為固定利息與浮動利息的交換。
- 由於計息引用同一幣別的名目本金，因此實務上本金並不交換，每一計息日僅在利息差額上做交換(Netting)。
- 由於 Swap 屬於一資產負債表外(Off-balance Sheet)交易，因此並不影響交易雙方之資產負債表，僅需在年度之財務報表中予以適度揭露即可。
- 上市公司必需每月進行市價重估。

◆ 合約要項：

- 合約執行期限(Tenor)與起始日(Value Date)、到期日（Maturity Date）。
- 名目本金數額(Notional Principal Amount)。
- 利率交換方式(Receive/Pay Rate)。
- 浮動利率指標(Index of Floating Rate)。
- 比價基準(Rate Fixing Index)：貨幣市場中之次級市場中價。
- 常用指標如 Telerate：6165，Reuter：TWCPBA。
- 比價頻率通常為三個月。
- 比價日為每期起始日前兩個營業日。

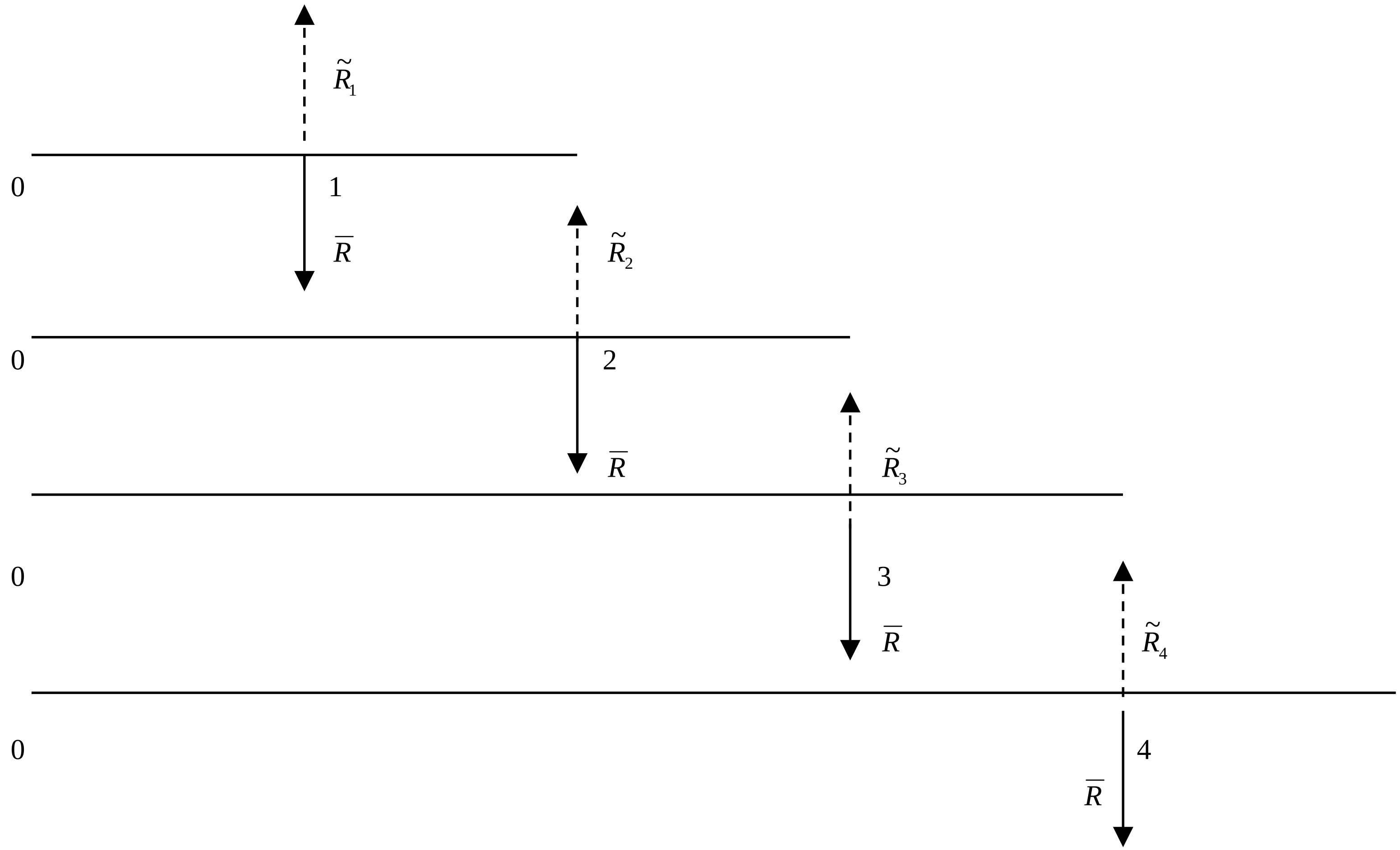
◆ 現金流量觀點下的 IRS



◆ IRS 可由多的單一時點現金流量 FRA 組成

◆ 亦可視為一個固定債券部位與一個浮動債券部位之組合

◆ IRS 的分解與合成



$\tilde{R}_1$
0
1
$\bar{R}$
$\tilde{R}_2$
0
2
$\bar{R}$
$\tilde{R}_3$
0
3
$\bar{R}$
$\tilde{R}_4$
0
4
$\bar{R}$

◆ IRS 的市價評估

- IRS 的 Long Position 為 Pay Fixed & Receive Floating。
- IRS 的 Short Position 為 Receive Fixed & Pay Floating。
- 期初承做 IRS 的買賣雙方 Market Value 相同，均為零。

$$IRS^{L}_{0}=IRS^{S}_{0}=\$0$$

- 承做之後，市場利率情況改變，買賣雙方市價不同，產生損益。

$$IRS^{L}_{0}\neq IRS^{S}_{0}\neq \$0$$

(二)Bootstrapping法建構即期利率曲線

- 市場上通用之即期利率曲線有二，一為無風險即期利率，另一為銀行信用等級之即期利率。
- 銀行信用等級之即期利率曲線可由 BA/CP Rate 與 IRS Rate 求得，
  - 市場上有 BA/CP Rate 與 IRS Rate 之固定報價，利用 Bootstrap 法可求得銀行信用等級之即期利率曲線。
  - 適合衍生商品定價中所需之融資成本。
- 無風險即期利率曲線可由 T-Bond YTM Curve 中求得，
  - 由 NS 模型求得之收益率函數，估計出固定間格時點之 YTM，再利用 Bootstrap 法可求得無風險之即期利率曲線。
  - 成為所有利率中之基本成分。

◆ BA 報價與 IRS 報價

Telerate 6165：BA 次級市場報價資訊，有 10，20，30，60，90，180 天的 BA 報價為即期利率報價

1998/9/14

10 D	20 D	30 D	60 D	90 D	180 D
6.596	6.609	6.629	6.635	6.632	6.684

Telearte 15452：IRS 初級市場報價資訊，有一，二，三，五，七年的 IRS 報價為收益率報價

1998/9/14

1 Yr	2 Yrs	3 Yrs	5 Yrs	7 Yrs
6.75/7.00	6.80/7.00	6.90/7.00	6.95/7.00	6.95/6.85

◆ 由市場報價求出期限結構

- 利用 Bootstrapping 方法合併 BA 與 IRS 報價求出未來七年的利率期限結構。

◆ 範例五：6165 90 天即期利率為 6.632，180 天即期利率為 6.684，15452 一年收益率為 6.875。今日為 2000/6/1，T(0, 3M)=92，T(0, 6M)=183，T(0, 9M)=273，T(0, 12M)=365。

- 三個月期即期利率$z_{0.25}$=6.632%，三個月期折現函數為 $\dfrac{1}{\left(1+6.632\%\times\dfrac{92}{365}\right)}=0.983559$ 。
- 半年期即期利率$z_{0.5}$=6.684%，半年期折現函數為 $\dfrac{1}{\left(1+6.684\%\times\dfrac{183}{365}\right)}=0.967575$ 。
- 半年期IRS收益率$y_{0.5}$可由下式求得，

$$100=\frac{0.25*y_{0.5}*100}{\left(1+z_{0.25}*\dfrac{T_{0,3M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{0.5}*100+100}{\left(1+z_{0.5}*\dfrac{T_{0,6M}}{365}\right)}$$

$$=25y_{0.5}*0.983559+(25y_{0.5}+100)*0.967575=25*1.951134y_{0.5}+96.7575$$

$$48.77835y_{0.5}=3.2425$$

$$y_{0.5}=6.6474\%$$

- 由半年期IRS與一年期IRS，內差 0.75 年IRS，$y_{0.75}$收益率為 6.7612%。
- 9 個月期即期利率$z_{0.75}$=6.684%，可由下式求得。

$$100=\frac{0.25*y_{0.75}*100}{\left(1+z_{0.25}*\frac{T_{0,3M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{0.75}*100}{\left(1+z_{0.5}*\frac{T_{0,6M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{0.75}*100+100}{\left(1+z_{0.75}*\frac{T_{0,9M}}{365}\right)}$$

- 已知一年期IRS，y_1收益率為 6.875%。
- 一年期即期利率z_1，可由下式求得。

$$100=\frac{0.25*y_1*100}{\left(1+z_{0.25}*\frac{T_{0,3M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_1*100}{\left(1+z_{0.5}*\frac{T_{0,6M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_1*100}{\left(1+z_{0.75}*\frac{T_{0,9M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_1*100+100}{\left(1+z_1*\frac{T_{0,12M}}{365}\right)}$$

- 一年三個月期IRS，可由一年期與兩年期IRS內差求得，$y_{1.25}$收益率為 6.8938%。
- 一年三個月期即期利率$z_{1.25}$，可由下式求得。

$$100=\frac{0.25*y_{1.25}*100}{\left(1+z_{0.25}*\frac{T_{0,3M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{1.25}*100}{\left(1+z_{0.5}*\frac{T_{0,6M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{1.25}*100}{\left(1+z_{0.75}*\frac{T_{0,9M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{1.25}*100}{\left(1+z_{1}*\frac{T_{0,12M}}{365}\right)}+\frac{0.25*y_{1.25}*100+100}{\left(1+z_{1.25}\right)^{\frac{T_{0,15M}}{365}}}$$

- 反覆迭代(Iterative)求出到七年折現函數。
- 線性內差折現函數，求出未來七年內每一日折現函數，再以之求出即期利率。

◆ 相對應之任何遠期利率，皆可由上述期限結構求出。

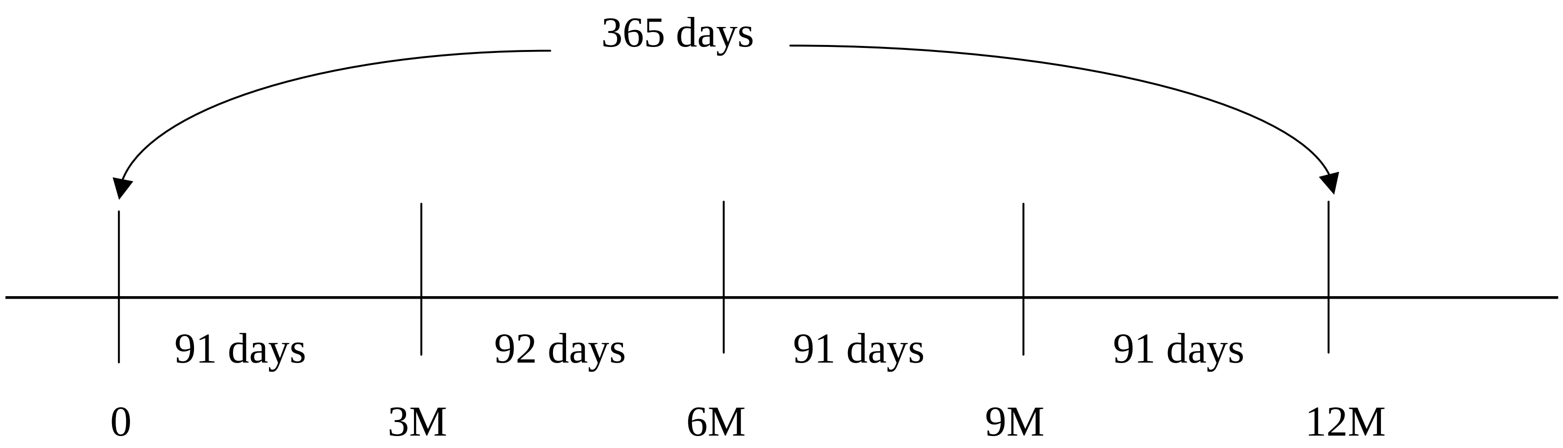
Part III 線性利率衍生商品的評價

七、利率交換(IRS)

- 利用 IRS 為 FRA 組合的方式，計算 IRS 市價。以一年期 IRS 為例，
  - $IRS_{1Y} = FRA_{0\times3} + FRA_{3\times6} + FRA_{6\times9} + FRA_{9\times12}$
  - $PV(IRS_{1Y}) = PV(FRA_{0\times3}) + PV(FRA_{3\times6}) + PV(FRA_{6\times9}) + PV(FRA_{9\times12})$
  - $DV01(IRS_{1Y}) = DV01(FRA_{0\times3}) + DV01(FRA_{3\times6}) + DV01(FRA_{6\times9}) + DV01(FRA_{9\times12})$

◆ 有 MM 市場資料如下

- BA 3M = 4.80%，BA 6M = 5.00%，BA 9M = 5.25%，BA 12M = 5.50%。
- F(3M , 6M)，F(6M,9M)，F(9M,12M) Forward Rate 多少？



- 利用利率期限理論之預期理論，有下面關係

$$(1+r_{6M}\times\frac{t_{6M}}{365})=(1+r_{3M}\times\frac{t_{3M}}{365})\times(1+f_{3M,6M}\times\frac{t_{3M,6M}}{365})$$

$$(1+r_{9M}\times\frac{t_{9M}}{365})=(1+r_{6M}\times\frac{t_{6M}}{365})\times(1+f_{6M,9M}\times\frac{t_{6M,9M}}{365})$$

$$(1+r_{12M}\times\frac{t_{12M}}{365})=(1+r_{9M}\times\frac{t_{9M}}{365})\times(1+f_{9M,12M}\times\frac{t_{9M,12M}}{365})$$

$$f_{3M,6M}=\left[\frac{(1+5.00\%\times\frac{183}{365})}{(1+4.80\%\times\frac{91}{365})}-1\right]\times\frac{365}{92}=5.1370\%$$

- 同理可得

$f_{6M,9M}=5.6115\%,\ f_{9M,12M}=6.0156\%$。

◆ 一年期 IRS 利率 y 可由下式求得：

PV(Fixed Side Cash Flow) = PV(Floating Side Cash Flow)

$$\frac{NPA\times y\times\frac{91}{365}}{(1+4.80\%\times\frac{91}{365})}+\frac{NPA\times y\times\frac{92}{365}}{(1+5.00\%\times\frac{183}{365})}+\frac{NPA\times y\times\frac{91}{365}}{(1+5.25\%\times\frac{274}{365})}+\frac{NPA\times y\times\frac{91}{365}}{(1+5.50\%\times\frac{365}{365})}$$

$$=\frac{NPA\times 4.80\%\times\frac{91}{365}}{(1+4.80\%\times\frac{91}{365})}+\frac{NPA\times 5.137\%\times\frac{92}{365}}{(1+5.00\%\times\frac{183}{365})}+\frac{NPA\times 5.6115\%\times\frac{91}{365}}{(1+5.25\%\times\frac{274}{365})}+\frac{NPA\times 6.0156\%\times\frac{91}{365}}{(1+5.50\%\times\frac{365}{365})}$$

y = 5.3901% 。

九、固定利率 CP(FRCP)與浮動利率 Note(FRN)

(一)固定利率CP

- 事先議定，在未來一段期間，以固定的利率發行特定天期的商業本票。
  - 例如，未來兩年將以 4%的利率，發行 90 天期的 CP。
- 對於發行保證機構而言，此種交易相當於一筆 IRS 契約。
  - 每一期的 CP 購入資金以市場利率融通，每季付出浮動利息。
  - 由購入的 CP 收到事先議定的 4%利息，每季收入固定的利息。
- 一個 FRCP 實質上就是一個收固定、付浮動的 IRS。
  - 前例的 FRCP 即為兩年期，每季交換、收固定 4%的 IRS 契約。
  - 以 IRS 方式，進行市價重估即可。

(二)浮動利率Note

- 浮動利率債券可視為 IRS 契約的 Floating Leg。
  - 一筆 IRS 契約可看成 Floating Leg 與 Fixed Leg 的組合。
  - 利用估計之利率期限結構，計算各天期的 Implied Forward Rate，設算現金流量。
  - 以即期利率折現，可得其市價。
- 對沒有加減碼之 FRN，可以簡化方式計算。
  - 每次重設利率時，FRN 市值回到面值。
  - 以最近比價之利息與下次重設日期之面值，分別折現加總，便得其市價。

十、FRN with LIBOR Index

- 如果 FRN 之利率指標為外幣利率，如美元 LIBOR+50b.p.，則作法類似台幣情況。
  - 由美元 LIBOR 與美元 IRS 收益率，利用 Bootstrap 法，導出美元之利率期限結構。
  - 由即期利率計算 Implied Forward Rate，計算現金流量。
  - 注意，美元計息之天期方式，Act/360。
  - 再以即期利率折現現金流量，即得市價。

Part IV 非線性利率衍生商品的評價

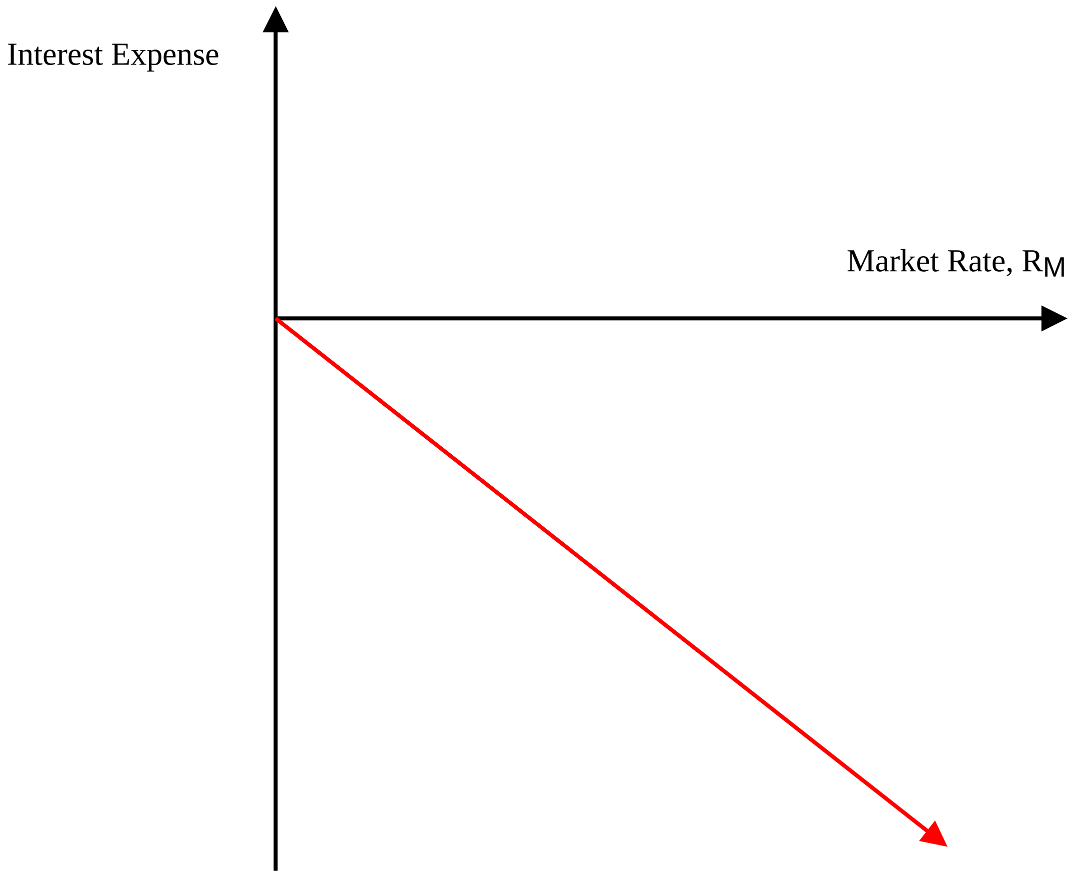
十一、利率選擇權

(一)利率上限

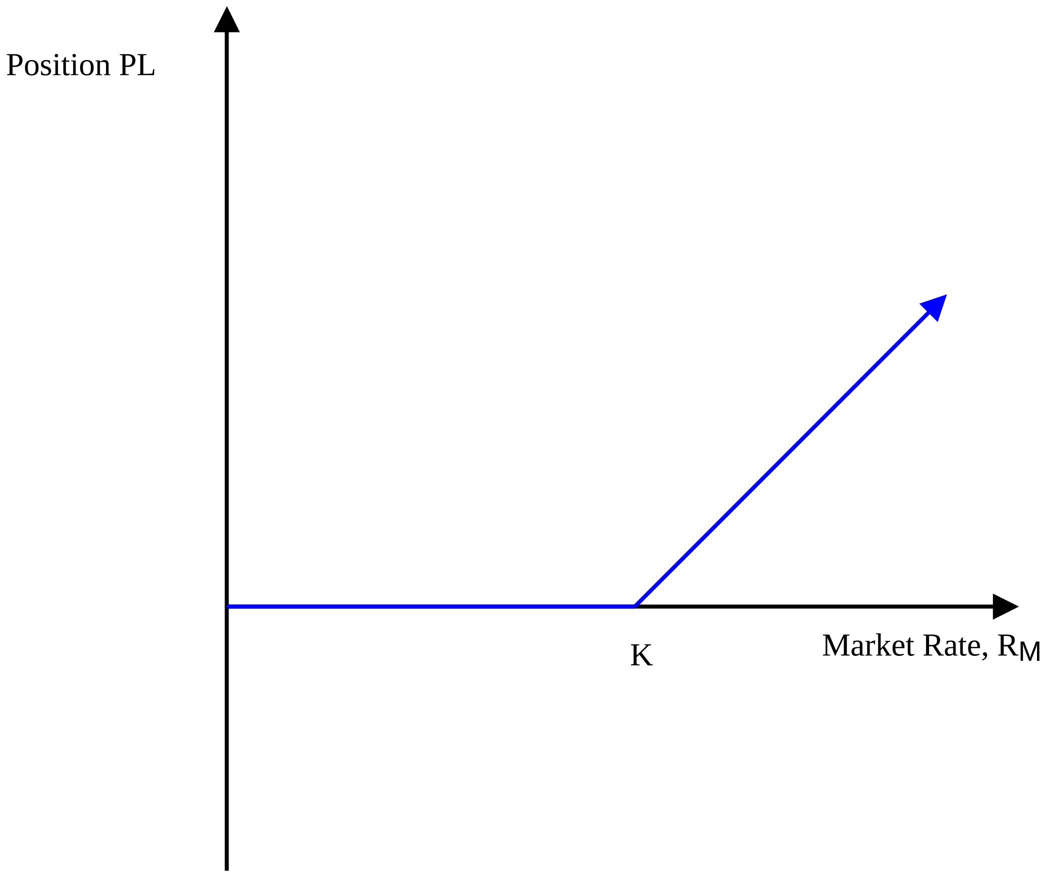
- Interest Rate Caps（利率上限）是由一連串的 Interest Rate Caplets（利率買入選擇權）所組成。
  - 利率買入選擇權允許買方以事先預定的協議利率 K，向賣方借入一定的金額一段期間。
  - 此協議利率為一上限利率(Caps)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間(Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率買入選擇權名目本金L，利率上限為K，有效期間為τ，若比價之利率為R_M，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times L \times \mathrm{Max}[R_M - K, 0] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

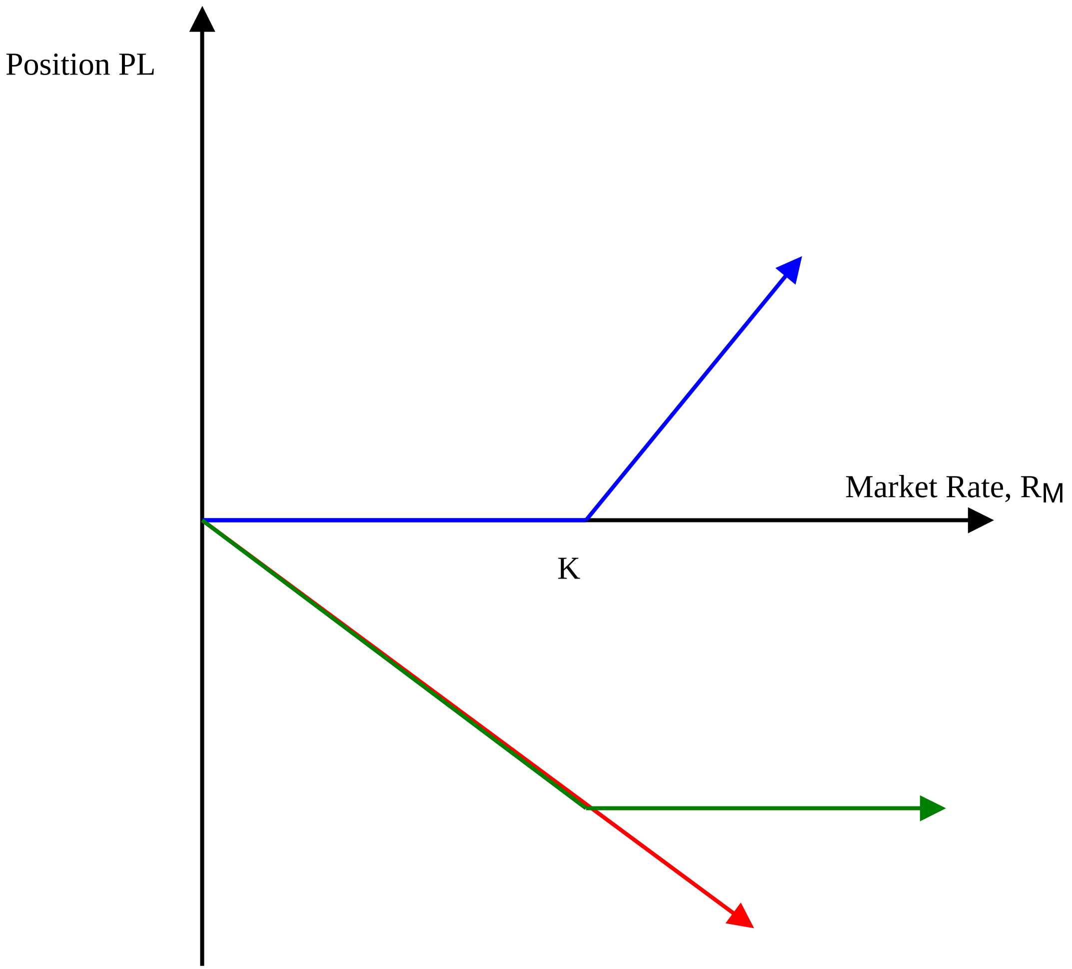
◆ Loan 之 Risk Profile



◆ Caplet 之 Risk Profile

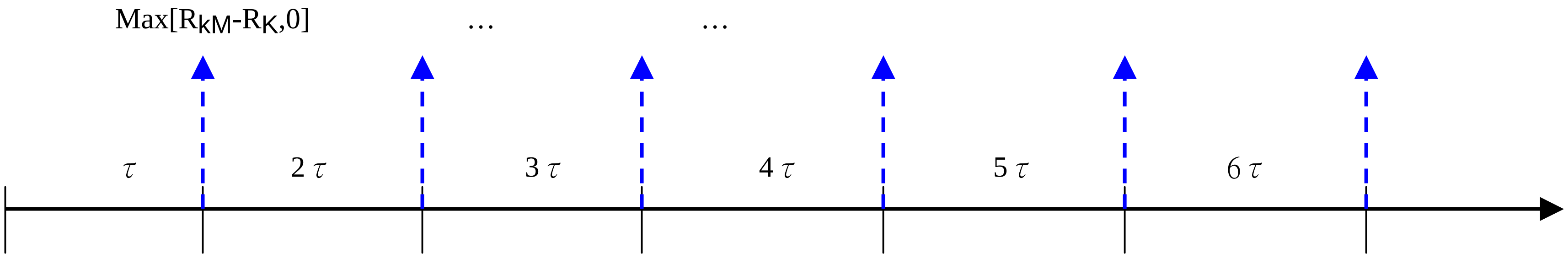


◆ Loan 與 Caplet 之 Risk Profile

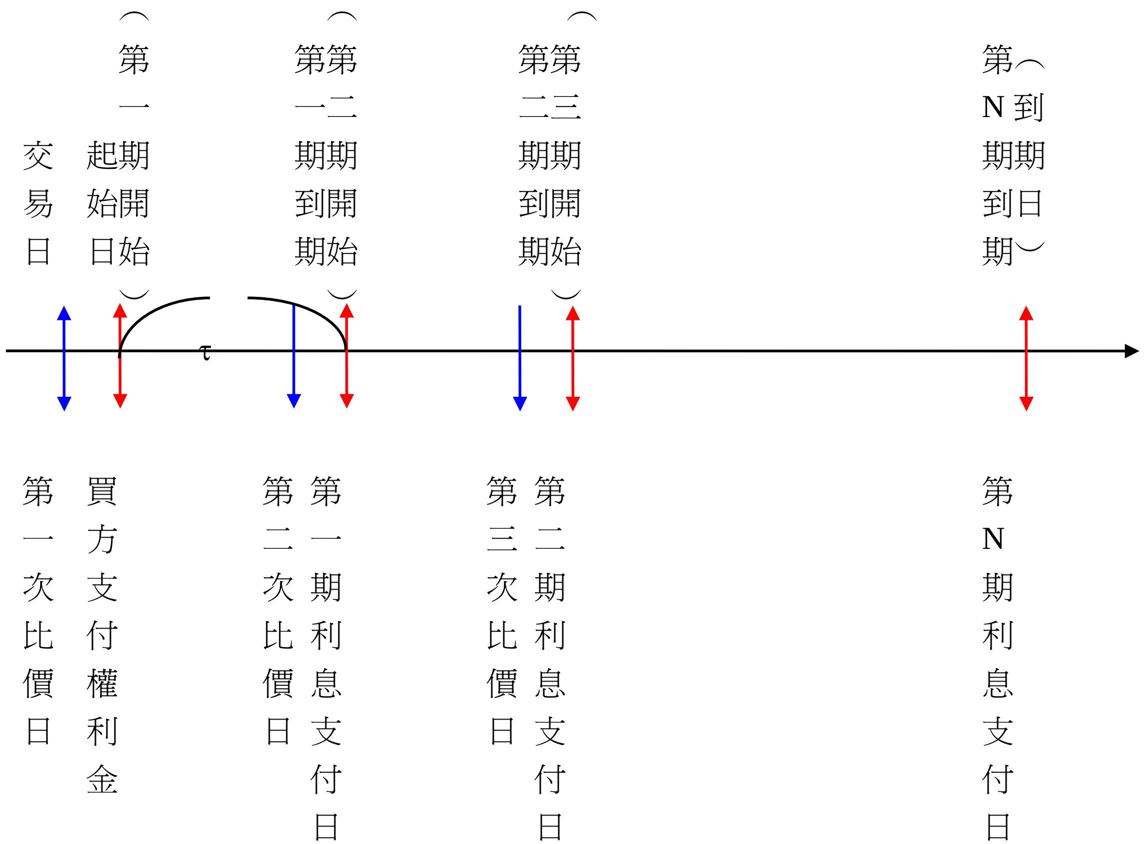


◆ 一利率上限名目本金L，利率上限為K，若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 τ, 2τ, 3τ, …, Nτ，若nτ期比價之利率為R_{nM}，則在(n+1)τ時點賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times L \times Max[R_{nM} - K, 0] \quad \ldots\ldots(2)$$



◆ 契約涉及之相關時點



➢ 第一次比價日為起始日前兩個營業日。

◆ 舉一實例，假設1999年6月1日客戶向中國信託銀行買入一利率上限契約，交易條件如下:

- 交易日為1999年6月1日，
- 起始日為1999年6月3日，
- 有效期間兩年，到期日為2001年6月3日，
- 每三個月比價一次，第一次比價日為1999年6月1日，
- 利率指標為Telerate 6165 BA 90天Fixing Rate，
- 名目本金為新台幣100,000,000，
- 利率上限(即執行利率)為5.50%。
- 客戶須在6月3日(交易日後的兩個工作日)時支付契約權利金新台幣100,000元。

◆ 相關時點如下：

第一次比價日：　1999 年 6 月 1 日

第二次比價日：　1999 年 9 月 1 日

…

第七次比價日：　2000 年 12 月 1 日

第八次比價日：　2000 年 3 月 1 日

而

第一次利息支付日：　1999 年 9 月 3 日

第二次利息支付日：　1999 年 12 月 3 日

…

第七次利息支付日：　2000 年 3 月 3 日

第八次利息支付日：　2001 年 6 月 3 日

◆ 現金流量的計算

- 1999 年 6 月 3 日客戶須支付中信銀權利金新台幣 100,000。
- 若 1999 年 6 月 1 日 Telerate 6165 BA 90 天 Fixing Rate 為 5.55%，高於執行利率 5.5%，則在第一次利息支付日 1999 年 9 月 3 日時，中信銀將支付給客戶新台幣 12,603，計算方式如下：

$$(92/365) \times \$100,000,000 \times (5.55\% - 5.50\%) = \$12,603$$

- 若 1999 年 6 月 1 日的 Fixing Rate 為 5.30%，則由於其小於執行利率 5.5%，雙方間無任何現金支付。

(二)利率下限

- Interest Rate Floors（利率下限）是由一連串的 Interest Rate Floorlets（利率賣出選擇權）所組成。
  - 利率賣出選擇權允許買方以事先預定的利率協議，向賣方借出一定的金額一段期間。
  - 此利率協議為一下限利率(Floors)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間(Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率賣出選擇權名目本金L，利率下限為K，有效期間為τ，若比價之利率為R_M，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times L \times \text{Max}[K - R_M, 0] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

- 一利率下限名目本金L，利率下限為K，若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots, N\tau$，若$n\tau$期比價之利率為$R_{nM}$，則在$(n+1)\tau$時點賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times L \times \text{Max}[K - R_{nM}, 0] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

(三)Black 76定價模型

- 遠期資產價格為對數常態分配，

$$\frac{dF}{F} = \sigma dZ$$

  - 由於遠期價格為即期價格之不偏估計值，因此沒有漂移項。

- 遠期價格與即期價格間的關係，可由 Cost-of-carry Model 描述，

$$F = Se^{(r-y)T}$$

- Black 76 的遠期價格歐式選擇權公式如下，

$$C = e^{-rT}\left[FN(d_1) - KN(d_2)\right] \text{，} P = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - FN(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F/K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \text{，} d_2 = \frac{\ln(F/K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

  - 遠期價格的到期日與選擇權到期日相同。
  - 避險參數 Delta 為，

$\Delta_C = N(d_1)$，$\Delta_P = N(d_1) - 1$。

(四)利率上限訂價理論

- 由前述，nτ時點開始，在(n+1)τ到期之利率買入選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

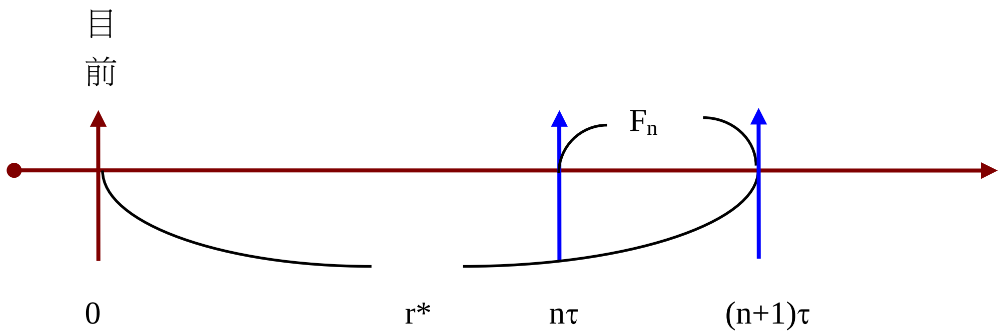
$$\tau \times L \times \max[R_{nM} - K, 0]$$

- 根據Black(1976)選擇權訂價理論，如果F_n服從對數常態分配，且其波動性為σ_n，則此利率買入選擇權之價格c_n為

$$c_n = \tau \bullet L \bullet e^{-r^*(n+1)\tau}\left[F_n N(d_1) - KN(d_2)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_n/K) + \sigma_n^2 n\tau/2}{\sigma_n\sqrt{n\tau}} \qquad d_2 = \frac{\ln(F_n/K) - \sigma_n^2 n\tau/2}{\sigma_n\sqrt{n\tau}} = d_1 - \sigma_n\sqrt{n\tau}$$

➢ 其中F_n為$n\tau$時點開始，$(n+1)\tau$到期之遠期利率，r*為$(n+1)\tau$時點到期之即期利率，K與F_n都以 τ 頻率複利。



◆ 根據前式利率上限的價格c為利率買入選擇權價格c_n，$n \in [0 \ldots N-1]$，之和

$$c = \sum_{n=0}^{N-1} c_n$$

➢ 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率上限契約會設計的使得c_0為 0。

(五)利率下限訂價理論

- 由前述，nτ時點開始，在(n+1)τ到期之利率賣出選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

$$\tau \times L \times \max[K - R_{nM}, 0]$$

- 根據Black(1976)選擇權訂價理論，如果F_n服從對數常態分配，且其波動性為σ_n，則此利率買入選擇權之價格p_n為

$$p_k = \tau \bullet L \bullet e^{-r^*(n+1)\tau}\left[KN(-d_2) - F_n N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_n/K) + \sigma_n^2 n\tau/2}{\sigma_n\sqrt{n\tau}} \qquad d_2 = \frac{\ln(F_n/K) - \sigma_n^2 n\tau/2}{\sigma_n\sqrt{n\tau}} = d_1 - \sigma_n\sqrt{n\tau}$$

  - 其中F_n為nτ時點開始，(n+1)τ到期之遠期利率，r*為(n+1)τ時點到期之即期利率，K與F_n都以 τ 頻率複利。

- 根據前式利率下限的價格p為利率賣出選擇權價格p_n，$n\in[0...N-1]$，之和

$$p=\sum_{n=0}^{N-1}p_n$$

  - 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率下限契約會設計的使得p_0為 0。

(六)IRO的DV01

◆ 利率上限 DV01

➢ Caps 之 DV01 可由 Caplet 之 DV01 求得。

$$\mathrm{DV01}(c) = \mathrm{DV01}\left(\sum_{n=0}^{N-1} c_n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{DV01}(c_n)$$

◆ 利率下限 DV01

➢ Floors 之 DV01 可由 Floorlet 之 DV01 求得。

$$\mathrm{DV01}(p) = \mathrm{DV01}\left(\sum_{n=0}^{N-1} p_n\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{DV01}(p_n)$$

十二、反浮動債券(Inverse Floater, IF)

(一)Payoff型式

- 新台幣反浮動債券，其債息的償付與市場利率走勢相反，
  - 以三個月期付息一次之債券，其利息表示為

    $$\mathrm{Max}\left[6\% - \mathrm{BACP}_{3M},\quad 0\right]$$

  - BACP_{3M}表三個月期之BACP利率
  - 利率走高，債息變低；利率走高，債息變高。

- 重組其 Payoff 如下，

$$\mathrm{Max}\left[6\% - \mathrm{BACP}_{3M},\quad 0\right]$$

$$= \left(-6\% + \mathrm{BACP}_{3M}\right) + \mathrm{Max}\left[0,\quad \mathrm{BACP}_{3M} - 6\%\right]$$

$$= \mathrm{IRS\_Position} + \mathrm{IRO\_Position}$$

(二)合成策略

- 一個反浮動債券可視為兩個利率部為的組合，

  反浮動債券 IF = IRS + IRO

  - IF 為買入部位。
  - IRS 為付固定，收浮動。
  - IRO 為買入部位。

- 利用合成的組合策率，計算反浮動債券之價格與風險參數。

$$MTM(IF) = MTM(IRS) + MTM(IRO)$$

$$DV01(IF) = DV01(IRS) + DV01(IRO)$$

十三、交換選擇權

(一)契約償付

- 考慮一 T 年後開始，期限為 n 年期之交換選擇權，買權的持有者可以取得 T 年後開始，付出固定的執行利率 K，收取浮動 LIBOR 利率的 n 年期交換交易。
  - 假設此交換契約一年交換 m 次。
  - 交換契約的名目本金為 L。
- 每一期交換由此選擇權契約產生的現金流量為，

$$\frac{L}{m}\max[R_M - K]$$

  - R_M為該期LIBOR之Fixing Rate。
  - 一共有 m*n 期之可能現金流量。
  - 第 i 期的現金流量發生約在 T+i/m 時點。

(二)Black 76定價模型

◆ 運用 Black 76 模型，由遠期 IRS 利率與波動性，可得第 i 期現金流量的定價公式如下，

$$c_i = e^{-r_i t_i}\left[F_0 N(d_1) - KN(d_2)\right] \text{，} p_i = e^{-r_i t_i}\left[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_0 / K) + \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}} \text{，} d_2 = \frac{\ln(F_0 / K) - \sigma^2 T / 2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- r_i為t_i時點之即期利率。
- F_0為遠期IRS利率，σ為其波動性。
- 遠期價格的到期日與選擇權到期日相同。

◆ 整筆 Call Swaption 的價值為，

$$c=\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}e^{-r_it_i}\left[F_0N(d_1)-KN(d_2)\right]$$

$$=LA[F_0N(d_1)-KN(d_2)]\text{ ， }A=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn}e^{-r_it_i}$$

◆ 整筆 Put Swaption 的價值為，

$$p=\sum_{i=1}^{mn}\frac{L}{m}e^{-r_it_i}\left[KN(-d_2)-F_0N(-d_1)\right]$$

$$=LA[KN(-d_2)-F_0N(-d_1)]\text{ , }A=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn}e^{-r_it_i}$$

(三)數值範例

◆ 假設各天期 LIBOR 利率為水平連續複利的 6%。一交換選擇權給予持有人，以付出 6.2% 取得五年後開始的三年期交換交易。此交換利率的波動性為 20%，每半年支付交換利息一次，名目本金為$100。則我們有下面的數值，

$$A=\frac{1}{2}\left[e^{-0.06\times5.5}+e^{-0.06\times6}+e^{-0.06\times6.5}+e^{-0.06\times7}+e^{-0.06\times7.5}+e^{-0.06\times8}\right]=2.0035$$

➢ 6%的連續複利轉為半年複利為 6.09%。F_0=0.0609、K=0.062、T=5、σ=0.2，因此

$$d_1=\frac{\ln(0.0609/0.062)+0.2^2*5/2}{0.2\sqrt{5}}=0.1836$$

$$d_2=d_1-0.2\sqrt{5}=-0.2636$$

➢ Call 的價格為

$$100*2.0035\left[0.0609\times N(0.1836)-0.062\times N(-0.2636)\right]=2.07$$ 。