第六章

選擇權的敏感性
與美式選擇權的定價

選擇權的敏感性在數學上就是偏微分的概念，它描述在其它變數固定下，單一變數的變動對選擇權價格的影響。這可以提供我們對選擇權價格變動的一個概估的工具。本章也介紹一些美式選擇權的封閉公式解，雖然在理論的發展上它們有其歷史意義，然而在實務上，樹狀模型才是美式選擇權的定價的主要方法。

第一節 敏感性的定義

根據 BSM 模型，選擇權的價格可以看成是下面的函數關係，

$$V = f(S, K, T, \sigma, r, y) \quad \text{(6.1.1)}$$

其中 S, K, T, σ, r, y 是價格函數的自變數，V 則是價格函數的因變數。所謂敏感性便是指相對於自變數的微小變動下，相對應的因變數變動量。由於執行價格本身是不會變動的，因此根據此一定義，選擇權的價格函數中，我們便有五個不同的敏感性。然而，由於 Delta 的重要性，Delta 本身的敏感性也成爲我們研究的對象。下面分項逐一說明，

一、Delta

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \quad \text{(6.1.2)}$$

(6.1.2)式的數値稱之爲 Delta，又稱爲避險比率。因爲當投資人放空一單位買權時，需要買入避險的現貨數量便是 Delta。Delta 告訴我們若標的資產價格變動一單位時，相對應的選擇權價格變動量。需注意的是，(6.1.2)的關係式是微分式，因此只適用於很小的標的資產價格變動量。如果標的資產價格變動量很大，(6.1.2)的關係便不會準確。

$$\Delta = \begin{cases} N(d_1), & Call \\ N(d_1) - 1, & Put \end{cases} \quad \text{(6.1.3)}$$

由於 $N(d_1)$ 恆大於零，因此買權的 Delta 一定大於零。它代表股票價格上漲時，買權上漲的數量。由於買權的報酬爲股價超過執行價格的部份，因此股價愈高，買權也愈高，故 Delta 必定爲正。事實上，Delta 值就是選擇權價格對股票價格所作的圖形的斜率。對買權而言，當 $S << K$（股票價格遠小於執行價格）時，價格線幾乎是水平的，即斜率爲零；當 $S >> K$（股票價格遠大於執行價格）時，價格線幾乎是 45 度直線的，即斜率爲一；在當 $S = K$ 時，斜率概估爲 0.5。相對應的賣權的 Delta 一定小於零，這反應股價愈高，賣權的價值愈低。

二、Gamma

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad \text{......(6.1.4)}$$

選擇權的 Gamma，衡量股價變動下 Delta 的相對改變情形。由於投資人可由 Delta 值來決定避險的數量，但是 Delta 本身是會改變的，因此 Delta 的變動程度會影響到投資人調整避險部位的的頻率。對於一個已執行好的避險部位，如果 Gamma 值很大，一但股價有些微的變動，Delta 值便有大幅的變化，因此避險部位便需立刻去調整。不論買權或賣權，其 Gamma 值都是一樣的，

$$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad \text{......(6.1.5)}$$

考慮一極端價外，$S << K$，的買權，其 Delta 大約爲 0。如果股價微量變動，其 Delta 依舊爲 0。因此，對一極端價外的買權，Gamma 大約爲 0。相同地，處於極端價內，$S >> K$，的買權 Delta 爲 1，且如果 S 改變很小的話，Delta 幾乎沒有改變。因此，對極端價內的買權 Gamma 也是大約爲 0。當選擇權處於價平時 Gamma 最大。此時只要股票價格稍有變化，買權的 Delta 值有最大的變化。

根據微積分理論，二次微分與選擇權價格對股票價格所作的圖形的曲度有

關。曲度愈彎，Gamma 值愈大，而直線的曲度為零，Gamma 值也為零。對買權與賣權而言，當 $S = K$ 時，圖形曲度最大，因此 Gamma 值最大。當 $S << K$ 時，價格線幾乎是水平的，Gamma 為零；$S >> K$ 時，價格線幾乎是 45 度直線的，Gamma 亦為零。

三、Vega

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma} = S\sqrt{T}N'(d_1) \quad \text{……………………………..…………….(6.1.6)}$$

選擇權的 Vega，衡量選擇權價格相對股價波動性變動的改變情形。雖然在 BSM 模型中假設波動性是固定的，但是現實世界上，因為新的訊息一直產生，波動性的預期也隨時在改變。對買權而言，因為波動性愈大，未來股價上漲的機會也增加，但損失卻不變。對賣權而言，因為波動性愈大，未來股價下跌的機會也增加，但損失卻不變。故 Vega 一定大於零。

由於波動性大都以百分比的方式報價，因此通常 Vega 是衡量 1%波動性的增加下，選擇權價格的變動量。

四、Theta

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial T} \quad \text{………………………………..……………………………..(6.1.7)}$$

Theta 為選擇權價格對到期時間的偏微分的負數，代表隨契約到期時間的減少，對選擇權價值的影響。

$$\Theta = \begin{cases} -S\sigma\dfrac{N'(d_1)}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2), & Call \\ -S\sigma\dfrac{N'(d_1)}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2), & Put \end{cases} \quad \text{…………………….(6.1.8)}$$

對買權而言，Theta 恆小於零。但是對於賣權而言，Theta 可能為正數。

五、Rho of r

$$Rho\_r = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{...(6.1.9)}$$

Rho_r 爲選擇權價格對利率的偏微分，代表利率的增加，對選擇權價值的影響。

$$Rho = \begin{cases} KTe^{-rT}N(d_2), & Call \\ -KTe^{-rT}N(-d_2), & Put \end{cases} \quad \text{..(6.1.10)}$$

(6.1.10)式指出買權和利率呈正向關係，隨利率上升買權價格也跟著上漲。賣權則剛好呈現反向關係。由於利率大都以百分比的方式報價，因此通常 Rho_r 是衡量 1%利率的增加下，選擇權價格的變動量。

六、Rho of y

$$Rho\_y = \frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{...(6.1.11)}$$

Rho_y 爲選擇權價格對資產收益率的偏微分，代表資產收益率的增加，對選擇權價值的影響。

$$Rho\_y = \begin{cases} -STe^{-yT}N(d_1), & Call \\ STe^{-yT}N(-d_1), & Put \end{cases} \quad \text{..(6.1.12)}$$

(6.1.12)式指出買權和呈反向關係。賣權則剛好成現正向關係。由於資產收益率大都以百分比的方式報價，因此通常 Rho_y 是衡量 1%資產收益率的增加下，選擇權價格的變動量。

第二節 封閉解程式碼

前一節的敏感性公式，為不發放股利的 BSM 模型公式，針對一般化的 BSM 模型公式，列示於下，注意我們有兩個 Rho 值，一個是對融資成本利率，一個是對標的資產收益率。

一、Delta

$$\Delta = \begin{cases} e^{-yT} N(d_1), & Call \\ e^{-yT}[N(d_1)-1], & Put \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6.2.1)$$

■ 程式碼

```
Public Function GBSDelta(OpClass As String, _
    S As Double, K As Double, T As Double, _
    sig As Double, r As Double, y As Double) _
    As Double

    Dim d1 As Double

    d1 = (Log(S/K)+(r-y+sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))

    If OpClass = "C" Then
        GBSDelta = Exp(-y * T) * NorCdf(d1)
    ElseIf OpClass = "p" Then
        GBSDelta = Exp(-y * T) * (NorCdf(d1)-1)
    End If

End Function
```

程式 6.2.1(Book1.xls/Module1)

二、Gamma

$$\Gamma = \frac{e^{-yT} N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{T}} \quad \text{...(6.2.2)}$$

■ 程式碼

```
Public Function GBSGamma(S As Double, K As Double, _
    T As Double, sig As Double, r As Double, _
    y As Double) As Double

    Dim d1 As Double

    d1 = (Log(S/K)+(r-y+sig^2/2)*T) / (sig*Sqr(T))
    GBSGamma = Exp(-y*T)*NorPdf(d1) / (S*sig*Sqr(T))

End Function
```

程式 6.2.2(Book1.xls/Module1)

三、Vega

$$Vega = Se^{-yT}\sqrt{T}N'(d_1) \quad \text{..(6.2.3)}$$

■ 程式碼

```
Public Function GBSVega(S As Double, _
    K As Double, T As Double, sig As Double, _
    r As Double, y As Double) As Double

    Dim d1 As Double

    d1 = (Log(S/K)+(r-y+sig^2/2)*T) / (sig*Sqr(T))
    GBSVega = S*Exp(-y*T)*NorPdf(d1)*Sqr(T)

End Function
```

程式 6.2.3(Book1.xls/Module1)

四、Theta

$$\Theta = \begin{cases} -Se^{-yT}\sigma\dfrac{N'(d_1)}{2\sqrt{T}} + ySe^{-yT}N(d_1) - rKe^{-rT}N(d_2), & Call \\ -Se^{-yT}\sigma\dfrac{N'(d_1)}{2\sqrt{T}} - ySe^{-yT}N(-d_1) + rKe^{-rT}N(-d_2), & Put \end{cases}$$

……………………………………..(6.2.4)

■ 程式碼

```
Public Function GBSTheta(OpClass As String, _
    S As Double, K As Double, T As Double, _
    sig As Double, r As Double, y As Double) _
    As Double

    Dim d1 As Double, d2 As Double

    d1 = (Log(S/K) + (r-y+sig^2/2)*T) / (sig*Sqr(T))
    d2 = d1 - sig * Sqr(T)

    If OpClass = "C" Then
        GBSTheta = -S*Exp(-y*T)*NorPdf(d1)*sig _
            /(2*Sqr(T))+y*S*Exp(-y*T)*NorCdf(d1) _
            -r*K*Exp(-r*T)*NorCdf(d2)
    ElseIf OpClass = "P" Then
        GBSTheta = -S*Exp(-y*T)*NorPdf(d1)*sig _
            /(2*Sqr(T))-y*S*Exp(-y*T)*NorCdf(-d1) _
            +r*K*Exp(-r*T)*NorCdf(-d2)
    End If

End Function
```

程式 6.2.4(Book1.xls/Module1)

五、Rho_r

$$Rho = \begin{cases} KTe^{-rT} N(d_2), & Call \\ -KTe^{-rT} N(-d_2), & Put \end{cases} \quad \text{..(6.2.5)}$$

■ 程式碼

```
Public Function GBSRho_r(OpClass As String, _
   S As Double, K As Double, T As Double, _
   sig As Double, r As Double, y As Double) _
   As Double

   Dim d1 As Double, d2 As Double

   d1 = (Log(S/K) + (r-y+sig^2/2)*T) / (sig*Sqr(T))
   d2 = d1 - sig * Sqr(T)

   If OpClass = "C" Then
      If (r - y) <> 0 Then
         GBSRho_r = T*K*Exp(-r*T)*NorCdf(d2)
      Else
         GBSRho_r= -T* GBSOption(OpClass, S, K, T, _
            sig , r, y)
      End If
   ElseIf OpClass = "P" Then
      If (r - y) <> 0 Then
         GBSRho_r = -T*K*Exp(-r*T)*NorCdf(-d2)
      Else
         GBSRho_r = -T * GBSOption(OpClass, S, K, _
            T, sig, r, y)
      End If
   End If

End Function
```

程式 6.2.5(Book1.xls/Module1)

六、Rho_y

$$Rho = \begin{cases} -STe^{-yT}N(d_1), & Call \\ STe^{-yT}N(-d_1), & Put \end{cases} \quad \text{.......................................}(6.2.6)$$

■ 程式碼

```
Public Function GBSRho_y(OpClass As String, _
   S As Double, K As Double, T As Double, _
   sig As Double, r As Double, y As Double) _
   As Double

   Dim d1 As Double

   d1 = (Log(S/K) + (r-y+sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))

   If OpClass = "C" Then
      GBSRho_y = -T*S*Exp(-y*T) * NorCdf(d1)
   ElseIf OpClass = "P" Then
      GBSRho_y = T*S*Exp(-y*T) * NorCdf(-d1)
   End If

End Function
```

程式 6.2.6(Book1.xls/Module1)

■ 電腦程式範例

考慮下面的資料，S = 100、K =100、T = 1 年、σ =30%、r=8%、y=2%，利用(6.2.1)至(6.2.6)式，我們可求得買權與賣權比較靜態的各個數值，

$$d_1 = \frac{\ln(100/100) + (8\% - 2\% + 0.5 \times 0.3^2) \times 1}{0.3\sqrt{1}} = 0.3500$$

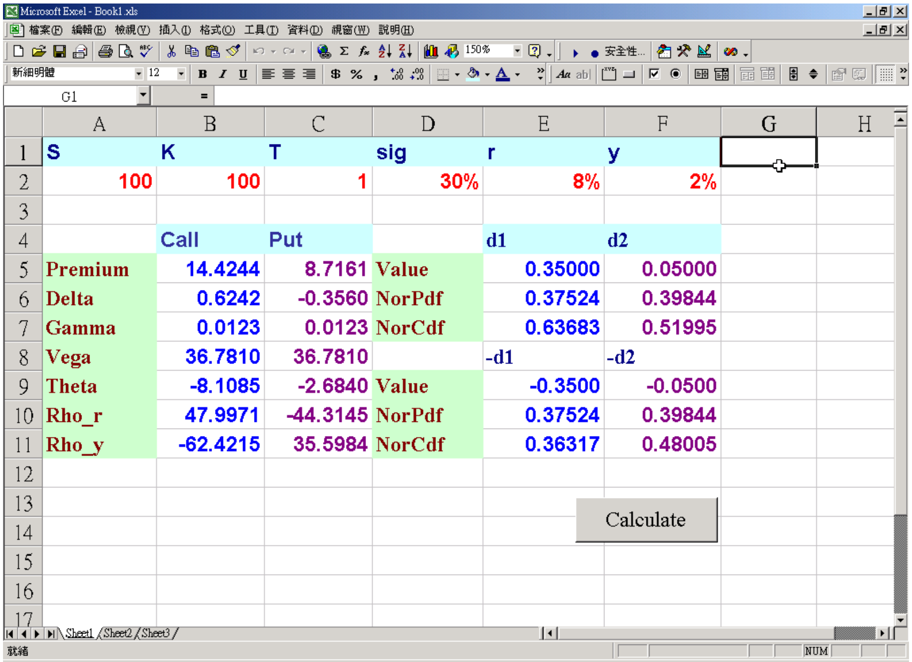
$$d_1 = \frac{\ln(100/100) - (8\% - 2\% + 0.5 \times 0.3^2) \times 1}{0.3\sqrt{1}} = 0.0500$$

```
Public Sub Op_Calculate()
  Dim S As Double
  Dim K As Double
  Dim T As Double
  Dim sig As Double
  Dim r As Double
  Dim y As Double
  Dim C_Value As Double
  Dim P_Value As Double
  Dim d1 As Double, d2 As Double

  S = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 1).Value
  K = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 2).Value
  T = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 3).Value
  sig = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 4).Value
  r = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 5).Value
  y = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 6).Value

  d1 = (Log(S/K) + (r-y+sig^2/2)*T) / (sig*Sqr(T))
  d2 = d1 - sig * Sqr(T)
  Worksheets("Sheet1").Cells(5, 5).Value = d1
  Worksheets("Sheet1").Cells(5, 6).Value = d2
  Worksheets("Sheet1").Cells(6, 5).Value = NorPdf(d1)
  Worksheets("Sheet1").Cells(6, 6).Value = NorPdf(d2)
  Worksheets("Sheet1").Cells(7, 5).Value = NorCdf(d1)
  Worksheets("Sheet1").Cells(7, 6).Value = NorCdf(d2)

  Worksheets("Sheet1").Cells(9, 5).Value = -d1
  Worksheets("Sheet1").Cells(9, 6).Value = -d2
  Worksheets("Sheet1").Cells(10, 5).Value=NorPdf(-d1)
  Worksheets("Sheet1").Cells(10, 6).Value=NorPdf(-d2)
  Worksheets("Sheet1").Cells(11, 5).Value=NorCdf(-d1)
  Worksheets("Sheet1").Cells(11, 6).Value=NorCdf(-d2)

  C_Value = GBSOption("C", S, K, T, sig, r, y)
  P_Value = GBSOption("P", S, K, T, sig, r, y)
  Worksheets("Sheet1").Cells(5, 2).Value = C_Value
  Worksheets("Sheet1").Cells(5, 3).Value = P_Value

  C_Value = GBSDelta("C", S, K, T, sig, r, y)
  P_Value = GBSDelta("P", S, K, T, sig, r, y)
  Worksheets("Sheet1").Cells(6, 2).Value = C_Value
  Worksheets("Sheet1").Cells(6, 3).Value = P_Value

  C_Value = GBSGamma(S, K, T, sig, r, y)
  P_Value = GBSGamma(S, K, T, sig, r, y)
  Worksheets("Sheet1").Cells(7, 2).Value = C_Value
  Worksheets("Sheet1").Cells(7, 3).Value = P_Value
```

```

    C_Value = GBSVega(S, K, T, sig, r, y)
    P_Value = GBSVega(S, K, T, sig, r, y)
    Worksheets("Sheet1").Cells(8, 2).Value = C_Value
    Worksheets("Sheet1").Cells(8, 3).Value = P_Value

    C_Value = GBSTheta("C", S, K, T, sig, r, y)
    P_Value = GBSTheta("P", S, K, T, sig, r, y)
    Worksheets("Sheet1").Cells(9, 2).Value = C_Value
    Worksheets("Sheet1").Cells(9, 3).Value = P_Value

    C_Value = GBSRho_r("C", S, K, T, sig, r, y)
    P_Value = GBSRho_r("P", S, K, T, sig, r, y)
    Worksheets("Sheet1").Cells(10, 2).Value = C_Value
    Worksheets("Sheet1").Cells(10, 3).Value = P_Value

    C_Value = GBSRho_y("C", S, K, T, sig, r, y)
    P_Value = GBSRho_y("P", S, K, T, sig, r, y)
    Worksheets("Sheet1").Cells(11, 2).Value = C_Value
    Worksheets("Sheet1").Cells(11, 3).Value = P_Value

End Sub
```

程式 6.2.7(Book1.xls/Sheet1)

由於 Call Delta = 0.6242，因此資產價格上漲$1 元，買權上漲$1×0.6242 = $0.6242。隨到期日接近一日，買權下跌 1/365×-8.1085 = -$0.022215。利率上漲 1%，買權上漲 0.01×47.9971 = $0.479971。波動性上漲 1%，買權上漲 0.01×36.7810 = $0.367810。資產收益率上漲 1%，買權上漲 0.01×-62.4215 = -$0.624215。對賣權一樣可以得到類似的推論結果，請讀者自行分析。



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	S	K	T	sig	r	y		
2	100	100	1	30%	8%	2%		
3								
4		Call	Put		d1	d2		
5	Premium	14.4244	8.7161	Value	0.35000	0.05000		
6	Delta	0.6242	-0.3560	NorPdf	0.37524	0.39844		
7	Gamma	0.0123	0.0123	NorCdf	0.63683	0.51995		
8	Vega	36.7810	36.7810		-d1	-d2		
9	Theta	-8.1085	-2.6840	Value	-0.3500	-0.0500		
10	Rho_r	47.9971	-44.3145	NorPdf	0.37524	0.39844		
11	Rho_y	-62.4215	35.5984	NorCdf	0.36317	0.48005		

圖 6.2.1(Book1.xls/Sheet1)

第三節 差分與微分

前述(6.2.1)到(6.2.6)的敏感性公式，乃是針對一般化的 Black-Scholes 公式，利用微分而得到的封閉解公式。由於敏感性數值不論對交易人員或風管人員都有很重要的意義，因此不論對於何種選擇權，我們應該都要算出這些數值。然而在實務的運作上，有兩個議題是我們必須面對的。

一、敏感性封閉解的實作問題

首先，並不是每一種選擇權都像陽春型的選擇權，可以導出 Black-Scholes 公式般的封閉解定價公式。即使可以有封閉解，要進一步再導出各個敏感性公式也相當的複雜。在後面有關異種(Exotic)選擇權的章節，我們可以看到許多選擇權的定價公式都是相當複雜的。

其次，(6.2.1)到(6.2.6)的敏感性公式都是利用微分而得到的。所謂微分乃是計算相關的自變數在微小的變動量下，相對應的因變數變動量。現實的世界上，我們所處理的自變數，如股價、利率和波動性，它們的變動量都是離散的(Discrete)，而不是連續變動。因此，利用連續概念求得的微分公式，未必適用於現實的離散變動環境。

爲了要克服前述的兩個問題，我們可以利率差分的方式，直接求得敏感性的數值。以買權 Delta 值爲例，根據定義 Delta 爲股價變動下，選擇權價格的變動量，可表示爲：

$$Delta = \frac{C(S+\Delta S, K, T, \sigma, r, y) - C(S, K, T, \sigma, r, y)}{(S+\Delta S) - S} \quad \text{............(6.3.1)}$$

(6.3.1)式告訴我們，Delta 的分子是由資產價格變動後的選擇權價格，減去資產價格變動前的選擇權價格；分母則是資產價格的變動量。因此，我們只要計算兩次的選擇權價格，便可求得 Delta 值了。

■ 數值範例

考慮下面的資料，S = 100、K =100、T = 1 年、σ =30%、r=8%、y=2%，可求得買權價格爲 14.4256。當 S = 101，其他參數不變下，可求得買權價格爲 15.0559。利用(6.3.1)式，可求得 Delta 爲 0.6303。

$$Delta = \frac{C(S+\Delta S) - C(S)}{(S+\Delta S) - S} = \frac{15.0559 - 14.4256}{101 - 100} = 0.6303 \text{ 。}$$

二、差分法的敏感性

由前述可知，敏感性可由差分式比率求得，但是(6.3.1)式的差分式是由標的資產價格加上變化量而得。這樣的差分式稱之爲前向差分(Forward Difference)，這樣求得的差分值並不適合代表在原價格上的差分值。我們可以下面的差分式，來求得原價格上的差分值。

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V(S+\Delta S)-V(S-\Delta S)}{2\Delta S} \quad \text{.......................................(6.3.2)}$$

作法是往前與往後等量變動，計算差額，在除以兩倍的變動量。通常我們令變動總量爲百分之一的原價格，$2\Delta S = 0.01S$ 。因此，$\Delta S = 0.5\%S$ 。

至於其他的敏感性數值，也可同理求得。下面爲這些差分式。

$$Vega = \frac{\partial V}{\partial \sigma} \approx \frac{V(\sigma+\Delta\sigma)-V(\sigma-\Delta\sigma)}{2\Delta\sigma} \quad \text{.................................(6.3.3)}$$

$$\Theta = -\frac{\partial V}{\partial T} \approx -\frac{V(T+\Delta T)-V(T-\Delta T)}{2\Delta T} \quad \text{...............................(6.3.4)}$$

$$Rho\_r = \frac{\partial V}{\partial r} \approx \frac{V(r+\Delta r)-V(r-\Delta r)}{2\Delta r} \quad \text{.................................(6.3.5)}$$

$$Rho\_y = \frac{\partial V}{\partial y} \approx \frac{V(y+\Delta y)-V(y-\Delta y)}{2\Delta y} \quad \text{...............................(6.3.6)}$$

由於 Gamma 爲二次微分，因此它的差分式不同於其他的差分式。下面爲其公式。

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V(S+\Delta S)-2V(S)+V(S-\Delta S)}{\Delta S^2} \quad \text{.........................(6.3.7)}$$

■ 電腦程式範例

考慮下面的資料，S = 100、K =100、T = 1 年、σ =30%、r=8%、y=2%，利用(6.3.2)至(6.3.7)式，我們可求得買權與賣權比較靜態的各個數值，程式(6.3.1)爲差分計算的範例程式。

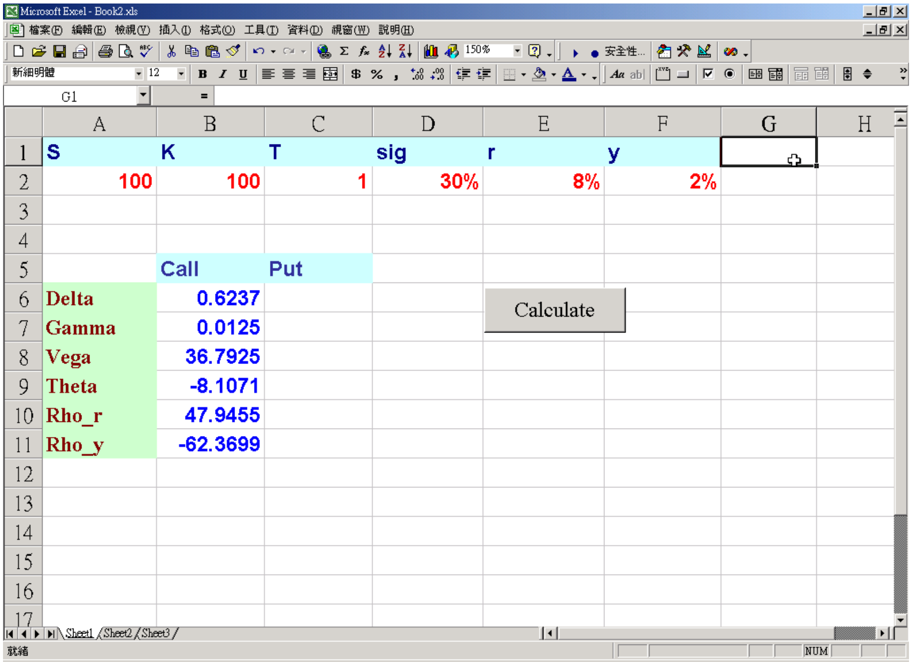


圖 6.3.1(Book2.xls/Sheet1)

```
Public Sub Op_Calculate()
    Dim S As Double
    Dim K As Double
    Dim T As Double
    Dim sig As Double
    Dim r As Double
    Dim y As Double
    Dim V As Double, V0 As Double, V1 As Double
    Dim delta As Double

    S = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 1).Value
    K = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 2).Value
    T = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 3).Value
    sig = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 4).Value
    r = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 5).Value
    y = Worksheets("Sheet1").Cells(2, 6).Value

    delta = 0.01 * S / 2
    V0 = GBSOption("C", S - delta, K, T, sig, r, y)
    V1 = GBSOption("C", S + delta, K, T, sig, r, y)
    Worksheets("Sheet1").Cells(6, 2).Value = _
        (V1 - V0) / (2 * delta)

```

```
   V = GBSOption("C", S, K, T, sig, r, y)
   Worksheets("Sheet1").Cells(7, 2).Value = _
      (V1 - 2 * V + V0) / (delta ^ 2)

   delta = 0.01 * sig / 2
   V0 = GBSOption("C", S, K, T, sig - delta, r, y)
   V1 = GBSOption("C", S, K, T, sig + delta, r, y)
   Worksheets("Sheet1").Cells(8, 2).Value = _
      (V1 - V0) / (2 * delta)

   delta = 0.01 * T / 2
   V0 = GBSOption("C", S, K, T - delta, sig, r, y)
   V1 = GBSOption("C", S, K, T + delta, sig, r, y)
   Worksheets("Sheet1").Cells(9, 2).Value = _
       -(V1 - V0) / (2 * delta)

   delta = 0.01 * r / 2
   V0 = GBSOption("C", S, K, T, sig, r - delta, y)
   V1 = GBSOption("C", S, K, T, sig, r + delta, y)
   Worksheets("Sheet1").Cells(10, 2).Value = _
       (V1 - V0) / (2 * delta)

   delta = 0.01 * y / 2
   V0 = GBSOption("C", S, K, T, sig, r, y - delta)
   V1 = GBSOption("C", S, K, T, sig, r, y + delta)
   Worksheets("Sheet1").Cells(11, 2).Value = _
       (V1 - V0) / (2 * delta)
End Sub
```

程式 6.3.1(Book2.xls/Sheet1)

第四節 美式選擇權定價公式

由於美式選擇權具有提前執行的權利，因此相對於歐式的到期執行的條件，複雜度增加不少。這是因爲提前執行的時機本身就帶有不確定性。再加上資產價格的不確定性，我們便具有雙重的隨機性。很自然的，我們需要雙元的分配去描述此一現象。

儘管學者發表了許多的美式定價公式，但大都僅是近似公式。事實上，針對美式選擇權，實務上乃採用樹狀模型來計算價格。我們將在後面的章節中，介紹二元樹模型下的美式選擇權定價方法。本節中將介紹一些較爲著名的模型。

一、標準雙元常態分配

兩隨機變數 X、Y 機率分配稱之爲標準雙元常態分配，若其機率密度函數爲下式

$$\Psi(x,y,\rho)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(1-\rho^2)}}e^{-\frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2-2\rho\cdot x\cdot y)}{(1-\rho)^2}}$$

其累積機率密度函數 $M(a,b,\rho)$ 定義爲

$$M(a,b,\rho)=\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{b}\Psi(u,v,\rho)\cdot du\cdot dv \quad\text{.................................(6.4.1)}$$

使用數値積分估計(6.4.1)式雖然可行，但依舊受限於計算時間，因此並不可行。

利用解析函數的近似方法，爲可行的方案，(6.4.1)式的近似式可表示爲，

$$a1=\frac{a}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\text{，}\quad b1=\frac{b}{\sqrt{2(1-\rho^2)}}\text{，}$$

$$\mathrm{A}_1=0.24840615\text{，}\mathrm{A}_2=0.39233107\text{，}\mathrm{A}_3=0.21141819\text{，}$$

$$\mathrm{A}_4=0.03324666\text{，}\mathrm{A}_5=0.00082485334$$

$$\mathrm{B}_1=0.10024215\text{，}\mathrm{B}_2=0.48281397\text{，}\mathrm{B}_3=1.0609498\text{，}$$

$$\mathrm{B}_4=1.7797294\text{，}\mathrm{B}_5=2.6697604$$

■ (i) $a\le 0, b\le 0, \rho\le 0$

$$\Omega=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5}A_iA_je^{\left[a1(2-B_i-a1)+b1(2-B_j-b1)+2\rho(B_i-a1)(B_j-b1)\right]}$$

$$M(a,b,\rho)=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi}\times\Omega$$

- (ii) $a \le 0, b \ge 0, \rho \ge 0$

  $$M(a,b,\rho) = N(a) - M(a,-b,-\rho)$$

- (iii) $a \ge 0, b \le 0, \rho \ge 0$

  $$M(a,b,\rho) = N(b) - M(-a,b,-\rho)$$

- (iv) $a \ge 0, b \ge 0, \rho \le 0$

  $$M(a,b,\rho) = N(a) + N(b) - 1 + M(-a,-b,\rho)$$

- (v) $a \times b \times \rho > 0$

  $$M(a,b,\rho) = M(a,0,\rho 1) + M(b,0,\rho 2) - \Theta$$

  $$\rho 1 = \frac{(\rho \cdot a - b) \times Sgn(a)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}} \text{ ,}$$

  $$\rho 2 = \frac{(\rho \cdot b - a) \times Sgn(b)}{\sqrt{a^2 - 2\rho ab + b^2}} \text{ ,}$$

  $$\Theta = \frac{1 - Sgn(a) \times Sgn(b)}{4} \text{ ,}$$

  $$Sgn(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \text{ 。}$$

程式 6.4.1 即爲此解析函數近似方法的計算函數，此函數需要輸入三個參數，對應到(6.4.1)式中 $M(a,b,\rho)$ 的參數。至於呼叫此函數的範例，留給讀者自行練習。

```
Public Function BiNorCdf(a As Double, b As Double, _
   rho As Double) As Double

   Dim X As Variant, y As Variant
   Dim rho1 As Double, rho2 As Double, delta As Double
   Dim a1 As Double, b1 As Double, Sum As Double
   Dim I As Integer, j As Integer

   X = Array(0.24840615, 0.39233107, 0.21141819, _
      0.03324666, 0.00082485334)
   y = Array(0.10024215, 0.48281397, 1.0609498, _
      1.7797294, 2.6697604)
   a1 = a / Sqr(2 * (1 - rho ^ 2))
   b1 = b / Sqr(2 * (1 - rho ^ 2))

   If a <= 0 And b <= 0 And rho <= 0 Then
      Sum = 0
      For I = 1 To 5
         For j = 1 To 5
            Sum = Sum+X(I)*X(j)*Exp(a1*(2*y(I)-a1) _
               +b1*(2*y(j)-b1)+2*rho*(y(I)-a1) _
               *(y(j)-b1))
         Next
      Next
      BiNorCdf = Sqr(1 - rho ^ 2) / Pi * Sum
   ElseIf a <= 0 And b >= 0 And rho >= 0 Then
      BiNorCdf = NorCdf(a) - BiNorCdf(a, -b, -rho)
   ElseIf a >= 0 And b <= 0 And rho >= 0 Then
      BiNorCdf = NorCdf(b) - BiNorCdf(-a, b, -rho)
   ElseIf a >= 0 And b >= 0 And rho <= 0 Then
      BiNorCdf = NorCdf(a) + NorCdf(b) - 1 + _
         BiNorCdf(-a, -b, rho)
   ElseIf a * b * rho > 0 Then
      rho1 = (rho*a-b)*Sgn(a)/Sqr(a^2-2*rho*a*b+b^2)
      rho2 = (rho*b-a)*Sgn(b)/Sqr(a^2-2*rho*a*b+b^2)
      delta = (1 - Sgn(a) * Sgn(b)) / 4
      BiNorCdf = BiNorCdf(a, 0, rho1) + _
        BiNorCdf(b, 0, rho2) - delta
   End If
End Function
```

程式 6.4.1(Book3.xls/Module1)

二、間斷股利的買權

Roll, R.(1977)，Geske, R.(1979)和 Whaley, R.(1981)發展出了間斷股利的美式買權價格公式。若股利爲 D_t ，則公式爲

$$C=(S-D_t e^{-rt})N(b_1)+(S-D_t e^{-rt})M(a_1,-b_1;-\sqrt{t/T})$$

$$-Ke^{-rT}M(a_2,-b_2;-\sqrt{t/T})$$

$$-(K-D_t)e^{-rT}N(b_2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6.4.2)$$

其中

$$a_1=\frac{\ln\left[\frac{(S-D_t e^{-rT})}{K}\right]+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$a_2=a_1-\sigma\sqrt{t}$$

$$b_1=\frac{\ln\left[\frac{(S-D_t e^{-rT})}{\overline{S}}\right]+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2=d_1-\sigma\sqrt{t}$$

函數 $M(a,b,\rho)$ 代表第一個參數小於 a ，第二個參數小於 b ，相關係數爲 ρ 的標準雙元常態分配(Standardized Bivariate Normal Distribution)之累積機率密度函數。變數 $\overline{S}$ 爲下面方程式的解：

$$C^E(\overline{S},t)=\overline{S}+D_t-K$$

其中 $C^E(\bar{S},t)$ 為標的資產價格 $\bar{S}$，到期日 t 的歐式買權價格。換句話說，$\bar{S}$ 代表關鍵資產價格，當價格高於 $\bar{S}$ 時提前執行為最佳。如果提前執行不是最佳，則 $\bar{S}=\infty$，$d_1=\infty$，$d_2=\infty$ 且(6.4.2)式退化成(4.3.2)。

```
Public Function RollGeskeWhaley(S As Double, _
   K As Double, t1 As Double, T2 As Double, _
   r As Double, D As Double, sig As Double) As Double
   't1 time to dividend payout
   'T2 time to option expiration

   Dim Sx As Double, I As Double
   Dim a1 As Double, a2 As Double
   Dim b1 As Double, b2 As Double
   Dim HighS As Double, LowS As Double
   Dim epsilon As Double
   Dim ci As Double, infinity As Double

   infinity = 100000000
   epsilon = 0.00001
   Sx = S - D * Exp(-r * t1)

   If D <= K * (1 - Exp(-r * (T2 - t1))) Then
      RollGeskeWhaley = BSOption("C",Sx,K,T2,sig,r)
      Exit Function
   End If

   ci = BSOption("C", S, K, T2 - t1, sig, r)
   HighS = S

   While (ci - HighS - D + K) > 0 And HighS < infinity
      HighS = HighS * 2
      ci = BSOption("C", HighS, K, T2 - t1, sig, r)
   Wend

   If HighS > infinity Then
      RollGeskeWhaley = BSOption("C",Sx,K,T2,sig,r)
      Exit Function
   End If

   LowS = 0
   I = HighS * 0.5
   ci = BSOption("C", I, K, T2 - t1, sig, r)

```

```
   While ((Abs(ci - I - D + K) > epsilon) And _
   (HighS - LowS > epsilon))
      If (ci - I - D + K) < 0 Then
         HighS = I
      Else
         LowS = I
      End If
      I = (HighS + LowS) / 2
      ci = BSOption("C", I, K, T2 - t1, sig, r)
   Wend

   a1 = (Log(Sx/K) + (r+sig^2/2)*T2) / (sig*Sqr(T2))
   a2 = a1 - sig * Sqr(T2)
   b1 = (Log(Sx/I) + (r+sig^2/2)*t1) / (sig*Sqr(t1))
   b2 = b1 - sig * Sqr(t1)

   RollGeskeWhaley = Sx * NorCdf(b1) _
      + Sx * BiNorCdf(a1,-b1,-Sqr(t1/T2)) _
      - K * Exp(-r*T2)*BiNorCdf(a2,-b2,-Sqr(t1/T2)) _
      - (K-D) * Exp(-r*t1)*NorCdf(b2)
End Function
```

程式 6.4.2(Book3.xls/Module1)

在程式 6.4.2 中，我們用 t1 代表股利發放的時間，以 T2 代表選擇權到期日。這是因爲在 VBA 中，變數名稱用大、小寫表示，是視爲相同的。

三、連續股利的情況

由於並沒有正確的程序來評價連續股利的美式買權，因此只能使用數值方法去求得近似解。Barone-Adesi, G.和 Whaley, R.(1987)提出下面方法。

$$C^A = C^E(S,K,T) + A_2(S/\bar{S})^{q_2} \text{，} S < \bar{S} \quad \text{……………………………(6.4.3)}$$

$$C^A = S - K \text{，} S \ge \bar{S}$$

其中

$$A_2 = (\bar{S}/q_2)\{1 - e^{-(r-y)T} N[d_1(\bar{S})]\}$$

$$d_1(\bar{S}) = \frac{\ln(S/K) + (y + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$q_2 = \frac{-(N-1) + \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}}{2}$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2} \text{，} N = \frac{2y}{\sigma^2} \text{，} K = (1 - e^{-rT})$$

C^E = 相對應的歐式權利金，(6.4.3)式中 $\bar{S}$ 表提前執行的關鍵價格。若目前價格高於 $\bar{S}$ ，則買權應立刻執行。 $\bar{S}$ 可利用遞迴方式由下式求出

$$\bar{S} - K = C^E(\bar{S}) + \{1 - e^{-(r-y)T} N[d_1(\bar{S})]\}\bar{S}/q_2$$

換句話說，(6.4.3)式指出如果 $S < \bar{S}$ ，則美式買權等於相對應的歐式買權加上提前執行的權利金 $A_2(S/\bar{S})^{q_2}$ 。若 $S \ge \bar{S}$ ，美式買權價格即爲其內含價值。

```
'// Barone-Adesi and Whaley (1987) American
Public Function BAWAmericanApprox(CallPutFlag As
 string, S As Double, K As Double, T As Double, r As Double,
 y As Double, sig As Double) As Double

   If CallPutFlag = "c" Then
      BAWAmericanApprox = BAWAmericanCallApprox(S, K,
          T, r, y, sig)
   ElseIf CallPutFlag = "p" Then
      BAWAmericanApprox = BAWAmericanPutApprox(S, K,
          T, r, y, sig)
   End If

End Function


'// American call
Private Function BAWAmericanCallApprox(S As Double,
K As Double, T As Double, r As Double, y As Double,
sig As Double) As Double

   Dim Sk As Double, n As Double, CP As Double
   Dim d1 As Double, Q2 As Double, a2 As Double

   If (r - y) >= r Then
      BAWAmericanCallApprox = GBSOption("c", S, K,
         T, sig, r, y)
   Else
      Sk = Kc(K, T, r, y, sig)
      n = 2 * (r - y) / sig ^ 2
      CP = 2 * r / (sig ^ 2 * (1 - Exp(-r * T)))
      d1 = (Log(Sk / K) + (r - y + sig ^ 2 / 2) * T)
          / (sig * Sqr(T))
      Q2 = (-(n - 1) + Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * CP)) / 2
      a2 = (Sk / Q2) * (1 - Exp(-y * T) * NorCdf(d1))
      If S < Sk Then
         BAWAmericanCallApprox = GBSOption("c", S, K,
           T, sig, r, y) + a2 * (S / Sk) ^ Q2
      Else
         BAWAmericanCallApprox = S - K
      End If
   End If
End Function
```

```
'// Newton Raphson to solve critical price for a Call
Private Function Kc(K As Double, T As Double, r As Double,
y As Double, sig As Double) As Double

    Dim n As Double, m As Double
    Dim Su As Double, Si As Double
    Dim h2 As Double, A As Double
    Dim d1 As Double, Q2 As Double, q2u As Double
    Dim LHS As Double, RHS As Double
    Dim bi As Double, E As Double

    '// Calculation of seed value, Si
    n = 2 * (r - y) / sig ^ 2
    m = 2 * r / sig ^ 2
    q2u = (-(n - 1) + Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * m)) / 2
    Su = K / (1 - 1 / q2u)
    h2 = -((r-y)*T + 2*sig*Sqr(T)) * K / (Su - K)
    Si = K + (Su - K) * (1 - Exp(h2))

    A = 2 * r / (sig ^ 2 * (1 - Exp(-r * T)))
    d1 = (Log(Si/K) + (r-y+sig^2/2)*T) / (sig * Sqr(T))
    Q2 = (-(n - 1) + Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * A)) / 2
    LHS = Si - K
    RHS = GBSOption("c",Si,K,T,sig,r,y) + (1-Exp(-y*T)
         * NorCdf(d1)) * Si / Q2
    bi = Exp(-y*T) * NorCdf(d1) * (1-1/Q2) + (1-Exp(-y*T)
         * NorCdf(d1) / (sig * Sqr(T))) / Q2
    E = 0.000001

    '// Newton Raphson to find critical price Si
    While Abs(LHS - RHS) / K > E
       Si = (K + RHS - bi * Si) / (1 - bi)
       d1 = (Log(Si/K)+(r-y+sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))
       LHS = Si - K
       RHS = GBSOption("c",Si,K,T,sig,r,y)
            +(1-Exp(-y*T)* NorCdf(d1)) * Si / Q2
       bi = Exp(-y* T)*CND(d1)*(1-1/Q2) + (1-Exp(-y*T)
           * NorPdf(d1) / (sig * Sqr(T))) / Q2
    Wend

    Kc = Si
End Function
```

程式 6.4.3(Book3.xls/Module1)

程式 6.4.3 即為 Barone-Adesi 和 Whaley(1987)的演算程式碼，#01~#14 為包裝的程式碼，根據買權或賣權分別呼叫相關的函數。#17~#43 為(6.4.3)式的買權程式碼，其中提前執行的關鍵價格 $\bar{S}$ ，可由#46~#87 利用 Newton-Raphson 法求得。

四、連續與不發放股利的賣權

此法也是由 Barone-Adesi 和 Whaley 提出，對發放連續股利的美式賣權，公式為

$$P^A = P^E(S) + A_1(S/\bar{S})^{q_1} \text{，} S > \bar{S} \text{ ………………………..………(6.4.4)}$$

$$P^A = K - S \text{，} S \le \bar{S}$$

其中

$$A_1 = -(\bar{S}/q_1)\{1 - e^{-(r-y)T} N[-d_1(\bar{S})]\}$$

$$q_1 = \frac{-(N-1) - \sqrt{(N-1)^2 + 4M/K}}{2}$$

$$M = \frac{2r}{\sigma^2} \text{，} N = \frac{2y}{\sigma^2} \text{，} K = (1 - e^{-rT})$$

d_1 則與(6.4.3)式中的 d_1 相同。 P^E = 相對應的歐式權利金， $\bar{S}$ 代表若目前價格低於它，賣權便須立刻執行的關鍵價格(critical value)。 $\bar{S}$ 可以遞迴方式由下式求出

$$K - \bar{S} = P^E(\bar{S}) - \{1 - e^{-(r-y)T} N[-d_1(\bar{S})]\}\bar{S}/q_1$$

若為不發放股利的情況，則只須令 $y = 0$ ，(6.4.4)式便可直接運用。

```
'// American put
Private Function BAWAmericanPutApprox(S As Double,
K As Double, T As Double, r As Double, y As Double,
sig As Double) As Double

Dim Sk As Double, n As Double, CP As Double
   Dim d1 As Double, Q1 As Double, a1 As Double

   Sk = Kp(K, T, r, y, sig)
   n = 2 * (r - y) / sig ^ 2
   CP = 2 * r / (sig ^ 2 * (1 - Exp(-r * T)))
   d1 = (Log(Sk/K) + (r-y + sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))
   Q1 = (-(n - 1) - Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * CP)) / 2
   a1 = -(Sk/Q1) * (1-Exp(-y* T) * NorCdf(-d1))

   If S > Sk Then
      BAWAmericanPutApprox = GBSOption("p",S,K,T,
        sig,r,y) + a1 * (S/Sk)^Q1
   Else
      BAWAmericanPutApprox = K - S
   End If
End Function


'// Newton Raphson to solve critical price for a Put
Private Function Kp(K As Double, T As Double,
r As Double, y As Double, sig As Double) As Double
   Dim n As Double, m As Double
   Dim Su As Double, Si As Double
   Dim h1 As Double, A As Double
   Dim d1 As Double, q1u As Double, Q1 As Double
   Dim LHS As Double, RHS As Double
   Dim bi As Double, E As Double

   '// Calculation of seed value, Si
   n = 2 * (r - y) / sig ^ 2
   m = 2 * r / sig ^ 2
   q1u = (-(n - 1) - Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * m)) / 2
   Su = K / (1 - 1 / q1u)
   h1 = ((r-y)*T - 2*sig*Sqr(T))*K/(K-Su)
   Si = Su + (K - Su) * Exp(h1)

   A = 2 * r / (sig ^ 2 * (1 - Exp(-r * T)))
   d1 = (Log(Si/K)+(r-y + sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))
   Q1 = (-(n - 1) - Sqr((n - 1) ^ 2 + 4 * A)) / 2
   LHS = K - Si
```

```
#47     RHS = GBSOption("p",Si,K,T,sig,r,y)-(1-Exp(-y*T)
#48         * NorCdf(-d1)) * Si / Q1
#49     bi = -Exp(-y*T)*NorCdf(-d1)*(1-1/Q1)-(1+Exp(-y*T)
#50         * NorPdf(-d1) / (sig * Sqr(T))) / Q1
#51     E = 0.000001
#52
#53     '// Newton Raphson to find critical price Si
#54     While Abs(LHS - RHS) / K > E
#55         Si = (K - RHS + bi * Si) / (1 + bi)
#56         d1 = (Log(Si/K)+(r-y+sig^2/2)*T)/(sig*Sqr(T))
#57         LHS = K - Si
#58         RHS = GBSOption("p",Si,K,T,sig,r,y)-(1
#59             -Exp(-y*T)*NorCdf(-d1)) * Si / Q1
#60         bi = -Exp(-y*T)*NorCdf(-d1)*(1-1/Q1)-(1+
#61             Exp(-y*T)*NorCdf(-d1)/(sig*Sqr(T)))/Q1
#62     Wend
#63
#64     Kp = Si
#65 End Function
```

程式 6.4.4(Book3.xls/Module1)

程式 6.4.4 即爲 Barone-Adesi 和 Whaley(1987)的賣權演算程式碼。#01~#22 爲(6.4.4)式的賣權程式碼，其中提前執行的關鍵價格 $\bar{S}$ ，可由#25~#65 利用 Newton-Raphson 法求得。

五、間斷股利的賣權

在此情況下，美式賣權的求解相當的複雜。Geske, R.和 Johnson, H.(1984)提供了一項近似的方法，稱之爲複合式選擇權(Compound Options)。有興趣的讀者可加以參考。