GPU 平行運算與財務工程實作班

LMM 模型應用於利率結構商品之開發設計

希奇資本 技術長

董夢雲 博士

Part I LMM 模型與利率結構商品設計開發(15hrs)

Part II GPU 架構下的利率結構商品開發(15hrs)

金融研訓院 特約講師
證券暨投資分析人員合格(CSIA)
希奇資本 技術長(CTO)

董 夢 雲 財務博士

Mobil: (Taiwan)0988-065-751 (China)1508-919-2872
EMail: dongmy@ms5.hinet.net
Line ID/WeChat ID: andydong3137

專長

GPU 平行運算與財務工程，C#、.Net Framework、CUDA、OpenCL、C、C++。
外匯與利率結構商品評價實務，股權與債權及衍生商品評價實務。
風險管理理論與實務，資本配置與額度規劃。

經歷

中國信託商業銀行交易室研發科主管
凱基證券風險管理部主管兼亞洲區風險管理主管
中華開發金控、工業銀行風險管理處處長
永豐金控、商業銀行風險管理處處長
永豐商業銀行結構商品開發部副總經理

著作

金融選擇權：市場、評價與策略，第二版，1997，新陸書局。
財務工程與 Excel VBA 的應用：選擇權評價理論之實作，2005，證券暨期貨發展基金會。

翻譯

衍生性金融商品與內部稽核，2003，金融研訓院。

Part I LMM 模型與利率結構

商品設計開發

主題一 Black76 遠期選擇權模型

一、Black 76 遠期契約選擇權訂價模型

二、利率選擇權

三、交換選擇權

四、實作案例一

一、Black 76 遠期契約選擇權訂價模型

(一)期貨選擇權

- 標的資產為期貨契約的選擇權契約，通常為美式契約。
  - 買權執行時，買方取得期貨買入部位，以及最近結算價與執行價格間的差額。
  - 賣權執行時，買方取得期貨賣出部位，以及執行價格與最近結算價間的差額。
- 期貨選擇權受歡迎的原因
  - 期貨契約較現貨流動性高。
  - 期貨價格可以直接看到。
  - 沒有現貨交割的問題。
  - 與期貨契約在同一交易所交易。
  - 較現貨選擇權交易成本低。

(二)評價模型

- 在風險中立的世界下，期貨(遠期契約價格)的價格程序為

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma \bullet dZ_t \qquad (1.1.1)$$

  - 其中σ為一常數，為期貨價格的波動性。
  - 期貨價格為對數常態分配。
  - 當持有成本(cost of carry)與便利收益(convenience yield)只為時間的函數時，期貨價格的波動性等同於現貨價格的波動性。

◆ Black 76 的期貨價格歐式選擇權公式如下，

$$c_t = e^{-rT}\left[F_t N(d_1) - KN(d_2)\right] \quad \text{..........(1.1.2)}$$

$$p_t = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - F_t N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_t / K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \ ,$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_t / K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

➢ 期貨契約的到期日不需要與選擇權契約同時到期。

(三)數值範例

◆ 考慮一歐式原油期貨賣權，選擇權到期日為四個月，目前期貨價格為$20，執行價格為$20，年持有成本為 9%，期貨價格的年波動性為 25%。

$$F_0 = 20, K = 20, r = 0.09, T = 4/12, \sigma = 0.25$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(20/20\right) + \frac{(0.25)^2 \frac{1}{3}}{2}}{0.25\sqrt{1/3}} = 0.07216$$，

$$d_2 = \frac{\ln\left(20/20\right) - \frac{(0.25)^2 \frac{1}{3}}{2}}{0.25\sqrt{1/3}} = -0.07216$$，

$N(-d_1) = 0.4712$，$N(-d_2) = 0.5288$，

$p = Exp(-0.09 \times 4/12)\left(20 \times 0.5288 - 20 \times 0.4712\right) = 1.12$。

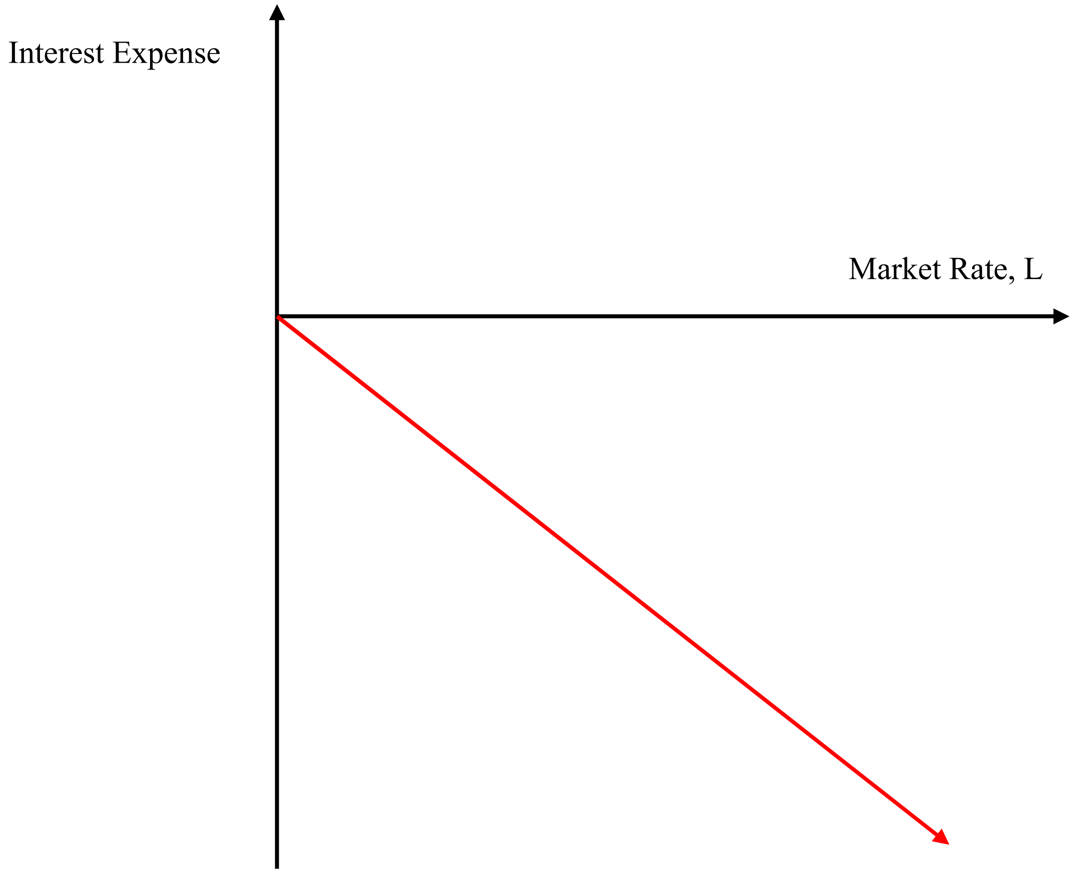
二、利率選擇權

(一)利率上限

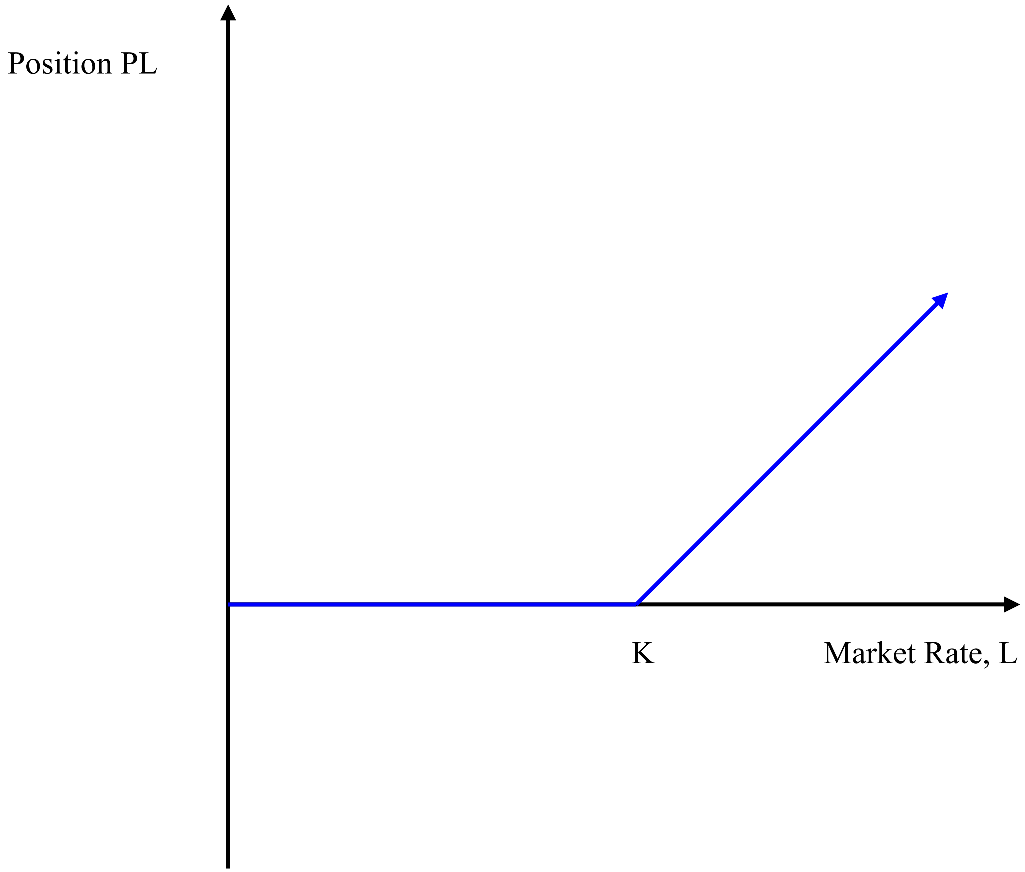
- Interest Rate Caps（利率上限）是由一連串的 Interest Rate Caplets（利率買入選擇權）所組成。
  - 利率買入選擇權允許買方以事先預定的協議利率 K，向賣方借入一定的金額一段期間。
  - 此協議利率為一上限利率(Caps)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間(Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率買入選擇權名目本金 N，利率上限為 K，有效期間為 τ，若比價之利率為 L，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times N \times \max[L-K,0] \qquad (1.2.1)$$

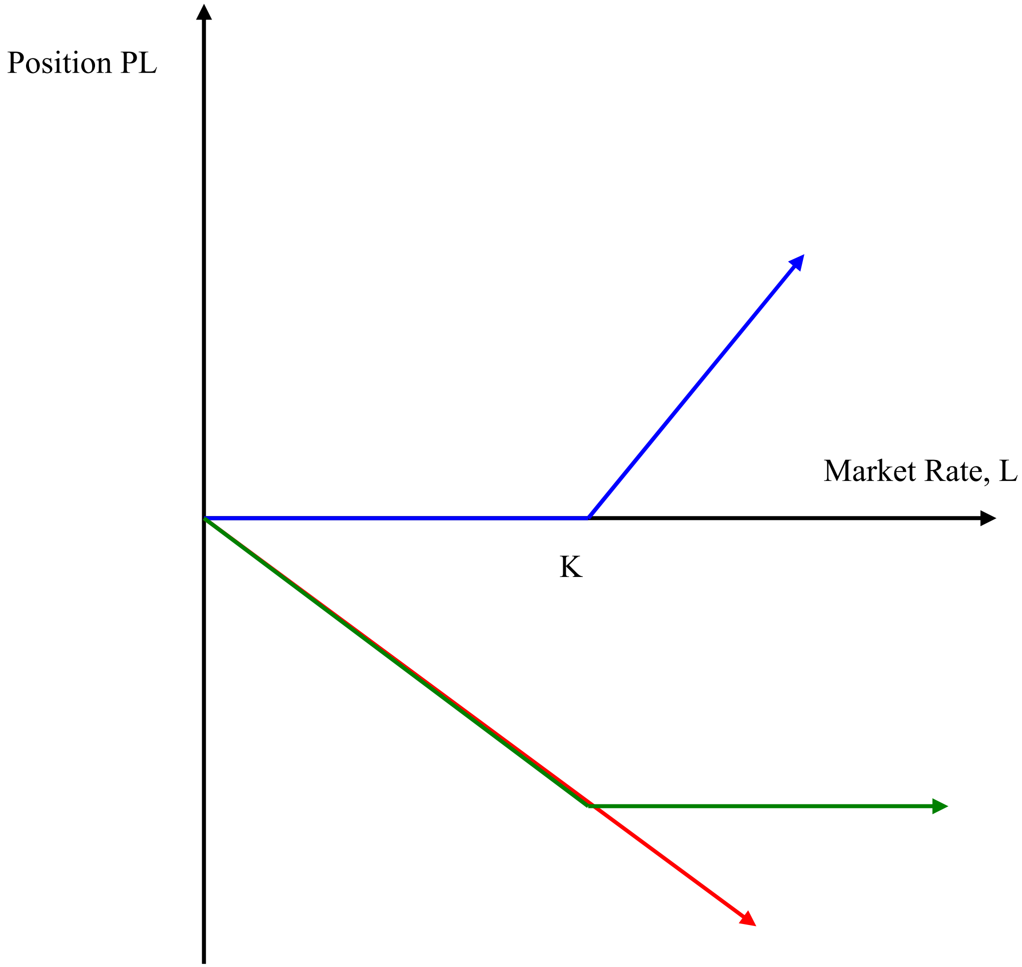
◆ Loan 之 Risk Profile



◆ Caplet 之 Risk Profile

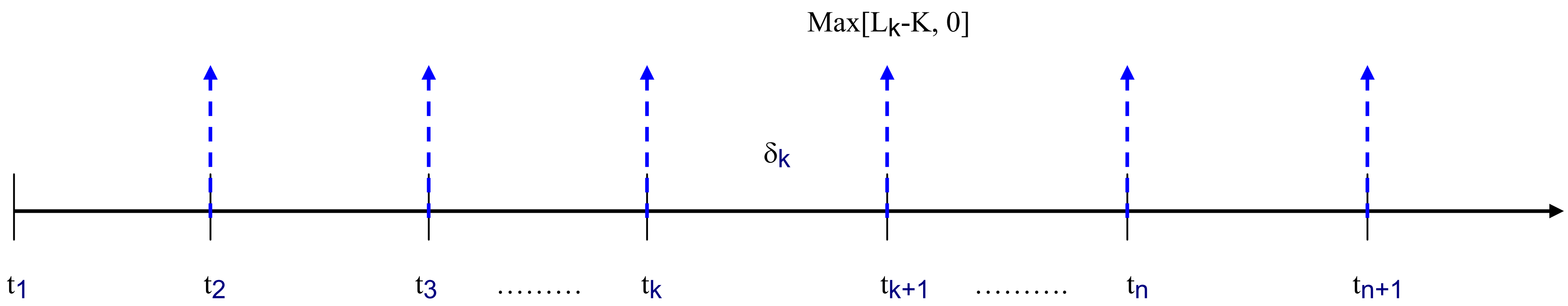


◆ Loan 與 Caplet 之 Risk Profile

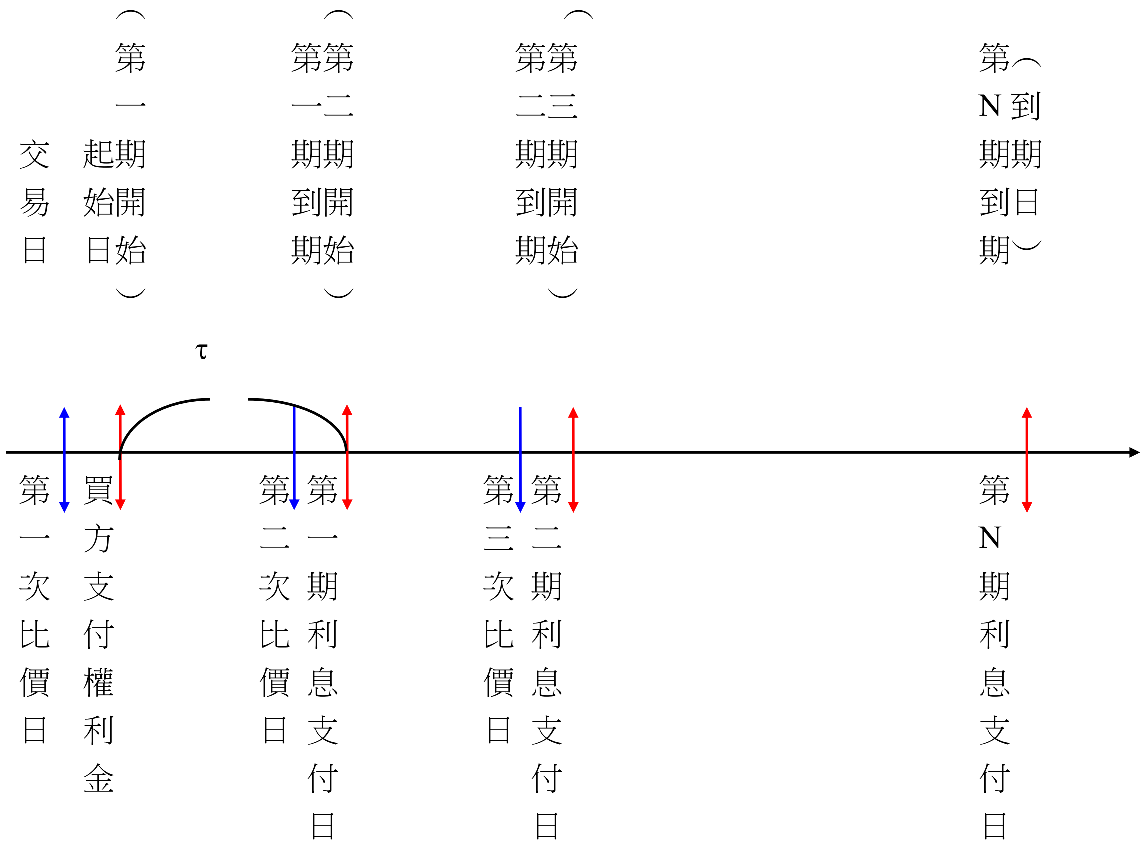


◆ 一利率上限名目本金 N，期限為 T，上限利率為 K。若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$，且定義 t_{n+1}=T。令 L_k 為 t_k 與 t_{k+1} 時點間的比價利率，$\tau_k = t_{k+1}-t_k$，則在 t_{k+1} 時點賣方必須支付買方如下利息金額，

$$\tau_k \times N \times \max[L_k - K, 0] \quad \text{.........(1.2.2)}$$



◆ 契約涉及之相關時點



➤ 第一次比價日為起始日前兩個營業日。

- 舉一實例，假設 1999 年 6 月 1 日客戶向中國信託銀行買入一利率上限契約，交易條件如下:
  - 交易日為 1999 年 6 月 1 日，
  - 起始日為 1999 年 6 月 3 日，
  - 有效期間兩年，到期日為 2001 年 6 月 3 日，
  - 每三個月比價一次，第一次比價日為 1999 年 6 月 1 日，
  - 利率指標為 Telerate 6165 BA 90 天 Fixing Rate，
  - 名目本金為新台幣 100,000,000，
  - 利率上限(即執行利率)為 5.50%。
  - 客戶須在 6 月 3 日(交易日後的兩個工作日)時支付契約權利金新台幣 100,000 元。

◆ 相關時點如下：

第一次比價日：　1999 年 6 月 1 日

第二次比價日：　1999 年 9 月 1 日

…

第七次比價日：　2000 年 12 月 1 日

第八次比價日：　2000 年 3 月 1 日

而

第一次利息支付日：　1999 年 9 月 3 日

第二次利息支付日：　1999 年 12 月 3 日

…

第七次利息支付日：　2000 年 3 月 3 日

第八次利息支付日：　2001 年 6 月 3 日

◆ 現金流量的計算

- 1999 年 6 月 3 日客戶須支付中信銀權利金新台幣 100,000。
- 若 1999 年 6 月 1 日 Telerate 6165 BA 90 天 Fixing Rate 為 5.55%，高於執行利率 5.5%，則在第一次利息支付日 1999 年 9 月 3 日時，中信銀將支付給客戶新台幣 12,603，計算方式如下：

$(92/365) \times \$100,000,000 \times (5.55\% - 5.50\%) = \$12,603$

- 若 1999 年 6 月 1 日的 Fixing Rate 為 5.30%，則由於其小於執行利率 5.5%，雙方間無任何現金支付。

(二)利率上限可視為零息債券選擇權之組合

- Caplet 可視為零息債券的賣出選擇權，根據(1.2.2)式，在 t_{k+1} 時點賣方必須支付買方的利息金額，折現到 t_k 時點，可得下面金額，

$$\frac{N\tau_k}{1+L_k\tau_k}\max\left(L_k-K,0\right)$$

  - 整理可得，

$$\max\left(N-\frac{N(1+K\tau_k)}{1+L_k\tau_k},0\right)$$

  - 可視為一 t_{k+1} 時點到期，面值為 $N(1+\mathrm{K}\tau_k)$ 之零息債券，在 t_k 時點選擇權到期的償付，選擇權的執行價格為 N。

(三)利率下限

- Interest Rate Floors（利率下限）是由一連串的 Interest Rate Floorlets（利率賣出選擇權）所組成。
  - 利率賣出選擇權允許買方以事先預定的利率協議，向賣方借出一定的金額一段期間。
  - 此利率協議為一下限利率(Floors)，此金額為名目本金(Nominal Amount)，此期間即為契約有效期間(Effective Period)，有效期間即為契約起始日至到期日的期間。
- 一利率賣出選擇權名目本金 N，利率下限為 K，有效期間為 τ，若比價之利率為 L，則在到期日時賣方必須支付買方如下利息金額

$$\tau \times N \times \max[K-L,0] \quad \text{(1.2.3)}$$

◆ 一利率下限名目本金 N，期限為 T，下限利率為 K。若利息金額之支付時點為由契約啟始日後之 t_1 , t_2 , t_3 , …, t_n ，且定義 $t_{n+1}=T$。令 L_k 為 t_k 與 t_{k+1} 時點間的比價利率， $\tau_k = t_{k+1}-t_k$，則在 t_{k+1} 時點賣方必須支付買方如下利息金額，

$$\tau_k \times N \times \max[K - L_k, 0] \qquad (1.2.4)$$

(四)Black 76 定價模型

- 遠期資產價格為對數常態分配，

$$\frac{dF_t}{F_t} = \sigma dZ_t$$

  - 由於遠期價格為即期價格之不偏估計值，因此沒有漂移項。

- 遠期價格與即期價格間的關係，可由 Cost-of-carry Model 描述，

$$F_t = S_t e^{(r-y)T} \qquad \text{(1.2.5)}$$

◆ Black 76 的遠期價格歐式選擇權公式如下，

$$C_t = e^{-rT}\left[F_t N(d_1) - KN(d_2)\right] \text{......} (1.2.6)$$

$$P_t = e^{-rT}\left[KN(-d_2) - F_t N(-d_1)\right] \text{，}$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_t / K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} \text{，}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_t / K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- 遠期價格的到期日與選擇權到期日相同。
- 避險參數 Delta 為，

$$\Delta_C = N(d_1) \text{，} \Delta_P = N(d_1) - 1 \text{。}$$

(五)利率上限訂價理論

- 由前述，t_k 時點開始，在 t_{k+1} 到期之利率買入選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

$$\delta_k \times N \times \max[L_k - K, 0]$$

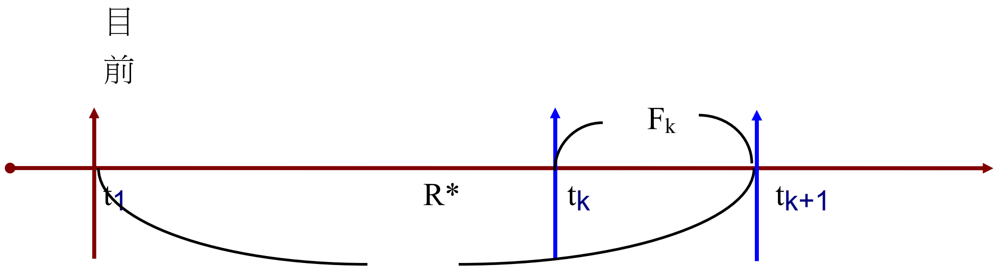
- 根據 Black(1976)選擇權訂價理論，如果 F_k 服從對數常態分配，且其波動性為σ_k，則此利率買入選擇權之價格 c_k 為

$$c_k = \tau_k \cdot N \cdot e^{-R^* t_{k+1}}\left[F_k N(d_1) - KN(d_2)\right] \quad \text{......(1.2.7)}$$

$$d_1 = \frac{\ln(F_k/K) + \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(F_k/K) - \sigma_k^2 t_k/2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

➢ 其中 F_k 為 t_k 時點開始，t_{k+1} 到期之遠期利率，R^*為 t_{k+1} 時點到期之即期利率，K 與 F_k 都以δ_k頻率複利。



◆ 根據前式利率上限的價格 c 為利率買入選擇權價格 c_k，$k \in [1 \ldots n]$，之和

$$c = \sum_{n=1}^{n} c_k \qquad (1.2.8)$$

➢ 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率上限契約會設計的使得第一次的 Payoff 為 0。

(六)利率下限訂價理論

- 由前述，t_k 時點開始，在 t_{k+1} 到期之利率賣出選擇權，到期時支付買方如下利息金額，

$$\tau_k \times N \times \max[K - L_k, 0]$$

- 根據 Black(1976)選擇權訂價理論，如果 F_k 服從對數常態分配，且其波動性為σ_k，則此利率買入選擇權之價格 p_k 為

$$p_k = \tau_k \cdot L \cdot e^{-R^* t_{k+1}} \left[K N(-d_2) - F_k N(-d_1) \right]$$

  - 其中 F_k 為 t_k 時點開始，t_{k+1} 到期之遠期利率，R^*為 t_{k+1} 時點到期之即期利率，K 與 F_k 都以 τ_k 頻率複利。

- 根據前式利率下限的價格 p 為利率賣出選擇權價格 p_k，$k \in [1 \ldots n]$，之和

$$p = \sum_{n=1}^{n} p_k$$

  - 此權利金一般在期初訂約之後支付。通常利率下限契約會設計的使得第一次的 Payoff 為 0。

三、交換選擇權

(一)契約償付

- 考慮一 T 年後開始，期限為 n 年期之(支付型)交換選擇權(Payer Side Swaption)，買權的持有者可以取得 T 年後開始，付出固定的執行利率 S_K，收取浮動 LIBOR 利率的 n 年期交換交易，$S_{T,T+n}(t)$。
  - 假設此交換契約一年交換 m 次。
  - 交換契約的名目本金為 N。
- 每一期交換由此選擇權契約產生的現金流量為，

$$\frac{N}{m}\max[S_T - S_K, 0] \qquad (1.3.1)$$

  - S_T 為該標的 Swap 之 Fixing Rate，$S_{T,T+n}(T)$。
  - 一共有 m*n 期之可能現金流量。
  - 第 i 期的現金流量發生約在 T+i/m 時點。

(二)Black 76 定價模型

◆ 運用 Black 76 模型，由遠期 IRS 利率與波動性，可得第 i 期現金流量的定價公式如下，

$$c_i = e^{-\mathrm{R}_i t_i}\left[\mathrm{S}_0 N(d_1) - S_K N(d_2)\right] \text{..................(1.3.2)}$$

$$p_i = e^{-\mathrm{R}_i t_i}\left[S_K N(-d_2) - \mathrm{S}_0 N(-d_1)\right]$$

$$d_1 = \frac{\ln(\mathrm{S}_0 / S_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} ,$$

$$d_2 = \frac{\ln(\mathrm{S}_0 / S_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

- R_i 為 t_i 時點之即期利率。
- S_0 為遠期 IRS 利率($\mathrm{S}_{T,T+n}(0)$)，σ 為其波動性。
- 遠期價格的到期日與選擇權到期日相同。

◆ 整筆 Call Swaption 的價值為，

$$c=\sum_{i=1}^{mn}\frac{\mathrm{N}}{m}e^{-\mathrm{R}_i t_i}\left[\mathrm{S}_0 N(d_1)-\mathrm{S}_\mathrm{K} N(d_2)\right] \quad \text{(1.3.3)}$$

$$=\mathrm{N}A[\mathrm{S}_0 N(d_1)-\mathrm{S}_\mathrm{K} N(d_2)]\text{，}$$

$$A=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn}e^{-\mathrm{R}_i t_i}$$

◆ 整筆 Put Swaption 的價值為，

$$p=\sum_{i=1}^{mn}\frac{\mathrm{N}}{m}e^{-\mathrm{R}_i t_i}\left[\mathrm{S}_\mathrm{K} N(-d_2)-\mathrm{S}_0 N(-d_1)\right]$$

$$=\mathrm{N}A[\mathrm{S}_\mathrm{K} N(-d_2)-\mathrm{S}_0 N(-d_1)]\text{，}$$

$$A=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{mn}e^{-\mathrm{R}_i t_i}$$

(三)數值範例

- 假設各天期 LIBOR 利率為水平連續複利的 6%。一交換選擇權給予持有人，以付出 6.2%取得五年後開始的三年期交換交易。此交換利率的波動性為 20%，每半年支付交換利息一次，名目本金為$100。則我們有下面的數值，

$$A=\frac{1}{2}\left[e^{-0.06\times5.5}+e^{-0.06\times6}+e^{-0.06\times6.5}+e^{-0.06\times7}+e^{-0.06\times7.5}+e^{-0.06\times8}\right]=2.0035$$

- 6%的連續複利轉為半年複利為 6.09%。F_0=0.0609、K=0.062、T=5、σ =0.2，因此

$$d_1=\frac{\ln(0.0609/0.062)+0.2^2*5/2}{0.2\sqrt{5}}=0.1836$$

$$d_2=d_1-0.2\sqrt{5}=-0.2636$$

- Call 的價格為

$$100*2.0035\left[0.0609\times N(0.1836)-0.062\times N(-0.2636)\right]=2.07$$ 。

四、實作案例一

一、QuantLib C++程式庫介紹

二、QL.Net 程式庫介紹

三、QL.Net 使用案例

四、QuantLibNet 使用案例