DA

Formelsammlung Mathematik

1. Inhaltsverzeichnis

2. Mathematik

2.1. Allgemeines

2.1.1. Wichtige Winkel

α	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2.1.2. Allgemeine Rechengesetze

Bruchrechnen

Addition: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a*d+b*c}{b*d}$ $\Rightarrow$ Hauptnenner bilden

Subtraktion: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a*d-b*c}{b*d}$ $\Rightarrow$ Hauptnenner bilden

Multiplikation: $\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{a*c}{b*d}$ $\Rightarrow$ zusammenfassen

Division: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a*d}{b*c}$ $\Rightarrow$ mit dem Kehrwert multiplizieren

Binomische Formeln

Erste binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Dritte binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2.1.3. Rechenregeln e-Funktion u. Potenzen

$e^a * e^b = e^{a+b}$ $\quad \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $\quad \frac{1}{e^a} = e^{-a}$ $\quad (e^a)^b = e^{a*b}$ $\quad (a*b)^n = a^n * b^n$

2.1.4. Rechenregeln Logarithmus

$\ln(a*b) = \ln(a) + \ln(b)$ $\quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ $\quad \ln(a^b) = b*\ln(a)$

2.1.5. 2er Potenzen

2^0=1	2^1=2	2^2=4	2^3=8
2^4=16	2^5=32	2^6=64	2^7=128
2^8=256	2^9=512	2^10=1024	2^11=2048
2^12=4096	2^13=8192	2^14=16384	2^15=32768
2^16=65536	2^17=131072		

2.1.6. „Mitternachtsformel“ zum Lösen von quadratischen Gleichungen

pq-Formel (Gleichung in Form: $x^2 + px + q = 0$): $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

abc-Formel (Gleichung in Form: $ax^2 + bx + c = 0$): $x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2.1.7. Wurzelrechnung

allgemein: wenn $a^n = b$, dann heißt $a = \sqrt[n]{b}$ → bei $a > 0 \wedge b > 0$

Umwandlung in Potenz: $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ zu schreiben

Wurzeln multiplizieren: $\sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{a} = a^{\frac{n+m}{n*m}} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$

Wurzeln aus Wurzeln ziehen: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n*m]{a}$

Wurzeln aus Produkten ziehen: $\sqrt[n]{a*b} = \sqrt[n]{a} * \sqrt[n]{b}$

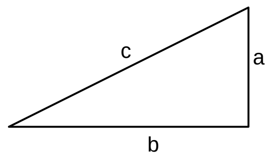
Wurzeln aus Brüchen ziehen: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ → $b \neq 0$

Rationalmachen des Nenners: $\frac{b}{\sqrt{a}} = \frac{b*\sqrt{a}}{\sqrt{a}*\sqrt{a}} = \frac{b*\sqrt{a}}{a}$ $\quad Bsp: \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10*\sqrt{5}}{5} = 2*\sqrt{5}$

2.1.8. *Trigonometrische Funktionen*

allgemein:

a: Gegenkathete
b: Ankathete
c: Hypothenuse



Sinus: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

Kosinus: $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Tangens: $\tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Kotangens:

$$\cot\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$$

Sinus:

$$\sin(x+y) \neq \sin x + \sin y$$

$$\sin(x \pm y) = \cos y * \sin x \pm \cos x * \sin y$$

$$\sin(2x) = 2 * \sin x * \cos x$$

Kosinus:

$$\cos(x+y) = \cos x * \cos y - \sin x * \sin y$$

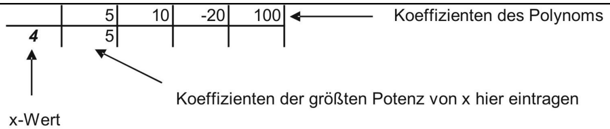
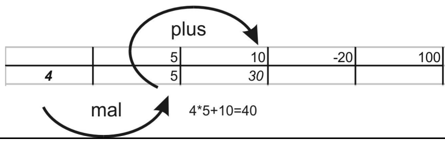
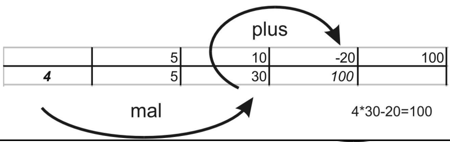
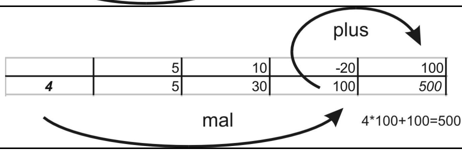
$$\cos(x-y) = \cos x * \cos y + \sin x * \sin y$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad \rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

2.1.9. Horner Schema

Beispiel Berechnung des Funktionswertes der Funktion $f(x) = 5x^3 + 10x^2 - 20x + 100$ an der Stelle x=4 berechen.

Werte der Koeffizienten in Tabelle schreiben	 Hinweis: Bei „leeren“ Koeffizienten, z.B. $0x^2$ muss eine 0 eingetragen werden.
1. Schritt	
2. Schritt	
3. Schritt – der Funktions kann nun direkt abgelesen werden → 500	

Horner Schema für Polynomdivision

Beispiel: Nullstellenberechung für Funktion $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

<table>
<tr><td>Erste Nullstelle raten</td><td>x_1=1</td></tr>
<tr><td>Horner Schema erstellen</td><td>
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>-2</td><td>-5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>-1</td><td>-6</td><td>0</td></tr>
</table>
→ neue Funktion: y=x^2-x-6

Bleibt im letzten Feld ein anderer Wert als eine 0 stehen, so handelt es sich um den Rest der Division.
</td></tr>
</table>

2.2. Vektorrechnung

2.2.1. Normieren eines Vektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \frac{1}{|\vec{r}|} * \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\vec{r}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$$ (Betrag des Vektors)

2.2.2. Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ (Komponentenweise)

2.2.3. Skalarprodukt (inneres Produkt)

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad a \bullet b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2*1 + 3*3 + 1*5 = 16$$

oder: $\vec{a} \bullet \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\varphi)$

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|}}$$

2.2.4. Kreuzprodukt (nur bei 3 dimensionalen Vektoren möglich)

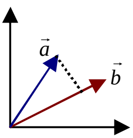
$$\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} 2*1 - 3*3 \\ 3*2 - 1*1 \\ 1*3 - 2*2 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 2-9 \\ 6-2 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- entstehender Vektor steht senkrecht auf den Vektoren
- Betrag = Fläche des aufgespannten Parallelogramms

2.2.5. Spatprodukt (Volumen des Parallelepipeds)

$$(a \times b) \bullet c \qquad = \det \begin{pmatrix} a_x & b_x & c_x \\ a_y & b_y & c_y \\ a_z & b_z & c_z \end{pmatrix}$$

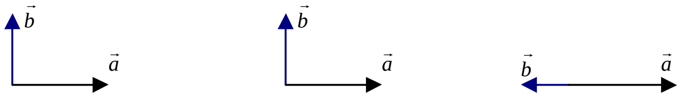
2.2.6. Projektion eines Vektors auf einen anderen



$\vec{a}$ projiziert auf $\vec{b}$

$$\vec{a}_b = \left(\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) * \vec{b}$$

2.2.7. *Lineare Abhängigkeit bei Vektoren*



linear unabhängig parallel (linear abhängig)

→ Vektoren sind <u>linear unabhängig</u>, wenn der Rang der Matrix (S. 12) <u>Rg A = n</u> (Anzahl der Vektoren)

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix} \quad \det = 1*5-3*2=-1 \quad \Rightarrow \quad \textit{linear unabhänig}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&3\\0&0\end{pmatrix} \quad \det = 1*0-3*0=0 \quad \Rightarrow \quad \textit{linear abhänig}$$

2.2.8. *Bildung Orthonormalsystem (Gram-Schmidt)*

Alle Vektoren in einem Orthonormalsystem stehen senkrecht aufeinander und sind normiert.

$$\boxed{u_1 = v_1 \qquad u_2 = v_2 - \frac{v_2 \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} * u_1 \qquad u_3 = v_3 - \frac{v_3 \bullet u_1}{u_1 \bullet u_1} * u_1 - \frac{v_3 \bullet u_2}{u_2 \bullet u_2} * u_2}$$

Beispiel:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{2}{4} * \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} - \frac{-2}{4} * \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2} * \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Die Vektoren müssen abschließend noch normiert werden (S. 8)!

2.3. Matrizen

2.3.1. Addition und Subtraktion von Matrizen

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 4 & 5\end{pmatrix}$$

- wie Vektoren komponentenweise
- müssen gleich groß sein

2.3.2. Multiplikation von Matrizen mit Skalaren

$$3*\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}$$

- bei Skalar wie Vektor

2.3.3. Matrizenmultiplikation:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 7\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 9\\ 29 & 31\end{pmatrix}$$

Berechnung mit Tabelle:

		2	-1
	+	3	5
1	2	$\boxed{8}$	9
4	7	29	31

$\Rightarrow\ 1*2+2*3=8$

Schnittstelle der Matrizen muss passen:

$A_{(m,n)}*B_{(n,p)}=C_{(m,p)}$

Schnittstelle n muss passen (Zeilen, Spalten)

Hinweis: nicht kommutativ $A*B\neq B*A$

2.3.4. Symmetrie von Matrizen

$\boxed{A={}^tA}$ → Matrix ist symmetrisch

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\ 4 & 1 & 3\\ -2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

- symmetrisch zur Hauptdiagonalen

$\boxed{A=-{}^tA}$ → Matrix ist schiefsymmetrisch

Bsp.: $A=\begin{pmatrix}0 & 4 & -2\\ -4 & 0 & 3\\ 2 & -3 & 0\end{pmatrix}$

- bei Spiegelung an der Diagonalen ändern sich die Vorzeichen der Elemente
- Hauptdiagonalelemente müssen verschwinden

2.3.5. *Determinanten*

- Matrix muss quadratisch sein
- bei Zeilentausch ändert sich das Vorzeichen
- Multiplikation oder Division einer Zeile → Det. mult. bzw. div. mit Faktor
- keine Änderung, wenn Zeile/Spalte (mit Vielfachem) zu einer <u>anderen</u> addiert wird

Ausrechnen mit Laplace

Entwicklung nach einer Zeile/Spalte, Vorzeichen entsprechend dem „Schachbrettmuster“

Beispiel Entwicklung nach Zeile 1:

$$\begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}2 & {}^{+}5 \\ {}^{-}6 & {}^{+}8 & {}^{-}9 \\ {}^{+}7 & {}^{-}5 & {}^{+}3 \end{pmatrix} = 1*\begin{vmatrix} 8 & 9 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2*\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + 5*\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = \det(-61)$$

Unterdeterminanten bestimmen

2.3.6. *Direktes Bestimmen (bis maximal 3x3 Matrix)*

Hauptdiagonalen jeweils multiplizieren und addieren, Nebendiagonalen multiplizieren und addieren und von den Hauptdiagonalen subtrahieren.

2-reihig: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 1*4 - 2*3 = -2$

3-reihig: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} D = (&a_{11}*a_{22}*a_{33} + a_{12}*a_{23}*a_{31} + a_{13}*a_{21}*a_{32}) \\ -(&a_{13}*a_{22}*a_{31} + a_{12}*a_{21}*a_{33} + a_{11}*a_{23}*a_{32}) \end{aligned}$$

2.3.7. *Ausrechnen mit Gauß*

- obere oder untere Dreiecksmatrix auf 0 bringen (durch Zeilenumformungen, siehe 2.3.5), dann Hauptdiagonale multiplizieren.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = 1*(-2) = -2$$

erste Zeile (-3) * zu zweiter Zeile addieren, Hauptdiagonale multiplizieren

2.3.8. *Transponierte einer Matrix*

Zeilen und Spalten werden vertauscht, Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}^{t}$

2.3.9. *Einheitsmatrix*

Die Einheitsmatrix besitzt auf ihrer Hauptdiagonalen jeweils den Wert 1, restliche Elemtente 0.
Es gilt: $A * E = A$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.10. *Orthogonale Matrix*

Matrix ist orthogonal, wenn $A^{-1} = A^t$ bzw. $A * A^t = E$ (transponierte ist gleichzeitig die inverse Matrix).

2.3.11. *Inverse Matrix bilden*

$A * A^{-1} = E$ (Einheitsmatrix)

bis 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{a*d - b*c} * \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Ansonsten Gauß-Jordan-Verfahren:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

- Einheitsmatrix an Matrix anhängen
- Zeilenumformungen bis vorne die Einheitsmatrix steht, dann steht hinten die inverse Matrix und kann abgelesen werden
- Nur Zeilenumformungen möglich
- *Vorgehen:* zuerst untere Dreiecksmatrix erzeugen, dann obere
- inverse nur bei regulären Matrizen möglich

2.3.12. *Reguläre/Singuläre Matrix*

reguläre Matrix: det $\neq$ 0
singuläre Matrix det = 0

2.3.13. *Rang einer Matrix*

- Zeilenanzahl der <u>größten Unterdeterminante</u> von A $\neq$ 0

2.3.14. *Umformungen die den Rang nicht ändern*

- 2 Zeilen / Spalten vertauschen
- Zeile / Spalte mit $\lambda \neq 0$ multiplizieren
- Vielfaches einer Zeile / Spalte zu einer anderen addieren

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} - 7 * I \quad \cong \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -10 & -32 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad \cong \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & -32 & -14 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow Rang = 3$$

2.3.15. Spur einer Matrix

Summe der Diagonalelemente einer Matrix

Beispiel: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ $\qquad Sp(A)=a_{11}+a_{22}$

2.3.16. Lineare Gleichungssysteme

$$A*\vec{x}=\vec{c}$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= c_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= c_2 \\ a_{31}x_3 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= c_3 \end{aligned}$$

In Form bringen (untere Dreiecksmatrix herstellen):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

Lösungen:

	1	2	5	3	
	0	1	7	5	
1.Variante:	0	0	0	0	Variable frei wählbar (0=0)
2.Variante:	0	0	1	7	eindeutige Lösung (x3=7)
3.Variante:	0	0	0	8	keine Lösung für LGS

Ermittelte Variable in nächste Ebene einsetzen und nächste Variable berechnen.

Hinweis: Nur Zeilenumformungen sind erlaubt, Tausch und Addition einer Zeile mit Faktor!

2.3.17. Eigenwerte und Eigenvektoren

Beispiel Berechnung Eigenwerte und Eigenvektoren: $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

1. Aufstellen der charakteristischen Gleichung $\begin{vmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow (-2-\lambda)*(4-\lambda)-(-5*1)=0$ $\Rightarrow \underline{\underline{\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0}} \qquad (\lambda^2 - Sp(A)*\lambda + \det(A) = 0)$	Auf Hauptdiagonale λ subtrahieren.
2. Lösen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$ $\underline{\underline{\lambda_1 = 3}}$ $\underline{\underline{\lambda_2 = -1}}$	Die charakteristische Gleichung muss gelöst werden, die Nullstellen des Polynoms sind die Eigenwerte der Matrix.
3. λ_1 einsetzen in das LGS $\begin{pmatrix} -2-3 & -5 \\ 1 & 4-3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad +5*2.Zeile$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	Eigenwerte <u>jeweils</u> in A einsetzen und das LGS lösen. Matrix ist immer det(0), das LGS daher unterbestimmt, eine Variable frei wählbar (S. 13)
$v_{11} + v_{12} = 0$ $v_{11} = -v_{12} \qquad v_{12} = \alpha \ setzen$ $v_{11} = -\alpha$	v_{12} wird als Parameter α gesetzt.
4. Eigenvektor normieren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	Bei der Normierung verschwindet der Parameter α.
5. Probe $Sp(A) = \lambda_1 + \lambda_2$ $\det(A) = \lambda_1 * \lambda_2$	Anschließend den zweiten Eigenvektor mit λ_2 analog bestimmen.

2.3.18. Diagonalmatrix

- alle Elemente außerhalb der Diagonale sind 0
- Berechnung der Inversen: Diagonalmatrix ist genau dann invertierbar, wenn kein Eintrag der Hauptdiagonale 0 ist. Inverse Matrix berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 4^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

- Eigenwerte von Diagonalmatrizen: die Eigenwerte von Diagonalmatrizen sind die Elemente der Hauptdiagonalen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 3$$

$$Eigenvektoren: v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.3.19. Matrizen potenzieren mit Eigenwerten

Es gelten folgende Zusammenhänge: $A^{15} = V * \Lambda^{15} * V^{-1}$ (inverse) bzw. wenn A symmetrisch und die Eigenvektoren normiert sind: $A^{15} = V * \Lambda^{15} * V'$ (transponierte)	V = Matrix der Eigenvektoren Λ = Matrix der Eigenwerte in Form: $\begin{vmatrix} \lambda_1^{15} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{15} \end{vmatrix} = \Lambda^{15}$
Beispiel: $A^{15} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}^{15}$ Eigenwerte: $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 2$ Eigenvektoren: $v_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	**1. Schritt** Berechnung der Eigenwerte und Eigenvektoren (S. 14). Diese müssen nicht normiert werden, da sich die Normierung durch Multiplikation mit der inversen wieder herauskürzt.
$A^{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1^{15} & 0 \\ 0 & 2^{15} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$	Eigenvektoren in Matrix schreiben, multipliziert mit Λ^{15}, multipliziert mit der inversen Matrix der Eigenvektoren (S. 12).
$A^{15} = \begin{vmatrix} 131.069 & -65.534 \\ 196.602 & -98.300 \end{vmatrix}$	Matrixmultiplikation durchführen (S. 10).

2.3.20. Hauptachsentransformation

Ziel: Durch Überführung einer Funktion in die Normalform, soll eine Klassifizierung erfolgen um welchen Typ von Fläche es sich handelt.

Beispiel: $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{12,21}xy + b_1 x + b_2 y + d = 0$ $6x^2 + 9y^2 + 4xy - 40x - 30y + 55 = 0$	
$(x, y) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \frac{a_{12,21}}{2} \\ \frac{a_{12,21}}{2} & a_{12} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $(x, y) \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	1. Matrix aufstellen
$\lambda_1 = 10 \quad v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = 5 \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$	2. Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix bestimmen (S. 14) mit anschließender Normierung
$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$	3. Matrizen V und Λ aufstellen Hinweis: det(V) = 1, bei det(V)=-1 muss die Reihenfolge der Eigenvektoren vertauscht werden. Reihenfolge in Λ beliebig
$(\varepsilon, \eta) \cdot \Lambda \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + (b_1, b_2) \cdot V \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + d = 0$ $(\varepsilon, \eta) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + (-40, -30) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + 55 = 0$ 1.) $(\varepsilon, \eta) \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} = 10\varepsilon^2 + 5\eta^2$ 2.) $(-40, -30) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} = -\frac{100\varepsilon}{\sqrt{5}} + \frac{50\eta}{\sqrt{5}}$ ergibt: $10\varepsilon^2 + 5\eta^2 - \frac{100\varepsilon}{\sqrt{5}} + \frac{50\eta}{\sqrt{5}} + 55 = 0 \quad / : 5$ $2\varepsilon^2 + \eta^2 - \frac{20\varepsilon}{\sqrt{5}} + \frac{10\eta}{\sqrt{5}} + 11 = 0$	4. Einsetzen in Gleichung

$2\varepsilon^2+\eta^2-\frac{20\varepsilon}{\sqrt{5}}+\frac{10\eta}{\sqrt{5}}+11=0$ $2\varepsilon^2+\eta^2-4\sqrt{5}\varepsilon+2\sqrt{5}\eta+11=0$ $2\left(\varepsilon^2-2\sqrt{5}\varepsilon\right) \quad \left(+\eta^2+2\sqrt{5}\eta\right) \quad +11=0$ $2(\varepsilon-\sqrt{5})^2-10 \quad +(\eta+\sqrt{5})^2-5 \quad +11=0$ $\underline{\underline{2(\varepsilon-\sqrt{5})^2+(\eta+\sqrt{5})^2=4}}$	5. Verschiebung durch quad. Ergänzung beseitigen Formel für quad. Ergänzung: $a\cdot x^2+b\cdot x=a\cdot\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}$
$v=\varepsilon-\sqrt{5} \qquad w=\eta+\sqrt{5}$ $\mathit{Einsetzen}:$ $2v^2+w^2=4 \quad /:4$ $\frac{v^2}{2}+\frac{w^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\frac{v^2}{\sqrt{2}^2}+\frac{w^2}{2^2}=1}}$	6. Einführung neuer Koordinaten und Ablesen der neuen Funktion → hier Ellipse.

2.4. Komplexe Zahlen

$\sqrt{-1} = i \qquad \left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)$

→ Alle Rechnungen wie gewohnt aber $i^2 = -1$.
Komplexe Zahl: $5 \pm 3i$ (Realteil, Imaginärteil)

2.4.1. Komplexe Zahl im Nenner

$$\frac{2}{1-i} = \frac{2*(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2+2i}{1^2 - i^2} = \frac{2+2i}{2} = \underline{\underline{1+i}}$$

Erweiterung mit dem konjugiert komplexen Term.

2.4.2. Multiplikation von komplexen Zahlen

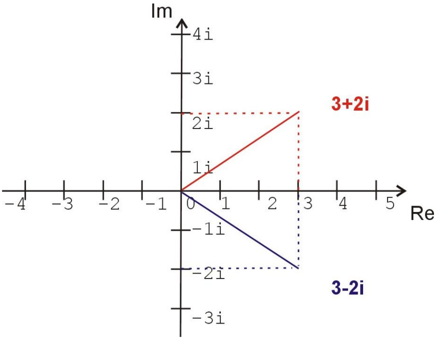
$$(a+bi)*(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$$Bsp: (3+4i)*(2+3i) = (6-12) + (9+8)i = \underline{\underline{-6+17i}}$$

2.4.3. Konjugiert komplexe Zahl

$z = a + bi \qquad \bar{z} = a - bi$ (Vorzeichen des Imaginärteils ändert sich)

2.4.4. Gaußsche Zahlenebene



Darstellung der komplexen Zahl im zweidimensionalen Raum.

→ Dadurch keine Vergleichbarkeit von komplexen Zahlen, da sich diese nicht anordnen lassen, wie auf einen Zahlenstrahl.

2.4.5. Betrag einer komplexen Zahl

$a \pm bi \qquad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$

→ im Betrag taucht die komplexe Zahl i nicht auf

2.4.6. Darstellung von komplexen Zahlen

<u>kartesische Darstellung:</u> $z = a + bi \quad z.B.\ 5 + 3i$

<u>trigonometrische Darstellung:</u> $z = r * (\sin\varphi + i * \cos\varphi)$ (in Praxis nicht verwendbar)

<u>Exponentialform:</u> $z = 5 + e^{i\varphi}$ (geeignet für Multiplikation, Division und Potenzierung von komplexen Zahlen)

2.4.7. Umrechnung der Darstellungen

<u>Polar nach Kartesisch</u>

$a = r * \cos\varphi$

$b = r * \sin\varphi$

<u>Kartesisch nach Polar</u>

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

(Winkel ist mehrdeutig!)

tan ist π periodisch z.B.:

$z = 1 + i \quad \varphi = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} = 45°$

$z = -1 - i \quad \cancel{\varphi = \arctan\frac{-1}{-1} = \frac{\pi}{4}}$

→ überlegen wo der Winkel liegt!

2.4.8. Rechenregeln Exponentialform

$z_1 * z_2 = r_1 * r_2 * e^{i(\varphi 1+\varphi 2)}$ $\quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} * e^{i(\varphi 1+\varphi 2)}$ $\quad z^b = (r * e^{i\varphi}) = r^b * e^{i\varphi * b}$

2.4.9. Potenzierung von komplexen Zahlen

$i^9 \qquad (0+1i)^9 = (1*e^{i90°})^9 = (1*e^{i\frac{\pi}{2}})^9 = 1^9 * e^{i\frac{\pi}{2}*9} = 1*e^{9\frac{\pi}{2}i}$

$9\frac{\pi}{2}$ = mehrmaliges Umrunden des Zeigers (2π = eine Umdrehung)

Ergebnis: $1*e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ (Zeiger hat 4-mal umrundet)

2.4.10. Radizieren von komplexen Zahlen

→ Jede n-te Wurzel hat n-Lösungen!

$\sqrt[b]{z} = (r * e^{i(\varphi+2\pi k)})^{1/b} = r^{1/b} * e^{i\frac{\varphi * 2\pi k}{b}} = \sqrt[b]{r} * e^{i(\frac{\varphi}{b}+\frac{2\pi k}{b})}$

Beispiel 1:

$\sqrt{4} = (4*e^{i*0})^{1/2} = \sqrt{4} * e^{i*0*\frac{1}{2}} = 2*e^{i*0} = \underline{\underline{2}}$

$\sqrt{4} = (4*e^{i*2\pi})^{1/2} = \sqrt{4} * e^{i*2\pi*\frac{1}{2}} = 2*e^{i*\pi} = \underline{\underline{-2}}$

Beispiel 2:

$\sqrt[3]{1} = (1*e^{i*0})^{1/3} = \sqrt[3]{1} * e^{i*0*\frac{1}{3}} = 1*e^{i*0} = \underline{\underline{1}}$

$= (1*e^{i*2\pi})^{1/3} = \sqrt[3]{1} * e^{i*2\pi*\frac{1}{3}} = \underline{\underline{1*e^{120°}}}$

$= (1*e^{i*4\pi})^{1/3} = \sqrt[3]{1} * e^{i*4\pi*\frac{1}{3}} = \underline{\underline{1*e^{240°}}}$

Beispiel3:

$\sqrt{i} = (1*e^{i*\frac{\pi}{2}})^{1/2} = \sqrt{1} * e^{i*\frac{\pi}{4}}$

$\sqrt{i} = (1*e^{i*\frac{\pi}{2}+2\pi})^{1/2} = \sqrt{1} * e^{i*\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}} = 1*e^{\frac{i5\pi}{4}}$

2.4.11. Logarithmus von komplexen Zahlen

→ Rechenregeln für Logarithmen siehe S. 5.

$\ln(1) = \ln(1*e^{i*0}) = \ln(1) + \ln(e^{i*0}) = \underline{\underline{0 + i*0}}$

$= \ln(1*e^{i*2\pi k}) = \ln(1) + \ln(e^{i*0+2\pi k}) = \underline{\underline{0 + i*2\pi k}} \quad k \ni Z$

→ unendlich viele Lsg.

0 = Hauptwerk, Imaginärteil [0,2π[

Beispiel:

$\ln(-e) = \ln(e) + \ln(e^{i*(\pi+2\pi k)}) = \underline{\underline{1 + i(\pi + 2\pi k)}}$

2.5. Analysis

2.5.1. Nullstellen

$y = x^2 + 2 \quad y = 0\ setzen \quad 0 = x^2 + 2 \quad x^2 = -2 \quad x = \sqrt{-2}$ → keine reelle Nullstelle

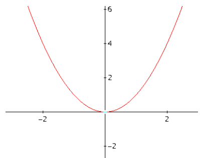
$y = x^2 - 2 \quad y = 0\ setzen \quad 0 = x^2 - 2 \quad x^2 = 2$

Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_{1,2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0 - 4*1*(-2)}}{2} = \dfrac{\pm\sqrt{8}}{2} \approx \pm \dfrac{2{,}83}{2}$

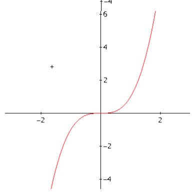
$\underline{\underline{x1 = -1{,}41}} \quad \underline{\underline{x2 = 1{,}41}}$

2.5.2. Symmetrie

f(-x)=f(x) → Achsensymmetrisch
Bsp.: f(x)=x^2 $\quad -2^2=4 \quad 2^2=4$



-f(x)=f(-x) → punktsymmetrisch im Ursprung
Bsp.: f(x)=x^3 $\quad -2^3=-8 \quad 2^3=8$



2.5.3. Monotonie

Streng monoton wachsend:	$f'(x) > 0$
Streng monoton fallend:	$f'(x) < 0$
Monoton wachsend:	$f'(x) \geq 0$

Streng monoton, wenn Funktion immer ansteigt, d.h. keine Sattelpunkte

2.5.4. Hochpunkte, Tiefpunkte, Wendepunkte

Vorgehen: Ableiten, Gleichung lösen und mit Bedingung überprüfen.

Hochpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x_0) < 0$

Tiefpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x_0) > 0$

Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ → Hinweis: einfache Nullstelle

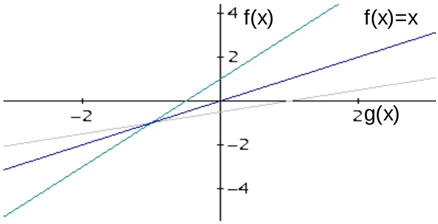
2.5.5. Periodizität

f(x ± p) = f(x) *Beispiel:* sin(x + 2π) = sin(x) Periode: p = 2π

2.5.6. Umkehrfunktion

Vorgehen:
- x und y vertauschen und nach y auflösen
- Definitionsbereich und Wertebereich vertauschen sich

Beispiel:
y = 2x + 1 *(f(x))*
Umkehrung: x = 2y + 1 / -1
x-1 = 2y / :2
0.5x-0.5 = y *(g(x))*



- Umkehrfunktion wird an f(x) = x gespiegelt
- jede streng monoton wachsende oder fallende Funktion ist umkehrbar

2.5.7. Koordinatentransformation

Bei Umwandlung Kartesisch nach Polar: $x = r * \cos\varphi$ $y = r * \sin\varphi$ $r^2 = x^2 + y^2$

2.6. Gebrochenrationale Funktionen

Beispiel: $f(x)=\dfrac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$

2.6.1. Nullstellen

- Nullstelle wo das Zählerpolynom den Wert 0 annimmt, aber Nennerpolynom von 0 verschieden ist

2.6.2. Polstellen

- Nullstellen des Nennerpolynoms
- kann die Nullstelle über Linearfaktoren mit Zähler gekürzt werden, so kann Definitionslücke behoben werden, ansonsten Polstelle

2.6.3. Asymptotisches Verhalten im Unendlichen

- zuerst Definitionslücken beheben
- anschließend Polynomdivision Zähler/Nenner
- es entstehen Lineare Funktion + Rest → lineare Funktion → <u>Asymptote</u>

Beispiel 1 (Behebung der Definitionslücken):

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-8}{x^2-4}$$

1. Nullstellen ermitteln Zähler
x_1=2 (raten, weitere durch Polynomdivision)

$$(x^3-6x^2+12x-8):(x-2)=x^2-4x+4$$
$$\underline{-(x^3-2x^2)}$$
$$-4x^2+12x$$
$$\underline{-(-4x^2+8x)}$$
$$4x-8$$
$$\underline{-(4x-8)}$$
$$0$$

$$x_{2,3}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\underline{\underline{2}}$$

→ doppelte Nullstelle

<u>2. Nullstellen ermitteln Nenner</u>

$x^2-4=0 \qquad x_1=-2\ ,\ x_2=2$

<u>3. Zerlegung in Linearfaktoren</u>

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x-2)(x-2)}{\cancel{(x-2)}(x+2)}$$

behebbar bei x=2

<u>4. Behebung</u>

- einsetzen von x=2 in die gekürzte Formel:

$$\frac{(2-2)(2-2)}{(2+2)}=\frac{0}{4}=0 \qquad \underline{\underline{f(2)=0}}$$

Beispiel 2 (Asymptote im Unendlichen)
Restfunktion aus Beispiel 1 → Polynomdivision

$$\frac{(x-2)(x-2)}{(x+2)} = (x^2-4x+4):(x+2) = \boxed{x-6} + \frac{16}{x+2}$$

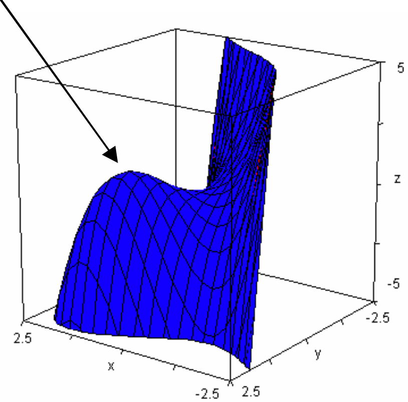
→ Asymptote im unendlichen

$$\begin{array}{l} \underline{-(x^2+2x)} \\ \quad -6x+4 \\ \quad \underline{-(-6x-12)} \\ \qquad 16 \end{array}$$

2.7. Mehrdimensionale Extremwertberechnung

2.7.1. Berechnung von Extremalstellen mehrdimensionaler Funktionen

Beispiel:	$f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$
Partiell Ableiten (siehe S. 29)	$f_x = 3y - 3x^2$ $f_y = 3x - 3y^2$ $f_{xx} = -6x \qquad f_{xy} = 3$ $f_{yy} = -6y \qquad f_{yx} = 3$
Erste Ableitungen gleich 0 setzen	$0 = 3y - 3x^2 \quad /:3$ $0 = 3x - 3y^2 \quad /:3$ $0 = y - x^2$ $0 = x - y^2$ Es entsteht ein Gleichungssystem welches zu lösen ist durch entsprechende Umformungen: $0 = x - y^2 \quad \Rightarrow \quad x = y^2$ $\textit{Einsetzen in erste Gleichung}:$ $0 = y - \left(y^2\right)^2 \quad \Rightarrow \quad 0 = y - y^4 \quad \Rightarrow \quad 0 = y\left(1 - y^3\right)$ $\textit{Lösungen}:$ $y_1 = 0 \quad x_1 = 0$ $y_2 = 1 \quad x_2 = 1$
Ermittelte Punkte untersuchen ob Extremstelle	Notwendiges Kriterium: $D = f_{xx}(x_0,y_0) \cdot f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2 > 0$ (einsetzen x und y Wert in zweite Ableitungen) Ist dieses erfüllt, dann bedeutet:

	$f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad \Rightarrow relatives\ Maximum$ $f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad \Rightarrow relatives\ Minimum$ Im Falle D > 0 liegt ein Sattelpunkt vor, bei D = 0 ist keine Entscheidung möglich. Beispiel: $x_1 = 0\ ,\ y_1 = 0 \quad D = 0 \cdot 0 - 9 = -9 \quad \Rightarrow kein\ Extrempunkt$ $x_2 = 1\ ,\ y_2 = 0 \quad D = (-6)\cdot(-6) - 9 = 27 \quad \Rightarrow Extrempunkt$ $f_{xx}(1,1) = -6 \quad \Rightarrow Hochpunkt$
Extrempunkt:	$f(1,1) = z = 3 \cdot 1 \cdot 1 - 1^3 - 1^3 = \underline{\underline{1}}$ P1=(1,1,1) 

2.8. Extremwertberechnung mit Nebenbedingungen

2.8.1. Direktes Auflösen der Nebenbedingung

- Hinweis: direktes Auflösen ist nur bei einfachen Problemen möglich und beinhaltet in der Regel eine Menge Rechenarbeit

Beispiel:	Maximum der Funktion $f(x,y)=xy$ unter der Nebenbedingung $x+y=1$
Auflösen der NB nach x	$x=1-y$
Einsetzen in Funktion	$f(y)=(1-y)y=y-y^2$ Funktion ist nur noch von einer Variable abhängig.
Ableiten der Funktion und erste Ableitung gleich 0 setzen	$f'(y)=1-2y$ $f''(y)=-2$ $0=1-2y$ $2y=1 \quad /\div 2$ $\underline{\underline{y=\frac{1}{2}}}$
Einsetzen von y in NB	$x+\frac{1}{2}=1 \quad /-\frac{1}{2}$ $\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$ Die zweite Ableitung ist negativ für alle Y → Maximum.

2.8.2. Lagrange-Multiplikatoren

Methode der Lagrange-Multiplikatoren ist eleganter las das direkte Einsetzen, es basiert auf den Ansatz:

$$\boxed{L(x,y)=f(x,y)+\lambda\cdot g(x,y)}$$

Man bildet die partiellen Ableitungen f_x,f_y,g_x,g_y und löst das folgende homogene Gleichungssystem:

$$\boxed{\begin{aligned} f_x+\lambda\cdot g_x&=0\\ f_y+\lambda\cdot g_y&=0\end{aligned}}$$

Beispiel:	$Funktion:\ T(x,y)=1+xy$ $Nebenbedingung:\ g(x,y)=x^2+y^2-1$
Partiell ableiten	$T_x=y \qquad g_x=2x$ $T_y=x \qquad g_y=2y$ $T_{xx}=0 \qquad T_{xy}=1$ $T_{yy}=0 \qquad T_{yx}=1$
Lagrange-Gleichungen	$0=y+2x\lambda$ $0=x+2y\lambda$
Gleichungssystem lösen	– erste Gleichung nach λ auflösen: $0=y+2y\lambda \quad /-y$ $-y=2y\lambda \quad /\div x$ $-\frac{y}{x}=2\lambda \quad /\div 2$ $-\frac{y}{2x}=\lambda$ – in zweite Gleichung einsetzen: $0=x-\frac{y^2}{x}$ $\frac{y^2}{x}=x \quad /\cdot x \qquad \Rightarrow \quad y^2=x^2 \quad /\sqrt{\ }$ $y=x$
In Nebenbedingung einsetzen	$x^2+x^2-1=0$ $2x^2=1 \quad /\div 2 \qquad \Rightarrow \quad x^2=\frac{1}{2}$ $\underline{\underline{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}}$
Nun Maxima bestimmen	Punkte in T(x,y) einsetzen, Maximum ist T_{max}=1,5 für die Punkte: $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad und \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ Bsp.: $T(x,y)=1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}5$ $T(x,y)=1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1{,}5$ $T(x,y)=1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0{,}5$

2.9. Differentialrechnung

2.9.1. Ableiten mit Differentialquotient

Bsp.: $y = x^2 \quad y' = 2x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2\Delta x x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x x + \Delta x^2}{\Delta x} = \underline{\underline{2x}}$$

2.9.2. Grundableitungen

f(x)	f'(x)	f(x)	f'(x)
x^n	$n*x^{n-1}$	$\tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	e^x	e^x
sin(x)	cos(x)	a^x	$(\ln a)*a^x$
cos(x)	-sin(x)	ln(x)	$\frac{1}{x}$
tan(x)	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{(\ln a)*x}$
$\sin^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	Ableitung Sinus-Kosinus: sin(x) → cos(x → -sin(x) → -cos(x) → sin(x)	
$\cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		

2.9.3. Ableitungsregeln

Produktregel:

$$\left(f(x)*g(x)\right)' = f(x)*g'(x) + f'(x)*g(x)$$

$$Bsp: \quad (x*\sin(x))' = x*\cos(x) + \sin(x)$$

Für das Produkt dreier Funktionen:

$$\left(f(x)*g(x)*h(x)\right)' = f'(x)*g(x)*h(x) + f(x)*g'(x)*h(x) + f(x)*g(x)*h'(x)$$

Quotientenregel:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)*f'(x) - f(x)*g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$Bsp: \quad \left(\frac{x^2+3x}{5x^2-2x}\right)' = \frac{(5x^2-2x)*(2x+3) - (x^2+3x)*(10x-2)}{(5x^2-2x)^2}$$

Kettenregel:	äußere Ableitung mal innerer Ableitung

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) * g'(x)$$

$$Bsp: \left[e^{\boxed{\sin(\boxed{\sqrt{\ln x}})}} \right]' = e^{\boxed{\sin(\sqrt{\ln x})}} * \cos(\boxed{\sqrt{\ln x}}) * \frac{1}{2\sqrt{\boxed{\ln x}}} * \frac{1}{x}$$

$$= \frac{e^{\sin(\sqrt{\ln x})} * \cos(\sqrt{\ln x})}{2x\sqrt{\ln x}}$$

Trick: Ableitung von e hoch roter Kasten, mal Ableitung von roter Kasten, mal Ableitung von grüner Kasten …

2.9.4. Logarithmische Ableitung

Bsp.:

$$f(x) = x^x \quad /*\ln$$

$$\ln(f(x)) = \ln(x^x)$$

→ Differenzierung beider Seiten mit Ketten-/Produktregel

$$\frac{1}{f(x)} * f'(x) = x * \frac{1}{x} + \ln(x) \quad /*\ f(x)$$

$$f'(x) = f(x) * (1 + \ln(x)) = \underline{\underline{x^x * (1 + \ln(x))}}$$

2.9.5. Differentiation mit mehreren Variablen

Partielle Ableitung: Jeweils nach einer Variablen ableiten, die anderen als Konstante ansehen.

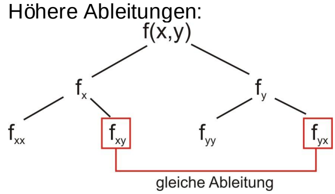
Beispiel:

$$f(x,y) = 2xy + 5x^2y + 7xy$$

$$f_x = 2y + 10xy + 7y$$

$$f_y = 2x + 5x^2 + 7x$$

Höhere Ableitungen:



Gradient:

$\vec{\nabla}$ *Nabla Operator*

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

Gradientenvektor liefert immer die größte Steigung:

$$\begin{pmatrix} 2y + 10xy + 7y \\ 2x + 5x^2 + 7x \end{pmatrix} \vec{\nabla} f\ (P1)$$

P1 (1,1)
x,y einsetzen

$$= \begin{pmatrix} 2*1 + 10*1 + 7*1 \\ 2*1 + 5*1^2 + 7*1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 14 \end{pmatrix}$$

höchste Steigung in P1

Totales Differential: Komplette Ableitung der Funktion nach allen Variablen.

Steigung in Richtung bestimmen
Bsp.: $P_1(1,1)$ in Richtung $P_2(5,3)$

1. Vektor von P_1 nach P_2 bestimmen

$$P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} 5-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Betrag des Vektors

$$r = \frac{1}{\sqrt{16+4}} = \frac{1}{\sqrt{20}} \approx \frac{1}{4}$$

3. Einheitsvektor in Richtung

$$\frac{1}{4} * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} f \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+10+7 \\ 1+2,5+3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(Steigung in Richtung P_2)

2.10. Integralrechnung

2.10.1. Grundintegrale

f(x)	F(x)
$n*x^{n-1}$	$x^n + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
cos(x)	sin(x) + C
sin(x)	-cos(x) + C
e^x	$e^x + C$
$\frac{1}{x}$	ln(x) + C
$\frac{1}{\cos^2 x}$	tan(x) + C

$$\int_a^b f(x)\,dx$$
$$= F(b) - F(a)$$

<u>Hinweis:</u>
nicht über Polstellen und Definitionslücken integrieren!

2.10.2. Integration durch Substitution

Beispiel 1: $\int x * \cos(x^2) dx$

1. Substitution durchführen:

$u = x^2 \quad \frac{du}{dx} = 2x \quad /*dx / : 2x$

$\frac{du}{2x} = dx$

Einsetzen:

$= \int \cancel{x} * \cos(u) \frac{du}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C$

→ anschließend Rücksubstitution durchführen:

$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \sin(x^2) + C}}$

Beispiel 2: $\int \sqrt[3]{1-t}\, dt$

1. Substitution durchführen:

$u = 1 - t \quad \frac{du}{-1} = dt$

Einsetzen:

$= -\int u^{1/2} du = -\frac{3}{4} u^{4/3} + C$

→ anschließend Rücksubstitution durchführen:

$= -\frac{3}{4}(1-t)^{4/3} + C = \underline{\underline{-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1-t)^4} + C}}$

2.10.3. Produktintegration

$$\boxed{\int u(x) * v'(x) dx = u(x) * v(x) - \int u'(x) * v(x) dx}$$

Bsp. 1: $\int x * e^x dx$ u=x $v'=e^x$
u'=1 $v=e^x$

Einsetzen:

$= x * e^x - \int 1 * e^x dx = x * e^x - e^x + C = \underline{\underline{e^x (x-1) + C}}$

Bsp. 2: $\int x * \ln(x) dx$ $u = \ln(x) \quad v' = x$

$u' = \frac{1}{x} \quad v = \frac{1}{2} x^2$

Einsetzen:

$= \frac{1}{2} x^2 * \ln(x) - \int \frac{1}{x} * \frac{1}{2} x^2 dx = \frac{1}{2} x^2 * \ln(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 * \ln(x) - \frac{1}{2} * \frac{1}{2} x^2 = \underline{\underline{\frac{1}{2} x^2 \left(\ln(x) - \frac{1}{2} \right)}}$

2.10.4. Uneigentliche Integrale

Bsp.:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx \qquad F(x) = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^\infty$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2x^2}\right) - \left(-\frac{1}{2*1^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2*x^2}+\frac{1}{2}\right) = 0+\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

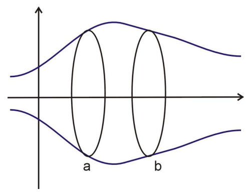
Bsp.:

$$\int_{-\infty}^2 e^x dx \qquad F(x) = \left[e^x\right]_{-\infty}^2$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(e^2 - e^x\right) = e^2 - 0 = \underline{\underline{e^2}}$$

2.10.5. Volumen von Rotationskörpern

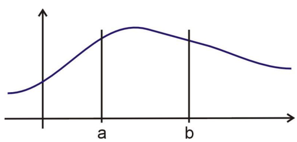
$$V = \int_a^b \pi * f(x)^2 dx$$



2.10.6. Bogenlänge

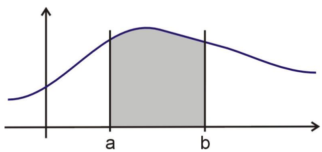
Länge des „Weges“ auf der Funktion.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$



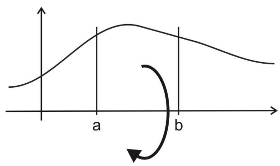
2.10.7. Mittelwert

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$



2.10.8. Mantelfäche berechnen

$$A_{mantel} = 2\pi \cdot \int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+f'(x)^2}dx$$



2.11. Grenzwerte

Begriffe:
- konvergent, wenn Folge einen Grenzwert besitzt
- divergent, wenn Folge keinen Grenzwert besitzt

$$\boxed{\begin{array}{ll} \frac{1}{\infty}=0 & \frac{1}{0}=\infty \\ \infty-\infty & \rightarrow unbestimmt \end{array}}$$

Beispiel:

$$a_n=\frac{21n+2}{3n-3} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{21n+2}{3n-3}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\cancel{n}\left(21+\frac{2}{n}\right)}{\cancel{n}\left(3-\frac{3}{n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{21+\frac{2}{n}}{3-\frac{3}{n}}\right)=\frac{21}{3}=\underline{\underline{7}}$$

2.11.1. *Rechenregeln für Grenzwerte*

1.) $$\lim_{x\to x0}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to x0}f(x)+\lim_{x\to x0}g(x)$$

2.) $$\lim_{x\to x0}(C*f(x))=C*\left(\lim_{x\to x0}f(x)\right)$$

3.) $$\lim_{x\to x0}(f(x)*g(x))=\lim_{x\to x0}f(x)*\lim_{x\to x0}g(x)$$

4.) $$\lim_{x\to x0}(\sqrt[n]{f(x)})=\sqrt[n]{\lim_{x\to x0}f(x)}$$

2.11.2. *Beispiele Grenzwerte*

$$\lim_{x\to 0}=\left(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=2$$

$$\lim_{x\to 0}=\left(2+\frac{1}{x}\right)=2+\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}=(2x-x)=\infty$$

$$\frac{\sin(x)}{x}=1$$

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}=0$$

$$\frac{\sin(x)}{x^2}=\infty$$

2.11.3. *Regel von L´Hôpital*

Grenzwert weist folgende Eigenschaft auf: $\lim_{x\to 0}(f(x))=\frac{0}{0}$ oder $\lim_{x\to 0}(f(x))=\pm\frac{\infty}{\infty}$

dann gilt: $$\boxed{\lim_{x\to x0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x0}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Beispiel: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=1$

2.12. Reihen

2.12.1. Potenzreihen

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

2.12.2. Konvergenzradius von Potenzreihen

$$\boxed{r = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_n + 1}\right)}$$

Bsp.: $P(x) = -x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 \ldots$

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \frac{-n+1}{n} = \frac{n*\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 1 + \frac{1}{n} \approx \underline{\underline{1+0}}$$ → Konvergenzradius = 1

(bei ∞ ist Konvergenzradius = R)

Anschließend Überprüfung ob 1 und -1 im Konvergenzradius enthalten sind.

$P(1) = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \ldots$ → Konvergiert

→ $\underline{\underline{-1 < r \leq 1}}$

$P(-1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots$ → divergiert

2.12.3. Potenzreihenentwicklung (Mac Laurinsche Reihe)

Zweck: Annäherung einer Funktion f(x) mit Polynomen in einem Punkt

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}*x^n}$$

→ Näherung um x = 0

Beispiel: f(x)=sin(x)

	f(0)	!	x
f(x)=sin(x)	0	0!	x^0
f'(x)=cos(x)	1	1!	x^1
f"(x)=-sin(x)	0	2!	x^2
f'"(x)=-cos(x)	-1	3!	x^3
f(4)(x)=sin(x)	0	4!	x^4
f(5)(x)=cos(x)	1	5!	x^5
f(6)(x)=-sin(x)	0	6!	x^6
f(7)(x)=-cos(x)	-1	7!	x^7
f(8)(x)=sin(x)	0	8!	x^8
f(9)(x)=cos(x)	1	9!	x^9

→

$$f(x)=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9\ldots$$

Die Reihe ist unendlich lang, allerdings ist die Reihe nach einigen Termen bereits hinreichend genau.

2.12.4. Taylorreihe

Wie MacLaurinsche Reihe, aber Entwicklung um einen beliebigen Punkt.

$$\boxed{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}*(x-x_0)^n}$$

→ Näherung um x = 0

Beispiel: $f(x)=\sqrt{x} \quad x_0=0$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}x^{-5/2}$$

$$f''''(x)=-\frac{15}{16}x^{-7/2}$$

f(x)	*!*	*x*
1	0!	1
$\frac{1}{2}$	1!	x
$-\frac{1}{4}$	2!	x^2
$\frac{3}{8}$	3!	x^3
$-\frac{15}{16}$	4!	x^4

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{4*2!}(x-1)^2+\frac{3}{8*3!}(x-1)^3-\frac{15}{16*4!}(x-1)^4$$

→ Berechnung Konvergenzradius ganz normal möglich
→ Konvergenzradius um Punkt x_0

2.13. Differentialrechnung

2.13.1. Trennung der Variablen

$$\boxed{\begin{array}{l} y' = f(x) * g(y) \\ \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \end{array}}$$

Beispiel 1: $y' = \frac{x}{\sin(y)} \quad /*\sin(y)$ $\sin(y) * y' = x \qquad y' = \frac{dy}{dx}$ $\sin(y)\frac{dy}{dx} = x \quad /* dx$ $\sin(y)dy = x\,dx \quad / \int$ $\sin(y)dy = \frac{1}{2}x^2 + C$ $-\cos(y) = \frac{1}{2}x^2 + C$ $\int$ $\cos(y) = -\frac{1}{2}x^2 - C \quad / \cos^{-1}$ $\underline{\underline{y = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}x^2 - C\right)}}$	<u>Vorgehensweise:</u> • beide Variablen auf je eine Seite bringen • $\frac{dy}{dx}$ für y' einsetzen • integrieren
Beispiel 2: $y' = y$ $\frac{dy}{dx} = y \quad /:y \quad /* dx$ $\frac{1}{y}dy = dx \quad / \int$ $\int \frac{1}{y} dy = \int dx$ $\ln(y) = x + K \quad / e\wedge$ $y = e^{x+k}$ $\underline{\underline{y = C * e^x}}$ „allgemeine Lösung"	Anfangswertproblem: $y(0) = 1$ $1 = C * e^0 = C * 1$ $\underline{\underline{C = 1}}$

2.13.2. Lineares DGL 1. Ordnung (Variation der Konstanten)

Allgemeine Form:	$y' + f(x) * y = g(x)$ (y' u. y müssen linear sein) Bsp.: $\dot{x} - 3x = t * e^t$
1. Schritt:	Lösen des homogenen Gleichungssystems: $\dot{x} - 3x = 0$ Lösungsformel: $\boxed{y = C * e^{-\int f(x)dx}}$ Trennung der Variablen: $\underline{\underline{x = e^{3t} * K}}$
2. Schritt Variation der Konstanten	$x = K(t) * e^{3t}$ (für K wird K(x) gesetzt) $\dot{x}(t) = K(t) * e^{3t} * 3 + \dot{K}(t) * e^{3t}$ (ableiten mit Produktregel) → einsetzen in Ursprungsformel: $\cancel{K(t) * e^{3t} * 3} + \dot{K}(t) * e^{3t} \cancel{- 3 * K(t) * e^{3t}} = t * e^t$ → 2 Terme müsse sich herauskürzen $\dot{K}(t) * e^{3t} = t * e^t \quad / : e^{3t}$ $\dot{K}(t) = t * e^{-2t} \quad / \int$ $K(t) = \int t * e^{-2t}$ $K(t) = -\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + C$ → einsetzen in homogene Lösung $x = e^{3t} * K$ $\underline{\underline{x(t) = e^{3t}\left(-\frac{1}{4}(2t+1)e^{-2t} + C\right)}}$

2.14. System linearer Differentialgleichungen

2.14.1. Eulerscher Lösungsansatz

<table>
<tr><td colspan="2">Beispiel: Lösung DGL 3. Ordnung
$y''' - 5y'' + 17y' - 13y = 0$</td></tr>
<tr><td>$\lambda^3 - 5\lambda^2 + 17\lambda - 13 = 0$
Nullstellen:
$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \pm 3i$</td><td>Charakterisches Polynom bilden (Ableitung wird zu Potenz) und Nullstellen des Polynoms finden</td></tr>
<tr><td colspan="2">Lösungsschema für Fundamentalsystem:
1-fache reelle Nullstelle: $\lambda \Rightarrow e^{\lambda t}$
m-fache reelle Nullstelle (Nullstelle mehrfach vorhanden): $\lambda \Rightarrow e^{\lambda t},\ t \cdot e^{\lambda t},\ t^2 \cdot e^{\lambda t}, ...$
1-fache komplexe Nullstelle: $e^{(\alpha \pm \beta i)t} = \begin{cases} e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \\ e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \end{cases}$
m-fache komplexe Nullstelle (Nullstelle mehrfach vorhanden): $\lambda \Rightarrow e^{\alpha t} \cdot \cos(\beta t), e^{\alpha t} \cdot \sin(\beta t)$
$e^{\alpha t} \cdot t \cdot \cos(\beta t), e^{\alpha t} \cdot t \cdot \sin(\beta t)$
....</td></tr>
<tr><td>Fundamentalsystem:
$e^t \quad , \quad e^{2t} \cdot \cos(3t) \quad , \quad e^{2t} \cdot \cos(3t)$</td><td>Fundamentalsystem aus Nullstellen bilden</td></tr>
<tr><td>Allgemeine Lösung:
$y = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{2t} \cdot \cos(3t) + c_3 \cdot e^{2t} \cdot \cos(3t)$</td><td></td></tr>
</table>

2.14.2. Überführung DGL n-ter Ordnung in n Differentialgleichungen 1. Ordnung

Durch Substitution lässt sich das obige DGL in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführen.

	$y''-5y'+6y=0$
Substitution und einsetzen in ursprüngliche Gleichung	$y=z_1\,,\; y'=z_1'=z_2\,,\; y''=z_2'=z_3\,,\; y'''=z_3'$ $\Rightarrow z_2'-5z_2+6z_1=0$
Gleichung u. Matrixschreibweise allgemein	$z_n'+a_1z_n+a_2z_{n-1}+...+a_{n-1}z_2+a_nz_1=0$ $\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ ... \\ z_{n-1}' \\ zn' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & ... & -a_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_{n-1} \\ z_n \end{pmatrix}$
Gleichungssystem für Beispiel	$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$
Eigenwerte der Koeffizientenmatrix bestimmen	$\lambda_1=2$ $\lambda_2=3$
Eigenvektoren der Matrix bestimmen	$v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\quad,\quad v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Aufstellen des Fundamentalsystems	$e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\quad,\quad e^{3t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
Allgemeine Lösung DGL	$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}=C_1\cdot e^{2t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}+C_2\cdot e^{3t}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ Ergebnis von y wie beim Eulerschen Lösungsansatz, jedoch liefert diese Methode auch die Lösung von y'. Durch ableiten von y lässt sich eine Rechenprobe durchführen

2.14.3. Allgemeine Systeme linearer DGLn (ohne Störterm)

1. Fall, es existieren n verschiedene reelle Eigenwerte

Beispiel:	$x' = -13x + 30y$ $y' = -9x + 20y$
Vektordifferentialgleichung aufstellen	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 30 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmen	$\lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = 2$ $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Aufstellen des Fundamentalsystems	$e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
Allgemeine Lösung des DGL-Systems	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{5t} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 + e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Fall, es existieren weniger als n verschiedene reelle Eigenwerte λ

Beispiel:	$x' = 2x + 4y$ $y' = -x - 2y$
Vektordifferentialgleichung aufstellen	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
Eigenwert und Eigenvektoren bestimmen	$\lambda_{1,2} = 0 \qquad v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ – doppelter Eigenwert → Hauptvektor bilden
Hauptvektor bilden – lineares Gleichungssystem aufstellen mit Matrix abzgl. Eigenwert – Ergebnisvektor = Eigenvektor	$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lin. Gleichungssystem ist linear abhängig → Parameter frei wählbar. $2u_1 + 4u_2 = -2 \qquad u_2 \to \alpha \to 1$ $2u_1 + 4 = -2 \quad /-4$ $2u_1 = -6 \quad /:2$ $\underline{\underline{u_1 = -3}}$ → Hauptvektor $u = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$
Aufstellen Fundamentalsystem	$e^{0t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad e^{0t} \begin{pmatrix} -3-2t \\ 1+t \end{pmatrix}$ Der zweite Termin berechnet sich wie folgt: $e^{\lambda\tau} = (u + t \cdot v)$
Allgemeine Lösung des DGL-Systems	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{0t} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot e^{0t} \cdot \begin{pmatrix} -3-2t \\ 1+t \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow e^{0t} = 1$ $\underline{\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} -3-2t \\ 1+t \end{pmatrix}}}$ Allgemeine Lösung in der Regel nicht eindeutig, da Eigenvektoren und Hauptvektoren nicht eindeutig sind. Eindeutige Lösung erst nach Einsetzen von Anfangswerten, bzw. Lösung des Anfangswertproblems (AWP).

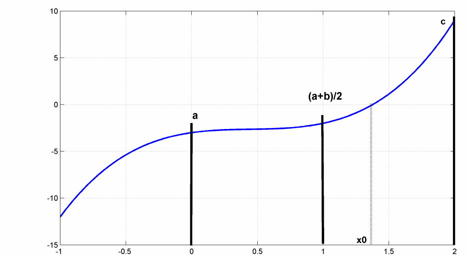
2.15. Numerik

2.15.1. Nullstellenberechnung durch Bisektion

In Intervall [a,b] ist eine Nullstelle → y(a) < 0 und y(b) > 0

Mitte bestimmen
(a+b) / 2 = c

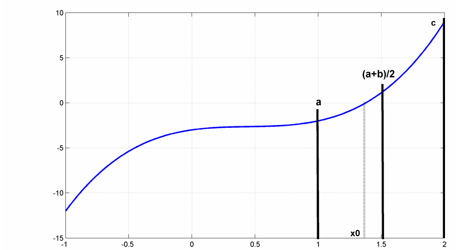
Funktionswert von y(c) ermitteln. Ist y(c) < 0 neue Grenze [c,b], ist y(c) > 0 neue Grenze



Funktionswert bei c ist kleiner 0 → neue Grenze für Bisektion ist von c bis b

Berechnung Interval [a,b]

dies wird solange wiederholt bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist → y(c) < Genauigkeit



Funktionswert bei c > 0 → neue Grenze für Bisektion ist von a bis c

Beispiel:
gesucht ist eine Nullstelle im Intervall [0,2] mit Genauigkeit 0,1

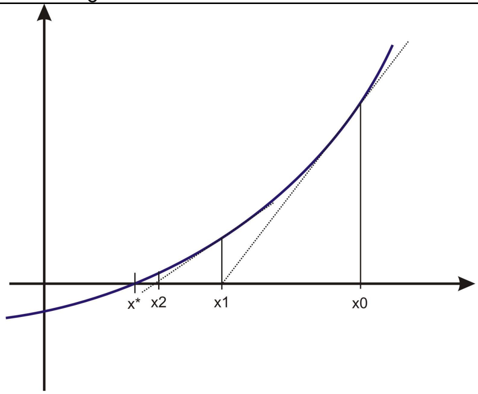
$$y = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 3$$
$$f(0) = -3$$
$$f(2) = 9$$

Schritt	**a**	**b**	**c**	**y**	
1	0	2	1	-2	→ Grenze [c,b]
2	1	2	1,5	1,125	→ Grenze [a,c]
3	1	1,5	1,25	-0,89	→ Grenze [c,b]
4	1,25	1,5	1,375	-0,013	→ Genauigkeit erreicht y < 0,1

→ Nullstelle bei ca. 1,375

2.15.2. *Nullstellenberechnung mit dem Newton-Verfahren*

Nullstelle wird über Steigungstangente von einem Startpunkt (x_0) aus immer weiter angenähert. Schnittpunkt der Tangente mit X-Achse wird neuer Punkt (x_1), von diesem wird erneut Steigungstangente erstellt. Dies wird solange durchgeführt bis gewünschte Näherung erreicht ist.



Iterationsvorschrift:

$$x_{k+1} = x_K - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Für die Konvergenz sind folgende Bedingungen notwendig für alle Punkte x_k und die Lösung:

$$f'(x) \neq 0$$

$$\left| \frac{f(x) \cdot f''(x)}{\left[f'(x) \right]^2} \right| < 1$$

Beispiel:	Schnittpunkt der Funktionen: $f(x) = x^2 + 2$ $g(x) = e^x$
Gleichsetzen der beiden Gleichungen und umformen, Nullstelle der neuen Funktion = x-Wert des Schnittpunktes. Anschließend wird noch die Ableitung der neuen Funktion aufgestellt.	$h(x) = x^2 + 2 - e^x$ $h'(x) = 2x - e^x$ Startwert x_0=1.5 Überprüfen ob Punkt geeignet ist: $h'(1,5) = 2 \cdot 1,5 - e^{1.5} \approx 1,48$ $\left\| \frac{h(1,5) \cdot h''(1,5)}{\left[h'(1,5) \right]^2} \right\| = \left\| \frac{(-0,23) \cdot (-2,48)}{\left[-1,48 \right]^2} \right\| = 0,26 \quad \Rightarrow \mathit{erfüllt}$
Iteratives Annähern	$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \approx 1,5 - \frac{-,23}{-1,48} \approx 1,3436$ $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \approx 1,3195$ $\underline{\underline{x_3 \approx 1,3190}}$

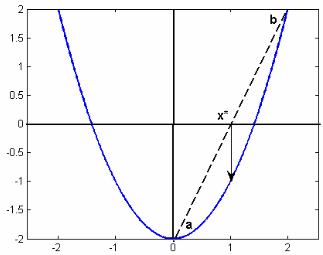
2.15.3. Regula Falsi

Interationsvorschrift:

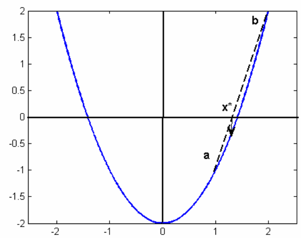
$$x^* = a_{k-1} - \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{f(b_{k-1}) - f(b_{k-1})} \cdot f(a_{k-1})$$

1. Schritt:
a und b Startpunkte mit unterschiedlichen Vorzeichen, x* ist der Schnittpunkt der Sekante mit der x-Achse.
Zum x* Wert wird der dazugehörte y* Wert berechnet.

Haben a und x* das gleiche Vorzeichen wird x* zum neue a.
Haben b und x* das gleiche Vorzeichen wird x* zum neuen b.



2. Schritt:
Verfahren wird wiederholt bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.



Beispiel:	$\sqrt{2} \quad \Rightarrow f(x) = x^2 - 2$
Bereich festlegen	a = 0 ; b= 2
1. Schritt:	$a = 0 \quad f(a) = -2$ $b = 2 \quad f(b) = 2$ $x^* = 0 - \frac{2-0}{2-(-2)} \cdot (-2) = -\frac{2}{4} \cdot (-2) = \underline{\underline{1}}$ $f(x^*) = -1$ → f(x*) hat gleiches Vorzeichen wie f(a), daher wird x* zum neuen a
2. Schritt: → Wiederholung bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist	$a = 1 \quad f(a) = -1$ $b = 2 \quad f(b) = 2$ $x^* = 1 - \frac{2-1}{2-(-1)} \cdot (-1) = 1 - \frac{1}{3} \cdot (-1) = 1 + \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$ $f(x^*) = -0,22$ → f(x*) hat gleiches Vorzeichen wie f(a), daher wird x* zum neuen a

2.15.4. *Numerische Differentiation*

Verfahren ersten Grades

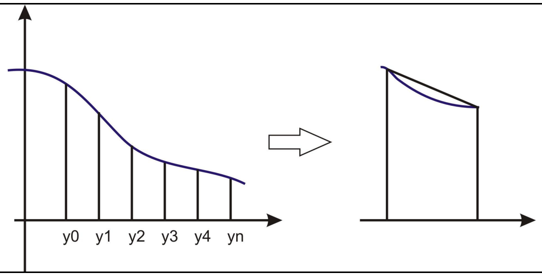
1) $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}$ *Rückwärtsdreieck* 2) $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{\Delta y_v}{\Delta x_v} = \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}$ *Vorwärtsdreieck*	Beispiel f(x)=x2 ; Steigung bei x=2 *Vorwärtssteigung:* $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} = \frac{2^2 - 1,9^2}{2 - 1,9} = 3,9$ *Rückwärtssteigung:* $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{\Delta y_v}{\Delta x_v} = \frac{2,1^2 - 2^2}{2,1 - 2} = 4,1$

Verfahren zweiten Grades

Es wird der Mittelwert zwischen der Vorwärtssteigung und der Rückwärtssteigung gebildet 1) $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\Delta y_r}{\Delta x_r} + \frac{\Delta y_v}{\Delta x_v} \right)$	*Beispiel:* $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{1}{2} \cdot (3,9 + 4,1) = 4$
Bei gleichem Abstand der vorwärts und Rückwärtswerte nimmt die Formel eine einfache Form an: $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{1}{2 \cdot \Delta x} \cdot (y_{k+1} - y_{k-1})$	*Beispiel:* $\frac{dy}{dx}(k) \approx \frac{1}{2 \cdot 0,1} \cdot \left(2,1^2 - 1,9^2\right) = \frac{0,8}{0,2} = 4$

2.15.5. *Numerische Integration*

Trapez-Formel

Intervall wird in n Teilbereiche aufgeteilt, die Stützstellen werden jeweils verbunden, es bilden sich Trapeze. Die Flächen der Trapeze entsprechend je nach Auflösung näherungsweise der Fläche unter der Funktion.	
Trapezformel	$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{1}{2}\cdot(y_0+y_n)+(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})\right)\cdot h$ $=\left(\frac{1}{2}\cdot\sum_1+\sum_2\right)\cdot h$ y_k: Stürzwerte der Funktion y=f(x), $x_k = a + k\cdot h$ h: Streifenbreite, bzw. Schrittweite $h=\frac{b-a}{n}$ n: Anzahl der Schritte $\sum_1$: Summe der beiden äußeren Stützwerte $\sum_2$: Summe der inneren Stützwerte
Beispiel	$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; n=4 $h=\frac{2-1}{4}=\frac{1}{4}=0,25$ $x_0 = 1$ $x_1 = 1+1\cdot h = 1+1\cdot 0,25 = 1,25$ $x_2 = 1+2\cdot 0,25 = 1,5$ $x_3 = 1,75$ $x_n = 2$ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{1,25}+\frac{1}{1,5}+\frac{1}{1,75}\right)\cdot 0,25$ $= \underline{\underline{0,69702}}$

Simpson Formel
– Aufteilung der Flächen in gerade Anzahl von Gebieten, ähnlich Trapezformel
– jedoch Annäherung durch Parabeln

Simpsonsche Formel	$\int_a^b f(x)dx \approx$ $\approx \left((y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})\right) \cdot \frac{h}{3}$ $\approx \left(\sum_1 + 4 \cdot \sum_2 + 2 \cdot \sum_3\right) \cdot \frac{h}{3}$ $h = \frac{b-a}{2n}$ y_k: Stürzwerte der Funktion y=f(x), $x_k = a + k \cdot h$ h: Streifenbreite, bzw. Schrittweite $h = \frac{b-a}{2n}$ n: Anzahl der Schritte $\sum_1$: Summe der beiden äußeren Stützwerte $\sum_2$: Summe der inneren Stützwerte mit *ungeradem* Index $\sum_3$: Summe der inneren Stützwerte mit *geradem* Index
Beispiel	$\int_1^2 \frac{1}{x}dx$; 2n=4 $h = \frac{2-1}{2n} = \frac{1}{4} = 0,25$ $x_0 = 1$ $x_1 = 1 + 1 \cdot h = 1 + 1 \cdot 0,25 = 1,25$ $x_2 = 1 + 2 \cdot 0,25 = 1,5$ $x_3 = 1,75$ $x_n = 2$ $\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \left(\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 4\left(\frac{1}{1,25} + \frac{1}{1,75}\right) + 2\left(\frac{1}{1,5}\right)\right) \cdot \frac{0,25}{3}$ $= \underline{\underline{0,693253}}$

2.15.6. Numerische Integrationsverfahren für Differentialgleichungen

Streckenzugverfahren von Euler

Aufgabe: Lösung des Anfangswertproblems von $y' = f(x, y)$; $Anfangswert: y(0) = y_0$ im Intervall a bis b.

Aufteilung Intervall in gleiche Teile der Länge h: $h = \frac{b-a}{n}$	$x_0 = a\,;\, x_1 = a + 1 \cdot h\,;\, x_2 = a + 2 \cdot h \quad \ldots \quad x_n = b$ $\Rightarrow \quad x_k = a + k \cdot h$ $y_0 = y_0\,;\, y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)\,;\, y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1) \ldots$ $\Rightarrow \quad y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1}; y_{k-1})$

Rechenschema:

k	x	y	$h \cdot f(x; y)$
0	x_0	$y_0\ (Anfangswert)$	$h \cdot f(x_0; y_0)$
1	$x_1 = x_0 + 1 \cdot h$	$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$	$h \cdot f(x_1; y_1)$
2	$x_2 = x_1 + 2 \cdot h$	$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)$	$h \cdot f(x_2; y_2)$
3	$x_3 = x_2 + 3 \cdot h$	$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2; y_2)$	$h \cdot f(x_3; y_3)$
. .	. .	. .	. .

Beispiel 1: $y' = y + e^x$; $y_0 = 1$; $h = 0{,}05$

k	x	y	$h \cdot f(x; y)$
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$h \cdot (y + e^x) = 0{,}05 \cdot (1 + e^0) = 0{,}1$
1	$x_1 = 0 + 1 \cdot 0{,}05 = 0{,}05$	$y_1 = 1 + 0{,}1 = 1{,}1$	$0{,}05 \cdot (1{,}1 + e^{0{,}05}) = 0{,}1076$
2	$x_2 = 0 + 2 \cdot 0{,}05 = 0{,}1$	$y_2 = 1{,}1 + 0{,}1076 = 1{,}2076$	$0{,}05 \cdot (1{,}2076 + e^{0{,}1}) = 0{,}1156$
3	$x_3 = 0{,}15$	$y_3 = 1{,}3232$	$0{,}1243$
. .	. .	. .	. .

Beispiel 2: $y' = 2x \quad ; \quad y(0) = 0$; y(x) numerisch bestimmen in 4 Schritten; $h = \frac{x-a}{4} = \frac{x}{4}$

k	**x**	**y**	$h \cdot f(x;y)$
0	$x_0 = 0$	$y_0 = 0$	$h \cdot (2x) = \frac{x}{4} \cdot (2 \cdot 0) = 0$
1	$x_1 = 0 + 1 \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{4}$	$y_1 = 0 + 0 = 0$	$\frac{x}{4} \cdot (2 \cdot \frac{x}{4}) = \frac{2x^2}{16} = \frac{x^2}{8}$
2	$x_2 = 2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$	$y_2 = 0 + \frac{x^2}{8}$	$\frac{x}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{2}\right) = \frac{2x^2}{8} = \frac{x^2}{4}$
3	$x_3 = \frac{3x}{4}$	$y_3 = \frac{x^2}{8} + \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{8}$	$\frac{x}{4} \cdot \left(2 \cdot \frac{3x}{4}\right) = \frac{6x^2}{16} = \frac{3x^2}{8}$
3	$x_3 = x$	$y_3 = \frac{3x^2}{8} + \frac{3x^2}{8} = \frac{6x^2}{8} = \frac{3x^2}{4}$	

Verbessertes Eulerverfahren (Mittelpunktsregel)

– es wird ein Zwischen Integrationsschritt eingefügt

Aufteilung Intervall in gleiche Teile der Länge h: $h = \frac{b-a}{n}$	$y_{k-1/2} = y_{k-1} + \frac{h}{2} \cdot \left(y_{k-1}; x_{k-1} \right)$ $y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_{k-1/2}; y_{k-1} + \frac{h}{2})$

Beispiel 1: $y' = y + e^x \quad ; \quad y_0 = 1 \quad ; \quad h = 0,05$

k	**x**	**y**	$y_{1/2} = y_k + \frac{h}{2} \cdot f(y_k; x_k)$	$h \cdot f(y_{k1/2}; x_k + \frac{h}{2})$
0	0	1	$y_{1/2} = 1 + 0,025 \cdot \left(1 + e^0\right) = 1,05$	$0,05 \cdot \left(1,05 + e^{(0+0,25)}\right) = 0,10377$
1	0,05	1,10377	$y_{1/2} = 1,10377 + 0,025 \cdot \left(1,10377 + e^{0,05}\right)$ $= 1,1576$	$0,05 \cdot \left(1,1576 + e^{0,75}\right) = 0,11177$
2	0,1	1,12155	1,127356	0,12355
3	0,15	1,3358		

Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung

Rechenschema:

k	x	y	f(x;y)	k=h·f(x;y)
0	x_0	y_0	$f(x_0;y_0)$	k_1
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_1}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2};y_0+\frac{k_1}{2}\right)$	k_2
	$x_0+\frac{h}{2}$	$y_0+\frac{k_2}{2}$	$f\left(x_0+\frac{h}{2};y_0+\frac{k_2}{2}\right)$	k_3
	x_0+h	y_0+k_3	$f\left(x_0+h;y_0+k_3\right)$	k_4
			$K=\frac{1}{6}\cdot(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$	
1	$x_1=x_0+h$	$y_1=y_0+K$	$\dots$	

Beispiel 1: $y'=y+e^x$; $y_0=1$; $h=0,05$

k	x	y	$f(x;y)=y+e^x$	$0,05\cdot(y+e^x)$
0	0	1	$1+e^0=2$	$0,05\cdot 2=0,1$ (k_1)
	$0+\frac{0,05}{2}=0,025$	$1+\frac{0,1}{2}=1,05$	$2,075$	$0,1037$ (k_2)
	$0,025$	$1+\frac{0,1037}{2}\approx 1,05188$	$2,077$	$0,1038$ (k_3)
	$0,05$	$1+0,1038=1,104$	$2,155$	$0,1077$ k_4
			$K=\frac{1}{6}\cdot(k_1+2k_2+2k_3+k_4)=0,10383$	
1	$x_1=0+0,05=0,05$	$y_1=1+K\approx 1,104$	$\dots$	