Cette section contient deux types d'exercice :

- Les questions de cours permettront de vérifier les connaissances d base ;
- Les exercices sont l'occasion d'une réflexion plus détaillée sur te tel argument du cours. Selon que vous êtes élève du secondaire ou supérieur, il est possible que vous n'ayez pas encore vu certains outi mathématiques utilisés à tel ou tel moment de la démonstration. À la fin de certains exercices, une section « Rappels » donnera quelques conseils. Ces sections présenteront quelques outils fondamentaux, mais de manière très rapide. Rapportez-vous à la bibliographie pour des conseils de lecture plus détaillés en mathématiques. Les exercices de macroéconomie (à l'exception des trois premiers) sont les plus difficiles et sont plutôt réservés aux élèves du supérieur.

Exercices de macroéconomie

1.0. Questions de cours

1. La B.C. annonce une politique de restriction monétaire. Quelle est la conséquence immédiate dans le modèle AS-AD, en supposant que patrons et syndicats sont parfaitement rationnels ? À quel niveau de chômage l'économie va-t-elle se fixer à terme ? Quel mécanisme keynésien risque de bloquer l'ajustement que suppose une rationalité parfaite ?
2. Qu'est-ce que l'écart de production (output gap) ? Comment varie-t-il avec l'inflation et l'inflation anticipée ?

3. Les valeurs passées de l'inflation ont une influence sur l'inflation anticipée par les agents dans deux des trois modèles suivants : les anticipations adaptatives ; les anticipations rationnelles en présence d'une B.C. faucon ; les anticipations rationnelles en présence d'une B.C. discréditée.
4. Qu'est-ce que l'effet d'éviction ?
5. Quelle est la différence entre chômage classique et chômage keynésien ?
6. Quelle est la conséquence d'une hausse de la demande de monnaie dans le modèle LM ?
7. Dans un pays, la droite est remplacée par la gauche après les élections générales. Mais l'exécutif conservateur a eu le temps de nommer un banquier central faucon. Si on se place dans le modèle IS-LM, à quoi faut-il s'attendre ?
8. Reprenez le même scénario politique, mais dans le modèle AS-AD, avec une courbe ST-AS normale. Que se passe-t-il ?
9. Soit c la propension marginale à consommer ; que désigne $1 - c$? Si c est de 50 %, que vaut le multiplicateur keynésien ?
10. Corrigez cette équation de revenu permanent :

$$R^e = Y_2 + \frac{Y_1^e}{1+r}$$

11. Qu'est-ce que le ratio de sacrifice ?
12. Dans l'équation I.S., quels phénomènes conduisent à une hausse du produit ? Une hausse du taux d'intérêt ; une hausse de la propension marginale à consommer ; une hausse des dépenses publiques ?
13. Soit une fonction d'offre de crédit, inspirée du modèle de Stiglitz-Weiss, qui prend le taux réel r comme variable, et rend la quantité de crédit offerte. Quel est le signe de sa dérivée ?
14. Comment varie la valeur des encaisses réelles quand celle des prix augmente ?
15. Rappelez l'équation de Fisher.
16. Des salaires indexés sur l'inflation jouent-ils un rôle pro ou contra-cyclique ?
17. Soient les fonctions e^x, $15 - x$ et e^{-x} ; laquelle convient pour modéliser une courbe de Phillips (qui prend le taux de chômage en variable) ?
18. Dans l'équation de politique monétaire de J. B. Taylor, de combien la B.C. doit-elle augmenter son taux directeur si l'output gap augmente de 3 points ?

19. Quelle est la conséquence d'une baisse de l'offre de monnaie dans le modèle LM ? Ce choix politique de la BC est-il une expansion ou une restriction monétaire ?

20. En cas d'instabilité monétaire extrême, dans un plan Y, P, quelle est la forme de la courbe d'offre de Lucas ?

21. En économie ouverte, si une B.C. veut faire croître sa monnaie, doit-elle augmenter ou liquider ses réserves de change ?

22. Dans le triangle d'incompatibilité, à quoi faut-il renoncer pour conserver en même temps la souveraineté monétaire et l'ancrage ?

23. L'indice des prix à la consommation a augmenté de 9 % au Brésil et de 0,1 % aux États-Unis. Comment doit varier approximativement le taux de change au certain (en prenant le Brésil comme pays de référence) pour maintenir la parité de pouvoir d'achat (P.P.A.) ?

24. Dans la théorie de la P.P.A. monétariste, par quel mécanisme une hausse de i doit-elle être compensée pour maintenir S stable ?

25. Même question pour la P.N.C.T.I.

26. Un pays dont la balance des paiements est déficitaire reçoit plus de capitaux qu'il n'en envoie à l'étranger. Cette affirmation est-elle vraie ?

27. Dans le modèle de Mundell-Fleming, en change flexible et avec liberté de circulation des capitaux, à quoi conduit une restriction budgétaire ?

28. Dans l'argument humien, comment un compte courant trop excédentaire sera-t-il résorbé à terme ?

29. Quel célèbre modèle Gordon Brown et Tony Blair ont-ils invoqué pour refuser l'entrée dans l'eurozone ?

30. Les agents d'un pays sont fortement endettés en dollars. Quel est l'impact d'une hausse du dollar sur la position extérieure nette ?

31. Si on suit le modèle Balassa-Samuelson, une hausse de la productivité dans les secteurs exposés à la concurrence mondiale doit-elle conduire à une hausse ou une baisse du change réel ?

32. Soit une application, $g(x,y) = \ln(x^2 + 3y - 2)$. Quel est son domaine de définition ? Donnez sur ce domaine la dérivée partielle par x et par y (voir les rappels de l'exercice 2.3.)

33. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite, si F_X désigne sa fonction de répartition, que vaut $F_X(2) - F_X(-2)$? (voir les rappels de l'exercice 3.5.)

1.0. Correction

1. Dans le modèle AS-AD, une restriction monétaire conduit, pour ST-AS inchangée, à une baisse de AD, donc à une baisse des prix et du P.I.B. Si patrons et syndicats sont rationnels, ils vont négocier des salaires plus faibles ; la compétitivité-prix va s'améliorer et compenser la baisse de croissance. On devrait ainsi assister à une baisse des prix, mais pas du P.I.B. En supposant que l'économie était déjà à l'équilibre, on revient à terme au taux de chômage naturel, le NAIRU. Keynes objecterait que les syndicats vont résister aux baisses de salaire ; cette rigidité à la baisse risque d'empêcher l'ajustement et de bloquer l'économie à un niveau de sous-emploi.
2. Les économètres calculent un taux de croissance « naturel » ; l'output gap est alors la différence entre le taux de croissance réel et ce taux naturel ou idéal de l'économie. Si l'output gap est positif, c'est qu'on est en période de boom économique ; la croissance est bonne, mais une partie est due à la conjoncture et pas aux données structurelles de l'économie.
3. Les valeurs passées de l'inflation déterminent l'inflation anticipée présente dans le modèle des anticipations adaptatives, mais aussi dans celui des anticipations rationnelles quand la B.C. est discréditée (les agents ne lui faisant pas confiance, ils s'en remettent à la moyenne passée de l'inflation pour prédire l'avenir).
4. Chez Keynes, une hausse des dépenses publiques doit conduire à une hausse du P.I.B. à terme. Les classiques objecteront qu'une hausse de la demande à travers une hausse de G conduit à une augmentation de la demande, donc des prix de vente ; les agents cherchent à reconstituer la quantité de monnaie qu'ils détiennent et liquident leurs placements ; le taux doit monter pour les inciter à réinvestir ; le taux majoré déprime l'investissement. C'est l'effet d'éviction des dépenses publiques.
5. Le chômage keynésien est dû à un équilibre de sous-emploi ; les chômeurs voudraient travailler ; les patrons aimeraient pouvoir embaucher, mais la demande effective anticipée par les firmes est trop faible, et la production stagne à un niveau sous-optimal. Le chômage classique est dû au contraire à des institutions du marché du travail trop rigides (un salaire minimum trop élevé par exemple, tel que les patrons ne sont pas prêts à embaucher à ce prix).
6. A offre de monnaie égale, une hausse de la demande de monnaie conduit à une hausse du taux d'intérêt. Les agents ayant besoin de monnaie, ils la sortent de leurs comptes d'épargne, et le taux doit monter pour les réinciter à investir.
7. Il faut s'attendre à une hausse des dépenses publiques (de G dans la courbe IS) et à une restriction monétaire (baisse de M_S, l'offre de monnaie, dans la courbe LM).

   Les deux conduisent à une hausse du taux d'intérêt :
   - La restriction monétaire contraint la préférence pour la liquidité ; pour inciter les agents à placer leur agent, le taux doit monter ;
   - L'expansion budgétaire conduit à une hausse du produit Y, qui elle-même augmente la demande de monnaie, hausse qui pousse le taux d'intérêt vers le haut ;

L'impact sur le produit Y ne peut être deviné à l'avance ; la relance keynésienne du gouvernement devrait doper le P.I.B. ; mais la restriction monétaire, en faisant croître le taux, risque de décourager l'investissement.

8. Il est impossible de le savoir sans connaître l'ampleur du plan de relance gouvernemental et l'ampleur de la restriction monétaire opérée par la B.C. faucon. La baisse de M_S devrait conduire à une baisse des prix et du produit, et l'expansion de G, au résultat inverse.

9. Si c est la propension marginale à consommer, $1-c$ est tout simplement la part du revenu supplémentaire qui est épargnée et non consommée. Si $c=\frac{1}{2}$:

$$\lambda=\sum_{t=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

10. La forme correcte est :

$$R^e=Y_1+\frac{Y_2^e}{1+r}$$

Le revenu permanent est le revenu de la période 1 plus le revenu anticipé de la période suivante, que l'on peut consommer tout de suite en l'empruntant, et en remboursant l'emprunt au taux r ;

11. C'est le nombre de points de chômage en plus qu'il faut consentir pour réduire l'inflation d'un point à travers une politique de restriction monétaire.

12. Dans le modèle I.S., conduisent à une hausse du produit une baisse du taux d'intérêt ; une hausse de la propension marginale à consommer ; une hausse des dépenses publiques.

13. La dérivée est positive puis négative, puisque la courbe est croissante puis décroissante ; on se souvient de l'idée que, quand le taux d'intérêt devient trop élevé, les agents honnêtes, qui savent qu'ils ne pourront rembourser à ce taux, se retirent du marché ; ils ne restent que les malhonnêtes, auxquels les banques refusent de prêter.

14. Les encaisses réelles sont données par le rapport M/P qui baisse quand les prix augmentent ;

15. Le taux d'intérêt réel est égal au taux nominal moins l'inflation anticipée :

$$r=i-\pi^e$$

16. Les salaires indexés sur l'inflation jouent un rôle contracyclique ; en période de crise, ils restent relativement stables.

17. C'est e^{-x} car elle est à la fois décroissante (dans une courbe de Phillips, chômage et inflation varient en sens inverse) et strictement convexe (ce qui transcrit l'hypothèse accélérationniste ; il faut augmenter l'inflation toujours davantage pour réduire le chômage).

18. De 1,5 point.

19. Une baisse de l'offre de monnaie par la B.C. (restriction monétaire) conduit à une hausse du taux d'intérêt ;

20. Elle ressemble presque à une droite verticale. Le mécanisme des prix est tellement instable qu'il ne peut fournir aux agents aucune information sur la conjoncture. La production ne varie quasiment pas avec l'inflation.

21. Une baisse des réserves de change d'une B.C. fait croître sa monnaie nationale sur le marché des changes par trois mécanismes : 1. La masse monétaire baisse, ce qui fait monter les taux, attire les investisseurs étrangers, qui changent leur monnaie étrangère en monnaie nationale ; 2. Le marché des titres étrangers augmente en taille, donc le taux des titres étrangers baisse, et les investisseurs préfèrent les titres nationaux ; 3. Enfin, la B.C. n'ayant plus de titres étrangers dans ses réserves, elle est indifférente à une baisse des monnaies étrangères ; les investisseurs anticipent donc une hausse de la monnaie nationale.

22. Il faut renoncer à la mobilité des capitaux.

23. La P.P.A. est vérifiée (chaque monnaie a le même pouvoir d'achat à l'international) si :

$$Q = S\frac{P}{P^*} = 1$$

Où Q est le change réel au certain, S le change nominal au certain, P les prix et P^* les prix étrangers. On voit facilement que pour maintenir cette condition, S doit se déprécier de 8,9 % environ.

24. On rappelle la formule de la P.P.A. monétariste :

$$S = \frac{P^*}{P} = \frac{\dfrac{M_S^*}{M_D^*}}{\dfrac{M_S}{M_D}} = \frac{M_S^*}{M_S}\frac{Y \times s(i)}{Y^* \times s(i^*)},\ s' < 0$$

Quand i augmente, S doit baisser (l'augmentation du taux d'intérêt réduit la demande de monnaie et fait croître les prix). Pour maintenir S constant, il faut en contrepartie, dans le pays concerné, une hausse du revenu (qui fait remonter la demande de monnaie) ou une baisse de l'offre de monnaie (qui fait baisser les prix) ; ou les mêmes opérations, mais en sens inverse, dans le pays étranger.

25. On rappelle la P.N.C.T.I.

$$1 + i_t = \left(1 + i_t^*\right)\frac{S_t}{E_{t+1}\left(S_{t+1}\right)}$$

Pour que le rendement des actifs placés à l'étranger (partie droite de l'égalité) soit le même que celui des actifs nationaux (partie gauche) après une hausse de i, il faut : soit une hausse du taux étranger i^*, soit une hausse du change au certain S (avec la même quantité de monnaie nationale, on pourra acheter plus de titres étrangers) ou une baisse de $E_{t+1}\left(S_{t+1}\right)$ (si au moment de revendre les actifs étrangers et de les changer en monnaie nationale, le taux de change est plus faible, c'est une bonne nouvelle pour l'investisseur qui obtiendra une somme plus élevée qu'à la première opération de change).

26. Un pays dont le compte financier est déficitaire est un pays où les capitaux étrangers entrent (il y a plus d'investissements étrangers à l'intérieur, que d'investissements nationaux à l'étranger).

27. La restriction budgétaire fait décroître le P.I.B. ceteris paribus, mais elle fait aussi baisser la demande de monnaie, ce qui, dans la relation LM, conduit à une baisse des taux ; les investisseurs quittent le pays, changent leur monnaie nationale en monnaie étrangère ; la monnaie nationale baisse, les produits nationaux sont moins chers à l'étranger ; la balance commerciale s'améliore, ce qui compense l'impact négatif sur le P.I.B. de la baisse des dépenses publiques. À terme, la monnaie nationale se déprécie, et le P.I.B. ne varie pas.

28. L'excédent de la balance commerciale augmente l'offre de monnaie, d'où une hausse des prix nationaux, d'où une perte de compétitivité qui ramène l'excédent à un niveau inférieur.

29. Le modèle des zones monétaires optimales de Mundell (les Britanniques craignaient que les chocs réels ne soient trop asymétriques au sein de l'eurozone, et que la monnaie unique empêche les ajustements nationaux).

30. La P.E.N. se dégrade puisque la dette du pays devient plus lourde à rembourser.

31. À une hausse.

32. g n'est défini que si $x^2+3y>2$. Sur ce domaine de définition, on obtient la dérivée partielle en se rappelant la règle de la chaîne :

$$(u \circ v)' = v' \times u'(v)$$

Ici :

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 2x \times \frac{1}{x^2+3y-2}$$

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 3 \times \frac{1}{x^2+3y-2}$$

33. Une loi normale centrée réduite a pour moyenne $\mu = 0$ et pour écart-type $\sigma = 1$; on la note $\mathcal{N}(0,1)$.

Vous connaissez la représentation canonique de la loi normale centrée réduite ; graphiquement $F_X(2) - F_X(-2)$ représente la part de l'aire située sous la courbe qu'enserrent les bornes 2 et −2. C'est à peu près 95,8 %, si bien que :

$$F_X(2) - F_X(-2) = 0{,}958$$

Analytiquement, si une variable suit une loi normale centrée réduite, la probabilité qu'une valeur choisie au hasard soit comprise entre 2 et −2 est de plus de 95 %.

Si la loi normale est centrée, mais non réduite, ce raisonnement reste valable. Si l'écart-type de cette loi est σ, on a cette fois :

$$F_X(2\sigma) - F_X(-2\sigma) = 0{,}958$$

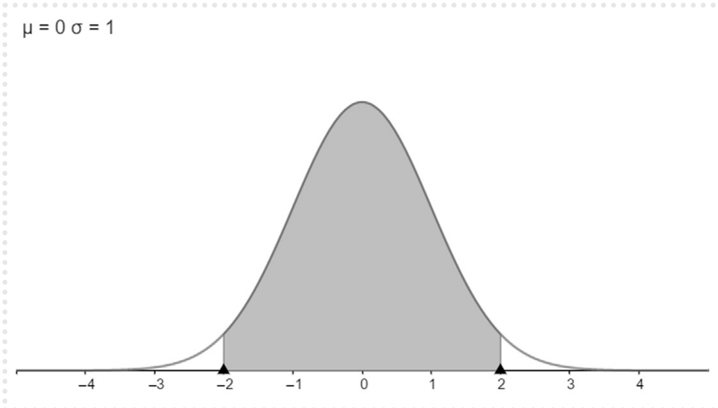

Figure 4.1.

Par exemple, si les notes d'une classe suivent une loi gaussienne, de moyenne 10 et d'écart type 3, 95 % des élèves ont entre 4 et 16.

Notez ces autres valeurs importantes pour la loi normale centrée réduite :

$$F_X(1) - F_X(-1) = 0{,}68$$
$$F_X(3) - F_X(-3) = 0{,}997$$

1.1. Modèle AS-AD avec rigidités

On se place dans un modèle AS-AD. On se donne deux applications de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} f : Y \to Y^2 \\ g : Y \to 6 - Y \end{cases}$$

1. Assignez à ces deux applications leur nom parmi ces trois choix : AD, ST-AS, LT-AS
2. Tracez dans un repère adéquat les deux courbes représentatives. Donnez l'équilibre initial et son niveau de production Y_0 ?
3. À la période 1, le gouvernement baisse les dépenses publiques de 2 unités fixes ? La nouvelle courbe g est $4 - Y$; donnez le nouvel équilibre et son niveau de production Y_1 ?
4. Comment interprétez-vous le déplacement le long de la courbe f (le passage de Y_0 à Y_1) ?
5. Quel est l'équilibre en période 2 ? Quelle sera l'équation de la courbe f en ce nouvel équilibre si on suit les modèles des nouveaux classiques ?
6. Supposons une économie où les syndicats sont puissants ; ils sont capables de résister à la baisse des salaires qu'imposent les managers

à la période 2. La nouvelle courbe f prend une forme $Y \to Y^2 - 1$. Pourquoi ?

7. Dans cette situation, à quel niveau s'établit la production d'équilibre ? Concluez en vous aidant d'un célèbre concept keynésien.

1.1. Correction

1. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et ne peut donc correspondre qu'à ST-AS ; g au contraire est décroissante, et ne peut correspondre qu'à AD.
2. L'équilibre est donné par $Y^2 = 6 - Y \Leftrightarrow Y^2 + Y - 6 = 0$; les racines évidentes de ce polynôme sont −3 et 2, la dernière étant la seule sur $\mathbb{R}_+$. L'équilibre s'établit donc au point $(2,4)$.
3. La nouvelle fonction *AD* est $4 - Y$ et le nouvel équilibre donné par l'égalité : $Y^2 + Y - 4 = 0$ dont la seule solution positive est $\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ et l'équilibre s'établit à $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}, \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right) \approx (1.6\ ,\ 2.4)$
4. Imaginons que le gouvernement décide de baisser brutalement les dépenses publiques. Patrons et syndicats avaient fixé à la période antérieure des prix et des salaires en fonction d'un niveau de production Y_0 ; ils se retrouvent à la fin de l'année avec une demande plus faible, à un niveau Y_1, et sont obligés de baisser leur prix pour écouler la production.
5. À long terme, une baisse de la production entraîne une hausse du chômage ; les syndicats affaiblis sont obligés d'accepter des baisses de salaire ; la compétitivité-prix des entreprises remonte ; la demande remonte ainsi, et si on suit l'argument de Friedman et l'idée de courbe de Phillips verticale, l'économie va revenir à son niveau naturel de production, qui est ici $Y_0 = 2$. La droite $Y = 2$ intercepte la nouvelle courbe AD au point $(2,2)$. La seule translation verticale de la courbe ST-AS qui passe par ce point est l'application $Y \to Y^2 - 2$.
   On est ainsi passé de la situation initiale $(Y, p) = (2,4)$ à une situation où les prix et la production sont plus faibles à $(1.6\ ,\ 2.4)$ à cause de la décision de l'État de baisser les dépenses publiques. Mais à long terme, on revient au niveau de production d'équilibre avec des prix plus faibles.
6. La courbe ST-AS initiale était d'équation Y^2 ; en supposant qu'il y a retour à la production d'équilibre en période 2, la courbe ST-AS doit être translatée pour devenir $Y^2 - 2$. Si les syndicats résistent en période 2 à la baisse des salaires, le déplacement de ST-AS sera moins net ; il n'est pas inutile de supposer une forme $Y^2 - 1$.
7. Le nouvel équilibre répond à l'égalité $Y^2 - 1 = 4 - Y$ dont la seule solution positive est $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ et l'équilibre est le point $\left(\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, \frac{9-\sqrt{21}}{2}\right)$ ou en approximation $(1.8, 2.21)$.

On remarque qu'à cet équilibre, le niveau d'emploi est inférieur au niveau de long terme de l'hypothèse de Friedman ($1{,}8 < 2$) et le niveau des prix supérieur ($2{,}21 > 2$). On retrouve l'axiome keynésien de rigidité nominale. Les salaires sont rigides, notamment à la baisse parce que les syndicats résistent à la baisse des salaires nominaux. L'ajustement de la compétitivité-prix n'a pas lieu, ou du moins, pas autant que prévu ; la production augmente par rapport à l'équilibre de période 1, mais on ne retrouve pas le niveau initial de production. C'est l'argument keynésien : une politique de restriction budgétaire ou de lutte contre l'inflation conduira toujours à un équilibre sous-optimal et à un chômage involontaire.

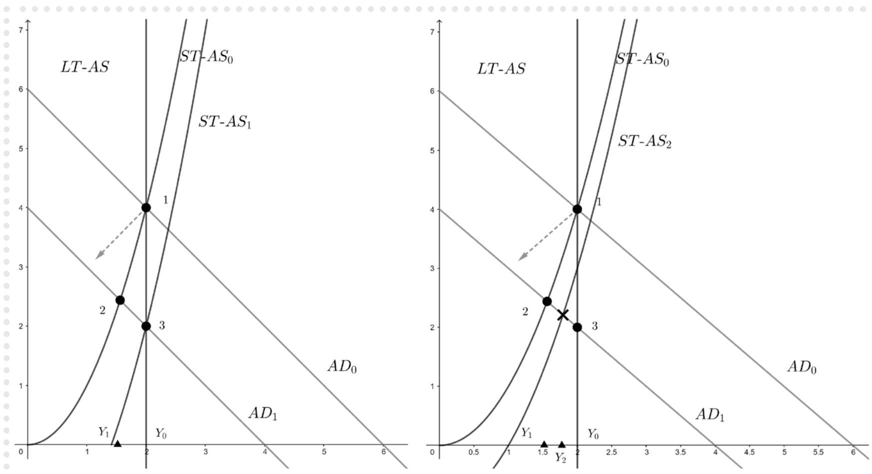

Figure 4.2.

1.2. Le revenu permanent

Soit un modèle revenu permanent avec une économie à deux périodes.

1. Écrivez la consommation de la période 2, notée C_2 en fonction du revenu de période 1, Y_1, de la consommation de période 1, C_1 et du taux d'intérêt *r*.

   On rappelle la forme du revenu permanent anticipé en période 1 :

$$R^e = Y_1 + \frac{Y_2^e}{1+r}$$

2. Pourquoi le revenu anticipé de période 2 est-il pondéré par le coefficient $\frac{1}{1+r}$?

   On suppose dès à présent que l'individu prédit correctement ses revenus futurs ($R^e = R$ et $Y_2^e = Y^2$) :

3. Reprenez la formule de la question 1. ; réécrivez la consommation de période 2 en fonction du revenu permanent anticipé, de la consommation de période 1, et du taux d'intérêt.

On suppose que les préférences sont homothétiques : quand le revenu permanent est multiplié par un réel λ, la consommation de chaque période est elle aussi multipliée par λ ; l'individu lisse sa fonction de consommation.

4. Est-ce que, dans cette hypothèse, le quotient C_2 / C_1 varie en réponse à une variation de *R* ou de *r* et dans quel sens ?

5. Retrouvez, à partir de l'égalité de la question 3., la forme suivante :

$$C_1 = \frac{1+r}{\left(1+r+\dfrac{C_2}{C_1}\right)} R$$

On passe maintenant à une économie en trois périodes :

6. Donnez une expression de C_3 sous la forme déjà usitée à la question 1., puis sous les formes usitées aux questions 3.-5.

7. Démontrez par récurrence que quel que soit le nombre de périodes T choisies pour l'économie, on a :

$$C_1 = \frac{\left(1+r\right)^{T-1}}{\sum_{t=1}^{T}\left(\dfrac{C_t}{C_1}\left(1+r\right)^{T-t}\right)} R$$

8. Quelle est la propension marginale à consommer en période 1 ? On rappelle que cette propension est définie comme la fraction d'une hausse marginale du revenu permanent qui sera consommée tout de suite.

9. Que vaut cette propension marginale dans l'hypothèse où l'individu veut maintenir le même niveau de consommation à chaque période ?

Le gouvernement annonce une nouvelle aide sociale d'un niveau *Z* que l'agent pourra toucher chaque année. On a déjà vu dans le texte lui-même (partie 1.2.1.) que le surplus de revenu permanent obtenu est $\dfrac{\left(1+r\right)Z}{r}$.

10. Supposons que les agents ne fassent pas confiance au gouvernement ; ils pensent que l'aide sera abandonnée d'ici une année. Quel est le surplus de consommation immédiat ?

11. Supposons maintenant que l'aide soit perçue comme permanente. Quel surplus de consommation en période 1 cela implique-t-il ?

Rappels

A. Somme des premiers termes d'une suite géométrique (voir l'exercice 2.9.)

1.2. Correction

1. $C_2 = Y_2 + (1+r)(Y_1 - C_1)$
2. Je peux virtuellement consommer en période 1 mon revenu de période 2 en empruntant ; mais ce revenu consommé par avance sera amputé des intérêts du prêt.
3. $C_2 = (1+r)(R - C_1)$
4. Le quotient C_2 / C_1 sera indépendant du revenu (puisque quand le revenu est multiplié par λ, chaque consommation est multipliée de même par λ). Il n'est pas cependant indépendant de r ; plus le taux d'intérêt est élevé, plus l'agent a intérêt à épargner en période 1 et à placer l'argent épargné.
5.

$$C_2 = (1+r)(R - C_1) \Leftrightarrow C_1\left(1 + r + \frac{C_2}{C_1}\right) = (1+r)R \Leftrightarrow C_1 = \frac{1+r}{\left(1 + r + \dfrac{C_2}{C_1}\right)} R$$

6.

$$C_3 = Y_3 + (1+r)(Y_2 - C_2) + (1+r)^2 (Y_1 - C_1)$$

$$C_3 = (1+r)^2 \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} + \frac{Y_3}{(1+r)^2}\right) - C_1(1+r)^2 - C_2(1+r)$$

$$C_3 = (1+r)^2 \left(R - \sum_{t=1}^{2} C_t (1+r)^{3-t}\right)$$

$$C_1 = \frac{(1+r)^2}{(1+r)^2 + \dfrac{C_2}{C_1}(1+r) + \dfrac{C_3}{C_1}} R$$

7. On cherche à démontrer par récurrence que la proposition suivante est vraie quel que soit le choix de la durée du modèle $T \in \mathbb{N}$:

$$C_1 = \frac{(1+r)^{T-1}}{\sum_{t=1}^{T} \left(\dfrac{C_t}{C_1}(1+r)^{T-t}\right)} R$$

Initialisation – La proposition est vraie au rang 1 : $C_1 = R$; s'il n'y a qu'une seule période, l'individu consomme ce qu'il a gagné.
Hérédité : On suppose que la proposition est vraie pour un certain T. On a alors :

$$C_T = (Y_1 - C_1)(1+r)^{T-1} + (Y_2 - C_2)(1+r)^{T-2} + \ldots + Y_T$$

Dans une économie qui comporterait maintenant $T+1$ périodes, on peut exprimer simplement ainsi la somme dont dispose l'agent à la fin de la période T :

$$(Y_1 - C_1)(1+r)^{T-1} + (Y_2 - C_2)(1+r)^{T-2} + \ldots + (Y_T - C_T)$$

Ce restant va être placé par l'agent à un taux $1+r$ et la consommation en période $T+1$ sera :

$$C_{T+1} = (Y_1 - C_1)(1+r)^T + (Y_2 - C_2)(1+r)^{T-1} + \ldots + Y_{T+1}$$

Or on sait que le revenu permanent s'écrit pour $T+1$ périodes :

$$R = \sum_{t=1}^{T+1} \frac{Y_t}{(1+r)^{t-1}}$$

On réécrit :

$$C_{T+1} = (1+r)^T R - \sum_{t=1}^{T} C_t (1+r)^{T-t+1} \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{T+1} C_t (1+r)^{T-t+1} = (1+r)^T R$$

$$\Leftrightarrow C_1 \left(C_1^{-1} \sum_{t=1}^{T+1} C_t (1+r)^{T+1-t} \right) = (1+r)^T R \Leftrightarrow C_1 = \frac{(1+r)^T}{\sum_{t=1}^{T+1} \left(\frac{C_t}{C_1} (1+r)^{T+1-t} \right)} R$$

La proposition est ainsi valable pour tout choix de nombre de périodes T.

8. Il suffit de considérer l'expression de la question 7. comme une fonction ayant R pour variable. On la dérive pour trouver la propension marginale à consommer :

$$C_{1,m} = \frac{(1+r)^{T-1}}{\sum_{t=1}^{T} \left(\frac{C_t}{C_1} (1+r)^{T-t} \right)}$$

La propension marginale à consommer en période 1 n'est donc fonction que de r ; on retrouve l'hypothèse de notre modèle ; la préférence pour le présent n'est pas déterminée par les revenus, mais uniquement par le taux d'intérêt.

9. Un individu qui souhaiterait maintenir le même niveau de consommation C_1 à chaque période aurait une forme :

$$C_1 = \frac{(1+r)^{T-1}}{\sum_{t=1}^{T} \left((1+r)^{T-t} \right)} R = \frac{(1+r)^{T-1}}{\sum_{k=0}^{T-1} \left((1+r)^{k} \right)} R = \frac{(1+r)^{T-1}}{\frac{1-(1+r)^T}{1-(1+r)}} R$$

La propension marginale à consommer vaut alors :

$$C_{1,m} = \frac{r(1+r)^{T-1}}{(1+r)^T - 1}$$

10. Si l'aide Z est perçue comme non-permanente, destinée à durer une année seulement, le surplus de consommation sera à la période 1 :

$$\frac{r(1+r)^{T-1}}{(1+r)^{T}-1}Z$$

11. Si l'aide est perçue comme permanente, le surplus de consommation en période 1 sera :

$$\frac{r(1+r)^{T-1}}{(1+r)^{T}-1}\frac{1+r}{r}Z = \frac{(1+r)^{T}}{(1+r)^{T}-1}Z$$

Ce terme est supérieur à celui trouvé à la question 10. ; on retrouve l'argument de Friedman : le multiplicateur keynésien est d'autant plus fort que la hausse de revenu permanent est perçue comme durable.

1.3. Les anticipations adaptatives

Dans cet exercice, les agents de l'économie tentent de prédire l'inflation de manière adaptative :

$$\pi_{t+1}^{e} = \pi_{t}^{e} + \alpha\left(\pi_{t} - \pi_{t}^{e}\right),\ \alpha \in [0,1]$$

1. Que désigne le terme $\pi_t - \pi_t^e$? Que dire des agents si $\alpha = 0$?
2. Remplacez, dans l'égalité de l'énoncé, π_t^e par sa valeur vis-à-vis des données de l'année $t-1$.
3. Itérez la formule trouvée à la question 2., et trouvez une formulation π_{t+1}^e uniquement vis-à-vis de l'inflation, et non plus de l'inflation anticipée.
4. Rappelez l'expression de l'output gap en fonction de l'inflation.
5. Supposons que l'inflation soit stable d'année en année à un niveau π jusqu'à la période t ; quelle inflation est anticipée pour $t+1$?

   Le gouvernement a maintenu jusqu'à présent l'inflation à un niveau nul. Il décide subitement, à la période 1, d'adopter une nouvelle politique, consistant à augmenter chaque année l'inflation d'un point.
6. Comment évolue la masse monétaire avec une telle politique ?
7. Comment l'output gap va-t-il varier ?

Rappels

A. Suite arithmético-géométrique :

On appelle arithmético-géométrique une suite de la forme suivante :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Où a et b sont deux réels non nuls.

Pour manipuler cette expression, il suffit de la réécrire ainsi :

$$u_{n+1} - \frac{b}{1-a} = a\left(u_n - \frac{b}{1-a}\right)$$

On note alors que la suite $u_n - \frac{b}{1-a}$ est géométrique de raison a ; on peut alors l'exprimer directement :

$$u_n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}$$

1.3. Correction

1. $\pi_t - \pi_t^e$ est la surprise inflationniste de l'année t, c'est à dire l'écart entre l'inflation anticipée par les agents et l'inflation réelle. Si $\alpha = 0$, les agents sont myopes ; ils ne mettent pas à jour leurs anticipations.

2. $\pi_{t+1}^e = \pi_t^e + \alpha\left(\pi_t - \pi_t^e\right) \Leftrightarrow \pi_{t+1}^e = \alpha\pi_t + (1-\alpha)\pi_t^e$

   Par remplacement :

$$\pi_{t+1}^e = \alpha\pi_t + (1-\alpha)\left(\alpha\pi_{t-1} + (1-\alpha)\pi_{t-1}^e\right)$$

3. On peut commencer par effectuer la même opération qu'à la question 2., mais pour une période de plus :

$$\begin{aligned}\pi_{t+1}^e &= \alpha\pi_t + (1-\alpha)\left(\alpha\pi_{t-1} + (1-\alpha)\left(\alpha\pi_{t-2} + (1-\alpha)\pi_{t-2}^e\right)\right)\\ &= \alpha\pi_t + \alpha(1-\alpha)\pi_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\pi_{t-2} + (1-\alpha)^3\left(\pi_{t-2}^e\right)\end{aligned}$$

   Par itération, on peut alors écrire :

$$\pi_{t+1}^e = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha(1-\alpha)^i \pi_{t-i}$$

4. Dans ces modèles, l'output gap est fonction de la surprise inflationniste :

$$\Omega_t = \pi_t - \pi_t^e$$

5. Si l'inflation est stable, on a :

$$\pi_{t+1}^e = \alpha\pi\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\alpha)^i = \pi$$

   Le terme $\sum_{i=0}^{+\infty}(1-\alpha)^i$ est une série géométrique ; les jeunes lecteurs qui n'auraient pas encore vu le concept de série peuvent utiliser plus simplement la somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{i=0}^{n}(1-\alpha)^i = \frac{1-(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha}$$

En $t+1$, il n'y aura donc aucune surprise inflationniste, et l'output gap sera nul :

$$\Omega_{t+1} = \pi - \pi = 0$$

6. En supposant par simplification que la masse monétaire est de 1 à la période initiale, elle sera par suite multipliée ainsi :

$$M_t = 1 \times 1{,}01 \times 1{,}02 \times \ldots = \prod_{k=1}^{t}\left(1+\frac{k}{100}\right)$$

On vérifie facilement que $\forall t,\ M_{t+1} - M_t > M_t - M_{t-1}$. L'inflation s'accélère et la masse monétaire augmente de manière non-linéaire.

7. La première année de la mise en place de la mesure, les agents s'attendent à une inflation nulle : l'inflation est de 1, l'output gap est donc de 1. Par la suite, on a affaire au processus suivant :

t	π	π^e	Ω
1	1	0	1
2	2	α	$2-\alpha$
3	3	$\alpha+\alpha(2-\alpha)$	$3-\alpha-\alpha(2-\alpha)$
4	4	$\alpha+\alpha(2-\alpha)$ $+\alpha\big(3-\alpha-\alpha(2-\alpha)\big)$	$4-\alpha-\alpha(2-\alpha)$ $-\alpha\big(3-\alpha-\alpha(2-\alpha)\big)$

On peut alors facilement modéliser l'output gap comme une suite arithmético-géométrique :

$$\Omega_{t+1} = (1-\alpha)\Omega_t + 1$$

En appliquant la méthode de résolution d'une telle suite, on en déduit que $\Omega_t - \frac{1}{\alpha}$ est une suite géométrique de raison $(1-\alpha)$. Il est alors facile de déterminer l'output gap :

$$\Omega_t = \left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha)^t + \frac{1}{\alpha}$$

Quand t tend vers $+\infty$, on aura :

$$\Omega_t = \frac{1}{\alpha}$$

C'est le paradoxe de l'hypothèse accélérationniste. Pour maintenir un output gap positif, même constant, il faut accélérer l'inflation et faire croître toujours davantage la masse monétaire.

1.4. Le modèle insulaire de R. Lucas (Partie I) – La politique monétaire

On présente ici une version très abrégée du *islands model* de R. Lucas[1], dénommé ainsi parce que les agents sont des producteurs-atomes séparés les uns des autres pour toute autre fonction que l'échange.

1. Rappelez la courbe de Phillips telle que la conçoit R. Lucas et donnez-en une interprétation.

Les agents de ce modèle utilisent les anticipations rationnelles. Ils souhaitent à tout prix éviter d'être manipulés par le banquier central. Ils savent que l'inflation officielle annoncée par la B.C. π_t^f cache en réalité le taux réel π_t auquel se surajoute un bruit ε_t dû aux décisions politiques de la B.C. :

$$\pi_t^f = \pi_t + \varepsilon_t$$

On suppose que le bruit est indépendant des autres variables et qu'il suit une loi normale centrée. La question est alors la suivante : dans les chiffres officiels d'inflation, quelle est la part du bruit, et quelle est la part du taux réel ?

2. L'agent dispose au moment de prendre sa décision de deux informations : la valeur officielle de l'inflation π_t^f, ainsi qu'une somme de séries historiques, en l'occurrence la moyenne passée de l'inflation notée $\bar{\pi}$. Quelle est la manière la plus naturelle de prédire ε_t avec ces deux informations ? Construisez à partir de cette intuition un modèle de régression linéaire où ε_t sera la variable expliquée et donnez la valeur du coefficient correspondant.

3. Pour la résolution, R. Lucas utilise l'égalité suivante. Commentez-la et utilisez le résultat de la question précédente pour la résoudre :

$$E\left(\pi_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right) = \pi_t^f - E\left(\varepsilon_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right)$$

4. Quand la B.C. se comporte en faucon en luttant contre l'inflation, comment le terme $V(\varepsilon)$ évolue-t-il ? Quelle conséquence cela a-t-il dans l'égalité de la question 3. ?

5. Que se passe-t-il au contraire si la B.C. est réputée instable ?

6. Dans laquelle des deux situations une stratégie de surprise inflationniste fonctionnera-t-elle le mieux ?

1. Lucas (1973). "Some International Evidence on Output-Inflation Trade-offs". American Economic Review. 63 (3): 326-334.

Rappels

A. Régression linéaire (voir l'exercice 2.1.)

B. Règles pour la variance et la covariance :

Si *X* et *Y* sont deux variables indépendantes, s'appliquent à la variance et à la covariance les règles suivantes :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

$$Cov(W,X+Y)=Cov(W,X)+Cov(W,Y)$$

C. Notations bayésiennes :

La formule $E(X|Y)$, parfois notée $E_Y(X)$, est l'espérance bayésienne : c'est l'espérance de la variable *X*, sachant *Y*, ou à condition que *Y*.

Ainsi, si *X* est une variable de résultats scolaires au lycée, et *Y* une variable à deux valeurs (fille et garçon), $E(X)$ donnera la moyenne du lycée, et on devrait avoir une moyenne plus élevée pour les filles que pour les garçons $E(X\,|\,Y=Fille)>E(X\,|\,Y=Garçon)$.

1.4. Correction

1. La courbe de Phillips de Lucas s'écrit :

$$y_t=\lambda\left(\pi_t-\pi_t^e\right),\ \lambda\in\mathbb{R}_+^*$$

La croissance est fonction de la surprise inflationniste, multipliée par un terme λ ; ce terme est d'autant plus grand que la B.C. mène une politique monétaire rigoriste en imposant une inflation stable. Si la B.C. est connue pour sa détermination à lutter contre l'inflation, la surprise inflationniste sera encore plus inattendue et plus efficace dans la réduction du chômage.

2. La manière la plus naturelle de prédire l'étendue du bruit ε à la période *t* est tout simplement de retrancher à la valeur officielle de l'inflation π_t^f la moyenne de l'inflation réelle passée $\overline{\pi}$. On construit alors une droite de régression où le bruit ε est la variable expliquée, et la différence $\pi_t^f-\overline{\pi}$ la variable explicative ; on note β_0 la constante, *u* le terme d'erreur et β_1 la pente de la droite de régression :

$$\varepsilon_t=\beta_0+\beta_1\left(\pi_t^f-\overline{\pi}\right)+u_t=\beta_0+\beta_1\left(\pi_t+\varepsilon_t-\overline{\pi}\right)+u_t$$

On sait que le coefficient β_1 estimé vaut :

$$\widehat{\beta_1}=\frac{Cov\left(\varepsilon_t,\pi_t+\varepsilon_t-\overline{\pi}\right)}{V\left(\pi_t+\varepsilon_t-\overline{\pi}\right)}$$

La linéarité de la covariance et l'indépendance des variables permettent de réécrire respectivement le numérateur et le dénominateur :

$$\widehat{\beta_1} = \frac{Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + Cov(\pi_t, \varepsilon_t) - Cov(\varepsilon_t, \bar{\pi})}{V(\pi_t) + V(\varepsilon_t) + V(\bar{\pi})} = \frac{V(\varepsilon_t)}{V(\pi_t) + V(\varepsilon_t)}$$

3. Les agents tentent de prédire le taux véritable d'inflation à partir du taux officiel π_t^f qui est connu, et du terme de bruit ε_t qu'ils ne connaissent pas mais peuvent prédire à partir des autres données.

$$E\left(\pi_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right) = \pi_t^f - E\left(\varepsilon_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right)$$

La meilleure manière de prédire le bruit est d'utiliser la régression de la question 2., que l'on injecte ainsi :

$$E\left(\pi_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right) = \pi_t^f - \widehat{\beta_1}\left(\pi_t^f - \bar{\pi}\right) = \pi_t^f - \left(\frac{V(\varepsilon_t)}{V(\pi_t) + V(\varepsilon_t)}\right)\left(\pi_t^f - \bar{\pi}\right)$$

$$= \left(1 - \frac{V(\varepsilon_t)}{V(\pi_t) + V(\varepsilon_t)}\right)\pi_t^f + \left(\frac{V(\varepsilon_t)}{V(\pi_t) + V(\varepsilon_t)}\right)\bar{\pi}$$

4. Une B.C. faucon lutte contre l'inflation à tout prix. Elle n'intervient quasiment pas de manière discrétionnaire et conserve un taux stable ; le bruit est donc extrêmement faible et régulier : $V(\varepsilon_t) \to 0$. L'égalité de la question 3. devient alors :

$$E\left(\pi_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right) = \pi_t^f$$

Les agents font confiance à la B.C. faucon ; ils savent que le taux réel sera proche du taux officiel annoncé.

5. Inversement, si la B.C. est réputée instable, les agents ne lui font pas confiance : $V(\varepsilon_t) \to +\infty$ et $E\left(\pi_t \mid \pi_t^f, \bar{\pi}\right) = \bar{\pi}$; les prédictions ignorent les annonces du banquier central et se basent uniquement sur les données passées.

6. La B.C. faucon pourra davantage jouer la surprise inflationniste. Les agents lui font confiance ; il est donc plus facile de fixer leurs croyances a priori pour jouer la surprise inflationniste a posteriori. Inversement, une B.C. discréditée ne peut faire bouger les prédictions des agents, qui s'en tiennent aux moyennes passées. Elle ne peut jouer la surprise inflationniste qu'en s'écartant de la moyenne ; mais ce faisant, elle fait croître cette moyenne, ce qui l'oblige à s'en écarter encore davantage dans une logique accélérationniste.

1.5. Le modèle insulaire de R. Lucas (Partie II) – La courbe d'offre

On reprend le modèle de l'exercice 1.4. Le processus d'offre répond à une dynamique assez proche de celle décrite dans ce précédent exercice. Le producteur d'un bien i se rend soudain compte que les acheteurs sont prêts à payer des prix beaucoup plus élevés pour son bien. Mais il n'a pas encore reçu ses factures, et ne peut donc savoir si cette hausse est un vulgaire effet de l'inflation, ou au contraire un réel engouement pour son produit. Tout l'enjeu consiste à départager les deux éléments. Pour ce faire, on exprime le prix du produit *i*, noté $p_{i,t}$, comme la combinaison des prix généraux p_t et d'un effet de mode propre au produit, noté $z_{i,t}$:

$$p_{i,t} = p_t + z_{i,t}$$

On suppose que $z_{i,t}$ est indépendant des autres variables, et suit une loi normale centrée. Le producteur ne dispose à l'instant *t* que de deux informations : le prix officiel de son produit $p_{i,t}$ et des données historiques sur le niveau moyen des prix $\bar{p}$.

1. En reprenant la même méthode qu'à l'exercice 1.4., donnez la prédiction que va faire le producteur du niveau réel des prix $E\left(p_t \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right)$.

L'offre du producteur dépend de ce qu'il perçoit comme l'effet de mode autour de son produit ; on la note ainsi :

$$y_{i,t} = \gamma E\left(z_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right),\ \gamma > 0$$

2. Utilisez la même méthode que dans l'exercice 1.4. pour donner une évaluation économétrique de $E\left(z_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right)$. Vous aurez à utiliser le terme $\left(\dfrac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)$; vous pourrez le renommer θ pour alléger les notations.

3. Agrégez les différentes courbes d'offre pour obtenir une courbe d'offre globale où l'on remplacera $y_{i,t}$ et $p_{i,t}$ par y_t et p_t.

4. On suppose que le niveau des prix prédit en $t-1$ était la moyenne passée de cette variable, formellement $\overline{p_t} = E_{t-1}\left(p_t\right)$. Faites le remplacement puis réécrivez la courbe d'offre en fonction de l'inflation. Vous obtiendrez ainsi la courbe d'offre de R. Lucas.

1.5. Correction

1. Le producteur essaye de séparer l'élément qui est dû à l'inflation et l'élément dû à l'effet de mode dans la hausse de prix. En opérant comme dans l'exercice 1.4., on obtient :

$$E\left(p_t \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) = \left(\frac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)\overline{p_t} + \left(1 - \frac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)p_{it}$$

2. On reprend simplement l'égalité de la question 1. :

$$E\left(z_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) = E\left(p_{i,t} - p_t \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) = E\left(p_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) - E\left(p_t \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right)$$

On conçoit très intuitivement que $E\left(p_{i,t} \mid p_{i,t}\right) = p_{i,t}$; pour le reste :

$$\begin{aligned} E\left(z_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) &= E\left(p_{i,t} \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) - E\left(p_t \mid p_{i,t}, \overline{p_t}\right) \\ &= p_{i,t} - \left(\frac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)\overline{p_t} - \left(1 - \frac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)p_{it} \\ &= \left(\frac{V(z_t)}{V(z_t)+V(p_t)}\right)\left(p_{i,t} - \overline{p_t}\right) = \theta\left(p_{i,t} - \overline{p_t}\right) \end{aligned}$$

D'où l'on tire :

$$y_{i,t} = \gamma\theta\left(p_{i,t} - \overline{p_t}\right)$$

3. $y_t = \gamma\theta\left(p_t - \overline{p_t}\right)$

4. Le remplacement permet d'obtenir :

$$y_t = \gamma\theta\left(p_t - E_{t-1}(p_t)\right)$$

Pour réexprimer l'ensemble par rapport à l'inflation, on rajoute à l'intérieur de la parenthèse le terme $p_{t-1} - p_{t-1}$:

$$y_t = \gamma\theta\left(p_t - p_{t-1} - \left(E_{t-1}(p_t) - p_{t-1}\right)\right)$$

On obtient ainsi la courbe d'offre de Lucas, qui insiste sur le fait que seule la dimension non-anticipée de l'inflation nourrit l'offre :

$$y_t = \gamma\theta\left(\pi_t - E_{t-1}(\pi_t)\right)$$

1.6. Le modèle insulaire de Lucas (Partie III) – la courbe de demande

On combine ici les résultats des exercices 1.4. et 1.5. On étudie la masse monétaire. R. Lucas l'exprime ainsi :

$$m_t = p_t + y_t$$

1. De quelle théorie monétaire s'inspire cette égalité ? Rappelez l'égalité canonique qui la définit, et expliquez les différences avec la forme proposée par Lucas.

Cette égalité détermine le comportement agrégé de tous les consommateurs. La méthode de R. Lucas, on le sait, consiste à partir de relations qui modélisent le comportement individuel. On suppose que les agents rationnels connaissent la structure de l'économie puisqu'ils connaissent la structure rationnelle de leur propre comportement. Ils appliquent donc l'estimation statistique en partant de ces relations.

2. Appliquez cette intuition en donnant les valeurs estimées par l'agent pour $m_t = p_t + y_t$ à la période $t-1$ (on suppose pour le moment m_t constant dans le temps) ; il vous suffira d'appliquer les espérances des deux côtés. Vous devez obtenir un terme pour remplacer $E_{t-1}\left(p_t\right)$ dans l'égalité trouvée à la toute fin de l'exercice 1.5. : $y_t = \gamma\theta\left(p_t - E_{t-1}\left(p_t\right)\right)$.

   C'est le paradoxe des modèles à anticipations rationnelles ; leur méthode économétrique est une boucle ; on part des équations de comportement individuel optimisateur ; on en déduit les valeurs d'équilibre en appliquant les espérances ; puis on réinjecte les valeurs d'équilibre, comme si elles étaient exogènes, dans l'équation de comportement.

3. Faites le remplacement évoqué à la fin de la question 2., puis trouvez le prix d'équilibre.

4. Une fois le prix d'équilibre trouvé, réinjectez-le dans $m_t = p_t + y_t$.

   Parallèlement, on sait que la B.C. fait croître la masse monétaire par des chocs de politique monétaire ξ qui suivent une loi normale centrée. On a ainsi :

$$m_t = m_{t-1} + \xi_t$$

5. Déduisez-en la valeur de y_t à partir de la question 4.

6. Calculez la variance de y_t.

7. Utilisez la forme trouvée à la question 6., pour trouver le signe de la dérivée partielle de θ par $V\left(\varepsilon\right)$.

8. On se souvient d'avoir trouvé dans l'exercice 1.5. la fonction d'offre $y_{i,t} = \gamma\theta\left(p_{i,t} - \overline{p_t}\right)$; commentez-la en utilisant le résultat de la question 7. Comment varie θ quand $V\left(\varepsilon\right)$ augmente et quel est l'impact sur l'offre ? À quel type de raisonnement de R. Lucas renvoie ce résultat ?

Rappels

A. Dérivées partielles (voir l'exercice 2.3.)

B. Règle pour la variance :

Si *a* et *b* sont des réels et *X* une variable aléatoire :

$$V\left(aX + b\right) = a^2 V\left(X\right)$$

1.6. Correction

1. On reconnaît l'égalité fondamentale de la théorie quantitative de la monnaie $MV = PY$ à cette nuance près que V a été ignoré ; par ailleurs, comme tous les économètres, Lucas exprime les variables en logarithme ; le produit PY devient donc $p_t + y_t$.
2. En appliquant les espérances :

$$E_{t-1}(m_t) = E_{t-1}(p_t) + E_{t-1}(y_t)$$

On se souvient que dans l'exercice 1.5., y_t dépend exclusivement de la partie non anticipée de l'inflation : il est par nature impossible d'anticiper l'élément non anticipé et on peut simplifier l'égalité ainsi :

$$m_{t-1} = E_{t-1}(p_t)$$

3.

$$m_t = p_t + \gamma\theta(p_t - m_{t-1})$$

$$p_t = \frac{1}{1+\gamma\theta}(m_t + \gamma\theta m_{t-1})$$

4.

$$y_t = m_t - \frac{1}{1+\gamma\theta}(m_t + \gamma\theta m_{t-1})$$

$$y_t = \frac{\gamma\theta}{1+\gamma\theta}(m_t - m_{t-1})$$

5.

$$y_t = \left(\frac{\gamma\theta}{1+\gamma\theta}\right)\xi_t$$

6.

$$V(y_t) = \left(\frac{\gamma\theta}{1+\gamma\theta}\right)^2 V(\xi_t)$$

7.

$$V(y_t) = \left(\frac{\gamma\theta}{1+\gamma\theta}\right)^2 V(\xi_t) \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{V(y_t)}{V(\xi_t)}\right)^{\frac{1}{2}}}{\gamma\left(1-\left(\frac{V(y_t)}{V(\xi_t)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)} = \theta$$

On peut sans même calculer la dérivée partielle conclure à sa négativité. Les fonctions du type $\frac{x}{1-x}$ sont croissantes sur leur domaine de définition, alors que les fonctions du type $\sqrt{\frac{1}{x}}$ sont décroissantes ; la composée donne nécessairement une fonction décroissante. Ainsi :

$$\frac{\partial\theta}{\partial V(\xi_t)} < 0$$

8. Quand $V(\varepsilon_t)$ augmente, θ baisse ; or θ est le paramètre qui lie l'offre $y_{i,t}$ et le paramètre d'effet de modèle $z_{i,t}$ dans la courbe d'offre. Il faut interpréter la chose ainsi : quand la politique monétaire est très instable, les agents ne savent plus reconnaître ce qui dans un choc de prix s'explique par l'inflation normale et ce qui s'explique par l'effet de mode. Au contraire, si une B.C. faucon maintient un taux d'inflation fixe, quand les prix augmentent, c'est un signe clair pour le producteur que ses produits sont à la mode et qu'il doit augmenter sa production. On boucle ainsi le raisonnement de R. Lucas ; la stabilité monétaire profite à la fois à la demande (une courbe de Phillips horizontale rend l'expansion budgétaire ou monétaire plus efficace) mais elle profite aussi à l'offre.

1.7. Le modèle R.B.C. de F. Kydland et E. Prescott (partie I) – Une fonction de production intertemporelle

On propose ici une version très abrégée du modèle de cycle réel de Kydland et Prescott[1].

Au cours de chaque année *t*, des projets d'investissement S sont mis sur pied à échéance de *J* années ; pour tout *j* appartenant à $[\![1,J]\!]$, on note $S_{j,t}$ les projets initiés à la période *t* et qui verront le jour dans *j* années. À chaque période, la quantité de capital progresse selon cette suite :

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + S_{1,t}$$

1. Rappelez le sens du paramètre δ.

On note φ_j pour tout *j* appartenant à $[\![1,J]\!]$ la part d'investissement attribuée aux projets selon leur moment d'échéance. Au capital investi, on rajoute les stocks d'inventaire, le capital immédiatement disponible, noté *Y*.

2. Pour chaque année *t*, donnez l'investissement total.

La fonction de production ressemble alors à une fonction C.E.S. :

$$f(K, Y, n) = \lambda n^{\theta}\left((1-\sigma)K^{\rho} + \sigma Y^{\rho}\right)^{\frac{(1-\theta)}{\rho}} \quad où\ \rho = \frac{\upsilon - 1}{\upsilon}$$

$$\theta \in [0,1],\ \sigma \in [0,1],\ \upsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

3. Vous connaissez la fonction C.E.S. ; donnez le sens de chaque terme qui n'a pas encore été défini.

4. Que vaut la fonction C.E.S. quand υ vaut 1 ? Quel nom donne-t-on à cette forme de la fonction C.E.S. ? Déduisez-en la forme de f quand υ vaut 1.

1. Kydland, F. and E. Prescott (1982), "Time to Build and Aggregate Fluctuations", Econometrica, vol. 50, pp. 1345-70.

On suppose que tous les facteurs ont le même prix, 1 et que le producteur dispose d'un budget de 5.

5. Optimisez la fonction f trouvée à la question 4. avec cette contrainte.

Rappels

A. Optimisation sous contrainte (voir l'exercice 2.4.)

1.7. Correction

1. Le réel δ désigne ici le taux de dépréciation du capital (par exemple l'usure d'un bâtiment ou d'une machine).

2. L'investissement total est la somme de l'investissement de l'inventaire et des projets lancés à la période *t*, chacun selon son moment d'échéance, plus l'investissement d'inventaire.

$$I_t = K_t + Y_{t+1} - Y_t = \sum_{j=1}^{J} \varphi_j S_{j,t} + Y_{t+1} - Y_t$$

3.

n	Le troisième facteur de production, le travail
θ	La part du travail dans le processus de production
σ	La part du capital-stock dans le total du capital
υ	L'élasticité de substitution entre stock et capital
λ	Le choc technologique ou choc de productivité

4. La fonction C.E.S. (à rendements constants) est :

$$f\left(K,n\right) = A\left(\alpha\left(K^{\rho}\right) + \left(1-\alpha\right)\left(n^{\rho}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

Si l'élasticité de substitution entre facteurs est $\upsilon = 1$, la fonction C.E.S. est appelée fonction de Cobb-Douglas et prend cette forme :

$$f\left(K,n\right) = A\left(K^{\alpha} n^{1-\alpha}\right)$$

On en déduit que si $\upsilon = 1$, la fonction de notre exercice prend la forme :

$$f\left(K,\, Y,n\right) = \lambda n^{\theta} K^{\left(1-\sigma\right)\left(1-\theta\right)} Y^{\sigma\left(1-\theta\right)}$$

3. On optimise $f\left(K,\, Y,n\right) = \lambda n^{\theta} K^{\left(1-\sigma\right)\left(1-\theta\right)} Y^{\sigma\left(1-\theta\right)}$ sous la contrainte $g_1\left(K,Y,n\right) = K + Y + n$ avec $c_1 = 5$.

On vérifie facilement que les contraintes sont régulières sauf dans la situation absurde où tous les facteurs de production seraient nuls.
La condition de Lagrange est :

$$\mathcal{L}\left(K,Y,n,\mu\right) = \lambda n^{\theta} K^{\left(1-\sigma\right)\left(1-\theta\right)} Y^{\sigma\left(1-\theta\right)} - \mu\left(K + Y + n - 5\right)$$

Le système à résoudre est :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,Y,n,\lambda)}{\partial K} = \lambda(1-\sigma)(1-\theta)n^{\theta}K^{(1-\sigma)(1-\theta)-1}Y^{\sigma(1-\theta)} - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,Y,n,\lambda)}{\partial Y} = \lambda\sigma(1-\theta)n^{\theta}K^{(1-\sigma)(1-\theta)}Y^{\sigma(1-\theta)-1} - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,Y,n,\lambda)}{\partial n} = \lambda\theta n^{\theta-1}K^{(1-\sigma)(1-\theta)}Y^{\sigma(1-\theta)} - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,Y,n,\lambda)}{\partial \mu} = (K+Y+n-5) = 0 \end{cases}$$

On arrive à :

$$\mu = \theta n^{-1} = \sigma(1-\theta)Y^{-1} = (1-\sigma)(1-\theta)K^{-1}$$

On en déduit :

$$K = 5(1-\sigma)(1-\theta)$$
$$Y = 5 = 5\sigma(1-\theta)$$
$$n = 5\theta$$

1.8. Le modèle R.B.C. de F. Kydland et E. Prescott (partie II) – Une fonction d'utilité avec revenu permanent

On reprend le modèle de l'exercice 1.7. On se place dans un modèle de revenu permanent.

1. Un agent apprend qu'il touchera l'année prochaine un dollar de plus de revenu. Par quel facteur doit-on multiplier ce dollar pour obtenir sa valeur actualisée. Quel est le nom de ce facteur ?

On se donne une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$. α_0 est un réel donné entre 0 et 1, et : $\forall i \geq 1,\ \alpha_i = (1-\eta)^{i-1}\alpha_1$ avec $\eta \in [0,1]$.

2. Calculez la somme des termes de cette suite. Vers quoi tend cette somme quand n tend vers $+\infty$?

On impose une restriction : la somme des termes doit valoir 1.

3. Donnez la valeur de α_0 par rapport à α_1.

La fonction d'utilité prend cette forme :

$$U_t(c_t, l_t) = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left((c_t)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i l_{t-i} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

4. Que représentent les deux variables c et l ?

5. Vous connaissez la suite α_n ; vous pouvez ainsi réécrire la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i l_{t-i}$ en utilisant seulement α_0 et η.

On normalise en prenant un modèle avec une homme-heure, si bien que la quantité de travail est 1 moins le temps de loisir :

$$n_t = 1 - l_t$$

6. Réécrivez en conséquence l'égalité de la question 5.

7. À votre avis, que désignent empiriquement α_0 et η ? Comment qualifier un individu dont les préférences seraient telles que $\alpha_0 = 1$, et un autre pour lequel η serait très légèrement supérieur à 0 ?

1.8. Correction

1. Dans un modèle de revenue permanent, il est possible de profiter dès aujourd'hui des revenus futurs en empruntant ; l'agent devra cependant s'acquitter des intérêts de ce prêt ; aussi, la valeur actualisée du revenu de l'année prochaine Y_{t+1} est égale à :

$$\beta Y_{t+1},\ \beta = \frac{1}{1+r}$$

Où r est le taux d'intérêt. β est appelé facteur d'escompte.

2. Si on exclut α_0, on reconnaît une suite géométrique, et on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (1-\eta)^{i-1} \alpha_1 = \alpha_0 + (1-\eta)^{-1} \sum_{i=1}^{n} (1-\eta)^i \alpha_1$$

$$= \alpha_1 \frac{1-(1-\eta)^n}{\eta} + \alpha_0 \underset{n\to\infty}{=} \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\eta}$$

3. On tire de la restriction :

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\eta} = 1 \Leftrightarrow (1-\alpha_0)\eta = \alpha_1$$

4. On suppose ici que l'utilité est fonction de deux variables : la consommation c et le temps libre, ou le loisir l.

5. On isole le terme $i=0$ et pour le reste on retrouve la structure d'une suite géométrique (et on remplace le premier terme, α_1, par la valeur trouvée à la question 3.) :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i l_{t-i}=\alpha_0 l_t+(1-\alpha_0)\eta\sum_{i=1}^{\infty}(1-\eta)^{i-1}l_{t-i}$$

6. Si $\forall t,\ n_t=1-l_t$, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i l_{t-i}=\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i(1-n_{t-i})=1-\sum_{i=0}^{+\infty}\alpha_i n_{t-i}=1-\alpha_0 n_t-(1-\alpha_0)\eta\sum_{i=1}^{\infty}(1-\eta)^{i-1}n_{t-i}$$

7. Le paramètre α_0 désigne la part subjective que l'individu attribue à l'utilité du loisir présent (ou ce qui revient au même, à la désutilité du travail présent). Un individu tel que $\alpha_0=1$ n'admettrait aucune substitution intertemporelle du temps de loisir ou de travail ; ce serait une sorte d'épicurien vivant au jour le jour sans se soucier du passé ou de l'avenir.
η modélise au contraire la persistance mémorielle des loisirs vécus dans le passé ; si η est très petit, l'individu est doté d'une vaste mémoire, et inversement si η est grand.

1.9. Le modèle R.B.C. de F. Kydland et E. Prescott (partie III) – Le programme d'optimisation intertemporel

On combine ici les acquis de l'exercice 1.7. et 1.8.

En 1.7., on a trouvé la fonction de production :

$$f(K,Y,n)=\lambda n^{\theta}K^{(1-\sigma)(1-\theta)}Y^{\sigma(1-\theta)}$$

Ainsi qu'une formule d'investissement :

$$I_t=K_t+Y_{t+1}-Y_t=\sum_{j=1}^{J}\varphi_j S_{j,t}+Y_{t+1}-Y_t$$

En 1.8., on a posé la fonction d'utilité :

$$U_t(c_t,n_t)=\beta^t\left((c_t)^{\frac{1}{2}}\left(1-\alpha_0 n_t-(1-\alpha_0)\eta\sum_{i=1}^{\infty}(1-\eta)^{i-1}n_{t-i}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

L'utilité totale pour une période infinie est :

$$U=\sum_{t=0}^{+\infty}U_t$$

Le programme de maximisation va porter sur U :

1. Énoncez la première contrainte qui s'impose à ce programme, relative à n_t.
2. Énoncez la seconde contrainte qui concerne c_t (elle prend la forme d'une égalité IS).

   À ces deux contraintes, on rajoute la formule d'évolution de la quantité de capital, donnée à l'exercice 1.8. :

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + S_{1,t}$$

3. Écrivez la totalité du programme de maximisation. Vous pouvez éliminer la contrainte de la question 2., en remplaçant la valeur de c_t dans la fonction d'utilité.

   On passe à la calibration :

4. À quelle école économique appartiennent F. Kydland et E. Prescott ? Qu'est-ce que la calibration, et pourquoi cette école l'utilise-t-elle en priorité ? Quelle méthode alternative permet-elle d'éviter ?
5. Essayez de calibrer ce modèle vous-même en devinant la valeur empirique des différents paramètres qui ne sont pas des variables (en ignorant pour l'instant φ). Vérifiez dans la correction les valeurs choisies par Kydland et Prescott.

   Vous obtiendrez ainsi le programme d'optimisation du modèle R.B.C. Sa résolution demande des notions d'optimisation et d'économétrie qu'il n'est pas possible de détailler ici.

6. Néanmoins, un simple examen du cadre du modèle permet d'entrevoir ses deux grandes prédictions lorsqu'on l'applique aux données historiques américaines. À votre avis, le P.I.B. est-il corrélé positivement ou négativement à la consommation et au revenu ? La variance historique de la consommation sera-t-elle plus élevée ou plus faible que celle de l'investissement ?

1.9. Correction

1. La première contrainte concerne n_t qui ne peut pas être plus grand que 1, ce que nous avons posé à l'exercice 1.7.
2. La seconde contrainte, concernant c_t, n'est rien d'autre qu'une égalité IS de la forme $y = c + I$, qui se présente ici comme :

$$f(K, Y, n) = c_t + I_t$$

$$\Leftrightarrow \lambda_t n_t^{\theta} K_t^{(1-\sigma)(1-\theta)} Y_t^{\sigma(1-\theta)} = c_t + \sum_{j=1}^{J} \varphi_j S_{j,t} + Y_{t+1} - Y_t$$

3. On cherche à maximiser :

$$U\left(n_t, Y_t, S_{j,t}\right)$$
$$= \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \left(\left(f\left(K,\ Y, n\right) - I_t \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \alpha_0 n_t - \left(1 - \alpha_0\right) \eta \sum_{i=1}^{\infty} \left(1 - \eta\right)^{i-1} n_{t-i} \right)^{\frac{1}{2}} \right)$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \forall t,\ n_t \leq 1 \\ \forall t,\ K_{t+1} = \left(1 - \delta\right) K_t + S_{1,t} \end{cases}$$

4. F. Kydland et E. Prescott appartiennent à l'école des Nouveaux classiques des années 1970-1990. On sait que cette école (et notamment son père fondateur, Robert Lucas), a reproché à Keynes d'avoir utilisé une méthode holiste, ne prenant pas suffisamment en compte les actions et les décisions individuelles. Pour s'assurer qu'un modèle sera pertinent, l'économètre keynésien utilise les outils statistiques pour savoir comment varie telle grande variable (le revenu, l'épargne, la consommation) par rapport à telle autre : c'est l'estimation économétrique. Les Nouveaux classiques préfèrent au contraire la calibration ; ils utilisent des données sur le comportement individuel et injectent les facteurs (par exemple, la part du temps disponible consacrée au travail ou au loisir) dans une fonction d'utilité.

5. Kyndland et Prescott proposent le paramétrage suivant :

α_0	$\frac{1}{2}$	Empiriquement, les individus ont une forte préférence pour le présent
β	$\frac{9}{10}$	On choisit ici 0,9 mais le chiffre réel est beaucoup plus élevé, de l'ordre de 0,99
η	$\frac{1}{10}$	Ce sont là les valeurs conventionnelles dans presque tous les modèles
δ	$\frac{1}{10}$	
θ	$\frac{2}{3}$	
σ	0	On élimine ce paramètre, mais sa valeur empirique est $0{,}28 \times 10^{-5}$

On voit que la corrélation entre deux années successives de revenu dans ce petit modèle est très élevée. C'est assez normal, car le petit jeu stochastique qui le commande ne change pas fondamentalement les valeurs.

6. Le modèle originel de F. Kydland et E. Prescott arrive à une autocorrélation du P.I.B. d'une année à l'autre de 0,71. La valeur empirique, pour le P.I.B. américain de 1950 à 1979, est de 0,84.

Il y a une corrélation positive nette entre la croissance et le revenu, ce qui est trivial compte tenu des spécifications du modèle. Ce qui est moins trivial, c'est l'idée que la variance de l'investissement est beaucoup plus forte que celle de la consommation. C'est l'impact de la fonction d'investissement avec décalage temporel qui est inclus dans ce modèle. En période de crise, on a tendance à rogner sur les dépenses d'investissement. Cette variabilité est une constante historique. Dans la France du XIX[e] s., les crises de fin de Kondratiev se traduisaient généralement par une baisse de 10 % du P.I.B., mais l'investissement industriel était généralement divisé par 2 si ce n'est par 3.

1.10. Équilibre de sous-emploi et irrationalité (partie I) – Présentation du modèle

On propose ici une version abrégée d'un célèbre modèle néokeynésien[1].

Soit une économie à l'équilibre où tous les agents sont a priori parfaitement rationnels. Un choc exogène frappe cette économie. Seule une partie des agents refont les calculs d'optimisation et mettent à jour leurs variables ; une fraction $\beta \in [0,1]$ des agents laisse au contraire ses salaires ou ses prix nominaux inchangés.

1. Quel nom donne-t-on à ce type de modèles ? Qu'est-ce qui peut expliquer l'existence de la fraction β ?

Cette économie est en concurrence monopolistique avec *n* firmes qui se partagent le marché.

2. Comment l'équilibre monopolistique se présente-t-il par rapport à l'équilibre de concurrence pure et parfaite ? Quand l'entente d'oligopole se fait sur les prix, parle-t-on d'oligopole de Bertrand ou de Cournot ?

Les travailleurs de cette économie sont payés au salaire d'efficience. Ils fournissent un effort *e* qui est proportionnel au salaire réel qu'ils touchent ω :

$$e(\omega) = -1 + \omega^{\frac{1}{2}}$$

Le salaire réel minimum est de 1 :

La fonction de production de chaque firme dépend de cet effort et la quantité de travail L :

$$S(\omega, L) = Y_S = \left(e(\omega)L\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Rappelez le sens du concept de salaire d'efficience, et donnez les conséquences prévisibles pour l'économie. Calculez l'élasticité de

1. Akerlof, G. and J. Yellen, (1985b), "A Near-Rational Model of the Business Cycle with Wage and Price Inertia", Quarterly Journal of Economics, Supplement, vol. 100, pp. 823-838.

l'effort au salaire réel ; tracez un tableau de signe de cette fonction d'élasticité, et interprétez ses valeurs.

Chaque firme fixe son prix a priori indépendamment des autres. On note $\overline{p}$ la moyenne géométrique des prix.

4. Que vaut $\overline{p}$?

La fonction de demande à laquelle fait face chaque firme est donnée par :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ D\left(p_i,\overline{p},\ M\right)=Y_D=\left(\frac{p_i}{\overline{p}}\right)^{-\eta}\left(\frac{M}{\overline{p}}\right),\ \eta>1 \quad (1)$$

Où p_i est le prix fixé par chaque firme, M l'offre de monnaie dont dispose chaque firme (supposée similaire), et η une mesure du degré de concentration monopolistique.

5. Vérifiez que cette fonction admet, sur $\mathbb{R}_+^{*\,3}$ des dérivées partielles dans toutes les directions ? En concurrence pure et parfaite, ce ne serait pas le cas : pourquoi ?
6. Comment varie la demande de chaque firme en fonction de son prix, du prix moyen et de la monnaie ?
7. Rappelez l'égalité qui définit la théorie quantitative de la monnaie. À quelle condition est-elle réalisée dans ce modèle ?

1.10. Correction

1. On a affaire à un modèle en *sticky prices* ; même quand la situation économique évolue, les agents ne changent pas nécessairement leurs variables ; une entreprise ne va pas changer ses prix à chaque fois que la B.C. fait une annonce de politique monétaire ; un syndicat ne va pas demander des hausses de salaire à chaque fois que l'inflation augmente, etc.
2. L'équilibre monopolistique implique, sauf exception, des prix plus élevés, et des quantités produites plus faibles. On parle d'oligopole de Cournot quand l'entente se fait sur les prix, de Bertrand quand l'entente se fait sur les quantités.
3. On parle de salaire d'efficience quand le management fixe un salaire réel au-dessus de la productivité marginale de l'employé, soit pour l'inciter à ne pas lambiner (*shirk*), soit pour réduire le *turnover* et fidéliser les employés. La conséquence prévisible est un chômage involontaire de type keynésien.
L'élasticité de $e(\omega)$ à ω est donnée par :

$$\varepsilon_{e,\omega}(\omega)=\frac{\partial e(\omega)}{\partial\omega}\frac{\omega}{e(\omega)}=\frac{1}{2}\frac{\omega^{\frac{1}{2}}}{-1+\omega^{\frac{1}{2}}}$$

La dérivée de cette fonction est :

$$\varepsilon'_{e,\omega}(\omega) = -\frac{1}{4x^{\frac{1}{2}}\left(-1+x^{\frac{1}{2}}\right)^2}$$

D'où le tableau de signe :

	0		1		+∞
$\varepsilon'_{e,\omega}(\omega)$		−		−	
$\varepsilon_{e,\omega}(\omega)$		(0) Décroissante $(-\infty)$		$(+\infty)$ Décroissante	0

L'élasticité est positive et décroît sur $\left[1,+\infty\right]$. On rappelle l'interprétation d'une élasticité : quand le salaire réel ω augmente de 1 %, l'effort fourni par le salarié augmente de $\varepsilon_{e,\omega}(\omega)\%$. Quand le salaire est très proche du seuil minimum, il suffit d'une toute petite augmentation pour motiver les salariés ; quand les salaires sont plus généreux, l'augmentation doit être plus nette.

4. On obtient $\overline{p}$ en faisant la moyenne géométrique de tous les prix :

$$\overline{p} = \left(\prod_{k=1}^{n} p_k\right)^{\frac{1}{n}}$$

5. Il faut penser à réécrire la fonction *D* pour faire apparaître la participation de p_i à la moyenne géométrique :

$$D\left(p_i,\overline{p},\ M\right) = \overline{p}^{\eta-1}p_i^{-\eta}M = \left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k\right)^{\frac{\eta-1}{n}} p_i^{-\eta+\frac{\eta-1}{n}} M$$

$$\frac{\partial D}{\partial p_i}\left(p_i,\overline{p},\ M\right) = \left(-\eta+\frac{\eta-1}{n}\right)p_i^{-\eta+\frac{\eta-1}{n}-1}\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} p_k\right)^{\frac{\eta-1}{n}} M$$

$$\frac{\partial D}{\partial \overline{p}}\left(p_i,\overline{p},\ M\right) = (\eta-1)\,\overline{p}^{\eta-2}p_i^{-\eta}M$$

$$\frac{\partial D}{\partial M}\left(p_i,\overline{p},\ M\right) = \overline{p}^{\eta-1}p_i^{-\eta}$$

D ne serait cependant pas dérivable par p_i en concurrence pure et parfaite, parce qu'il existerait une discontinuité au niveau du prix de marché. En C.P.P. (concurrence pure et parfaite), si l'entreprise fixe son prix p_i ne serait-ce qu'un centime au-dessus du prix de marché, elle perd instantanément la totalité de sa clientèle qui fuit vers la concurrence.

6. Quand l'entreprise augmente son prix p_i, sa demande baisse. La demande augmente au contraire si les autres firmes augmentent leurs prix, ou si la quantité de monnaie augmente.
7. La théorie quantitative de la monnaie est définie par l'équation $MV = PY$; la quantité de monnaie en circulation par la vitesse de circulation doit être égale au produit de l'indice des prix et des quantités produites. On peut retrouver cette égalité dans notre modèle, à partir de la fonction de demande, en posant $V = 1$ et en supposant qu'à long terme, toutes les firmes adoptent le même prix d'où $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i = \overline{p}$.

1.11. Équilibre de sous-emploi et irrationalité (partie II) – L'équilibre a priori

On reprend le modèle de l'exercice 1.10. Chaque firme fait face à une fonction d'offre et à une fonction de demande :

$$\begin{cases} S(\omega, L) = Y_S = \left(e(\omega)L\right)^{\frac{1}{2}} \\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ D\left(p_i, \overline{p},\ M\right) = Y_D = \left(\dfrac{p_i}{\overline{p}}\right)^{-\eta}\left(\dfrac{M}{\overline{p}}\right),\ \eta > 1 \end{cases}$$

1. Combinez les deux fonctions pour déterminer la quantité de travail L que va choisir la firme.
2. Utilisez cette quantité pour écrire l'équation de profit de chaque firme : c'est la quantité produite multipliée par le prix, moins les coûts, qui eux-mêmes sont donnés par les quantités de travail multipliées par le salaire nominal.

   On suppose à partir de maintenant que les variations de p_i n'ont aucune influence sur $\overline{p}$ (il y a trop de concurrents pour qu'une firme puisse faire varier les prix à elle seule).
3. Optimisez la fonction de profit en choisissant le prix optimal et le salaire optimal. Pour ce faire, trouvez les valeurs du salaire et du prix où la dérivée partielle par le salaire et le prix sont toutes deux égales à 0.
4. Rappelez l'équation d'élasticité de l'effort au salaire que vous avez énoncée à la question 3. de l'exercice 1.10. et interprétez l'égalité qui donne le salaire optimal.

   En $t = 0$, on suppose que l'économie se situe à l'équilibre ; toutes les firmes ont fixé le même prix de vente.
5. Quel est le prix de vente moyen en $t = 0$? On le notera p_0.

6. Reprenez la solution de la question 1., et déterminez le niveau d'emploi à l'équilibre initial, que l'on notera L_0.

1.11. Correction

1. La quantité de travail que choisit la firme doit répondre à l'égalité entre son offre et sa demande, soit ici :

$$Y_D = Y_S \Leftrightarrow \left(\frac{p_i}{\overline{p}}\right)^{-\eta}\left(\frac{M}{\overline{p}}\right) = \left(e(\omega)L\right)^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \overline{p}^{\frac{3(\eta-1)}{2}} p_i^{-\frac{3\eta}{2}} M^{\frac{3}{2}} (e(\omega))^{-1} = L$$

$$\Leftrightarrow L = \overline{p}^{2\eta-2} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1}$$

2. $\text{Profit} = \text{Prix} \times \text{Quantités produites} - \text{Quantités de travail} \times \text{salaire réel}$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \Pi\left(p_i,\omega\right) = p_i \times \overline{p}^{\eta-1} p_i^{-\eta} M - \overline{p}^{2\eta-2} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1} \times \omega\overline{p}$$

3. La fonction à optimiser est :

$$\Pi\left(p_i,\omega\right) = \overline{p}^{\eta-1} p_i^{1-\eta} M - \overline{p}^{2\eta-1} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1}\omega$$

Les conditions de premier ordre sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Pi\left(p_i,\omega\right)}{\partial p_i} = \left(1-\eta\right) p_i^{-\eta} \overline{p}^{\eta-1} M + 2\eta p_i^{-2\eta-1} \overline{p}^{2\eta-1} M^2 e\left(\omega\right)^{-1} \omega = 0 \\ \dfrac{\partial \Pi\left(p_i,\omega\right)}{\partial \omega} = \left(\overline{p}^{2\eta-1} p_i^{-2\eta} M^2\right)\left(\dfrac{1}{e\left(\omega\right)} - \dfrac{e'\left(\omega\right)\omega}{e\left(\omega\right)^2}\right) = 0 \end{cases}$$

On peut réécrire pour trouver les valeurs d'équilibre :

$$\begin{cases} p_i = \left(\dfrac{2\eta\omega}{\left(\eta-1\right)e\left(\omega\right)} \overline{p}^{\eta} M\right)^{\frac{1}{\eta+1}} \\ \omega = \dfrac{e\left(\omega\right)}{e'\left(\omega\right)} = \dfrac{-1+\omega^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\omega^{-\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \omega^* = 4 \end{cases}$$

On peut d'ailleurs en déduire le prix optimal en réinjectant le salaire :

$$p_i = \left(\frac{8\eta}{\left(\eta-1\right)} \overline{p}^{\eta} M\right)^{\frac{1}{\eta+1}}$$

4. On rappelle l'élasticité de l'effort au salaire réel trouvée plus haut :

$$\varepsilon_{e,\omega} = e'\left(\omega\right)\omega e\left(\omega\right)^{-1}$$

On voit qu'à l'équilibre que nous venons de trouver, si $e(\omega) = e'(\omega)\omega$, alors $\varepsilon_{e,\omega} = 1$. Le patron fixe le salaire à un niveau où l'élasticité de l'effort au salaire réel est de 1, c'est-à-dire au niveau où lorsqu'on augmente le salaire réel de 1 %, l'effort augmente aussi de 1 %. Un salaire d'efficience trop faible décourage le travailleur ; mais un salaire d'efficience trop élevé désavantage le patron car l'effort marginal obtenu par une hausse marginale est minime. Ce niveau optimal est un résultat trivial de la théorie du salaire d'efficience[1].

5. Si toutes les entreprises ont les mêmes prix de vente, on a $\forall i \in [\![1,n]\!],\ p_i = \overline{p}$ et par remplacement dans le prix d'équilibre trouvé à la question 4., on obtient :

$$p_0 = \frac{2\eta\omega^*}{(\eta-1)e(\omega^*)}M = \frac{8\eta}{(\eta-1)}M$$

6. Le niveau d'emploi choisi par la firme était :

$$L = \overline{p}^{2\eta-2} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1}$$

À l'équilibre tel qu'on vient de le définir, il vaut :

$$L_0 = \left(\frac{2\eta\omega^*}{(\eta-1)e(\omega^*)}M\right)^{-2} M^2 e(\omega^*)^{-1} = \left(\frac{8\eta}{(\eta-1)}\right)^{-2} e(\omega^*)^{-1} = \left(\frac{8\eta}{(\eta-1)}\right)^{-2} = p_0^{-2}M^2$$

1.12. Équilibre de sous-emploi et irrationalité (partie III) – L'effet d'un choc monétaire

On se place à nouveau dans le modèle de l'exercice 1.10. et 1.11.

L'économie est a priori à l'équilibre. Mais la B.C. décide soudainement d'augmenter l'offre de monnaie d'un ratio $1+\epsilon$. Seule une fraction des firmes va changer ses prix et ses salaires après cette décision de politique monétaire ; une autre fraction $\beta \in [0,1]$ va garder les mêmes valeurs qu'auparavant.

1. Quels sont les deux éléments de ce modèle qui expliquent le comportement frictionnel des prix (sticky prices) ?

   On note à présent avec un indice μ les variables pour les firmes qui mettent à jour leurs valeurs, avec un ν les variables de celles qui ne le font pas. On rappelle les valeurs trouvées à l'exercice 1.11. ; ce sont les valeurs à l'état initial, avant la mise en place de la mesure d'expansion monétaire :

$$\Pi(p_i,\omega) = \overline{p}^{\eta-1} p_i^{1-\eta} M - \overline{p}^{2\eta-1} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1}\omega$$

$$p_0 = \frac{2\eta\omega^*}{(\eta-1)e(\omega^*)}M = \frac{8\eta}{(\eta-1)}M$$

1. Solow, Robert M., (Winter 1979), "Another Possible Source of Wage Stickiness," Journal of Macroeconomics, I, 79-82.

$$L_0 = \left(\frac{8\eta}{(\eta-1)}\right)^{-2} e\left(\omega^*\right)^{-1} = \left(\frac{8\eta}{(\eta-1)}\right)^{-2} = p_0^{-2} M^2$$

$$\omega^* = 4$$

2. Que vaut p_ν, après l'annonce de la B.C. ?
3. Que vaut maintenant $\overline{p}$, qui est, on le rappelle, la moyenne géométrique des prix ?
4. Quels prix vont choisir les firmes de type μ ? (en supposant à nouveau que leur décision n'a pas d'impact sur le prix moyen).
5. Quelle quantité de travail L_μ les firmes de type μ vont-elles choisir ?
6. Faîtes le quotient L_μ / L_0 et dérivez-le par ε ? Comment varie cette dérivée quand β tend vers 1 ; interprétez.

1.12. Correction

1. Ce modèle comporte les deux mécanismes couramment usités pour rendre compte des *sticky prices* : le salaire d'efficience (qu'enregistre la fonction $e(\omega)$) et les prix imbriqués (*staggered wage and price-setting*). Même si la B.C. mène une politique d'expansion monétaire, les prix n'augmenteront pas forcément ; soit parce que les salaires sont déjà au-dessus de leur niveau optimal à cause du salaire d'efficience ; soit à cause des coûts de menus qui font qu'aucune entreprise ne change ses prix toutes les semaines.
2. Les firmes de type ν sont les firmes non-maximisatrices ; elles ne changent pas leur prix :

$$p_\nu = p_0$$

3. Si on s'en tient à la définition de la moyenne géométrique, dans une économie où β % des firmes ont le même prix p_ν et $1-\beta$ % le prix p_μ, alors :

$$\overline{p} = \left(p_\nu\right)^\beta \left(p_\mu\right)^{1-\beta}$$

4. Le programme de maximisation que résolvent les firmes maximisatrices est le même que celui vu à l'exercice 1.11., à cette nuance près que la masse monétaire M est agrémentée du multiple d'expansion monétaire :

$$p_{i,\mu} = \left(\frac{8\eta}{(\eta-1)} \overline{p}^{\eta} M(1+\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\eta+1}}$$

On retrouve dans l'énoncé la valeur de p_0 et on a vu, à la question 3., la valeur nouvelle de $\overline{p}$; on remplace :

$$p_{i,\mu} = \left(\left(\left(p_\nu\right)^\beta \left(p_\mu\right)^{1-\beta}\right)^\eta p_0(1+\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\eta+1}}$$

$$p_{i,\mu} = \left(\left(\left(p_\mu \right)^{1-\beta} \right)^{\eta} p_0^{\beta\eta+1} (1+\varepsilon) \right)^{\frac{1}{\eta+1}}$$

En supposant que toutes les firmes maximisatrices doivent arriver au même prix final, on peut réécrire :

$$p_\mu = \left(\left(\left(p_\mu \right)^{1-\beta} \right)^{\eta} p_0^{\beta\eta+1} (1+\varepsilon) \right)^{\frac{1}{\eta+1}}$$

$$\Leftrightarrow p_\mu = p_0 \ (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\beta\eta+1}}$$

5. Par souci de simplicité, on notera à présent $\frac{1}{\beta\eta+1} = \theta$;

On retrouve à l'exercice 1.11. la valeur du niveau d'emploi :

$$L = \overline{p}^{2\eta-2} p_i^{-2\eta} M^2 (e(\omega))^{-1}$$

On a supposé ici que le salaire d'équilibre, 4, ne changeait pas avec la mesure de politique monétaire ; par contre, la quantité de monnaie est multipliée par $(1+\varepsilon)$:

$$L = \overline{p}^{2\eta-2} p_i^{-2\eta} M^2 (1+\varepsilon)^2$$

Par remplacement :

$$\begin{aligned} L_\mu &= \left(\left(p_\nu \right)^{\beta} \left(p_\mu \right)^{1-\beta} \right)^{2\eta-2} \left(p_\mu \right)^{-2\eta} \left(M(1+\varepsilon) \right)^2 \\ &= \left(p_\nu \right)^{\beta(2\eta-2)} \left(p_\mu \right)^{2(-\beta\eta+\beta-1)} M^2 (1+\varepsilon)^2 \\ &= \left(p_0 \right)^{\beta(2\eta-2)} \left(p_0 (1+\varepsilon)^{\theta} \right)^{2(-\beta\eta+\beta-1)} M^2 (1+\varepsilon)^2 \end{aligned}$$

6. On se souvient de la valeur de L_0 : $L_0 = p_0^{-2} M^2$:

$$\frac{L_\mu}{L_0} = \left(p_0 \right)^{\beta(2\eta-2)} \left(p_0 (1+\varepsilon)^{\theta} \right)^{2(-\beta\eta+\beta-1)} (1+\varepsilon)^2 \ p_0^2 = (1+\varepsilon)^{2\theta(-\beta\eta+\beta-1)+2}$$

En faisant la dérivée de ce terme par ε, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{L_\mu}{L_0}}{\partial \varepsilon} &= \left(2\theta(-\beta\eta+\beta-1)+2 \right) (1+\varepsilon)^{2\theta(-\beta\eta+\beta-1)+1} \\ &= \left(2(\beta\eta+1)^{-1}(-\beta\eta+\beta-1)+2 \right) (1+\varepsilon)^{2(\beta\eta+1)^{-1}(-\beta\eta+\beta-1)+1} \end{aligned}$$

On remarque d'abord que le terme $\left(2(\beta\eta+1)^{-1}(-\beta\eta+\beta-1)+2 \right)$ est positif, mais qu'il est d'autant plus petit que η est grand ; on rappelle que η est une mesure de la concentration monopolistique ; plus le marché est concentré, plus on assiste à des comportements de monopole qui conduisent toujours à une réduction sous-optimale de l'emploi et de l'activité.

Par ailleurs, on voit que θ tend vers 1 quand β tend 0, et qu'ainsi notre terme $\dfrac{\partial \frac{L}{L_0}}{\partial \varepsilon}$ tend vers 0 quand β tend vers 0. Quand toutes les firmes sont de type μ et agissent de manière purement rationnelle, la politique monétaire est inefficace, comme dans les modèles des nouveaux classiques ; les agents maximisateurs neutralisent l'effet de la politique de relance.

On peut alors prendre ce raisonnement en sens inverse ; une B.C. faucon qui tenterait de lutter contre l'inflation en réduisant la masse monétaire ne causera pas de dommage à l'emploi si toutes les firmes se comportent de manière purement rationnelle. Mais il suffit qu'il y ait une fraction de firmes non-maximisatrices pour que la restriction monétaire soit suivie d'une hausse de chômage. On retrouve le raisonnement canonique des modèles en *sticky prices*.

1.13. L'accélérateur financier (partie I) – La condition d'Euler

Dans le modèle que nous allons présenter, l'utilité totale intertemporelle d'un agent est donnée par :

$$U = \sum_{t=1}^{+\infty} \beta^{t-1} u\left(c_t\right),\ \beta \in \left[0,1\right]$$

1. Quel nom donne-t-on à ce type d'équations ? Quelle est l'interprétation de c_t et du paramètre β ? Que peut-on dire de l'agent dont $\beta = 1$?

On cherche à présent à savoir sous quelles conditions un agent peut substituer la consommation entre les différents moments du temps en conservant un revenu permanent inchangé.

Par assimilation aux équations d'Euler qui décrivent l'écoulement d'un fluide, on appelle cette condition la condition d'Euler.

L'agent dispose d'un budget intertemporel fini, W ; le taux d'intérêt réel $\boldsymbol{r}$ est supposé constant.

2. Écrivez la contrainte budgétaire intertemporelle, sachant que l'individu consomme la totalité de W.

3. Supposez qu'il n'y ait que deux périodes. Optimisez la fonction d'utilité sous la contrainte définie à la question 2.

À la fin du programme d'optimisation, vous devez trouver comme condition de l'optimum :

$$u'\left(c_1\right) = \beta\left(1+r\right)u'\left(c_2\right)$$

4. Quel est le nom canonique de la dérivée de la fonction d'utilité ? Quel est le nom microéconomique de la valeur absolue du quotient $u'(c_1)/u'(c_2)$? Tirez de vos deux réponses une interprétation économique de la condition ci-dessus.
5. Que vaut l'égalité ci-dessus si on prend pour u la fonction logarithme ?

Rappels

A. Optimisation sous contraintes (voir l'exercice 2.4.)

1.13. Correction

1. On reconnaît une fonction de revenu permanent. c_t donne la consommation de chaque période. β est le facteur d'escompte ; c'est un réel compris entre 0 et 1 ; s'il vaut 1, l'individu n'a aucune préférence pour le présent (il est indifférent à consommer aujourd'hui plutôt que dans 50 ans).
2. La totalité des consommations, actualisées avec le facteur $\frac{1}{1+r}$ doit être égale au revenu total intertemporel :

$$\sum_{t=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{t-1} c_t = W$$

3. Pour deux périodes, l'agent ne peut jouer que sur deux paramètres ; il y a donc deux variables c_1 et c_2 ;

$$U = u(c_1)+\beta u(c_2)$$

La contrainte est :

$$c_1+\frac{1}{1+r}c_2 = W$$

La condition de Lagrange s'écrit :

$$\mathcal{L}(c_1,c_2,\lambda) = u(c_1)+\beta u(c_2)-\lambda\left(c_1+\frac{1}{1+r}c_2-W\right)$$

Le système à résoudre est ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathcal{L}(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_1} = u'(c_1)-\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(c_1,c_2,\lambda)}{\partial c_2} = \beta u'(c_2)-\lambda\dfrac{1}{1+r} = 0 \\ \dfrac{\partial\mathcal{L}(c_1,c_2,\lambda)}{\partial \lambda} = c_1+\dfrac{1}{1+r}c_2-W = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u'(c_1) = \beta(1+r)u'(c_2) \\ c_1+\dfrac{1}{1+r}c_2 = W \end{cases}$$

La contrainte définit un segment (puisque les consommations ne peuvent pas être négatives), ce qui garantit l'existence d'un optimum.
En l'absence d'informations plus précises sur u, on ne peut aller plus loin, mais l'essentiel est la condition :

$$u'\left(c_1\right)=\beta\left(1+r\right)u'\left(c_2\right)$$

C'est là la condition d'Euler pour deux périodes. Si on généralise au cas de t périodes :

$$u'\left(c_t\right)=\beta\left(1+r\right)u'\left(c_{t+1}\right)$$

4. La dérivée de la fonction d'utilité est l'utilité marginale, et la valeur absolue du quotient des utilités marginales est le taux marginal de substitution entre les deux consommations :

$$\left|\frac{u'\left(c_1\right)}{u'\left(c_2\right)}\right|=T.M.S._{c_1,c_2}$$

L'égalité peut alors s'interpréter ainsi ; à l'optimum, aucune substitution intertemporelle de la consommation ne peut améliorer l'utilité totale. Si le T.M.S. (taux de marginal de substitution) n'était pas égal au taux d'intérêt $\left(1+r\right)$ multiplié par le taux d'escompte, l'agent aurait intérêt à transférer l'utilité d'une période à une autre. Si par exemple :

$$T.M.S._{c_1,c_2}>\beta\left(1+r\right)$$

L'agent aurait intérêt à emprunter pour consommer aujourd'hui le revenu du lendemain.

5.

$$\frac{1}{c_1}=\beta\left(1+r\right)\frac{1}{c_2}$$

1.14. L'accélérateur financier (partie II) – Un modèle D.S.G.E. abrégé

On propose ici une version très abrégée d'un modèle D.S.G.E. qui permettra de rendre compte du raisonnement fait par B. Bernanke dans la définition de l'accélérateur financier.

La fonction d'utilité est celle de l'exercice 1.13. À l'optimum, elle respecte la condition d'Euler trouvée à la question 5. de l'exercice 1.13., qui pour toutes les périodes, est :

$$\beta\left(1+r_t\right)\frac{c_t}{c_{t+1}}=1$$

Dans ce modèle simplifié, il y a une seule communauté de consommateurs qui mutualise ses revenus. Elle finance à travers des prêts, à un taux r_t, une entreprise, dont la fonction de production est :

$$y_t=f\left(k_{t-1}\right)=a_t k_{t-1}^{\alpha}$$

1. Donnez le nom canonique de cette fonction de production, ainsi que le sens du paramètre α, sachant que a est un choc technologique.

On suppose que le taux de dépréciation du capital est de 1 ; le capital produit en $t-1$ est entièrement utilisé en t pour produire.

2. Donnez l'équilibre pour chaque période sur le marché des biens.
3. Quelle est la productivité marginale du capital ? Vous la noterez ρ.

Le marché du crédit est modélisé par une courbe d'offre et une courbe de demande. La courbe d'offre est simplement la condition d'Euler énoncée plus haut.

4. Réécrivez cette condition en remplaçant les deux consommations par leur valeur en capital, à travers la question 2.

La courbe de demande dépend du comportement de l'entreprise.

5. Si le patron se comporte en optimisateur, quand va-t-il arrêter sa production ? Déduisez-en la forme de la courbe d'offre.
6. Quel sera à terme l'équilibre sur le marché du crédit ?

À présent, on se place dans l'hypothèse où il n'y a que 3 périodes, soit $t \in \{0,1,2\}$. La quantité initiale de capital est 1 ; en dernière période, tout est consommé. Il n'y a pas dans cette situation de choc exogène : $\forall t,\ a_t = 1$. On donne un paramétrage relativement réaliste avec $\alpha = \frac{1}{3}$ et $\beta = \frac{4}{5}$.

7. Réécrivez l'équilibre avec ce paramétrage.

Un choc violent se produit en période 1 : $a_1 = \frac{1}{2}$.

8. Estimez l'ampleur de l'impact négatif sur l'investissement.

En étudiant empiriquement le comportement du banquier, on se rend compte qu'il n'agit pas de manière parfaitement rationnelle. Il impose à l'entreprise un taux d'intérêt $\left(1+\tilde{r}_t\right)$ plus élevé que l'équilibre ne l'exigerait :

$$\left(1+\tilde{r}_t\right) = \left(1+r_t\right)\left(1+s_t\right)$$

$$s_t = 1 - a_t$$

9. Quel est le nom financier de la différence $\tilde{r}_t - \rho_{t+1}$? Comment interprète-t-on cette différence ?
10. Le paramètre s_t est-il procyclique ou contracyclique ? Pourquoi ?
11. Reprenez la question 8. Que se passe-t-il si le même choc se produit en présence du surplus s ? Quel est l'impact sur l'investissement. Comment expliquez-vous la différence avec le résultat de la question 8. ?

1.14. Correction

1. On reconnaît une fonction de Cobb-Douglas, où l'on a supposé par simplification que la quantité de travail est de 1, où α donne la part de la rémunération du capital.
2. À chaque période, l'équilibre est défini par la simple condition que le produit y_t doit être réparti entre ce qui est consommé, et ce qui est conservé pour servir de capital à la période suivante :
$$a_t k_{t-1}^{\alpha} = c_t + k_t$$
3. La productivité marginale du capital est donnée ici par :
$$\rho_t = \frac{\partial f\left(k_{t-1}\right)}{\partial k_{t-1}} = \alpha a_t k_{t-1}^{\alpha-1}$$
4. L'énoncé initial donne :
$$\left(1+r_t\right) = \frac{c_{t+1}}{c_t}\frac{1}{\beta} = \frac{a_{t+1}k_t^{\alpha} - k_{t+1}}{a_t k_{t-1}^{\alpha} - k_t}\frac{1}{\beta}$$
5. f est définie de telle manière que la productivité marginale du capital est décroissante ; en supposant que cette productivité était a priori supérieure au taux d'intérêt du marché *r*, la firme va produire jusqu'au point où sa productivité marginale ρ_{t+1} est égale au taux offert par le banquier. Au-delà, la firme ne peut plus se permettre de produire puisque le capital ne serait pas assez productif pour rembourser le prêt. La courbe d'offre est donc simplement égale à la productivité marginale :
$$\left(1+r_t\right) = \rho_t = \alpha a_{t+1} k_t^{\alpha-1}$$
6. À l'équilibre, on devrait avoir égalité entre l'offre et la demande :
$$\alpha a_{t+1} k_t^{\alpha-1} = \frac{a_{t+1}k_t^{\alpha} - k_{t+1}}{a_t k_{t-1}^{\alpha} - k_t}\frac{1}{\beta}$$
7.
$$\frac{4}{15}k_1^{\frac{-2}{3}} = \frac{k_1^{\frac{1}{3}}}{1-k_1} \Leftrightarrow \frac{4}{15}k_1^{\frac{-2}{3}}\left(1-k_1\right) = k_1^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left(k^{-1}-1\right) = \frac{15}{4}$$
$$\Leftrightarrow k^{-1} = \frac{19}{4} \Leftrightarrow k = \frac{4}{19} \approx 0{,}21$$
8. On réécrit simplement l'équilibre de la question 7 :
$$\frac{4}{15}k_1^{-\frac{2}{3}} = \frac{k_1^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2}-k_1} \Leftrightarrow k_1 = \frac{4}{38} \approx 0{,}11$$
9. $\tilde{r}_t - \rho_{t+1}$ désigne un écart de taux, un spread entre le taux auquel on devrait théoriquement prêter à l'entreprise à l'équilibre, et qui devrait être proportionnel à la productivité marginale du capital ρ_{t+1}, et le taux effectif pratiqué. En théorie, à l'équilibre, on devrait avoir $r_t = \rho_{t+1}$; ce n'est pas le cas empiriquement à cause de l'aléa moral : le prêteur ne sait pas si l'entreprise est honnête et s'engage vraiment à rembourser à terme ; il va donc pratiquer un taux plus élevé que le taux optimal.

10. Puisque a_t est un choc exogène, il est corrélé positivement à l'activité économique ; s_t est donc corrélée négativement à l'activité économique ; c'est un paramètre contracyclique. *s* est en effet une mesure du spread qui sépare le taux optimal du taux pratiqué sur le marché ; c'est un indice du niveau de l'aléa moral. En situation de crise, le *spread* de taux s'élargit parce que la confiance est érodée ; les agents les moins solvables ne trouvent plus personne pour les financer.

11. Le banquier propose un taux $(1+r_t)(1+s_t)$, et l'entrepreneur va donc produire jusqu'à ce que la productivité marginale soit égale à ce taux :

$$(1+r_t)\ (1+s_t) = \rho_t = \alpha a_{t+1} k_t^{\alpha-1}$$

Le nouvel équilibre sera :

$$\frac{4}{15} k_1^{-\frac{2}{3}} = \frac{k_1^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2} - k_1}(1+s_t) \Leftrightarrow \frac{4}{15} k_t^{-\frac{2}{3}} = \frac{k_t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{2} - k_t}\frac{3}{2} \Leftrightarrow k_t = \frac{4}{53} \approx 0{,}075$$

En présence d'un *spread* de taux dû à l'aléa moral, le choc réel négatif a des effets négatifs encore plus violents sur l'investissement. On retrouve l'intuition, chère aux Keynésiens comme H. Minsky ou C. Kindleberger, que le système financier joue en rôle déstabilisateur et accentue les oscillations du cycle économique.

1.15. La transmission de la politique monétaire (partie I) – Un modèle en temps continu

On propose ici une version très abrégée du modèle de transmission de la politique monétaire d'O. Blanchard[1]. L'idée en est la suivante : les agents prennent leur décision vis-à-vis de la politique monétaire, non par rapport au taux d'intérêt nominal, mais par rapport au taux effectif, qui est relatif au *q* de Tobin :

1. Rappelez ce qu'est le *q* de Tobin. Quelle est l'interprétation économique du *q* marginal, la dérivée du *q*.
2. Rappelez ce qu'est un facteur d'escompte. Donnez la forme canonique de ce terme dans les modèles à temps discret. Si l'on rajoute une période de temps discret, par combien est multiplié le facteur d'escompte ? Trouvez un équivalent mathématique de ce multiple pour des valeurs très faibles du taux d'intérêt de marché.

   Le modèle qu'on présente ici n'est pas en temps discret (avec une suite de périodes distinctes) mais en temps continu. On note r_t le taux d'intérêt instantané au moment *t*.

   Ce modèle comporte des équations différentielles, des équations qui prennent des fonctions pour inconnues. Elles expriment le plus souvent une relation entre une fonction et sa dérivée (sachant que

1. Olivier J. Blanchard (1981), "Output, the Stock Market, and Interest Rates", The American Economic Review, Vol. 71, No. 1 (Mar., 1981), pp. 132-143.

par convention, on note souvent la dérivée par le temps avec un point supérieur). Sa forme la plus élémentaire est l'équation linéaire simple. Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, et a une application d'un intervalle I et $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui prend le temps continu comme inconnue. On cherche à déterminer y à partir du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}_t = a(t)y_t \\ (y \mid t = t_0) = y_0 \end{cases}$$

On admettra que ce système admet une solution unique y définie sur I, pour tout t, ainsi :

$$y_t = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right) y_0$$

On note ici $\beta_{t,s}$ le facteur d'escompte entre les instants t et s ; il répond au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\beta}_{t,s} = r_t \beta_{t,s} \\ (\beta \mid t = s) = \beta_0 \end{cases}$$

3. Que vaut β_0 ? Déduisez-en la forme de $\beta_{t,s}$.

Le q de Tobin est donné en temps continu par la formule suivante :

$$q_t = \int_t^{+\infty} \beta_{t,s} m_{t,s}\,ds$$

4. Pourquoi le q prend-il la forme d'une intégrale ? Que représente le terme $m_{t_0,t}$ sachant qu'il est défini par le système suivant, où δ est le taux de dépréciation du capital :

$$\begin{cases} \dot{m}_{t,s} = -\delta m_{t,s} \\ (m \mid t = s) = m_0 \end{cases}$$

5. Dérivez l'équation donnée après la question 3.

6. Réécrivez le résultat de la question 5., dans l'hypothèse où $\dot{q}_t = 0$. Interprétez.

1.15. Correction

1. Au sens le plus général, le q de Tobin est le quotient de la valeur boursière d'une firme sur le coût de renouvellement du capital. Mettons qu'une firme soit entièrement automatisée et comporte cent machines ; le q consistera à prendre la valeur boursière et à la diviser par ce que coûterait l'achat des cent mêmes machines auprès des fournisseurs. Le q marginal désigne ainsi le surplus de valeur boursière résultant d'un investissement marginal, par rapport au prix de cet investissement.

2. Le facteur d'escompte est, dans les modèles de revenu permanent, le réel par lequel on multiplie un revenu futur pour obtenir sa valeur actualisée. Dans la plupart des modèles à temps discret, il est modélisé comme une série géométrique :

$$\beta_n = \left(\frac{1}{1+r}\right)^n$$

   Où r est le taux d'intérêt du marché ; ainsi je peux dépenser aujourd'hui mon revenu de demain, mais à condition d'emprunter et de payer les intérêts de ce prêt, ce qui ne me laissera du revenu de demain qu'une proportion $\frac{1}{1+r}$.
   Pour passer du facteur d'escompte entre t_0 et t et le facteur d'escompte entre t_0 et $t+1$, on multiplie donc par $\frac{1}{1+r}$ dont l'équivalent mathématique, quand r tend vers 0, est $1-r$.

3. β_0 est le facteur d'escompte en l'absence de décalage temporel ; le revenu que je gagne aujourd'hui n'est affecté d'aucune pénalité de préférence temporelle, et ainsi $\beta_0 = 1$. On en déduit que :

$$\beta_{t,s} = \exp\left(\int_s^t r(u)\,du\right) = \exp\left(-\int_t^s r(u)\,du\right)$$

4. Le terme qui est intégré ici est en réalité le q marginal de Tobin. $m_{t_0,t}$ donne la profitabilité anticipée en t d'un investissement marginal réalisé à l'instant t_0 ; le terme m décrit simplement l'évolution de la valeur du capital, qui se déprécie de manière continue au taux δ. Le facteur d'escompte β donne l'inverse de l'évolution des taux d'intérêt ; multiplier les deux termes, c'est obtenir l'évolution marginale du capital rapportée à celle des taux d'intérêt ; c'est répondre à la question : « Quel surplus marginal de valeur boursière résultera d'un investissement marginal qu'il faudra rembourser au taux r ? ».

5. $$\frac{\partial q_t}{\partial t} = \lim_{\nu\to+\infty}\left[\beta_{t,s} m_{t,s}\right]_t^\nu = \lim_{\nu\to+\infty}\left(\beta_{t,\nu} m_{t,\nu} - \beta_{t,t} m_{t,t}\right)$$

   L'idée est alors de remarquer que $\beta_{t_0,t_0} = \beta_0 = 1$; c'est le facteur d'escompte quand il n'y a pas de distance temporelle.

Par ailleurs, on peut s'essayer à dériver le terme $\beta_{t,\nu}m_{t,\nu}$ par le temps :

$$\frac{\partial \beta_{t,\nu}m_{t,\nu}}{\partial \nu} = \frac{\partial \beta_{t,\nu}}{\partial \nu} m_{t,\nu} + \frac{\partial m_{t,\nu}}{\partial \nu} \beta_{t,\nu}$$

Les dérivées sont données par l'énoncé et on peut réécrire :

$$\frac{\partial \beta_{t,\nu}m_{t,\nu}}{\partial \nu} = r_t \beta_{t,\nu}m_{t,\nu} - \delta \beta_{t,\nu}m_{t,\nu}$$

On en tire :

$$\beta_{t,\nu}m_{t,\nu} = \int_t^{+\infty} (r_t + \delta)(\beta_{t,\nu}m_{t,\nu})\, d\nu = q_t (r_t - \delta)$$

In fine, on obtiendra donc :

$$\frac{\partial q_t}{\partial t} = q_t (r_t - \delta) - m_{t,t} = \left(\int_t^{+\infty} \beta_{t,s}m_{t,s}\, ds\right)(r_t - \delta) - m_{t,t}$$

6. Dans l'hypothèse où $\frac{\partial q_t}{\partial t} = 0$, on a :

$$q_t = \frac{m_{t,t}}{(r_t - \delta)}$$

Si $\frac{\partial q_t}{\partial t} = 0$, le q de Tobin ne varie pas. La valeur boursière rapportée au coût du capital, le q, est stable lorsqu'elle est égale au quotient du profit d'un investissement immédiat $m_{t,t}$ sur la différence entre le taux r et la dépréciation du capital δ. On conçoit mieux encore le mécanisme en réécrivant l'égalité ainsi :

$$q_t (r_t - \delta) = m_{t,t}$$

Si les propriétaires de la firme vendaient toutes leurs actions, et plaçaient l'argent sur le marché au taux r_t (minoré de la dépréciation du capital), ils gagneraient $q_t(r_t - \delta)$; s'ils gardaient leurs actions, ils gagneraient $m_{t,t}$. L'égalité garantit la stabilité du q.

1.16. La transmission de la politique monétaire (partie II) – Le diagramme de phases

On essaye ici de construire une forme dynamique de la courbe I.S. en y intégrant le q de Tobin. On se donne d'abord une fonction de dépenses :

$$D_t = \alpha q_t + \Omega y_t + g_t,\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \beta \in [0,1]$$

1. Interprétez chaque terme de la relation ;

   Le revenu total obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{y}_t = \gamma(D_t - y_t) = \gamma(\alpha q_t + g_t - (1 - \Omega) y_t),\ \gamma \in \mathbb{R}_+^* \\ (y_t \mid t = t_0) = y_0 \end{cases}$$

2. Quel sera le signe du terme $(1-\Omega)y_t$? Le fait que ce terme soit retranché à la croissance transcrit un célèbre argument de Keynes : lequel ?

On se place dans le court terme, dans un cadre keynésien où les prix sont fixes. On suppose que le q de Tobin répond à l'égalité suivante, qui transcrit l'équilibre sur les marchés boursiers ($\dot{q}_a$ est le q marginal tel qu'anticipé par les investisseurs) :

$$\dot{q}_{a,t} = \eta y_t + \theta q_t - m_t, \eta \in \mathbb{R}_+^*, \theta \in \mathbb{R}_+$$

3. Pourquoi cet équilibre implique-t-il une relation positive entre le q marginal et y_t, positive aussi entre le q marginal et le q, mais négative avec m_t, la masse monétaire ? Souvenez-vous que nous sommes dans un modèle dérivé de IS-LM.

On paramétre ainsi : $\gamma = 1$, $\alpha = 2, \Omega = 1$, $\eta = 2$ et $\theta = 3$; on suppose pour l'instant que la politique monétaire est inexistante, tout comme la politique budgétaire ; le système se réduit ainsi à :

$$\begin{cases} \dot{y}_t = 2q_t \\ \dot{q}_{a,t} = 2y_t + 3q_t \end{cases}$$

4. Tracez un plan cartésien prenant y_t pour repère des abscisses et q_t pour repère des ordonnées. Vous représenterez les égalités $\dot{y}_t = 0$ et $\dot{q}_{a,t} = 0$. Le croisement de ces deux points représente un état statique où il n'y a ni croissance ni mouvement sur les marchés bancaires.

On note $X_t = (y_t, q_t)$ et on peut écrire une équation différentielle :

$$\begin{cases} \dot{X}_t = HX_t \\ (X \mid t = t_0) = X_0 = (y_0, q_0) \end{cases}$$

Où H est une matrice que l'on construit ainsi :

$$H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{y}_t}{\partial y_t} & \dfrac{\partial \dot{y}_t}{\partial q_t} \\[2ex] \dfrac{\partial \dot{q}_{a,t}}{\partial y_t} & \dfrac{\partial \dot{q}_{a,t}}{\partial q_t} \end{pmatrix}$$

5. Donnez la valeur des coefficients de H puis diagonalisez cette matrice. Vous trouverez deux valeurs propres λ_1 et λ_2 ainsi que deux vecteurs propres. En prenant une matrice 2×2 nulle et en rajoutant sur la diagonale ces deux coefficients : $\exp(\lambda_1 \times t)$ et

$\exp(\lambda_2 \times t)$, vous formerez la matrice M ; en mettant côte à côte les deux vecteurs propres, vous formerez la matrice P. Vous admettrez enfin que la seule solution du problème ci-dessus peut se formuler ainsi :

$$X_t = PMP^{-1}X_0$$

Si le vecteur $X_0 = \left(y_0, q_0\right)$ décrit la situation de l'économie à l'instant $t = 0$, $X_t = \left(y_t, q_t\right)$ donne sa position à l'instant t. On a représenté ci-dessous, à partir de la forme trouvée à la question 5., la trajectoire de l'économie à partir de 8 points initiaux différents.

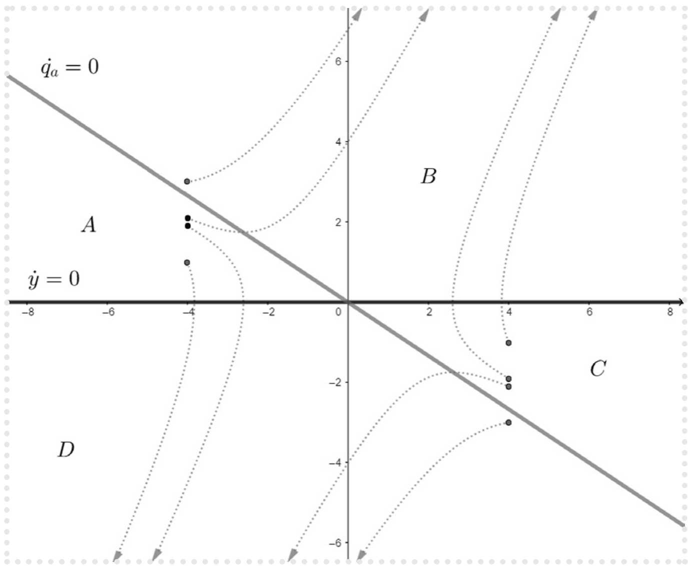

Figure 4.3.

On a divisé le plan, grâce aux deux droites $\dot{q}_a = 0$ et $\dot{y} = 0$, en quatre parties A, B, C et D.

6. Que pouvez-vous dire du mouvement de l'économie dans chacune de ces parties ? Interprétez notamment les trajectoires qui partent des points noircis.

Toutes les trajectoires présentées sur le graphe précédent sont explosives ; elles divergent vers des niveaux infinis de q et y quand t tend vers $+\infty$. Il existe cependant un ensemble de points en partant desquels l'économie tend, quand t tend vers $+\infty$, vers l'équilibre $\left(0,0\right)$. Ces points forment le sentier-selle, très clairement visible sur le graphe suivant entre les deux droites :

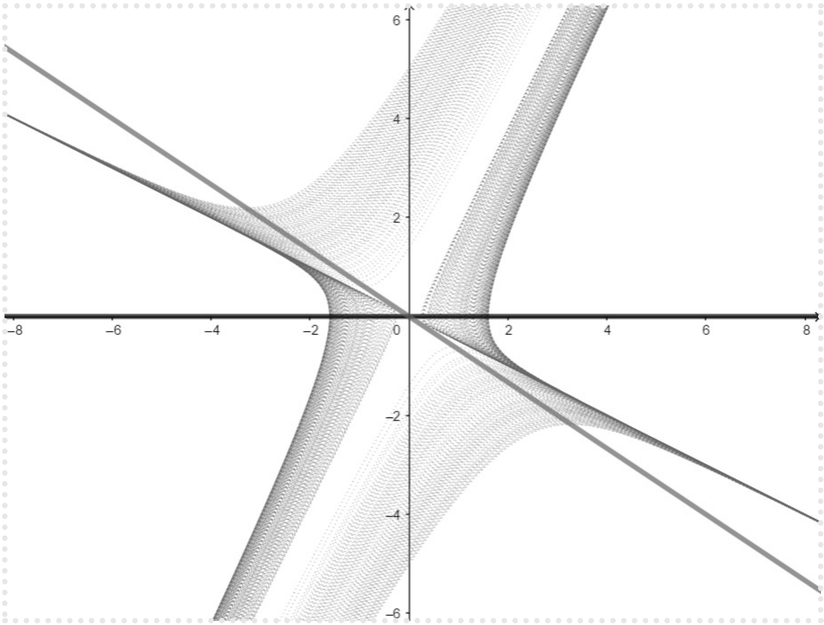

Figure 4.4.

7. Vous pouvez deviner la définition de l'ensemble de ces points à partir du graphe ci-dessus, ou revenir à la question 5., et donnez une solution plus rigoureuse à cette question.

On suppose que l'économie se situe a priori au point $X_0 = \left(y_0, q_0\right) = \left(-2,1\right)$.

La B.C. mène une politique monétaire expansionniste, et augmente l'offre de monnaie à $m_t = 3$. Le système se résout alors aux deux équations :

$$\begin{cases} \dot{y}_t = 2q_t \\ \dot{q}_{a,t} = 2y_t + 3q_t - 3 \end{cases}$$

8. Tracez la nouvelle courbe $\dot{q}_a = 0$;

9. Que se passe-t-il au moment où la B.C. annonce la mesure d'expansion monétaire ? Comment l'économie revient-elle à l'équilibre stationnaire à terme ?

Rappels

A. Diagonalisation d'une matrice 2×2 :

Soit une matrice A à coefficients réels ayant deux lignes et deux colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Son déterminant, noté det *A*, est donné par la formule :

$$\det A = ad - cb$$

Diagonaliser une matrice, c'est résoudre le polynôme défini ainsi :

$$\det\left(A - \lambda I_d\right) = \det\left(\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\right) = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$$

On cherche simplement les valeurs de λ pour lesquelles ce polynôme vaut 0. Ces valeurs sont appelées les valeurs propres de *A*.

On appelle vecteurs propres les vecteurs-colonnes (comportant ici deux lignes) *X* qui répondent à la condition suivante :

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \times X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

B. Inverse d'une matrice :

Reprenons la même matrice *A* ; son inverse, noté A^{-1}, est donné par :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.16. Correction

1. La dépense totale est fonction du q de Tobin (les ménages sont actionnaires ; quand la valeur de marché augmente, leur revenu augmente), du revenu total y et des dépenses publiques g.
2. Il s'agit du paradoxe de l'épargne : il va de soi que Ω désigne la part du revenu qui est consommée, et $1 - \Omega$ celle qui est épargnée ; or pour Keynes, on le sait, tout ce qui est épargné est retranché au circuit économique et à la croissance.
3. Dans ce modèle simplifié, les agents ont le choix sur les marchés financiers entre prêter à une firme au taux r ou acheter une action dont les dividendes sont proportionnels au q marginal. L'équilibre sur le marché boursier implique une relation positive, encore indéterminée, entre r et le ratio $\frac{\dot{q}_a}{q}$.

   Or dans un modèle d'inspiration keynésien, le taux est déterminé à court terme, dans la courbe LM, positivement par le revenu, et négativement par l'offre de monnaie B.C.
4. Voir le schéma plus bas.
5. Après calcul des dérivées partielles, on obtient :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

On diagonalise en cherchant le déterminant de la matrice :

$$H-\lambda I_d=\begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Pour une matrice 2×2 , ce déterminant est simplement donné par la forme :

$$\det\left(H-\lambda I_d\right)=-\lambda\left(3-\lambda\right)-4$$

Les valeurs propres sont celles pour lesquelles :

$$\det\left(H-\lambda I_d\right)=0 \Leftrightarrow -\lambda\left(3-\lambda\right)=4$$

On reconnaît $\lambda_1=-1$ et $\lambda_2=4$ comme valeurs propres évidentes. On a ainsi :

$$M=\begin{pmatrix} \exp\left(-t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(4t\right) \end{pmatrix}$$

On cherche les sous-espaces propres ; un vecteur quelconque $\left(a,b\right)$ en fait partie si et seulement si :

$$\left(H-\lambda I_d\right)\times\left(a,b\right)=0$$

Pour $\lambda_1=-1$, le problème se résout à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\times\left(a,b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ 2a+4b=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=-2b$$

On en conclut que :

$$E_{\lambda_1}=Vect\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Pour $\lambda_1=4$, le problème se résout à :

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\times\left(a,b\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4a+2b=0 \\ 2a-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow 2a=b$$

On en conclut que :

$$E_{\lambda_2}=Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

En associant les deux vecteurs propres, on obtient la matrice $P=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On calcule son inverse P^{-1} avec la formule donnée par les rappels :

$$P^{-1}=\frac{1}{-2\times 2-1\times 1}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

La solution au problème initial est ainsi de la forme :

$$X_t=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} \exp\left(-t\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(4t\right) \end{pmatrix}\times\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\times X_0$$

En faisant les produits les uns à la suite des autres, on obtient :

$$X_t=\begin{pmatrix} y_t \\ q_t \end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} y_0\left(4e^{-t}+e^{4t}\right)+q_0\left(-2e^{-t}+2e^{4t}\right) \\ y_0\left(-2e^{-t}+2e^{4t}\right)+q_0\left(e^{-t}+4e^{4t}\right) \end{pmatrix}$$

Ce qui signifie que si l'économie part à l'instant $t = 0$ du point (y_0, q_0), elle se trouvera à l'instant t en un point dont les coordonnées sont données par X_t.

6. Ce qui était intuitivement perceptible sur le graphe de l'énoncé devient plus clair si on représente les solutions X_t avec un champ de vecteurs :

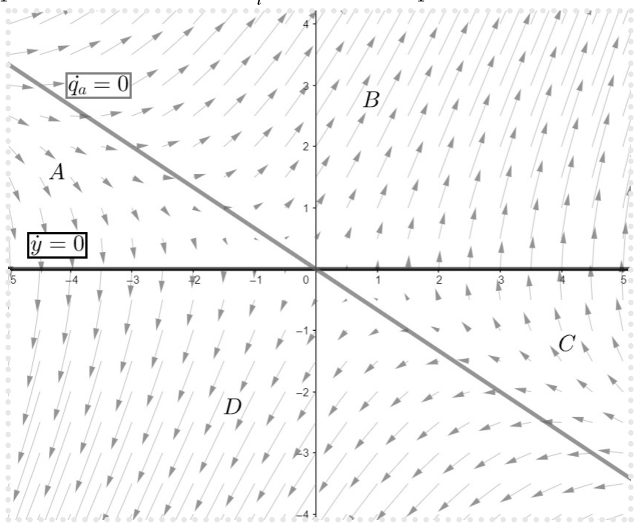

Figure 4.5.

Si on part d'un point au-dessus de droite $\dot{q}_a = 0$, l'économie se déplace vers le haut du plan, q augmente. Intuitivement, quand les agents anticipent une hausse des cours boursiers, ils placent leur argent en bourse et la bourse monte dès aujourd'hui (et inversement).

Si on part d'un point au-dessus de $\dot{y} = 0$, l'économie se déplace vers la droite du plan ; c'est là encore intuitif : quand la croissance est positive, le P.I.B. augmente et inversement.

D'où les quatre combinaisons du diagramme de phases, représentées par les grandes flèches noires sur la figure ci-dessous :

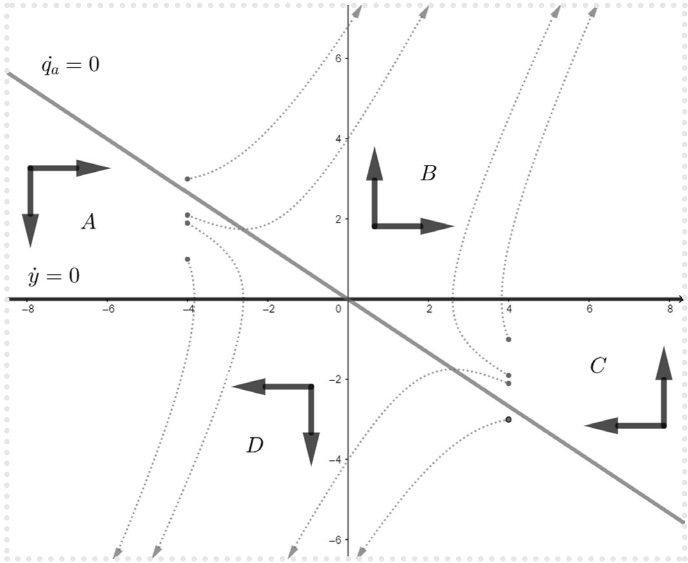

Figure 4.6.

Si on part du point noir supérieur, on se trouve ab initio dans une situation où la croissance est positive, mais où les investisseurs sont pessimistes sur l'avenir du marché. Les cours de bourse baissent légèrement, mais le P.I.B. augmente nettement, jusqu'au point où l'on intercepte la droite $\dot{q}_a = 0$; la croissance positive rassure les investisseurs, et l'économie s'engage sur un chemin de croissance financière et réelle.

Inversement, au point noir inférieur, le pessimisme des investisseurs est tel que les cours de bourse reculent au point de créer une crise de l'économie réelle ; on passe en dessous de la droite $\dot{y} = 0$ et l'économie s'engage dans la déflation.

7. On devine sur le graphe que le sentier-selle est défini par la droite : $q_0 = -\frac{y_0}{2}$.
On retrouve cette solution en part de :

$$X_t = \begin{pmatrix} y_t \\ q_t \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} y_0\left(4e^{-t} + e^{4t}\right) + q_0\left(-2e^{-t} + 2e^{4t}\right) \\ y_0\left(-2e^{-t} + 2e^{4t}\right) + q_0\left(e^{-t} + 4e^{4t}\right) \end{pmatrix}$$

On a :

$$\lim_{t \to +\infty} X_t = \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{5}\left(\left(y_0 + 2q_0\right)e^{4t}, 2\left(y_0 + 2q_0\right)e^{4t}\right)$$

Il ne peut y a voir convergence vers $(0,0)$ de ce terme que si l'on fixe a priori $q_0 = -\frac{y_0}{2}$.

8. La seconde équation du système $\dot{q}_{a,t} = 2y_t + 3q_t - 3$ définit, on l'a vu, un équilibre sur les marchés boursiers. Quand l'offre de monnaie augmente, le taux d'intérêt baisse ; entre prêter au taux *r* et acheter des actions en bourse, les agents choisissent la seconde option, et tout le monde se rue sur les titres de bourse, qui connaissent une hausse instantanée. Les investisseurs rationnels cesseront d'acheter quand

l'économie interceptera le nouveau sentier-selle ; on passe ainsi du point 1 au point 2 ; à terme, la croissance revenue grâce à la politique monétaire ramène l'économie à l'équilibre stationnaire, au point 3.

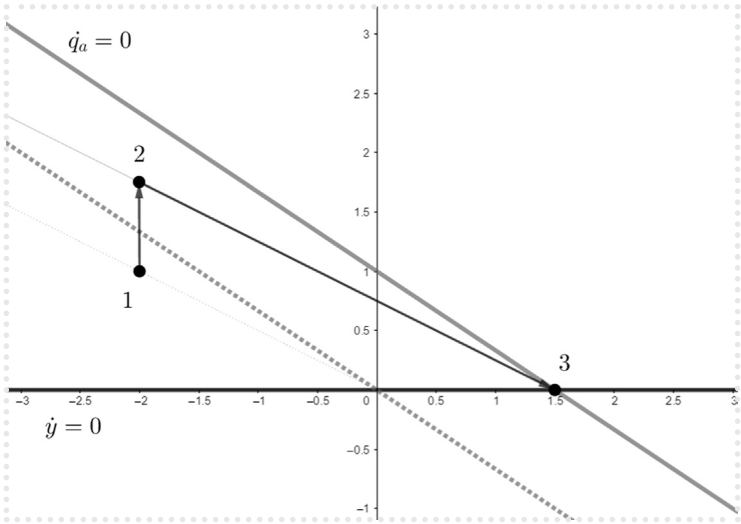

Figure 4.7.