Exercices de microéconomie

2.0. Questions de cours

1. $\epsilon > 0$ est l'élasticité-prix de la consommation du bien x. Si les prix baissent de 4 %, comment varie la consommation de x ?
2. La consommation du bien x est liée au prix de x, noté p, par une fonction $x = f(p) = 3p^{-\frac{1}{2}}$. Donnez l'expression formelle de l'élasticité, puis calculez-là.
3. Si la fonction de production s'écrit $f(K, L) = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, quelle est l'équation qui donne la courbe d'isoquante pour une production totale égale à 6 ?
4. Calculez le taux marginal de substitution technique pour la fonction de production de la question 3.
5. Des deux régimes productifs suivants – taylorien et fordien – l'un a pour principe le paiement à la pièce, l'autre le salaire unique ; lequel ?

6. Soit une Frontière des possibilités de production pour deux biens *X* et *Y* ; on la modélise comme une fonction prenant *X* pour variable. Sa dérivée par *X* est-elle décroissante en valeur absolue si les deux firmes font des économies d'échelle et croissante en valeur absolue si elles font des déséconomies d'échelle, ou est-ce le contraire ?
7. Quel est le nom canonique du principal problème qui structure la relation entre actionnaires et managers telle que la décrivent Berle et Means ?
8. Si on suit le modèle market for lemons de G. Akerlof, en cas de panique financière due à une hausse brutale de l'aversion au risque, quels sont les titres qui disparaîtront immédiatement du marché ?
9. Écrivez une fonction de production de Cobb-Douglas, sans progrès technique, où le capital compte pour 50 %, le travail 50 %, et avec un paramètre d'échelle de 1,5. Trouvez la productivité marginale du travail.
10. On cherche à déterminer la figure la plus emblématique de l'histoire du rock entre ces quatre noms : Kurt Cobain, Jim Morrison, John Lennon, John Bonham. Qui sera choisi si le choix incombe à un panel de journalistes spécialistes de musique ? Qui devriez-vous choisir dans un Keynesian beauty contest ?
11. Sur la figure suivante, représentant une boîte d'Edgeworth pour deux agents *A* et *B*, les courbes d'indifférence de *A* sont-elles grises ou noires ? Si la répartition initiale des deux biens est fixée au point *X*, où se situent les points qui désignent les allocations Pareto-améliorantes ?

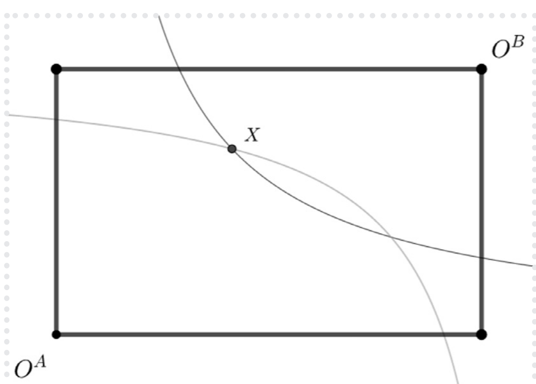

Figure 4.8.

12. Soit un jeu très simple à deux joueurs. Chaque individu joue à son tour ; s'il choisit de continuer le jeu, il perd 1 euros, mais l'autre en gagne 2. S'il refuse de continuer, chacun reprend sa mise et le jeu prend fin. La mise initiale est (1,1). Quel est l'équilibre de Nash si le jeu comporte un nombre fini de tours ?

13. Si l'offre d'un bien est très inélastique, et sa demande très élastique, qui paiera une taxe sur le bien ?

14. Quel concept mathématique sépare l'école classique du néoclassicisme ?

15. Quelle est la différence entre et néoclassicisme et nouveau classicisme ?

16. Attribuez à chaque économiste l'école à laquelle on le raccroche canoniquement parmi ces trois choix : marginaliste, classique, nouveau classique : Marx, Sargent, Menger, Walras, Lucas, Ricardo, Smith, Prescott.

17. Rappelez la fonction de profit canonique.

18. Distinguez ces quatre situations : monopole pur, concurrence monopolistique, oligopole de Cournot, oligopole de Bertrand.

19. Dans la théorie du monopsone de Joan Robinson, si l'État fixe un salaire minimum, quel sera l'effet sur le chômage et sur les prix.

20. Une fonction d'utilité est de la forme $U(x,y)=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}$. Calculez le taux marginal de substitution entre les biens x et y.

21. L'agent que nous considérons maintenant a la même fonction d'utilité qu'à la question précédente. Mais on prend ici une courbe d'indifférence parmi d'autres, celle qui est définie par l'égalité $y=16x^{-2}$. Calculez le taux marginal de substitution. Vérifiez que ce résultat est cohérent avec celui de la question 20.

22. Si on suit la théorie des coûts de transaction, une délégation de service public de type concession est-elle plus naturelle pour la gestion des postes ou pour la distribution d'eau ?

23. Quel est le sens du paramètre σ dans la fonction de production C.E.S. ? Comment appelle-t-on les fonctions C.E.S. pour lesquelles $\sigma=1$ et $\sigma=0$?

24. Une firme fait face à la fonction de demande suivante, qui prend le prix de vente *p* pour variable : $\exp(-3p)$ définie ici sur $\mathbb{R}_+^*$. Quelle est la dérivée partielle de cette fonction de demande en situation de concurrence monopolistique et en situation de concurrence pure et parfaite.

25. Quel est le nom d'un bien dont l'élasticité-prix (de la consommation) est positive ?

26. La firme subit un prix exogène fixé par le marché de 3. Son coût moyen est de 3,5, son coût marginal de 1,5. Que doit-elle faire ?

27. Soit le jeu suivant, appelé communément Selten's horse :

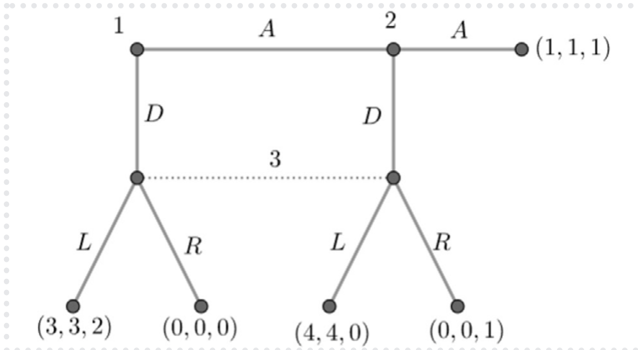

Figure 4.9.

En information parfaite, quels sont les équilibres de Nash ? Et en information imparfaite ?

28. Si l'élasticité prix de la demande augmente, est-ce une bonne nouvelle pour le monopoleur ?

29. Décrivez la logique des crises de change de deuxième génération.

30. Dans un dilemme du prisonnier répété à l'infini, si l'on suit la logique du Folk theorem, sur quels paramètres peut-on jouer pour faire de la coopération un équilibre de Nash ?

31. Un agent a une fonction d'utilité de la forme $U(x,y)$. Un changement A_x de la quantité consommée de x et A_y de la quantité consommée de y préserve le niveau d'utilité de l'agent si et seulement si :

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} A_x = \alpha \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} A_y$$

Donnez la valeur de α pour que la phrase précédente soit vraie.

32. Quelle différence voyez-vous entre la catallaxie autrichienne et l'équilibre walrasien ?

33. Optimisez la fonction $g(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $3x + y = 2$ (voir les rappels de l'exercice 2.4.)

2.0. Correction

1. Si les prix baissent de 4 %, la consommation de x baisse approximativement de 4ϵ %.
2. L'élasticité-point de la fonction : $x = f(p) = 3p^{-\frac{1}{2}}$ est donnée formellement par :

$$\frac{\partial \log(f(p))}{\partial \log(p)} = \frac{\partial f(p)}{\partial p}\frac{p}{f(p)} = \frac{f'(p)p}{f(p)} = \frac{-\frac{3}{2}p^{-\frac{3}{2}} \times p}{3p^{-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{2}$$

3. Si la fonction de production s'écrit $f\left(K,L\right)=K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$, l'équation qui donne la courbe d'isoquante pour une production totale égale à 6 est de la forme :

$$f\left(K,L\right)=6 \Leftrightarrow K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}=6 \Leftrightarrow K=216L^{-2}$$

4.

$$TMST_{K,L}=\left|-\frac{\dfrac{\partial f\left(K,L\right)}{\partial L}}{\dfrac{\partial f\left(K,L\right)}{\partial K}}\right|=\frac{\dfrac{2}{3}L^{-\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{3}}}{\dfrac{1}{3}L^{\frac{2}{3}}K^{\frac{-2}{3}}}=\frac{2K}{L}$$

5. Le modèle fordien est fondé sur des salaires globaux rigides indexés sur l'inflation ; le modèle taylorien relève encore de la paie à la pièce.
6. La dérivée par *X* de la F.P.P. est décroissante en valeur absolue si les deux firmes font des économies d'échelle et croissante en valeur absolue si elles font des déséconomies d'échelle, puisque, si les rendements sont croissants, la F.P.P. est convexe, et si les rendements sont décroissants, la F.P.P. est concave.
7. Au sens premier, c'est une relation d'aléa moral ; les actionnaires confient leur bien à un manager qui peut fort bien agir dans son intérêt et pas dans le leur. Jensen et Meckling ont nommé ce problème la relation d'agence.
8. Les titres les plus sécurisés, ceux qui sont de meilleure qualité.
9. Une fonction de Cobb-Douglas est de la forme

$$f\left(K,L\right)=A\left(K^{\alpha}L^{1-\alpha}\right)^{\omega}$$

Ici, l'énonce propose le paramètre $A=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $\omega=\frac{3}{2}$, d'où :

$$f\left(K,L\right)=K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{3}{4}}$$

La productivité marginale du travail est alors la dérivée partielle de f par le travail *L* :

$$P_m\left(L\right)=\frac{\partial f\left(K,L\right)}{\partial L}=\frac{3}{4}K^{\frac{3}{4}}L^{\frac{-1}{4}}$$

10. John Bonham / John Lennon
11. Les courbes d'indifférence de A sont noires. Les allocations Pareto-optimales sont tous les points situés dans la lentille que dessine le croisement des deux courbes d'indifférence, et dont le point *X* forme une des deux pointes. Puisque l'optimalité paretienne est définie graphiquement par la tangence entre les courbes d'indifférence, on conçoit qu'elle n'est atteinte que quand cette lentille est d'aire nulle.
12. On a vu que dans un jeu séquentiel, il faut représenter le jeu comme un arbre et partir des branches extérieures pour remonter les nœuds de décision. L'équilibre de Nash se détermine à rebours. Or on voit immédiatement ici qu'au dernier nœud du jeu, celui qui sera le dernier à jouer préférera nécessairement mettre

fin au jeu et empocher sa mise que de perdre 1 euro. Le même choix est fait par les deux joueurs à tous les autres nœuds ; on remonte ainsi l'arbre jusqu'au tout premier choix, et on en conclut que l'équilibre de Nash est celui où le premier à jouer met immédiatement fin au jeu.

13. Le producteur.

14. Le néoclassicisme, qui commence avec l'adoption du marginalisme à partir des années 1860, se distingue des classiques par l'adoption du raisonnement à la marge. Courbes d'utilité et de production sont supposées concaves, et l'équilibre de marché, axé sur le mécanisme des prix, est une égalité entre les rapports d'utilités marginales et les rapports de productivités marginales.

15. Le néoclassicisme est une méthode au sens large ; il a été fondé par l'école marginaliste, mais a été largement adopté depuis, aussi bien par les keynésiens que par les nouveaux classiques de Lucas et Sargent. Le refus de la méthode néoclassique est un trait distinctif des hétérodoxies, qu'elles soient de droite (l'école autrichienne) ou de gauche (postkeynésiens, marxistes, néo-ricardiens, écologistes…).
Le nouveau classicisme des années 1970-1980 est au contraire une école au sens propre, avec ses grands outils (le revenu permanent, les anticipations rationnelles), ses modèles (Real Business Cycle), ses recommandations politiques (stabilité de la politique monétaire…).

16. Lucas et Sargent sont les fondateurs de l'école des nouveaux classiques des années 1970, et Prescott l'un des grands représentants.
Walras et Menger sont des marginalistes.
Smith, Ricardo et Marx, sont les trois grands économistes dits classiques.

17. C'est la fonction $\Pi(Y) = Yp_v - C(Y)$ où Y donne la production et p_v le prix de vente.

18. Il n'y a que dans le monopole pur qu'il n'y a qu'un seul producteur. Toutes les autres situations sont oligopolistiques. L'oligopole de Bertrand détruit la concurrence par des restrictions concertées sur les quantités, l'oligopole de Cournot par des restrictions sur les prix, et la concurrence monopolistique par la différenciation des produits et les effets de marque.

19. Le salaire minimum empêche le patron de jouer l'armée de réserve (d'où une baisse du chômage) et l'oblige à rogner sur ses marges (d'où une baisse des prix).

20. Pour le calcul du taux marginal de substitution, le cours donne une formule toute faite :

$$TMS_{x,y} = \left| \frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} \right| = \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}y^{-\frac{3}{4}}x^{\frac{-1}{2}}} = \frac{2y}{x}$$

21. Les élèves qui sortent juste de terminale trouveront peut-être plus naturel de transformer l'équation $y = 16x^{-2}$ en une fonction $f(x) = 16x^{-2}$ (définie sur $\mathbb{R}_+^*$). Il suffit alors de la dériver pour obtenir :

$$T.M.S._{x,y} = \left| f'(x) \right| = \left| 16 \times -2 \times x^{-3} \right| = 32x^{-3}$$

À la question précédente, nous avions trouvé $TMS_{x,y} = \frac{2y}{x}$; puisque cette courbe d'indifférence spécifique est définie par $y = 16x^{-2}$, le TMS sur cette courbe est bien donné par $32x^{-3}$.

22. La distribution d'eau est un actif plus spécifique, qui peut causer plus de dommages au bien public en cas de rupture ou de défaut de service ; il semble plus naturel de la conserver en service public.

23. σ est l'élasticité de substitution entre les facteurs de production (travail et capital) ; elle est négative ; quand le prix relatif du travail augmente de 1 %, sa quantité relative dans le processus de augmente baisse de σ % (elle baisse donc en termes relatifs). Pour $\sigma = 1$, c'est une fonction de Cobb-Douglas, pour $\sigma \to 0$ une fonction de Leontief.

24. Le piège ici tient au fait qu'en concurrence pure et parfaite, une fonction de demande individuelle d'une firme n'est pas dérivable par son prix de vente. Une situation de concurrence parfaite suppose que, dès que la firme fixe son prix, ne serait-ce qu'un centime au-dessus du prix de marché, elle perd instantanément toute sa clientèle. Ce problème ne se pose pas en situation de monopole, où la dérivée peut se calculer directement :

$$-3\exp\left(-3p\right)$$

25. C'est soi un bien de Veblen (dont la consommation augmente avec le prix parce que le bien en question offre du cachet) soit un bien de Giffen (dont la consommation augmente parce que les autres denrées sont encore plus chères).

26. Le coût moyen étant supérieur au prix de marché, cette firme perd de l'argent. Elle doit augmenter sa production jusqu'à ce que son coût marginal soit égal au prix. En concurrence pure et parfaite, en supposant qu'elle a la même technologie que les autres firmes : $C_m = C_M = p$.

27. En information parfaite, les équilibres de Nash se retrouvent en remontant les points de décision ; il y en a deux : (D,A,L) et (A,A,R) – en notant dans l'ordre le choix des joueurs 1, 2 et 3.
En l'absence d'information, et notant par une minuscule la probabilité que chaque joueur choisisse chaque stratégie (avec un indice donnant le numéro du joueur si nécessaire), et μ la probabilité, dans l'esprit de 3, que le signal *D* lui vienne du joueur 1, on a :

- 2 joue D si $l > \frac{1}{4}$;
- 3 joue L si $\mu > \frac{1}{3}$;
- 1 joue D si $3l > 4d_2 l + \left(1 - d_2\right)$;

D'où :

- Si $l = 0$ (3 joue toujours *R*), 2 joue *A* et 1 de même (c'est l'un des équilibres de Nash séquentiels) ;
- Si 2 est convaincu que $l > \frac{1}{4}$, il jouera systématiquement *D*, 1 jouera donc systématiquement *A*, mais 3 jouera alors *R*, ce qui conduit à une contradiction ; il n'y a pas d'équilibre de Nash dans ce paramétrage ;

– Si $l \in \left]0,1/4\right]$, il en découle que $\mu = \frac{1}{3}$; on en déduit que 1 joue systématiquement A, et 2 de même ;

28. Si $\varepsilon_{y(p)}$ augmente, c'est une mauvaise nouvelle pour le monopole puisque sa marge est donnée par :

$$\mu = \left|\frac{1}{\varepsilon_{y(p)}}\right| = \left|\varepsilon_{p(y)}\right|$$

29. La première génération de crises de change, propre aux années 1960, s'adosse au mécanisme de dévaluation autorisée par le F.M.I. Si les investisseurs voient le déficit commercial d'un pays se creuser, ils anticipent une dévaluation, et vident immédiatement les réserves de change de la B.C.
La deuxième génération, propre aux années 1990, s'étaye sur le même mécanisme, si ce n'est qu'après 1980, la financiarisation rend inutiles les réserves de change ; seul compte la décision de la B.C. d'augmenter ou de baisser son taux directeur. En cas de déficit commercial élevé, les investisseurs parient alors contre une monnaie. Dans la PNCTI, quand la monnaie nationale baisse, l'équilibre de marché ne peut être maintenu que par une hausse des taux nationaux. Ces taux bancaires élevés dépriment l'économie, et forcent le gouvernement à dévaluer.
La troisième génération, propre aux années 2000, s'étaye sur la financiarisation des économies émergentes, dont les systèmes bancaires étaient souvent mal structurés.

30. On peut soit augmenter les gains de la coopération, soit attribuer aux agents une plus grande patience, c'est-à-dire un facteur d'escompte psychologique plus élevé, une moindre préférence pour le présent.

31. On reconnaît le rapport suivant :

$$\frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}} = TMS_{x,y}$$

Or on connaît l'interprétation du T.M.S. : c'est la quantité de y qu'il faut rajouter après une baisse de la quantité de x d'une unité pour maintenir U constante. Une variation des quantités respectives A_x et A_y laisse donc l'agent indifférent si :

$$TMS_{x,y} = -\frac{A_y}{A_x} \Leftrightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial x} A_x = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} A_y$$

32. Pour simplifier à l'extrême, les Autrichiens ont toujours été extrêmement hostiles à l'excès de formalisation mathématique des marginalistes comme Walras. Les équilibres spontanés sont toujours pour les Autrichiens le fruit d'un processus historique évolutionniste quasi-darwinien, quand Walras y voyait une pure mécanique des prix.

33. En ignorant l'argument de compacité et les contrôles conventionnels, on procède en écrivant la condition de Lagrange :

$$\mathcal{L}(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(3x + y - 2)$$

Le système à résoudre est ainsi :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2x - 3\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial y} = 2y - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = x = 3y \\ 3x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{5} \\ y = \dfrac{1}{5} \end{cases}$$

On vérifie facilement que le point obtenu, dont les coordonnées sont $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, est un minimum global sous la contrainte :

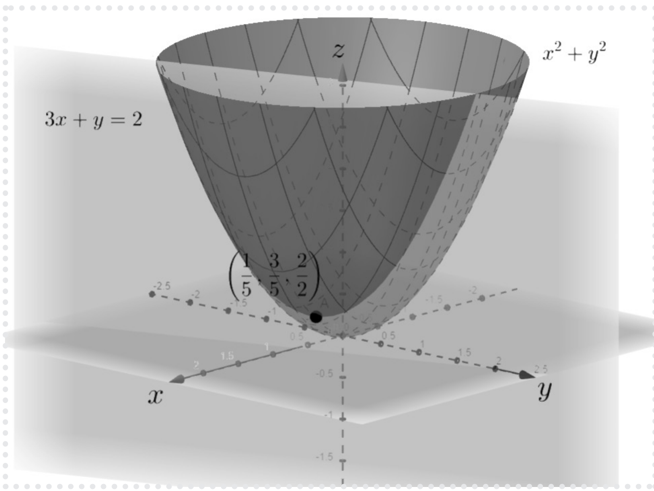

Figure 4.10.

2.1. Elasticité de substitution entre facteurs

On cherche ici à définir de manière plus précise le paramètre σ dans la fonction C.E.S.

1. Rappelez la fonction C.E.S. ; définissez tous ses paramètres et ses variables, et donnez l'interprétation du paramètre σ ainsi que le nom des fonctions de production pour chaque valeur de σ ;

On note $\dfrac{p_L}{p_K}$ le rapport des prix entre les deux facteurs (le travail L et le capital K).

La définition de σ est la suivante : elle est l'élasticité du rapport $\dfrac{L}{K}$ au rapport $\dfrac{p_L}{p_K}$.

2. En reprenant si besoin la définition d'une élasticité (2.2.1.), donnez la formule explicite de σ à partir de sa définition.

3. Que vaut le rapport $\frac{p_L}{p_K}$ si les entreprises maximisent leur profit ? Quel concept de microéconomie est usité pour désigner ce rapport ? Remplacez les valeurs obtenues dans la définition de σ trouvée à la question 2.

On considère une droite de régression entre deux variables A et B (vous pouvez vous aider de la section « Rappels » ci-dessous) ; β_0 et β_1 sont des coefficients réels, et ϵ un terme d'erreur qu'on peut ignorer ici :

$$B = \beta_0 + \beta_1 A + \epsilon$$

4. Que se passe-t-il dans ce modèle linéaire si la variable A augmente d'une unité ?

Appliquons ce modèle à notre paramètre σ. On dispose de données sur les prix des facteurs dans différents pays et sur les processus de production. Si nous représentons les données dont nous disposons dans un plan avec $\frac{p_L}{p_K}$ en abscisse et $\frac{L}{K}$ en ordonnée, elles formeront un nuage de points. On tente de tracer la droite de régression. On suppose qu'elle prend cette forme :

$$D = \beta_0 + \sigma C + \epsilon$$

5. On n'a pas spécifié ici les termes C et D ; à votre avis, en reprenant l'interprétation canonique d'une élasticité, par quoi faut-il remplacer ces termes pour que la droite de régression soit juste ?

Rappels

A. Régression linéaire

On présente ici rapidement la notion de *régression linéaire*. Supposons qu'un économètre dispose de données internationales sur deux variables : A et B. Il représente ces données dans un plan cartésien avec A en abscisse et B en ordonnée. Elles forment alors un nuage de points.

Faire une régression linéaire, c'est simplement tracer la droite de régression qui minimise le carré des distances entre la droite et chaque point de données. Imaginons que la droite de régression ait cette forme :

$$B = \beta_0 + \beta_1 A + \epsilon$$

Ici, β_0 est une constante, qui donne l'ordonnée du point auquel la droite de régression intercepte l'axe des ordonnées. ϵ est un terme d'erreur. β_1 est la pente de la droite de régression.

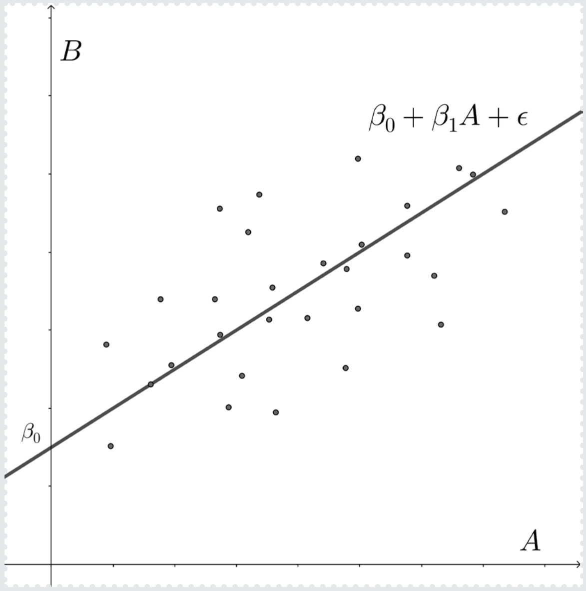

Figure 4.11.

Le coefficient β_1 tel qu'il est estimé par le modèle, et que l'on note $\widehat{\beta_1}$, est donné par la formule (admise) suivante :

$$\widehat{\beta_1} = \frac{Cov(A,B)}{V(A)}$$

$\widehat{\beta_1}$ s'interprète ainsi ; quand *A* augmente d'une unité, *B* augmente de $\widehat{\beta_1}$ unités (toutes choses égales par ailleurs[1]).

Où *V* désigne la variance, et *Cov* la covariance. La méthode la plus simple pour calculer la covariance est :

$$Cov(A,B) = E(AB) - E(A)E(B)$$

Nul n'est besoin de connaître parfaitement les méthodes statistiques pour comprendre les régressions que contiennent les articles d'économétrie les plus simples. Il suffit de vérifier trois paramètres :

- Le R^2 : c'est la part de la variance entre les valeurs qu'explique la droite de régression ;
- La *p*-valeur du test de Fisher (*F*-stat) ; c'est la probabilité qu'un modèle sans aucune variable explicative soit meilleur que le modèle utilisé par le chercheur ; par convention, si elle est supérieure à 5 %, le modèle est considéré comme non-viable ;

1. Cette locution, souvent citée sous sa forme latine, *ceteris paribus*, désigne tout simplement la nature idéelle des modèles de régression ; $\widehat{\beta_1}$ donne l'impact de *A* sur *B* en supposant que toutes les autres variables restent inchangées.

- La p-valeur du test de Student (t-stat) ; cette valeur est associée au coefficient $\widehat{\beta_1}$; c'est la probabilité que ce coefficient estimé soit nul ; si elle est supérieure à 5 %, on considère que l'impact de la variable *A* sur la variable *B* est statistiquement non-significatif.

Les articles contenant des régressions linéaires donnent le plus souvent les deux premiers paramètres de manière explicite. Quant aux coefficients (ici, il s'agit de $\widehat{\beta_1}$, mais il peut y en avoir plusieurs), ils sont présentés le plus souvent sous la forme d'un tableau qui donne leur valeur estimée. Quant à la p-valeur, elle peut être représentée de deux manières :

- Sous forme d'astérisques qui agrémentent le coefficient (deux astérisques si le coefficient est significatif à 5 %, une seule s'il l'est à 10 %, trois s'il l'est à 1 %) ;
- Par l'erreur-type (*standard error*) de chaque coefficient. Il n'est pas nécessaire de connaître le sens précis de cette statistique pour l'utiliser. Prenez la valeur estimée du coefficient ; divisez-là par l'erreur-type ; vous obtiendrez la t-stat (la statistique du test de Fischer) ; si elle est supérieure en valeur absolue à 1,96, la p-value est inférieure à 5 % et le coefficient est significatif ; si la t-stat est supérieure en valeur absolue à 2,58, le coefficient est significatif à 1 %.

2.1. Correction

1. La fonction C.E.S. s'énonce :

$$Y = f\left(K,L\right) = A\left(\alpha\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)+\left(1-\alpha\right)\left(L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)\right)^{\frac{\omega\sigma}{\sigma-1}}$$

Où les deux variables sont le travail L et le capital K ; A est un paramètre de technologie ; α donne la part du capital dans le processus de production ; ω est le terme d'économies d'échelle.

σ est l'élasticité de substitution entre facteurs ; quand le prix relatif d'un des facteurs augmente de 1 %, le patron fait baisser sa quantité relative de $-\sigma$ % dans le processus de production.

On parle de fonction linéaire quand $\sigma \to +\infty$, de fonction de Leontief quand $\sigma \to 0$ et de fonction de Cobb-Douglas quand $\sigma = 1$.

2. L'élasticité de substitution est la réponse du quotient quantité de travail sur quantité de capital à l'évolution des prix relatifs ; en reprenant la définition de l'élasticité donnée en (2.2.1.), on peut l'écrire :

$$\sigma = \frac{\partial \log\left(\frac{L}{K}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_L}{p_K}\right)} = \frac{\partial \frac{L}{K}}{\partial \frac{p_L}{p_K}} \frac{\frac{p_L}{p_K}}{\frac{L}{K}}$$

3. On a vu que lorsque le patron maximise son profit, et en supposant de plus que l'économie est à l'équilibre, le rapport des prix des facteurs s'établit au niveau du rapport des coûts marginaux et des productivités marginales, donc du T.M.S.T. :

$$\frac{p_L}{p_K} = \frac{C_m L}{C_m K} = \frac{P_m L}{P_m K} = \frac{\partial_L f(K,L)}{\partial_K f(K,L)} = T.M.S.T._{K,L}$$

D'où à l'équilibre :

$$\sigma = \frac{\partial \log\left(\frac{L}{K}\right)}{\partial \log\left(\frac{p_L}{p_K}\right)} = \frac{\partial \log\left(\frac{L}{K}\right)}{\partial \log\left(T.M.S.T._{K,L}\right)}$$

4. Si *A* augmente de 1, compte tenu de la forme du modèle linéaire, *B* doit augmenter de β_1.

5. On connaît l'interprétation canonique d'une élasticité ; celle de l'élasticité de substitution σ est la suivante : quand le rapport $\frac{p_L}{p_K}$ augmente de 1 %, le rapport $\frac{L}{K}$ augmente de σ %.
Or on utilise souvent la fonction logarithme pour transcrire une évolution en pourcentage. Le coefficient qui donne la pente d'une droite de régression β_1 vaut donc σ si la droite de régression prend pour variable $\log\left(\frac{p_L}{p_K}\right)$ et a pour image $\log\left(\frac{L}{K}\right)$:

$$\log\left(\frac{L}{K}\right) = \beta_0 + \sigma \log\left(\frac{p_L}{p_K}\right) + \epsilon$$

2.2. Fonction C.E.S. et fonction de Cobb-Douglas

La fonction de production néoclassique, dite C.E.S. est une application de $\mathbb{R}_+^2$ dans $\mathbb{R}_+$:

$$Y = f(K,L) = A\left(\alpha\left(K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right) + (1-\alpha)\left(L^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)\right)^{\frac{\omega\sigma}{\sigma-1}}$$

1. Rappelez le sens des paramètres *A*, α, σ et ω, ainsi que celui des deux variables ?

2. Comment interpréter le paramétrage $\omega = 1$ et $\sigma = 1$?

Si $\omega = 1$ et $\sigma = 1$, la fonction C.E.S. devient une fonction de Cobb-Douglas :

$$Y = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

On cherche maintenant à dériver cette forme de la formule initiale. Par économie, on note $\rho = \dfrac{\sigma - 1}{\sigma}$. On cherche à prouver que :

$$A\left(\alpha\left(K^{\rho}\right) + (1-\alpha)\left(L^{\rho}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} \underset{\rho \to 0}{\simeq} AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

3. Écrivez la fonction C.E.S. $f(K, L) = A\left(\alpha\left(K^{\rho}\right) + (1-\alpha)\left(L^{\rho}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}$ sous la forme $\exp\left(\ln(f)\right)$. Quel est l'intérêt de cette forme ?

4. On considère le terme $\alpha\left(K^{\rho}\right) + (1-\alpha)\left(L^{\rho}\right)$ et on le modélise comme une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $h(\rho) = \alpha\left(K^{\rho}\right) + (1-\alpha)\left(L^{\rho}\right)$. Donnez le développement limité de h à l'ordre 1 en 0 de cette fonction.

5. Réinjectez ce développement limité dans la forme trouvée à la question 3., et retrouvez la formulation canonique de la fonction de Cobb-Douglas

Rappels

A. Formule locale de Taylor-Young :

Soit f une fonction d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est $n-1$ fois dérivable, que $f^{(n)}$, la n-ième dérivée de f, existe. Alors f admet un développement limité à l'ordre n en a donné par :

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$
$$+ o\left((x-a)^n\right)$$

Le tout dernier terme de cette formule est introduit par un o qui désigne la négligeabilité ; vous pouvez ignorer ce terme pour les besoins de l'exercice.

B. Formule usuelle de dérivation :

Si b est un réel strictement positif, alors :

$$\left(b^{x}\right)' = \ln(b)\,b^{x}$$

C. Manipulations usuelles sur les fonctions logarithme :

$\ln(ab)=\ln(a)+\ln(b)$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln(a)-\ln(b)$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln(a)$	$\ln\left(a^b\right)=b\ln(a)$

D. Un équivalent usuel :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(x)$$

2.2. Correction

1. A est le terme de technologie, α la part du capital dans le processus de production, σ l'élasticité de substitution entre facteurs et ω le paramètre d'économies d'échelle. K est le capital, L le travail.
2. $\omega=1$ signifie que les rendements sont constants (quand on multiplie les deux facteurs par λ, la production est elle aussi multipliée par λ). $\sigma=1$ signifie que l'élasticité de substitution est égale à 1 ; quand le prix relatif d'un des facteurs augmente de 1 %, le producteur fait baisser sa part relative dans la production de $-\sigma$ %.
3. Face à application de la forme $g(x)=\alpha^x$ où la variable est en exposant, il est de convention d'appliquer la forme logarithmique pour faire tomber l'exposant : $g(x)=\exp\left(\ln\left(a^x\right)\right)=\exp\left(x\ln(a)\right)$. On applique cette méthode ici :

$$Y=A\left(\alpha\left(K^\rho\right)+(1-\alpha)\left(L^\rho\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} \Leftrightarrow A^{-1}Y=\exp\left(\frac{1}{\rho}\ln\left(\alpha\left(K^\rho\right)+(1-\alpha)\left(L^\rho\right)\right)\right)$$

4. On applique à l'intérieur du logarithme un développement limité à l'ordre 1 en prenant ρ comme inconnue :

$$\alpha\left(K^\rho\right)+(1-\alpha)\left(L^\rho\right)\underset{0}{\sim}\alpha K^0+(1-\alpha)L^0+\alpha\ln(K)K^0\rho+(1-\alpha)\ln(L)L^0\rho+o(\rho)$$

$$=1+\rho\ln\left(K^\alpha L^{1-\alpha}\right)+o(\rho)$$

5. On réinjecte ce développement limité à l'intérieur du logarithme

$$A^{-1}Y=\exp\left(\frac{1}{\rho}\ln\left(1+\rho\ln\left(K^\alpha L^{1-\alpha}\right)\right)\right)=\left(1+\rho\ln\left(K^\alpha L^{1-\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

L'idée est alors d'utiliser l'équivalent classique du rappel D., pour obtenir :

$$\left(1+\rho\ln\left(K^\alpha L^{1-\alpha}\right)\right)^{\frac{1}{\rho}} \underset{\frac{1}{\rho}\to+\infty}{\sim} K^\alpha L^{1-\alpha}$$

On retrouve alors la fonction de Cobb-Douglas :

$$Y=AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

2.3. T.M.S.T.

On part d'une fonction de Cobb-Douglas simplifiée :

$$f(K,L) = K^{\alpha}L^{1-\alpha}, \alpha \in [0,1]$$

Une courbe d'isoquante est définie par l'équation suivante :

$$K^{\alpha}L^{1-\alpha} = Y,\ Y \in \mathbb{R}_+, \alpha \in [0,1]$$

1. Transformez cette équation en fonction ψ ayant L pour variable

   On paramètre à présent pour désigner une courbe d'isoquante précise :

$$K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = 3$$

2. Représentez cette équation dans le plan d'abscisse L et d'ordonnée K. Vérifiez que le point $(3,3)$ appartient bien à cette équation et tracez la tangente en ce point ;
3. Transformez l'équation en fonction ϕ ayant L pour variable, comme sur le modèle de la question 1., puis donnez sa dérivée. Quelle est l'interprétation graphique de cette dérivée ?
4. Calculez la pente de cette tangente au point $(3,3)$; quelle est l'interprétation économique de la valeur absolue de ce nombre ?
5. Que vaut la dérivée pour $L = 2$ et pour $L = 4$? Comment la pente varie-t-elle en valeur absolue à mesure que la quantité de travail augmente ? Interprétez.
6. Le théorème des fonctions implicites (non énoncé), assure que la pente de la tangente à l'équation $f(K,L) = Y$ est donnée par :

$$-\frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}}$$

   Faites le calcul, puis paramétrez la fonction f avec les valeurs $K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ et vérifiez que vous obtenez, au point $(3,3)$ la même valeur de la dérivée qu'à la question 3.

Rappels

A. Dérivées partielles :

Faire la dérivée partielle d'une fonction par la variable x, c'est dérivée cette fonction en prenant x pour variable et en supposant que tous les autres termes (les constantes, mais aussi les autres variables) sont des constantes. Prenons une fonction de deux variables

$f(x,y)=x^2+y^2$. La dérivée partielle de f par x peut être notée de deux manières, et donne pour résultat :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\partial_x f(x,y)=2x$$

De même :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\partial_y f(x,y)=2y$$

2.3. Correction

1. Par transfert :

$$K^{\alpha}L^{1-\alpha}=Y \Leftrightarrow K=\left(\frac{Y}{L^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\psi : L \to \left(\frac{Y}{L^{1-\alpha}}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ Y\in\mathbb{R}_+, \alpha\in[0,1]$$

2. Le point $(3,3)$ appartient à l'équation puisque $3^{\frac{1}{3}}3^{\frac{2}{3}}=3$.
3. La fonction correspondante est :

$$K=\left(\frac{3}{L^{\frac{2}{3}}}\right)^{3}=27L^{-2}$$

$$\phi : L \to 27L^{-2}$$

$$\phi'(L)=-54L^{-3}$$

La dérivée de ϕ désigne simplement, graphiquement, la pente de la tangente à la fonction ϕ ou à l'équation $K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}=3$.

4.

$$\phi'(3)=-54(3)^{-3}=-2$$

La valeur absolue de ce nombre, 2, donne le T.M.S.T. On l'interprète ainsi ; quand l'entreprise produit avec 3 unités de capital et 3 de travail, pour pouvoir supprimer une unité de travail, tout en maintenant la production constante, il lui faut rajouter deux unités de capital.

5. Pour $L=2$:

$$\phi'(2)=-54(2)^{-3}=-\frac{27}{4}=-6{,}75$$

Pour $L = 4$:

$$\phi'(4) = -54(4)^{-3} = -\frac{27}{32} \approx -0{,}84$$

On voit que le T.M.S.T. décroît avec les quantités de travail. On le conçoit facilement avec l'exemple ricardien des terres ; quand il y a déjà trop d'ouvriers pour s'occuper d'une seule terre, on peut facilement maintenir la production constante en renvoyant un ouvrier et en augmentant marginalement la surface des terres. Au contraire, quand il y a trop peu d'ouvriers, se séparer d'un seul est un sacrifice qui a un coût élevé en termes de capital.

6. On applique la formule :

$$-\frac{\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}}{\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}} = \frac{(1-\alpha)L^{-\alpha}K^{\alpha}}{\alpha L^{1-\alpha}K^{\alpha-1}} = -\frac{K}{L}\frac{(1-\alpha)}{\alpha}$$

En choisissant $\alpha = \frac{1}{3}$, ce terme vaut :

$$-\frac{2K}{L}$$

On remarque alors qu'au point $(3,3)$, il vaut -2, qui est exactement la valeur trouvée à la question 3. Il s'agit en réalité de deux méthodes pour trouver la pente de la tangente. Celle de la question 6. exige le théorème des fonctions implicites qui n'est généralement pas vu en prépa ou en licence. Mieux vaut donc s'en remettre à la méthode de la question 3., en transformant l'équation en fonction pour pouvoir ensuite la dériver.

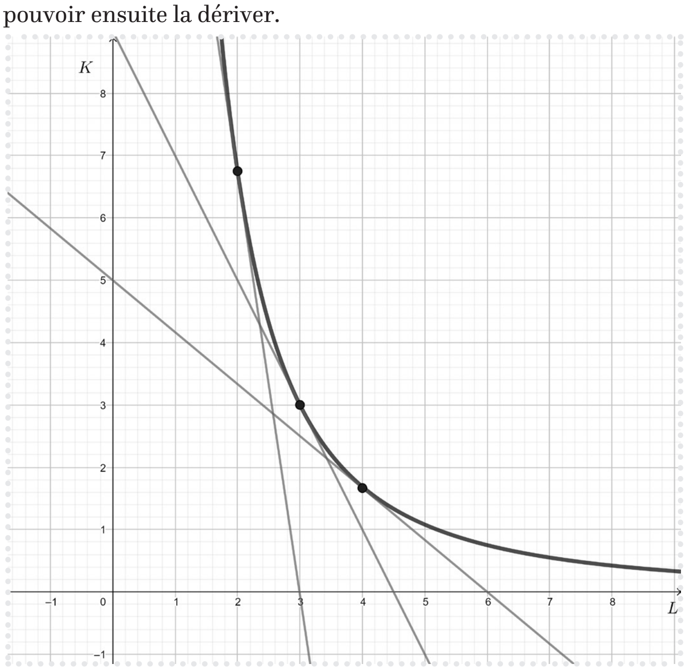

Figure 4.12.

2.4. Isoquante et isocoût en trois dimensions

Le prix unitaire du travail est 1 024, celui du capital 1 000 ; une firme a un budget de 7 680.

1. Écrire la droite d'isocoût ;

   La fonction de production est une fonction de Cobb-Douglas classique : $f\left(K,L\right)=K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$

2. Représentez graphiquement, en 3.D., la fonction de production. Comment tracer les isoquantes sur cette représentation ?

3. Optimisez la production sous la contrainte d'isocoût

Rappels

A. Optimisation sous contrainte d'une fonction de deux variables : Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; les dérivées partielles de $f\left(x,y\right)$ par chaque inconnue sont bien définies. Soit une contrainte de la forme $g\left(x,y\right)=c$ où *c* est un réel quelconque et *g* une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que les dérivées partielles de *g* par chaque variable sont bien définies et ne sont jamais nulles. Pour optimiser f sous la contrainte *g*, on écrit la condition de Lagrange, qui se présente comme une fonction :

$$\mathcal{L}\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)-\lambda\left(g\left(x,y\right)-c\right),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Si extremum local il y a, son antécédent répond au système suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathcal{L}\left(x,y,\lambda\right)}{\partial x}=0\\[2mm]\dfrac{\partial\mathcal{L}\left(x,y,\lambda\right)}{\partial y}=0\\[2mm]\dfrac{\partial\mathcal{L}\left(x,y,\lambda\right)}{\partial\lambda}=0\end{cases}$$

2.4. Correction

1. La droite d'isocoût s'écrit :

$$7680=1024L+1000K\Leftrightarrow K=-1{,}024L+7{,}68$$

2. La fonction Cobb-Douglas est une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; on la représente donc dans un plan où les axes sont L, K et Y :

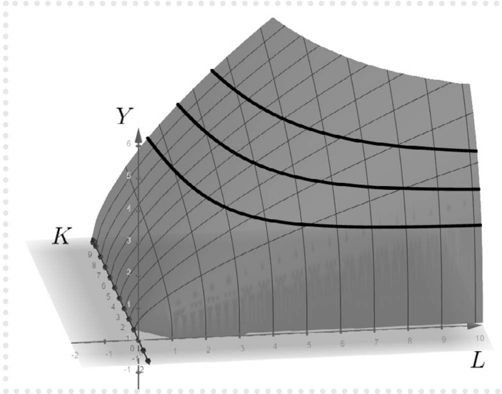

Figure 4.13.

Quant aux courbes d'isoquante, elles sont de la forme $K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = Y$ avec un Y fixé. Prenons par exemple $K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} = 5$. Dans la représentation 3.D., cette isoquante est donnée comme l'intersection de la courbe représentative de f et du plan d'équation $Y = 5$. Ici, nous avons tracé les courbes d'isoquante pour $f(K,L) = 3$, $f(K,L) = 4$ et $f(K,L) = 5$.

3. Le problème se résout à maximiser $f(K,L) = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}$ sous la contrainte $K = -1{,}024L + 7{,}68$, que l'on réécrit : $g(K,L) = K + 1{,}024L = 7{,}68$

La condition de Lagrange s'écrit : $\mathcal{L}(K,L,\lambda) = K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}} - \lambda(K + 1{,}024L - 7{,}68)$ et le système à résoudre prend donc la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,L,\lambda)}{\partial K} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}} - \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,L,\lambda)}{\partial L} = 0 \Leftrightarrow K^{\frac{1}{3}}\dfrac{2}{3}L^{\frac{-1}{3}} - 1{,}024\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}(K,L,\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow K + 1{,}024L = 7{,}68 \end{cases}$$

On résout en formant d'abord une égalité avec λ :

$$\lambda = \frac{1}{3}K^{\frac{-2}{3}}L^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{1{,}024}K^{\frac{1}{3}}\frac{2}{3}L^{\frac{-1}{3}} \Leftrightarrow \frac{1}{2}K^{-1}L = \frac{1}{1{,}024} \Leftrightarrow K = \frac{1{,}024L}{2}$$

On injecte ce résultat dans la troisième équation du système et on obtient :

$$\frac{1{,}024L}{2} + 1{,}024L = 7{,}68 \Leftrightarrow L = 5$$

On en déduit que l'optimum est atteint au point $(L^*, K^*) = (5\ ,\ 2.56)$.

En ce point d'optimum, la production vaut $f(2.56,\ 5) = (2.56)^{\frac{1}{3}}(5)^{\frac{2}{3}} = 4$.

Le point d'optimum se situe ainsi à la fois sur la droite d'isocoût, sur la courbe représentative de la fonction et par là-même sur la courbe d'isoquante de niveau $f(K,L)=4$

On remarque ainsi que le schème traditionnel isoquante-isocoût est une manière plus pratique de représenter l'arbitrage de maximisation, en 2.D. au lieu de la 3.D.

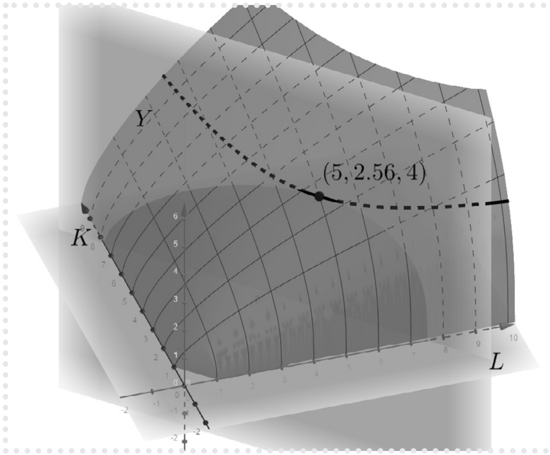

Figure 4.14.

2.5. L'entrée sur le marché d'une firme

La fonction de coût d'une firme est :

$$C(Y)=(Y-1)^3+2Y+5$$

1. Quel est le coût fixe de la firme ?
2. Quel est le coût marginal ?
3. Quel est le coût moyen ?
4. Calculez la dérivée de la fonction de coût moyen et la dérivée de la fonction de coût marginal.
5. À l'aide de la question 4., tracez le tableau de signe des fonctions de coût marginal et de coût moyen.

   Soit *p* le prix du bien produit.
6. Dans un équilibre ricardien concurrentiel, quel est le rapport de la firme au prix de marché ?
7. Écrivez l'équation de profit ; trouvez son optimum.
8. Que se passe-t-il si le prix de marché est 14 ? ou 3 ?
9. En C.P.P., où l'équilibre va-t-il s'établir ?

2.5. Correction

1. Le coût fixe est ce que doit payer la firme avant même de commencer à produire ; c'est donc $C(0)$:

$$C(0) = (0-1)^3 + 5 = 4$$

2. Le coût marginal est donné par la dérivée de C par Y:

$$C_m(Y) = C'(Y) = 3(Y-1)^2 + 2$$

3. Le coût moyen est donné par $\dfrac{C(Y)}{Y}$:

$$C_M(Y) = \frac{C(Y)}{Y} = \frac{(Y-1)^3 + 2Y + 5}{Y}$$

4. Les dérivées donnent :

$$C'_M(Y) = \frac{C_m(Y)Y - C(Y)}{Y} = \frac{Y\left(3(Y-1)^2 + 2\right) - \left((Y-1)^3 + 2Y + 5\right)}{Y} = \frac{2Y^3 - 3Y^2 - 4}{Y}$$

$$C'_m(Y) = 6(Y-1)$$

5. L'idée est de chercher ici les points pour lesquels la dérivée s'annule, qui sont les points critiques :

$$C'_m(Y) = 0 \Leftrightarrow Y = 1$$

$$C'_M(Y) = 0 \Leftrightarrow \frac{2Y^3 - 3Y^2 - 4}{Y^2} = 0 \Leftrightarrow 2Y^3 - 3Y^2 - 4 = 0$$

On reconnaît 2 comme une solution de cette égalité, et il suffit d'étudier la fonction $2Y^3 - 3Y^2 - 4$ pour voir que c'est l'unique solution. On peut alors tracer un tableau de signes :

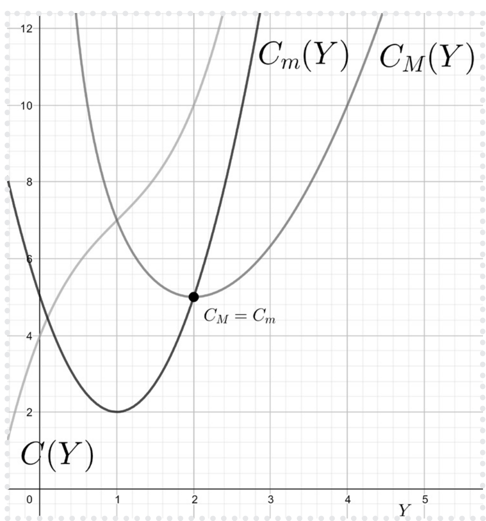

Figure 4.15.

6. En concurrence pure et parfaite, la firme est *price-taker* ; elle n'a pas d'influence sur le prix de marché.
7. La fonction de profit s'écrit :

$$\Pi(Y) = pY - C(Y) = pY - (Y-1)^3 - 2Y - 5$$

Si optimum il y a, c'est un point critique, qui répond aux conditions :

$$\Pi'(Y) = 0 \Leftrightarrow p = 3(Y-1)^2 + 2 \Leftrightarrow p = C_m(Y)$$

Sur $\mathbb{R}_+$, $\Pi'(Y)$ est positive si le coût marginal est inférieur au prix, négative sinon. L'optimum $p = C_m$ est donc un maximum local de profit sur $\mathbb{R}_+$.
On retrouve l'idée que la firme cesse de produire davantage dès que le coût marginal est égal au prix (si elle continuait, une unité de bien serait plus chère à produire que le prix de marché).
8. Si $p = 14$, la firme va produire jusqu'à ce que le coût marginal soit égal au prix ; soit ici $3(Y-1)^2 + 2 = 14 \Leftrightarrow Y = 3$ et son profit sera égal à $3p - C(3) = 23$.
Si $p = 3$, on peut vérifier facilement que la firme ne produira pas, puisque son profit sera négatif. On peut le voir sur le graphe lui-même. Si le prix est fixé à un niveau inférieur à la courbe de coût moyen (dont le minimum est ici 5), il n'y a aucun profit possible.
9. Imaginons que $p = 14$. En concurrence pure et parfaite, un concurrent peut facilement entrer sur le marché et proposer $p = 13$ pour attirer à lui tous les consommateurs. C'est un jeu de prédation classique. Quel est l'équilibre de Nash de ce jeu ? C'est le point où $C_m(Y) = C_M(Y)$ que nous avons calculé plus haut et dont les coordonnées sont $(2{,}5)$. En ce point, le profit est nul car :

$$\Pi(Y) = pY - C(Y) = pY - YC_M(Y) = Y(p - C_m(Y)) = 0$$

En C.P.P., il n'y a pas de profit. Ici, personne ne peut fixer un prix inférieur à 5 de peur de perdre de l'argent ; mais la firme qui fixerait un prix supérieur perdrait immédiatement (dans l'hypothèse d'une élasticité parfaite de la demande au prix) toute sa clientèle.

2.6. Boîte d'Edgeworth

Soit un plan en 3.D. avec la quantité du bien X sur l'axe des abscisses, la quantité du bien Y sur l'axe des ordonnées, et l'utilité totale u sur le dernier axe. La dotation initiale totale est de 5 Y et 8 X. Elle est répartie entre deux agents, A et B.

1. Tracez la boîte d'Edgeworth pour deux consommateurs A et B ; vous pouvez représenter une allocation quelconque, aléatoirement choisie, des deux biens, en notant α_X^A les quantités de X consommées par A, et de même pour l'autre agent et l'autre bien. Où se situe l'origine du plan pour B, notée O^B ?

La fonction d'utilité de l'agent A est :

$$U_A(X,Y) = X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}$$

2. Tracez cette fonction d'utilité dans le plan (même avec un dessin imprécis). On suppose que B a la même fonction d'utilité que A ; en sachant que pour B l'origine du plan n'est pas le point (0,0) et que les axes sont inversés, donnez l'expression spécifique de $U_B(X,Y)$ et représentez-là dans le plan.

3. Calculez le taux marginal de substitution de chaque agent.

4. Trouvez l'équation de la courbe des contrats.

Sur la figure, on a tracé la courbe des contrats en pointillés, et les courbes d'indifférence de chaque agent :

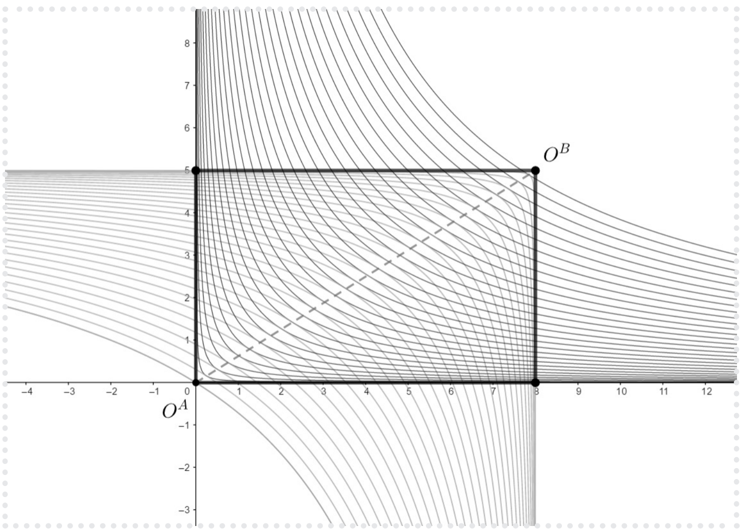

Figure 4.16.

5. Vérifiez que l'équation de la courbe des contrats, obtenue à la question 4., correspond à cette représentation graphique. Vous remarquez que les courbes d'indifférence de l'un des agents sont dessinées en gris clair, les autres en gris foncés. Lesquelles appartiennent à A et à B ? Qu'est-ce qui caractérise graphiquement la courbe des contrats ?

Rappels

A. Dérivées partielles (voir l'exercice 2.3.)

2.6. Correction

1.

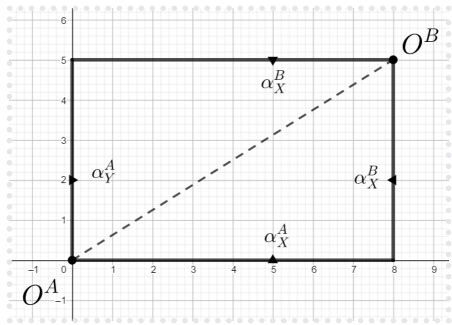

Figure 4.17.

2. B a la même fonction d'utilité que A ; à cette nuance près que l'origine du plan pour l'agent B se trouve non en (0,0) mais en (8,5) ;
   Par ailleurs, les deux axes du plan sont inversés pour B ; aussi, pour représenter la fonction dans un notre plan, il faut l'exprimer sous la forme :

$$U_B\left(X,Y\right)=\sqrt{\left(8-X\right)\left(5-Y\right)}$$

3. Pour calculer le T.M.S., vous pouvez utiliser deux méthodes (qui ont déjà été présentées à l'exercice 2.3.) :
   Méthode 1 – Dans le corps du livre, nous avons donné pour le T.M.S. une formule toute faite :

$$\text{T.M.S.}_{X,Y}=\left|\frac{\dfrac{\partial U\left(X,Y\right)}{\partial X}}{\dfrac{\partial U\left(X,Y\right)}{\partial Y}}\right|$$

   Vous pouvez prendre cette formule comme donnée ; elle implique de toute façon, pour être rigoureusement démontrée, le théorème des fonctions implicites, qui ne fait pas partie des programmes de prépa.
   On applique simplement cette formule :

$$\text{T.M.S.}_{A,X,Y}=\left|\frac{\dfrac{\partial U_A\left(X,Y\right)}{\partial X}}{\dfrac{\partial U_A\left(X,Y\right)}{\partial Y}}\right|=\frac{\frac{1}{2}X^{-\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}Y^{-\frac{1}{2}}X^{\frac{1}{2}}}=X^{-1}Y$$

$$\text{T.M.S.}_{B,X,Y}=\left|\frac{\dfrac{\partial U_A\left(X,Y\right)}{\partial X}}{\dfrac{\partial U_A\left(X,Y\right)}{\partial Y}}\right|=\left(8-X\right)^{-1}\left(5-Y\right)$$

   Méthode 2 – Il est une autre méthode, qui consiste, comme à l'exercice 2.3., à considérer une courbe d'indifférence quelconque. Ces courbes d'indifférence sont des équations qui prennent la forme suivante :

$$U\left(X,Y\right)=u,u\in\mathbb{R}_+$$

L'équation des courbes d'indifférence de l'agent A est ainsi donnée par :

$$X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} = u, u \in \mathbb{R}_+$$

On transforme cette courbe en fonction ayant X pour variable et Y pour image, ce qui donne :

$$Y = \psi(X) = \frac{u^2}{X}, u \in \mathbb{R}_+$$

Le T.M.S. est alors donné par la valeur absolue de la dérivée de f, soit :

$$\text{T.M.S.}_{A,X,Y} = \left|\psi'(X)\right| = \frac{u^2}{X^2}, u \in \mathbb{R}_+$$

Si on se rappelle que $X^{\frac{1}{2}}Y^{\frac{1}{2}} = u$, on voit qu'on retrouve la même expression du T.M.S. qu'avec la première méthode.

4. La courbe des contrats est définie par l'égalité des T.M.S. des deux agents, qui est donnée ici par :

$$X^{-1}Y = (8 - X)^{-1}(5 - Y)$$

$$\Leftrightarrow Y = \frac{5}{8}X$$

Si on applique les restrictions sur les quantités de biens : $X \in [0,8]$, $Y \in [0,5]$, on vérifie facilement que cette courbe des contrats est en fait la diagonale montante de la boîte d'Edgeworth (qu'on a représentée en pointillés sur la figure ci-dessus).

5. Les courbes d'indifférence de A sont gris foncé, celles de B, gris clair. Les points de la courbe des contrats sont tels qu'en chaque point, les T.M.S. des deux agents sont égaux. Or les T.M.S. sont la valeur absolue de la pente de la tangente à la courbe d'indifférence en un point donné. En chaque point de la droite, les deux courbes d'indifférence correspondantes sont donc tangentes.

2.7. Modèle du monopsone et salaire minimum

Soit un modèle de monopsone comme celui de Joan Robinson. Sur un marché donné, il n'y a qu'un employeur face à une multitude d'employés. Le processus de production est exclusivement composé de travail. En notant L la quantité de travail (disons le nombre de travailleurs à plein-temps), on donne les caractéristiques de la firme si elle opérait en C.P.P.

$$\begin{cases} C_m^C(L) = \dfrac{4}{5}L \\ R_m(L) = -\dfrac{2}{3}L + 9 \end{cases}$$

1. Tracez les deux courbes dans un plan ayant L pour axe des abscisses, et donnez l'équilibre de concurrence pure et parfaite (C.P.P.).

2. On entre maintenant dans la situation de monopsone ; on modélise une équation de coût $C(L)$ comme le produit des quantités de travail L et des salaires w. L est la variable de cette fonction de coût. À quelle classe d'objets mathématiques appartient w en situation de C.P.P. ? Et en situation de monopsone ? (Rappelez-vous qu'en situation de concurrence parfaite, la firme est *wage-taker* : elle doit prendre le salaire imposé par le marché ; en situation de monopsone au contraire, plus elle restreint les quantités de travail demandées, et plus le salaire sera faible ; en jouant sur l'armée de réserve, le patron peut se permettre de faire pression sur ses employés et de leur imposer une rémunération minorée).
3. Calculez la dérivée $C_m(L)$ à partir de sa formulation de la question 2. Que se passe-t-il si l'employeur décide d'embaucher un ouvrier de plus ?
4. Tracez la fonction de coût marginal de monopsone dans le plan. L'intersection de R_m et de cette fonction vous donne l'équilibre en monopsone. Quelle est à cet équilibre la recette marginale ? Quel est le salaire ?
5. Tracez le triangle d'Harberger sur le graphe et calculez sa surface.
6. Le gouvernement impose un salaire minimum au niveau 4 ; tracez les deux nouvelles courbes de coût marginal. Comment l'emploi va-t-il évoluer ? Calculez le nouveau niveau d'emploi et de rendement marginal. Vérifiez que le nouveau triangle d'Haberger est plus petit que celui obtenu à la question 5. Ces résultats sont-ils cohérents avec la théorie de Joan Robinson ?
7. Que se passe-t-il si le salaire minimum est fixé à $w_M = 6{,}35$? Quel est le niveau de salaire minimum qui permet d'atteindre la Pareto-optimalité ?

2.7. Correction

1. En C.P.P., le producteur égaliserait la recette marginale et le coût marginal, d'où :
$$\frac{4}{5}L = -\frac{2}{3}L + 9 \Leftrightarrow L = \frac{135}{22} \approx 6{,}13$$
L'équilibre de C.P.P. est donc atteint au point $\left(\frac{135}{22}, \frac{54}{11}\right)$.
2. Si on suit l'énoncé, la fonction de coût est égale à la quantité de travail multiplié par le salaire :
$$C(L) = L \times w$$
En C.P.P., la firme étant *wage-taker*, w est imposé de manière exogène par le marché : w est donc un réel strictement positif.

En situation de monopsone, si le patron réduit sa demande de travail, il sait qu'il pourra pressurer à la baisse les salaires en utilisant la menace du chômage ; c'est la stratégie dite de l'armée de réserve. w est donc ici une fonction ayant L pour variable. On sait déjà que la dérivée de $w(L)$ est positive (plus le patron réduit ses quantités de travail demandées, plus la stratégie de l'armée de réserve est efficace, plus les salaires seront faibles).

3. Si on reprend la question 2., la fonction de coût du monopsone s'écrit :

$$C(L) = L \times w(L)$$

Le coût marginal en monopsone est donné par :

$$C_m(L) = C'(L) = w(L) + w'(L)L$$

Quand le patron embauche un salarié, il subit deux coûts ; un coût direct qui consiste à payer ce nouvel employé $w(L)$ et un coût indirect ; en desserrant la pression sur le marché du travail et en faisant baisser le chômage, cette embauche permet aux ouvriers de revendiquer des salaires plus élevés ; c'est le terme $w'(L)L$.

4. Que vaut $w(L)$ ici ? C'est la réaction du salaire à la quantité de travail. Or dans un modèle comme le nôtre, où le travail est le seul facteur de production, cette réaction est la même que celle du coût marginal de C.P.P.

Ainsi, puisque $w(L) = C_m^C(L) = \frac{4}{5}L$, le coût marginal de monopsone est égal à $C_m(L) = \frac{4}{5}L + \frac{4}{5} \times L = \frac{8}{5}L$

L'équilibre est atteint quand :

$$R_m(L) = C_m(L) \Leftrightarrow -\frac{2}{3}L + 9 = \frac{8}{5}L \Leftrightarrow L = \frac{135}{34} \approx 3{,}97$$

À ce niveau d'emploi, la recette marginale est $\frac{324}{51} \approx 6{,}35$ mais l'employeur peut se permettre de ne payer qu'au coût marginal, c'est-à-dire à $\frac{54}{17} \approx 3{,}2$.

5. La longueur de la base de ce triangle est donnée par la différence entre la recette marginale $\frac{324}{51}$ et le salaire versé $\frac{54}{17}$; la longueur de la hauteur du triangle est donnée par la différence entre la quantité de travail d'équilibre $\frac{135}{22}$ et la quantité de travail en situation de monopsone $\frac{135}{34}$:
La surface de ce triangle est ainsi :

$$\frac{\left(\frac{324}{51} - \frac{54}{17}\right)\left(\frac{135}{22} - \frac{135}{34}\right)}{2} \approx 3{,}44$$

6. Quel est l'impact du salaire minimum $w_{min} = 4$? La fonction $w(L)$ qui, on l'a vu, est assimilable à $C_m^C(L)$ va être redéfinie ainsi :

$$w(L) = C_m^C(L) = \begin{cases} \frac{4}{5}L \text{ si } \frac{4}{5}L > 4 \text{ (i.e. } L > 5) \\ 4 \text{ sinon} \end{cases}$$

C'est une reformulation tout à fait intuitive ; le salaire minimum empêche le patron de jouer sur l'armée de réserve ; les 5 premiers ouvriers à temps-plein recrutés seront nécessairement payés 4. Au-delà de ce niveau, la courbe de coût marginal retrouve sa forme initiale ; le patron doit augmenter le salaire pour pouvoir attirer les travailleurs potentiels.
On tire de cette expression nouvelle la nouvelle forme de $C_m(L)$;

$$C_m(L) = C'(L) = w(L) + w'(L)L = \begin{cases} \frac{8}{5}L \text{ si } L > 5 \\ 4 \text{ sinon} \end{cases}$$

Tant que $C_m^C(L)$ est inférieur au salaire minimum w_{min} ; les deux droites de coût marginal $C_m^C(L)$ et $C_m(L)$ se confondent en un seul seuil horizontal. La logique de monopsone est neutralisée pour les *n* premiers travailleurs embauchés jusqu'au niveau $L_{\min}$. Cette logique reprend par la suite ; la courbe C_m intercepte R_m au point $\left(5, \frac{17}{3}\right)$. L'aire du nouveau triangle d'Harberger est bien plus faible puisque égale à :

$$\frac{\left(\frac{17}{3} - 4\right)\left(\frac{135}{22} - 5\right)}{2} \approx 0{,}95$$

On retrouve la double-logique du modèle de Joan Robinson : en monopsone, le salaire minimum a un double effet positif : 1. Il fait monter les salaires en desserrant la pression que le patron exerce sur le marché du travail ; 2. Il implique une évolution Pareto-optimale ; le triangle d'Harberger est plus petit parce que la firme est comme forcée de rogner sur ses marges et de se rapprocher des valeurs de l'équilibre walrasien.

7. On peut reprendre ici la totalité du raisonnement de la question 6. ; mais une analyse graphique permet d'aller à l'essentiel. On a représenté les nouvelles courbes de coût marginal sur le graphe le plus à droite de la figure ci-dessous. Si le patron égalise rendement marginal et coût marginal, il fixe le salaire à son minimum légal 6,35 et choisit un niveau d'emploi légèrement inférieur à 4.

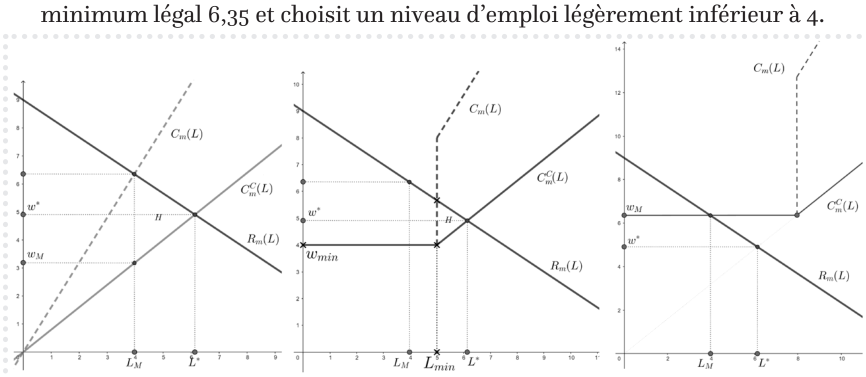

Figure 4.18.

Ainsi, un salaire minimum trop élevé peut paradoxalement conduire à une baisse et non une hausse de l'emploi par rapport à l'équilibre du monopsone.

C'est l'aspect néoclassique du modèle. Une hausse du salaire minimum ne fait baisser le chômage que si le salaire imposé par le monopsone était en dessous de l'équilibre de C.P.P. Si au contraire le salaire minimum est déjà au-dessus de w^*, une hausse détruit de l'emploi, comme dans les modèles néoclassiques. L'idéal en termes de Pareto-optimalité serait de fixer le salaire minimum au niveau w^*. On utilise souvent cet argument pour expliquer ce paradoxe : les hausses de salaire minimum ont tendance à détruire des emplois en Europe, pas aux États-Unis. Mais ce constat empiriquement simplifié cache lui-même une littérature économétrique vaste et complexe.

2.8. L'incidence fiscale

On cherche à modéliser l'impact d'une hausse d'impôt sur le prix de marché ; on construit une fonction croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, qui donne la réaction du prix p au niveau de la taxe T sur les produits :

$$p \mapsto p(T),\ p'(T) > 0$$

La demande et l'offre réagissent au prix, négativement pour la première, positivement pour la deuxième, et l'équilibre après instauration de la taxe est donné par :

$$O\big(p(T)\big) = D\big(p(T)(1+T)\big)$$

L'offreur vend ses produits au prix $p(T)$ alors que le consommateur paye lui non seulement le prix de marché mais aussi la taxe $p(T)(1+T)$.

1. Dérivez les deux membres de cette égalité par la taxe T.
2. Evaluez l'égalité en situation de C.P.P. (quand il n'y a aucune intervention étatique, donc aucune taxe).
3. Réécrivez l'égalité de C.P.P. en plaçant à gauche le quotient $\dfrac{p'(0)}{p(0)}$; comment interprétez-vous ce quotient ?
4. Donnez l'expression des élasticités-prix de la demande et de l'offre en situation de C.P.P.
5. Reprenez le membre de droite de l'égalité obtenue à la question (3.) et réécrivez-le en fonction des deux élasticités trouvées à la question 4.
6. Evaluez cette expression lorsque chaque élasticité tend vers 0 ou vers $+\infty$. Interprétez ces résultats en fonction de la théorie de l'incidence fiscale.

2.8. Correction

1. On applique les règles sur la dérivée d'une composée :

$$\frac{\partial O\big(p(T)\big)}{\partial T} = p'(T) \times O'\big(p(T)\big)$$

$$\frac{\partial D\big(p(T)(1+T)\big)}{\partial T} = \big(p'(T)(1+T) + p(T)\big) \times D'\big(p(T)(1+T)\big)$$

D'où l'égalité d'équilibre :

$$p'(T) \times O'\big(p(T)\big) = \big(p'(T)(1+T) + p(T)\big) \times D'\big(p(T)(1+T)\big)$$

2. En C.P.P., il n'y a pas de taxe, on évalue ainsi l'équation en $T = 0$, et l'équilibre est donné par :

$$p'(0) \times O'\big(p(0)\big) = \big(p'(0) + p(0)\big) \times D'\big(p(0)\big)$$

3. Par transfert :

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{D'\big(p(0)\big)}{O'\big(p(0)\big) - D'\big(p(0)\big)}$$

Le quotient $\frac{p'(0)}{p(0)}$ décrit la variation marginale relative de la fonction de prix autour de 0 ; empiriquement, c'est la réaction de la fonction de prix lorsqu'on passe d'une taxe nulle à une toute petite taxe.

4. Les élasticités prix de l'offre et de la demande sont données ici par :

$$\varepsilon_{O,p(0)} = \frac{\partial O\big(p(0)\big)}{\partial\big(p(0)\big)} \frac{p(0)}{O\big(p(0)\big)}$$

$$\varepsilon_{D(p(0))} = \frac{\partial D\big(p(0)\big)}{\partial\big(p(0)\big)} \frac{p(0)}{O\big(p(0)\big)}$$

5. On a :

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{D'\big(p(0)\big)}{O'\big(p(0)\big) - D'\big(p(0)\big)} = \frac{D'\big(p(0)\big)\frac{p(0)}{D\big(p(0)\big)}}{\Big(O'\big(p(0)\big) - D'\big(p(0)\big)\Big)\frac{p(0)}{D\big(p(0)\big)}}$$

On doit se souvenir ici que $p(0)$ est le prix de C.P.P., et qu'en ce point, dans un modèle parétien, l'offre est égale à la demande, soit ici : $D\big(p(0)\big) = O\big(p(0)\big)$. On peut donc écrire :

$$\frac{p'(0)}{p(0)} = \frac{D'\big(p(0)\big)\frac{p}{D\big(p(0)\big)}}{O'\big(p(0)\big)\frac{p}{O\big(p(0)\big)} - D'\big(p(0)\big)\frac{p}{D\big(p(0)\big)}} = \frac{\varepsilon_{D,p(0)}}{\varepsilon_{O,p(0)} - \varepsilon_{D,p(0)}}$$

6.

	$\dfrac{\varepsilon_{D,p(0)}}{\varepsilon_{O,p(0)} - \varepsilon_{D,p(0)}}$
$\varepsilon_{D,p(0)} \to 0$	0
$\varepsilon_{D,p(0)} \to +\infty$	–1
$\varepsilon_{O,p(0)} \to 0$	–1
$\varepsilon_{O,p(0)} \to +\infty$	0

Dans ce modèle, $p(T)$ est le prix auquel vend le producteur ; et la consommation paye le produit au prix $p(T)(1+T)$.

On retrouve ici l'idée que l'impôt est supporté par l'agent qui a le comportement le plus inélastique. Ici, quand la demande est très inélastique ($\varepsilon_{D(p(T))} \to 0$) ou quand l'offre est très élastique ($\varepsilon_{O(p(T))} \to +\infty$), le prix du producteur ne baisse presque pas ; le patron n'a pas à rogner sur ses marges, ce qui signifie que c'est le consommateur qui paye la taxe.

Inversement, quand l'élasticité de la demande est très forte ou quand l'offre est inélastique, la baisse de prix est nette ; le producteur rogne sur ses marges puisque c'est lui qui paye la taxe.

2.9. Jeux répétés et *Folk theorem*

On se propose ici d'apporter une illustration du *Folk Theorem*. On en rappelle le principe général : dans un jeu répété infini, la coopération peut devenir Pareto-optimale si les joueurs sont suffisamment patients.

Ici, deux joueurs sont liés par un dilemme du prisonnier. Ils ont le choix entre coopération (*C*) et défection (*D*). La matrice du jeu est :

Joueur 2 Joueur 1	*C*	*D*
C	(κ,κ)	$(0,\chi)$
D	$(\chi,0)$	$(1,1)$

1. Quelles conditions doivent remplir κ et χ pour que le jeu soit un dilemme du prisonnier ?

On suppose d'abord que le jeu se répète T fois ; les deux joueurs connaissent la valeur de T.

2. Que se passe-t-il ?

On suppose maintenant que T est ignoré des joueurs. On note $\forall t \in [\![0,T]\!],\ \forall i \in \{1,2\},\ a_i^t$ le choix du joueur i à la période t. Les gains de chaque période sont notés, selon le même principe y_i^t.

Les deux joueurs ont le même profil stratégique s_i :

$$S_i : \begin{cases} \forall t \in [\![0,T]\!],\ a_{3-i}^t = C \Leftrightarrow \forall t \in [\![1,T]\!],\ a_i^t = C \\ \exists t_0 \in [\![0,T]\!],\ a_{3-i}^{t_0} = D \Rightarrow \forall t \in [\![t_0+1,T]\!],\ a_i^t = D \end{cases}$$

3. Quel est le nom de ce profil stratégique ?

À présent, on pose $\kappa = 2$ et $\chi = 3$.

4. Les deux joueurs coopèrent tout d'abord, mais le joueur 2 décide de trahir à la période 3 ? Quels sont alors les gains de chaque joueur ?

Les joueurs ont une préférence pour le présent. Chaque gain est associé à un facteur d'escompte δ qui marque cette préférence, telle que l'utilité individuelle u peut être notée ainsi :

$$\forall t \in [\![0,T]\!],\ \forall i \in \{1,2\},\ u_i^t = \delta^t y_i^t,\ \delta \in]0,1[$$

5. Que vaut l'utilité intertemporelle de chaque joueur si les deux joueurs se tiennent à la coopération jusqu'à la fin ?

6. Imaginons à présent que les deux joueurs appliquent la stratégie de la question 3. Que vaut l'utilité intertemporelle d'un traître qui coopérerait pendant θ périodes puis ferait défection ?

7. La coopération continue est-elle un équilibre si $\delta = \frac{1}{4}$? Si $\delta = \frac{3}{4}$? Si $\delta = \frac{1}{4}$ et $\kappa = \frac{5}{2}$? Commentez.

Rappels

A. Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

Soit une suite définie $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_p \times q^{n-p}$. La somme de ses premiers termes est donnée par :

$$\sum_{k=p}^{n} q^k = q^p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

2.9. Correction

1. On doit avoir : $\chi > \kappa > 1$;
   $\kappa > 1$ parce que l'équilibre que les prisonniers ne peuvent atteindre doit être Pareto-optimal ;
   $\chi > \kappa$ parce que chaque prisonnier doit avoir intérêt à faire défection.
2. Si les joueurs raisonnent à rebours, ils savent qu'ils vont chacun faire défection en $T-1$; en répétant le même raisonnement, les deux joueurs vont faire défection en $T=1$ où l'équilibre sera donc (D,D). On retrouve le principe que dans un dilemme du prisonnier répété avec un nombre fini de périodes, les deux joueurs font défection tout de suite.
3. On a affaire à une stratégie de *permanent retaliation* ; les joueurs coopèrent a priori, mais dès que le joueur tiers fait défection, le joueur fera défection à tous les tours.
4. Sur les deux premières périodes, chaque joueur gagne 2 ; au troisième tour, le traître gagne 3, et l'autre joueur 0 ; au tour suivant, plus personne ne coopère, et tout le monde gagne 1 jusqu'à la fin du jeu. Ainsi :
$$y_2 = 2+2+3+1(T-3) = 4+T$$
$$y_1 = 2+2+0+1(T-3) = 1+T$$
5. $$u_i = \sum_{t=0}^{T} 2 \times \delta^t$$
6. Si le joueur i coopère pendant θ périodes, puis dévie, puis fait défection à toutes les périodes suivantes, on a :
$$u_i = \left(\sum_{t=0}^{\theta} 2\times\delta^t\right) + 3\delta^{\theta+1} + \left(\sum_{t=\theta+2}^{T} 1\times\delta^t\right) = \left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\right) + \left(\sum_{t=0}^{\theta}\delta^t\right) + 2\delta^{\theta+1}$$
7. Comparons les deux situations : l'utilité de la coopération, et l'utilité de traîtrise
$$u_{i,coop.} - u_{i,tr.} = \left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\right) - \left(\sum_{t=0}^{\theta}\delta^t\right) - 2\delta^{\theta+1} = \left(\sum_{t=\theta+1}^{T}\delta^t\right) - 2\delta^{\theta+1} = \delta^{\theta+1}\frac{1-\delta^{T-\theta}}{1-\delta} - 2\delta^{\theta+1}$$
$$= \delta^{\theta+1}\left(\left(\frac{1}{1-\delta}\right)\left(1-\delta^{T-\theta}\right) - 2\right)$$
   - Dans la situation où $\delta = \frac{1}{4}$, on a affaire à un joueur impatient. On aura alors :
$$u_{i,coop.} - u_{i,tr.} = \frac{1}{4}^{\theta+1}\left(\left(\frac{4}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}^{T-\theta}\right) - 2\right)$$
   Quelles que soient les valeurs de T et de θ, ce terme est négatif. Ainsi, un joueur impatient, dont les préférences pour le présent sont telles que $\delta = \frac{1}{4}$, fera défection dès le premier tour.

– Dans la situation où $\delta = \frac{3}{4}$, on a affaire à un joueur patient. On aura alors :

$$u_{i,coop.} - u_{i,tr.} = \frac{3}{4}^{\theta+1}\left(4\left(1-\frac{3}{4}^{T-\theta}\right)-2\right)$$

On voit ici au contraire que si les joueurs sont convaincus que le jeu n'a pas de fin, si donc T tend vers $+\infty$, alors ce terme sera positif : la coopération devient un équilibre de Nash dont personne n'a intérêt à dévier.

– Dans la situation où $\delta = \frac{1}{4}$ mais où $\kappa = 2{,}5$, on a :

$$u_{i,coop.} - u_{i,tr.} = \frac{3}{2}\left(\sum_{t=0}^{T}\delta^t\right) - \frac{3}{2}\left(\sum_{t=0}^{\theta}\delta^t\right) - 2\delta^{\theta+1} = \frac{3}{2}\left(\sum_{t=\theta+1}^{T}\delta^t\right) - 2\delta^{\theta+1}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\delta^{\theta+1}\frac{1-\delta^{T-\theta}}{1-\delta}\right) - 2\delta^{\theta+1}$$

$$= \frac{3}{2}\left(\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{\theta+1}\right)\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{T-\theta}}{1-\frac{1}{4}}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{\theta+1}$$

$$= 2\left(\frac{1}{4}\right)^{\theta+1}\left(\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{T-\theta}\right)-1\right)$$

Dans ce cas précis, lorsque T tend vers $+\infty$, $u_{i,coop.} - u_{i,tr.} = 0$; la stratégie de la coopération a la même utilité espérée que la déviance. La coordination est un équilibre de Nash (mais pas le seul).

On retrouve l'intuition du Folk theorem : dans un jeu supposé infini par les agents, la coopération peut devenir un équilibre de Nash si l'on joue sur deux paramètres :

– La patience des agents (ici, le paramètre δ) ;
– Les gains de la coopération (ici, κ).

On voit à quel point ce résultat est déterminant pour l'économie des biens publics et l'économie politique.