

# Manejo de modelos de evolución estelar

Andrés García-Serra Romero

Universidad de la Laguna, Astronomy and Astrophysics master's degree.  
e-mail: alu0101451923@ull.edu.es

## ABSTRACT

**Aims.** Aprender a leer, manipular y graficar datos observacionales de modelos estelares para compararlos con desarrollos teóricos vistos en clase. Interpretar los resultados obtenidos.

**Methods.** Descargaremos un fichero con archivos de datos para galaxias entre 0.8 y 120 masas solares, los cuales utilizaremos para realizar distintas figuras propuestas y ver la similitud de los modelos con la teoría estudiada.

**Results.** Como resultados a los diferentes ejercicios propuestos presentaremos las gráficas que se han pedido en el enunciado, separando cada apartado de este documento en uno o varios ejercicios propuestos.

**Key words.** Stellar Models – L-M relation – ZAMS – H-R diagram

## Introducción

En el fichero a utilizar se encuentran datos de modelos de evolución estelar todos con metalicidad solar. Estos se encuentran con velocidad de rotación y sin ella, en nuestro caso trabajaremos con los datos sin velocidad de rotación. Los modelos empiezan en el momento en el que la estrella entra en la secuencia principal, es decir el ZAMS (*Zero Age Main Sequence*) y terminan en distintas fases dependiendo de la masa cada estrella. Estas masas, como hemos dicho anteriormente, cubren un amplio abanico entre  $0.8M_{\odot}$  y  $120M_{\odot}$ .

Durante el trabajo nos centraremos básicamente en estrellas de masa intermedia y baja, enfatizando en el modelo de  $5M_{\odot}$ .

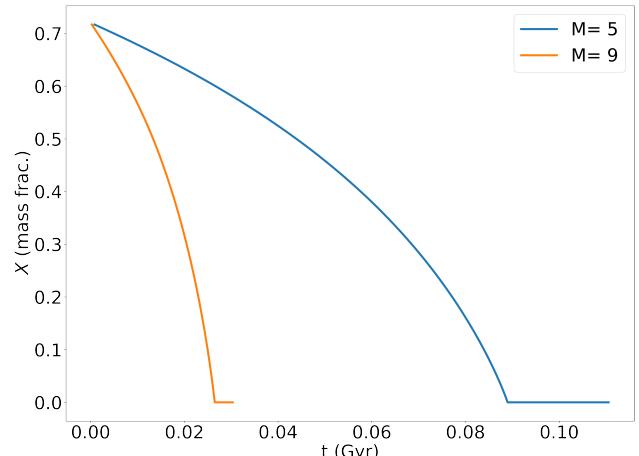
Antes de comenzar con el código para la realización de las figuras lo primero que haremos será lo propuesto en el ejercicio 0, es decir, localizar las columnas en las que están los datos de interés y sus unidades, lo cual será de vital importancia para el desarrollo del trabajo.

## 1. Variación de abundancia de H, He (Ej. 1)

Para este primer apartado, haremos una figura para el desarrollo de cada abundancia, H y He. Para ello tomaremos la columna temporal y la de abundancia, las gráficas se ven en las figuras 1 y 2.

En las figuras podemos ver claramente como la abundancia de Hidrógeno disminuye desde el momento en el que comienza la secuencia principal. Junto a esta disminución podemos ver como la abundancia de Helio aumenta a su vez, hasta llegar a un valor máximo, el cual se comparte con el instante en el que la abundancia de H llega a 0. Una vez el He ha llegado a su máximo valor, comienza a disminuir de forma mucho más rápida que el H.

Esto está en consonancia con lo estudiado en teoría, pues conforme el Hidrógeno es quemado, por las reacciones nucleares que se producen para que esto sea posible, el Helio es creado, lo que concuerda con el hecho de que al disminuir uno



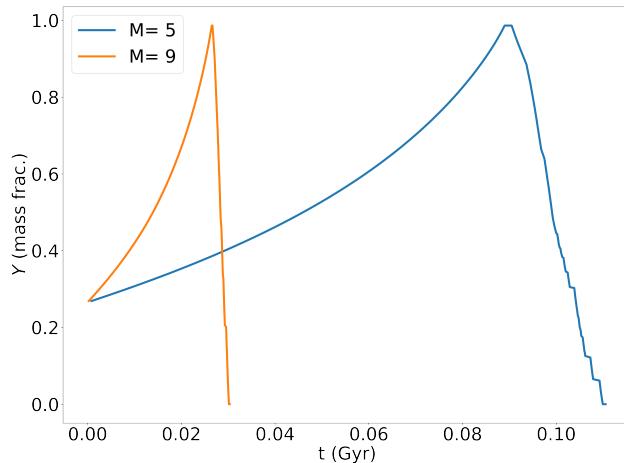
**Fig. 1.** Variación de la abundancia de Hidrógeno (X) empezando en la ZAMS para  $5M_{\odot}$  y  $9M_{\odot}$

aumente el otro.

Comparando las curvas para las diferentes masas podemos ver cómo la reducción de la cantidad de H es más abrupta para el modelo de estrella con masa  $9M_{\odot}$ , de la misma forma que el aumento de He en esta. Esto es debido a que las estrellas de mayor masa requieren una consumición más rápida de su núcleo para poder mantener el equilibrio, debido a la gran presión gravitatoria.

Como bien sabemos, la duración de las estrellas en la secuencia principal termina con la quema de Hidrógeno en su núcleo, instante que se conoce como TAMS (*Terminal Age Main Sequence*). Mediante la diferencia entre la edad de la estrella en TAMS y en ZAMS podemos calcular fácilmente la duración de cada una de estas estrellas en la secuencia principal.

Los valores obtenidos son:



**Fig. 2.** Variación de la abundancia de Helio (Y) empezando en la ZAMS para  $5M_{\odot}$  y  $9M_{\odot}$

$$\tau_{\text{ms}}(5M_{\odot}) = 88.16 \text{ Myr}$$

$$\tau_{\text{ms}}(9M_{\odot}) = 26.26 \text{ Myr}$$

Estos valores no pueden comprobarse de forma individual, pero sí que conocemos una relación de proporcionalidad entre el tiempo de escala nuclear de una estrella y su luminosidad. Esto unido a la relación genérica L-M nos puede dar información de la relación entre la masa de la estrella y su tiempo en la secuencia principal, asumiendo que este tiempo es muy similar a la escala temporal nuclear de la estrella que, como bien sabemos, la secuencia principal ocupa la mayoría de la vida de las estrellas.

$$\tau_{\text{nuc}} \propto \frac{M}{L} \propto \frac{1}{M^2}$$

Mediante esta relación de proporcionalidad podemos calcular los cocientes siguientes:

$$\frac{\tau_5}{\tau_9} \approx \frac{9^2}{5^2} = 3.24$$

$$\frac{\tau_{5,\text{ms}}}{\tau_{9,\text{ms}}} = 3.36$$

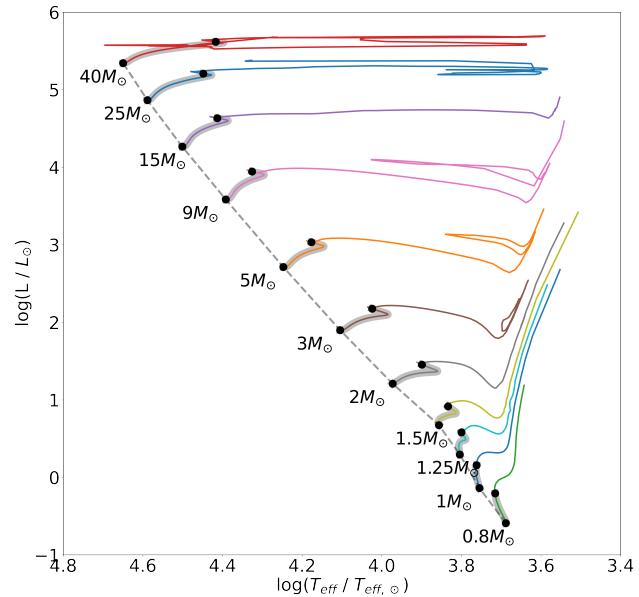
Como podemos ver ambos valores se asemejan, por lo que asumimos que el cálculo mediante el modelo es correcto.

## 2. Diagramas HR y ZAMS para cada masa (Ej. 2,3,4,5,6)

En este segundo apartado tomaremos los datos de Luminosidad y Temperatura efectiva para trazar diagramas HR de las siguientes masas:  $0.8M_{\odot}$ ,  $1M_{\odot}$ ,  $1.25M_{\odot}$ ,  $1.5M_{\odot}$ ,  $2M_{\odot}$ ,  $3M_{\odot}$ ,  $5M_{\odot}$ ,  $9M_{\odot}$ ,  $15M_{\odot}$ ,  $25M_{\odot}$ ,  $40M_{\odot}$ .

Como hemos nombrado anteriormente, el valor de cualquier variable en la ZAMS puede extraerse fácilmente tomando el valor inicial de su vector en los ficheros. El valor final será el valor correspondiente al tiempo en el cual la quema de hidrógeno en núcleo termina, como habíamos calculado en el apartado anterior. De esta forma podemos fácilmente remarcar dentro del diagrama HR la sección correspondiente a la secuencia principal

para cada masa. El diagrama correspondiente puede verse en la figura 3, donde hemos superpuesto también la tendencia de la ZAMS.



**Fig. 3.** Diagrama HR mostrando el comportamiento para diferentes masas y con la secuencia principal remarcada.

Lo primero que podemos observar es como el valor inicial de luminosidad y temperatura efectiva para cada traza evolutiva tiende a disminuir con la masa, teniendo un máximo para  $40M_{\odot}$  y un mínimo para  $0.8M_{\odot}$ . Esto concuerda con el hecho de que las estrellas más masivas llegan más pronto a la secuencia principal, lo cual puede comprobarse también en la tabla 1.

**Table 1.** Tiempo de vida de cada estrella al entrar y salir de la secuencia principal.

M ( $M_{\odot}$ )	t (ZAMS) (Myr)	t (TAMS) (Myr)
<b>0.8</b>	74.78	21552.72
<b>1</b>	44.87	8525.36
<b>1.25</b>	27.43	4232.97
<b>1.5</b>	15.99	2239.18
<b>2</b>	9.15	1017.04
<b>3</b>	2.86	323.21
<b>5</b>	0.83	89.00
<b>9</b>	0.25	26.51
<b>15</b>	0.12	11.13
<b>25</b>	0.06	6.36
<b>40</b>	0.04	4.47

En el diagrama podemos diferenciar los comportamientos para estrellas con masas inferiores a  $1.5M_{\odot}$  y superiores, puesto que las primeras quemarán Hidrógeno mediante cadenas p-p mientras que las segundas lo harán mediante ciclos CNO, ambas aumentando su peso molecular, y por tanto su luminosidad ( $L \propto \mu^4$ ).

En las estrellas de baja masa la densidad y temperatura centrales sufren grandes cambios al estar quemando H mediante cadenas p-p, esto es debido a que la energía en estas reacciones

tiene una dependencia  $\rho T^4$ , lo que hace que se requiera de un aumento muy grande de estas dos variables para mantener el equilibrio y poder compensar el aumento de  $\mu$  durante su etapa en la secuencia principal.

Para estrellas de masa mayor ocurre lo contrario, puesto que queman Hidrógeno en cadenas CNO, las cuales tienen una energía con una dependencia mucho mayor en la Temperatura,  $\rho T^{18}$ . Al ser así, el aumento en su temperatura central y densidad central no es tan grande como en el caso de masas más bajas para poder mantener el equilibrio. Lo que sí resulta relevante para estos casos es un aumento en su radio, debido al aumento del peso molecular. Dicho aumento es necesario para poder mantener la presión central de la estrella en equilibrio (recordemos que  $P_C \propto \mu^{-1} \propto R^{-3}$ ).

Estas diferencias en su comportamiento hacen que por un lado, las estrellas con masa mayor tengan una disminución de Temperatura efectiva, la cual surge de que el aumento Luminosidad no puede suplir el aumento en Radio. Mientras que para masas menores el crecimiento del radio es menor, produciendo un aumento en la luminosidad.

Otra información relevante respecto a las estrellas de masas mayores es el aumento repentino en temperatura efectiva que puede verse en la secuencia principal a partir de  $1.25M_\odot$ . Este aumento es ocasionado por una contracción de Kelvin-Helmholtz y es producida al final de su etapa en la secuencia principal cuando la cantidad de Hidrógeno es muy pequeña la energía producida por las reacciones nucleares no es capaz de compensar la presión gravitatoria y se produce una contracción repentina que produce un aumento de luminosidad y de temperatura efectiva. Una vez el Helio comienza a quemarse en el núcleo el equilibrio vuelve a establecerse.

### 3. Diagramas de relaciones de homología (Ej. 7,8,9)

Para este apartado tomaremos los datos de las estrellas en el mismo rango de masas que en el anterior apartado y graficaremos las relaciones de homología L-M,  $\rho_c M$  y  $T_c M$ . Después, para un rango más acotado ( $1M_\odot$ ,  $3M_\odot$ ,  $9M_\odot$ ,  $40M_\odot$ ) buscaremos la relación  $\rho_c T_c$ . Todo esto lo haremos siguiendo el comportamiento para las diferentes masas en la ZAMS y unificando cada relación en una única gráfica.

Cabe destacar que estas relaciones se obtienen al considerar estrellas completamente homogéneas y radiativas, además, aproximando a gas ideal y con una opacidad constante. Las relaciones son las siguientes:

$$L \propto M^3$$

$$T_c \propto M^{\frac{4}{\nu+3}}$$

$$\rho_c \propto M^{\frac{2(3-\nu)}{\nu+3}}$$

Para graficar las relaciones de homología vamos a tomar dos rangos de masas correspondientes a la dominancia de los dos principales mecanismos de quema de Hidrógeno. Para estrellas

menos masivas ( $M < 2M_\odot$ ) dominan las cadenas p-p, mientras que para estrellas más masivas ( $M > 2M_\odot$ ) dominarán los ciclos CNO, los cuales requieren de una mayor temperatura del núcleo y queman más rápido este.

#### 3.1. Masa - Luminosidad

En primer lugar graficaremos la relación L-M la cual puede verse en la figura 4.

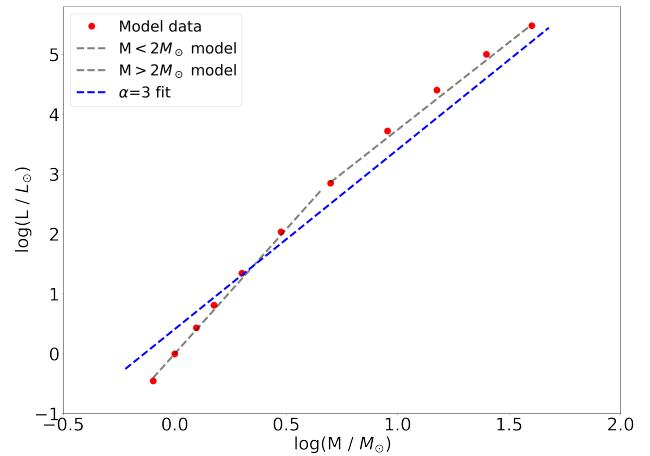


Fig. 4. Relación masa-luminosidad obtenida de los datos de modelos estelares. Las líneas grises discontinuas representan los ajustes a diferentes masas ( $L \propto M^\alpha$ ), con  $\alpha=4.2$  para masas inferiores y  $\alpha=2.9$  para masas superiores. La línea discontinua azul corresponde con el modelo de la relación de homología con  $\alpha=3$ .

Siguiendo la relación de homología podemos ver como esta no se ajusta del todo bien a los datos, mientras que los ajustes divididos en dos rangos de masas sí lo hacen. Este cambio de pendiente entre masas no es ajustado bien por la relación genérica de exponente 3.

Este cambio en las pendientes podría estar producido por la variación en la opacidad entre las estrellas de mayor y menor masa, la cual es muy relevante en estos rangos.

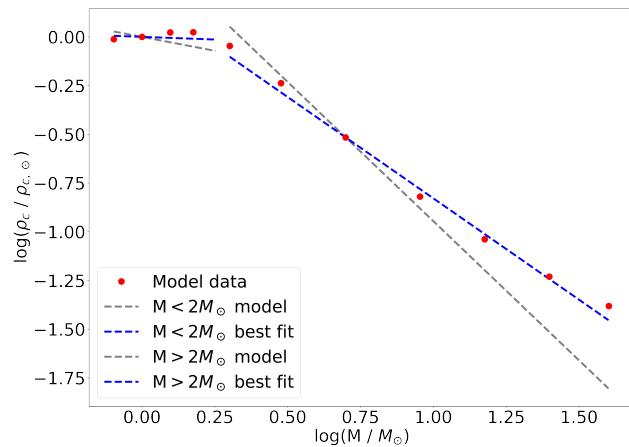
Para masas inferiores, la opacidad es proporcional a la densidad y la temperatura como  $\rho \cdot T^{-7/2}$ . Esta relación es únicamente válida asumiendo que la absorción de la atmósfera es dominada por la absorción de ionización y bremsstrahlung. Este es el caso para estrellas de menor masa, las cuales verán un mayor aumento de la luminosidad con la masa, esto hace que su pendiente sea mayor que la pendiente propuesta en la relación independiente de masas.

Para masas mayores la interacción que domina será la dispersión de electrones, dependiendo de la composición de cada estrella, que en el caso de este modelo es constante para diferentes masas. De esta forma, la dependencia con la luminosidad es prácticamente de  $\alpha=3$ , como predice la relación de homología. Esto es fácilmente visible en la figura 4 viendo que la línea discontinua azul es prácticamente paralela a la línea discontinua gris en el rango de masas superior.

### 3.2. Densidad central - Masa

Ahora podemos graficar la dependencia de la densidad central respecto a la masa, presente en la figura 6. En este caso la relación tomada tendrá dos rangos de masas aplicables, con  $\nu=4$  para masas pequeñas y  $\nu=18$  para masas grandes. La relación a ajustar es la siguiente:

$$\rho_c = M^{\frac{2(3-\nu)}{\nu+3}}$$



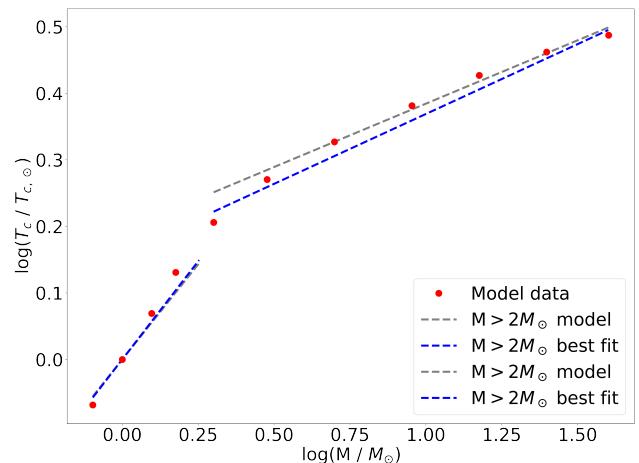
**Fig. 5.** Relación densidad-masa obtenida de los datos de modelos estelares. Las líneas grises discontinuas representan los ajustes a diferentes masas ( $\rho_c \propto M^\alpha \propto M^{\frac{2(3-\nu)}{\nu+3}}$ ), con  $\alpha=-0.06$  para masas inferiores y  $\alpha=-1$  para masas superiores. Las líneas discontinuas azules corresponden con los modelos de la relación de homología, con  $\nu=4$  y  $\nu=18$  para estrellas de masa menor y mayor correspondientemente.

En este caso podemos ver como la mayor discrepancia surge para el rango de masas más altas, en las que hay una capa interior convectiva muy influyente, la cual hace que la disminución de densidad con la masa no sea tan abrupta como vemos en la figura.

Para masas pequeñas vemos como el ajuste es más certero debido a que en este rango es admisible la aproximación de estrellas completamente radiativas. Aún así hay discrepancia, la cual podemos atribuir a la opacidad de nuevo siguiendo la misma deducción que en la figura anterior.

### 3.3. Temperatura - Masa

Para este caso podemos ver como los ajustes teóricos de las relaciones de homología se aproximan mucho a los mejores ajustes por mínimos cuadrados de los datos. Para el rango inferior de masas vemos como básicamente el ajuste y la línea teórica siguen la misma tendencia, mientras que para masas mayores vemos una mayor discrepancia, aún así, teniendo en cuenta la valoración de las condiciones aplicadas para la obtención de estas relaciones que hemos mencionado en secciones anteriores del trabajo, el comportamiento no se aleja de lo esperado.



**Fig. 6.** Relación temperatura-masa obtenida de los datos de modelos estelares. Las líneas grises discontinuas representan los ajustes a diferentes masas ( $T_c \propto M^\alpha \propto M^{\frac{4}{\nu+3}}$ ), con  $\alpha=0.51$  para masas inferiores y  $\alpha=0.21$  para masas superiores. Las líneas discontinuas azules corresponden con los modelos de la relación de homología, con  $\nu=4$  y  $\nu=18$  para estrellas de masa menor y mayor correspondientemente.

### 4. Densidad central - Temperatura (Ej. 10)

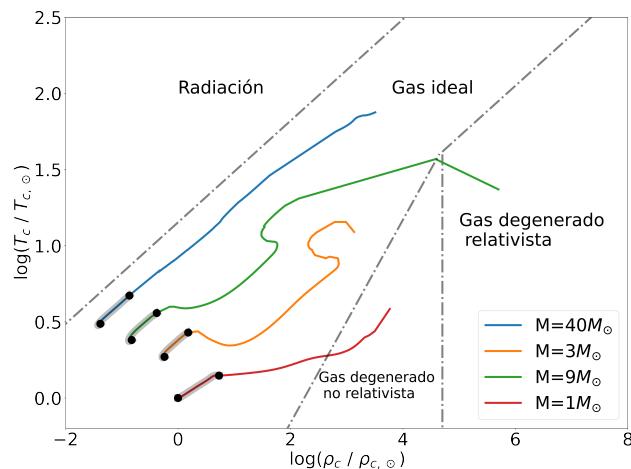
Para este apartado del trabajo graficaremos la relación entre la densidad central y la temperatura para cada instante del desarrollo de las estrellas de masas  $1M_\odot, 3M_\odot, 9M_\odot, 40M_\odot$ . Además, conociendo tanto el instante de ZAMS como de TAMS de cada uno de estos modelos de estrellas, podemos destacar dentro de esta evolución la traza de la secuencia principal para cada una.

Por otra parte hemos indicado las regiones de gas ideal y degenerado relativista y no relativista, así como la región en la que la radiación pasa a tener la mayor contribución. Para esto hemos tomado las expresiones obtenidas en teoría, que son las siguientes:

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \frac{1}{3} \frac{4\sigma}{c} T^4 \\ P_{\text{ideal}} &= \frac{\rho}{\mu m_h} k_B T \\ P_{\text{deg,no rel}} &= K'_1 \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{5/3} \\ P_{\text{deg,rel}} &= K'_1 \left( \frac{\rho}{\mu_e} \right)^{4/3} \end{aligned}$$

Para poder graficar las líneas de separación entre regiones lo único que tendremos que hacer es igualar las ecuaciones que separan estas fronteras y de ellas podremos obtener las relaciones entre  $\rho$  y  $T$  que, pasando a escala logarítmica podremos introducir en nuestra figura como rectas. Esto es lo que mostramos en la figura 7.

Podemos ver claramente de la distribución de las estrellas en el diagrama que las estrellas de menor masa tienden a estar en regiones con menores valores de Temperatura y mayores valores de densidad central, como habíamos comentado en apartados anteriores las estrellas de menor masa tienden mostras un crecimiento más rápido de su densidad central. Esto hace que



**Fig. 7.** Relación temperatura-densidad obtenida de los datos de modelos estelares. Las líneas grises discontinuas representan los límites entre las regiones que han sido indicadas. El punto de diferenciación entre las tres líneas frontera de gas ideal degenerado y no degenerado corresponde a una densidad central de  $\log(\rho_c/\rho_\odot)=4.7$ , obtenido de igualar las ecuaciones para la presión de gas relativista degenerado y no degenerado. El valor de  $\mu_e=2$  tomado para las rectas es el valor solar, puesto que los modelos están hechos siguiendo la composición solar.

provoquen un núcleo degenerado más rápidamente.

Más concretamente, la estrella con el modelo de  $1M_\odot$  puede verse dentro de la región de gas degenerado no relativista y la de  $9M_\odot$  llega a la región de gas degenerado relativista. En general, si tuviéramos datos suficientes de todos los modelos, todas las estrellas acabarían teniendo un núcleo degenerado, puesto que cualquier núcleo en colapso sin reacciones nucleares tiende a degenerarse.

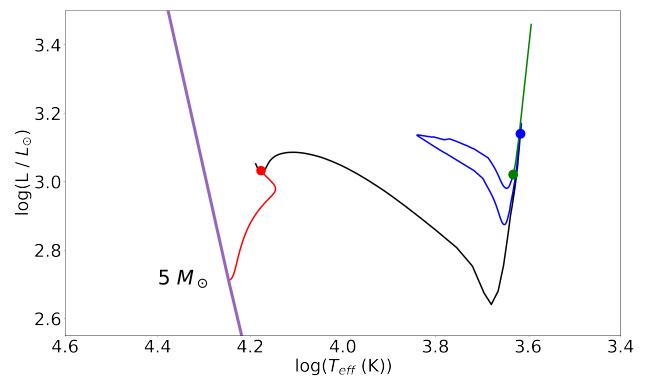
## 5. Modelo de $5M_\odot$

Para el modelo de la estrella con  $5M_\odot$  y velocidad circular nula haremos un estudio un poco más a fondo. Graficaremos los diagramas de luminosidad - temperatura efectiva (figura 8), temperatura - densidad (figura 10) y la variación de las cantidades de distintos elementos (figura 9) y del radio (figura 11) con respecto al tiempo.

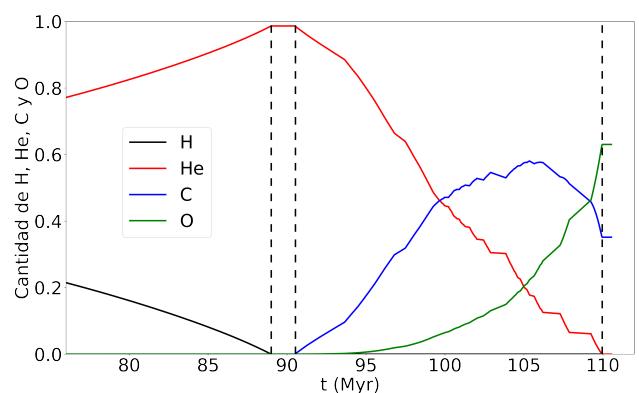
Para todas estas relaciones, menos para la de cantidades de H, He, C, y O, mostraremos en color rojo la fase de secuencia principal, en color negro la fase intermedia a la quema de Helio en el núcleo, en la que se encuentra la RGB (Red Giant Branch), seguida de la quema de He en el núcleo, donde encontraremos el BL (Blue loop), de color azul y finalmente el color verde, una vez todo el Helio nuclear ha sido quemado, lo que se conoce como AGB (Asymptotic Giant Branch).

### 5.1. Variación del radio con el tiempo

Fijándonos ahora en la variación del radio con el tiempo, podemos hacer un análisis un poco más a fondo del comportamiento de la estrella en su evolución.



**Fig. 8.** Diagrama HR para la evolución del modelo estelar de masa  $5M_\odot$ . Los distintos colores muestran las etapas evolutivas, indicadas con puntos en su final.

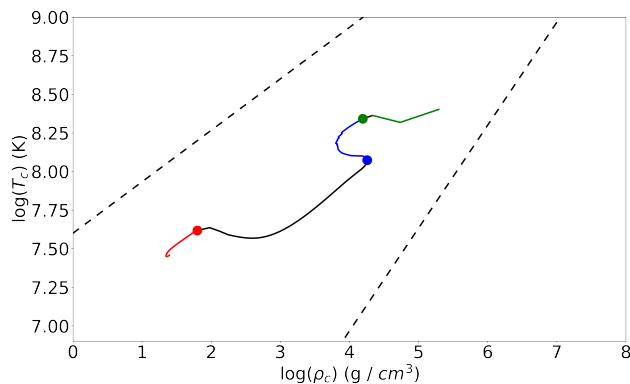


**Fig. 9.** Variación de las cantidades de H, He, C y O respecto al tiempo para la evolución del modelo estelar de masa  $5M_\odot$ . Los distintos colores muestran la evolución de cada elemento, mientras que las líneas discontinuas verticales muestran el final de la quema de H, el comienzo de la quema de He y el final de la quema de He.

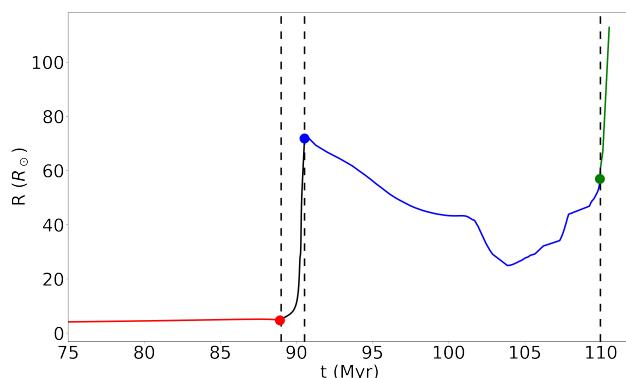
Como podemos ver en la figura 11, hay un claro aumento del radio en el instante en el que se termina la secuencia principal. Este se ve precedido por una disminución previa, en la que la Luminosidad aumenta junto a la densidad. Cuando se termina de quemar el Hidrógeno en el núcleo, desaparece toda la presión de radiación y, puesto que la estrella sigue comportándose como un gas ideal. En este momento la estrella no puede quemar He todavía, por lo que comienza a colapsar gravitacionalmente, produciendo un aumento de la densidad y por tanto de la Temperatura central de la estrella. Esta reacción en cadena hace que el Helio del núcleo comience a quemarse, lo cual aumenta el radio repentinamente y produce este aumento que podemos ver claramente en la figura 11.

Algo muy similar pasa de nuevo en el final de la Blue Loop, cuando el Helio del núcleo se termina de quemar produciendo Carbono y Oxígeno. En este instante la estrella empieza a enfriarse y a colapsar, lo que produce una disminución repentina del radio que provoca de nuevo esta reacción espejo y un aumento del radio repentinamente una vez el Carbono comienza a quemarse.

Para estrellas de  $5M_\odot$  no se llega a poder quemar elementos más allá del Carbono, lo cual podemos ver claramente en la



**Fig. 10.** Relación Temperatura densidad para la evolución del modelo estelar de masa  $5M_{\odot}$ . Los distintos colores muestran las etapas evolutivas, indicadas con puntos en su final. Las líneas discontinuas muestran los límites de comportamiento de dicha estrella, explicados con más detalle en el apartado anterior del trabajo (ver figura 7).



**Fig. 11.** Variación del Radio respecto al tiempo para la evolución del modelo estelar de masa  $5M_{\odot}$ . Los distintos colores muestran la evolución de este en cada fase de su vida, mientras que las líneas discontinuas verticales muestran el final de la quema de H, el comienzo de la quema de He y el final de la quema de He.

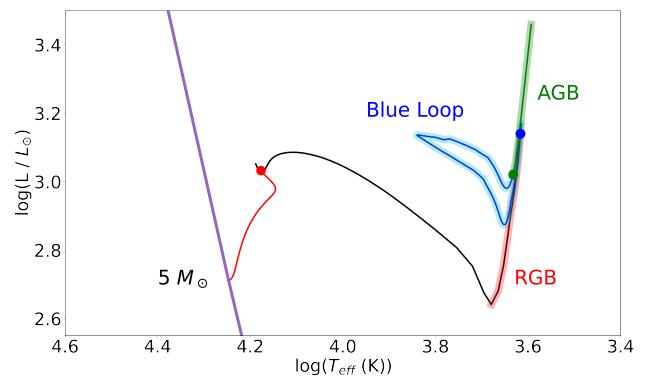
figura 9.

### 5.2. Ramas características del fiagrama HR

Se nos pide identificar la rama RGB, Blue Loop y AGB dentro de los diagramas. Para hacerlo más visual graficaremos de nuevo la figura del diagrama HR, 8, pero esta vez con las secciones sombreadas indicando su localización en la etapa evolutiva. Esto podemos verlo en la figura 12.

### 5.3. Final de la vida de una estrella de $5M_{\odot}$

Como bien hemos dicho para estrellas en este rango de masas no se llega a una temperatura suficiente como para quemar más allá de Carbono. Una vez estas estrellas llegan a la AGB se quema el Hidrógeno en capa, produciendo un aumento de masa de Helio en capas anteriores que se contraen hasta generar suficiente temperatura para quemar este Helio. Una vez la quema de Helio en capas anteriores comienza, se produce un efecto conocido como Flash de Helio, en el que las cantidades de Helio siguen aumentando mientras que se genera temperatura suficiente para



**Fig. 12.** Diagrama HR para la evolución del modelo estelar de masa  $5M_{\odot}$ . Los distintos colores muestran las etapas evolutivas, indicadas con puntos en su final. Las fases características como RGB, Blue Loop o AGB han sido sombreadas para una mejor visualización.

quemarlas, lo que produce una quema repentina de grandes cantidades de helio en las capas. Esto produce un aumento de cantidades de Carbono y Oxígeno en el núcleo, que sigue aumentando su masa y densidad, puesto que nunca va a llegar a una temperatura suficiente para quemarlos de manera relevante como para contrarrestar la presión gravitatoria. Para cierto valor de la densidad central este núcleo se vuelve degenerado.

Tras una etapa de varias fases de Flash de Helio en las que la estrella sigue quemando Helio e Hidrógeno en capas, llega un momento en el que estos elementos se queman por completo, dejando al descubierto un núcleo de Carbono y Oxígeno que no puede quemarse. En este momento la estrella abandona la AGB y se convierte en una Enana Blanca. Esta puede tener H y/o He en las capas exteriores, dependiendo de su masa y de las temperaturas a las que haya podido llegar.

## 6. References

- [1] Sébastien Comerón. *Subject 5: Simple Stellar Models*, 2021
- [2] Sébastien Comerón. *Subject 3: The physics of gas and radiation in stellar interiors*, 2021
- [3] S. Ekström. *Grids of stellar models with rotation*, 2018
- [4] Sergio Simón. *Tema 9: Estados evolutivos tempranos*, 2021
- [5] Sergio Simón. *Tema 10: Estados Evolutivos Tardíos*, 2021