Entregable 1

Andrés García-Serra Romero[1]

[1]Master de Astrofísica, Universidad de la Laguna

May 8, 2022

Introduction

En primer lugar, el enunciado nos dice que consideremos un campo gaussiano unidimensional de P(x) = cte = 10Mpc y con:

$$\delta(\vec{x}) = \frac{1}{100^{1/2}} \sum_{m=1}^{100} 2 \cdot Real\left(\delta_{\vec{k}} \cdot e^{i \cdot \vec{k} \cdot \vec{x}}\right) \qquad (1)$$

Al ser δ_k real, valdrá lo mismo que su complejo conjugado: $\delta_{\vec{k}} = \delta^*_{-\vec{k}}$. Se han considerado 10 modos.

Apartado 1

En primer lugar demostraremos que tomando las relaciones (2) y (3) podemos llegar a la expresión (4) que usaremos más adelante en la sección . La expresión (2) no es más que la distribución de probabilidad de Rayleigh y (3) es la forma general de realización de una variable aleatoria.

$$P\left(|\delta_{\vec{k}_i}|\right) = 2 \cdot e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{P(\vec{k})}} \cdot \frac{|\delta_{\vec{k}}|}{P(\vec{k})} \qquad (2)$$

$$\omega_i = \int_{x_i}^{\infty} P(\vec{x})\ dx \qquad (3)$$

$$|\delta_{\vec{k}}|^2 = -P(\vec{k})\ ln(\omega_i) \qquad (4)$$

De aquí podemos tomar la expresión (3) e integrar tomando como variable de integración $|\delta_{\vec{k}}|$.

$$\int_{|\delta_{\vec{k}_i}|}^{\infty} P\left(|\delta_{\vec{k}}|\right) d|\delta_{\vec{k}}| = \int_{|\delta_{\vec{k}_i}|}^{\infty} 2 \cdot e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{P(\vec{k})}} \cdot \frac{|\delta_{\vec{k}}|}{P(\vec{k})}\ d|\delta_{\vec{k}}| =$$

$$= \frac{2}{P(\vec{k})} \int_{|\delta_{\vec{k}_i}|}^{\infty} e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{P(\vec{k})}} |\delta_{\vec{k}}|\ d|\delta_{\vec{k}}|$$

Llegados a este punto nos damos cuenta de que nuestra integral es el tipo euler, así que podemos tabularla. Este es el resultado genérico de la integral:

$$\frac{2}{a} \int_{b}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{a}} \cdot x \cdot dx = e^{-\frac{b^2}{a}}$$

Por tanto nuestra integral quedará de la forma:

$$\omega_i = e^{-\frac{|\delta_{\vec{k}}|^2}{P(\vec{k})}}$$

De donde podemos despejar finalmente (4):

$$|\delta_{\vec{k}}|^2 = -P(\vec{k})\ ln(\omega_i)$$

Ahora que tenemos la relación demostrada, haremos 10^3 realizaciones de $|\delta_{\vec{k}}|$. Para ello usando `Python`[1] tomaremos 10^3 valores aleatorios de ω_i entre 0 y 1. Con estos valores, siguiendo la expresión (4) calcularemos los valores de $|\delta_k|$ correspondientes a estas realizaciones y haremos un histograma (ver Figura 1).

Además del histograma hemos representado la distribución de Rayleigh siguiendo la expresión (2). Como podemos ver, nuestras realizaciones se ajustan a la distribución de probabilidad indicada con bastante rigor. De hecho prácticamente todas las barras del histograma tienen una barra de error que entra dentro de la curva de la distribución.

Para comprobar como el histograma se ajusta mejor a la distribución parwa un mayr número de realizaciones hemos hecho la misma figura pero con 10^5 realizaciones (ver Figura 2). Como podemos ver para este caso las barras de error disminuyen, al tener un número de realizaciones por barra del histograma mucho mayor. Además las barras del histograma se ajustan casi a la perfección con la distribución de probabilidad, confirmando su valía teórica.

[1]Todos los cálculos y figuras realizados en el trabajo se han hecho mediante `Python3`. Los scripts utilizados se encuentran en: www.github.com/andygarciaserra/ege-ent1.

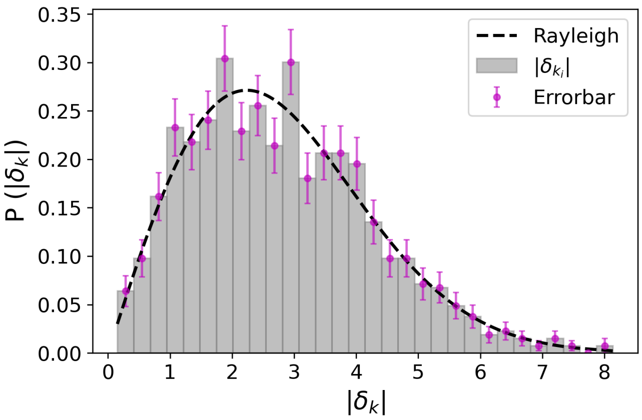

Figure 1: Histograma de 10^3 realzaciones de $|\delta_k|$. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

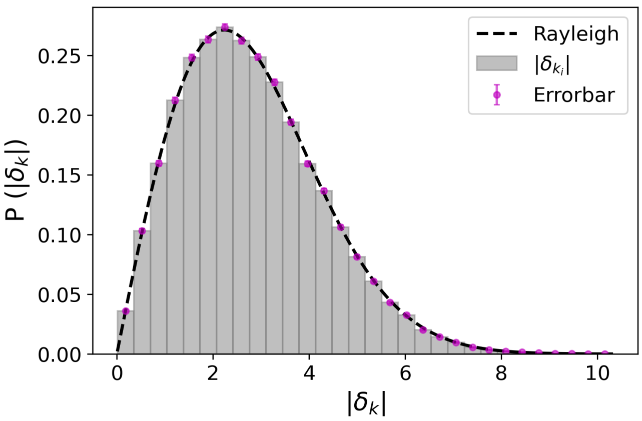

Figure 2: Histograma de 10^5 realzaciones de $|\delta_k|$. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de realizaciones en ese bin del histograma.

Apartado 2

Pera este apartado haremos una realización de $\delta(x)$ tomando los 100 valores posibles de δ_k. Escogemos 10^3 valores a al azar en el intervalo $x_i = \omega_i \cdot 100$ Mpc. Después evaluamos estos puntos y hacemos un histograma, comparándolo con una distribución gausiana.

Para la expresión de δ(x) utilizaremos (1), proporcionada en el enunciado. Aplicando lo siguiente:

$$\delta_{k_i} = |\delta_{k_i}| \cdot e^{i\theta_i} = \sqrt{-P(k) \cdot ln(\omega_i)} \cdot e^{i\theta_i} \tag{5}$$

El histograma que representa nuestros 10^3 puntos aleatorios dentro del volumen se encuentra en la figure 3. Podemos ver como el histograma se ajusta a la distribución gausiana como era esperado.

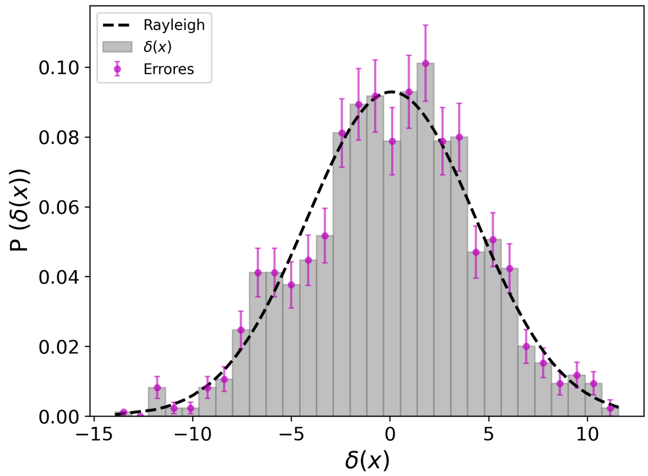

Figure 3: Histograma de una realización de δ(x) para 10^3 valores arbitrarios dentro del volumen de 100Mpc. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

Ahora calculamos el promedio $\langle\delta^2\rangle$ de los valores obtenidos de las realizaciones de x_i. Podemos compararlo con el calor teórico de esta medida, el cual viene representado en la ecuación (6), esta expresión se muestra en el enunciado del ejercicio y corresponde con la ecuación (3) del mismo.

$$\langle\delta^2\rangle = \frac{1}{V} \sum_{m,n,l} |\delta_{\vec{k}_{m,n,l}}|^2 \tag{6}$$

Los valores obtenidos del valor medio de delta cuadrado son:

$$\langle\delta^2\rangle_{\text{realización}} = 19.27$$

$$\langle\delta^2\rangle_{\text{teórico}} = 19.80$$

Como podemos ver ambos valores se aproximan. Tal y como hemos hecho en el apartado anterior () podemos realizar esta misma realización para 10^5 valores aleatorios de x_i y comprobar si en efecto el histograma se ajusta más todavía a la distribución gausiana. A su vez, estos valores teóricos y de la realización de $\langle\delta^2\rangle$ se asemejarían más entre ellos.

Esto es lo que hemos hecho en la Figura 4. Claramente podemos ver como para este caso el histograma de valores se ajusta mejor a la distribución gausiana teórica, además, los valores de $\langle\delta^2\rangle$ presentados son casi idénticos.

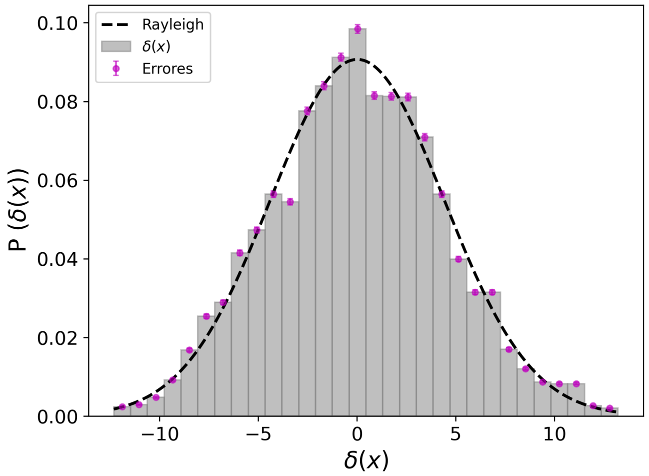

Figure 4: Histograma de una realización de δ(x) para 10^5 valores arbitrarios dentro del volumen de 100Mpc. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

$$\langle\delta^2\rangle_{\text{realización}} = 21.70$$

$$\langle\delta^2\rangle_{\text{teórico}} = 21.69$$

Apartado 3

Ahora haremos 10^3 realizaciones utilizando únicamente dos modos m=1,2 del campo del enunciado (1). El histograma de estas realizaciones puede verse en la Figura 5 y es equivalente a hacer una única realización en un punto cualquiera x_i del volumen.

Además, se ajusta correctamente a la distribución gausiana. Probemos ahora a hacer 10^3 realizaciones, de nuevo m=1,2 , a un conjunto de 10^3 valores de x_i. El histograma de este nuevo caso se presenta en la Figura 6.

Como podemos ver este histograma no se ajusta a una distribución gausiana. Esta es la razón por la que el campo presentado en el enunciado (1) para dos modos **no es un campo ergódico**, puesto que el histograma de 10^3 realizaciones para un único valor de x_i se ajusta a una distribución gausiana pero para 10^3 vcalores distintos de x_i no lo hace.

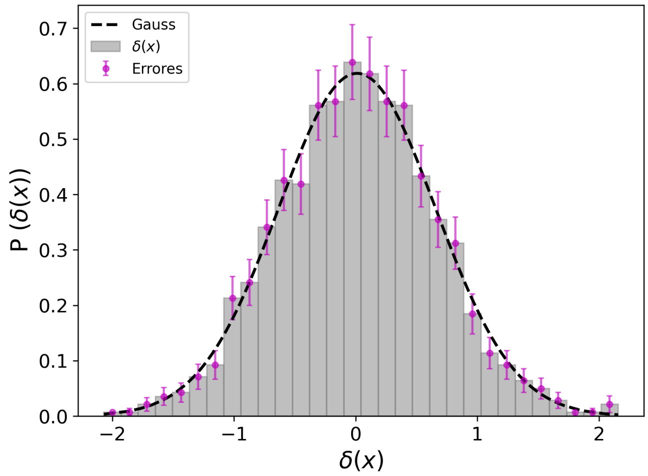

Figure 5: Histograma de 10^3 realizaciones de δ(x) para un punto fijo x_i dentro del volumen de 100Mpc. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

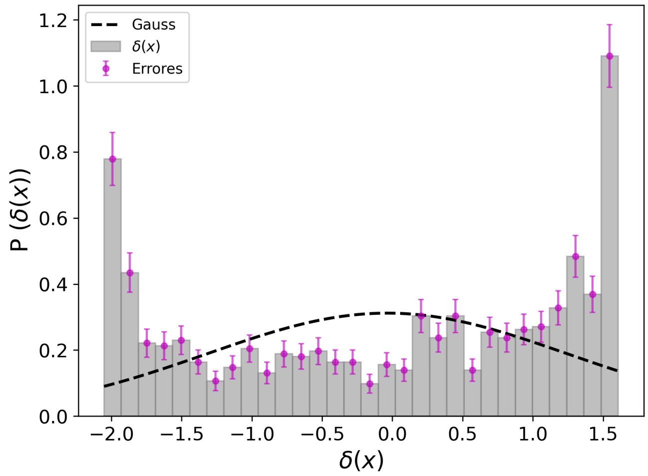

Figure 6: Histograma de 10^3 realizaciones de δ(x) para 10^3 valores de x_i dentro del volumen de 100Mpc. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

Apartado 4

Para este apartado vamos a probar a utilizar, en vez de la relación (4) de Rayleigh, un valor fijo:

$$|\delta_k|^2 = P(k)$$

Para este caso tenemos que comprobar que el campo deja de ser gausiano. El histograma en este caso se representa en la Figura 7.

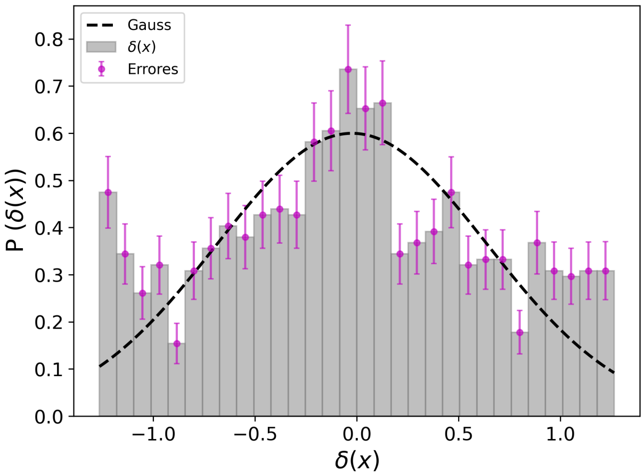

Figure 7: Histograma de 10^3 realizaciones de δ(x) para un valor fijo de $|\delta_k| = P(k)^{1/2}$. En magenta se representan las barras de error para cada bin de valores, calculadas simplemente como el error de Poisson: $\frac{P(|\delta_{\vec{k}}|)}{n^{1/2}}$, siendo n el valor de cuentas para ese bin del histograma.

En efecto, al tener ahora un campo uniforme la distribución deja de ser gausiana, aunque tiene una tendendia al valor central.

Apartado 5

Como está explicado en el enunciado, en este apartado estimaremos el error de muestreo debido a cálculos de gran escala usando volúmenes finitos. Para esto se usará la expresión (6) pero modificada:

$$\langle\delta^2\rangle = \frac{1}{L}\sum_{n=-N}^{N}|\delta_{\vec{k}_n}|^2 = \langle\delta^2\rangle = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{N}|\delta_{\vec{k}_n}|^2 \qquad (7)$$

Siendo la desviación típica de esta última cantidad:

$$\sigma(\langle\delta^2\rangle) = \left(var(\langle\delta^2\rangle)\right)^{1/2} = \left(\langle\langle\delta^2\rangle^2\rangle_{\text{real}} - \langle\langle\delta^2\rangle\rangle_{\text{real}}{}^2\right)^{1/2} \qquad (8)$$

Podemos calcular cual sería la media de delta cuadrado para Rayleigh así como la desviación típica:

$$\langle\langle\delta^2\rangle\rangle_{\text{real}} = 20.29 \qquad \sigma\left(\langle\langle\delta^2\rangle\rangle_{\text{real}}\right) = 2.12$$

Para el caso mencionado en el anterior apartado tendremos una delta uniforme con la forma $|\delta_k|^2 = P(k)$, por lo que esperamos que el valor medio de delta cuadrado tenga desviación estándar nula y sea el valor de la propia delta sumada tantas veces como el número de modos elegido (100 en nuestro caso) con el factor 2/100 que está presente al inicio de la expresión (7):

$$\langle\langle\delta^2\rangle\rangle_{\text{real}} = 20.00 \qquad \sigma\left(\langle\langle\delta^2\rangle\rangle_{\text{real}}\right) = 0.00$$

Ahora podemos calcular la expresión (8) para el caso de Rayleigh:

$$\sigma(\langle\delta^2\rangle) = 2.12$$